

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

MARCOS RANIERI DA SILVA

O Teorema da Massa Positiva e a
Desigualdade de Penrose para gráficos

MACEIÓ

2013

MARCOS RANIERI DA SILVA

**O Teorema da Massa Positiva e a
Desigualdade de Penrose para gráficos**

Dissertação de Mestrado, na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 25 de Março de 2013 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para a obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitória

MACEIÓ

2013

Catlogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Fabiana Camargo dos Santos

S586t Silva, Marcos Ranieri da.
O teorema da massa positiva e a desigualdade de Penrose para gráficos /
Marcos Ranieri da Silva. – 2013.
34 f.

Orientador: Feliciano Marcílio Aguiar Vitória.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas.
Instituto de Matemática. Maceió, 2013.

Bibliografia: f. 34.

1. Massa positiva – Teorema. 2. Desigualdade de Penrose. 3. Desigualdade
de Aleksandrov-Fenchel. I. Título.

CDU: 514

AGRADECIMENTOS

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

Ao Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitória, pela apresentação do problema e excelente orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva e Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos colegas da turma de mestrado Abraão Mendes, Allan George, Ana Paula, Felipe Leandro, Max Manoel e Rodrigo Cunha pela amizade e momentos de descontração, e em especial a Abraão Mendes por ter me esclarecido algumas dúvidas sobre o trabalho próximo a data de defesa.

À Livia Santiago pela revisão do texto e principalmente pelo amor e parceria nos últimos anos.

RESUMO

Neste trabalho trataremos de variedades Riemannianas completas, assintoticamente planas, que são gráficos suaves sobre \mathbb{R}^n . Apresentamos uma prova elegante e direta para o Teorema da Massa Positiva, expressando sua curvatura escalar como um campo divergente, mostraremos que a massa ADM da variedade pode ser expressa como uma integral sobre a variedade do produto da curvatura escalar e uma função potencial não-negativa. Como aplicação, provaremos também a desigualdade de Penrose dando um limite inferior para a integral sobre o bordo usando a desigualdade de Aleksandrov-Fenchel.

Palavras-chave: Teorema da Massa Positiva. Desigualdade de Penrose. Desigualdade de Aleksandrov-Fenchel.

ABSTRACT

In this paper we will work with complete Riemannian manifolds, asymptotically flat, that are smooth graphics over \mathbb{R}^n . We present an elegant and direct proof for the Positive Mass Theorem. Expressing its scalar curvature as a divergent field, we will show that the ADM mass of the manifold can be expressed as an integral over the manifold of the product of scalar curvature and a nonnegative potential function. As an application, we will prove also the Penrose inequality giving a lower bound for the boundary integral using the Aleksandrov-Fenchel inequality.

Keywords: Positive Mass Theorem. Penrose Inequality. Aleksandrov-Fenchel Inequality.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Visualização da variedade tridimensional de Schwarzschild	14
Figura 2 – Visualização de um gráfico sobre o espaço euclidiano	17
Figura 3 – Visualização de um gráfico sobre $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$	25

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	PRELIMINARES	12
2.1	Variedades assintoticamente planas e a massa ADM	12
2.2	Exemplos de variedades assintoticamente planas	13
3	GRÁFICOS SOBRE O ESPAÇO EUCLIDIANO	17
3.1	A geometria dos gráficos	17
3.2	Variedade de Schwarzschild como um gráfico	21
4	RESULTADOS PRINCIPAIS	22
4.1	O Teorema da Massa Positiva	22
4.2	A Desigualdade de Penrose	24
	REFERÊNCIAS	30
	APÊNDICE	32

1 INTRODUÇÃO

A formulação de Newton da gravitação foi, e continua sendo, uma teoria bem sucedida em física, devido a sua habilidade para determinar a força exercida por um corpo em outro através da elegante equação $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$. Apesar do sucesso desta fórmula, surge uma questão que não foi resolvida por Newton e ficou bastante tempo sem uma resposta satisfatória: Como é transferida a força de gravidade de um objeto para outro? A teoria da relatividade geral, formulada por Einstein em 1915, respondeu esta questão. A solução vem de uma equação de campos que é quase tão elegante quanto a equação de Newton. A hipótese básica é que o espaço-tempo (N^4, g) é uma variedade Lorentziana de dimensão 4, sendo uma dimensão para o tempo e três para o espaço, mais detalhes sobre geometria Lorentziana e a teoria da relatividade geral, recomendamos O’neill (1983) para mais detalhes. Se denotarmos por Ric o tensor curvatura de Ricci e R a curvatura escalar de g então (N^4, g) satisfaz a famosa *equação de Einstein*,

$$Ric - \frac{1}{2}R \cdot g = 8\pi T,$$

onde T é o chamado tensor *momentum-energia* do espaço-tempo, o qual descreve a densidade, momento e energia presente em cada ponto do espaço-tempo. Esta equação mostra explicitamente que a gravidade é obtida da geometria do espaço-tempo. Em particular, a presença de massa influencia diretamente a geometria do espaço-tempo tornando-o curvo. Podemos fazer uma analogia com uma folha infinita de borracha, a qual se distorce quando uma bola de boliche é colocada sobre ela. Nessa analogia a folha representa o ambiente do espaço-tempo e a bola de boliche representa um objeto massivo. Se uma bola de golf é colocada na vizinhança da bola de boliche, a bola de golf tende a gravitar ao redor da bola de boliche devido a curvatura da folha de borracha. Isto é, a gravitação é um efeito da geometria do espaço-tempo e esta é influenciada diretamente na presença de um objeto massivo.

A teoria da relatividade geral, também tem alguns pontos delicados, um deles é definir a noção de *energia*, pois no espaço-tempo *vácuo* ela pode ser não-trivial, veja O’neill (1983). Uma hipótese física razoável é adotar que sobre tais circunstâncias a massa do universo está contida inteiramente em um domínio compacto. Isto implica que os efeitos da gravidade tendem a decair próximo do infinito e assim a geometria do espaço-tempo torna-se mais plana (ou seja, a métrica é assintoticamente plana). Na teoria de relatividade geral, a curvatura escalar da métrica $R(g)$ representa uma densidade de energia. Inspirados por argumentos variacionais, os físicos Arnowitt, Deser, and Misner (1961) propuseram a seguinte definição para a massa, conhecida como a massa ADM

$$m_{ADM} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi} \int_{S_r} \sum_{i,j} (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \nu_j dS_r. \quad (1)$$

Sob certas hipóteses do comportamento assintótico da métrica, Bartnik (1986) mostrou que este limite existe e, além disso, é um invariante geométrico. A fim de que essa definição de massa seja conveniente, mostramos que se o espaço-tempo contém densidade de energia não-negativa, ou seja, se a curvatura escalar é não-negativa, então a massa do espaço-tempo deve ser também não-negativa. De fato, isto é exatamente o que diz o Teorema da Massa Positiva. Schoen and Yau (1981) demonstraram-o através de um argumento usando técnicas variacionais e a teoria de superfícies mínimas. A prova do Teorema da Massa Positiva foi objeto de estudo (e continua sendo) de matemáticos e físicos modernos e teve bastante influência no desenvolvimento da geometria atual.

Várias extensões e aplicações do Teorema da Massa Positiva foram obtidas desde a publicação da prova de Schoen e Yau. Witten (1981) conseguiu uma simples prova do Teorema da Massa Positiva em dimensão três usando *spinors*, enquanto Bartnik (1986) estendeu este resultado para variedades *spin* de dimensão arbitrária. Miao (2002) provou o Teorema da massa positiva para o caso onde a métrica torna-se C^1 através de uma hipersuperfície. Enquanto Wang *et al.* (2001) consideraram variedades assintoticamente hiperbólicas e mostraram a positividade de um invariante que pode ser interpretado como a massa total do espaço-tempo. Lam (2010) obteve uma prova elegante e direta para variedades do tipo gráficos, a qual é objeto de estudo neste trabalho. O Teorema da Massa Positiva também tem sido muito usado para estabelecer outros resultados paralelos em geometria. Por exemplo, Schoen *et al.* (1984) usou o Teorema da Massa Positiva extensivamente no seu trabalho completando a prova do problema de Yamabe. Recentemente, Bray *et al.* (2001) usaram o Teorema da Massa Positiva para provar a Desigualdade Riemanniana de Penrose. Essa afirma que uma variedade Riemanniana (M^3, g) com curvatura escalar não-negativa, massa m e $|\Sigma|$ denotando a área da superfície mínima exterior, satisfaz a seguinte desigualdade:

$$m \geq \sqrt{\frac{|\Sigma|}{16\pi}},$$

valendo a igualdade se, e somente se, (M^3, g) é isométrica ao fim exterior da variedade de Schwarzschild.

