



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL

INSTITUTO DE FÍSICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Campo eletromagnético acoplado a um campo de

Rarita-Schwinger de *spin* $3/2$

JOSÉ BADÚ DE LIMA JÚNIOR

MACEIÓ-AL, FEVEREIRO DE 2024

Catlogação na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

L732c

Lima Júnior, José Badú de.

Campo eletromagnético acoplado a um campo de Rarita-Schwinger de *spin*
3/2 / José Badú de Lima Júnior. – 2024.
58 f. : il.

Orientador: Tiago Mariz.

Monografia (Trabalho de conclusão de curso em física : bacharelado) –
Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Educação Física e Esporte.
Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 57-58.

1. Campo de Rarita-Schwinger. 2. Spin nuclear. 3. Correções quânticas. I.
Título.

CDU: 537

Trabalho de conclusão de curso

Campo eletromagnético acoplado a um campo de
Rarita-Schwinger de $spin\ 3/2$

JOSÉ BADÚ DE LIMA JÚNIOR

Trabalho de conclusão de curso
do Instituto de Física da Universidade
Federal de Alagoas como parte dos
requisitos necessários para a obtenção
do título de graduado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Mariz

Maceió-AL, Fevereiro de 2024

Instituto de Física - UFAL

AGRADECIMENTOS

- Aos meus pais, meu irmão e familiares por todo o apoio fornecido, pela sua paciência e compreensão nos momentos mais difíceis.
- Agradeço a minha companheira Ana Vitória, que me ajudou a permanecer fiel no meu propósito, sua paciência, compreensão e apoio.
- Ao Prof. Dr. Tiago Mariz por toda paciência, orientação e conhecimento, tanto para produção deste trabalho, quanto nas disciplinas.
- Aos meus amigos Rayssa, Airton, Eloisa, Jordan e Messias, pela companhia, pelo conhecimento compartilhado durante todo esse percurso e pelas reflexões profissionais e pessoais, sem eles isso não seria possível.
- Agradeço aos meus amigos feitos durante o caminho Igor, Ramses, Mariana e Laís por todos os momentos compartilhados, em especial, ao Miqueias que além de tudo, foi de grande ajuda nas disciplinas mais difíceis.
- Aos meus amigos de longa data Antonio, Lucas Souza e professor do ensino médio, Henrique, que trouxeram a inspiração e motivação para seguir a carreira de físico.
- A todos meus amigos que me ajudaram durante minha caminhada.
- Instituto de Física

- Universidade Federal de Alagoas

RESUMO

O campo de Rarita-Schwinger (RS) é amplamente utilizado na supergravidade e na física de partículas. A sua lagrangiana, que resulta na equação de Dirac para *spin* $3/2$, possui uma expressão genérica que depende livremente de um parâmetro real A , com exceção do valor $A = -1/2$. A supergravidade é descrita por $A = -1$ na qual a lagrangiana possui adequadamente as simetrias de calibre e de Lorentz. Contudo, para outros valores de A , e.g., $A = -1/3$ (lagrangiana original apresentada por Rarita-Schwinger) e $A = 0$ (Lagrangiana com maior grau de simplicidade) essas simetrias são de certa forma violadas. Nesta monografia, vamos estudar as correções quânticas da lagrangiana de RS acoplada ao campo de calibre A_μ , até a função de quatro pontos. Observamos que, para $A = -1$, a simetria de calibre é respeitada, contudo, para $A = -1/3$ e $A = 0$, temos a presença de termos que podem despertar a violação dessa simetria e, por conseguinte, a violação de Lorentz.

Palavras-chaves: Campo de Rarita-Schwinger, *spin* $3/2$, correções quânticas

ABSTRACT

The field of Rarita-Schwinger (RS) is widely used in the context of supergravity and particle physics. Its Lagrangian, which results in Dirac's equation for spin $3/2$, has a generic expression that depends on a parameter A , except for the value $A = -1/2$. Supergravity is described by $A = -1$, in which the Lagrangian appropriately maintains gauge and Lorentz symmetry. However, for other values of A , e.g., $A = -1/3$ (Lagrangian proposed by Rarita-Schwinger) and $A = 0$ (simpler Lagrangian), these symmetries are violated in certain ways. In this monograph, we will study the quantum corrections of the RS Lagrangian coupled to the gauge field A_μ , up to the four-point function. We note that, for $A = -1$, the gauge symmetry is respected; however, for $A = -1/3$ and $A = 0$, there are terms present that can induce the violation of this symmetry, and thus, the violation of Lorentz symmetry.

Keywords:Field of Rarita-Schwinger, *spin* $3/2$, quantum corrections.

Sumário

Capa	1
Folha de rosto	2
Agradecimentos	3
Resumo	5
Abstract	6
1 Introdução	9
2 Campo de Rarita-Schwinger	12
2.1 Lagrangiana livre	12
2.2 Invariância de contato	22
2.3 Propagador $S(p)$	26
2.4 Integrais de trajetória fermiônica	29
2.4.1 Álgebra Grassmaniana	30
2.4.2 Funcional gerador fermiônico	35
3 Correções quântica do campo de Gauge	38
3.1 Ação efetiva	38
3.2 Correções quânticas	41

SUMÁRIO	8	
3.2.1	Integrais de Feynman	43
3.2.2	Contribuições da ação efetiva	50
4	Considerações finais	56
	Referências Bibliográficas	58

Capítulo 1

Introdução

Em 1941, Rarita e Schwinger propuseram uma maneira simples e promissora para descrever os campos de *spin* 3/2 por meio da Lagrangiana de Rarita-Schwinger (RS) [1], que leva à equação de Dirac para *spin* 3/2. Em 1956, Moldauer [2] observou que essa lagrangiana tem uma forma genérica que depende livremente de um parâmetro real A , exceto pelo valor $A = -1/2$.

Anos mais tarde, Velo e Zwanziger [3], ao analisarem o acoplamento da Lagrangiana de RS com um campo eletromagnético, notaram que as partículas de *spin* 3/2 correspondentes poderiam se propagar com velocidades acima da velocidade da luz, violando a causalidade da teoria e assim evidenciando uma quebra de simetria de Lorentz.

Atualmente, os campos de *spin* 3/2 são utilizados para descrever bárions ressonantes do modelo padrão e o gravitino da supergravidade. Com relação aos

bárions, em [4] foi argumentado que teorias contendo partículas massivas de *spin* superior a 2 inevitavelmente enfrentam violações de causalidade em altas energias. Por outro lado, tais violações não se aplicam à teoria da supergravidade no contexto do gravitino [5].

Em geral, a lagrangiana da supergravidade é descrita com A fixado em $A = -1$, contudo, outros valores de A são também considerados, e.g., $A = -1/3$, para lagrangiana original apresentada por Rarita-Schwinger, e $A = 0$, para a lagrangiana com maior grau de simplicidade. As correções quânticas da lagrangiana de *spin* $3/2$, acoplada ao campo eletromagnético, foram inicialmente calculadas em [6], com parâmetro $A = -1$.

O objeto desta monografia é calcular as correções quânticas da lagrangiana de *spin* $3/2$, acoplada ao campo de calibre A_μ , para um valor genérico do parâmetro A , até a função de quatro pontos. Inicialmente, vamos calcular para $A = -1$ de modo a confrontar os nossos resultados com os resultados obtidos em [6]. Um resultado interessante que obtivemos foi a possibilidade de geração de um potencial com quebra espontânea de simetria de Lorentz, o chamado potencial de bumblebee [7], quando consideramos os valores de $A = -1/3$ e $A = 0$.

No capítulo 2, faremos uma breve introdução e discussão sobre o campo de RS e como ele está restrito a algumas condições e propriedades da teoria. Prosseguiremos com o desenvolvimento teórico, explicando métodos de cálculo do propagador, essencial para as correções quânticas, e as integrais de trajetória, necessárias para o cálculo da ação efetiva, que será explorada em mais detalhes posteriormente.

No capítulo 3, iniciaremos com o cálculo da ação efetiva e, em seguida, dis-

cutiremos o desenvolvimento do traço. Avançaremos para o cálculo das integrais de Feynman referentes às correções quânticas, evidenciando possíveis violações da simetria de Lorentz. Por fim, no capítulo 4, abordaremos perspectivas futuras para o desenvolvimento do trabalho e possíveis interpretações dos resultados obtidos.

Neste trabalho, usaremos o sistema de unidades naturais, ou seja, $c = \hbar = k_B = e_0 = 1$, de forma que temos $[comprimento] = [tempo] = [energia]^{-1} = [massa]^{-1}$. Para a produção desse trabalho, não consideramos a curvatura do espaço-tempo, de forma que usaremos sempre $g^{\mu\nu}$ para descrever a métrica de Minkowski, que possui como elementos diagonais $(+1, -1, -1, -1)$.

Capítulo 2

Campo de Rarita-Schwinger

Neste capítulo, realizaremos uma análise detalhada da Lagrangiana de Rarita-Schwinger, evidenciando condições específicas que podem ser derivadas. Além disso, deduziremos a expressão para as diversas famílias de Lagrangianas aplicáveis ao campo de *spin* $3/2$. Também exploraremos a invariância de gauge da teoria e desenvolveremos o correspondente propagador. Por fim, discutiremos as variáveis de Grassmann e a integração apropriada nos campos fermiônicos.

2.1 Lagrangiana livre

O estudo dos campos quânticos relativísticos de *spin* arbitrário $s > 1$ foi inicialmente realizado por Dirac [8], e posteriormente desenvolvido por Fierz e Pauli [9]. Em seguida, Rarita e Schwinger simplificaram muito a abordagem ao descreverem

campos espinoriais de $spin\ l + \frac{1}{2}$ através do uso de uma função de onda representada por um *spinor* de ordem l , dado por $\psi_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_l}$, que é simétrico em seus índices de espaço-tempo $\mu_1\mu_2\cdots\mu_l$. Vamos a seguir estudar esta correspondente equação de Dirac para $spin\ 3/2$, ou seja, para $l = 1$.

Assim, os estados situados na camada de massa devem satisfazer à equação de Dirac

$$(\not{p} - m) \psi^\mu = 0, \quad (2.1)$$

com $p_\mu = i\partial_\mu$ e $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu = \gamma_\mu p^\mu$, em que iremos considerar a condição de irreduzibilidade do grupo de Lorentz [10]

$$\gamma^\mu \psi_\mu = 0. \quad (2.2)$$

Dessa forma, ao multiplicarmos γ_μ à esquerda de (2.1), temos

$$\gamma_\mu \not{p} \psi^\mu - m \gamma_\mu \psi^\mu = 0, \quad (2.3)$$

onde, usando as relações de anticomutação que as matrizes de Dirac obedecem $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$,

$$\gamma_\mu \not{p} = 2p_\mu - \not{p} \gamma_\mu, \quad (2.4)$$

tal que obtemos

$$2p_\mu \psi^\mu - \not{p} \gamma_\mu \psi^\mu - m \gamma_\mu \psi^\mu = 0, \quad (2.5)$$

ou seja, temos também a condição

$$p^\mu \psi_\mu = 0. \quad (2.6)$$

Para a Lagrangiana que resulta na equação de Dirac (2.1), Rarita e Schwinger [1] mencionaram a existência de uma família de Lagrangianas parametrizadas por um parâmetro adimensional A . Em [2] tal família é proposta para $D = 4$ da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^\mu ((\not{p} - m)g_{\mu\nu} + A(\gamma_\mu p_\nu + \gamma_\nu p_\mu) + B\gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu + mC\gamma_\mu \gamma_\nu) \psi^\nu, \quad (2.7)$$

que pode ser vista como

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^\mu \Lambda_{\mu\nu} \psi^\nu, \quad (2.8)$$

onde $\Lambda_{\mu\nu}$ é chamado de núcleo da Lagrangiana ou operador cinético, que satisfaz a seguinte equação do movimento

$$\Lambda_{\mu\nu} \psi^\nu = ((\not{p} - m)g_{\mu\nu} + A(\gamma_\mu p_\nu + \gamma_\nu p_\mu) + B\gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu + mC\gamma_\mu \gamma_\nu) \psi^\nu = 0, \quad (2.9)$$

tal que ao serem consideradas as condições (2.2) e (2.6), temos a equação de Dirac (2.1).

