



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO EM MATEMÁTICA BACHARELADO
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

RAFAEL BRUNO FEITOZA DE LIMA

O "VERDADEIRO" FUNDAMENTO DA MATEMÁTICA ELEMENTAR

MACEIÓ

2024

RAFAEL BRUNO FEITOZA DE LIMA

O "VERDADEIRO" FUNDAMENTO DA MATEMÁTICA ELEMENTAR

Trabalho de Conclusão de Curso submetido
ao Colegiado do Curso de Graduação em
Matemática Bacharelado da Universidade
Federal de Alagoas, como requisito parcial para
obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa

MACEIÓ

2024

Catlogação na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

L732v

Lima, Rafael Bruno Feitoza de.

O "verdadeiro" fundamento da matemática elementar / Rafael Bruno Feitoza de Lima. - 2024.

43 f. : il.

Orientador: Isnaldo Isaac Barbosa.

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Bacharelado)
– Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 39-40.

Apêndices: f. 41-43.

1. Axioma da escolha. 2. Espaços vetoriais. 3. Equivalências. 4. Sistemas Axiomáticos. I. Título.

CDU: 51

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha sincera gratidão a todas as pessoas que contribuíram para a realização deste trabalho direta ou indiretamente. Sem o apoio e o incentivo de cada um de vocês, este projeto seria muito mais difícil.

Quero expressar um agradecimento especial ao meu mestre, Radludzon Neves Vieira, que era mais conhecido como Mestre Ganso, por tudo o que me passou durante a vida e ao Coral Capoeiragem, um grupo de pessoas especiais que faz parte de mim.

Ao professor Sinvaldo Gama, sou imensamente grato pelo apoio desde sempre. Tenha a certeza que suas aulas encantam e que você é inspiração como professor.

À minha família, que desde que sou criança me foi um dos motivos pelos quais nunca cansei de lutar: Minha mãe Vera Lucia, Minhas irmãs Mariana Bruna, Natalia Luana, Anita Gabriele e meus irmãos João Victor e José Henrique.

À minha família e querida esposa Ana Paula, pelo apoio todos esses anos e pelos nossos filhos, Maitê e Lohan Nascimento.

Gostaria de agradecer a todos os parentes aqui, mas como representante deles irei colocar aqui um tio que me apoiou em um momento especialmente complicado: Obrigado, Tio João Paulo.

Aos amigos e colegas que estiveram ao meu lado: Eric Alberto, Davis Magalhães, Fernando Alves, Jhonatan Lino, Katishaline Fazane, e um agradecimento especial ao Felipe Aldeido, cujo apoio foi fundamental nas etapas finais deste trabalho. Gostaria de citar mais nomes, mas peço perdão pois a lista ficaria demasiado grande. Sou feliz por ter tido a companhia de muitas pessoas durante a minha jornada até aqui.

Por estarmos juntos em diversos momentos e nos fortalecendo mutuamente, agradeço muito pelo inestimável apoio de Elison Santos e Raphael Alves.

A todos os meus alunos, que são fonte de inspiração e motivação constantes.

Ao Hip-Hop alagoano, por proporcionar um ambiente enriquecedor e saudável, onde pude crescer e desenvolver-me pessoalmente ao lado de amigos incríveis, mantendo a mente ocupada com coisas boas.

Aos membros do Centro Acadêmico, muito obrigado pela confiança em nossa gestão e pela união de todos. Sou muito feliz de compartilhar diversos momentos com vocês e de sentir que podemos fazer o ambiente do IM um pouco melhor.

Ao DCE correnteza, na figura de Ésio Melo e Amanda Balbino, por sua colaboração

e apoio em momento de necessidade, quando eu não conhecia nada na universidade e não tinha sequer o que comer aqui.

Aos professores e técnicos do IM, especialmente Krerley Oliveira, Adailson Peixoto, Wagner Ranter, Amauri Barros, Adonai Seixas e ao professor Christopher Souza, do CTEC, pelo apoio, pela orientação e pelo conhecimento compartilhados. Agradeço também à professora Lúcia Monteiro, do CEDU, pelas enriquecedoras conversas que tivemos sobre os temas deste trabalho.

Agradeço também às escolas públicas estaduais que frequentei, e aos professores e diretores que sempre acreditaram no meu potencial e me apoiaram.

À universidade e ao IM-UFAL, em especial, aos programas de monitoria e tutoria, e ao suporte da UFAL, que apesar de carecer de muitas melhorias, ainda assim ajuda vários jovens periféricos no sonho de conquistar o ensino superior. Sem esse suporte eu teria muito mais dificuldades de chegar até aqui.

Expresso minha gratidão ao pessoal da limpeza, especialmente a Lucival Victor e Daise Ramos, aos funcionários do RU e da segurança, por seu trabalho árduo e apoio constante.

Um agradecimento especial à banca examinadora: Isnaldo Isaac, Juliana Theodoro e Alan Anderson, por sua participação e avaliação cuidadosa, mesmo diante de prazos tão apertados.

Agradeço especialmente ao professor Isnaldo Isaac, por todo o apoio durante a minha jornada, pela amizade, pelo incentivo e conversas que tivemos. Muito obrigado.

Muito obrigado a todos!

“Às vezes faço o que quero fazer. O resto do tempo, faço o que tenho que fazer”

(Filme Gladiador, 2000, do diretor Ridley Scott)

RESUMO

Este trabalho visa fazer um estudo das origens e do desenvolvimento dos sistemas axiomáticos, tendo enfoque principalmente na teoria dos conjuntos, criada por George Cantor. Pretende-se definir sistemas axiomáticos e mostrar alguns paradoxos presentes na chamada "Teoria Ingênu dos Conjuntos", onde também serão dados alguns exemplos de paradoxos e definições em outras teorias para explicitar o alcance e a importância do conteúdo tratado neste trabalho, e de como a axiomatização criada por Zermelo e Fraenkel é capaz de evitar esses paradoxos. Após isso será apresentada a equivalência entre o Axioma da Escolha, o teorema de Zermelo e o Lema de Zorn, dedicando também uma seção especial para demonstrar a surpreendente equivalência entre o Axioma da Escolha e a afirmação de que todo espaço vetorial possui uma base. Algumas seções adicionais falam sobre o teorema da incompletude de Gödel e mostram afirmações que não podem ser provadas no sistema ZFC.

Palavras-chave: Axioma da Escolha; Bases de Espaços Vetoriais; Equivalências; Sistemas Axiomáticos.

ABSTRACT

This work aims to study the beginning and development of axiomatic systems, focusing mainly on set theory, created by George Cantor. The goal is to define axiomatic systems and show some paradoxes presented by the so-called “naive” set theory, where some examples of paradoxes and definitions in other theories will also be given to explain the scope and relevance of the content treated here, and how the axiomatization created by Zermelo and Fraenkel is able to avoid these paradoxes. Also, the equivalence between the Axiom of Choice, Zermelo’s theorem and Zorn’s Lemma will be presented. We offer a special section to demonstrate the surprising equivalence between the Axiom of Choice and the statement that every vector space has a basis. Finally, we give some additional sections talk about Gödel’s incompleteness theorem and show statements that cannot be proven in the ZFC system.

Keywords: Axiom of Choice; Vector Space Bases; Equivalences; Axiomatic Systems.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	SISTEMAS AXIOMÁTICOS	11
2.1	Sistemas Axiomáticos	12
2.2	Axiomas ZFC	13
2.3	Os Doublets de Lewis Carrol	17
3	ZORN, ZERMELO E O AXIOMA DA ESCOLHA	19
3.1	Ordem	19
3.2	O Teorema de Zermelo	20
3.3	O Axioma da Escolha	21
3.4	O Lema de Zorn	23
4	DEMONSTRAÇÃO DA EQUIVALÊNCIA ENTRE O AXIOMA DA ESCOLHA, O LEMA DE ZORN E O TEOREMA DE ZERMELO	24
4.1	Demonstração das Equivalências	24
5	EQUIVALÊNCIAS DO AXIOMA DA ESCOLHA COM A EXISTÊNCIA DE BASES EM UM ESPAÇO VETORIAL	29
5.1	Preliminares de Álgebra Linear	29
5.2	Equivalência Entre o Axioma da Escolha e a Existência de Bases Vetoriais	34
6	CONCLUSÃO	38
	REFERÊNCIAS	39
	APÊNDICES	41
	APÊNDICE A – APÊNDICE A - LISTA SUSCINTA DOS AXIOMAS ZFC	41
	APÊNDICE B – APÊNDICE B - Lista de Proposições Equivalentes	42
	APÊNDICE C – APÊNDICE C - Há coisas "improváveis em ZFC?"	43

1 INTRODUÇÃO

A teoria dos conjuntos é a base da matemática moderna, tendo suas origens nos trabalhos de Gottlob Frege (1848-1925) e George Cantor(1845-1918). Em particular Cantor lançou uma axiomatização da teoria dos conjuntos entre os anos de 1879 e 1884, em uma série de seis artigos na *Mathematische Annalen* (<https://link.springer.com/journal/208>) que eram destinados a fornecer uma introdução à sua teoria dos conjuntos.

Vamos começar o trabalho delineando a "Teoria Ingênua dos Conjuntos" e falando também sobre a geometria que nos é apresentada no monumental trabalho de Euclides, *Os Elementos*. Mostraremos alguns paradoxos que surgem do fato dos sistemas axiomáticos desses espaços não estarem bem formulados, o que nos motiva a seguir estudando o que são e quais as causas desses paradoxos, explicando que buscamos que um sistema axiomático tenha três propriedades que os tornam "bons". Teremos nessa seção também diversos exemplos de paradoxos e quais são as suas soluções e como evitá-los, sendo após isso apresentado toda a teoria axiomática ZFC com a explicação de cada um dos axiomas.

Após isso, no capítulo 2 serão apresentados as bases para que se entenda o resto do trabalho, destacando os conceitos de função escolha, conjuntos bem ordenados, demais relações de ordem e a notação básica no trabalho. Serão finalmente apresentados com detalhes e exemplos o Teorema da boa ordenação, o Lema de Zorn. Faremos a demonstração da equivalência desses resultados e no capítulo seguinte demonstraremos o surpreendente resultado que afirma que o axioma da escolha é equivalente a afirmação de que todo espaço vetorial possui uma base. Seguimos voltando a falar sobre os sistemas axiomáticos e acrescentando informações acerca de consistência e da necessidade de sempre se considerar mais axiomas, de acordo com o teorema de Gödel.

Daremos as definições dos temas estudados neste trabalho, mas espera-se familiaridade com as notações de teoria dos conjuntos e lógica. Para a lógica recomendamos o livro [16] de Edgar de Alencar, *Iniciação à Lógica Matemática*, por ser suficiente para a notação aqui usada e por ser de fácil compreensão. Serão dados exemplos de paradoxos que derivam dos sistemas axiomáticos em suas versões ingênuas e após isto será introduzido o sistema axiomático Zermelo-Fraenkel-Choice (ZFC), explicando cada um de seus axiomas e como eles acabam com os paradoxos de antes. Será então demonstrada a equivalências entre o Axioma da Escolha, o Lema de Zorn e o Teorema de Zermelo, tendo também destaque a surpreendente equivalência entre o Axioma da Escolha e o afirmação de que todo espaço vetorial possui uma base.

Finalizamos com um apêndice onde resumimos os axiomas ZFC em apenas uma página usando a notação da lógica, visando a rápida visualização em caso de necessidade.