Neste trabalho apresentamos a elegante solução de Lam (2010) do Teorema da Massa Positiva Riemanniana para variedades do tipo gráficos em dimensão arbitrária bem como uma demonstração da desigualdade Riemanniana de Penrose neste caso.

2 PRELIMINARES

O objetivo deste trabalho é provar o Teorema da Massa Positiva para gráficos sobre o espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Para este fim, definiremos precisamente o nosso objeto de estudo: variedades assintoticamente planas e a massa ADM.

2.1 Variedades assintoticamente planas e a massa ADM

Neste capítulo estudamos a massa total (massa ADM) de uma variedade assintoticamente plana que é um gráfico sobre o espaço euclidiano. Heuristicamente falando, uma variedade Riemanniana n -dimensional (M^n, g) é dita assintoticamente plana se fora de um conjunto compacto $K \subset M^n$, M^n é difeomorfa ao complementar da bola unitária fechada $\bar{B} \subset \mathbb{R}^n$ e que sua métrica g decai suficientemente rápido para a métrica euclidiana plana no infinito. Mais precisamente, conforme Schoen (1989), temos:

Definição 2.1 *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é dita assintoticamente plana se ela satisfaz as seguintes condições:*

1. *existe um conjunto compacto $K \subset M^n$ e um difeomorfismo $\Phi : E = M^n \setminus K \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}$. Em particular, $E = M^n \setminus K$ é um conjunto conexo.*
2. *a métrica $g = g_{ij}(x)dx^i dx^j$ na carta coordenada (x^1, x^2, \dots, x^n) em E definida por Φ , satisfaz as seguintes propriedades:*

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + O(|x|^{-p}) \quad (2)$$

$$|x||g_{ij,k}(x)| + |x|^2 g_{ij,kl}(x) = O(|x|^{-p}) \quad (3)$$

$$|R(x)| = O(|x|^{-q}), \quad (4)$$

para todo $i, j, k, l = 1, 2, \dots, n$. Onde $g_{ij,k} = \partial_k g_{ij}$ e $g_{ij,kl} = \partial_k \partial_l g_{ij}$ são as derivadas coordenadas da ij -componente da métrica, $q > n$ e $p > (n-2)/2$ são constantes e $R(x)$ é a curvatura escalar de g no ponto x .

O conjunto $E = M^n \setminus K$ é chamado o **fim** da variedade assintoticamente plana. Analogamente, dizemos que (M^n, g) tem um número finito l de fins, se $M^n \setminus K$ é a união disjunta de componentes conexas (fins) N_1, \dots, N_k , onde cada N_i é difeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}$, e em cada fim N_i e difeomorfismo $\Phi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{B}$, a métrica g definida na carta coordenada dada por Φ_i satisfaz as condições acima. A menos de menção contrária, trataremos apenas de variedades assintoticamente planas com um único fim. Para uma variedade assintoticamente plana definimos sua massa ADM da seguinte forma:

Definição 2.2 A *massa ADM* de uma variedade completa assintoticamente plana (M^n, g) é definida por

$$m_{ADM} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{S_r} \sum_{i,j}^n (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \nu_j dS_r, \quad (5)$$

onde ω_{n-1} é o volume da esfera unitária de dimensão $n-1$, S_r é a esfera de raio r , ν é o vetor normal exterior a S_r e dS_r é o elemento de área de S_r na carta coordenada.

Os físicos Arnowitt, Deser, and Misner (1961) foram os primeiros a propor esta definição em $n = 3$ para descrever a massa total em um sistema gravitacional isolado. Generalizamos suas definições de massa ADM para qualquer dimensão $n \geq 3$ escolhendo a constante correta em frente a integral. Destacamos também que a massa ADM independe da escolha das coordenadas assintoticamente planas (Bartnik, 1986). Frequentemente escrevemos $m_{ADM}(M^n, g) = m_{ADM} = m$ se a variedade e sua métrica correspondente, estiverem bem entendidas. Ademais, utilizamos no trabalho a convenção do somatório de Einstein para somar sobre índices repetidos. Em particular, escrevemos

$$m = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{S_r} (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \nu_j dS_r. \quad (6)$$

2.2 Exemplos de variedades assintoticamente planas

1. **(O espaço euclidiano.)** O exemplo mais simples de variedade assintoticamente plana é o espaço euclidiano \mathbb{R}^n com a métrica canônica $g = \delta$. Como $\delta_{ij,k} = 0$ para todo i, j e k , sua massa ADM $m_{ADM} = 0$. Veremos no capítulo 4 que o espaço euclidiano é precisamente o caso rígido do Teorema da Massa Positiva.
2. **(Métricas conformes.)** Seja (M^n, g) , com $n \geq 3$, uma variedade assintoticamente plana, então conseguimos construir uma classe de variedades assintoticamente planas em M^n usando uma mudança conforme de métricas. Dizemos que uma métrica \bar{g} é conforme a métrica g se

$$\bar{g} = u(x)^{\frac{4}{n-2}} g, \quad (7)$$

para alguma $u(x) \in C^\infty(M^n)$ positiva. Note que a escolha do expoente é conveniente uma vez que ela simplifica a transformação da curvatura escalar. De fato, se $R(g)$ e $R(\bar{g})$ são as curvaturas escalares de g e \bar{g} respectivamente. Então através de um cálculo direto obtemos

$$R(\bar{g}) = u^{-\frac{n+2}{n-2}} \left(-\frac{4(n-1)}{(n-2)} \Delta_g u + R(g)u \right). \quad (8)$$

Se (M^n, g) é assintoticamente plana, então (M^n, \bar{g}) também será uma variedade assintoticamente plana quando $u(x)$ satisfizer condições adequadas de decaimento. Por exemplo, (M^n, \bar{g}) será assintoticamente plana, de acordo a definição 2.1, quando

$$u(x) \rightarrow 1 \text{ quando } x \rightarrow \infty \quad (9)$$

$$u_i = O(|x|^{-p-1}) \quad (10)$$

$$u_{jk} = O(|x|^{-p-2}) \quad (11)$$

$$\Delta_g u = O(|x|^{-q}) \quad (12)$$

para alguma constante $p > \frac{1}{2}$ e $q > 3$.

3. (**Variedade de Schwarzschild**). Como um caso particular do exemplo 2, seja $(M^3, g) = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, u^4 \delta)$ com

$$u(x) = 1 + \frac{m}{2|x|} = 1 + \frac{m}{2r},$$

onde m é uma constante positiva e $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, é a distância euclidiana do ponto (x, y, z) à origem. Então a variedade resultante,

$$(M^3, g) = \left(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \delta \right), \quad (13)$$

é uma variedade assintoticamente plana. Ela é chamada a *variedade de Schwarzschild* tridimensional. Mostraremos no capítulo 3 que ela pode ser isometricamente mergulhada em uma parábola de rotação no \mathbb{R}^4 .

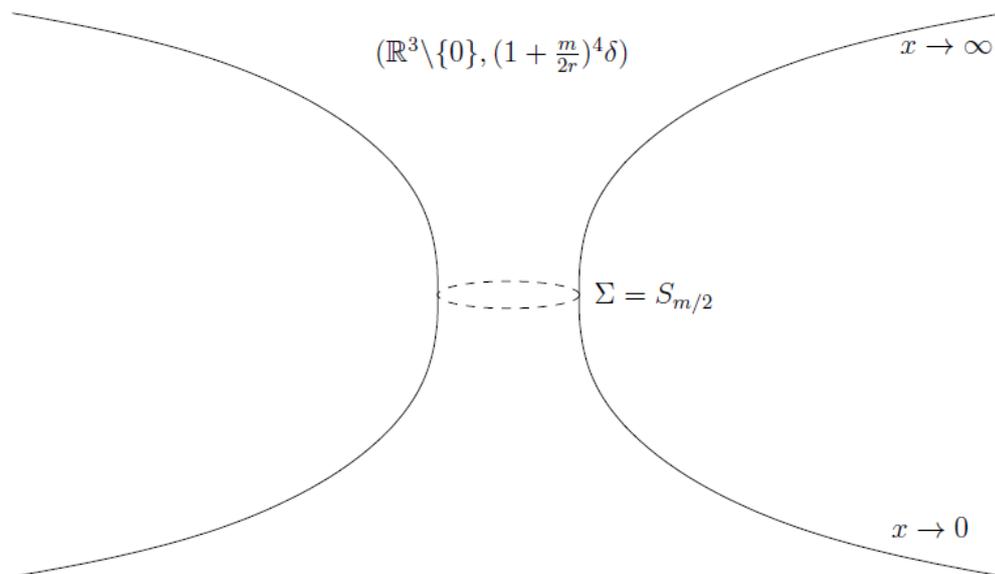


Figura 1: Visualização da variedade tridimensional de Schwarzschild
Fonte: Lam (2010).

