UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Talita Santos de Araújo

INTERSEÇÕES ESTÁVEIS DE CONJUNTOS DE CANTOR

Maceió/AL
2024

Talita Santos de Araújo

INTERSEÇÕES ESTÁVEIS DE CONJUNTOS DE CANTOR

Dissertação de Mestrado submetido à Universidade Federal de Alagoas, como requisito necessário para obtenção do grau de mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Davi dos Santos Lima

Maceió/AL, 16 de fevereiro de 2024

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

A663i Araújo, Talita Santos de.
Interseções estáveis de conjuntos de Cantor / Talita Santos de Araújo. – 2024.
121 f.

Orientador: Davi dos Santos Lima.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. Maceió, 2024.

Bibliografia: f. 120-121.

1. Interseções estáveis (Matemática). 2. Conjuntos de Cantor. 3. Aritmética – Diferença. I. Título.

CDU: 51

Dedico esse trabalho aos meus pais
e ao meu irmão, que sempre me apoiam

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me ajudado em toda minha trajetória. Aos meus pais Jafé e Lucicleide e ao meu irmão, Thiago, por me apoiarem em todos os momentos.

Agradeço ao meu orientador, Davi Lima, que me acompanhou em minha trajetória acadêmica até o presente momento, por me inspirar com sua humanidade e profissionalismo, e pelos conselhos acadêmicos que, sem dúvidas, fortaleceram a minha formação.

Agradeço aos professores Rafael Lucena e Wagner Rânter do grupo de Sistemas Dinâmicos do Instituto de Matemática da UFAL, pelos conselhos e conhecimentos recebidos. Ao professor Alan Pereira agradeço pelos conhecimentos compartilhados e por sua amizade. Agradeço aos professores Abraão Rego, Márcio Cavalcante, Márcio Batista e Marcos Petrúcio, que formam a coordenação atual e antecessora da Pós-graduação em Matemática da UFAL que me acompanharam durante o curso. E agradeço também à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Alagoas (FAPEAL) pelo apoio financeiro durante o mestrado.

Agradeço ao professor Carlos Gustavo Moreira, por ter me ajudado com dúvidas que surgiram durante os estudos dos seus artigos.

Agradeço também a todos os meus amigos do Instituto de Matemática da UFAL e de outras instituições e, em particular, ao Jônatas Marinho, por compartilharem comigo momentos de estudo durante os cursos, momentos descontração, apoio e companheirismo, uma parte de suma importância na vida acadêmica.

Por fim, agradeço a mim mesma, por nunca desistir!

"Se você soubesse resolver todos os seus problemas,
eles não seriam problemas "

Resumo

Neste trabalho, estudamos interseções estáveis e diferenças aritméticas de conjuntos de Cantor regulares.

Apresentamos técnicas que nos ajudam a detectar a existência de interseções estáveis ou extremais estáveis entre pares de conjuntos de Cantor. Iniciamos com o Gap Lemma de Newhouse, que utiliza a espessura dos conjuntos de Cantor para essa conclusão, o Teste da Espessura Generalizado, que estuda a interseção dos domínios de Markov e, por fim, a existência de um compacto recorrente no espaço das configurações relativas desses conjuntos de Cantor.

Apresentamos também alguns exemplos que mostram como tais técnicas são aplicadas. Em certos exemplos, destacamos que uma das técnicas funciona, enquanto as demais podem falhar, mostrando assim a importância do estudo de cada uma delas.

Finalizamos com um breve estudo da topologia da diferença aritmética de conjuntos de Cantor afins, apresentando uma família de conjuntos de Cantor cuja diferença aritmética é quase sempre um R-Cantorval.

Palavras-chave: Conjuntos de Cantor Regulares, Interseções Estáveis de Conjuntos de Cantor, Diferença Aritmética de Conjuntos de Cantor.

Abstract

In this work, we study stable intersections and arithmetic differences of regular Cantor sets.

We present techniques that help us to detect the existence of stable intersections or extremal stable intersections between pairs or Cantor sets. We begin with the Newhouse Gap Lemma, which makes use of the thickness of Cantor sets to its end, and the Generalized Thickness Test, which analizes the intersections of Markov domains and to conclude, the existence of a recurrent compact set in the space of relative configurations of these Cantor sets.

We also present some examples which shows how such techniques are applied. In certain examples, we emphasize that one of the techniques works, tough the other may fail, in this way showing the importance of each of them.

We conclude with a brief study of the topology of the arithmetic difference of Affine Cantor sets, presenting a family of Cantor sets whose arithmetic difference is almost always a R-Cantorval.

Keywords:Regular Cantor Sets, Stable Intersection of Cantor Sets, Arithmetic Difference of Cantor Sets

Sumário

1 Introdução 9
2 Preliminares 13
2.1 Dimensão de Hausdorff 13
2.2 Conjuntos de Cantor Regulares 22
2.3 Dimensão de Hausdorff de Conjuntos de Cantor Regulares 30
3 Espessura de Conjuntos de Cantor 39
3.1 Definição e Resultados Iniciais 39
3.2 Continuidade da Espessura e Espessuras Laterais 46
4 Interseções Estáveis de Conjuntos de Cantor com Espessura Grande 56
4.1 O Gap Lemma de Newhouse 56
4.2 Exemplos Sobre Diferenças Aritméticas e Interseções Estáveis . . . 61
5 Teste da Espessura Generalizado 69
5.1 Teste da Espessura Generalizado Para Conjuntos de Cantor do Tipo Afim e Afim Generalizado 69
5.2 Teste da Espessura Generalizado Para Conjuntos de Cantor Regulares 76
6 Geometrias Limite de Conjuntos de Cantor Regulares 78
6.1 Definição das Geometrias Limites 78
6.2 Definição do Operador de Renormalização 84
6.3 Configurações, Compactos Recorrentes e Interseções Estáveis 87
6.4 Transferência do Operador de Renormalização no Espaço $\mathcal{S} \times \mathbb{R}$ . . 91
7 Interseções Estáveis de Conjuntos de Cantor do Tipo Afim 94
7.1 Interseções Estáveis de Conjuntos de Cantor do Tipo Afim 94
8 A Topologia da Diferença de Conjuntos de Cantor do Tipo Afim 109
8.1 Uma Condição Para a Não Existência Interseções Extremais Estáveis 109
8.2 Cantorvals 112
8.3 Diferença Aritmética de Conjuntos de Cantor do Tipo Afim 115
9 Conclusão 119
Referências 120

1 Introdução

Os conjuntos de Cantor regulares surgem naturalmente no estudo de objetos em Sistemas Dinâmicos, Teoria dos Números e outras áreas. Nesse trabalho , estudaremos conjuntos de Cantor que são dinamicamente definidos e veremos muitas de suas propriedades topológicas e fractal-geométricas. Explicaremos como a soma ou diferença aritmética são úteis no estudo de objetos em Sistemas Dinâmicos e Teoria dos Números, exemplos disso podem ser encontrados em [16],[14] e [13]. Em [5] e [15], temos exemplos de como a interseção e soma aritmética de conjuntos de Cantor regulares são utilizados no estudo de bifurcações homoclínicas e no estudo dos espectros de Markov e Lagrange.

Obtemos conjuntos de Cantor regulares como o conjunto maximal invariante sob a iteração de um mapa com propriedades bem determinadas. Mais precisamente, dado um conjunto K, dizemos que K é um conjunto de Cantor regular se podemos associar a ele um conjunto de intervalos compactos disjuntos $I_1,...,I_r$, que chamaremos de partição de Markov de K, e um mapa expansor de classe $C^{1+\varepsilon}$, $\Psi : I_1 \cup ... \cup I_r \to \text{Conv}(I_1 \cup ... \cup I_r)$ tal que, para cada $1 \leq i \leq r$, existe $m \in \mathbb{N}$ com $\Psi^m(K \cap I_i) = K$, e podemos expressar K como

$$K = \bigcap_{n \geq 1} \Psi^n(I_1 \cup ... \cup I_r)$$

Veremos neste trabalho, como a coleção de conjuntos de Cantor pode ser munida com uma topologia e, a partir desta topologia, estaremos interessados em encontrar condições suficientes para garantir interseção estável entre pares de conjuntos de Cantor. Dizemos que dois conjuntos de Cantor regulares possuem interseção estável quando existe uma vizinhança de tais conjuntos, na topologia $C^{1+\varepsilon}$, onde quaisquer pares de conjuntos de Cantor nessa vizinhança possui interseção não vazia.

A existência de interseção estável para um par de conjuntos de Cantor $(K, \tilde{K})$ garante a existência de um intervalo na diferença aritmética desses conjuntos. Aqui, apresentaremos alguns critérios que nos ajudarão a decidir se um par de conjuntos de Cantor possui interseção estável.

Newhouse introduziu em seu artigo [14] o conceito de espessura, que denotaremos por τ. Veremos que, na coleção dos conjuntos de Cantor regulares (com a topologia $C^{1+\varepsilon}$), a espessura varia continuamente.

O Gap Lemma de Newhouse nos diz que para um par de conjuntos de Cantor $(K, \tilde{K})$, se $\tau(K) \cdot \tau(\tilde{K}) > 1$, K não está contido num gap de $\tilde{K}$ ou $\tilde{K}$ num gap de K, então $K \cap \tilde{K} \neq \emptyset$.