2 SISTEMAS AXIOMÁTICOS

Neste trabalho vamos apenas salientar que existem conceitos como o de sistemas formais e modelos, além do de sistemas axiomáticos que iremos nos ocupar neste trabalho, mas não iremos nos aprofundar em tais conceitos apenas pela infeliz falta de tempo.

De maneira breve, podemos entender que um sistema formal é um conjunto de símbolos, axiomas e regras de manipulação desses símbolos. Ele é utilizado para representar e derivar conclusões sobre objetos matemáticos, conceitos lógicos ou sistemas formais. Geralmente, um sistema formal é composto por um conjunto de símbolos primitivos, um conjunto de regras de formação de fórmulas bem formadas e um conjunto de regras de inferência que permitem a dedução de novas fórmulas a partir das já existentes.

Um sistema formal pode ser utilizado para estudar várias áreas da matemática, lógica e ciência da computação. Exemplos de sistemas formais incluem sistemas de lógica proposicional e sistemas de lógica de primeira ordem. Um sistema axiomático é um tipo específico de sistema formal que é baseado em um conjunto de axiomas, que são proposições básicas consideradas como verdadeiras sem necessidade de prova dentro do sistema e um conjunto de regras de inferência. Os teoremas são então derivados dos axiomas usando regras de inferência.

O conceito de sistema axiomático é fundamental na matemática e em outras áreas da lógica formal, fornecendo uma base sólida para a dedução de resultados matemáticos. Os sistemas axiomáticos são usados principalmente nas ciências formais, como na matemática e na lógica, para construir teorias rigorosas e derivar conclusões sobre essas teorias. Exemplos de sistemas axiomáticos incluem os da geometria euclidiana, da teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel e da aritmética de Peano.

Um modelo é uma interpretação ou representação de um sistema formal ou de uma teoria matemática em um contexto específico. Ele atribui significado aos símbolos do sistema formal, permitindo-nos entender como as afirmações dentro do sistema se relacionam com aspectos da realidade que o modelo representa.

Um modelo pode ser construído para verificar a consistência de um sistema formal ou para aplicar os conceitos e resultados de uma teoria em situações do mundo real, pois um modelo deve satisfazer as propriedades definidas pelo sistema formal ou axiomático em questão.

Por exemplo, um modelo da teoria dos conjuntos pode ser um conjunto concreto, como o conjunto dos números naturais, e as operações e relações definidas na teoria dos conjuntos podem ser interpretadas em termos desse conjunto concreto. Outro exemplo, um modelo pode ser um

conjunto específico que satisfaz os axiomas de Zermelo-Fraenkel. Em lógica proposicional, um modelo pode ser uma atribuição de valores de verdade às variáveis proposicionais que torna uma determinada proposição verdadeira. Os modelos são essenciais para conectar teorias abstratas com a realidade observável e aplicável.

Em resumo, um sistema formal é uma estrutura abstrata composta por símbolos e regras de manipulação, um sistema axiomático é um tipo específico de sistema formal que contém axiomas, regras de inferência, possivelmente termos primitivos e teoremas derivados, e um modelo é uma interpretação ou representação de um sistema formal ou teoria em um contexto específico. Para saber mais indicamos [19], de Walter Carnielli, *Computação, Funções Computáveis, Lógica e os Fundamentos da Matemática*.

2.1 Sistemas Axiomáticos

Vamos formalizar o conceito de sistemas axiomáticos nesta seção.

Quando tentamos definir um conceito, temos três possibilidades:

1. Circularidade
2. Regressão infinita de definições
3. Método Axiomático

(1) e (2) não são interessantes para a matemática.

Entenderemos um axioma como uma proposição ou premissa "autoevidente", considerada como verdadeira sem necessidade de prova. Na matemática e na lógica, os axiomas são fundamentais para construir teorias ou sistemas formais, fornecendo as bases sobre as quais outras verdades são estabelecidas por meio de dedução lógica. Eles são considerados como pontos de partida aceitos, não derivados de outras proposições, e são essenciais para a construção de teorias consistentes e coerentes.

Em particular não gostamos da definição facilmente encontrada que diz que "São verdades inquestionáveis universalmente válidas, muitas vezes utilizadas como princípios na construção de uma teoria ou como base para uma argumentação." A Própria história do Axioma da escolha vai de encontro a essa definição.

Um sistema axiomático será uma coleção formada por um conjunto de axiomas, regras de inferência, e possivelmente conceitos primitivos e teoremas derivados. Uma teoria axiomática compreende um sistema formal que descreve e estuda um conjunto específico de objetos e relações entre eles com base em axiomas específicos.

Temos como exemplo base na história dos sistemas axiomáticos a geometria euclidiana descrita na obra de Euclides, *Os Elementos*.

2.2 Axiomas ZFC

A teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel, juntamente com o axioma da escolha (ZFC), chamada assim em homenagem aos matemáticos Ernst Zermelo e Abraham Fraenkel, é um dentre vários sistemas axiomáticos que surgiram para tentar formalizar a "Teoria Ingênua dos Conjuntos", promovendo uma teoria livre dos paradoxos desta.

É importante se observar que não foram apenas Zermelo e Fraenkel que contribuíram para essa teoria. O axioma da regularidade foi proposto primeiramente por Dmitry Minimanoff em 1917. Thoralf Skolem e Fraenkel propuseram de forma independente, em 1922, a operacionalização de uma propriedade "definida" como uma que fosse formulada como uma teoria de primeira ordem cujas fórmulas atômicas fossem limitadas a pertinência e identidade de conjunto e, também de forma independente, que o axioma da separação fosse substituído pelo axioma da substituição. A teoria ZFC sem o axioma da escolha é chamada apenas de ZF (*C* vem do inglês, *Choice*, que significa *Escolha*). Em 1908, Ernst Zermelo propôs uma teoria dos conjuntos que hoje é conhecida como a teoria dos conjuntos Zermelo. Ele introduziu alguns axiomas fundamentais que formaram a base da teoria dos conjuntos, são eles o axioma da extensão, da separação e da potência.

Axioma da Existência. Existe um conjunto vazio.

Este axioma nos diz que existe um conjunto que não possui elementos, isto é, um conjunto X tal que, para todo x , $x \notin X$. Vale ressaltar que a importância do Axioma da Existência é garantir que existe um conjunto, que pode ser o ponto de partida quando estivermos falando de conjuntos já que graças a ele agora temos garantida a existência de pelo menos um conjunto.

Usando-se a linguagem da lógica formal, podemos enunciar o axioma como:

$$\exists x \forall y \sim (y \in x)$$

Axioma da Extensão. Dados os conjuntos X e Y , então $X = Y$ se, e somente se, $X \subset Y$ e $Y \subset X$.

Usando-se a linguagem da lógica formal, podemos enunciar o axioma como:

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

Esquema de Axiomas da Especificação. Para todo conjunto A e toda condição $S(x)$ existe um conjunto B cujos elementos são exatamente os elementos x de A que satisfazem a condição $S(x)$. Usando-se a linguagem da lógica formal, podemos enunciar o axioma como:

$$\forall z \forall w_1 \dots w_n \exists y \forall x (x \in y \iff (x \in z \wedge \phi))$$

Na condição $S(x)$ do Axioma da Especificação, exigimos apenas que a variável x não seja introduzida com os quantificadores universal, como em " $\forall x \dots$ ", e existencial, como em " $\exists x \dots$ ". É importante observar também que neste axioma, para cada condição $S(x)$, obtém-se um conjunto B , isto é, para cada condição obtém-se um Axioma da Especificação. Por isso enunciamos um esquema de axiomas.

O Axioma da Extensão assegura que, para cada condição $S(x)$, o conjunto B determinado pelo Axioma da Especificação é único.

Representamos o conjunto B obtido pelo Axioma da Especificação, por:

$$B = \{x \in A; S(x)\}.$$

Axioma do Par. Se X e Y são conjuntos, então existe um conjunto Z tal que $A \in Z$ se, e somente se, $A = X$ ou $A = Y$.

Usando-se a linguagem da lógica formal, podemos enunciar o axioma como:

$$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$$

O Axioma da Extensão garante que o conjunto Z enunciado pelo Axioma do Par é único. Assim, o representaremos por: $Z = \{X, Y\}$. Uma vez que o vazio $\emptyset$ é um conjunto, podemos obter, a partir do Axioma do Par, os seguintes conjuntos:

$$\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}.$$

Axioma da Fundação. Para cada conjunto X não vazio, existe $A \in X$ tal que $A \cap X = \emptyset$.

Usando-se a linguagem da lógica formal, podemos enunciar o axioma como:

$$\forall x [\exists y (y \in x) \rightarrow \exists y (y \in x \wedge \sim \exists z (z \in y \wedge z \in x))]$$

É importante destacar que o axioma da fundação, também conhecido como o axioma da regularidade, é importante pois impede paradoxos como o de Russell, ao não permitir que um conjunto pertença a si mesmo, direta ou indiretamente.

Axioma da União. Para toda coleção de conjuntos $\mathcal{C}$, existe um conjunto U tal que $A \in U$ se, e somente se, $A \in X$ para algum $X \in \mathcal{C}$.

Usando-se a linguagem da lógica formal, podemos enunciar o axioma como:

$$\forall \mathcal{F} \exists A \forall Y \forall x (x \in Y \wedge Y \in \mathcal{F} \rightarrow x \in A)$$

O Axioma da Extensão garante que o conjunto U enunciado pelo Axioma da União é único. Desta forma, representaremos U pelo símbolo $\bigcup_{X \in \mathcal{C}} X$.

Exemplo 2.2.1. Consideremos a coleção de conjuntos $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Então, pelo Axioma da União, existe $\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A = \{\emptyset\}$.

De fato, como $\{\emptyset\} \in \mathcal{C}$ e $\emptyset \in \{\emptyset\}$, segue que $\{\emptyset\} \subset \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$. Agora, seja $X \in \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$. Então, existe $Y \in \mathcal{C}$ tal que $X \in Y$. Como $Y \neq \emptyset, Y = \{\emptyset\}$ e, assim, $X \in \{\emptyset\}$, como queríamos demonstrar.

O axioma a seguir serve principalmente a seguir para construir ordinais que desempenham papel crucial como uma categoria especial dos conjuntos bem ordenados. No entanto, a teoria dos ordinais está fora do alcance deste trabalho e pode ser encontrada em [2] e [24].

Axioma da Substituição. Seja $P(x, y)$ uma sentença. Suponha que para todos x, y, z , $P(x, y)$ e $P(x, z)$ implica $y = z$. Então, para todo conjunto X , existe o conjunto

$$\{y ; P(x, y) \text{ para algum } x \in X\}.$$

O objetivo é garantir que se algum esquema f , quando aplicado ao conjunto x , caracteriza uma função, então existe um conjunto $f(x)$. Formalmente: para toda fórmula ϕ na linguagem da ZFC com variáveis livres entre $x, y, A, w_1, \dots, w_n$:

O símbolo " $\exists! y$ " significa que y existe e é único. O próximo axioma usa a notação $S(x) = x \cup \{x\}$, chamado de sucessor de x . Os Axiomas 1 a 6 provam que $S(x)$ existe e é único para todo conjunto x . Outra consequência dos axiomas precedentes é que o conjunto vazio $\emptyset$ existe e é único. Usando-se a linguagem da lógica formal, podemos enunciar o axioma como:

$$\forall A \forall w_1, \dots, w_n [\forall x \in A \exists! y \phi \rightarrow \exists Y \forall x \in A \exists y \in Y \phi]$$

Axioma da Potência. Para cada conjunto X existe um conjunto P tal que $A \in P$ se, e somente se, $A \subset X$. Usando-se a linguagem da lógica formal, podemos enunciar o axioma como:

$$\forall x \exists y \forall z (z \subseteq x \rightarrow z \in y)$$

O Axioma da Extensão assegura que o conjunto P , conforme enunciado no Axioma da Potência, é único. Assim, o denotaremos por $P = \mathcal{P}(X)$.