Desde que $R = 0$ para a métrica euclidiana e $\Delta u = 0$, a equação (8) implica que a variedade de Schwarzschild tem curvatura escalar identicamente nula. Além disso, a esfera $S_{m/2} = \{x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; |x| = m/2\}$ é uma superfície mínima em (M^3, g) . Mais geralmente, a curvatura média H de um esfera em (M^3, g) pode ser encontrada por

$$H = \frac{1}{u^2} \left(\frac{2}{r} + \frac{4}{u} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (14)$$

Com efeito, o vetor normal unitário à esfera $S_{m/2}$ em relação a métrica g é dado por

$$N(x) = \frac{x}{|x|_g} = \frac{x}{u^2(x)|x|} = \frac{x_i}{u^2(x)r} \partial_i, \quad (15)$$

pois $|x|_g^2 = u(x)^4 |x|^2$. Desde que a curvatura média H de uma hipersuperfície é dada pelo divergente do campo normal unitário ao longo da hipersuperfície (recomendamos do Carmo (1988) para maiores informações sobre a curvatura média e o divergente de um campo vetorial), se denotarmos por $\det g = \det(g_{ij})$, obtemos que a curvatura média H de uma esfera em (M^3, g) é dado por:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{u^2 r} \sqrt{\det g} \right) \\ &= \frac{1}{u^6} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{r} u^4 \right) \\ &= \frac{1}{u^6} \left[u^4 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{r} \right) + \frac{x_i}{r} \frac{\partial}{\partial x_i} (u^4) \right] \\ &= \frac{1}{u^6} \left[u^4 \left(\frac{r - \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \right) x_i}{r^2} \right) + \frac{x_i}{r} \frac{x_i}{r} \frac{\partial}{\partial r} (u^4) \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[u^4 \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right) + \frac{x_i^2}{r^2} 4u^3 \frac{\partial u}{\partial r} \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[u^4 \left(\frac{3}{r} - \frac{r^2}{r^3} \right) + 4u^3 \frac{\partial u}{\partial r} \right] \\ &= \frac{1}{u^2} \left(\frac{2}{r} + \frac{4}{u} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

onde usamos que

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \quad e \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{x_i}{r} \frac{\partial}{\partial r}. \quad (17)$$

Em particular, para $r = m/2$, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{m}{2r^2} \quad e \quad ru = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)r = m. \quad (18)$$

Substituindo na equação 16 encontramos

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{u^2} \left(\frac{2}{r} - \frac{4}{u} \frac{m}{2r^2} \right) \\
 &= \frac{1}{u^2} \left(\frac{2}{r} - \frac{2m}{r \cdot r u} \right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Pontanto, $S_{m/2} \subset (M^3, g)$ é uma hipersuperfície mínima. Por outro lado, a variedade de Schwarzschild tem dois fins, com uma reflexão simétrica em relação a esfera mínima $\Sigma = S_{m/2}$. De agora em diante nos referiremos ao fim exterior da variedade Scharzschild, dado por

$$\left(\mathbb{R}^3 \setminus B_{m/2}, \left(1 + \frac{m}{2r} \right)^4 \delta \right), \quad (19)$$

como a variedade exterior de Schwarzschild. Esta é agora uma variedade completa assintoticamente plana com um fim que tem um bordo mínimo.

Usando a definição, calculamos a massa ADM da variedade exterior de Schwarzschild $(M^3, g) = (\mathbb{R}^3 \setminus B_{m/2}, (1 + \frac{m}{2r})^4 \delta)$:

$$\begin{aligned}
 m_{ADM}(g) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi} \int_{S_r} (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \nu_j dS_r. \\
 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi} \int_{S_r} 4 \left(1 + \frac{m}{2r} \right)^3 \left(-\frac{m}{2r^2} \right) \left(\frac{x_i}{r} \delta_{ij} - \frac{x_j}{r} \right) \frac{x^j}{r} dS_r \\
 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_{S_r} \left(1 + \frac{m}{2r} \right)^3 \left(-\frac{m}{2r^2} \right) (-2) dS_r \\
 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \left(1 + \frac{m}{2r} \right)^3 \left(\frac{m}{r^2} \right) 4\pi r^2 \\
 &= m.
 \end{aligned}$$

Ou seja, a massa ADM da variedade exterior de Schwarzschild é precisamente a constante positiva m .

3 GRÁFICOS SOBRE O ESPAÇO EUCLIDIANO

Neste capítulo estudamos variedades assintoticamente planas que são gráficos suaves sobre \mathbb{R}^n e obteremos uma fórmula que expressa a curvatura escalar de tais variedades como o divergente de um campo de vetores. Em seguida, mostramos uma expressão para a métrica de um gráfico no espaço euclidiano de forma intrínseca. Finalmente discutimos o fato que a variedade de Schwarzschild pode ser isometricamente mergulhada no \mathbb{R}^4 como uma parábola rotacional, e que seu fim exterior pode ser expresso como um gráfico de uma função suave.

3.1 A geometria dos gráficos

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, é fácil ver que o gráfico de f , o conjunto $G(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$, é uma hipersuperfície em \mathbb{R}^{n+1} . Um fato muito importante, é que podemos expressar a sua curvatura escalar como o divergente euclidiano de um campo vetorial. Note que a demonstração aqui é mais direta que a original utilizada por Lam (2010), onde a curvatura escalar é calculada de maneira intrínseca, incluímos tal demonstração no Apêndice A.

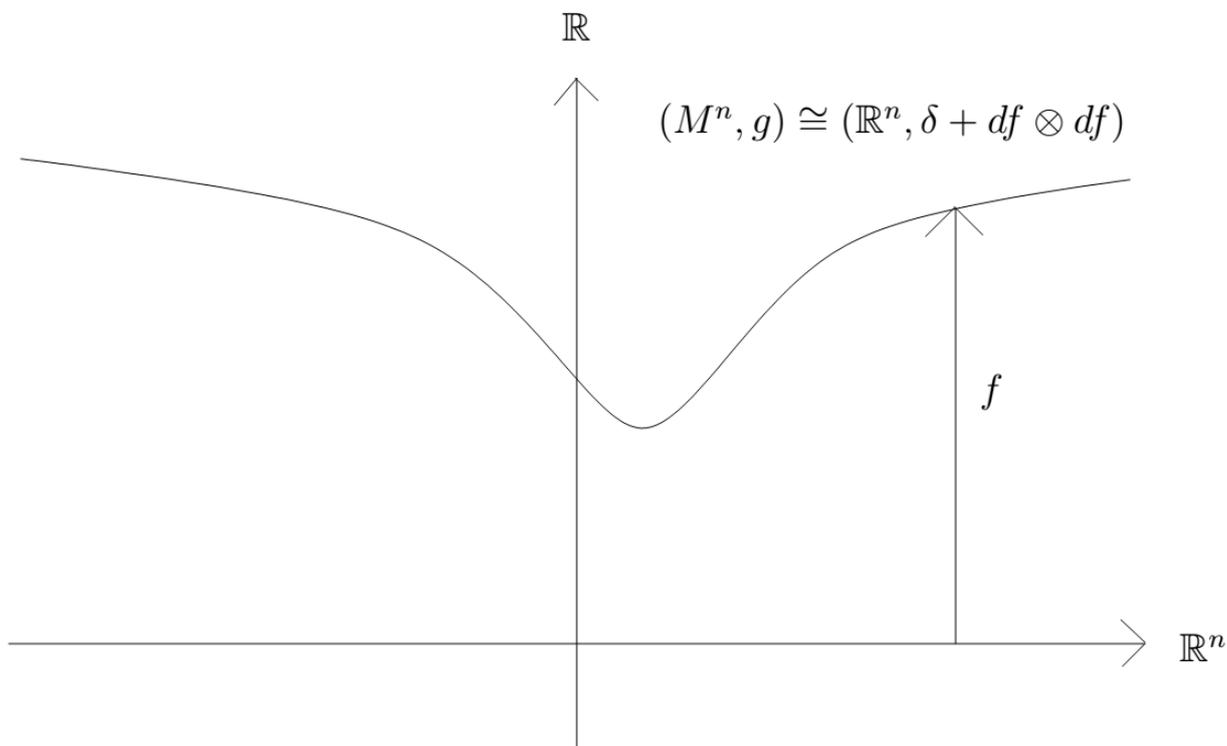


Figura 2: Visualização de um gráfico sobre o espaço euclidiano
Fonte: Lam (2010).