Supondo então que a condição para a interseção não vazia seja satisfeita para um par de conjuntos de Cantor $(K, \tilde{K})$ que possua um par de gaps lincados, isto é, $\mathcal{O}$ e $\tilde{\mathcal{O}}$, respectivamente tais que $\mathcal{O}$ contém exatamente um ponto de bordo de $\tilde{\mathcal{O}}$ e vice-versa, o mesmo ocorrerá para conjuntos de Cantor suficientemente próximos.

Mostramos também que se um par de conjuntos de Cantor regulares $(K, \tilde{K})$ tem interseção estável garantida pelo Gap Lemma, então $K + \tilde{K} = \text{Conv}(K) + \text{Conv}(\tilde{K})$.

O Gap Lemma de Newhouse apresenta uma condição suficiente para a existência de interseção estável, mas não necessária. Nesse trabalho apresentamos exemplos de conjuntos de Cantor cujo produto da espessura é menor que 1, mas que possuem interseção estável.

Um primeiro resultado que melhora nossa conclusão é o Teste da Espessura Generalizado (GTT). Sejam K e $\tilde{K}$ conjuntos de Cantor regulares do tipo afim (definido por mapas afins, sobrejetores e que preservam orientação) com domínios de Markov (união dos intervalos da partição de Markov) $\mathcal{D}$, $\tilde{\mathcal{D}}$, respectivamente. Dizemos que $(K, \tilde{K})$ satisfaz o GTT se, para cada $t \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ou $\lambda\mathcal{D} + t$ está contido num gap de $\tilde{\mathcal{D}}$ ou $\tilde{\mathcal{D}}$ está contido num gap de $\lambda\mathcal{D} + t$ ou $(\lambda\mathcal{D} + t) \cap \tilde{\mathcal{D}} \neq \emptyset$.

Em nosso trabalho, mostramos que se um par de conjuntos de Cantor do tipo afim $(K, \tilde{K})$ satisfazem um GTT e não estão contidos um num gap do outro, então $(K, \tilde{K})$ possui interseção estável. Mostramos ainda o GTT é uma condição determinada pela existência de intervalos em $\tilde{\mathcal{D}} - \lambda\mathcal{D}$. Quando tais intervalos são determinados por desigualdades estritas dizemos que $(K, \tilde{K})$ satisfaz o GTT estritamente e, neste caso, temos a existência de interseção estável.

Em alguns casos, o GTT também pode caracterizar a existência de interseção estável. Apresentamos um exemplo onde o GTT é satisfeito se, e somente se, o produto das espessuras é maior que 1. Contudo, o GTT não é uma generalização do Gap Lemma. Apresentamos exemplos de conjuntos de Cantor que têm interseção estável garantida pelo Gap Lemma, mas que não satisfazem o GTT.

Um método mais sofisticado para garantir interseções estáveis é a existência de compactos recorrentes nas configurações relativas de conjuntos de Cantor. Para abordar esse novo conteúdo, fazemos uso das geometrias limite, operadores de renormalização e configurações do conjunto de Cantor.

Apresentaremos um exemplo de infinitos pares de conjuntos de Cantor que não satisfazem o Gap Lemma ou GTT, mas que possuem interseção estável, que é garantida pela existência de um compacto recorrente para os operadores de renormalização de tais conjuntos.

Em nosso texto, falaremos ainda sobre interseções extremais estáveis, que ocorrem num par de conjuntos de Cantor regulares $(K, \tilde{K})$ se o extremo direito de K coincide com o extremo esquerdo de $\tilde{K}$ e, para conjuntos de Cantor próximos cujos fechos convexos se intersectam temos a existência de interseção não vazia. Apresentamos um teorema que, sob suas hipóteses, caracteriza a existência de interseção extremal estável.

Ainda estudaremos a topologia da diferença aritmética de dois conjunto de Cantor afins. Mostraremos um teorema que nos dá uma família de pares de conjuntos de Cantor cuja diferença aritmética é quase sempre um R-Cantorval. Um R-Cantorval é um conjunto compacto, perfeito, com interior denso em fronteira fractal. Tal família de conjuntos de Cantor terão interseção estável garantida pela existência de compacto recorrente.

Agora, daremos um breve esboço de como se desenvolve o nosso texto.

No capítulo 2, abordaremos alguns conteúdos preliminares. Na seção 1, trataremos da dimensão de Hausdorff de subconjuntos de $\mathcal{R}^n$, dando sua definição, apresentando alguns resultados e exemplos importantes que servirão para fixar a teoria. Na seção 2, iniciamos o estudo dos conjuntos de Cantor regulares, daremos sua definição e apresentaremos resultados que decorrem imediatamente dela. Na terceira seção, apresentaremos resultados sobre dimensão de Hausdorff para conjuntos de Cantor regulares, que serão úteis para a compreensão de resultados e exemplos dos capítulos seguintes.

No capítulo 3, iniciaremos nosso estudo da espessura de um conjunto de Cantor. A seção 1 traz, além da definição de espessura e espessura lateral, daremos alguns resultados iniciais e desigualdades que serão úteis no cálculo da espessura de um conjunto de Cantor regular. Na seção 2 desse capítulo, trataremos da continuidade da espessura e da não continuidade da espessura lateral, que será mostrada por meio de um exemplo. Esta ultima seção traz ainda um importante teorema que trata da existência de um subconjunto aberto e denso de conjuntos de Cantor regulares na topologia $C^{1+\varepsilon}$ onde as espessuras laterais são contínuas.

No capítulo 4, iniciamos nosso estudo sobre interseções de conjuntos de Cantor. Na seção 1, apresentaremos o Gap Lemma de Newhouse, mostraremos que se um par de conjuntos de cantor tem interseção estável garantida pelo Gap Lemma,

sua soma aritmética corresponde a soma aritmética de seus fechos convexos e mostraremos ainda alguns resultados que envolvem espessura e dimensão de Hausdorff. A seção 2 desse capítulo será dedicada a apresentar exemplos de interseções estáveis de conjuntos de Cantor e um estudos sobre suas diferenças aritméticas.

No capítulo 5, falaremos do teste da espessura generalizado. Na seção 1 desse capítulo, falaremos do teste da espessura generalizado para conjuntos de Cantor do tipo afim, afim e afim generalizado. Mostraremos algumas resultados que nos ajudarão a decidir quando um par de conjuntos de Cantor regulares satisfazem o GTT e que o GTT implica existência de interseção estável. Na seção 2, falaremos um pouco sobre o GTT para conjuntos de Cantor regulares.

No capítulo 6, falamos sobre as geometrias limite de conjuntos de Cantor. Na seção 1, daremos a definição de geometrias e exemplos práticos de como encontrar as funções envolvidas em sua definição. Na seção 2, definiremos os operadores de renormalização como a ação do grupo afim em elementos que mais tarde serão chamados de configurações do conjunto de Cantor. Na seção 3, definiremos as configurações de conjuntos de cantor, como classificar as interseções entre configurações de pares de conjuntos de Cantor, daremos a definição de um compacto recorrente de configurações relativas de conjuntos de Cantor e como sua existência implica interseção estável. Na seção 4, apresentaremos um teorema que nos permite transferir o operador de renormalização para o espaço $\Sigma^- \times \Sigma^- \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ e não mais num espaço de configurações. No caso em que os conjuntos de Cantor são do tipo afim, isso reduz nosso estudos a encontrar um compacto recorrente em $\mathbb{R}^2$ para os operadores de renormalização transferidos.

No capítulo 7, daremos o exemplo de uma família de conjuntos de Cantor que não satisfazem o Gap Lemma ou o GTT, mas que possuem interseção estável. Para isso, utilizaremos seus operadores de renormalização, com uma simplificação conveniente, para achar um compacto recorrente.

No capítulo 8, estudaremos a topologia da diferença aritmética de conjuntos de Cantor afins. Na seção 1, apresentaremos um critério que será utilizado para decidir a existência de interseção extremal estável em pares de conjuntos de Cantor, isso se dará pela existência ou não de uma vizinhança de 0 em sua diferença aritmética. Na seção 2, definiremos R-Cantorval, e enunciaremos alguns resultados que nos ajudarão a decidir se um conjunto é um R-Cantorval. Na seção 3, apresentaremos uma família de conjuntos de Cantor do tipo afim cuja diferença aritmética é quase sempre um R-Cantorval.

2 Preliminares

2.1 Dimensão de Hausdorff

Os conjuntos de Cantor regulares possuem medida de Lebesgue nula, o que a torna pouco útil no estudo desses e de outros conjuntos fractais. Existem medidas mais adequadas para trabalhar com esse tipo de conjunto, como é o caso da medida e dimensão de Hausdorff, que trataremos nessa seção.

Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$, chamamos de δ-cobertura de X a uma cobertura $\{U_i\}$ de X onde os diâmetros dos U_i's não excedem δ, isto é, $|U_i| \leq \delta$.

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ e $s > 0$ um número real, definimos

$$\mathcal{H}^s_\delta(X) = \inf\left\{ \sum_i |U_i|^s ; \{U_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } X \right\}.$$

fazendo $\delta \longrightarrow 0$ obtemos uma sequência não-decrescente de ínfimos que converge (podendo ter limite infinito), ela nos permite definir a *medida de Hausdorff* s-dimensional de X por

$$\mathcal{H}^s(X) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(X)$$

que, de fato, define uma medida para subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. A medida de Hausdorff é um múltiplo constante da medida de Lebesgue s-dimensional, geralmente utilizada em $\mathbb{R}^s$.