Se X e Y são conjuntos e $x \in X, y \in Y$, então o Axioma do Par nos assegura que $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ é um conjunto.

Definição 2.2.1. Dados os conjuntos $x \in X$ e $y \in Y$, dizemos que o conjunto dado por $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ é o par ordenado com primeira coordenada x e segunda coordenada y .

Se $a = x$ e $b = y$, pelo Axioma da Extensão, temos $\{a\} = \{x\}$ e $\{a, b\} = \{x, y\}$, de modo que $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\} = (x, y)$. A recíproca também é verdadeira, segundo o seguinte resultado.

Teorema 2.2.1. Se $(a, b) = (x, y)$, então $a = x$ e $b = y$.

Demonstração. Suponhamos $b = a$. Neste caso, (a, b) é o conjunto unitário constituído pelo elemento $\{a\}$. Como $\{\{a\}\} = (a, b) = (x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$, segue que $\{x\} \in \{\{a\}\}$, ou seja, $\{x\} = \{a\}$. Logo, $x = a$. Além disso, $\{x, y\} \in \{\{a\}\}$. Assim, $\{x, y\} = \{a\}$. Portanto, $y = a = b$.

Agora, suponhamos que $b \neq a$. Então, (a, b) é um conjunto contendo exatamente o conjunto unitário $\{a\}$ e o par $\{a, b\}$. Uma vez que $(a, b) = (x, y)$, segue que (x, y) é um conjunto que também contém exatamente o conjunto unitário $\{x\}$ e o par $\{x, y\}$. E além disso, $\{a\} = \{x\}$ e $\{a, b\} = \{x, y\}$. Por conseguinte, $a = x$ e, como $b \neq a$, temos $b = y$.

□

O resultado a seguir, garante a existência do conjunto de todos os pares ordenados (x, y) , com $x \in X$ e $y \in Y$.

Diante deste resultado, podemos definir o conceito de produto cartesiano dos conjuntos X e Y .

Definição 2.2.2. Sejam X e Y conjuntos. O produto cartesiano dos conjuntos X e Y é o conjunto $X \times Y = \{(x, y); x \in X \text{ e } y \in Y\}$.

Para melhor enunciar o próximo axioma, precisaremos das seguintes definições.

Definição 2.2.3. Seja X um conjunto. O conjunto sucessor de X é o conjunto dado por $X^+ = X \cup \{X\}$.

Definição 2.2.4. Dizemos que um conjunto X é indutivo se, e somente se, $\emptyset \in X$ e $A^+ \in X$ sempre que $A \in X$.

Axioma do Infinito. Existe um conjunto indutivo. Existe um conjunto x que tem o conjunto vazio como elemento, e que, para todo elemento y , ele contém seu sucessor $S(y)$. Usando-se a linguagem da lógica formal, podemos enunciar o axioma como:

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(S(y) \in x))$$

Desta forma, finalizamos nossa exposição sobre os axiomas de Zermelo-Fraenkel.

2.3 Os Doublets de Lewis Carroll

Charles Lutwidge Dodgson, popularmente mais conhecido pelo seu pseudônimo Lewis Carroll(1832-1898) inventou um jogo que pode servir para ilustrar bem como se dá a demonstração de teoremas em matemática a partir de uma lista de axiomas e regras de inferência.

Os *doublets* são uma forma de jogo de palavras criado por Lewis Carroll. Esse jogo consiste em transformar uma palavra em outra, alterando uma letra por vez, de modo que cada palavra intermediária seja válida e significativa. O objetivo é chegar de uma palavra inicial a uma palavra final em um número mínimo de etapas, alterando uma letra de cada vez e sempre formando uma palavra real e significativa em cada passo. Como no exemplo dado por [14], podemos transformar a palavra Sol na palavra Lua:

- | | |
|----|-----|
| 1. | Sol |
| 2. | Sul |
| 3. | Sua |
| 4. | Lua |

Cada etapa dessa transformação é uma palavra válida da língua portuguesa, e a mudança de uma palavra para outra ocorre apenas por meio da alteração de uma letra. Esse processo de transformação pode ser visto como uma espécie de quebra-cabeça linguístico. Observe que este exemplo é particularmente interessante, pois leva uma palavra em outra que lhe é antagônica em um certo sentido.

Os doublets também podem ser analogias interessantes para a demonstração de teoremas a partir de hipóteses. Vamos explorar essa analogia:

Hipóteses Iniciais: Assim como no processo de demonstração matemática, onde começamos com hipóteses ou premissas iniciais, os doublets também começam com uma palavra inicial e uma palavra final. Essas palavras representam as "hipóteses" iniciais do problema.

Transformações Passo a Passo: No processo de demonstração matemática, avançamos passo a passo, aplicando regras ou deduções lógicas para chegar à conclusão desejada. Nos doublets, avançamos de uma palavra para outra, alterando uma letra de cada vez, de forma a transformar a palavra inicial na palavra final. Cada transformação representa um passo no processo.

Validade Intermediária: Assim como em uma demonstração matemática, cada etapa intermediária em um doublet deve ser válida e significativa. Da mesma forma, em uma demonstração matemática, cada etapa deve ser justificada para que a conclusão seja considerada válida.

Objetivo Final: O objetivo tanto nos doublets quanto na demonstração de teoremas é alcançar uma conclusão específica. Nos doublets, é chegar da palavra inicial à palavra final. Na demonstração de teoremas, é chegar à conclusão lógica a partir das hipóteses iniciais.

Criatividade e Estratégia: Tanto nos doublets quanto na demonstração de teoremas, é necessária criatividade e estratégia para encontrar o caminho mais eficiente ou a prova mais elegante. Isso pode envolver explorar diferentes possibilidades e pensar de forma abstrata para alcançar o objetivo desejado.

Portanto, os doublets podem ser vistos como uma analogia interessante para o processo de demonstração matemática, destacando a importância da lógica, da validade intermediária e da criatividade no processo de alcançar uma conclusão a partir de premissas iniciais.

Aumentando mais a analogia com a matemática e a demonstração de teoremas em particular, quanto melhor o vocabulário e a compreensão da estrutura das palavras, mais facilidade se terá para sair de uma palavra e através dos passos permitidos se chegar a palavra pretendida, também com a derivação de teoremas em matemática, quanto melhor se entender as regras de inferências e mais conhecimento acerca de implicações em matemática, maior facilidade se terá para partir das hipóteses e se chegar à conclusão pretendida. O desafio também é, muitas vezes, encontrado um caminho, procurar um caminho mais eficiente que chegue no mesmo resultado com um menor número de passos, fato que é muito frequente em matemática.

3 ZORN, ZERMELO E O AXIOMA DA ESCOLHA

Aqui daremos uma introdução a três dos principais resultados deste trabalho, para que se entenda melhor cada um deles. Em cada uma das seções apresentaremos exemplos e observações. A ordem de apresentação aqui escolhida visa seguir a ordem histórica que esses conceitos apareceram, sendo o primeiros deles o teorema de Zermelo, que foi conjecturado por Cantor, o qual queria inicialmente assumir o mesmo como um axioma, se convencendo depois da necessidade de uma demonstração. A demonstração veio em um trabalho de Ernest Zermelo de 1904, onde foi apresentado o Axioma da Escolha. Em 1908, devido as críticas à sua demonstração, Zermelo publica uma nova prova desse resultado. O Lema de Zorn faz referência ao matemático Max Zorn e viria a surgir cerca de trinta anos depois (foi proposto em 1935 por Zorn), junto com uma série dos chamados "princípios de maximalidade" que surgiram na chamada escola polonesa. Eles descobriram o princípio de forma independente e por vezes pode-se encontrar o referido como lema de Kuratowski-Zorn. Embora Kuratowski tenha sido o primeiro a enunciar o lema, o enunciado de Zorn era mais genérico e ele exibiu diversas aplicações, por exemplo em álgebra linear, o que pode ter contribuído para a maior popularização do termo Lema de Zorn.

3.1 Ordem

Aqui daremos algumas definições de ordem essenciais tanto para o Lema de Zorn quanto para o Teorema de Zermelo.

Definição 3.1.1. Chamaremos de relação de ordem parcial num conjunto X uma relação $\leq$ em X com as seguintes propriedades:

- (a) $x \leq x$ para todo $x \in X$ ($\leq$ é reflexiva);
- (b) se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$ ($\leq$ é antisimétrica);
- (c) se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$ ($\leq$ é transitiva).

Neste caso diremos que X é um conjunto parcialmente ordenado.

Diremos que $\leq$ é uma relação de ordem total se além de verificar (a), (b) e (c), também verifica (d) dados $x, y \in X$, tem-se que $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Neste caso diremos que X é um conjunto totalmente ordenado.

Muitas vezes neste trabalho representaremos o par $(Y, \leq_X)$ contendo um conjunto, junto de alguma ordem, indicando que neste caso que a ordem $\leq_X$ foi fixada para o conjunto Y .

Exemplo 3.1.1. Quando falamos de ordem parcial, esse com certeza é o exemplo mais clássico: Seja X um conjunto, então a relação de inclusão é uma relação de ordem parcial no conjunto das partes de X $\mathcal{P}(X)$. Diremos que $A \leq B$ se, e somente se, $A \subseteq B$.

Exemplo 3.1.2. A relação de ordem usual em $\mathbb{R}$ é uma relação de ordem total.

Definição 3.1.2. Diremos que A é uma cadeia em um conjunto X se A é totalmente ordenado sob a relação de ordem parcial induzida por X .

Definição 3.1.3. Seja X um conjunto parcialmente ordenado, e seja $A \subset X$.

- (a) Se existir $a_0 \in A$ tal que $a_0 \leq a$ para todo $a \in A$, diremos que a_0 é o elemento mínimo de A . De maneira análoga definimos elemento máximo;
- (b) Se existir $a_0 \in A$ tal que $a \leq a_0$ sempre que $a \in A$ e $a \neq a_0$, diremos que a_0 é um elemento minimal de A . De maneira análoga definimos elemento maximal;
- (c) Se existir $c \in X$ tal que $c \leq a$ para todo $a \in A$, diremos que A é limitado inferiormente e que c é uma cota inferior de A . De maneira análoga definimos conjunto limitado superiormente e cota superior.

Definição 3.1.4. Diremos que um conjunto A possui uma boa ordem se todo subconjunto $B \subset A$ possuir um elemento mínimo.

Exemplo 3.1.3. Note que nem toda ordem total é uma boa ordem, por exemplo, usando a ordem usual de $\mathbb{R}$ aplicada ao conjunto $X = (0,1)$, vemos facilmente que este é um conjunto totalmente ordenado que não é bem ordenado. Note que não é possível achar um menor elemento com essa ordem.