Proposição 3.1 *Seja (M^n, g) o gráfico de uma função suave $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Então a curvatura escalar de (M^n, g) pode ser expressa por*

$$R = \operatorname{div} \left(\frac{(f_{ii}f_j - f_{ij}f_i)}{1 + |\nabla f|^2} \partial_j \right), \quad (20)$$

onde a norma de ∇f é tomado em relação a métrica canônica do \mathbb{R}^n .

Demonstração 3.1 *De fato, pela equação de Gauss (ver do Carmo (1988)) e usando o fato de que o tensor de Riemann do espaço ambiente ser identicamente nulo, temos que*

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle - \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle, \quad (21)$$

para vetores tangentes a M^n , onde α é a segunda forma do gráfico. Aplicando a equação acima em um referencial ortonormal e_1, \dots, e_n de M^n , temos

$$\langle R(e_i, e_j)e_i, e_j \rangle = \langle \alpha(e_i, e_i), \alpha(e_j, e_j) \rangle - \langle \alpha(e_i, e_j), \alpha(e_i, e_j) \rangle. \quad (22)$$

Logo, somando nos índices i e j , obtemos que a curvatura escalar do gráfico será

$$R = \sum_{i,j}^n (A_i^i A_j^j - A_i^j A_j^i), \quad (23)$$

onde $A = (A_j^i)$ é o operador forma do gráfico. Mas $A_i^j = \langle A\partial_i, \partial_j \rangle = -\langle dN(\partial_i), \partial_j \rangle$. Como o campo normal unitário (apontando para cima) ao longo do gráfico é:

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} (-\nabla f, 1). \quad (24)$$

Obtemos

$$A_j^i = \partial_j \left(\frac{f_i}{w} \right) = \left(\frac{f_i}{w} \right)_j, \quad \text{onde } w = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}. \quad (25)$$

Mas

$$A_i^i A_j^j = \left(\frac{f_i}{w} \right)_i \left(\frac{f_j}{w} \right)_j = \partial_j \left[\left(\frac{f_i}{w} \right)_i \frac{f_j}{w} \right] - \frac{f_j}{w} \left(\frac{f_i}{w} \right)_{ij}. \quad (26)$$

Analogamente,

$$A_i^j A_j^i = \partial_i \left[\left(\frac{f_i}{w} \right)_j \frac{f_j}{w} \right] - \frac{f_j}{w} \left(\frac{f_i}{w} \right)_{ij}. \quad (27)$$

Portanto, substituindo essas expressões na equação (23) temos

$$\begin{aligned}
R &= \sum_{ij} \partial_j \left[\left(\frac{f_i}{w} \right)_i \frac{f_j}{w} \right] - \frac{f_j}{w} \left(\frac{f_i}{w} \right)_{ij} - \left\{ \partial_i \left[\left(\frac{f_i}{w} \right)_j \frac{f_j}{w} \right] - \frac{f_j}{w} \left(\frac{f_i}{w} \right)_{ij} \right\} \\
&= \sum_j \partial_j \sum_i \left[\left(\frac{f_i}{w} \right)_i \frac{f_j}{w} - \left(\frac{f_j}{w} \right)_i \frac{f_i}{w} \right] \\
&= \sum_j \partial_j \sum_i \left(\frac{f_{ii} f_j - f_{ij} f_i}{w^2} \right). \tag{28}
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

O gráfico de uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é claramente difeomorfo ao \mathbb{R}^n , a proposição a seguir mostra que sua métrica é dada por $g = \delta_{ij} + f_i f_j$.

Proposição 3.2 *Considere $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e*

$$M^n = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$$

o gráfico de f . Se M^n está munida com a métrica g induzida da métrica plana do \mathbb{R}^{n+1} então (M^n, g) é isométrico a $(\mathbb{R}^n, \delta + df \otimes df)$, onde δ é a métrica plana do \mathbb{R}^n .

Demonstração 3.2 *Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ um ponto em \mathbb{R}^n e $(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Mostremos que a aplicação*

$$F : (\mathbb{R}^n, \delta + df \otimes df) \rightarrow (M^n, g) \tag{29}$$

$$x \mapsto (x, f(x)) \tag{30}$$

*é uma isometria. Como f é suave por hipótese, F é claramente uma função suave. Além disso, F é um difeomorfismo cuja inversa é a projeção canônica sobre \mathbb{R}^n , $\pi : (M^n, g) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \delta + df \otimes df)$ definida por $\pi(x, f(x)) = x$. Vamos verificar agora que o difeomorfismo F é uma isometria, ou seja, $F^*g = \delta + df \otimes df$. Por definição do pullback F^* ,*

$$(F^*g) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = g \left(F_* \frac{\partial}{\partial x^i}, F_* \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \tag{31}$$

para todo $i, j = 1, \dots, n$. Se $\phi \in C^\infty(M^n, g)$ então

$$(F_* \frac{\partial}{\partial x^i})\phi = \frac{\partial}{\partial x^i}(\phi \circ F) = \frac{\partial}{\partial x^i}(\phi(x, f(x))) \quad (32)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \right) \quad (33)$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x^{n+1}} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \right) \quad (34)$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x^{n+1}} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \delta_{ki} \right) \quad (35)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^{n+1}} \right) \phi. \quad (36)$$

Disto,

$$F_* \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} + f_i \frac{\partial}{\partial x^{n+1}}, \quad (37)$$

onde $f_i = \partial_i f$. Como g é a métrica induzida do \mathbb{R}^{n+1} , temos

$$g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_{ij} \quad \text{para } 1 \leq i, j \leq n+1 \quad (38)$$

e

$$\begin{aligned} g &= \left(F_* \frac{\partial}{\partial x^i}, F_* \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + f_i \frac{\partial}{\partial x^{n+1}}, \frac{\partial}{\partial x^j} + f_j \frac{\partial}{\partial x^{n+1}} \right) \\ &= \delta_{ij} + f_i f_j. \end{aligned} \quad (39)$$

Como queríamos demonstrar.

Observação: 3.1 Pela proposição 3.2, de agora em diante nos referiremos a

$$(M^n, g) = (\mathbb{R}^n, \delta + df \otimes df)$$

como o gráfico da função f . Mais geralmente, se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado com bordo suave $\Sigma = \partial\Omega$, então o gráfico de uma função f , definida em $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$, munido com a métrica induzida g do \mathbb{R}^{n+1} é uma variedade completa com bordo $f(\Sigma)$ e isométrica à $(\mathbb{R}^n \setminus \Omega, \delta + df \otimes df)$. Estudamos tais variedades na seção 4.2.

A definição de variedades assintoticamente planas 2.1, fica relativamente simples no caso de gráficos, sabendo que a métrica, nesse caso, é dada por $g_{ij} = \delta_{ij} + f_i f_j$. Portanto, temos a seguinte de definição de função real assintoticamente plana.

Definição 3.1 Uma função suave $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é **assintoticamente plana** quando seu gráfico é assintoticamente plano. De acordo com a definição 2.1, se denotarmos por f_i , a i -ésima derivada parcial de f , então f será assintoticamente plana quando

$$f_i(x) = O(|x|^{-p/2}) \quad (40)$$

$$|x||f_{ij}(x)| + |x|^2|f_{ijk}(x)| = O(|x|^{-p/2}), \quad (41)$$

no infinito para algum $p > (n - 2)/2$.