Usando essa definição, provaremos alguns resultados que nos ajudam a calcular a medida de Hausdorff de alguns conjuntos.

Chamamos de homotetia uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $f(x) = \lambda x$ para algum $\lambda \neq 0$. Nosso primeiro resultado sobre medida de Hausdorff trata do comportamento dessa medida sob a ação de homotetias.

Proposição 2.1. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma homotetia por um fator escalar $\lambda > 0$ e $X \subset \mathbb{R}^n$, então $\mathcal{H}^s(f(X)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(X)$.*

Demonstração. Seja $\{U_i\}$ uma δ-cobertura para X, então $\{f(U_i)\}$ é uma $\lambda\delta$-cobertura para $f(X)$, de modo que

$$\sum_i |f(U_i)|^s = \lambda^s \sum_i |U_i|^s$$

tomando o ínfimo sobre todas as coberturas, temos

$$\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(f(X)) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s_\delta(X)$$

e fazendo $\delta \longrightarrow 0$

$$\mathcal{H}^s(f(X)) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(X)$$

Para a desigualdade inversa, observamos que f^{-1} é uma homotetia com fator escalar $\frac{1}{\lambda}$ e, aplicando a $f(x)$,

$$\mathcal{H}^s(X) = \mathcal{H}^s(f^{-1}(f(X))) \leq \frac{1}{\lambda^s}\mathcal{H}^s(f(X)) \Rightarrow \lambda^s \mathcal{H}^s(X) \leq \mathcal{H}^s(f(X)).$$

Donde $\mathcal{H}^s(f(X)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$, como queríamos. □

Definição 2.1. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ e $f : X \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação, dizemos que f é (C,ε)-Hölder, se existem constantes $C,\varepsilon > 0$ tais que, para cada $x,y \in X$, $|f(x) - f(x)| \leq C|x-y|^\varepsilon$. No caso em que $\varepsilon = 1$, dizemos que f é uma aplicação Lipschitz.*

Proposição 2.2. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ e $f : X \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação (C,ε)-Hölder, então, para cada s, $\mathcal{H}^{\frac{s}{\varepsilon}}(f(X)) \leq C^{\frac{s}{\varepsilon}}\mathcal{H}^s(X)$.*

Demonstração. Seja $\{U_i\}$ uma δ-cobertura de X, como

$$|f(X \cap U_i)| \leq C|X \cap U_i|^\varepsilon \leq C|U_i|^\varepsilon$$

$\{f(X \cap U_i)\}$ forma uma $C\delta^\varepsilon$-cobertura de $f(X)$. Assim,

$$\sum_i |f(X \cap U_i)|^{\frac{s}{\varepsilon}} \leq C^{\frac{s}{\varepsilon}} \sum_i (|U_i|^{\frac{s}{\varepsilon}})^\varepsilon = C^{\frac{s}{\varepsilon}} \sum_i |U_i|^s$$

tomando o ínfimo sobre todas as coberturas,

$$\mathcal{H}^{\frac{s}{\varepsilon}}_{C\delta^\varepsilon}(f(X) \leq C^{\frac{s}{\varepsilon}}\mathcal{H}^s_\delta(X)$$

e fazendo $\delta \longrightarrow 0$, obtemos

$$\mathcal{H}^{\frac{s}{\varepsilon}}(f(X)) \leq C^{\frac{s}{\varepsilon}}\mathcal{H}^s(X),$$

como desejávamos. □

Dados $X \subset \mathbb{R}^n$ e $\delta < 1$, podemos observar que $\mathcal{H}^s_\delta(X)$ é não crescente em s, de modo que $\mathcal{H}^s$ é não crescente. Mais que isso, se $t > s$ e $\{U_i\}$ é uma δ-cobertura de X

$$\sum_i |U_i|^t = \sum_i |U_i|^{t-s}|U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s$$

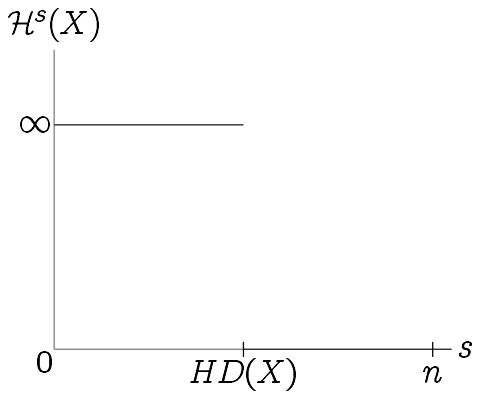
que nos dá, tomando o ínfimo,

$$\mathcal{H}^t_\delta(X) \leq \delta^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta(X)$$

e fazendo $\delta \longrightarrow 0$ vemos que, se $\mathcal{H}^s(X) < \infty$ então $\mathcal{H}^t(X) = 0$ para todo $t > s$. Isso nos permite definir a *Dimensão de Hausdorff de* X, que denotaremos $HD(X)$, por

$$HD(X) = \inf\{s \geq 0; \mathcal{H}^s(X) = 0\} = \sup\{s \geq 0; \mathcal{H}^s(X) = \infty\}$$

o comportamento da medida de Hausdorff e sua relação com a dimensão de Hausdorff está esboçado no gráfico abaixo



se $s = HD(X)$, então $\mathcal{H}^s(X)$ pode ser 0, ∞ ou um número real positivo.

Muitas vezes, na matemática procuramos invariantes. Por exemplo, espaços vetoriais com dimensão finita comportam-se como algum $\mathbb{R}^n$ quando queremos tratar de suas propriedades algébricas; isto ocorre porque existe um isomorfismo entre o espaço vetorial considerado e $\mathbb{R}^n$. Deste modo, espaços vetoriais com mesma dimensão (finita) são, sob o aspecto algébrico, essencialmente indistinguíveis. Analogamente, se dois espaços vetoriais de dimensão finita são isomorfos, então eles têm a mesma dimensão.

Teríamos algum análogo para aspectos fractais-geométricos em $\mathbb{R}^n$? Mais precisamente, há um invariante, mesmo que parcial, que nos permita concluir que dois conjuntos distintos têm a mesma dimensão de Hausdorff? A resposta é sim como veremos a seguir. Antes apresentamos a definição de aplicação bi-lipschitz.

Definição 2.2. *Seja* $X \subset \mathbb{R}^n$ *e* $f : X \to \mathbb{R}^m$*, dizemos que* f *é bi-lipschitz se existem constantes* $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$ *tais que, para cada* $x, y \in X$*,* $C_1|x-y| \leq |f(x)-f(y)| \leq C_2|x-y|$.

Proposição 2.3. *Seja* $X \subset \mathbb{R}^m$*, são válidas:*

i) Se $f : X \to \mathbb{R}^n$ *é uma aplicação* (C, ε)*-Hölder, então* $HD(f(X)) \leq \frac{1}{\varepsilon} HD(X)$*;*

ii) Se $f : X \to \mathbb{R}^n$ *é uma aplicação bi-lipschitz, então* $HD(f(X)) = HD(X)$.

Demonstração. Para o item (i), sabemos da Proposição 2.2 que

$$\mathcal{H}^{\frac{s}{\varepsilon}}(f(X)) \leq C^{\frac{s}{\varepsilon}}\mathcal{H}^s(X).$$

Assim, se $s > HD(X)$, $\mathcal{H}^s(X) = 0$, segue que

$$HD(f(X)) \leq \frac{1}{\varepsilon}HD(X).$$

Para provar o item (ii), como f é lipschitz, pelo item (i) temos

$$HD(f(X)) \leq HD(X).$$

Resta mostrarmos a desigualdade inversa. Para isso, observamos primeiro que toda aplicação bi-lipschitz é injetiva. De fato, existe $C_1 > 0$ tal que

$$C_1|x-y| \leq |f(x)-f(y)|.$$

Assim,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow |f(x)-f(y)| = 0 \Rightarrow |x-y| = 0 \Rightarrow x = y.$$

Segue que f é uma bijeção sobre sua imagem, logo, possui inversa $f^{-1} : f(X) \to X$. Sejam $x = f(x')$ e $y = f(y')$, $x', y' \in X$, temos

$$\begin{aligned} |f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| &= |f^{-1}(f(x')) - f^{-1}(f(y'))| \\ &= |x' - y'| \\ &\leq \frac{1}{C_1}|f(x') - f(y')| \\ &= \frac{1}{C_1}|x-y|. \end{aligned}$$

Assim, f^{-1} é lipschitz com constante menor ou igual a $\frac{1}{C_1}$. Novamente pelo item (i), $HD(f^{-1}(f(X)) \leq HD(f(X))$ quem implica $HD(X) \leq HD(f(X))$ daí, $HD(f(X)) = HD(X)$. □

O próximo resultado conecta a dimensão de Hausdorff de um conjunto com sua conexidade.

Lembramos que um conjunto totalmente desconexo é um conjunto onde quaisquer dois de seus pontos pertencem a componentes conexas distintas.