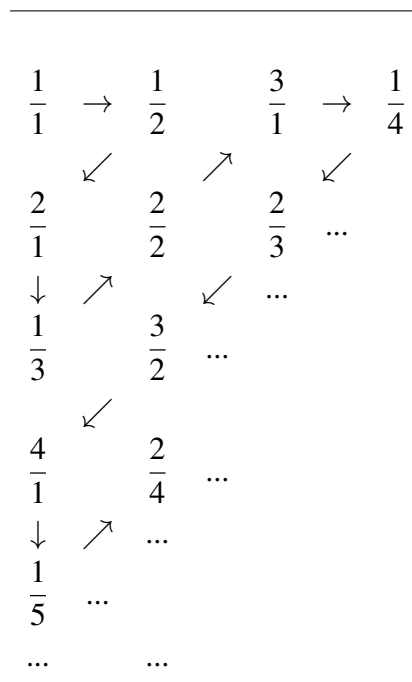
3.2 O Teorema de Zermelo

Teorema 3.2.1 (Teorema de Zermelo). Todo conjunto não vazio pode ser bem ordenado.

Este teorema foi conjecturado por Cantor em 1883 e Cantor pretendia incluir o mesmo em sua lista de axiomas inicialmente, mas após reflexões ele se convenceu de que uma prova para tal afirmação era necessária.

Exemplo 3.2.1. Os naturais são o nosso protótipo de conjuntos bem ordenados. A ordem usual deles é uma boa ordem.

Exemplo 3.2.2. Vamos dar outro exemplo de conjunto bem ordenado e uma boa ordem: O conjunto dos números racionais positivos tem uma boa ordem muito criativa: basta tomar todas as frações cuja soma do numerador e denominador seja n , n maior que 1, em cada etapa, e escrever a ordem deste conjunto como no esquema abaixo:



Exemplo 3.2.3. Qualquer conjunto finito é trivialmente bem ordenado e mais geralmente todo conjunto enumerável é bem ordenado. Para ver isto basta notar que se X é enumerável, então existe uma bijeção f entre X e $\mathbb{N}$, de modo que podemos definir uma boa ordem em X olhando para a pré-imagem de cada natural segundo a bijeção f , ou seja, o primeiro elemento de X é o único elemento x_1 de X tal que $f(x_1) = 1$, o segundo o único tal que $f(x_2) = 2$ e assim por diante.

3.3 O Axioma da Escolha

Existem muitas formas equivalentes de formular o Axioma da Escolha. O Axioma da Escolha afirma que dada uma coleção não vazia de conjuntos não vazios é possível fazer uma espécie de escolha em que exatamente um elemento de cada um dos conjuntos é escolhido. Talvez a mais simples formulação seja a que vem após a definição a seguir:

Definição 3.3.1. Seja C uma coleção não vazia de conjuntos não vazios. Uma função escolha para C é uma função $f : C \longrightarrow \bigcup_{A \in C} A$ tal que $f(A) \in A$ para todo $A \in C$.

Axioma da Escolha. Toda coleção não vazia de conjuntos não vazios admite uma função escolha.

Note, contudo, que o Axioma da Escolha apenas postula que existe uma função escolha e que não afirma nada sobre como é possível se encontrar esse função escolha, ou seja, não afirma nada sobre como essas escolhas podem ser feitas.

Teorema 3.3.1. Os seguintes enunciados são equivalentes:

- (a) Axioma da Escolha
- (b) O produto cartesiano de uma coleção não vazia de conjuntos não vazios é não vazio
- (c) se $\{X_i\}_{i \in I}$ é uma coleção não vazia de conjuntos não vazios dois a dois disjuntos, então existe um conjunto A tal que $A \cap X_i$ é um conjunto unitário para cada $i \in I$;
- (d) toda relação contém uma função com o mesmo domínio.

Demonstração. Vide [23, p.47]

□

Exemplo 3.3.1. Seja C uma coleção infinita de pares de sapatos. Então a função que associa o par esquerdo do sapato a cada par da coleção é uma função escolha para esta coleção. Note que o mesmo não podemos fazer se tivermos uma coleção P de pares de meias, pois não há um critério que permita, a priori, diferenciar as duas meias de um par, pois sendo estas idênticas, não podemos exibir uma função escolha que deixe claro como selecionar uma meia em cada um dos pares. O axioma da escolha é precisamente a afirmação de que uma tal função escolha existe, mesmo que não consigamos a exibir de forma explícita. No caso em questão não é nosso interesse exibir a função escolha em si, mas tão somente usar do fato que existe tão função. Este clássico exemplo nos foi dado por Russell.

Exemplo 3.3.2. Seja C o conjunto de todos os países da Terra, sendo cada país um conjunto de cidades. Então, C é uma coleção não vazia de conjuntos não vazios e $\bigcup_{A \in C} A$ é o conjunto de todas as cidades da Terra. A função $f : C \longrightarrow \bigcup_{A \in C} A$ que associa cada país a sua cidade capital nacional é uma função escolha para C

Exemplo 3.3.3. Exemplo 3.3.2 revisitado. Seja C o conjunto de todos os países da Terra, sendo cada país um conjunto de cidades. Há uma imprecisão muito grande sobre o que seria um

país. Além disso, há o país de Nauru, que não tem uma capital e países como a África do Sul, que possui três, uma administrativa, Pretória, uma legislativa, a Cidade do Cabo e uma judicial, Bloemfontein e Essuatini, que possui a capital administrativa, Mebabane e a capital real e legislativa, Lobamba. Assim, permitindo Nauro como País temos que o produto cartesiano da família de conjuntos de cidades seria vazio, e permitindo a África do Sul, o produto cartesiano ainda seria não vazio, porém já não podemos usar a mesma função escolha definida antes e devemos especificar qual capital deve ser escolhida ou ter um conceito de capital mais restrito para o caso dos países com múltiplas capitais. Podemos também mudar a função escolha de modo que, novamente, fique claro qual a escolha que está sendo feita.

Sendo C novamente uma coleção não vazia de conjuntos não vazios e $\bigcup_{A \in C} A$ o conjunto de todas as cidades da Terra. A função $f : C \longrightarrow \bigcup_{A \in C} A$ que associa cada país a primeira cidade do país é uma função escolha para C .

3.4 O Lema de Zorn

Como já temos o arcabouço para o seu entendimento, vamos ao enunciado:

Lema de Zorn. Seja X um conjunto parcialmente ordenado, não vazio, tal que toda cadeia em X tem cota superior. Então X possui pelo menos um elemento maximal.

Com o Lema de Zorn são demonstrados resultados em diversas áreas, como em Análise funcional e topologia. Ele por exemplo garante a existência de conjuntos ortonormais completos em espaços de Hilbert, vide [23, p.54] ou o clássico teorema de Hahn-Banach, um dos resultados principais de análise funcional e presente em qualquer livro da disciplina.

4 DEMONSTRAÇÃO DA EQUIVALÊNCIA ENTRE O AXIOMA DA ESCOLHA, O LEMA DE ZORN E O TEOREMA DE ZERMELO

Neste capítulo vamos demonstrar algumas equivalências importantes, como consequência disso ficará provado também o magnífico Teorema de Zermelo, que afirma que qualquer conjunto pode ser bem ordenado. Este é um resultado surpreendente e intuitivamente falso, situação que é ilustrada pela célebre frase

“The Axiom of Choice is obviously true, the Well–Ordering Principle is obviously false, and who can tell about Zorn’s Lemma?”(J.L. Bona - Citado em Axiom of Choice de Horst Herrlich p.8 no prefácio)

Em uma tradução livre: "O Axioma da Escolha é obviamente verdadeiro, o Princípio da Boa Ordenação é obviamente falso, e quem pode contar sobre o Lema de Zorn?"

Em que o autor brinca com o fato das três afirmações serem equivalentes, embora as nossas intuições possam achar alguma delas válida e as demais falsas.

4.1 Demonstração das Equivalências

Abaixo, para relembrarmos, estão as três afirmações que serão o tema das provas dessa seção e cuja demonstração da equivalência daremos a seguir.

Lema de Zorn. Seja X um conjunto parcialmente ordenado não vazio tal que toda cadeia em X tem cota superior. Então X possui pelo menos um elemento maximal.

Teorema de Zermelo. Todo conjunto não vazio pode ser bem ordenado.

Axioma da Escolha. Toda coleção não vazia de conjuntos não vazios admite uma função escolha.

Teorema 4.1.1. São Equivalentes:

- (a) O Axioma da escolha
- (b) O Lema de Zorn
- (c) O Teorema de Zermelo

Demonstração. Lema de Zorn $\Rightarrow$ Teorema de Zermelo: Seja X um conjunto não vazio. Seja $\mathcal{F}$ a família de todos os pares $(A, \leq_A)$ tais que $\emptyset \neq A \subset X$ é um conjunto bem ordenado. É fácil ver que $\mathcal{F}$ é um conjunto parcialmente ordenado não vazio se definimos $(A, \leq_A) \leq (B, \leq_B)$ quando:

- i. $A \subset B$;
- ii. Se $x, y \in A$, então $x \leq_A y$ se, e somente se, $x \leq_B y$;
- iii. Se $x \in A$ e $y \in B \setminus A$, então $x \leq_B y$.

Provaremos que cada cadeia em $\mathcal{F}$ é limitada superiormente. De fato, seja $\{(A_i, \leq_{A_i}) : i \in I\}$ uma cadeia em $\mathcal{F}$, e seja $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Dados $x, y \in A$ definamos $x \leq_A y$ se $x, y \in A_i$ e $x \leq_{A_i} y$. É fácil verificar que a relação $\leq_A$ está bem definida, e é uma relação de ordem parcial em A . Afirmamos que $(A, \leq_A)$ é um conjunto bem ordenado. Seja $\emptyset \neq B \subset A$, e seja $J = \{j \in I : B \cap A_j \neq \emptyset\}$.

Notemos que $\leq_A$ coincide com $\leq_{A_i}$ em A_i para cada $i \in I$. Como $\{(A_i, \leq_{A_i})\}$ é bem ordenado para cada $i \in I$, segue que todos os conjuntos $B \cap A_j$, com $j \in J$, tem o mesmo elemento mínimo, que denotaremos por b_0 . Segue que b_0 é o elemento mínimo de B . Logo $(A, \leq_A)$ é bem ordenado, ou seja, $(A, \leq_A) \in \mathcal{F}$.

Agora é claro que $(A, \leq_A)$ é uma cota superior da cadeia $\{(A_i, \leq_{A_i}) : i \in I\}$. Pelo Lema de Zorn, $\mathcal{F}$ possui pelo menos um elemento maximal $(A, \leq_A)$. Segue pela maximalidade de $(A, \leq_A)$ que $A = X$. Logo $(X, \leq_X)$ é um conjunto bem ordenado.

Demonstração. Teorema de Zermelo $\Rightarrow$ Axioma da escolha: Seja $X = \bigcup_{i \in I} \alpha_i$. Logo, pelo Teorema de Zermelo, X pode ser bem ordenado. Assim, cada subconjunto de X possui um elemento mínimo, em particular, para todo $i \in I$, como $\alpha_i \subset X$, temos que α_i possui um elemento mínimo, digamos x_i . Seja $\Phi(\alpha_i) = x_i$, então $\prod_{i \in I} \{x_i\} \in \prod_{i \in I} \alpha_i$, ou seja, $\prod_{i \in I} \alpha_i \neq \emptyset$, portanto, vale o Axioma da Escolha.