3.2 Variedade de Schwarzschild como um gráfico

Já mostramos que a variedade tridimensional de Schwarzschild é uma variedade assintoticamente plana, conforme ao $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ e pode ser expressa por

$$\left(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \delta \right), \quad (42)$$

onde m é uma constante positiva (vimos que m é de fato a massa ADM da variedade), $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é a distância do ponto (x, y, z) à origem em \mathbb{R}^3 e δ é a métrica canônica do espaço euclidiano. Além disso, a variedade de Schwarzschild pode ser isometricamente mergulhada em uma parábola rotacional em \mathbb{R}^4 como o conjunto dos pontos

$$D = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; r = w^2/8m + 2m\}. \quad (43)$$

Explicitamente, a inversa do mergulho isométrico acima é dado por

$$\begin{aligned} \phi : \{r = \frac{w^2}{8m} + 2m\} \subset \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \\ \phi(x, y, z, w) &= \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-2} (x, y, z). \end{aligned}$$

Note que a imagem da superfície mínima $S_{m/2} = \{x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; |x| = m/2\}$, pelo mergulho isométrico, é $S_{2m} = \{(x, y, z, 0) \in \mathbb{R}^4; \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2m\}$. A variedade exterior de Schwarzschild corresponde aos pontos tal que $w \geq 0$. Logo, resolvendo a equação (43) para w , vemos que a variedade exterior tridimensional de Schwarzschild é o gráfico de uma função esfericamente simétrica $f : \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}_{2m} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(r) = \sqrt{8m(r - 2m)}$.

4 RESULTADOS PRINCIPAIS

Neste capítulo expressamos a massa ADM de um gráfico sobre o espaço euclidiano $(M^n, g) = (R^n, \delta + df \otimes df)$ de uma função suave assintoticamente plana $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como a integral sobre a variedade do produto de sua curvatura escalar R por uma função potencial positiva, concluindo de forma fácil e direta, o Teorema da Massa Positiva.

4.1 O Teorema da Massa Positiva

Teorema 4.1 (O teorema da massa positiva para gráficos) *Seja $(M^n, g) = (\mathbb{R}^n, \delta + df \otimes df)$ o gráfico de uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ assintoticamente plana com curvatura escalar $R \geq 0$. Então a massa ADM de (M^n, g) é*

$$m = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{M^n} R \frac{1}{1 + |\nabla f|^2} dV_g, \quad (44)$$

onde ∇f denota o gradiente de f na métrica plana, $|\nabla f|$ sua norma com respeito a métrica plana e dV_g é o elemento de volume em (M^n, g) . Em particular, $R \geq 0$ implica $m \geq 0$. Além disso, temos a massa $m = 0$, se e somente se (M^n, g) é isométrico ao espaço euclidiano \mathbb{R}^n .

Demonstração 4.1 *Por definição, a massa ADM de $(M^n, g) = (\mathbb{R}^n, \delta + df \otimes df)$ é*

$$\begin{aligned} m &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{S_r} (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \nu_j dS_r \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{S_r} (f_{ii}f_j + f_{ij}f_i - 2f_{ij}f_i) \nu_j dS_r \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{S_r} (f_{ii}f_j - f_{ij}f_i) \nu_j dS_r. \end{aligned} \quad (45)$$

Usando a hipótese do gráfico ser assintoticamente plano, a função $1/(1 + |\nabla f|^2)$ tende a 1 quando $r \rightarrow \infty$. Portanto, podemos reescrever a massa como

$$m = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{S_r} \frac{1}{1 + |\nabla f|^2} (f_{ii}f_j - f_{ij}f_i) \nu_j dS_r. \quad (46)$$

Agora, aplicando o teorema da divergência na integral acima e usando a proposição 3.1, temos

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{B_r} \operatorname{div} \left(\frac{f_{ii}f_k - f_{ik}f_i}{1 + |\nabla f|^2} \right) dV_\delta \\
&= \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} \left(\frac{f_{ii}f_k - f_{ik}f_i}{1 + |\nabla f|^2} \right) dV_\delta \\
&= \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} R dV_\delta \\
&= \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{M^n} R \frac{1}{1 + |\nabla f|^2} dV_g,
\end{aligned}$$

pois

$$dV_g = \sqrt{\det g} dV_\delta = \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dV_\delta.$$

Logo se $R \geq 0$ então $m \geq 0$. Por outro lado, se (M^n, g) é isométrico ao espaço euclidiano, então R é identicamente nula e pela expressão acima a massa m também será. Como queríamos demonstrar.

Observação: 4.1 Note que a fórmula (44) não nos permite concluir o caso de rigidez, se a massa $m = 0$ então como $R \geq 0$, temos que obrigatoriamente a curvatura escalar R é identicamente nula mas não podemos concluir daqui que f é uma função linear, ou seja, que M é isométrico ao espaço euclidiano. Para uma prova do teorema de rigidez para gráficos recomendamos o artigo de Huang, Wu et al. (2013).

Uma função em \mathbb{R}^n é dita esfericamente simétrica quando temos que $f(x) = f(|x|) = f(r)$, ou seja, se $|x| = |y|$ então $f(x) = f(y)$, lembre que a variedade exterior de Schwarzschild de dimensão 3, é gráfico de uma função esfericamente simétrica. Para tais funções temos que a massa ADM sempre será não-negativa.

Proposição 4.1 Se (M^n, g) é o gráfico de uma função suave esfericamente simétrica $f = f(r)$ em \mathbb{R}^n , então a massa ADM de (M^n, g) é não-negativa (sem qualquer hipótese sobre o sinal da curvatura escalar).

Demonstração 4.2 Seja $f_r = \partial f / \partial r$ a derivada radial de f . Usando a regra da cadeia, as derivadas coordenadas de f satisfazem:

$$\begin{aligned}
f_i &= f_r \frac{x_i}{r} \\
f_{ij} &= f_{rr} \frac{x_i x_j}{r^2} + f_r \left(\frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x_i x_j}{r^3} \right).
\end{aligned}$$

Por outro lado, desde que o vetor normal unitário exterior à esfera S_r é dado por $\nu_j =$

x_j/r , temos

$$\begin{aligned} f_{ii}f_j\nu_j &= \left[f_{rr} \frac{x_i^2}{r^2} + f_r \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right) \right] f_r \frac{x_j}{r} \frac{x_j}{r} \\ &= f_{rr} f_r \frac{x_i^2 x_j^2}{r^4} + f_r^2 \left(\frac{x_j^2}{r^3} - \frac{x_i^2 x_j^2}{r^5} \right) \\ &= f_{rr} f_r, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_{ij}f_i\nu_j &= \left[f_{rr} \frac{x_i x_j}{r^2} + f_r \left(\frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x_i x_j}{r^3} \right) \right] f_r \frac{x_i}{r} \frac{x_j}{r} \\ &= f_{rr} f_r \frac{x_i^2 x_j^2}{r^4} + f_r^2 \left(\frac{\delta_{ij} x_i x_j}{r^3} - \frac{x_i^2 x_j^2}{r^5} \right) \\ &= f_{rr} f_r - \frac{2f_r^2}{r}. \end{aligned}$$

Usando este fato junto com a definição de massa ADM de (M^n, g) , temos

$$\begin{aligned} m &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{S_r} (g_{ij,i} - g_{ii,j})\nu_j dS_r \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{S_r} (f_{ii}f_j + f_{ij}f_i - 2f_{ij}f_i)\nu_j dS_r \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{S_r} (f_{ii}f_j - f_{ij}f_i)\nu_j dS_r \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{S_r} \frac{2f_r^2}{r} dS_r \geq 0. \end{aligned}$$

Uma consequência deste fato e da fórmula (44), é que não existem funções suaves assintoticamente planas e esfericamente simétricas em \mathbb{R}^n cujos gráficos tem curvatura escalar negativa em todo ponto.

4.2 A Desigualdade de Penrose

A Desigualdade de Penrose pode ser vista como um aprimoramento do Teorema da Massa Positiva. Se (M^n, g) é um gráfico de uma função assintoticamente plana com curvatura escalar não-negativa que tem bordo mínimo Σ então

$$m \geq \frac{1}{2} \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}},$$

onde $|\Sigma|$ é a área de Σ e ω_{n-1} é o volume da esfera unitária de dimensão $n-1$.