Proposição 2.4. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ com $HD(X) < 1$ é totalmente desconexo.*

Demonstração. Dados $x,y \in X$ com $x \neq y$, mostraremos que x e y pertencem a componentes conexas distintas. Para isso, defina $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ por $f(z) = |z-x|$. Como f é lipschitz temos

$$HD(f(X)) \leq HD(X) < 1$$

ou seja $\mathcal{H}^1(f(X)) = 0$, isso nos diz que $f(X)$ não tem medida de Lebesgue positiva, logo, não pode conter intervalos não degenerados. Como $f(X)$ tem interior vazio, seu complementar $\mathbb{R}\backslash X$ é denso.

Podemos então escolher $0 < r < f(y)$ com $r \notin f(X)$, e definindo os conjuntos $X_1 = \{z \in X; |z-x| < r\}$ e $X_2 = \{z \in X; |z-x| > r\}$, temos

$$X = X_1 \cup X_2$$

como $X_1 = f^{-1}(B(x,r))$, $X_2 = f^{-1}(\mathbb{R}^n \backslash B[x,y])$ e f é contínua, $X_1 \cup X_2$ forma uma cisão não trivial de X, uma vez que $x \in X_1$ e $y \in X_2$, $(f(y) = |y-x| > r)$ portanto, X é totalmente desconexo. □

O leitor pode se perguntar se $HD(X) > 1$ implica X conexo. A resposta é não. O produto cartesiano de dois conjuntos de Cantor K, $\tilde{K}$ é ainda desconexo, mas veremos que $HD(K \times \tilde{K}) = HD(K) + HD(\tilde{K})$, assim, basta consideramos conjuntos de Cantor que façam tal soma ser maior que 1.

Veremos agora um exemplo do cálculo da dimensão de Hausdorff. Apesar do exemplo específico, este cálculo, em geral, envolve estimar superiormente e inferiormente a medida de Hausdorff para determinados valores de s.

Exemplo 2.1. Seja K o conjunto de Cantor ternário, obtido a partir do intervalo $[0,1]$, ao removermos sucessivamente o terço médio dos intervalos. Se $s = \frac{\log 2}{\log 3}$, então $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(K) \leq 1$, donde $HD(K) = s$.

Os intervalos da k-ésima etapa da construção de K formam uma 3^{-k}-cobertura para K com 2^k intervalos de comprimento 3^{-k}. Observamos então que

$$\mathcal{H}^s_{3^{-k}}(K) \leq 2^k 3^{-ks}$$

para obtermos $\mathcal{H}^s_{3^{-k}}(K) = 0$ basta que

$$\frac{2^k}{3^{ks}} \longrightarrow 0 \Rightarrow s > \frac{\log 2}{\log 3}$$

se $s = \frac{\log 2}{\log 3}$, temos $\mathcal{H}^s \leq 2^k 3^{-ks} = 1$, e fazendo $k \longrightarrow \infty$

$$\mathcal{H}^s(K) \leq 1$$

Para a estimativa inferior, mostraremos que

$$\sum_i |U_i|^s \geq \frac{1}{2} = 3^{-s}$$

para qualquer cobertura de K.

Tomemos $\{U_i\}$ uma cobertura de K, que pode ser assumida aberta e finita, uma vez que K é compacto. Para cada U_i, seja r um inteiro tal que

$$3^{-(r+1)} \leq |U_i| < 3^{-r}$$

como os intervalos remanescentes do nível r têm comprimento 3^{-r} (lembre que os intervalos omitidos nesta etapa também têm comprimento 3^{-r} e que os intervalos omitidos anteriormente têm comprimento maior), U_i pode intersectar no máximo um deles.

Na etapa $r+1$ restarão, no máximo, 2 intervalos que intersectam U_i e, de modo geral, na etapa $j \geq r$, U_i intersecta, no máximo 2^{j-r} intervalos de nível j. Observamos que para $s = \frac{\log 2}{\log 3}$, temos

$$2^{j-r} = 2^j 3^{-sr} = 2^j 3^s 3^{-r} \leq 2^j 3^s |U_i|^s$$

se escolhermos j suficientemente grande para que $3^{-(j+1)} < |U_i|$ para todo i, como $\{U_i\}$ cobre K, os intervalos desta cobertura intersectam todos os 2^j intervalos da etapa j, os quais têm comprimento 3^{-j}. Temos então

$$2^j \leq \sum_i 2^j 3^s |U_i|^s \Rightarrow \frac{1}{2} = 3^{-s} \leq \sum_i |U_i|^s$$

Como $\{U_i\}$ é uma cobertura finita qualquer, fazendo $j \longrightarrow \infty$, temos $\delta \longrightarrow 0$, daí

$$\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(K) \leq 1$$

portanto, $HD(K) = s = \frac{\log 2}{\log 3}$.

Agora definiremos a box-counting dimension (ou capacidade limite), que será utilizada nos próximos resultados.

Seja $X \subset \mathbb{R}$ não-vazio e limitado, e seja $N_\delta(X)$ o menor número de conjuntos de diâmetro no máximo δ que pode cobrir X (como X é limitado, seu fecho é compacto, e esse número é realmente finito).

Definimos a box-counting dimension inferior e superior, respectivamente por

$$\begin{aligned} \underline{d}(X) &= \liminf_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(X)}{-\log \delta} \\ \overline{d}(X) &= \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(X)}{-\log \delta} \end{aligned}$$

se esses valores coincidem, a box-counting dimension de X é

$$d(X) = \underline{d}(X) = \overline{d}(X)$$

Nosso primeiro resultado sobre a box-counting dimension a compara com a dimensão de Hausdorff de um conjunto de Cantor qualquer.

Definição 2.3. *Seja $K \subset \mathbb{R}$, dizemos que K é um conjunto de Cantor se ele for compacto, perfeito (sem pontos isolados) e totalmente desconexo.*

Proposição 2.5. *Seja $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto de Cantor, então $d(K) \geq HD(K)$.*

Demonstração. Fixando $t > d(K)$, existe δ_0 tal que $\delta < \delta_0$ nos dá $N_\delta(K) \leq \delta^{-t}$.

Para $s > t$, temos

$$\mathcal{H}^s_\delta(K) \leq \delta^{-t}\delta^s = \delta^{s-t}$$

fazendo $\delta \longrightarrow 0$, temos $\delta^{s-t} \longrightarrow 0$, donde

$$\mathcal{H}^s(K) = 0$$

desse modo, $HD(K) < s$ para qualquer $s > d(K)$, ou seja $HD(K) \leq d(K)$, como queríamos. □

Abaixo temos um exemplo onde a igualdade entre as dimensões é válida.

Exemplo 2.2. Seja K o conjunto de Cantor ternário, então $d(K) = HD(K)$.

Em cada etapa k da construção de K temos 2^k intervalos de comprimento 3^{-k}, de modo que $N_\delta(K) \leq 2^k$, se $3^{-k} < \delta \leq 3^{-k+1}$ daí,

$$\overline{d}(X) = \limsup_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(K)}{-\log \delta} \leq \limsup_{n \to \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \limsup_{k \to \infty} \frac{k \log 2}{(k-1)\log 3} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Por outro lado, para cada $\delta > 0$ fixado, podemos tomar k tal que $3^{-k-1} \leq \delta < 3^{-k}$ de modo que intervalos de comprimento δ intersectam, no máximo, um intervalo da k-ésima etapa, assim, precisamos de pelo menos 2^k intervalos para cobrir K, donde $N_\delta(K) \geq 2^k$, nos dando

$$\underline{d}(K) \geq \frac{\log 2}{\log 3}$$

segue que

$$d(K) = \frac{\log 2}{\log 3} = HD(K)$$

como queríamos.

Este exemplo não é um caso especial, veremos no próximo capítulo que $HD(K) = d(K)$ para qualquer conjunto de Cantor regular, como é o caso do conjunto de Cantor ternário (a definição de conjunto de Cantor regular também será dada mais adiante).

Agora veremos alguns resultados que tratam da dimensão de Hausdorff do produto cartesiano de conjuntos. Claramente, se $E = [0,1]$ é o intervalo unitário,

$$HD(E \times E) = HD(E) + HD(E)$$

em geral, para fractais isso nem sempre isso é verdade. Porém, para subconjuntos $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ que possuem, na sua dimensão de Hausdorff, medida de Hausdorff não nula e finita, temos

$$HD(X \times Y) \geq HD(X) + HD(Y)$$

ver [9]. Abaixo, veremos alguns casos nos quais a igualdade é garantida, e um exemplo no qual a dimensão de Hausdorff do cartesiano é estritamente maior que a soma das dimensões.

Proposição 2.6. *Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$ quaisquer, então*

$$HD(X \times Y) \leq HD(X) + \overline{d}(Y).$$

Demonstração. Fixemos $s \geq HD(X)$ e $t \geq \overline{d}(Y)$. Então existe δ_0 tal que para todo $\delta \leq \delta_0$ temos $N_\delta(Y) \leq \delta^{-t}$.

Tome uma δ-cobertura $\{U_i\}$ de X por intervalos tais que $\sum_i |U_i|^s < 1$. Usaremos tal cobertura para construir uma cobertura de $X \times Y$.