Demonstração. Axioma da escolha $\Rightarrow$ Lema de Zorn: Consideremos X um conjunto parcialmente ordenado tal que para todo $A \subset X$, totalmente ordenado, existe cota superior. Seja $\mathcal{X} = \{A \subset X : A \text{ é totalmente ordenado}\}$. O conjunto $\mathcal{X}$ é parcialmente ordenado pela relação de inclusão de conjuntos. O nosso objetivo é mostrar que, sob certas condições, $\mathcal{X}$ tem um elemento maximal. Dado $A \in \mathcal{X}$, definamos o conjunto $\hat{A} = \{x \in X : A \cup \{x\} \in \mathcal{X}\}$. Notemos que $A \subset \hat{A}$ para todo $A \in \mathcal{X}$.

Proposição 4.1.2. $A \in \mathcal{X}$ se, e somente se, $A = \hat{A}$

Demonstração. $\Rightarrow$ Suponhamos $A \in \mathcal{X}$ maximal. Sabemos que $A \subset \hat{A}$. Resta mostrarmos que $\hat{A} \subset A$. Para tanto, seja $x \in \hat{A}$. Então, $x \in \mathcal{X}$ e $A \cup \{x\}$, de modo que $x \in A$. Logo, $A = \hat{A}$. $\Leftarrow$ Suponhamos que $A = \hat{A}$. Seja $B \in \mathcal{X}$ tal que $A \subset B$. Provaremos que $B \subset A$. Dado $b \in B$, então $A \cup \{b\} \subset B$ e $A \cup \{b\} \in \mathcal{X}$. Assim, $b \in \hat{A} = A$. Logo $B \subset A$. Portanto, $A = B$, isto é, A é maximal em $\mathcal{X}$.

Daqui em diante assumiremos que vale o Axioma da Escolha.

Seja $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow X$ uma função escolha para X . Definamos $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ como a seguir:

$$g(A) = \begin{cases} A & , \text{ se } A = \hat{A}, \\ A \cup \{f(\hat{A} \setminus A)\} & , \text{ se } A \neq \hat{A}. \end{cases}$$

Observemos que $f(\hat{A} \setminus A) \in \hat{A} \setminus A$ e $f(\hat{A} \setminus A) \in X$, o que implica em $A \cup \{f(\hat{A} \setminus A)\} \in \mathcal{X}$. Logo, g está bem definida. Além disso, notemos que $A \in \mathcal{X}$ é maximal se, e somente se, $g(A) = A$.

Definição 4.1.1. Diremos que $\tau \subset \mathcal{X}$ é uma torre se as seguintes condições são satisfeitas:

- (1) $\emptyset \in \tau$;
- (2) se $A \in \tau$, então $g(A) \in \tau$;
- (3) se $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \tau$ é totalmente ordenado, então $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \in \tau$.

Proposição 4.1.3. $\mathcal{X}$ é uma torre.

Demonstração. Por vacuidade, $\emptyset \in \mathcal{X}$.

Seja $A \in \mathcal{X}$. Se $A = \hat{A}$ então $g(A) = A \in \mathcal{X}$. No caso em que $A \neq \hat{A}$, pelas definições de f e de $\hat{A}$, $g(A) = A \cup \{f(\hat{A} \setminus A)\} \in \mathcal{X}$. Logo, $g(A) \in \mathcal{X}$.

Seja $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{X}$, totalmente ordenado. Então, $C_\lambda \subset X$ para todo $\lambda \in \Lambda$ e, portanto, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \subset X$. Dados $x, y \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$, existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ tais que $x \in C_{\lambda_1}$ e $y \in C_{\lambda_2}$. Como $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é totalmente ordenado, existe $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$ tal que $C_{\lambda_i} \subset C_\lambda$ para todo $i = 1, 2$. Desta forma, $x, y \in C_\lambda$. Como $C_\lambda \in \mathcal{X}$, isto é, C_λ é totalmente ordenado com a ordem parcial induzida por X , temos $x \preceq y$ ou $y \preceq x$. Logo, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \in \mathcal{X}$.

Proposição 4.1.4. Se $\{X_i\}_{i \in I}$ é uma família não vazia de torres em $\mathcal{X}$, então $\bigcap_{i \in I} X_i$ é uma torre em $\mathcal{X}$.

Demonstração. . Para cada índice $i \in I$, X_i é uma torre e, assim, $\emptyset \in X_i$. Logo, $\emptyset \in \bigcap_{i \in I} X_i$.

Seja $A \in \bigcap_{i \in I} X_i$. Então, $A \in X_i$ para todo $i \in I$. Como cada X_i é uma torre, segue que $g(A) \in X_i$. Assim, $g(A) \in \bigcap_{i \in I} X_i$.

Seja $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \bigcap_{i \in I} X_i$, totalmente ordenado. Para cada índice $j \in I$, temos $\bigcap_{i \in I} X_i \subset X_j$, de modo que $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset X_j$. Como $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é totalmente ordenado e cada X_j é uma torre, então $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \in X_j$ para todo $j \in I$. Portanto, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \in \bigcap_{i \in I} X_i$.

Em particular, a interseção de todas as torres em $\mathcal{X}$ é uma torre em $\mathcal{X}$ e a denotaremos por τ_0 . Desta forma, τ_0 é a menor torre em $\mathcal{X}$.

Definição 4.1.2. Diremos que $C \in \tau_0$ é comparável se, para todo $D \in \tau_0$, tem-se $C \subset D$ ou $D \subset C$.

Mostraremos a seguir que a torre τ_0 é totalmente ordenada, isto é, que todo elemento de τ_0 é comparável.

Proposição 4.1.5. Proposição 8.0.4. Se $C \in \tau_0$ é comparável e $D \in \tau_0$ é tal que $D \subset C$ e $D \neq C$, então $g(D) \subset C$.

Demonstração. Como C é comparável e τ_0 é uma torre, temos $g(D) \subset C$ ou $C \subset g(D)$. Há dois casos.

Caso 1: $D = \hat{D}$.

Neste caso, temos $g(D) = D$ e $C \not\subset g(D)$, pois por hipótese não vale a inclusão $C \subset D$. Logo, $g(D) \subset C$.

Caso 2: $D \neq \hat{D}$.

Pela definição da função g , temos $g(D) = D \cup \{f(\hat{D} \setminus D)\}$. Suponhamos que $C \subset g(D)$ e $C \neq g(D)$. Então, existe $x \in g(D)$ tal que $x \notin C$. Por outro lado, existe $y \in C$ tal que $y \notin D$. Assim, $y \in g(D) = D \cup \{f(\hat{D} \setminus D)\}$, de modo que $y = f(\hat{D} \setminus D)$. Como $y \in C$, temos $y \neq x$. Além disso, $x \in g(D) = D \cup \{y\}$, donde $x \in D \subset C$. Absurdo. Logo, $g(D) \subset C$. $\square$

Proposição 4.1.6. Seja $\mathcal{C} = \{C \in \tau_0; C \text{ é comparável}\}$. Então, $\mathcal{C}$ é uma torre

Demonstração. Como $\emptyset \in \tau_0$ e, para todo $D \in \tau_0$, $\emptyset \subset D$, então $\emptyset \in \mathcal{C}$.

Sejam $A \in \mathcal{C}$ e $\mathcal{U} = \{D \in \tau_0; D \subset A \text{ ou } g(A) \subset D\}$. A fim de mostrar que $g(A) \in \mathcal{C}$, mostraremos primeiramente que $\mathcal{U}$ é uma torre.

Com efeito,

- Como $\emptyset \in \tau_0$ e $\emptyset \subset A$, então $\emptyset \in \mathcal{U}$.
- Seja $D \in \mathcal{U}$. Então, $D \in \tau_0$ e $D \subset A$ ou $g(A) \subset D$. Como τ_0 é uma torre, temos $g(D) \in \tau_0$. Suponhamos $D \subset A$ e $D \neq A$. Visto que $A \in \tau_0$ é comparável, pela Proposição 8.0.4,

$g(D) \subset A$. Logo, $g(D) \in \mathcal{U}$. Se $D = A$, então $g(D) = g(A)$, de maneira que $g(D) \in \mathcal{U}$. Por fim, suponhamos que $g(A) \subset D$. Neste caso, como $g(A) \subset D \subset g(D)$, então $g(D) \in \mathcal{U}$.

- Seja $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{U}$ um conjunto totalmente ordenado. Como $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \tau_0$ e τ_0 é uma torre, temos $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \in \tau_0$. Há então dois casos a analisar.

Caso 1: $B_\lambda \subset A$ para todo $\lambda \in \Lambda$.

Neste caso, temos $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \subset A$. Logo, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \in \mathcal{U}$.

Caso 2: $B_{\lambda_0} \not\subset A$ para algum $\lambda_0 \in \Lambda$.

Como $B_{\lambda_0} \in \mathcal{U}$, temos $g(A) \subset B_{\lambda_0}$. Então, $g(A) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ e, assim, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \in \mathcal{U}$.

Desta forma, $\mathcal{U} \subset \tau_0$ é uma torre.

Como τ_0 é a menor torre em $\mathcal{X}$, então $\mathcal{U} = \tau_0$. Por conseguinte, dado $D \in \tau_0$, temos $D \subset A \subset g(A)$ ou $g(A) \subset D$. Portanto, $g(A) \in \mathcal{C}$.

Finalmente, seja $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{C}$, totalmente ordenado. Como $\mathcal{C} \subset \tau_0$, segue que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \in \tau_0$. Dado $D \in \tau_0$, temos então as seguintes possibilidades.

Caso 1: $C_\lambda \subset D$ para todo $\lambda \in \Lambda$.

Neste caso, temos $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \subset D$.

Caso 2: $C_{\lambda_0} \not\subset D$ para algum $\lambda_0 \in \Lambda$.

Como $C_{\lambda_0} \in \mathcal{C}$, C_{λ_0} é comparável, e por isso $D \subset C_{\lambda_0}$. Diante disso, $D \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$. Portanto, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \in \mathcal{C}$.

Logo, o conjunto $\mathcal{C} \subset \tau_0$ é uma torre.

□

Proposição 4.1.7. O conjunto X tem um elemento maximal.

Demonstração. Como $\mathcal{C}$ é uma torre e $\mathcal{C} \subset \tau_0$, então $\mathcal{C} = \tau_0$, ou seja, τ_0 é totalmente ordenado. Daí, como τ_0 é uma torre, segue que o conjunto $C_0 = \bigcup_{A \in \tau_0} A \in \tau_0$. Além disso, $g(C_0) \in \tau_0$ e $g(C_0) \subset C_0$. Pela definição de g , $C_0 \subset g(C_0)$ e, portanto, $g(C_0) = C_0$. Logo, pela Proposição 8.0.1, o conjunto C_0 é maximal em $\mathcal{X}$.

Visto que C_0 é um subconjunto totalmente ordenado de X , existe $m \in X$ tal que $c \preceq m$ para todo $c \in C_0$. O conjunto $C_0 \cup \{m\} \subset X$ é totalmente ordenado e $C_0 \subset C_0 \cup \{m\}$. Como C_0 é maximal em $\mathcal{X}$, temos $C_0 = C_0 \cup \{m\}$. Logo, $m \in C_0$.