A seguir, faremos algumas considerações bem como mostraremos alguns resultados auxiliares:

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado (mas não necessariamente convexo), com bordo suave $\Sigma = \partial\Omega$. Se $f : \mathbb{R}^n \setminus \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave assintoticamente plana, então o gráfico de f (M^n, g) é uma variedade assintoticamente plana com bordo $f(\Sigma)$, suporemos também que cada componente conexa do conjunto $f(\Sigma)$ está em um conjunto de nível de f . Veja a figura abaixo:

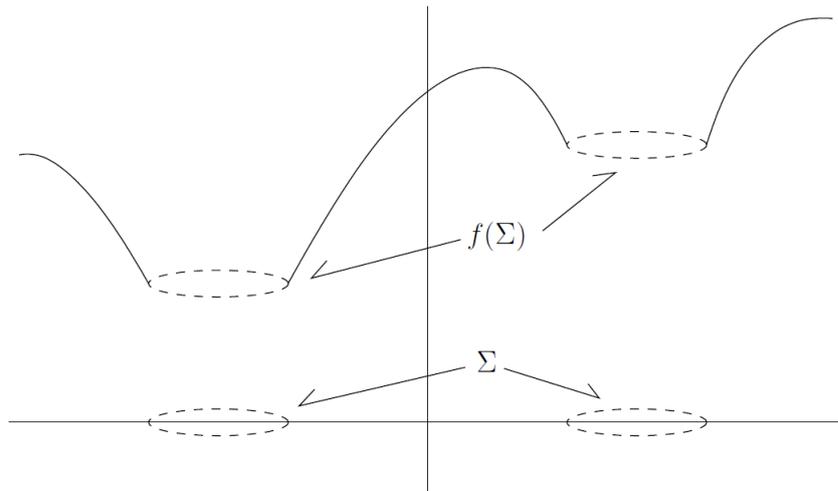


Figura 3: Visualização de um gráfico sobre $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$
Fonte: Lam (2010).

Pela proposição (3.2) e observação (3.1), nos referiremos a $(M^n, g) = (\mathbb{R}^n \setminus \Omega, \delta + df \otimes df)$ como o gráfico de f .

Denotando por H e H_0 as curvaturas médias de $f(\Sigma)$ em (M^n, g) e em \mathbb{R}^n , respectivamente, podemos relacioná-las por

$$H = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} H_0. \quad (47)$$

Note que H_0 é também a curvatura média de Σ . A equação (47) implica que se $|\nabla f(x)| \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow \Sigma$, temos $H \equiv 0$ em Σ então $f(\Sigma)$ é uma superfície mínima exterior de (M^n, g) . Graficamente, isto significa que f é *vertical* ao longo do bordo. A seguinte fórmula será útil na demonstração da desigualdade de Penrose:

Lema 4.1 *Seja $\phi : M^n \rightarrow \tilde{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Se $f : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave, então*

$$\Delta_{\tilde{M}} f = \Delta_M f - H\nu(f) + Hess f(\nu, \nu) \quad (48)$$

em cada $p \in M$, onde H é a curvatura média da imersão e ν é um campo unitário, normal a M em uma vizinhança de p .

Demonstração 4.3 Denote por ∇ e $\tilde{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de M e \tilde{M} respectivamente, e por α a segunda forma fundamental de ϕ . Se $e_1, \dots, e_n, e_{n+1} = \nu$ é um referencial em uma vizinhança de $p \in M$ em \tilde{M} , temos em p que

$$\Delta_{\tilde{M}} f = \sum_{i=1}^{n+1} [e_i(e_i(f)) - (\tilde{\nabla}_{e_i} e_i)(f)] \quad (49)$$

$$= \sum_{i=1}^n [e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f) - \alpha(e_i, e_i)(f)] + \nu(\nu(f)) - (\tilde{\nabla}_{\nu} \nu)(f) \quad (50)$$

$$= \Delta_M f - \sum_{i=1}^n \langle A_{\nu}(e_i, e_i) \rangle \nu(f) + \text{Hess}f(\nu, \nu) \quad (51)$$

$$= \Delta_M f - H\nu(f) + \text{Hess}f(\nu, \nu) \quad (52)$$

onde A é o operador forma da imersão e H é o traço de A .

Com tais considerações, note que a prova do teorema a seguir é muito similar ao Teorema da Massa Positiva, a diferença é que ao aplicarmos o teorema da divergência obtemos um termo extra referente ao bordo.

Teorema 4.2 Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e limitado (não necessariamente conexo) e $\Sigma = \partial\Omega$. Se $f : \mathbb{R}^n \setminus \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave assintoticamente plana tal que cada componente conexa de $f(\Sigma)$ está em um conjunto de nível de f e $|\nabla f(x)| \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow \Sigma$. Então a massa ADM do gráfico de f é

$$m = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{M^n} R \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} dV_g + \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{\Sigma} H_0 d\Sigma, \quad (53)$$

onde H_0 é a curvatura média de Σ em $(\mathbb{R}^n \setminus \Omega, \delta)$.

Demonstração 4.4 De acordo com a equação (45), podemos escrever a massa de (M^n, g) por

$$m = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{S_r} \frac{1}{1+|\nabla f|^2} (f_{ii}f_j - f_{ij}f_i) \nu_j dS_r.$$

A prova é muito semelhante ao teorema 4.1. A diferença aqui é quando aplicamos o teorema de Stokes, obtemos uma integral extra referente ao termo do bordo:

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{S_r} \frac{1}{1+|\nabla f|^2} (f_{ii}f_j - f_{ij}f_i) \nu_j dS_r \\
&= \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \operatorname{div} \left(\frac{1}{1+|\nabla f|^2} (f_{ii}f_j - f_{ij}f_i) \partial_j \right) dV_\delta \\
&\quad - \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{\Sigma} \frac{1}{1+|\nabla f|^2} (f_{ii}f_j - f_{ij}f_i) \nu_j d\Sigma.
\end{aligned}$$

Disto,

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{M^n} R \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} dV_g \\
&\quad - \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{\Sigma} \frac{1}{1+|\nabla f|^2} (f_{ii}f_j - f_{ij}f_i) \nu_j d\Sigma.
\end{aligned}$$

O vetor normal exterior a Σ é $\nu = \nabla f / |\nabla f|$. Considerando Σ como uma superfície fechada em (\mathbb{R}^n, δ) denotaremos Δf o Laplaciano de f em \mathbb{R}^n com respeito a métrica plana e $\Delta_\Sigma f$ o Laplaciano de f restrito a Σ . Denotando $\operatorname{Hess} f$ o hessiano de f e H_0 a curvatura média de Σ com respeito a métrica plana. Usamos a fórmula (48) provada anteriormente:

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \Delta_\Sigma f - H_0 \nu(f) + \operatorname{Hess} f(\nu, \nu) \\
&= \frac{1}{|\nabla f|} \operatorname{Hess} f \left(\nabla f, \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right) - H_0 |\nabla f|,
\end{aligned} \tag{54}$$

onde $\Delta_\Sigma f = 0$ e $\nu = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$, pois f é constante em Σ ($f(\Sigma)$ está em um conjunto de nível de f). Além disso

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{1+|\nabla f|^2} (f_{ii}f_j - f_{ij}f_i) \nu_j \\
&= - \frac{1}{1+|\nabla f|^2} \left[(\Delta f) |\nabla f| - \operatorname{Hess} f \left(\nabla f, \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right) \right] \\
&= - \frac{1}{1+|\nabla f|^2} \left[\left(\frac{1}{|\nabla f|} \operatorname{Hess} f \left(\nabla f, \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right) - H_0 |\nabla f| \right) |\nabla f| - \operatorname{Hess} f \left(\nabla f, \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right) \right] \\
&= \frac{|\nabla f|^2}{1+|\nabla f|^2} H_0,
\end{aligned} \tag{55}$$

onde substituímos a equação (54) em (55). Portanto,

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{M^n} R \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} dV_g \\
&\quad - \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{\Sigma} \frac{1}{1+|\nabla f|^2} (f_{ii}f_j - f_{ij}f_i)\nu_j d\Sigma \\
&= \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{M^n} R \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} dV_g \\
&\quad + \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{\Sigma} \frac{|\nabla f|^2}{1+|\nabla f|^2} H_0 d\Sigma \\
&= \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{M^n} R \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} dV_g + \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{\Sigma} H_0 d\Sigma.
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

Observação: 4.2 Desde que $f(\Sigma)$ está em um conjunto de nível de f , ela é a mesma superfície Σ transladada verticalmente, Logo, expressamos a massa ADM como

$$m = \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{M^n} R \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} dV_g + \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{f(\Sigma)} H_0 d\Sigma.$$

Denotamos por Ω_i , $i = 1, \dots, k$ as componentes conexas do conjunto aberto limitado Ω . No caso em que cada Ω_i é convexo, obtemos um limite inferior para a integral do bordo no teorema 4.2. Para isto, precisamos do seguinte lema, que faz uso de um caso especial da desigualdade de Aleksandrov-Fenchel, veja Schneider (1993) para mais detalhes sobre a desigualdade de Aleksandrov-Fenchel.