Agora, para acharmos os parâmetros B e C em função do parâmetro A , vamos partir da seguinte Lagrangiana escrita com o projetor

$$(P^{3/2})_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\gamma_\mu \gamma_\nu - \frac{1}{3p^2}[\not{p} \gamma_\mu p_\nu + p_\mu \gamma_\nu \not{p}], \quad (2.10)$$

tal que temos

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_\mu ((P^{3/2})^{\mu\nu} i \not{\partial} - m g^{\mu\nu}) \psi_\nu = \bar{\psi}_\mu ((P^{3/2})^{\mu\nu} \not{p} - m g^{\mu\nu}) \psi_\nu, \quad (2.11)$$

Assim, para a equação de Dirac, podemos escrever

$$((P^{3/2})^{\mu\nu} \not{p} - m g^{\mu\nu}) \psi_\nu = 0. \quad (2.12)$$

Considerando o projetor mostrado acima (2.10), podemos observar que

$$\begin{aligned} p_\mu (P^{3/2})^{\mu\nu} &= p_\mu g^{\mu\nu} - \frac{p_\mu \gamma^\mu \gamma^\nu}{3} - \frac{p_\mu (p^\mu \gamma^\nu \not{p} + \not{p} \gamma^\mu p^\nu)}{3p^2} \\ &= p^\nu - \frac{\not{p} \gamma^\nu}{3} - \frac{p^2 \gamma^\nu \not{p}}{3p^2} - \frac{p^2 p^\nu}{3p^2}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Vamos deixar todos os termos com $\not{p}$ à esquerda. Para isso, usamos que $\gamma^\nu \not{p} = 2p^\nu - \not{p} \gamma^\nu$, tal que fazendo algumas simplificações chegamos em

$$p_\mu (P^{3/2})^{\mu\nu} = p^\nu - \frac{\not{p} \gamma^\nu}{3} - \frac{2p^\nu}{3} + \frac{\not{p} \gamma^\nu}{3} - \frac{p^\nu}{3}, \quad (2.14)$$

ou melhor,

$$p_\mu (P^{3/2})^{\mu\nu} = 0, \quad (2.15)$$

como esperado.

Vamos agora reescrever a equação (2.12) como

$$m g^{\mu\nu} \psi_\nu = (P^{3/2})^{\mu\nu} \not{p} \psi_\nu, \quad (2.16)$$

tal que ao usarmos a chamada transformação de contato

$$\psi'^\beta = R^{\beta\nu} \psi_\nu, \quad (2.17)$$

em que

$$R^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \gamma^\mu \gamma^\nu, \quad (2.18)$$

vamos nos aprofundar mais nessa transformação mais a frente nesse trabalho, onde aqui podemos observar que foi usado a constante $a = -\frac{1}{4}$, dessa forma, podemos escrever

$$m\psi^\mu = R^{\mu\alpha} \not{p} (P^{3/2})_{\alpha\beta} R^{\beta\nu} \psi_\nu, \quad (2.19)$$

ou melhor,

$$m\psi^\mu = R^{\mu\alpha} \not{p} (P^{3/2})_{\alpha\beta} \psi'^\beta. \quad (2.20)$$

Note que para isso usamos o fato que

$$R^{\mu\alpha} \not{p} (P^{3/2})_{\alpha\beta} R^{\beta\nu} = (P^{3/2})^{\mu\nu} \not{p}. \quad (2.21)$$

Dessa forma, ao considerarmos a equação (2.10), obtemos

$$m\psi^\mu = R^{\mu\alpha} \not{p} \left(g_{\alpha\beta} - \frac{\gamma_\alpha \gamma_\beta}{3} - \frac{p_\alpha \gamma_\beta \not{p} + \not{p} \gamma_\alpha p_\beta}{3p^2} \right) \psi'^\beta, \quad (2.22)$$

que podemos reescrevê-la como

$$m\psi^\mu = R^{\mu\alpha} \not{p} g_{\alpha\beta} \psi'^\beta - \frac{R^{\mu\alpha} \not{p} \gamma_\alpha \gamma_\beta \psi'^\beta}{3} - \frac{R^{\mu\alpha} \not{p} p_\alpha \gamma_\beta \not{p} \psi'^\beta}{3p^2} - \frac{R^{\mu\alpha} \not{p} \not{p} \gamma_\alpha p_\beta \psi'^\beta}{3p^2}. \quad (2.23)$$

Queremos também deixar todos os termos com $\not{p}$ à esquerda das matrizes de Dirac, ou seja, vamos considerar $\gamma_\beta \not{p} = 2p_\beta - \not{p} \gamma_\beta$. Além disso, podemos considerar algumas simplificações, tal que obtemos

$$m\psi^\mu = R^{\mu\alpha} \not{p} \psi'_\alpha - \frac{2R^{\mu\alpha} p_\alpha \not{p} p_\beta \psi'^\beta}{3p^2} - \frac{R^{\mu\alpha} \not{p} \gamma_\alpha \gamma_\beta \psi'^\beta}{3} + \frac{R^{\mu\alpha} p_\alpha \gamma_\beta \psi'^\beta}{3} - \frac{R^{\mu\alpha} \gamma_\alpha p_\beta \psi'^\beta}{3}. \quad (2.24)$$

É fácil de observar que

$$-\frac{R^{\mu\alpha} \not{p} \gamma_\alpha \gamma_\beta R^{\beta\nu} \psi_\nu}{3} + \frac{R^{\mu\alpha} p_\alpha \gamma_\beta R^{\beta\nu} \psi_\nu}{3} - \frac{R^{\mu\alpha} \gamma_\alpha p_\beta R^{\beta\nu} \psi_\nu}{3} = 0, \quad (2.25)$$

tal que agora temos

$$m\psi^\mu = R^{\mu\alpha} (\not{p} \psi'_\alpha - p_\alpha \phi), \quad (2.26)$$

onde o campo auxiliar ϕ é definido como

$$\phi = \frac{2\not{p} p_\beta \psi'^\beta}{3p^2} = \frac{2\not{p} p_\beta \psi^\beta}{3p^2}, \quad (2.27)$$

em que também usamos $\gamma_\beta \psi^\beta = 0$.

Agora, com a expressão acima (2.27), escrevemos

$$m\phi = \frac{2\not{p} p_\beta m\psi^\beta}{3p^2}, \quad (2.28)$$

tal que ao substituirmos a equação (2.26) em (2.28), obtemos

$$m\phi = \frac{2\not{p} p_\beta R^{\beta\alpha} (\not{p} \psi'_\alpha - p_\alpha \phi)}{3p^2}, \quad (2.29)$$

que simplificando chegamos em

$$m\phi = -\frac{\not{p}\phi}{2} + \frac{p_\alpha\psi'^\alpha}{3}. \quad (2.30)$$

Para eliminarmos o campo auxiliar ϕ , ou seja, para $\phi = 0$, e assim $p_\alpha\psi'^\alpha = p_\alpha\psi^\alpha = 0$, vamos escrever $\phi = a\gamma_\alpha\psi^\alpha$, tal que, ao substituirmos na equação (2.30), obtemos

$$ma\gamma_\alpha\psi^\alpha = -\frac{a\not{p}\gamma_\alpha\psi^\alpha}{2} + \frac{p_\alpha\psi'^\alpha}{3}, \quad (2.31)$$

ou melhor,

$$\frac{m\gamma_\beta\gamma_\alpha\psi^\alpha}{4} = -\frac{\gamma_\beta\not{p}\gamma_\alpha\psi^\alpha}{8} + \frac{\gamma_\beta p_\alpha\psi'^\alpha}{12a}. \quad (2.32)$$

Agora, vamos definir

$$\psi''_\beta = \frac{\gamma_\beta\gamma_\alpha\psi^\alpha}{4}, \quad (2.33)$$

tal que temos $\gamma^\beta\psi''_\beta = \gamma_\alpha\psi^\alpha = \gamma^\beta\psi_\beta$. Dessa forma, conseguimos escrever a equação (2.32) como

$$m\psi''_\beta = -\frac{\gamma_\beta\not{p}\gamma_\alpha\psi''_\beta}{8} + \frac{\gamma_\beta p_\alpha\psi'^\alpha}{12a}. \quad (2.34)$$

Note que a equação (2.26) é equivalente a

$$m\psi'^\mu = R^{\mu\alpha} (\not{p}\psi'_\alpha - p_\alpha\phi), \quad (2.35)$$

onde usamos $\gamma_\mu\psi^\mu = 0$, tal que ao substituirmos $\phi = a\gamma_\alpha\psi^\alpha = a\gamma_\alpha\psi''^\alpha$, obtemos

$$m\psi'_\beta = R_{\beta\alpha} (\not{p}\psi'^\alpha - ap^\alpha\gamma_\delta\psi''^\delta). \quad (2.36)$$

As equações (2.34) e (2.36) podem ser substituídas por uma combinação linear delas, dada por $k(2.34) + (2.36)$, tal que temos

$$km\psi''_{\beta} + m\psi'_{\beta} = -\frac{k\gamma_{\beta}\not{p}\gamma_{\alpha}\psi''^{\alpha}}{8} + \frac{k\gamma_{\beta}p_{\alpha}\psi'^{\alpha}}{12a} + R_{\beta\alpha}\left(\not{p}\psi'^{\alpha} - ap^{\alpha}\gamma_{\delta}\psi''^{\delta}\right). \quad (2.37)$$