Se $n \in X$ é tal que $m \preceq n$, então $C_0 \cup \{n\}$ é um subconjunto de X totalmente ordenado. Como C_0 é maximal em $\mathcal{X}$, segue que $C_0 = C_0 \cup \{n\}$. Daí $n \in C_0$ e, por isso, $n \preceq m$. Desta forma, $m = n$. Portanto, m é maximal em X . Isso conclui a nossa demonstração. □

5 EQUIVALÊNCIAS DO AXIOMA DA ESCOLHA COM A EXISTÊNCIA DE BASES EM UM ESPAÇO VETORIAL

Neste capítulo vamos demonstrar a surpreendente (e muito possivelmente inesperada para a maioria) equivalência entre o Axioma da Escolha e a afirmação de que todo espaço vetorial possui uma base. O fato de que todo espaço vetorial possui uma base (assumindo-se o Axioma da Escolha) foi demonstrado originalmente por Hamel em 1905. Apenas em 1984, quase 80 anos depois, Andreas Blass demonstrou que a recíproca desse fato também é verdadeira, estabelecendo a equivalência entre as duas afirmações.

5.1 Preliminares de Álgebra Linear

Os espaços vetoriais desempenham um papel crucial em muitas aplicações da matemática, estando presentes em diversos ramos dessa disciplina e fazendo parte, junto com as transformações lineares, do arcabouço de qualquer matemático como ferramentas básicas para o entendimento e generalização de diversos outros conceitos.

Observação: Aqui nesta seção iremos denotar os espaços vetoriais por U e V , e seus elementos por u , v , w , entre outras, como de costume na maior parte da literatura de álgebra linear.

Espaço vetorial: Existem diversos problemas práticos e teóricos nos quais temos um conjunto V cujos elementos podem ser números reais, ou sequências de números reais, ou matrizes, ou polinômios, onde esses elementos podem ser somados e multiplicados por constantes (que chamaremos de escalares) ou somados entre si de uma certa maneira, de modo que o resultado ainda é um elemento de V . Quando não há escalares ou elementos de V que operados conforme as regras tenham resultado que não é um elemento de V , dizemos que este conjunto é fechado para aquela operação.

A recorrência de conjuntos com tais propriedades motiva o conceito de espaço vetorial.

Quando definimos espaço vetorial, dependemos de utilizar um corpo K , que é dito o corpo de escalares sobre o qual se constrói o espaço vetorial, mas normalmente se usa $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ na maioria dos textos, os elementos de K são justamente escalares citados acima.

Definição 5.1.1. (Espaço vetorial). Um espaço vetorial sobre um corpo K é um conjunto não vazio V de elementos $x, y, \dots$, que chamaremos de vetores, juntamente com duas operações algébricas. Essas operações são chamadas de adição vetorial e multiplicação de vetores por

escalares, ou seja, por elementos de K .

A adição de vetores associa a cada par ordenado (x, y) de vetores um vetor $x + y$, chamado de soma de x e y , de tal forma que as seguintes propriedades são válidas. A adição de vetores é comutativa e associativa, ou seja, para todos os vetores temos

$$\begin{aligned}x + y &= y + x \\x + (y + z) &= (x + y) + z;\end{aligned}$$

além disso, existe um vetor 0 , chamado vetor nulo, e para cada vetor x existe um vetor $-x$, tal que para todos os vetores temos

$$\begin{aligned}x + 0 &= x \\x + (-x) &= 0.\end{aligned}$$

A multiplicação por escalares associa a todo vetor x e escalar α um vetor αx (também escrito $x\alpha$), denominado produto de α e x , desta forma que para todos os vetores x, y e escalares α, β temos

$$\begin{aligned}\alpha(\beta x) &= (\alpha\beta)x \\1x &= x\end{aligned}$$

e as leis distributivas

$$\begin{aligned}\alpha(x + y) &= \alpha x + \alpha y \\(\alpha + \beta)x &= \alpha x + \beta x.\end{aligned}$$

Pela definição, vemos que a adição de vetores é uma aplicação $V \times V \longrightarrow V$, enquanto a multiplicação por escalares é uma aplicação $K \times V \longrightarrow V$.

Agora vamos dar alguns exemplos de espaços vetoriais.

Exemplo 5.1.1. O espaço $\mathbb{R}$ dos números reais é trivialmente um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Ele é um espaço vetorial definido com as operações de adição vetorial e multiplicação por escalar definido de forma usual e a verificação das propriedades que caracterizam um espaço vetorial são imediatas.

Exemplo 5.1.2. O espaço $\mathbb{R}^n$. Este é o espaço euclidiano n -dimensional. Este espaço em questão é o conjunto de todas as n -uplas de números reais, escrito $x = (\xi_1, \dots, \xi_n), y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$,

etc., e agora vemos que este é um espaço vetorial real com as operações de adição vetorial e multiplicação por escalar definidas da maneira (usual) a seguir:

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \dots, \xi_n + \eta_n)$$

$$\alpha x = (\alpha \xi_1, \dots, \alpha \xi_n) \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Exemplo 5.1.3. O espaço $\mathbb{R}^\infty$. Este espaço é conhecido como " $\mathbb{R}$ infinito". Este espaço em questão é o conjunto de todas sequências (infinitas) de números reais. Aqui a adição de vetores e a multiplicação por escalar podem ser definidas da mesma forma que o exemplo anterior.

Exemplo 5.1.4. O espaço $\mathbb{R}^{(\infty)}$. Este espaço difere do anterior pois é o conjunto de todas sequências infinitas de números reais que tem apenas um número finito de termos não-nulos.

Exemplo 5.1.5. O espaço $C[a, b]$. Cada ponto deste espaço é uma função contínua de valor real em $[a, b]$. O conjunto dessas funções forma um espaço vetorial com as operações algébricas definidas da maneira usual:

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t)$$

$$(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$$

$$(\alpha \in \mathbb{R}).$$

Da análise, sabemos que, se f e g são funções contínuas em $[a, b]$, então $f + g$ e αf são funções contínuas em $[a, b]$, onde α é real.

Um subespaço de um espaço vetorial V é um subconjunto não vazio Y de V tal que para todos $y_1, y_2 \in Y$ e todos os escalares α, β temos $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$. Portanto, Y é ele próprio um espaço vetorial, sendo as duas operações algébricas aquelas induzidas a partir de V .

Um subespaço Y de V é dito subespaço próprio quando $Y \neq V$ ou $Y \neq \emptyset$. Caso contrário, Y é dito um subespaço impróprio de V . É fácil ver que $Y = V$ e $Y = \{0\}$ são subespaços de qualquer espaço vetorial V .

Exemplo 5.1.6. O espaço $\mathbb{R}^{(\infty)}$ novamente. Este espaço está claramente contido no espaço do exemplo 5.1.3. Note que este é um subespaço de $\mathbb{R}^\infty$.

Uma combinação linear de vetores $x_1, \dots, x_m$ de um espaço vetorial V é uma expressão da forma

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m$$

onde os coeficientes $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ são quaisquer escalares.

Para qualquer subconjunto não vazio $M \subset V$ o conjunto de todas as combinações lineares de vetores de M é chamado de espaço gerado por M , cuja denotaremos por $[M]$.

Obviamente, este é um subespaço Y de V , e dizemos que Y é gerado por M .

Apresentaremos agora dois importantes conceitos relacionados que serão usados repetidamente.

Definição 5.1.2. (Independência linear, dependência linear). A independência linear e a dependência de um determinado conjunto M de vetores $x_1, \dots, x_r$ ($r \geq 1$) em um espaço vetorial V são definidas por meio da equação

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_r x_r = 0, \quad (5.1)$$

onde $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ são escalares. Claramente, a equação 5.1 vale para $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$. Se esta for a única r -upla de escalares para a qual 5.1 é válida, o conjunto M é dito linearmente independente. Diz-se que M é linearmente dependente se M não for linearmente independente, isto é, se existe alguma r -upla r de escalares, nem todos nulos tal que se verifique 5.1

Um subconjunto arbitrário M de V é dito linearmente independente se todo subconjunto finito não vazio de M for linearmente independente. Diz-se que M é linearmente dependente se M não for linearmente independente.

Uma motivação para esta terminologia resulta do fato de que se $M = \{x_1, \dots, x_r\}$ é linearmente dependente, pelo menos um vetor de M pode ser escrito como uma combinação linear dos outros; por exemplo, se 5.1 vale para $\alpha_r \neq 0$, então M é linearmente dependente e podemos resolver a equação para x_r para obter

$$x_r = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_{r-1} x_{r-1} \quad (\beta_j = -\alpha_j / \alpha_r).$$

Podemos usar os conceitos de dependência e independência linear para definir a dimensão de um espaço vetorial, começando como segue.

Definição 5.1.3. (Espaços vetoriais de dimensões finitas e infinitas). Um espaço vetorial V é dito ser de dimensão finita se existe um número inteiro positivo n tal que V contém um conjunto linearmente independente de n vetores, enquanto qualquer conjunto de $n + 1$ ou mais vetores de V é linearmente dependente. n é chamada de dimensão de V e escrevemos $n = \dim V$. Por

convenção, $X = \{0\}$ tem dimensão finita e $\dim X = 0$. Se V não tiver dimensão finita, diz-se que tem dimensão infinita.

Na análise, os espaços vetoriais de dimensão infinita são de maior interesse do que os de dimensão finita, segundo Kreyszig [(7), p.54]. Por exemplo, $C[a, b]$ é de dimensão infinita, enquanto $\mathbb{R}^n$ é n -dimensional (ambos sobre o corpo $\mathbb{R}$).

Se $\dim X = n$, uma n -upla linearmente independente de vetores de V é chamada de base para V (ou base em V). Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base para V , cada $x \in V$ tem uma representação única como uma combinação linear dos vetores de base:

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

Por exemplo, uma base para $\mathbb{R}^n$ é

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0),$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

Chamada a base canônica para $\mathbb{R}^n$. Mais geralmente, se V é qualquer espaço vetorial, não necessariamente de dimensão finita, e B é um subconjunto linearmente independente de V que seja gerador de V , então B é chamado de base (ou base de Hamel) para V . Portanto, se B é uma base para V , então todo $x \in V$ diferente de zero tem uma representação única como uma combinação linear de elementos de B com escalares diferentes de zero como coeficientes. Todo espaço vetorial $V \neq \{0\}$ tem uma base formada por vetores L.I. não-nulos de V . No caso de dimensão finita isso é bem conhecido e faz parte de qualquer da ementa de qualquer curso de álgebra linear. Para espaços vetoriais arbitrários de dimensão infinita, uma prova de existência será dada pelo uso do lema de Zorn na próxima seção.

Segundo Kreyszig [(7), p.55], todas as bases para um determinado espaço vetorial (finito ou infinito) V têm o mesmo número cardinal. (Uma prova exigiria ferramentas um pouco mais avançadas da teoria dos conjuntos).

Este número é chamado de dimensão de V . Observe que isso inclui e se estende aos espaços de dimensão infinita.

5.2 Equivalência Entre o Axioma da Escolha e a Existência de Bases Vetoriais

Teorema 5.2.1. Todo espaço vetorial admite uma base de Hamel.

Esse resultado foi demonstrado primeiro por Hamel em 1905. No ano de 1984, Blass demonstrou que a recíproca desse resultado também é válida, o que conclui a equivalência dessas duas afirmações.

Demonstração. Seja V um espaço vetorial. Se $V = \{0\}$, então, por convenção $B = \emptyset$ é uma base de V .

Seja então $V \neq \{0\}$, logo existe um vetor $v \neq 0$ em V . Como $B = \{v\}$ é unitário e $v \neq 0$, então B é L.I.