Para isso, considere, para cada i uma cobertura $\{U_{i,j}\}$ de Y por $N_{|U_i|}$ intervalos de comprimente $|U_i|$. Deste modo, $X \times Y$ pode ser coberto por quadrados $\{U_i \times U_{i,j}\}$. Isso nos dá

$$X \times Y \subset \bigcup_i \bigcup_j (U_i \times U_{i,j})$$

usando tais coberturas podemos estimar a medida de Hausdorff de $X \times Y$ por

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{t+s}_{\delta\sqrt{2}}(X \times Y) &\leq \sum_i \sum_j |U_i \times U_{i,j}|^{s+t} \\
&= \sum_i \sum_j (\sqrt{2})^{s+t} |U_i|^{s+t} \\
&\leq \sum_i N_{|U_i|}(Y) 2^{\frac{s+t}{2}} |U_i|^{s+t} \\
&\leq 2^{\frac{s+t}{2}} \sum_i |U_i^{-t}||U_i|^{s+t} \\
&< 2^{\frac{s+t}{2}}.
\end{aligned}$$

Fazendo $\delta \longrightarrow 0$ temos

$$\mathcal{H}^{s+t}(X \times Y) < \infty$$

como $s > HD(X)$ e $t > \overline{d}(Y)$, concluímos que

$$HD(X \times Y) \leq s+t \leq HD(X)+\overline{d}(Y).$$

□

Disto, segue imediatamente o próximo corolário.

Corolário 2.6.1. *Sejam $X,Y \in \mathbb{R}^n$ conjuntos quaisquer. Se $HD(Y) = d(Y)$, então $HD(X \times Y) = HD(X)+HD(Y)$.*

Veremos agora um exemplo onde $HD(X \times Y) > HD(X)+HD(Y)$.

Exemplo 2.3. Existem conjuntos $X,Y \in \mathbb{R}$ com $HD(X)+HD(Y) = 0$ para os quais $HD(X \times Y) \geq 1$.

Vamos construir conjuntos X e Y com tais propriedades. Para isso, considere uma sequência de inteiros

$$0 = m_0 < m_1 < m_2 < ...$$

tais que, se $j_n = (m_2 - m_1)+(m_4 - m_3)+...+(m_n - m_{n-1})$ temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log 10^{j_n}}{-\log 10^{-m_{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{j_n}{m_{n+1}} = 0.$$

Seja X o conjunto dos números no intervalo $[0,1]$ que possuem um dígito zero na k-ésima casa decimal sempre que $m_n + 1 \leq k \leq m_{n+1}$ quando n é par.E seja Y o conjunto dos números em $[0,1]$ que possuem um dígito zero na k-ésima posição sempre que $m_n + 1 \leq k \leq m_{n+1}$ e n é ímpar.

Vamos primeiro calcular a dimensão de Hausdorff de X, para isso acharemos, para cada n uma cobertura conveniente de X. Para cada $n \geq 2$ par podemos cobrir X por 10^{j_n} intervalos de comprimento $10^{-m_{n+1}}$.

Usaremos tal cobertura para calcular a box-counting dimension inferior de X, que pelo modo como os m_i, $i = 0,1,...$ foram tomados é 0. Deste modo,

$$HD(X) \leq \underline{d}(X) = 0 \Rightarrow HD(X) = 0.$$

Por um caminho similar, para cada $n \geq 1$ ímpar podemos cobrir Y por 10^{j_n} intervalos de comprimento $10^{-m_{n+1}}$, e pelos mesmos argumentos utilizados anteriormente, $HD(Y) = 0$.

Agora, dado $w \in (0,1)$, podemos escrevê-lo como $w = x + y$, onde $x \in X$ e $y \in Y$, para isso, basta construirmos tal x a partir de w colocando 0 no k-ésimo dígito decimal se $m_n + 1 \geq k \geq m_{n+1}$ se n é par e y a partir de w pondo 0 na k-ésima casa decimal se $m_n + 1 \geq k \geq m_n$ e n é ímpar.

Considerando a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x + y$, que é lipschitz, temos

$$HD(X \times Y) \geq HD(f(X \times Y)) \geq HD((0,1)) = 1.$$

Portanto,

$$HD(X \times Y) > HD(X) + HD(Y)$$

que é o resultado desejado.

2.2 Conjuntos de Cantor Regulares

Nesta seção, definimos conjuntos de Cantor regulares e mostramos algumas propriedades desses conjuntos que seguem imediatamente de sua definição, desde sua conjugação com um shift até propriedades menos diretas, como é o caso da distorção limitada, que será extremamente importante para o desenvolvimento do nosso texto.

Definição 2.4. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ uma união de intervalos, dizemos que uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}$ é expansora se pode ser estendida para uma função derivável numa vizinhança de X e existe λ tal que $|f'(x)| \geq \lambda > 1$ para todo $x \in X$.*

Definição 2.5. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$, chamamos de fecho convexo de X, denotado por* $\mathrm{Conv}(X)$*, o menor conjunto fechado e convexo que o contém.*

Definição 2.6. *Seja $X \subset \mathbb{R}$, dizemos que uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}$ é de classe $C^{1+\varepsilon}$ se sua derivada é Hölder com expoente ε.*

Definição 2.7. *Dizemos que $K \subset \mathbb{R}$ é um conjunto de Cantor Regular (ou dinamicamente definido) se:*

i) Existem intervalos compactos disjuntos $\{I_1, I_2, ..., I_r\}$ tais que $K \subset I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_r$ e $\partial(I_i) \subset K$, para $1 \leq i \leq r$;

ii) Existe um mapa expansor Ψ de classe $C^{1+\varepsilon}$ definido numa vizinhança de $I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_r$ tal que $\Psi(I_i)$ é o fecho convexo de uma união de intervalos I_j satisfazendo:

- *Para cada* $1 \leq i \leq r$*, existe* k *suficientemente grande tal que* $\Psi^k(K \cap I_i) = K$*;*
- $K = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Psi^{-m}(I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_r)$.

Dizemos que $\mathcal{P} = \{I_1, I_2, ..., I_r\}$ *é a partição de Markov de* K*, e que* $\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^{r} I_i$ *é o domínio de Markov de* K*.*

Na definição acima, $K = \bigcap_{m=1}^{\infty} \Psi^{-m}(I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_r)$, no entanto, poderíamos estudar esta interseção em momentos finitos, isto é

$$K^n = \bigcap_{m=1}^{n} \Psi^{-m}(I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_r).$$

Deste modo, $K^1 \subset K^2 \subset ... \subset K^n \subset ... \subset K$, K^n é o que chamamos de n-ésima etapa da construção de K, e com esta notação,

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K^n.$$

Nossa primeira observação é de que a cadeia descrita acima é uma sequência encaixada de compactos, logo, desde que cada um dos K^n seja não vazio, o conjunto de Cantor K será não vazio e compacto.

Podemos também definir a partição de Markov da n-ésima etapa da construção de K e seu domínio de Markov associado como segue.

Definição 2.8. *Seja* K *um conjunto de Cantor regular com partição de Markov* $\mathcal{R} = \{I_1, ..., I_r\}$ *e mapa expansor associado* Ψ*. Definimos a partição de Markov da* n*-ésima etapa da construção de* K *por*

$$\mathcal{R}^n := \{I^n; I^n \text{ é uma componente conexa de } \Psi^{-(n-1)}(I_i),\ I_i \in \mathcal{R}\}.$$

O domínio de Markov nessa etapa é definido por

$$\mathcal{D}^n := \bigcup_{I^n \in \mathcal{R}^n} I^n.$$

Agora, buscaremos dar uma representação simbólica para os pontos de um conjunto de Cantor regular. Para isso, iniciamos definindo a matriz de transição.

Definição 2.9. *Seja* K *um conjunto de Cantor regular com partição de Markov* $\mathcal{R} = \{I_1, ..., I_j\}$ *e* Ψ *seu mapa expansor associado. Dados* $I_i, I_j \in \mathcal{R}$*, fazemos*

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } I_j \cap \Psi^{-1}(I_i) \neq \emptyset \\ 0, & \text{se } I_j \cap \Psi^{-1}(I_j) = \emptyset \end{cases}$$

a Matriz $A=(m_{ij})$, $i,j=1,...,r$ *é chamada Matriz de Transição (ou de adjacência) do conjunto de Cantor* K. *Quando temos na matriz de transição* $m_{ij}=1$, *dizemos que* ij *é uma sequência de símbolos permitida em* $\{1,...,r\}^2$. *Definimos o Shift de Markov associado a* K *por*

$$\Sigma_A := \{\underline{a}=(a_1,a_2,a_3,...);, \text{onde } a_i \in \{1,...,r\} \text{ e } (a_i,a_{i+1}) \text{ é permitida } \forall\, i \geq 1\}$$

Observe que $\Sigma_A \subset \{1,...,r\}^{\mathbb{Z}}$, assim, se σ é o shift em r símbolos, pode-se provar que existe uma conjugação entre σ restrito a Σ_A e o mapa Ψ que define K, isto é, (Σ_A,σ) e (K,Ψ) são topologicamente conjugados, ou seja, existe um homeomorfismo $h:\Sigma_A \to K$ tal que $\Psi \circ h = h \circ \sigma$.