Agora, multiplicando ambos lado com δ_{μ}^{β} , obtemos

$$\begin{aligned} km\psi''_{\beta}\delta_{\mu}^{\beta} + m\psi'_{\beta}\delta_{\mu}^{\beta} &= -\frac{k\gamma_{\beta}\not{p}\gamma_{\alpha}\psi''^{\alpha}}{8}\delta_{\mu}^{\beta} + \frac{k\gamma_{\beta}p_{\alpha}\psi'^{\alpha}}{12a}\delta_{\mu}^{\beta} \\ &+ R_{\beta\alpha}\left(\not{p}\psi'^{\alpha} - ap^{\alpha}\gamma_{\delta}\psi''^{\delta}\right)\delta_{\mu}^{\beta}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

ou melhor,

$$\begin{aligned} \frac{km\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\psi^{\nu}}{4} + mR_{\mu\nu}\psi^{\nu} &= -\frac{k\gamma_{\mu}\not{p}\gamma_{\alpha}\gamma^{\alpha}\gamma_{\nu}\psi^{\nu}}{32} + \frac{k\gamma_{\mu}p_{\alpha}R^{\alpha}_{\nu}\psi^{\nu}}{12a} \\ &+ R_{\mu\alpha}\not{p}R^{\alpha}_{\nu}\psi^{\nu} - \frac{ap_{\mu}\gamma_{\delta}\gamma^{\delta}\gamma_{\nu}\psi^{\nu}}{4}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Vamos trabalhar separadamente os termos da equação acima (2.39), de forma que iremos agrupar os termos da melhor forma possível, para que fique com os mesmos termos da equação do movimento mostrada (2.9):

$$\frac{km\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\psi^{\nu}}{4} + mR_{\mu\nu}\psi^{\nu} = m\left(g_{\mu\nu} - \frac{(1-k)\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}}{4}\right)\psi^{\nu}, \quad (2.40)$$

$$-\frac{k\gamma_{\mu}\not{p}\gamma_{\alpha}\gamma^{\alpha}\gamma_{\nu}\psi^{\nu}}{32} + \frac{k\gamma_{\mu}p_{\alpha}R^{\alpha}_{\nu}\psi^{\nu}}{12a} = -\frac{k\gamma_{\mu}\not{p}\gamma_{\nu}\psi^{\nu}}{8} + \frac{k\gamma_{\mu}p_{\nu}\psi^{\nu}}{12a} - \frac{k\gamma_{\mu}\not{p}\gamma_{\nu}\psi^{\nu}}{48a}, \quad (2.41)$$

$$R_{\mu\alpha}\not{p}R^{\alpha}_{\nu}\psi^{\nu} = \left(g_{\mu\nu}\not{p} - \frac{\gamma_{\mu}p_{\nu}}{2} - \frac{p_{\mu}\gamma_{\nu}}{2} + \frac{3\gamma_{\mu}\not{p}\gamma_{\nu}}{8}\right)\psi^{\nu}, \quad (2.42)$$

$$\frac{ap_{\mu}\gamma_{\delta}\gamma^{\delta}\gamma_{\nu}\psi^{\nu}}{4} = -ap_{\mu}\gamma_{\nu}\psi^{\nu} + \frac{ap_{\mu}\not{p}p_{\nu}\psi^{\nu}}{4}. \quad (2.43)$$

Para a equação mostrada em (2.39) é mais conveniente deixarmos todos termos de um lado para ficar no mesmo formato da equação de movimento (2.9). Sendo assim, substituindo o que foi mostrado em (2.40), (2.41), (2.42) e (2.43), obtemos

$$\left(\not{p}g_{\mu\nu} - mg_{\mu\nu} + \frac{m(1-k)\gamma_\mu\gamma_\nu}{4} - \left(\frac{1}{2} + a\right)p_\mu\gamma_\nu - \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{12a}\right)\gamma_\mu p_\nu + \left(\frac{3}{8} + \frac{a}{4} - \frac{k}{8} - \frac{k}{48a}\right)\gamma_\mu\not{p}\gamma_\nu \right) \psi^\nu = 0. \quad (2.44)$$

Dessa forma, vamos comparar os termos apresentados em (2.44) com o que é mostrado em (2.9). Para os termos com $p_\mu\gamma_\nu$ e $\gamma_\nu p_\nu$, temos

$$A = -\frac{1}{2} - a \quad (2.45)$$

e

$$A = -\frac{1}{2} + \frac{k}{12a}. \quad (2.46)$$

Portanto, podemos escrever A em função de a como

$$A = -a - \frac{1}{2}, \quad (2.47)$$

tal que assim temos que $A \neq -\frac{1}{2}$. Para escrevermos k em função de A , observe que $a = -\frac{k}{2a}$, tal que temos

$$k = -12a^2 = -12\left(A^2 + A + \frac{1}{4}\right). \quad (2.48)$$

Agora, para os termos que tem $\gamma_\mu\gamma_\nu$, temos

$$C = \frac{1}{4}(1 - k), \quad (2.49)$$

tal que substituindo o que achamos em (2.48), obtemos

$$C = 3A^2 + 3A + 1. \quad (2.50)$$

Para os termos de $\gamma_\mu\not{p}\gamma_\nu$, escrevemos

$$B = \left(\frac{3}{8} + \frac{a}{4} - \frac{k}{8} - \frac{k}{48a} \right), \quad (2.51)$$

que, ao substituirmos (2.47) e (2.48), obtemos

$$B = \frac{3A^2}{2} + A + \frac{1}{2}. \quad (2.52)$$

Portanto, finalmente podemos reescrever nossa Lagrangiana como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}^\mu \left((\not{p} - m)g_{\mu\nu} + A(\gamma_\mu p_\nu + \gamma_\nu p_\mu) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(3A^2 + 2A + 1)\gamma_\mu\not{p}\gamma_\nu + m(3A^2 + 3A + 1)\gamma_\mu\gamma_\nu \right) \psi^\nu. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Dessa forma, há infinitas Lagrangianas que geram as mesmas equações do movimento que são definidas em torno de um parâmetro adimensional A que não apresenta significado físico, restrito à condição de $A \neq -\frac{1}{2}$.

2.2 Invariância de contato

Como vimos, esta liberdade de escolha em (2.53) se relaciona com uma simetria das equações do movimento, chamada de transformações de contato, dada de forma geral por $\psi'^\mu = (g^\mu{}_\nu + a\gamma^\mu\gamma_\nu)\psi^\nu$, que pode ser vista como $\psi'^\mu = R(a)^\mu{}_\nu\psi^\nu$, onde o operador

$$R(a)^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + a\gamma^\mu\gamma^\nu \quad (2.54)$$

tem as seguintes propriedades [11, 12]:

$$R(a)R(b) = R(a + b + 4ab), \quad (2.55)$$

$$R^{-1}(a) = R\left(-\frac{a}{1+4a}\right), \quad (2.56)$$

$$R\left(-\frac{1}{4}\right)R(a) = R\left(-\frac{1}{4}\right), \quad (2.57)$$

$$R(0) = 1. \quad (2.58)$$

Analisando (2.57), observamos que $R(-\frac{1}{4})$ possui uma característica de projetor e que, em particular, não é inversível. Por outro lado, de (2.56) vemos que o operador $R(a)$ é invertível para qualquer $a \neq -\frac{1}{4}$. Agora vamos escrever a Lagrangiana RS como

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^\mu R^{-1}(a)_\mu{}^\sigma R(a)_\sigma{}^\tau \Lambda(A)_{\tau\rho} R(a)^\rho{}_\delta R^{-1}(a)^\delta{}_\nu \psi^\nu, \quad (2.59)$$

e então o operador cinético pode ser visto como

$$\Lambda^{\mu\nu}(A') = R^{\mu\sigma}(a)\Lambda_{\sigma\tau}(A)R^{\tau\nu}(a), \quad (2.60)$$

que corresponderá a algum valor A' , que poderá ser escrito em função de a .

Devemos tentar escrever A' em função de A e a . Para isso será usado uma transformação de contato genérica. Inicialmente, olhando para o operador cinético, sabemos que existe um a tal que $\Lambda(A) = R(a)\Lambda(0)R(a)$, já que escrevemos A em função de a . Além disso, sabemos que $R(a)\Lambda(0)R(a)$ é quadrática em a , tal que a relação entre A e a é linear.

Ao observarmos (2.17), podemos escrever $R(0)\Lambda(A)R(0) = \Lambda(A)$, ou melhor $R(0)\Lambda(0)R(0) = \Lambda(0)$, tal que $A = 0$ se $a = 0$. O único valor que não é permitido para a é $a = -\frac{1}{4}$ que deve corresponder ao único valor não permitido para A que é $A = -\frac{1}{2}$. Assim, a relação que buscamos é $A = 2a$, que deve satisfazer as relações escritas acima, tal que

$$\Lambda(A) = R\left(\frac{A}{2}\right)\Lambda(0)R\left(\frac{A}{2}\right). \quad (2.61)$$

Podemos então achar a relação que A' tem com A e a , a qual deve obedecer a seguinte equação:

$$\Lambda(A') = R(a)\Lambda(A)R(a), \quad (2.62)$$

ou melhor

$$\Lambda(A') = R(a)R\left(\frac{A}{2}\right)\Lambda(0)R\left(\frac{A}{2}\right)R(a). \quad (2.63)$$

Da mesma forma que vimos anteriormente, podemos escrever que

$$\Lambda(A') = R\left(\frac{A'}{2}\right) \Lambda(0) R\left(\frac{A'}{2}\right), \quad (2.64)$$

tal que comparando (2.63) com (2.64), é fácil de observar que

$$R\left(\frac{A'}{2}\right) = R(a) R\left(\frac{A}{2}\right). \quad (2.65)$$

Então, podemos usar (2.55) e escrever

$$R\left(\frac{A'}{2}\right) = R\left(a + \frac{A}{2} + 2aA\right), \quad (2.66)$$

tal que finalmente obtemos a relação

$$A' = A(1 + 4a) + 2a. \quad (2.67)$$

Isso nos mostra que a transformação de contato é o vínculo entre nossa família de Lagrangianas mostrada em (2.53).

A primeira Lagrangiana proposta por Rarita e Schwinger [1] é a nossa Lagrangiana (2.53) com $A = -\frac{1}{3}$. No entanto, a Lagrangiana mais utilizada na literatura, principalmente no contexto de supergravidade é a que utiliza $A = -1$ [13]. Portanto, escreveremos $\Lambda(A)$ em função de $\Lambda(-1)$. Agora, usando a propriedade mostrada em (2.55), com $a = -\frac{A}{2}$ e $b = -\frac{1}{2}$, podemos escrever

$$\Lambda(A') = R\left(-\frac{1}{2}(A' + 1)\right) \Lambda(-1) R\left(-\frac{1}{2}(A' + 1)\right). \quad (2.68)$$

O propagador pode ser visto como o inverso do operador cinético. Assim, escrevemos

$$\Lambda_\mu{}^\beta S_{\beta\nu} = g_{\mu\nu}. \quad (2.69)$$

Usando as propriedades de matriz $R(a)$ e empregando a equação (2.68), escrevemos nosso propagador genérico $S^{\mu\nu}(A)$ em função do propagador bem conhecido $S^{\alpha\beta}(-1)$, por convenção, vamos usar A no lugar de A' como

$$S^{\mu\nu}(A) = R^{-1\mu}{}_\alpha \left(-\frac{1}{2}(A+1) \right) S^{\alpha\beta}(-1) R^{-1}{}_\beta{}^\nu \left(-\frac{1}{2}(A+1) \right), \quad (2.70)$$

em que o propagador $S^{\alpha\beta}(-1)$, escrito em função dos projetores [13], é dado por

$$S_{\mu\nu}(-1) = - \left[\frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} P_{\mu\nu}^{3/2} - \frac{2}{3m^2} (\not{p} + m) (P_{22}^{1/2})_{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{3}m} (P_{12}^{1/2} + P_{21}^{1/2})_{\mu\nu} \right], \quad (2.71)$$

com

$$(P^{3/2})_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \gamma_\mu \gamma_\nu - \frac{1}{3p^2} [\not{p} \gamma_\mu p_\nu + p_\mu \gamma_\nu \not{p}], \quad (2.72)$$

$$(P_{22}^{1/2})_{\mu\nu} = \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}, \quad (2.73)$$

$$(P_{11}^{1/2})_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - P_{\mu\nu}^{3/2} - (P_{22}^{1/2})_{\mu\nu} = \left(g_{\mu\alpha} - \frac{p_\mu p_\alpha}{p^2} \right) \left(\frac{\gamma^\alpha \gamma^\beta}{3} \right) \left(g_{\beta\nu} - \frac{p_\beta p_\nu}{p^2} \right), \quad (2.74)$$

$$(P_{12}^{1/2})_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{3}p^2} (p_\mu p_\nu - \not{p} \gamma_\mu p_\nu), \quad (2.75)$$

$$(P_{21}^{1/2})_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{3}p^2} (-p_\mu p_\nu + \not{p} p_\mu \gamma_\nu). \quad (2.76)$$

2.3 Propagador $S(p)$

Também podemos calcular o propagador de uma forma diferente. Usando esse método conseguimos calcular o propagador com a nossa constante genérica A e em D dimensões, que é uma forma mais elegante e útil de ver o propagador. Para isso, tomamos como base o cálculo feito em [12], o único da literatura que apresenta esse método.