Agora que provamos que existem subconjuntos L.I. em V , seja X o conjunto dos subconjuntos L.I. de V , seja $B \subset V$ um conjunto L.I. e seja

$$W = \{C \subset X; B \subset C\}$$

Considerando W com a ordem parcial dada pela inclusão de conjuntos, seja $\tilde{C}$ uma cadeia em W , então $D = \bigcup_{Y \in \tilde{C}} Y$ é uma cota superior para a cadeia $\tilde{C}$. Devemos mostrar que D é L.I.

Para mostrar isso, suponha que exista $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset D$ L.D. Sendo a cadeia um conjunto totalmente ordenado, logo existe algum $\tilde{Y} \in \tilde{C}$ tal que

$$\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \subset \tilde{Y} \in \tilde{C},$$

o que é um absurdo, pois $\tilde{Y}$ é L.I., logo D deve ser L.I. Como B foi escolhido arbitrariamente, temos que para cada cadeia $\tilde{C}$ em X há uma cota superior, logo, pelo Lema de Zorn, X tem um elemento maximal $\mathcal{M}$. Afirmamos que $\mathcal{M}$ é uma base de V .

De fato, $\mathcal{M}$ é cota superior de W , logo é L.I. e $[\mathcal{M}] = V$, caso $[\mathcal{M}] \neq V$, tome um vetor não-nulo $u \in V \setminus [\mathcal{M}]$, logo $\{u\} \cup \mathcal{M}$ contém propriamente $\mathcal{M}$ e é L.I. o que contradiz a maximalidade de $\mathcal{M}$, portanto $\mathcal{M}$ é uma base de V . *Q.E.D.* $\square$

Agora iremos demonstrar que a recíproca do resultado acima é válida, ou seja, vamos mostrar que a existência de base em espaços vetoriais arbitrários implica no Axioma da Escolha (logo implica no Lema de Zorn, conforme equivalência demonstrada no capítulo anterior). Para tal, precisaremos de alguns fatos preliminares.

A demonstração não será direta, como feito por Blass em 1984 [7], mostraremos que a existência de bases implica no axioma a seguir:

Axioma 5.2.1. (Axioma da Múltipla Escolha). Para toda família $S = \{X_i\}_{i \in I}$ de conjuntos não vazios, existe uma função $F : S \rightarrow \mathcal{P}(\bigcup_{i \in I} X_i)$ tal que $F(A)$ é um subconjunto não vazio, finito de A , para cada $A \in S$.

Admitindo ZF, é um resultado conhecido na Teoria de Conjuntos que o Axioma da Múltipla Escolha implica no Axioma da Escolha. Não iremos demonstrar este resultado neste texto, mas a demonstração pode ser encontrada no capítulo 9 de [4].

Para detalhes das definições de álgebra abstrata usadas aqui, que incluem os conceitos de corpo, subcorpo, anel, corpo de frações, polinômios, entre outros, recomendamos [27]. Seus dois primeiros capítulos possuem o necessário para que se entenda essa demonstração.

Dada uma família $\mathcal{X} = \{X_i\}_{i \in I}$, em que I é um conjunto qualquer e os elementos de $\mathcal{X}$ são conjuntos não vazios e dois a dois disjuntos, definimos o conjunto $X = \bigcup_{i \in I} X_i$. Considere o conjunto $\mathbb{R}[X]$ dos polinômios com variáveis em X . Assim como nessa referência, denotaremos por $\mathbb{R}(X)$ o corpo de frações de $\mathbb{R}[X]$, ou seja, $\mathbb{R}(X) = \left\{ r = \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{R}[X], q \neq 0 \right\}$. Da álgebra abstrata, sabemos que $\mathbb{R}[X]$ é um domínio de fatoração única, portanto todo elemento de $\mathbb{R}(X)$ se escreve de maneira única como o quociente de polinômios primos entre si, isto é, sem fatores em comum.

Definição 5.2.1. Um monômio M em $\mathbb{R}[X]$ é dado por, $M = \prod_{x \in X} x^{\alpha_n}$ em que $\alpha_n \in \mathbb{N}$. Um polinômio em $\mathbb{R}[X]$ é uma combinação linear finita de monômios com coeficientes em $\mathbb{R}$.

Definição 5.2.2. Seja $q = x_{j_1}^{n_1} x_{j_2}^{n_2} \dots x_{j_m}^{n_m}$ um monômio real com variáveis em X . Dizemos que q tem i -grau N , se as variáveis de q que estiverem em X_i tiverem N como a soma de seus graus.

[9]] nos dá o seguinte exemplo: sejam os conjuntos $X_i = \{x_1, x_2\}$ e $X_j = \{y_1, y_2\}$. Então $X = \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$. Um monômio em $\mathbb{R}[X]$ é da forma $M = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2}$. O i -grau de M é $\alpha_1 + \alpha_2$ e o j -grau de M é $\beta_1 + \beta_2$.

Definição 5.2.3. Seja $p \in \mathbb{R}(X)$. Diremos que p é i -homogêneo de grau d (aqui d pode ser inclusive um inteiro negativo), se p é o quociente de dois polinômios tais que todos os monômios no denominador têm o mesmo i -grau n enquanto que todos no numerador têm i -grau $n + d$. Denotamos este grau d do polinômio p por i -grau (p) .

Lema 5.2.1. Seja $\mathcal{K}$ o conjunto das funções racionais $r \in \mathbb{R}(X)$, tais que, $r = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{R}[X], q \neq 0$ e com p e q sem fatores comuns, tais que para todo $i \in I$, ocorre que i -grau $(p) = i$ -grau (q) . Então $\mathcal{K}$ é subcorpo de $\mathbb{R}(X)$.

Demonstração. Para mostrar que $\mathcal{K}$ é subcorpo, devemos mostrar que:

- i. $0 \in \mathcal{K}$ e $1 \in \mathcal{K}$;
- ii. Se $\frac{p}{q} \in \mathcal{K}$, então $-\frac{p}{q} \in \mathcal{K}$ e $\frac{q}{p} \in \mathcal{K}$;
- iii. Se $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \in \mathcal{K}$, então $\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} \in \mathcal{K}$;
- iv. Se $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \in \mathcal{K}$, então $\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \in \mathcal{K}$.

A propriedade i. é imediata, uma vez que $0 = \frac{0}{1}$ e $1 = \frac{1}{1}$, são quocientes de polinômios i -homogêneos de grau 0.

Já a propriedade ii. segue do fato que $i - \text{grau}(p) = i - \text{grau}(-p)$.

Agora sejam $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \in \mathcal{K}$ e vamos provar as propriedades iii. e iv. Primeiro veja que:

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}$$

Sejam p e q dois polinômios sem fatores em comum, tais que $p_1 q_2 + p_2 q_1 = fp$, e $q_1 q_2 = fq$, dessa forma, $\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p}{q}$.

Agora, veja que para todo $i \in I$, vale que:

$$i - \text{grau}(p_1 q_2) = i - \text{grau}(p_1) + i - \text{grau}(q_2) = i - \text{grau}(q_1) + i - \text{grau}(p_2) = i - \text{grau}(q_1 p_2).$$

Portanto, $p_1 q_2 + p_2 q_1$ é i -homogêneo. E ainda,

$$i - \text{grau}(p_1 q_2 + p_2 q_1) = i - \text{grau}(p_2 q_1) = i - \text{grau}(q_1 q_2).$$

Logo, $i - \text{grau}(fp) = i - \text{grau}(fq)$, e portanto, $i - \text{grau}(p) = i - \text{grau}(q)$. Ou seja, $\frac{p}{q} \in \mathcal{K}$.

O mesmo raciocínio pode ser usado para provar que $i - \text{grau}(p_1 p_2) = i - \text{grau}(q_1 q_2)$, e assim temos a validade da propriedade iv. Portanto, $\mathcal{K}$ é subcorpo de $\mathbb{R}(X)$. $\square$

Teorema 5.2.2. Todo espaço vetorial tem base $\Rightarrow$ Axioma da Escolha.

Demonstração. Considere uma família de conjuntos não vazios $\mathcal{X} = \{X_i\}_{i \in I}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que os X_i 's são dois a dois disjuntos (se não for o caso, basta considerar a família $\{X_i \times \{X_i\}\}_{i \in I}$). Conforme vimos acima, basta mostrar que vale o Axioma da Múltipla Escolha. Para isto é suficiente encontrar uma família $\{Y_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos não vazios finitos $Y_i \subset X_i$ e definir $F(X_i) = Y_i$, para cada $i \in I$. Considere $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ e o corpo de frações $\mathbb{R}(X)$. Seja $V \subset \mathbb{R}(X)$ o $\mathcal{K}$ -espaço vetorial gerado pelo conjunto X , onde $\mathcal{K}$ é o corpo introduzido no lema 5.2.1. Por hipótese, V tem uma base, digamos $B \subset V$. Seja $i \in I$ e $x \in X_i$. Então x pode ser escrito como uma combinação linear finita de elementos de B , isto é,

$$x = \sum_{b \in B(x)} \alpha_b(x) \cdot b$$

onde $B(x) := \{b \in B : \alpha_b(x) \neq 0\}$ é um subconjunto finito de B . Se y é outro elemento de X_i , então temos

$$y = \sum_{b' \in B(y)} \alpha_{b'}(y) \cdot b'$$

Como $y = \left(\frac{y}{x}\right) \cdot x$ e, pela definição de $\mathcal{K}$, temos que $\frac{y}{x} \in \mathcal{K}$, então

$$y = \sum_{b \in B(x)} \left(\frac{y}{x} \cdot \alpha_b(x)\right) \cdot b$$

Comparando as duas representações de y e utilizando a unicidade da representação de vetores em uma base, temos que

$$B(x) = B(y) \text{ e } \alpha_b(y) = \frac{y}{x} \cdot \alpha_b(x), \text{ para todo } b \in B(x)$$

Isso significa que o subconjunto finito $B(x) \subset B$ e os elementos $\frac{\alpha_b(x)}{x}$ de $\mathbb{R}(X)$ só dependem de i e não da escolha particular de $x \in X_i$. Portanto podemos chamar $B(x)$ simplesmente de B_i e $\frac{\alpha_b(x)}{x}$ de α_b^i , qualquer que seja $x \in X_i$. Como α_b^i é i -homogêneo de grau -1 (e j -homogêneo de grau 0 para $j \neq i$), quando escrevemos α_b^i como um quociente de polinômios sem fatores em comum, alguma(s) variável(is) de X_i devem aparecer no denominador. Seja D_b^i o conjunto das variáveis de X_i que aparecem no denominador de α_b^i (quando α_b^i é escrito como quociente de polinômios sem fatores em comum). Assim D_b^i é um subconjunto finito e não vazio de X_i . Tomando $Y_i = \bigcup_{b \in B_i} D_b^i$, segue que Y_i também é um subconjunto finito e não vazio de X_i . Agora, basta definir $f(X_i) = Y_i$, para cada $i \in I$. $\square$

A nossa demonstração do teorema acima também é fortemente baseada em [9].

6 CONCLUSÃO

Acreditamos que o trabalho possui relevância ao explicitar os sistemas axiomáticos e apresentar uma explicação sucinta, porém suficiente, do que seriam, destacando a sua importância no campo das ciências formais como ferramenta para a construção do conhecimento, trazendo junto parte do arcabouço histórico que foi responsável pelo seu desenvolvimento, além de aplicações e não apenas os pontos positivos, mas também um pouco sobre as limitações e possíveis inconveniências desses sistemas, adicionando à pouca literatura em português a demonstração de que o Axioma da Escolha tem uma surpreendente equivalência em álgebra linear, além do caráter agregador de cultura, que além do já citado, explicita nos apêndices uma ampla gama de equivalências ao Axioma da Escolha e proposições mais fortes que este. Como dito no início do texto, não nos aprofundamos nas nuances que diferenciam sistemas formais, sistemas axiomáticos e modelos, valendo um adendo que não são comuns em português bons textos sobre o tema, o que pode suscitar algo de interesse para ser pesquisado.