Nossa afirmação pode ser vista da seguinte forma. Seja $\underline{a}=(a_1,a_2,...,a_n)$ uma sequência na qual (a_i,a_{i+1}) é permitida, para todo $i=1,...,n-1$, temos então, pelo modo como definimos a matriz de transição que se $a \in I_{a_1}$, $\Psi(a) \in I_{a_2}$,... ,$\Psi^{n-1}(a) \in I_{a_n}$, isso permite a identificação de elementos de K com elementos de Σ_A pela seguinte relação

$$x=(a_1,a_2,...,a_n,...) \Leftrightarrow x \in I_{a_1} \cap \Psi^{-1}(I_{a_2}) \cap ... \cap \Psi^{-(n-1)}(I_{a_n})$$

que induz a conjugação desejada.

Definimos

$$I_{a_1,a_2} := \{x \in \mathcal{R}; x \in I_{a_1} \cap \Psi^{-1}(I_{a_2})\}$$

e, indutivamente,

$$I_{a_1,a_2,...,a_n} := \{x \in \mathcal{R}; x \in I_{a_1} \cap \Psi^{-1}(I_{a_2}) \cap ... \cap \Psi^{-(n-1)}(I_{a_n})\}.$$

Nessa notação, a partição de Markov da n-ésima etapa da construção de K se torna

$$\mathcal{R}^n = \{I_{\underline{a}}; \underline{a}=(a_1,a_2,...,a_n), (a_i,a_{i+1}) \text{ é permitida para }, i=1,..,n-1\}.$$

Uma importante propriedade dos conjuntos de Cantor regulares é a distorção limitada. Antes de enunciarmos a proposição que trata desta propriedade provaremos alguns lemas.

Lema 2.1. *Seja* $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ *aberto com* $[a,b] \subset A$ *e* $f:A \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^1 *numa vizinhança de* $[a,b]$ *com* $|f'(x)| \geq c > 0$ *para todo* x *nessa vizinhança. Então existe* $\sigma > 0$ *tal que* $|f(x)-f(y)| \geq \sigma|x-y|$ *para cada* $x,y \in [a,b]$.

Demonstração. Como f é de classe C^1 numa vizinhança de $[a,b]$, pelo Teorema do Valor Médio, dados $x,y \in [a,b]$ existe $\xi \in (x,y)$ tal que

$$f(x)-f(y) = f'(\xi)(x-y) \Rightarrow |f(x)-f(y)| \geq |f'(\xi)||x-y|$$

pela continuidade de f' e compacidade de $[a,b]$, $|f'(\xi)|$ atinge nesse intervalo um valor mínimo σ, que é positivo, uma vez que $|f'(x)| \geq c > 0$. Temos então

$$|f(x)-f(y)| \geq \sigma|x-y|$$

onde $\sigma > 0$, como desejado. □

Lema 2.2. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma aplicação (C_1,ε)-Hölder tal que $|f(x)| \geq \sigma > 0$ para todo $x \in X$. Então a função $g(x) = \log(f(x))$ é (C,ε)-Hölder.*

Demonstração. Primeiro, observamos que $h : [\sigma,+\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \log(x)$ é lipschitz. De fato, $\log(x)$ é derivável longe no 0, e $(\log(x))' = \frac{1}{x}$, como $x \geq \sigma$, temos $|h'(x)| \leq \frac{1}{\sigma}$. Dados $x,y \in [\sigma,+\infty)$ o Teorema do Valor médio nos garante que existe $\xi \in (x,y)$ para o qual

$$|h(x)-h(y)| = |f'(\xi)||x-y| \leq \frac{1}{\sigma}|x-y|$$

donde $h(x)$ é Lipschitz com constante $C_1 \leq \frac{1}{\sigma}$

Agora, como f é Hölder, temos

$$|\log(f(x)) - \log(f(y))| \leq C_1|f(x)-f(y)| \leq C_1C_2|x-y|^{\varepsilon}$$

fazendo $C = C_1C_2$, temos que g é (C,ε)-Hölder. □

Proposição 2.7 (Distorção Limitada). *Seja $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto de Cantor regular com função expansora Ψ. Então, dado $\delta > 0$, existe $c(\delta) > 0$ tal que para todo $q,\tilde{q}$ e $n > 1$ com*

i) $|\Psi^n(q) - \Psi^n(\tilde{q})| \leq \delta$;

ii) o intervalo $[\Psi^i(q),\Psi^i(\tilde{q})]$ está contido no domínio de Ψ para todo $0 \leq i \leq n-1$,

temos $|\log|(\Psi^n)'(q)| - \log|(\Psi^n)'(\tilde{q})|| \leq c(\delta)$. Além disso, $c(\delta)$ converge para 0 quando $\delta \to 0$.

Demonstração. Como Ψ é expansora, o Lema 2.1 nos garante a existência de $\sigma > 1$ tal que

$$\begin{aligned} |\Psi^i(q) - \Psi^i(\tilde{q})| &\leq \sigma^{i-n}|\Psi^n(q) - \Psi^n(\tilde{q})| \\ &\leq \sigma^{i-n}\delta \end{aligned}$$

para $i \leq n$.

E como $\Psi'(x) \geq \lambda > 1$, pelo Lema 2.2, $\log|\Psi'(x)|$ é Hölder para alguma constante de Hölder $C > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} |\log|(\Psi^n)'(q)| - \log|(\Psi^n)'(\tilde{q})|| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1} |\log|\Psi'(\Psi^i(q))| - \log|\Psi'(\Psi^i(\tilde{q}))|\right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} C|\Psi^i(q) - \Psi^i(\tilde{q})|^\varepsilon \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} C(\delta\sigma^{i-n})^\varepsilon \\ &\leq C\delta^\varepsilon \frac{\sigma^{-\varepsilon}}{1-\sigma^{-\varepsilon}} \end{aligned}$$

Então basta tomarmos $c(\delta) = C\delta^\varepsilon \dfrac{\sigma^{-\varepsilon}}{1-\sigma^{-\varepsilon}}$. □

Este resultado possui uma importante interpretação geométrica que será bastante utilizada posteriormente.

A proposição acima nos diz que

$$\left|\frac{\log|(\Psi^n(q))|}{\log|(\Psi^n(\tilde{q}))|}\right| \leq c(\delta) \Rightarrow e^{-c(\delta)} \leq \frac{|\Psi^n(q)|}{|\Psi^n(\tilde{q})|} \leq e^{c(\delta)}.$$

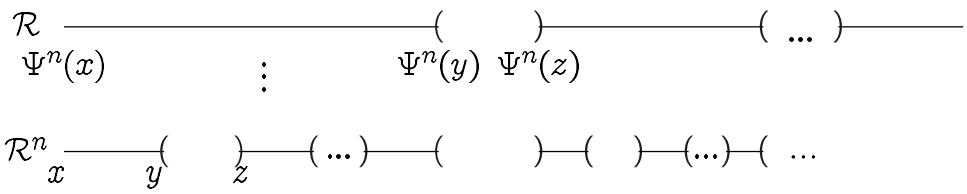
Dados $x, y, z \in K$ suficientemente próximos para que os intervalos $(\Psi^i(x), \Psi^i(y))$, $(\Psi^i(y), \Psi^i(z))$ estejam contidos na partição de Markov de K para todo $0 \leq i \leq n-1$. Aplicando o Teorema do Valor Médio, existem $c_1 \in (x,y)$ e $c_2 \in (y,z)$ tais que $|\Psi^n(x) - \Psi^n(y)| = |(\Psi^n)'(c_1)||x-y|$ e $|\Psi^n(y) - \Psi^n(z)| = |(\Psi^n)'(c_2)||y-z|$. Donde

$$e^{-c}\frac{|x-y|}{|y-z|} \leq \frac{|\Psi^n(x) - \Psi^n(y)|}{|\Psi^n(y) - \Psi^n(z)|} \leq e^c \frac{|x-y|}{|y-z|}$$

e c não depende de n ou dos pontos x, y e z, mas apenas da distância δ.

Essa propriedade nos diz que partes pequenas do conjunto de Cantor são semelhantes a partes maiores, a menos de um múltiplo constante uniforme. Observe que como $c(\delta) \longrightarrow 0$, a distorção é nula a partir de certa etapa da construção, basta que o comprimento máximo dos intervalos remanescentes nesta etapa seja suficientemente pequeno.

No desenho abaixo, ilustramos uma escolha particularmente útil de pontos que satisfazem essa propriedade.



Essa configuração nos diz que a partição de Markov de qualquer etapa da construção de K tem seus intervalos com comprimentos que correspondem a uma contração das etapas anteriores por uma constante uniformemente limitada e dependendo apenas de K. (Nesse desenho, supomos que Ψ preserva orientação, caso isso não seja satisfeito podemos fazer uma análise similar.)