Inicialmente vamos partir do fato que o propagador é o inverso do operador cinético,

$$\Lambda_{\mu\nu} S^{\nu\alpha} = \delta_{\mu}^{\alpha}. \quad (2.77)$$

Assim, sabemos que o propagador deve ser da seguinte forma

$$\begin{aligned} S^{\nu\alpha} = & A_1 g^{\nu\alpha} \not{p} + A_2 g^{\nu\alpha} + A_3 \gamma^{\nu} p^{\alpha} + A_4 p^{\nu} \gamma^{\alpha} + A_5 \gamma^{\nu} \not{p} \gamma^{\alpha} \\ & + A_6 \gamma^{\nu} \gamma^{\alpha} + A_7 \gamma^{\nu} \not{p} p^{\alpha} + A_8 p^{\nu} \not{p} \gamma^{\alpha} + A_9 p^{\nu} p^{\alpha} + A_{10} p^{\nu} \not{p} p^{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Agora, vamos efetuar as contrações dos termos de $S^{\nu\alpha}$ (2.78) com termos de $\Lambda_{\mu\nu}$ mostrado em (2.9). Para isso, usamos o *Mathematica* com o pacote *Feyncalc*, para efetuar os cálculos analíticos e definir os nossos coeficientes A_i , e assim obtemos os seguintes termos para o nosso propagador generalizado:

$$\begin{aligned} S^{\mu\nu} = & \frac{(\not{p} + m)}{(p^2 - m^2)} \left[g^{\mu\nu} - \frac{\gamma^{\mu} \gamma^{\nu}}{D-1} - \frac{\gamma^{\mu} p^{\nu} - p^{\mu} \gamma^{\nu}}{(D-1)m} - \frac{(D-2)p^{\mu} p^{\nu}}{(D-1)m^2} \right] + \frac{A+1}{m^2(AD+2)} \\ & \left\{ \left[\frac{D-4-DA}{(D-2)(DA+2)} \right] m \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} + \frac{(D-2)(\gamma^{\mu} p^{\nu} + p^{\mu} \gamma^{\nu})}{(D-1)} - \frac{(D-2)(A+1)\gamma^{\mu} \not{p} \gamma^{\nu}}{(D-1)(DA+2)} \right\} \end{aligned} \quad (2.79)$$

Podemos então comparar o propagador apresentado em (2.70) com o que foi

apresentado em (2.79). Para isso, vamos pegar a equação (2.79) e usando $A = -1$, chegamos a

$$S^{\mu\nu} = \frac{(\not{p} + m)}{(p^2 - m^2)} \left[g^{\mu\nu} - \frac{\gamma^\mu \gamma^\nu}{D-1} - \frac{\gamma^\mu p^\nu - p^\mu \gamma^\nu}{(D-1)m} - \frac{(D-2)p^\mu p^\nu}{(D-1)m^2} \right], \quad (2.80)$$

agora, considerando $D = 4$:

$$S^{\mu\nu}(-1) = \frac{(\not{p} + m)}{(p^2 - m^2)} \left[g^{\mu\nu} - \frac{\gamma^\mu \gamma^\nu}{3} - \frac{\gamma^\mu p^\nu - p^\mu \gamma^\nu}{3m} - \frac{2p^\mu p^\nu}{3m^2} \right]. \quad (2.81)$$

Enquanto que usando (2.70) para definir $S^{\mu\nu}(-1)$ substituindo as expressões para os projetores (neste propagador a dimensão já está previamente definida) substituindo $A = -1$ na equação, obtemos

$$S^{\mu\nu}(-1) = R^{-1}(0)^\mu_\alpha S^{\alpha\beta}(-1) R^{-1}(0)_\beta{}^\nu. \quad (2.82)$$

Agora, para $S^{\alpha\beta}(-1)$, usamos (2.71) na forma contravariante e usando a definição do operador $R(a)$, sabemos que $R^{-1\mu}{}_\alpha = g^\mu{}_\alpha$ e $R^{-1}{}_\beta{}^\nu = g_\beta{}^\nu$, podemos então escrever

$$S^{\mu\nu}(-1) = - \left[\frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (P^{3/2})^{\mu\nu} - \frac{2}{3m^2} (\not{p} + m) (P_{22}^{1/2})^{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{3}m} (P_{12}^{1/2} + P_{21}^{1/2})^{\mu\nu} \right]. \quad (2.83)$$

Vamos reescrever a equação acima como

$$S^{\mu\nu}(-1) = - \frac{(\not{p} + m)}{(p^2 - m^2)} \left[(P^{3/2})^{\mu\nu} - \frac{2(p^2 - m^2)}{3m^2} (P_{22}^{1/2})^{\mu\nu} + \frac{(\not{p} - m)}{\sqrt{3}m} (P_{12}^{1/2} + P_{21}^{1/2})^{\mu\nu} \right], \quad (2.84)$$

ou melhor

$$S^{\mu\nu}(-1) = -\frac{(\not{p} + m)}{(p^2 - m^2)} \left[(P^{3/2})^{\mu\nu} - \frac{2p^2}{3m^2} (P_{22}^{1/2})^{\mu\nu} + \frac{2p^2}{3} (P_{22}^{1/2})^{\mu\nu} \right. \\ \left. + \frac{\not{p}}{\sqrt{3}m} (P_{12}^{1/2} + P_{21}^{1/2})^{\mu\nu} - \frac{1}{\sqrt{3}} (P_{12}^{1/2} + P_{21}^{1/2})^{\mu\nu} \right]. \quad (2.85)$$

Assim, podemos substituir os projetores mostrados em (2.72), (2.73), (2.75) e (2.76) para então obter

$$S^{\mu\nu}(-1) = \frac{(\not{p} + m)}{(p^2 - m^2)} \left[g^{\mu\nu} - \frac{\gamma^\mu \gamma^\nu}{3} - \frac{\not{p} \gamma^\mu p^\nu}{3p^2} - \frac{p^\mu \gamma^\nu \not{p}}{3p^2} - \frac{2p^2 p^\mu p^\nu}{3m^2 p^2} + \frac{2p^\mu p^\nu}{3p^2} \right. \\ \left. + \frac{\not{p}(-\not{p} \gamma^\mu p^\nu + \not{p} p^\mu \gamma^\nu)}{3mp^2} - \frac{(-\not{p} \gamma^\mu p^\nu + \not{p} p^\mu \gamma^\nu)}{3p^2} \right]. \quad (2.86)$$

Simplificando e reorganizando a equação, podemos escrever

$$S^{\mu\nu}(-1) = \frac{(\not{p} + m)}{(p^2 - m^2)} \left[g^{\mu\nu} - \frac{\gamma^\mu \gamma^\nu}{3} - \frac{\gamma^\mu p^\nu - p^\mu \gamma^\nu}{3m} - \frac{2p^\mu p^\nu}{3m^2} + \frac{2p^\mu p^\nu}{3p^2} \right. \\ \left. - \frac{\not{p} \gamma^\mu p^\nu}{3p^2} - \frac{p^\mu \gamma^\nu \not{p}}{3p^2} - \frac{(-\not{p} \gamma^\mu p^\nu + \not{p} p^\mu \gamma^\nu)}{3p^2} \right], \quad (2.87)$$

tal que, sabendo que $p^\mu \gamma^\nu \not{p} = 2p^\mu p^\nu - \not{p} p^\mu \gamma^\nu$, escrevemos

$$S^{\mu\nu}(-1) = \frac{(\not{p} + m)}{(p^2 - m^2)} \left[g^{\mu\nu} - \frac{\gamma^\mu \gamma^\nu}{3} - \frac{\gamma^\mu p^\nu - p^\mu \gamma^\nu}{3m} - \frac{2p^\mu p^\nu}{3m^2} + \frac{2p^\mu p^\nu}{3p^2} \right. \\ \left. - \frac{\not{p} \gamma^\mu p^\nu}{3p^2} - \frac{2p^\mu p^\nu}{3p^2} + \frac{\not{p} p^\mu \gamma^\nu}{3p^2} - \frac{(-\not{p} \gamma^\mu p^\nu + \not{p} p^\mu \gamma^\nu)}{3p^2} \right], \quad (2.88)$$

que podemos simplesmente obter

$$S^{\mu\nu}(-1) = \frac{(\not{p} + m)}{(p^2 - m^2)} \left[g^{\mu\nu} - \frac{\gamma^\mu \gamma^\nu}{3} - \frac{\gamma^\mu p^\nu - p^\mu \gamma^\nu}{3m} - \frac{2p^\mu p^\nu}{3m^2} \right]. \quad (2.89)$$

Assim, conseguimos mostrar que as duas formas nos conduzem ao mesmo propagador, como esperado.

2.4 Integrais de trajetória fermiônica

Nesta seção, vamos estudar como partículas fermiônicas se comportam, quais são as restrições impostas sobre elas e como isso interfere no cálculo das integrais de trajetória fermiônica.

Partículas fermiônicas obedecem ao princípio de exclusão de Pauli, ou seja, não aceitam partículas com o mesmo estado simultaneamente. Sendo assim, são restritas pelas seguintes relações de anticomutação:

$$\{\psi(\vec{x}, t), \psi^\dagger(\vec{x}', t)\} = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.90)$$

e

$$\{\psi(\vec{x}, t), \psi(\vec{x}', t)\} = 0. \quad (2.91)$$

De outra forma, podemos dizer que

$$\psi(\vec{x}, t)\psi(\vec{x}', t) = -\psi(\vec{x}', t)\psi(\vec{x}, t), \quad (2.92)$$

que assim é uma propriedade de números grassmanianos. Dizemos então que os férmions são campos pseudoclássicos de Grassman, que obedecem à álgebra de Grassman, que possui propriedades únicas.

Por outro lado, os bósons obedecem à relação

$$\psi(\vec{x}, t)\psi(\vec{x}', t) = \psi(\vec{x}', t)\psi(\vec{x}, t), \quad (2.93)$$

tal que vale para qualquer número que pertence aos conjuntos dos números imaginários, que chamamos de campos c-numéricos.

Para calcular o funcional gerador de um férmion podemos levar em conta a álgebra de Grassman, já que torna o cálculo da ação efetiva mais simples. A seguir neste capítulo, vamos entender melhor a álgebra de Grassman e como ela interfere no cálculo da integral de caminho para férmions.

2.4.1 Álgebra Grassmaniana

Nesta seção, vamos explorar as definições da álgebra de Grassman e as propriedades de algumas operações que são predefinidas nesse conjunto [14].

Considere os números de Grassman que obedecem a relação

$$\theta_i\theta_j + \theta_j\theta_i = 0, \quad (2.94)$$

que também foi mostrada em (2.91). Considere $\theta, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in \mathcal{G}$, os quais podem ser multiplicados por uma constante, tal que $a\theta \in \mathcal{G}$ e $a \in \mathbb{C}$. O espaço de Grasmann sobre um corpo K obedece os axiomas mostrados em [15].