Lema 4.2 Se Σ é uma superfície convexa em \mathbb{R}^n com curvatura média H_0 e área $|\Sigma|$, então

$$\frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{\Sigma} H_0 d\Sigma \geq \frac{1}{2} \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}. \quad (56)$$

Demonstração 4.5 Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície convexa com curvaturas principais $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$. Definimos

$$\sigma_j(\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}) = \binom{n-1}{j}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n-1} \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_j} \quad (57)$$

a j -ésima função simétrica normalizada em $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ para $j = 1, \dots, n-1$.

Em particular,

$$\begin{aligned}\sigma_0(\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}) &= 1 \\ \sigma_1(\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}) &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i = \frac{1}{n-1} H_0 \\ \sigma_{n-1}(\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}) &= \prod_{i=1}^{n-1} \kappa_i.\end{aligned}$$

A k -ésima quermassintegral V_k de Σ é definida por

$$V_k = \int_{\Sigma} \sigma_k(\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}). \quad (58)$$

Um caso especial da desigualdade de Aleksandrov-Fenchel diz que, para $0 \leq i < j < k \leq n-1$,

$$V_j^k \geq V_i^{k-j} V_k^{j-i}. \quad (59)$$

Em particular, tomando $i = 0, j = 1, k = n-1$,

$$V_1^{n-1} \geq V_0^{n-2} V_{n-1}^1. \quad (60)$$

Mas,

$$\begin{aligned}V_0 &= \int_{\Sigma} \sigma_0(\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}) = |\Sigma| \\ V_1 &= \int_{\Sigma} \sigma_1(\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}) = \frac{1}{n-1} \int_{\Sigma} H_0 \\ V_{n-1} &= \int_{\Sigma} \sigma_{n-1}(\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}) = \omega_{n-1},\end{aligned}$$

onde na última igualdade temos que o produto das curvaturas principais é o determinante da diferencial da aplicação de Gauss e assim a integral sobre Σ dá exatamente a área algébrica da aplicação de Gauss na esfera, para o nosso caso, como a aplicação cobre a esfera uma vez, obtemos a área da esfera ω_{n-1} . De (60) temos

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{n-1} \int_{\Sigma} H_0\right)^{n-1} &\geq |\Sigma|^{n-2} \omega_{n-1} \\ \frac{1}{n-1} \int_{\Sigma} H_0 &\geq |\Sigma|^{\frac{n-2}{n-1}} \omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \\ \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{\Sigma} H_0 &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}},\end{aligned}$$

pois

$$\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} = \omega_{n-1} \omega_{n-1}^{-\frac{n-2}{n-1}} = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_{n-1}^{\frac{n-2}{n-1}}}.$$

Portanto, obtemos o resultado desejado.

A seguir, mostramos uma Desigualdade de Penrose para gráficos em \mathbb{R}^n com bordo convexo. Note que neste caso melhoramos o Teorema da Massa Positiva, pois damos um limite inferior para a massa ADM.

Teorema 4.3 (Desigualdade de Penrose para gráficos com bordo convexo) *Com as mesmas hipóteses do Teorema 4.2 junto com a hipótese adicional que cada componente conexa Ω_i de Ω é convexa e $\Sigma_i = \partial\Omega_i$, então*

$$m \geq \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} \left(\frac{|\Sigma_i|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{M^n} R \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} dV_g.$$

Em particular,

$$R \geq 0, \text{ implica } m \geq \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} \left(\frac{|\Sigma_i|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

Demonstração 4.6 *Com efeito, usando o teorema (4.2) e o lema (4.2), temos que*

$$\begin{aligned} m &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{S_r} \frac{1}{1+|\nabla f|^2} (f_{ii}f_j - f_{ij}f_i) \nu_j dS_r \\ &= \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{\Sigma_i} H_0 d\Sigma + \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{M^n} R \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} dV_g \\ &\geq \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} \left(\frac{|\Sigma_i|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{M^n} R \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} dV_g. \end{aligned}$$

REFERÊNCIAS

- Arnowitt, Richard; Deser, Stanley; Misner, Charles W. Coordinate invariance and energy expressions in general relativity. *Physical Review*, v. 122, n. 3, p. 997, 1961.
- Bartnik, Robert. The mass of an asymptotically flat manifold. *Communications on pure and applied mathematics*, v. 39, n. 5, p. 661–693, 1986.
- Bray, Hubert L; *et al.* Proof of the Riemannian Penrose inequality using the positive mass theorem. *Journal of Differential Geometry*, v. 59, n. 2, p. 177–267, 2001.
- do Carmo, Manfredo Perdigao. *Geometria riemanniana*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988.
- Huang, Lan-Hsuan; Wu, Damin; *et al.* Hypersurfaces with nonnegative scalar curvature. *Journal of Differential Geometry*, v. 95, n. 2, p. 249–278, 2013.
- Lam, Mau-Kwong George. The graphs cases of the Riemannian positive mass and Penrose inequalities in all dimensions. *arXiv preprint arXiv:1010.4256*, 2010.
- Miao, Pengzi. Positive mass theorem on manifolds admitting corners along a hypersurface. *arXiv preprint math-ph/0212025*, 2002.
- O’neill, Barrett. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*, 103, v. 103. Academic press, 1983.
- Schneider, Rolf. Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory, volume 44 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications. 1993.
- Schoen, Richard; Yau, Shing-Tung. Proof of the positive mass theorem. II. *Communications in Mathematical Physics*, v. 79, n. 2, p. 231–260, 1981.
- Schoen, Richard; *et al.* Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature. *J. Differential Geom.*, v. 20, n. 2, p. 479–495, 1984.
- Schoen, Richard M. Variational theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics. p. 120–154, 1989.
- Wang, Xiaodong; *et al.* The mass of asymptotically hyperbolic manifolds. *Journal of Differential Geometry*, v. 57, n. 2, p. 273–299, 2001.
- Witten, Edward. A new proof of the positive energy theorem. *Communications in Mathematical Physics*, v. 80, n. 3, p. 381–402, 1981.

APÊNDICE A

Podemos calcular a curvatura escalar de um gráfico de uma função euclidiana de forma intrínseca conforme Lam (2010)

Proposição .2 *Seja $(M^n, g) = (\mathbb{R}^n, \delta + df \otimes df)$ o gráfico de uma função suave $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Então a curvatura escalar de (M^n, g) pode ser expressa por*

$$R = \operatorname{div} \left(\frac{f_{ii}f_j - f_{ij}f_i}{1 + |\nabla f|^2} \right), \quad (61)$$

onde a norma de ∇f é tomado em relação a métrica canônica do \mathbb{R}^n .