Definição 2.10. *Dizemos que dois conjuntos de Cantor regulares K e $\tilde{K}$ estão próximos na topologia $C^{1+\varepsilon}$ se existem n e $\tilde{n}$ tais que $\mathcal{R}^n = \{I_1, ..., I_r\}$ e $\tilde{\mathcal{R}}^{\tilde{n}} = \{J_1, ..., J_r\}$ têm os intervalos correspondentes com extremos próximos, as funções $\Psi^n \in C^{1+\varepsilon}$ e $\tilde{\psi}^{\tilde{n}} \in C^{1+\tilde{\varepsilon}}$, definidas nesta etapa, estão C^1-próximas, os expoentes ε e $\tilde{\varepsilon}$ estão próximos e as constantes de Hölder, C e $\tilde{C}$, estão próximas.*

Observação. Na demonstração da propriedade da distorção limitada, a constante c não depende do conjunto de Cantor, apenas da distância entre os pontos, da constante e expoente de Hölder e da derivada da aplicação expansora. Como dois conjuntos de Cantor próximos na topologia $C^{1+\varepsilon}$ têm constantes e expoentes de Hölder próximas e estão C^1-próximas, concluímos que a distorção depende continuamente do conjunto de Cantor K, no sentido de que se dois conjuntos de Cantor estão suficientemente próximos nessa topologia suas distorções também estarão.

Proposição 2.8. *Sejam K e $\tilde{K}$ conjuntos de Cantor regulares suficientemente próximos na topologia $C^{1+\varepsilon}$, existe um homeomorfismo $h : K \to \tilde{K}$ Hölder com inversa também Hölder próximo da identidade que conjuga os mapas Ψ e $\tilde{\Psi}$ que determinam K e $\tilde{K}$, respectivamente.*

Demonstração. Iniciaremos construindo uma $h : K \to \tilde{K}$ e, em seguida, mostraremos que ela satisfaz tal propriedade.

Sejam $\mathcal{R} = \{I_1, ...I_r\}$ e $\tilde{\mathcal{R}} = \{J_1, ..., J_r\}$ as partições de Markov de K e $\tilde{K}$, respectivamente.

Fixamos $\delta > 0$ tal que os extremos de I_i e J_i distam no máximo δ, $i = 1, ..., r$, se $i \neq j$, $d(I_i, I_j) > 3\delta$ e $d(J_i, J_j) > 3\delta$.

Suponhamos que, para algum $i \neq j$ tenhamos $\Psi(I_i) \cap I_j \neq \emptyset$, como $\Psi(I_i)$ é o fecho convexo de uma união de intervalos da partição de Markov de K, temos $I_j \subset \Psi(I_i)$. Escrevendo $I_i = [a_i, b_i]$, temos $J_i \subset [a_i - \delta, a_i + \delta]$. Por continuidade e supondo, sem perda de generalidade, que Ψ preserva orientação (se inverter podemos usar um argumento análogo) temos $\Psi(I_i) = [\Psi(a_i), \Psi(b_i)]$. Como Ψ e $\tilde{\Psi}$ são contínuas ambas contínuas, podemos supor que estão suficientemente próximas para que, $\tilde{\Psi}(J_i) \subset [\Psi(a_i) - 2\delta, \Psi(b_i) + 2\delta]$.

Se $I_j = [a_j, b_j] \subset \Psi(I_i) = [\Psi(a_i), \Psi(b_i)]$, temos $J_j \subset [a_j - \delta, b_j + \delta] \subset \tilde{\Psi}(J_i)$, logo, $\tilde{\Psi}(J_i) \cap J_j \neq \emptyset$. Repetindo esse argumento para cada $n \geq 1$, temos que dado $x \in K$, existe $\tilde{x} \in \tilde{K}$ tal que

$$\Psi^n(x) \in I_i \Leftrightarrow \tilde{\Psi}^n(\tilde{x}) \in J_i,$$

afirmamos que existe um único $\tilde{x}$ com tal propriedade. De fato, se existisse $\tilde{y} \neq \tilde{x}$, $[\tilde{\Psi}^n(\tilde{x}) - \tilde{\Psi}^n(\tilde{y})] \subset J_i$, mas como $\tilde{\Psi}$ é expansora, para n suficientemente grande, o comprimento desse intervalo deve superar o comprimento de J_i, o que seria um absurdo.

Definimos então $h : K \to \tilde{K}$ por $h(x) = \tilde{x}$, onde $\tilde{x}$ é o ponto construído acima. Argumento de modo similar, podemos construir $h^{-1} : \tilde{K} \to K$ com $h^{-1}(\tilde{x}) = x$, que é a inversa de h.

Para mostrar que h conjuga Ψ e $\tilde{\Psi}$, observe que

$$\tilde{\Psi}(h(x)) = \tilde{\Psi}(\tilde{x}))$$

essa igualdade implica que $\tilde{\Psi}(\tilde{x}) = h(y)$, e pela definição de h,

$$\tilde{\Psi}^n(h(y)) = \tilde{\Psi}^n(\tilde{\Psi}(\tilde{x})) = \tilde{\Psi}^{n+1}(\tilde{x}) \in J_i \Leftrightarrow \Psi^{n+1}(x) = \Psi^n(\Psi(x)) \in I_i$$

para todo n .Pela unicidade da definição, temos $y = \Psi(x)$, daí,

$$\tilde{\Psi}(h(x)) = \tilde{\Psi}(\tilde{x}) = h(\Psi(x)).$$

Para vermos que h está próxima da identidade, lembramos que, pela definição de h, x e $h(x)$ pertencem a intervalos correspondente na partição de Markov $\mathcal{R}^n$ e $\tilde{\mathcal{R}}^n$ da n-ésima etapa de K e $\tilde{K}$, respectivamente. Dado $\varepsilon_1 > 0$, supondo que K e $\tilde{K}$ estão suficientemente próximos e que n é suficientemente grande, $I_j \in \mathcal{R}^n$ e $J_j \in \tilde{\mathcal{R}}^n$ têm comprimento menor que $\frac{\varepsilon_1}{3}$, de modo que

$$|h(x) - x| < \frac{\varepsilon_1}{3} + \frac{\varepsilon_1}{3} + \frac{\varepsilon_1}{3} = \varepsilon_1,$$

assim, h está próxima da identidade.

Agora, mostraremos que h é Hölder, logo, contínua. Sejam $x,y \in K$ tais que $|x-y| < \delta$ e $n = n(x,y) > 0$ tal que

$$|\Psi^i(x) - \Psi^i(y)| \leq 2\delta$$

e o intervalo $[\Psi^i(x), \Psi^i(y)]$ está contido na partição de Markov de K para $0 \leq i \leq n-1$ e

$$|\Psi^n(x) - \Psi^n(y)| \geq 2\delta$$

tal n existe, uma vez que Ψ é expansora.

Agora, tomando K e $\tilde{K}$ suficientemente próximos para que $|h(x) - x| < \frac{\delta}{2}$, como $\tilde{\Psi}^i(\tilde{x}) = h(\Psi^i(x))$, temos $|\tilde{\Psi}^i(\tilde{x}) - \Psi^i(x)| < \frac{\delta}{2}$ e $|\tilde{\Psi}^i(\tilde{y}) - \Psi^i(y)| < \frac{\delta}{2}$, de modo que

$$|\tilde{\Psi}^i(\tilde{x}) - \tilde{\Psi}^i(\tilde{y})| \leq 3\delta$$

segue que, para cada $0 \leq i \leq n-1$, $[\tilde{\Psi}^i(\tilde{x}), \tilde{\Psi}^i(\tilde{y})]$ está contido em algum intervalo da partição de Markov de $\tilde{K}$.

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $\xi_i \in [\Psi^i(x), \Psi^i(y)]$ tal que

$$|x-y| \prod_0^{n-1} |\Psi'(\xi_i)| = |\Psi^n(x) - \Psi^n(y)|$$

e $\tilde{\xi}_i \in [\tilde{\Psi}^i(\tilde{x}), \tilde{\Psi}^i(\tilde{y})]$ tal que

$$|\tilde{x}-\tilde{y}| \prod_0^{n-1} |\tilde{\Psi}'(\tilde{\xi}_i)| = |\tilde{\Psi}^n(\tilde{x}) - \tilde{\Psi}^n(\tilde{y})|$$

tomando $0 < \alpha < 1$ tal que $|\Psi'(\xi_i)|^\alpha \leq |\tilde{\Psi}'(\tilde{\xi}_i)|$, temos

$$\frac{|\tilde{x}-\tilde{y}|}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{|\tilde{\Psi}^n(\tilde{x}) - \tilde{\Psi}^n(\tilde{y})|}{|\Psi^n(x) - \Psi^n(y)|^\alpha} \leq (\text{diam}\tilde{K}) \cdot \delta^{-\alpha}.$$

Segue que h é Hölder, logo, contínua. Um argumento análogo pode ser utilizado para h^{-1}.

□

Observe que se K e $\tilde{K}$ estão suficientemente próximos, como Ψ e $\tilde{\Psi}$ estão C^1-próximas, $|\Psi'(\xi_i)|$ é quase igual a $|\tilde{\Psi}'(\tilde{\xi}_i)|$, de modo que α pode ser escolhido próximo de 1.

Além disso, como Ψ e $\tilde{\Psi}$ são monótonas nos intervalos da partição de Markov, h também é monótona.

2.3 Dimensão de Hausdorff de Conjuntos de Cantor Regulares

Esta seção será dedicada a explorar resultados para a dimensão de Hausdorff que são válidos em conjuntos de Cantor regulares.

Nosso primeiro resultado trata da continuidade da dimensão de Hausdorff para tais conjuntos. Em sua demonstração, utilizaremos o homeomorfismo que conjuga mapas de conjuntos de Cantor regulares suficientemente próximos, que construímos na Proposição 2.8.