Vamos analisar o elemento mais simples da nossa álgebra para uma variável

$$g = a + b\theta, \quad (2.95)$$

considerando a equação (2.94) mostramos facilmente que $\theta_i^2 = 0$ e $\theta_j^2 = 0$. Portanto, para duas variáveis devemos ter

$$g = a + b\theta_i + c\theta_j + d\theta_i\theta_j, \quad (2.96)$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e assim por diante para um número maior de variáveis. Para um número par de variáveis diferentes se comporta como um c-número, pois são comutativas

$$\theta_1\theta_2\theta_3 = -\theta_1\theta_3\theta_2 = \theta_3\theta_1\theta_2, \quad (2.97)$$

podemos ver $\theta_1\theta_2 = a$, já que a é número comutativo podemos escrever

$$a\theta_3 = \theta_3a. \quad (2.98)$$

Dizemos, então, que a álgebra não é fechada, pois $\theta_1\theta_2$ gera um número bosônico, ou melhor, um número que não pertence a álgebra de Grassman.

Na física, um número de Grassman representa a função de onda de um férmion, ou seja, $\theta = \psi(x)$. No gerador funcional fazemos uma integral sobre $\mathcal{D}\psi$ como mostramos em (2.115), sendo assim, faremos uma integral sobre os números Grassmanianos.

Seria interessante que a integração fosse linear, de modo que

$$\int d\theta_1 \dots d\theta_n (aX + bY) = a \int d\theta_1 \dots d\theta_n X + b \int d\theta_1 \dots d\theta_n Y, a, b \in \mathbb{C}, X, Y \in \mathcal{G}. \quad (2.99)$$

Não é necessário colocar limites de integração, pois há somente um número de Grassman em cada direção. Sendo assim, é equivalente, ao olharmos para uma integral para o caso bosônico que vai de $-\infty$ a ∞ , estamos considerando todos os casos possíveis.

Vamos olhar para o caso mais simples de uma única variável, que pode ser usada para o caso de n variáveis. Queremos que $\int d\theta$ continue satisfazendo as condições de anticomutação mostradas em (2.94). Para isso, precisamos enxergar a integral como uma soma de números de Grassman. Para o caso linear de uma variável, escrevemos

$$\int d\theta (a + b\theta) = a \int d\theta + b \int d\theta \theta. \quad (2.100)$$

A entrada da integral deve ser um elemento de $\mathcal{G}$ e o resultado deve ser um elemento de $\mathbb{C}$. Assim, o termo com $\int d\theta$ deve desaparecer, já que ele gera um elemento de $\mathcal{G}$, enquanto que $\int d\theta \theta$ deve gerar um elemento de $\mathbb{C}$. Por convenção usaremos $\int d\theta \theta = 1$, já que temos uma constante genérica de $\mathbb{C}$ que multiplica o termo, tal que temos então

$$\int d\theta (a + b\theta) = b. \quad (2.101)$$

Por outro lado, ao olharmos para a definição de derivadas, temos

$$\frac{d}{d\theta}(a + b\theta) = b, \quad (2.102)$$

que estranhamente é o resultado obtido em (2.101). Então a operação de integrar ou a operação de derivar são iguais para variáveis grassmanianas, tal que podemos escrever

$$\int d\theta(a + b\theta) = \frac{d}{d\theta}(a + b\theta), \quad (2.103)$$

enquanto que para n variáveis escrevemos

$$\int d\theta_1 \dots d\theta_n X = \frac{\partial}{\partial\theta_1} \dots \frac{\partial}{\partial\theta_n} X. \quad (2.104)$$

Portanto, podemos dizer que

$$\int d\theta_1 \dots d\theta_n \theta_1 \dots \theta_n = 1. \quad (2.105)$$

Usando (2.94), podemos dizer que

$$\int d\theta_1 d\theta_2 \theta_1 \theta_2 = - \int d\theta_1 d\theta_2 \theta_1 \theta_2 = 1, \quad (2.106)$$

o que pode parecer estranho, mas é consistente com as propriedades da derivada

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1} \frac{\partial}{\partial\theta_2} \theta_1 \theta_2 = \frac{\partial}{\partial\theta_1} \theta_1 \frac{\partial}{\partial\theta_2} \theta_2 = - \frac{\partial}{\partial\theta_1} \frac{\partial}{\partial\theta_2} \theta_2 \theta_1 = 1. \quad (2.107)$$

Aqui, vamos observar uma propriedade importante para o caso bosônico: a

simetria de deslocamento. Como veremos, essa propriedade também vale para o caso fermiônico. Para bósons vale a seguinte simetria:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x + a), \quad (2.108)$$

sendo a uma constante do mesmo conjunto de x , mas que é constante em relação a x , em outras palavras

$$\frac{\partial}{\partial x} a = 0. \quad (2.109)$$

Para férmions, devemos ter

$$\int d\theta (a + b\theta) = \int d\theta [a + b(\theta + X)], \quad (2.110)$$

sendo X um elemento de $\mathcal{G}$, mas que é constante em relação a θ , tal que

$$\frac{\partial}{\partial \theta} X = 0. \quad (2.111)$$

Podemos escrever

$$\int d\theta [a + b(\theta + X)] = \int d\theta (a + b\theta + bX) = \int d\theta (a + b\theta) + \int d\theta bX. \quad (2.112)$$

Como vimos em (2.101) $\int d\theta (a + b\theta) = b$, enquanto que para X , usando (2.103) e (2.101), temos

$$\int d\theta bX = b \frac{\partial}{\partial \theta} X = 0. \quad (2.113)$$

Por fim, obtemos

$$\int d\theta[a + b(\theta + X)] = \int d\theta(a + b\theta) = b, \quad (2.114)$$

mostramos assim que a mesma simetria de deslocamento é válida.

2.4.2 Funcional gerador fermiônico

O funcional gerador descreve como as interações entre as partículas acontecem na nossa teoria. A partir dele, conseguimos obter qualquer elemento do conjunto. O funcional gerador é dado por

$$Z(\eta, \bar{\eta}) = \int DA_\mu D\psi D\bar{\psi} e^{i \int d^4x (\mathcal{L} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)}, \quad (2.115)$$

onde a Lagrangiana pode ser escrita da forma $\mathcal{L} = f(A_\mu) + \psi S^{-1}\psi$, a depender da teoria em questão. Então, podemos escrever nosso funcional como

$$Z(\eta, \bar{\eta}) = \int DA_\mu e^{i \int d^4x f(A_\mu)} \int D\psi D\bar{\psi} e^{i \int d^4x (\psi S^{-1}\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)}. \quad (2.116)$$

Agora, vamos fazer um deslocamento no campo dos férmions usando $\psi \rightarrow \psi - S\eta$ e $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} - \bar{\eta}S$ para obter

$$Z(\eta, \bar{\eta}) = \int DA_\mu e^{i \int d^4x f(A_\mu)} \int D\psi D\bar{\psi} e^{i \int d^4x (\psi S^{-1}\psi - \bar{\eta}S\eta)}. \quad (2.117)$$

Para o nosso objetivo, vamos sempre olhar para a integração de ψ e $\bar{\psi}$ para fa-

zer nossa análise da ação efetiva. Essa integral é do tipo Gaussiana, sendo assim, vamos entender melhor como se comporta uma integral Gaussiana para variáveis grassmanianas.

Para uma integral Gaussiana, vamos usar duas variáveis para escrevermos a integral como

$$\int d\theta_1 d\theta_2 e^{-\theta_1 S_{12}^{-1} \theta_2}. \quad (2.118)$$

Usando expansão por série de Taylor para a exponencial, podemos escrever

$$\int d\theta_1 d\theta_2 e^{-\theta_1 S_{12}^{-1} \theta_2} = \int d\theta_1 d\theta_2 (1 - S_{12}^{-1} \theta_1 \theta_2) = S_{12}^{-1}, \quad (2.119)$$

enquanto que para n θ_i e para n $\bar{\theta}_j$, que são variáveis independentes, devemos ter

$$\begin{aligned} \int d\bar{\theta}_1 d\theta_1 \dots d\bar{\theta}_n d\theta_n e^{-\bar{\theta}_i A_{ij}^{-1} \bar{\theta}_j} &= \int d\bar{\theta}_1 d\theta_1 \dots d\bar{\theta}_n d\theta_n \\ &\times \left(1 - \bar{\theta}_i S_{ij}^{-1} \bar{\theta}_j + \frac{1}{2} (\bar{\theta}_i S_{ij}^{-1} \bar{\theta}_j) (\bar{\theta}_k S_{kl}^{-1} \bar{\theta}_l) + \dots \right), \end{aligned} \quad (2.120)$$

tal que os únicos termos que sobram são os que têm todos os n θ_i e n $\bar{\theta}_j$, permanecendo apenas

$$\int d\bar{\theta}_1 d\theta_1 \dots d\bar{\theta}_n d\theta_n e^{-\bar{\theta}_i S_{ij}^{-1} \bar{\theta}_j} = \frac{1}{n!} \sum_{\text{permutação}\{i_n\}} \pm S_{i_1 i_2}^{-1} \dots S_{i_{n-1} i_n}^{-1}. \quad (2.121)$$

Podemos pensar em A_{ij} como uma matriz, tal que a operação vista em (2.121) escolhe cada linha e coluna uma vez com n permutações. Então, colocamos $n!$ na frente, tal que pode ser visto como o cálculo do determinante da nossa matriz A_{ij} ,

então escrevemos

$$\int d\bar{\theta}_1 d\theta_1 \dots d\bar{\theta}_n d\theta_n e^{-\bar{\theta}_i S_{ij}^{-1} \bar{\theta}_j} = \det(\mathbf{S}^{-1}). \quad (2.122)$$

Vamos observar a equação (2.122) de uma forma diferente. Para isso, vamos considerar escrevemos

$$\det(\mathbf{S}^{-1}) = \prod_{i=1}^n e^{\ln S_i^{-1}} = e^{\sum_i \ln S_i^{-1}} = e^{\ln \sum_i S_i^{-1}} = e^{\ln \text{Tr } S^{-1}}. \quad (2.123)$$

Sendo assim, olhando para (2.117), podemos escrever o nosso funcional gerador como

$$Z(\eta, \bar{\eta}) = \int DA_\mu e^{i \int d^4x f(A_\mu)} e^{-i \int d^4x \bar{\eta} S \eta} e^{\text{Tr} \ln S^{-1}}. \quad (2.124)$$

Capítulo 3

Correções quântica do campo de Gauge

Neste capítulo, vamos entender melhor como serão feitas as correções quânticas e observar a possível presença de uma quebra dinâmica de simetria por tais correções quânticas. A seguir, vamos realizar o cálculo da ação efetiva e do traço, para assim seguirmos com os cálculos das integrais de Feynman das correções quântica da ação efetiva.