Demonstração .7 *Como a métrica $g_{ij} = \delta_{ij} + f_i f_j$ é uma perturbação da identidade, é natural pensarmos que a sua inversa também seja. De fato, multiplicando a expressão da métrica por g^{jk} e somando em j temos*

$$\delta_{ik} = g_{ij}g^{jk} = \delta_{ij}g^{jk} + g^{jk}f_j f_i \quad (62)$$

$$\delta_{ik} = g^{ik} + g^{jk}f_j f_i, \quad (63)$$

logo,

$$g^{ik} = \delta_{ik} - g^{jk}f_j f_i. \quad (64)$$

Agora multiplicando a última expressão por f_i e somando em i temos

$$g^{ik}f_i = f_k - g^{jk}f_j |\nabla f|^2.$$

Como i e j são índices de soma então

$$(1 + |\nabla f|^2)g^{jk}f_j = f_k \quad (65)$$

$$g^{jk}f_j = \frac{f_k}{1 + |\nabla f|^2}. \quad (66)$$

Substituindo (66) em (64), encontramos uma expressão para a inversa g^{ij} :

$$g^{ij} = \delta^{ij} - \frac{f_i f_j}{1 + |\nabla f|^2}. \quad (67)$$

Em posse de (67), vamos calcular a curvatura escalar R de (M^n, g) usando sua

expressão em coordenadas locais:

$$R = g^{ij}(\Gamma_{ij,k}^k - \Gamma_{ik,j}^k + \Gamma_{ij}^l \Gamma_{kl}^k - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^k). \quad (68)$$

Por outro lado, sabemos que os símbolos de Christoffel de (M^n, g) são:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} g^{km} (g_{jm,i} + g_{im,j} - g_{ij,m}) \\ &= \frac{1}{2} g^{km} (f_{ji} f_m + f_j f_{mi} + f_{ij} f_m + f_i f_{mj} - f_{im} f_j - f_i f_{jm}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\delta_{km} - \frac{f_k f_m}{1 + |\nabla f|^2} \right) 2 f_{ij} f_m \\ &= f_{ij} f_k - \frac{f_{ij} f_k |\nabla f|^2}{1 + |\nabla f|^2} \\ &= \frac{f_{ij} f_k}{1 + |\nabla f|^2}. \end{aligned} \quad (69)$$

Logo, temos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij,k}^k &= \left(\frac{1}{1 + |\nabla f|^2} \right)_k f_{ij} f_k + \frac{1}{1 + |\nabla f|^2} (f_{ijk} f_k + f_{ij} f_{kk}), \\ \Gamma_{ik,j}^k &= \left(\frac{1}{1 + |\nabla f|^2} \right)_j f_{ik} f_k + \frac{1}{1 + |\nabla f|^2} (f_{ikj} f_k + f_{ik} f_{kj}), \\ \Gamma_{ij}^l \Gamma_{kl}^k &= \left(\frac{f_{ij} f_l}{1 + |\nabla f|^2} \right) \left(\frac{f_{kl} f_k}{1 + |\nabla f|^2} \right) = \frac{f_{ij} f_l f_k f_k}{(1 + |\nabla f|^2)^2}, \\ \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^k &= \left(\frac{f_{ik} f_l}{1 + |\nabla f|^2} \right) \left(\frac{f_{jl} f_k}{1 + |\nabla f|^2} \right) = \frac{f_{ik} f_{jl} f_k f_l}{(1 + |\nabla f|^2)^2}, \end{aligned}$$

Subtraindo a segunda expressão da primeira,

$$\Gamma_{ij,k}^k - \Gamma_{ik,j}^k = \left(\frac{1}{1 + |\nabla f|^2} \right)_k f_{ij} f_k - \left(\frac{1}{1 + |\nabla f|^2} \right)_j f_{ik} f_k + \frac{1}{1 + |\nabla f|^2} (f_{ij} f_{kk} - f_{ik} f_{kj}) \quad (70)$$

Além disso, usando o fato que $(1 + |\nabla f|^2)_j = (1 + f_l^2)_j = 2f_l f_{lj}$, então

$$\left(\frac{1}{1 + |\nabla f|^2} \right)_j = -\frac{(1 + |\nabla f|^2)_j}{(1 + |\nabla f|^2)^2} = -\frac{2f_l f_{lj}}{(1 + |\nabla f|^2)^2}.$$

Analogamente,

$$\left(\frac{1}{1 + |\nabla f|^2} \right)_k = -\frac{2f_k f_{lk}}{(1 + |\nabla f|^2)^2}.$$

Logo podemos expressar (70) por

$$\Gamma_{ij,k}^k - \Gamma_{ik,j}^k = -\frac{2f_{ij} f_{lk} f_k f_l}{(1 + |\nabla f|^2)^2} + \frac{2f_{ik} f_{jl} f_k f_l}{(1 + |\nabla f|^2)^2} + \frac{f_{ij} f_{kk} - f_{ik} f_{kj}}{1 + |\nabla f|^2}. \quad (71)$$

Usando (71) em (68), obtemos

$$\begin{aligned} R &= g^{ij} \left(-\frac{f_{ij}f_{lk}f_kf_l}{(1+|\nabla f|^2)^2} + \frac{f_{ik}f_{jl}f_kf_l}{(1+|\nabla f|^2)^2} + \frac{f_{ij}f_{kk} - f_{ik}f_{kj}}{1+|\nabla f|^2} \right) \\ &= -g^{ij} \frac{(f_{ij}f_{lk} - f_{ik}f_{jl})}{(1+|\nabla f|^2)^2} f_kf_l + g^{ij} \frac{(f_{ij}f_{kk} - f_{ik}f_{kj})}{1+|\nabla f|^2}. \end{aligned} \quad (72)$$

Agora, analisamos cada parcela da equação (72) separadamente, na última parcela temos que

$$\begin{aligned} g^{ij}(f_{ij}f_{kk} - f_{ik}f_{kj}) &= \left(\delta_{ij} - \frac{f_i f_j}{1+|\nabla f|^2} \right) (f_{ij}f_{kk} - f_{ik}f_{kj}) \\ &= (f_{ii}f_{kk} - f_{ik}^2) - \frac{f_i f_j}{1+|\nabla f|^2} (f_{ij}f_{kk} - f_{ik}f_{kj}). \end{aligned} \quad (73)$$

Já a primeira parcela de (72),

$$\begin{aligned} g^{ij}(f_{ij}f_{lk} - f_{ik}f_{jl})f_kf_l &= \left(\delta_{ij} - \frac{f_i f_j}{1+|\nabla f|^2} \right) (f_{ij}f_{lk} - f_{ik}f_{jl})f_kf_l \\ &= (f_{ii}f_{lk} - f_{ik}f_{il})f_kf_l - \frac{f_i f_j f_k f_l}{1+|\nabla f|^2} (f_{ij}f_{lk} - f_{ik}f_{jl}) \end{aligned} \quad (74)$$

$$= (f_{kk}f_{ji} - f_{ki}f_{kj})f_i f_j. \quad (75)$$

Onde no primeiro termo da equação (74) trocamos i por k , k por i e l por j . Já o segundo termo é simétrico quando somamos sobre i, j, k e l , logo se anula. Logo substituindo (73) e (75) em (72) obtemos uma interessante fórmula para a curvatura escalar de (M^n, g) , a saber,

$$R = \frac{f_{ii}f_{kk} - f_{ik}f_{ik}}{1+|\nabla f|^2} - \frac{2f_i f_j}{(1+|\nabla f|^2)^2} (f_{ij}f_{kk} - f_{ik}f_{kj}). \quad (76)$$

A seguir, escrevemos a curvatura escalar R como um campo divergente de vetores.

Primeiro perceba que

$$-\frac{(2f_{ij}f_j)}{(1+|\nabla f|^2)^2} f_{kk}f_i = \left(\frac{1}{1+|\nabla f|^2} \right)_i f_{kk}f_i = \left(\frac{1}{1+|\nabla f|^2} \right)_k f_{ii}f_k. \quad (77)$$

Analogamente,

$$\frac{(2f_{kj}f_j)}{(1+|\nabla f|^2)^2} f_{ki}f_i = - \left(\frac{1}{1+|\nabla f|^2} \right)_k f_{ki}f_i. \quad (78)$$

Daí, a expressão para a curvatura escalar em (76), transforma-se em

$$R = \frac{f_{ii}f_{kk} - f_{ik}f_{ik}}{1+|\nabla f|^2} + \left(\frac{1}{1+|\nabla f|^2} \right)_k (f_{ii}f_k - f_{ik}f_i). \quad (79)$$

Por outro lado,

$$(f_{ii}f_k - f_{ik}f_i)_k = f_{iik}f_k + f_{ii}f_{kk} - f_{ikk}f_i - f_{ik}f_{ik} = f_{ii}f_{kk} - f_{ik}f_{ik}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} R &= \frac{(f_{ii}f_k - f_{ik}f_i)_k}{1 + |\nabla f|^2} + \left(\frac{1}{1 + |\nabla f|^2} \right)_k (f_{ii}f_k - f_{ik}f_i) \\ &= \left(\frac{f_{ii}f_k - f_{ik}f_i}{1 + |\nabla f|^2} \right)_k \\ &= \operatorname{div} \left(\frac{f_{ii}f_k - f_{ik}f_i}{1 + |\nabla f|^2} \partial_k \right). \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.