Nas versões iniciais deste trabalho pretendíamos ter um capítulo ou seção mostrando que existe um modelo em que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ pode ser visto como uma união contável de conjuntos contáveis, como afirmado no livro do professor Horst Herrlich *Axiom of Choice*, p.173. Lá, é citado que este é conhecido como o modelo M9 de Feferman–Levy, há a menção de que este resultado se encontra no livro *Consequences of the Axiom of Choice*, 1998, da professora Jean Rubin e do professor Paul Howard, porém, mais uma vez, nos deparamos não com o resultado completo e demonstrado, mas com um breve esboço e uma nova menção de que este resultado se encontrava em outro lugar. Encontramos o resultado completamente descrito em [4], *The Axiom Of Choice*, de T. Jech, p.142. o modelo em questão foi aparentemente produzido por Férfeman e Azriel Levy em 1963, porém não conseguimos localizar o artigo original até o fim desta publicação. Outros livros fazem menção a este modelo, porém, não fácil achar informações sobre ele. Fica a provocação para quem quiser se aprofundar e saber mais sobre este modelo e outros modelos.

A busca por exemplos de espaços vetoriais com duas bases de dimensões distintas ou espaços vetoriais sem base (em sistemas diferentes do ZFC) e a investigação de uma possível aplicação deles também é interessante, exigindo além de técnicas de teoria dos conjuntos, técnicas de análise funcional.

REFERÊNCIAS

- [1] SANCHIS, Rémy, *O Axioma da Escolha, o Lema de Zorn e o Teorema de Zermelo*. Instituto de Ciências Exatas - Departamento de Matemática. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2016.
- [2] SILVA, Samuel Gomes da; JESUS, João Paulo Cirineu de, *Cem Anos do Axioma da Escolha: Boa Ordenação, Lema de Zorn e o Teorema de Tychonoff*. Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2008.
- [3] GONÇALVES, A., *Introdução à Álgebra*. 5ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Projeto Euclides), 2015.
- [4] JECH, T., *The Axiom of Choice*. North Holland, 1973.
- [5] HERRLICH, H., *Axiom of Choice*. Springer-Verlag, 2006.
- [6] KANAMORI, A., *The Mathematical Development of Set Theory from Cantor to Cohen*. The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 2, No. 1, 1-71, 1996.
- [7] BLASS, A., *Existence of bases implies the axiom of choice*. Contemporary Mathematics 31 (1984), 31–33.
- [8] RUSSELL, B., *Principia Mathematica*. Cambridge University Press, Londres, 1927.
- [9] COSTA NETO, M. A., *Equivalências e aplicações do Lema de Zorn*. Universidade Federal de Uberlândia-UFU, Uberlândia, 2021.
- [10] LIMA, E. L., *Análise Real volume 1. Funções de Uma Variável*. 2ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Coleção Matemática Universitária), 2017.
- [11] Tarrach, Gina Garcia, *The Axiom of Choice and its implications in mathematics*. Facultat de Matemàtiques i Informàtica Universitat de Barcelona, Barcelona, 29 de Junho de 2017.
- [12] Santos, Yago Pereira dos Anjos, *Axioma da Escolha, Lema de Zorn e o Teorema de Zermelo: Aplicações e Equivalências*. UFJF, Juiz de Fora, 2021.
- [13] Pacheco, Bruna *O Axioma da Escolha e alguns princípios equivalentes*. UFSC, Florianópolis, 2021.

- [14] Mortari, Cezar A., *Introdução à Lógica*. São Paulo: Editora UNESP: Imprensa Oficial do Estado, 2001.
- [15] Maddy, Penelope, *Defending the Axioms: On the Philosophical Foundations of Set Theory*. Oxford University Press, 2011.
- [16] ALENCAR FILHO, Edgard de, *Iniciação à lógica matemática*. São Paulo: Nobel, 2002.
- [17] Dauben, Joseph Warren, *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton: Princeton University Press, 1990.
- [18] Monteiro, Lúcia Cristina Silveira, *Semiótica na Didática da Matemática: Interpretações das Interpretações das Interpretações...* 1.ed. - Curitiba: Appris, 2021.
- [19] Carnielli, Walter A., *Computação, Funções Computáveis, Lógica e os Fundamentos da Matemática*. 2.ed. revista. São Paulo: Unesp, 2009.
- [20] Ávila, Geraldo Severo de Souza, *Análise Matemática para a Licenciatura* 3.ed. rev. e ampl. São Paulo: Blucher, 2006.
- [21] KREYSZIG, E., *Introductory functional analysis with applications*. Wiley Classics Library, 1989, ISBN 0-471-50731-8.
- [22] P. Howard; J.E. Rubin, *Consequences of the Axiom of Choice*. Amer. Math. Soc. 1998.
- [23] Santos, Yago Pereira dos Anjos, *Axioma da Escolha, Lema de Zorn e o Teorema de Zermelo: Aplicações e Equivalências*. UFJF. 2021.
- [24] Halmos, Paul Richard, *Teoria Ingênua dos conjuntos; tradução de Irineu Bicudo*. S. Paulo, Editora da Univ. S. Paulo e Editora Polígono, 1970.
- [25] Euclides *Os elementos*. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. – São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- [26] Gödel, Kurt, *Teorema de Gödel e a Hipótese do Continuo*. org., pref., e trad. Manuel Lourenço. Lisboa: Editora Fundação Calouste Gulbenkian, 1979.
- [27] GARCIA, Arnaldo; LEQUAIN, Yves, *Elementos de álgebra*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2006.

APÊNDICE A – APÊNDICE A - LISTA SUSCINTA DOS AXIOMAS ZFC

Conjunto Vazio.

$$\exists e \forall x (x \notin e)$$

Extensão.

$$\forall a \forall b (a = b \leftrightarrow \forall x (x \in a \leftrightarrow x \in b))$$

Par.

$$\forall a \forall b \exists s \forall x (x \in s \leftrightarrow (x = a \vee x = b))$$

(Esquema de) Separação. Para qualquer fórmula bem formada¹ $\varphi(x)$ vale o seguinte:

$$\forall w \exists s \forall x (x \in s \leftrightarrow (x \in w \wedge \varphi(x)))$$

Potência.

$$\forall a \exists s \forall x (x \in s \leftrightarrow x \subseteq a)$$

União.

$$\forall a \exists s \forall x (x \in s \leftrightarrow \exists d (x \in d \wedge d \in a))$$

Infinito.

$$\exists i (\emptyset \in i \wedge \forall x (x \in i \rightarrow x \cup \{x\} \in i))$$

(Esquema de) Substituição. Para qualquer fórmula bem formada $\varphi(x, y)$ o seguinte:

$$\forall d \exists c \forall y (y \in c \leftrightarrow (\exists x \in d) [\varphi(x, y)])$$

Fundação.

$$(\forall a \neq \emptyset) (\exists d \in a) [d \cap a = \emptyset]$$

Escolha. Seja $\mathcal{F}$ família de conjuntos não vazios. Então existe função $\varepsilon : \mathcal{F} \rightarrow \bigcup \mathcal{F}$, tal que para todo $A \in \mathcal{F}$, $\varepsilon(A) \in A$.

¹ Em um sistema axiomático, uma fórmula bem formada (FBF) é uma sequência finita de símbolos que obedece às regras de formação do sistema. Simbolicamente: $\forall x \exists ! y [\varphi(x, y)]$

APÊNDICE B – APÊNDICE B - LISTA DE PROPOSIÇÕES EQUIVALENTES

A seguinte lista foi produzida buscando informações....

1. Axioma da Escolha
2. Teorema da Boa Ordenação
3. Lema de Zorn
4. Existência de bases para qualquer espaço vetorial
5. Teorema de Tychonov (ou Tychonoff?) The product of compact topological spaces is compact.
6. Teorema dos Ultrafiltros
7. Teorema da comparabilidade dos conjuntos
8. Princípio Maximal de Hausdorff ou Lema de Kuratowski
9. É equivalente ao fato de que todo conjunto infinito A satisfaz: $|A \times A| = |A|$ (a cardinalidade do produto cartesiano $A \times A$ é igual a cardinalidade de A .) - Teorema de Tarski.
10. Halpern [2] deduziu o axioma da escolha da afirmação de que, em todo espaço vetorial, todo conjunto gerador inclui uma base
11. Tukey's Lemma. Let X be a collection of nonempty sets. If X has finite character, then X has a maximal element with respect to inclusion $\subset$.
12. An arbitrary cartesian product of nonempty sets is nonempty.
13. Every connected graph has a spanning tree.
14. Krull's Theorem. If A is a ring different from the trivial ring, then A has a maximal ideal.
15. Every surjective function has a right inverse.
16. Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder (Gabriela e Ledesma)

As quatro primeiras afirmações encontram-se demonstradas neste trabalho, enquanto que 5. pode ser encontrada, por exemplo, no artigo "Cem anos do Axioma da Escolha". 6. Está provada em T. Jech 1973, mas não vi a recíproca 7. Há a prova no livro "Teoria dos conjuntos" p.64 8.. 9 10 - (Blass, p.1) cita 2. J. D. Halpern, Bases for vector spaces and the axiom of choice, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966) 670-673 para este resultado

$$A = \{x \in C \mid (x = 0) \vee p\}, \quad B = \{x \in C \mid (x = 1) \vee p\}$$

APÊNDICE C – APÊNDICE C - HÁ COISAS "IMPROVÁVEIS EM ZFC?

Ao escolher um conjunto de axiomas, um objetivo é que seja possível provar todos os resultados corretos que forem possíveis, sem contanto provar algo falso. Um conjunto de axiomas é completo se qualquer afirmação na linguagem axiomática, ou a afirmação ou sua negação é demonstrável a partir dos axiomas. Um conjunto de axiomas é dito consistente se não for possível derivar contradições, ou seja, se não existir nenhuma afirmação tal que ambas a afirmação e sua negação são demonstráveis a partir dos axiomas.

De fato, o, na época jovem Kurt Gödel, apresentou seu teorema, que mostra que, em teorias que incluem uma pequena parte da teoria dos números, uma completa e finita lista de axiomas não pode nunca ser criada, ou sequer uma lista infinita que pode ser enumerada por um programa de computador. Cada vez que uma nova afirmação é adicionada como um axioma, há outras afirmações verdadeiras que ainda não podem ser provadas, mesmo com o novo axioma.

Um exemplo de tal afirmação é a hipótese do contínuo, problema que consta como o primeiro na famosa lista de problemas divulgada entusiasticamente por David Hilbert em 1900.

A hipótese do contínuo (também chamada hipótese do continuum) foi conjecturada por Georg Cantor quando este estava criando a sua teoria dos conjuntos no fim do século XIX. Esta conjectura afirma que:

Não existe nenhum conjunto com cardinalidade maior que a do conjunto dos números inteiros e menor que a do conjunto dos números reais.

Para mais, consulte "O Teorema de Gödel e a Hipótese do contínuo", do próprio Kurt Gödel.[26]