3.1 Ação efetiva

No capítulo anterior, mostramos a integração fermiônica para o funcional

gerador. Por outro lado, podemos ver a ação efetiva como sendo

$$S_{ef} = \int dt L = \int d^4x \mathcal{L}_{ef}. \quad (3.1)$$

Dessa forma, levando em conta (2.117), podemos reescrever (2.124) como

$$Z(\eta, \bar{\eta}) = \int DA_\mu e^{i(S_{ef} - \int d^4x \bar{\eta} S \eta)}, \quad (3.2)$$

em que

$$S_{ef} = \int d^4x f(A_\mu) - iTr \ln S^{-1}. \quad (3.3)$$

No entanto, para o nosso caso, estamos interessado na Lagrangiana mostrada em (2.7), acoplada ao campo de calibre A_μ , com $f(A_\mu) = 0$, tal que assim vamos apenas ter

$$S_{ef} = -iTr \ln S^{-1}. \quad (3.4)$$

Para acoplarmos o campo de calibre, vamos usar a derivada covariante. Assim, na equação mostrada em (2.7), vamos usar $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. Portanto, nossa ação será escrita como

$$S_{ef} = -iTr \ln [(i\cancel{D} - m)g^{\mu\nu} + iA(\gamma^\mu D^\nu + \gamma^\nu D^\mu) + B\gamma^\mu \cancel{D}\gamma^\nu + Cm\gamma^\mu\gamma^\nu], \quad (3.5)$$

em que $i\cancel{D} = \cancel{p} - e\cancel{A}$. Podemos reescrever a expressão acima como

$$S_{ef} = -iTr \ln (p_\lambda \gamma^{\mu\lambda\nu} - m\gamma^{\mu\nu} - eA_\lambda \gamma^{\mu\lambda\nu}), \quad (3.6)$$

onde

$$\gamma^{\mu\lambda\nu} = g^{\mu\nu}\gamma^\lambda + A(g^{\mu\lambda}\gamma^\nu + g^{\nu\lambda}\gamma^\mu) + \frac{1}{2}(3A^2 + 2A + 1)\gamma^\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu, \quad (3.7)$$

e

$$\gamma^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - (3A^2 + 3A + 1)\gamma^\mu\gamma^\nu. \quad (3.8)$$

Agora, como $\Lambda^{\mu\nu}(p) = p_\lambda\gamma^{\mu\lambda\nu} - m\gamma^{\mu\nu}$, tal que $\Lambda^{\mu\nu}(p)S^{\nu\alpha} = \delta^{\nu\alpha}$, podemos também escrever como

$$S_{ef} = -iTr \ln (\Lambda^{\mu\nu}(p) - \Lambda(p)^{\mu\alpha} S_{\alpha\beta}(p) A_\lambda \gamma^{\beta\lambda\nu}). \quad (3.9)$$

Finalmente, como $\Lambda^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu\alpha}\delta_\alpha{}^\nu$, temos que

$$S_{ef} = -iTr \ln [\Lambda^{\mu\alpha}(p) (\delta_\alpha{}^\nu - S_{\alpha\beta}(p) e A_\lambda \gamma^{\beta\lambda\nu})], \quad (3.10)$$

ou melhor,

$$S_{ef} = -iTr \ln (\Lambda^{\mu\alpha}) - iTr \ln (\delta_\alpha{}^\nu - S_{\alpha\beta}(p) e A_\lambda \gamma^{\beta\lambda\nu}). \quad (3.11)$$

Dessa forma, ao expandirmos em série de potência, obtemos

$$S_{ef} = S_{ef}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{ef}^{(n)}, \quad (3.12)$$

em que

$$S_{ef}^{(n)} = \frac{i}{n} Tr \left(S_{\alpha\beta}(p) e A_{\mu} \gamma^{\beta\lambda\nu} \right)^n, \quad (3.13)$$

e

$$S_{ef}^{(0)} = -i Tr \ln (\Lambda^{\mu\alpha}), \quad (3.14)$$

onde n representa a ordem das correções quânticas. Neste trabalho, estamos interessados em calcular correções de 1º, 2º, 3º e 4º ordem, ou seja, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$.

3.2 Correções quânticas

Agora vamos calcular as correções quânticas para $A = -\frac{1}{3}$ [1], $A = -1$ [6] e $A = 0$ [16]. Como era previsto, escolhendo $n = 1$ e $n = 3$ as contribuições são nulas para qualquer escolha do parâmetro A . Enquanto que para $n = 2$ temos

$$S_{ef}^{(2)} = \frac{ie^2}{2} Tr S_{\alpha\beta}(p) A_{\lambda} \gamma^{\beta\lambda\nu} S_{\nu\rho}(p) A_{\sigma} \gamma^{\rho\sigma\tau}, \quad (3.15)$$

tal que ao calcularmos o traço sobre as coordenadas, obtemos

$$S_{ef}^{(2)} = \frac{ie^2}{2} \int d^4x \Pi^{\sigma\rho} A_{\lambda} A_{\sigma}, \quad (3.16)$$

onde

$$\Pi^{\lambda\sigma} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} tr S_{\alpha\beta}(p) \gamma^{\beta\lambda\nu} S_{\nu\rho}(p - i\partial) \gamma^{\rho\sigma\alpha}. \quad (3.17)$$

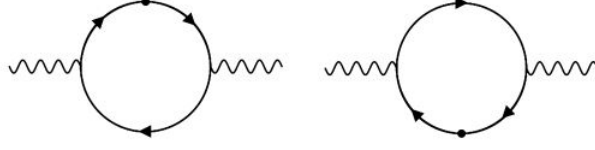


Figura 3.1: Diagrama de Feynman para a função de 2 pontos.

Para $n = 4$, podemos escrever a seguinte ação

$$S_{ef}^{(4)} = \frac{ie^4}{4} Tr S_{\alpha\beta}(p) A_\lambda \gamma^{\beta\lambda\nu} S_{\nu\rho}(p) A_\sigma \gamma^{\rho\sigma\gamma} S_{\alpha\delta}(p) A_\theta \gamma^{\delta\theta\zeta} S_{\zeta\eta}(p) A_\kappa \gamma^{\eta\kappa\tau}, \quad (3.18)$$

que, calculando o traço sobre as coordenadas, obtemos

$$S_{ef}^{(4)} = \frac{ie^4}{4} \int d^4x \Pi^{\lambda\sigma\theta\kappa} A_\lambda A_\sigma A_\theta A_\kappa, \quad (3.19)$$

onde

$$\Pi^{\lambda\sigma\theta\kappa} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} tr S_{\alpha\beta}(p) \gamma^{\beta\lambda\nu} S_{\nu\rho}(p) \gamma^{\rho\sigma\gamma} S_{\alpha\delta}(p) \gamma^{\delta\theta\zeta} S_{\zeta\eta}(p) \gamma^{\eta\kappa\alpha} + O(\partial^4). \quad (3.20)$$

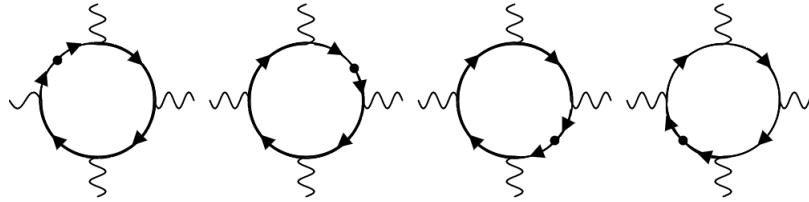


Figura 3.2: Diagrama de Feynman para a função de 4 pontos.

Observe que quando escrevemos Tr , calculamos o traço sobre as matrizes de Dirac e sobre as coordenadas. Quando escrevemos tr calculamos apenas o traço somente sobre as matrizes de Dirac. Para chegarmos na equação (3.17) e (3.20),

utilizamos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln(\theta) &= \int d^4x \langle x | \ln(\theta) | x \rangle = \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \langle x | \ln(\theta) | p \rangle \langle p | x \rangle \\ &= \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln(\theta). \end{aligned} \quad (3.21)$$

3.2.1 Integrais de Feynman

Nesta seção, vamos mostrar como são resolvidas as integrais de Feynman que aparecem no cálculo de correções quânticas, e em seguida vamos mostrar um exemplo prático de um dos cálculos feitos neste trabalho.

O caso mais simples que podemos ter é

$$I(4, \alpha, m) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^\alpha}, \quad (3.22)$$

tal que ao generalizarmos para D dimensões, escrevemos

$$I(D, \alpha, m) = \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 - m^2)^\alpha}. \quad (3.23)$$

Para resolvermos essa integral, precisamos transformá-la em uma integral em coordenadas esféricas. Para isso, o primeiro passo é passar do espaço de Minkowski para o espaço euclidiano. Então, usamos a transformação $p_0 \rightarrow ip_0$, tal que escrevemos

$$I(D, \alpha, m) = i \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} \frac{1}{(-p^2 - m^2)^\alpha}. \quad (3.24)$$

Agora, transformando para coordenadas polares e substituindo p por r , obtemos

$$I(D, \alpha, m) = \frac{1}{(2\pi)^D} \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})} i \int_0^\infty r^{D-1} dr \frac{1}{(-r^2 - m^2)^\alpha}, \quad (3.25)$$

tal que, a solução dessa integral é

$$I(D, \alpha, m) = \frac{1}{(2\pi)^D} \frac{2i\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \frac{(-1)^{-\frac{D}{2}} \Gamma(\alpha - \frac{D}{2}) \Gamma(\frac{D}{2})}{(-m^2)^{\alpha - \frac{D}{2}} 2\Gamma(\alpha)}, \quad (3.26)$$

que simplificando, obtemos

$$I(D, \alpha, m) = \frac{(-1)^{-\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \frac{i\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\alpha)(-m^2)^{\alpha - \frac{D}{2}}} \Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2}\right). \quad (3.27)$$

O segundo caso que podemos ter é quando temos momentos no numerador, i.e.,

$$I_{\mu\nu}(D, \alpha, m) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2 - m^2)^\alpha}, \quad (3.28)$$

que pode ser visto como

$$I_{\mu\nu}(D, \alpha, m) = R g_{\mu\nu}, \quad (3.29)$$

que, contraindo com $g^{\mu\nu}$, temos

$$g^{\mu\nu} I_{\mu\nu} = R g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = R D. \quad (3.30)$$

Por outro lado, também podemos escrever

$$g^{\mu\nu} I_{\mu\nu} = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu}{(p^2 - m^2)^\alpha} = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^2}{(p^2 - m^2)^\alpha}, \quad (3.31)$$

que então podemos escrever R como sendo

$$R = \frac{1}{D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^2}{(p^2 - m^2)^\alpha}. \quad (3.32)$$

Dessa forma, nossa integral deve ser escrita como

$$I_{\mu\nu}(D, \alpha, m) = \frac{g_{\mu\nu}}{D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^2}{(p^2 - m^2)^\alpha}. \quad (3.33)$$

Agora, vamos reescrever para deixar em função de integrais que já sabemos calcular, ou seja, integrais que sejam da forma apresentada em (3.22) e tem solução do tipo (3.27). Então, escrevemos

$$I_{\mu\nu}(D, \alpha, m) = \frac{g_{\mu\nu}}{D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \left(\frac{(p^2 - m^2)}{(p^2 - m^2)^\alpha} + \frac{m^2}{(p^2 - m^2)^\alpha} \right), \quad (3.34)$$

que pode ser visto como

$$I_{\mu\nu}(D, \alpha, m) = \frac{g_{\mu\nu}}{D} (I(D, \alpha - 1, m) + m^2 I(D, \alpha, m)). \quad (3.35)$$

Usando o que chegamos em (3.27), obtemos

$$I_{\mu\nu}(D, \alpha, m) = \frac{g_{\mu\nu}}{D} \frac{(-1)^{-\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \frac{i\pi^{\frac{D}{2}}}{(-m^2)^{\alpha-1-\frac{D}{2}}} \left(\frac{\Gamma(\alpha - 1 - \frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha - 1)} - \frac{\Gamma(\alpha - \frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)} \right). \quad (3.36)$$

Podemos simplificar essa expressão colocando um termo em comum e usando a propriedade $\Gamma(n+1) = (n)\Gamma(n)$, o que nos deixa apenas com

$$I_{\mu\nu}(D, \alpha, m) = \frac{(-1)^{-\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \frac{i\pi^{\frac{D}{2}}}{(-m^2)^{\alpha-1-\frac{D}{2}}} \frac{g_{\mu\nu}}{D} \frac{D}{2} \frac{\Gamma(\alpha - 1 - \frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)}, \quad (3.37)$$

que pode ser rearranjado como sendo

$$I_{\mu\nu}(D, \alpha, m) = \frac{(-1)^{-\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \frac{i\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\alpha)(-m^2)^{\alpha-\frac{D}{2}}} g_{\mu\nu} \left(-\frac{m^2}{2}\right) \Gamma\left(\alpha - 1 - \frac{D}{2}\right). \quad (3.38)$$

Assim, podemos escrever a solução da integral generalizando a quantidades de termos p na integral, escrevemos a solução generalizada como sendo

$$\begin{aligned} I_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}(D, \alpha, m) &= \frac{(-1)^{-\frac{D}{2}} i\pi^{\frac{D}{2}} (g_{\mu_1\mu_2}g_{\mu_3\mu_4}\cdots g_{\mu_{p-1}\mu_p} + perm.)}{(2\pi)^D \Gamma(\alpha)(-m^2)^{\alpha-\frac{D}{2}}} \\ &\times \left(-\frac{m^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\alpha - \frac{p}{2} - \frac{D}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.39)$$

A seguir, vamos fazer a regularização da integral $I(D, 1, m)$. Para isso, vamos considerar

$$\begin{aligned} \mu^{4-D} I(D, 1, m) &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 - m^2)} \\ &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \frac{(-1)^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \frac{i\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(1)(-m^2)^{1-\frac{D}{2}}} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \\ &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \frac{(-1)^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \frac{i\pi^{\frac{D}{2}}}{(-m^2)^{2-\frac{D}{2}-1}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2} - 1\right). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Lembrando que usamos $D = 4$, então quando aparecer termos com $4 - D$, podemos expandi-los em torno de 0. Devemos então agrupar os termos da equação acima de forma que possamos escrevê-los em termos de $4 - D$. Então, temos

$$\mu^{4-D} I(D, 1, m) = \frac{(-m^2)}{16\pi^2} \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{4-D}{2}} \Gamma\left(\frac{4-D}{2} - 1\right), \quad (3.41)$$

tal que usando $\epsilon = 4 - D$, escrevemos

$$\mu^{4-D} I(D, 1, m) = \frac{(-m^2)}{16\pi^2} \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right). \quad (3.42)$$

Agora, temos dois termos escritos com ϵ , tal que vamos expandir cada um dos termos separadamente. Expandindo com série de Taylor $\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}}$ em torno de $\epsilon = 0$ até 1º ordem, temos

$$\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} = 1 + \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \epsilon + \dots, \quad (3.43)$$

tal que, simplificando, obtemos

$$\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} = 1 - \frac{\epsilon}{2} \ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) + \dots. \quad (3.44)$$

Para expandir $\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right)$, podemos usar a expressão

$$\Gamma(\epsilon - n) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{\epsilon} + \Psi_1(n) + \dots \right), \quad (3.45)$$

onde definimos $\Psi_1(n)$ como sendo

$$\Psi_1(n) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma = \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} - \gamma, \quad (3.46)$$

e

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) \right) = 0,5772157. \quad (3.47)$$

Assim, para $n = 1$ em (3.45), escrevemos

$$\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \dots \quad (3.48)$$

Dessa forma, podemos substituir as equações mostradas em (3.44) e (3.48) em (3.42), tal que podemos escrever

$$\mu^{4-D} I(D, 1, m) = \frac{m^2}{16\pi^2} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) + \dots \right) \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \dots \right). \quad (3.49)$$

Desconsiderando os termos de maior ordem, obtemos

$$\mu^{4-D} I(D, 1, m) = \frac{m^2}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) - \gamma \right), \quad (3.50)$$

que podemos também considerar $\gamma = \ln(e^\gamma)$, tal que reescrevemos a equação como

$$\mu^{4-D} I(D, 1, m) = \frac{m^2}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2 e^{-\gamma}}\right) \right). \quad (3.51)$$

Agora, para simplificar a equação vamos usar $\mu'^2 = 4\pi\mu^2 e^{-\gamma}$, ficando então com

$$\mu^{4-D} I(D, 1, m) = \frac{m^2}{8\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln\left(\frac{m}{\mu'}\right) \right), \quad (3.52)$$

ou melhor,

$$\mu^{4-D} I(D, 1, m) = \frac{m^2}{8\pi^2} \frac{1}{\epsilon'}, \quad (3.53)$$

com ϵ' sendo definido como

$$\frac{1}{\epsilon'} = \frac{1}{\epsilon} - \ln\left(\frac{m}{\mu'}\right). \quad (3.54)$$

Agora, vamos mostrar a regularização para $I^{\mu\nu}$. Vamos considerar então

$$\begin{aligned}\mu^{4-D} I^{\mu\nu}(D, 2, m) &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 - m^2)^2} \\ &= (\mu^2)^{2-\frac{D}{2}} \frac{(-1)^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \frac{i\pi^{\frac{D}{2}} g^{\mu\nu}}{\Gamma(2)(-m^2)^{2-\frac{D}{2}}} \frac{(-m^2)}{2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right)\end{aligned}\quad (3.55)$$

que pode ser escrita como

$$\mu^{4-D} I^{\mu\nu}(D, 2, m) = -\frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{4-D}{2}} \frac{m^2 g^{\mu\nu}}{2} \Gamma\left(\frac{4-D}{2} - 1\right). \quad (3.56)$$

Usando $\epsilon = 4 - D$, temos

$$\mu^{4-D} I^{\mu\nu}(D, 2, m) = -\frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \frac{m^2 g^{\mu\nu}}{2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right). \quad (3.57)$$

Observe que as aproximações que serão feitas aqui são as mesmas feitas em (3.42), de forma que podemos usar as equações (3.44) e (3.48), tal que temos

$$\mu^{4-D} I^{\mu\nu}(D, 1, m) = \frac{m^2 g^{\mu\nu}}{32\pi^2} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) + \dots\right) \left(-\frac{2}{\epsilon} + \gamma + \dots\right). \quad (3.58)$$

Podemos seguir o mesmo cálculo feito em (3.49) para escrever

$$\mu^{4-D} I^{\mu\nu}(D, 1, m) = \frac{m^2 g^{\mu\nu}}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon'}, \quad (3.59)$$

onde definimos

$$\frac{1}{\epsilon'} = \frac{1}{\epsilon} - \ln\left(\frac{m}{\mu'}\right) \quad (3.60)$$

e

$$\mu'^2 = 4\pi\mu^2 e^{-\gamma}. \quad (3.61)$$

3.2.2 Contribuições da ação efetiva

Nesta seção, vamos mostrar como são feitos os cálculos das correções quânticas e as contribuições de cada uma das escolhas de A na ação efetiva.

Agora, vamos mostrar o passo a passo para a correção radiativa de 2º ordem ($n = 2$) sem o momento externo ($-i\partial$), da mesma forma que mostramos em (3.16), para a escolha do parâmetro $A = -1$, devemos ter

$$\Pi^{\mu\nu} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} S_{\alpha\beta}(p) \gamma^{\beta\mu\sigma} S_{\sigma\rho}(p) \gamma^{\rho\nu\alpha}. \quad (3.62)$$

usando o *FeynCalc* do *Mathematica* para calcular o traço, obtemos

$$\Pi^{\mu\nu} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} 4(D-2) \frac{((m^2 - p^2)g^{\mu\nu} + 2p^\mu p^\nu)}{(p^2 - m^2)^2}, \quad (3.63)$$

que vamos reescrever como

$$\Pi^{\mu\nu} = 4(D-2) \left[- \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - m^2)g^{\mu\nu}}{(p^2 - m^2)^2} + 2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 - m^2)^2} \right]. \quad (3.64)$$

Mudando a integral para D dimensões, temos

$$\Pi^{\mu\nu} = 4(D-2) \left[- \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{g^{\mu\nu}}{(p^2 - m^2)} + 2 \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 - m^2)^2} \right]. \quad (3.65)$$

Essas integrais podem ser vistas como as integrais já solucionadas acima, mostradas em (3.28) e (3.23). Então, escrevemos

$$\Pi^{\mu\nu} = 4(D-2) [-g^{\mu\nu} I(D, 1, m) + 2I^{\mu\nu}(D, 2, m)]. \quad (3.66)$$

Devemos usar a solução das integrais,

$$\Pi^{\mu\nu} = 4(D-2) [-g^{\mu\nu} \mu^{4-D} I(D, 1, m) + 2\mu^{4-D} I^{\mu\nu}(D, 2, m)], \quad (3.67)$$

tal que, usando as regularizações já calculadas (3.53) e (3.59), obtemos

$$\Pi^{\mu\nu} = 4(D-2) \left[-g^{\mu\nu} \frac{m^2}{8\pi^2} \frac{1}{\epsilon'} + 2 \frac{m^2 g^{\mu\nu}}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon'} \right], \quad (3.68)$$

ou melhor,

$$\Pi^{\mu\nu} = 4(D-2) \left[-\frac{m^2 g^{\mu\nu}}{8\pi^2} \frac{1}{\epsilon'} + \frac{m^2 g^{\mu\nu}}{8\pi^2} \frac{1}{\epsilon'} \right], \quad (3.69)$$

ou seja, temos

$$\Pi^{\mu\nu} = 0. \quad (3.70)$$

Para o termo de 4º ordem (3.19), considerando também o parâmetro $A = -1$,

temos o seguinte resultado para o cálculo do traço

$$\begin{aligned}
tr \ S_{\alpha\beta}(p)\gamma^{\beta\lambda\nu}S_{\nu\rho}(p)\gamma^{\rho\sigma\gamma}S_{\alpha\delta}(p)\gamma^{\delta\theta\zeta}S_{\zeta\eta}(p)\gamma^{\eta\kappa\alpha} &= \frac{4}{(D-1)^2m^4}(2D^3g^{\mu\nu}m^6p^\lambda p^\kappa \\
&+16Dg^{\mu\nu}m^6p^\lambda p^\kappa + 2D^2g^{\lambda\nu}m^6p^\mu p^\kappa + 24g^{\lambda\nu}m^6p^\mu p^\kappa + 8D^3m^4p^\lambda p^\mu p^\nu p^\kappa \\
&+40Dm^4p^\lambda p^\mu p^\nu p^\kappa + 2D^3g^{\lambda\mu}m^6p^\nu p^\kappa + 16Dg^{\lambda\mu}m^6p^\nu p^\kappa - 12Dg^{\lambda\nu}p^\mu m^6p^\kappa \\
&-9D^2g^{\lambda\mu}p^\nu m^6p^\kappa - 16g^{\lambda\mu}p^\nu m^6p^\kappa - 9D^2p^\lambda g^{\mu\nu}m^6p^\kappa - 16p^\lambda g^{\mu\nu}m^6p^\kappa \\
&-32D^2p^\lambda p^\mu p^\nu m^4p^\kappa - 16p^\lambda p^\mu p^\nu m^4p^\kappa + 2D^3g^{\kappa\lambda}m^6p^\nu p^\mu + 16Dg^{\kappa\lambda}m^6p^\nu p^\mu \\
&-9D^2g^{\kappa\lambda}p^\nu m^6p^\mu - 16g^{\kappa\lambda}p^\nu m^6p^\mu + (((((9-2D)D-18)D+24)g^{\mu\nu}p^\lambda \\
&-2((D-8)D+20)g^{\lambda\nu}p^\mu + (((9-2D)D-18)D+24)g^{\lambda\mu}p^\nu)p^\kappa \\
&+g^{\kappa\lambda}(((9-2D)D-18)D+24)p^\mu p^\nu - 2(D-3)((D-2)D+2)m^2g^{\mu\nu}))m^4p^2 \\
&+D^3g^{\kappa\lambda}g^{\mu\nu}m^8 - 5D^2g^{\kappa\lambda}g^{\mu\nu}m^8 + 7Dg^{\kappa\lambda}g^{\mu\nu}m^8 - 2g^{\kappa\lambda}g^{\mu\nu}m^8 + (D-2)^2g^{\kappa\lambda}g^{\mu\nu}(p^2)^4 \\
&-((D-2)^2(g^{\mu\nu}p^\lambda - 2g^{\lambda\nu}p^\mu + g^{\lambda\mu}p^\nu)p^\kappa + g^{\kappa\lambda}((D-2)^2p^\nu p^\mu + 2(D-3)Dg^{\mu\nu}m^2)) \\
&\times (p^2)^3 + m^2(p^2)^2(((D-2)D-4)(g^{\mu\nu}p^\lambda - 2g^{\lambda\nu}p^\mu + g^{\lambda\mu}p^\nu)p^\kappa \\
&+g^{\kappa\lambda}(((D-2)D-4)p^\nu p^\mu + (D((D-4)D+7)-14)g^{\mu\nu}m^2)) + g^{\kappa\nu}(m^2-p^2) \\
&\times (p^\mu((D((2D-9)D+16)-16)m^4 - 2(D-4)p^2m^2 + (D-2)^2(p^2)^2)p^\lambda \\
&+g^{\lambda\mu}(m^2-p^2)((D-2)((D-3)D+1)m^4 - 2(D-4)p^2m^2 + (D-2)^2(p^2)^2)) \\
&-g^{\kappa\mu}(m^2-p^2)^2(2(-((D-6)D+12)m^2) + (D-2)^2(-p^2))p^\nu p^\lambda \\
&+g^{\lambda\nu}((D-2)((D-4)D+1)m^4 - 4(D-4)p^2m^2 + 2(D-2)^2(p^2)^2))). \quad (3.71)
\end{aligned}$$

Para fazermos esse cálculo, assim como os seguintes, vamos usar o pacote *FeynCalc* do *Mathematica* para o cálculo também das integrais. Dessa forma, observamos que

o resultado se anula, de forma que obtemos

$$\Pi^{\mu\nu\lambda\kappa} = 0. \quad (3.72)$$

Assim, a única contribuição da escolha de $A = -1$ torna-se apenas o termo cinético

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{5i}{36\pi^2}(g^{\mu\nu}\partial^2 - \partial^\mu\partial^\nu), \quad (3.73)$$

como esperado. Para acharmos o termo cinético, usamos a parametrização de Feynman em (3.17).

Agora, vamos considerar o nosso parâmetro A genérico para correções radiativas de 2^o ordem, tal que fazendo o cálculo do traço e as respectivas integrais, obtemos

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{iA(A+1)m^2}{\pi^2(D-4)} - \frac{i(A+1)(4A+1)m^2}{12\pi^2}, \quad (3.74)$$

que é a soma do termo divergente e do termo finito. Agora, considerando a equação (3.74), vamos fazer a escolha de $A = -1/3$, de forma que obtemos o termo divergente e o termo finito

$$\Pi^{\mu\nu} = -\frac{2im^2}{9\pi^2(D-4)} + \frac{im^2}{54\pi^2}. \quad (3.75)$$

Note que, para $A = -1$, recuperamos prontamente o resultado (3.69). Agora, para $A = 0$, o termo divergente anula-se, tal que temos

$$\Pi^{\mu\nu} = -\frac{im^2}{12\pi^2}g^{\mu\nu}. \quad (3.76)$$

Assim, temos aqui uma possibilidade de geração de um potencial tipo bumblebee.

Para a contribuição do parâmetro A genérico de 4^o ordem ainda não conseguimos o resultado final, pois temos uma grande quantidade de contribuições que precisam ser calculadas. Contudo, para $A = 0$, que assim reduz significativamente as expressões, temos o resultado

$$\Pi^{\mu\nu\theta\kappa} = \frac{5882i}{81\pi^2} g^{\mu\nu} g^{\theta\kappa}. \quad (3.77)$$

Portanto, levando em consideração apenas as contribuições de $A = 0$, conseguimos escrever a seguinte expressão para a ação

$$S_A = \int d^4x \left(-\frac{5}{36\pi^2} \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{C_2 m^2}{2} A^2 - \frac{C_4}{4} A^4 \right), \quad (3.78)$$

observe que o termo com $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ é um termo de potencial, pois possui derivadas, enquanto que o restante é visto como termo de potencial, sendo assim, vamos reescrever o nosso termos de potencial

$$S_A = \int d^4x \left[-\frac{5}{36\pi^2} \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{C_4}{4} \left(A^2 - \frac{C_2 m^2}{C_4} \right)^2 \right], \quad (3.79)$$

onde definimos as constantes $C_2 = \frac{1}{12}\pi^2$ e $C_4 = \frac{5882}{81}\pi^2$. Assim, podemos definir nosso termo de potencial como sendo

$$V_A = \frac{C_4}{4} \left(A^2 - \frac{C_2 m^2}{C_4} \right)^2, \quad (3.80)$$

que de fato apresenta uma forma de um potencial tipo bumblebee [17], com mínimos não triviais, e dessa forma dizemos que é um potencial com quebra espontânea de

simetria, gerado por correções radiativas.

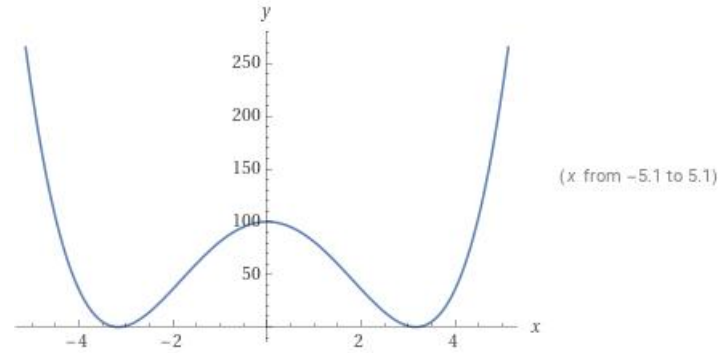


Figura 3.3: Potencial do tipo Bumblebee com mínimos não locais.

Capítulo 4

Considerações finais

Nesse trabalho, estudamos no Capítulo 2 a lagrangiana de Rarita-Schwinger para *spin* $3/2$, deduzindo a sua expressão que depende livremente de um parâmetro real A . Também falamos sobre a sua invariância de calibre e finalmente calculamos o seu correspondente propagador.

No Capítulo 3, após efetuarmos o acoplamento com o campo de calibre A_μ , calculamos a correspondente expressão para a ação efetiva. Analisamos as contribuições de 2^{o} e 4^{o} ordens, inicialmente, para $A = -1$. Os resultados obtidos concordam com os já obtidos em [6], ou seja, temos apenas o termo cinético para $n = 2$.

Como um objetivo de estender esses cálculos, conseguimos calcular o resultado para a contribuição de 2^{o} ordem para um o valor genérico de A . Os cálculos para a contribuição de 4^{o} ordem ainda estão em desenvolvimento, devido ao seu número elevado de termos a serem considerados. Contudo, para $A = 0$, como há

uma redução significativa de termos a serem calculados, conseguimos calculá-los e assim observar a geração de um potencial tipo bumblebee, i.e., um potencial com quebra espontânea de simetria, através de correções radiativas.

As perspectivas são concluir os cálculos para a contribuição de 4^o ordem e valor genérico de A , para assim discutirmos melhor a questão da quebra dinâmica de simetria. Também podemos efetuar os cálculos com a introdução da quiralidade, i.e., $A_\mu \rightarrow A_\mu(1 - \gamma_5)$, tal que assim podemos ter a possibilidade da geração do termo de CFJ [18]. Finalmente, vamos estudar teorias de quatro férmions com *spin* 3/2, e.g., com um termo de autointeração dado pela corrente $j^\lambda = \frac{i}{2}\bar{\psi}_\mu\{\sigma^{\mu\nu}, \gamma^\lambda\}\gamma_5\psi_\nu$, com o objetivo de obtermos a geração um potencial tipo bumblebee.

Referências Bibliográficas

- [1] W. Rarita and J. Schwinger, “On a theory of particles with half integral spin,” Phys. Rev. **60**, 61 (1941)
- [2] P. A. Moldauer and K. M. Case, Phys. Rev. **102**, 279-285 (1956)
- [3] G. Velo and D. Zwanziger, “Propagation and quantization of Rarita-Schwinger waves in an external electromagnetic potential,” Phys. Rev. **186**, 1337-1341 (1969)
- [4] N. Afkhami-Jeddi, S. Kundu and A. Tajdini, “A Bound on Massive Higher Spin Particles”, JHEP 04 (2019).
- [5] S. Deser and B. Zumino, “Broken Supersymmetry and Supergravity”, Phys. Rev. Lett. 38 (1977).
- [6] D. Barua, S. N. Gupta, “Electromagnetic interaction of higher-spin fields,” Phys. Rev. D **17**, 48202 (1978)
- [7] V. A. Kostelecky and R. Lehnert, “Stability, causality, and Lorentz and CPT violation,” Phys. Rev. D **63**, 065008 (2001)
- [8] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. Lond. A **155**, 447-459 (1936)

- [9] M. Fierz and W. Pauli, “On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field”, Proc. Roy. Soc. Lond. A 173 (1939).
- [10] M. Valenzuela and J. Zanelli, “The propagating modes of the massless Rarita–Schwinger system,” [arXiv:2305.00106 [hep-th]].
- [11] D. O. Badagnani, “Campos de spin $3/2$ y sus interacciones,” Tese de doutorado (2017). [12]
- [12] T. Pilling, “Symmetry of massive Rarita-Schwinger fields,” Int. J. Mod. Phys. A **20**, 2715-2742 (2005)
- [13] P. Van Nieuwenhuizen, “Supergravity,” Phys. Rept. **68**, 189-398 (1981)
- [14] M. D. Schwartz, “Quantum field theory and the standard model,” Vol. 1, Cambridge University Press, 2014
- [15] N. Lima Costa, “Identidades Polinomiais e Polinômios Centrais para Álgebra de Grassmann”(2012)
- [16] M. Seetharaman, J. Prabhakaran and P. M. Mathews, Phys. Rev. D **12**, 458-466 (1975)
- [17] T. Mariz, J. R. Nascimento and A. Petrov, “Lorentz Symmetry Breaking – Classical and Quantum Aspects,” Springer, 2023,
- [18] M. Gomes, J. G. Lima, T. Mariz, J. R. Nascimento and A. Y. Petrov, “Non-Abelian Carroll–Field–Jackiw term in a Rarita-Schwinger model,” Phys. Lett. B **845**, 138141 (2023)