Proposição 2.9. *A dimensão de Hausdorff de um conjunto de Cantor regular K depende continuamente de K.*

Demonstração. Seja $\tilde{K}$ um conjunto de Cantor regular suficientemente próximo de K, e seja $h : K \to \tilde{K}$ o homeomorfismo que conjuga as aplicações expansoras Ψ e $\tilde{\Psi}$ associadas a K e $\tilde{K}$, respectivamente.

Como h e h^{-1} são Hölder, digamos com expoente de Hölder α, então

$$\alpha HD(K) \leq HD(h(K)) = HD(\tilde{K}) \leq \alpha^{-1} HD(K)$$

como α está próximo de 1, $HD(\tilde{K})$ está próximo de $HD(K)$. □

O próximo teorema nos garante a igualdade entre a box-counting dimension e dimensão de Hausdorff de conjuntos de Cantor regulares. O corolário de sua demonstração é particularmente útil e nos ajudará no cálculo da dimensão de Hausdorff de alguns conjuntos.

Teorema 2.1. *Seja $K \subset R$ um conjunto de Cantor regular. Então $d(K) = HD(K)$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{R}^n$ a n-ésima partição de Markov de K. Para $I \in \mathcal{R}^n$,fazendo

$$\lambda_{n,I} = \inf |(\Psi^n)'|_I| \text{ e } \Lambda_{n,I} = \sup |(\Psi^n)'|_I|$$

podemos definir $\alpha_n, \beta_n > 0$ por

$$\sum_{I \in \mathcal{R}^n} \lambda_{n,I}^{-\beta_n} = 1 \text{ e } \sum_{I \in \mathcal{R}^n} \Lambda_{n,I}^{-\alpha_n} = C$$

onde C é uma constante apropriada que especificaremos mais tarde. Dividiremos a demonstração nos seguintes passos

1. $d(K) \leq \beta_n$ para todo n;
2. $HD(K) \geq \alpha_n$ para todo n;
3. $(\beta_n - \alpha_n) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$.

Para (1), tome $n \geq 1$. Fixado $\beta > d(K)$, existe δ_0 tal que, para $\delta < \delta_0$ temos $N_\delta(K) < \delta^{-\beta}$, assim, existe uma cobertura $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^m$, com $m \leq \delta^{-\beta}$ e $|U_i| < \delta$.

Podemos obter, para cada $I \in \mathcal{R}^n$, uma $(\delta\lambda_{n,I}^{-1})$-cobertura de $K \cap I$, formada pelas pré-imagens por $\Psi^n|_I$ dos U_i, $i = 1, ..., m$ que cobrem K, isso nos dá

$$N_{\delta\lambda_{n,I}^{-1}}(K \cap I) \leq \delta^{-\beta}$$

e temos, para todo $I \in \mathcal{R}^n$ e $\delta\lambda_{n,I} < \delta_0$,

$$N_\delta(K \cap I) \leq (\delta\lambda_{n,I})^{-\beta}$$

definindo

$$\lambda_n = \sup_{I \in \mathcal{R}^n} \lambda_{n,I}$$

observando que $N_\delta(A \cup B) \leq N_\delta(A) + N_\delta(B)$, e que $\bigcup_{I \in \mathcal{R}^n} (K \cap I) = K$,

$$N_\delta(K) \leq \delta^{-\beta} \sum_{I \in \mathcal{R}^n} \lambda_{n,I}^{-\beta}$$

para $\delta \leq \delta_0 \lambda_n^{-1}$.

Similarmente, para $k \geq 1$ e $\delta \leq \delta_0 \lambda_n^{-k}$

$$N_\delta(K) \leq \delta^{-\beta} \left(\sum_{I \in \mathcal{R}^n} \lambda_{n,I}^{-\beta} \right)^k.$$

Segue que, como $\lambda_n^{-k}\delta_0 \longrightarrow 0$ quando $k \longrightarrow \infty$

$$\begin{aligned} d(K) &\leq \lim_{k \to \infty} \frac{\log\left(\delta^{-\beta} \left(\sum_{I \in \mathcal{R}^n} \lambda_{n,I}^{-\beta} \right)^k \right)}{\log \delta^{-1}} \\ &= \beta + \lim_{k \to \infty} \frac{\log\left(\left(\sum_{I \in \mathcal{R}^n} \lambda_{n,I}^{-\beta} \right)^k \right)}{\log \delta^{-1}} \\ &\leq \beta + \lim_{k \to \infty} \frac{\log\left(\left(\sum_{I \in \mathcal{R}^n} \lambda_{n,I}^{-\beta} \right)^k \right)}{\log(\lambda_n^k \delta_0^{-1})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \beta + \lim_{k\to\infty} \frac{k\log\left(\sum_{I\in\mathcal{R}^n} \lambda_{n,I}^{-\beta}\right)}{k\log(\lambda_n) - \log(\delta_0^{-1})} \\ &= \beta + \frac{\log\left(\sum_{I\in\mathcal{R}^n} \lambda_{n,I}^{-\beta}\right)}{\log(\lambda_n)} \end{aligned}$$

fazendo $\beta \longrightarrow d(K)$,

$$0 \leq \frac{\log\left(\sum_{I\in\mathcal{R}^n} \lambda_{n,I}^{-d(K)}\right)}{\log(\lambda_n)}$$

como $\lambda_n > 1$,

$$1 \leq \sum_{I\in\mathcal{R}^n} \lambda_{n,I}^{-d(K)}$$

e, pelo modo como β_n foi tomado, temos $d(K) \leq \beta_n$. Isso prova (1).

Antes de mostrar (2), especificaremos a constante C utilizada na definição dos α_n.

Tomando $\beta_\infty \in [0,1]$ tal que $\beta_\infty \geq \beta_n$ para todo $n \geq 1$ e n_0 tal que $\Psi^{n_0+1}(K \cap I) = K$ para todo $I \in \mathcal{R}^n$, definimos

$$C := \sup |(\Psi^{n_0})'|^{\beta_\infty} \geq 1.$$

Para provar (2), suponhamos, por absurdo, que $HD(K) < \alpha_n$ e tome $HD(K) < \alpha < \alpha_n$, então

$$\mathcal{H}^\alpha(K) = 0,$$

como K é compacto, isso nos diz que existem coberturas com diâmetro arbitrariamente pequenos para os quais a medida de Hausdorff é arbitrariamente pequena. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\mathcal{C}^\varepsilon = \{C_i^\varepsilon\}_{i=1}^{m(\varepsilon)}$ uma cobertura tal que

$$\sum_{i=1}^{m(\varepsilon)} |C_i^\varepsilon|^\alpha < \varepsilon$$

seja

$$2k_0 := \min\{d(I_i, I_j); I_i, I_j \in \mathcal{R}^n,\ i \neq j\}$$

fazendo $\varepsilon_0 = k_0^{\frac{1}{\alpha}}$, na cobertura $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\varepsilon_0}$, cada $C_i^{\varepsilon_0}$ intersecta no máximo um dos intervalos $I \in \mathcal{R}^n$. Podemos definir

$$\mathcal{C}_I := \{C_i^{\varepsilon_0} \in \mathcal{C}; C_I^{\varepsilon_0} \cap I \neq \emptyset\}$$

segue que, para qualquer I, $\mathcal{C}_I$ tem menos elementos que $\mathcal{C}$. Além disso, como $\Psi^{n_0+1}(K \cap I) = K$, temos que $\tilde{\mathcal{C}}_I := (\Psi^{n_0+n}|_I)(\mathcal{C}_I)$ é uma cobertura de K tal que

$$\sum_{V \in \tilde{\mathcal{C}}_I} |V|^\alpha \leq (\sup|(\Psi^{n_0+n})'|)^\alpha \cdot \Lambda_{n,I}^\alpha \cdot \sum_{C_i^{\varepsilon_0} \in \mathcal{C}_I} |C_i^{\varepsilon_0}|^\alpha$$

como $\alpha < \alpha_n < \beta_n < \beta_\infty$, isso nos dá

$$\sum_{V \in \tilde{\mathcal{C}}_I} |V|^\alpha \leq C \cdot \Lambda_{n,I}^\alpha \cdot \sum_{C_i^{\varepsilon_0} \in \mathcal{C}_I} |C_i^{\varepsilon_0}|^\alpha$$

usaremos isso para mostrar que

$$\sum_{V \in \tilde{\mathcal{C}}_{I_0}} |V|^\alpha < \varepsilon_0 \tag{2.1}$$

para algum $I_0 \in \mathcal{R}^n$. Suponhamos que não exista I_0 com tal propriedade, então temos, para todo $I \in \mathcal{R}^n$

$$\sum_{V \in \tilde{\mathcal{C}}_I} |V|^\alpha \geq \varepsilon_0$$

daí,

$$\begin{aligned} \sum_{C_i \in \mathcal{C}} |C_i^{\varepsilon_0}|^\alpha &= \sum_{I \in \mathcal{R}^n} \sum_{C_i^{\varepsilon_0} \in \mathcal{C}_I} |C_i^{\varepsilon_0}|^\alpha \\ &\geq \sum_{I \in \mathcal{R}^n} C^{-1} \cdot \Lambda_{n,I}^{-\alpha} \cdot \sum_{V \in \tilde{\mathcal{C}}_{I_0}} |V|^\alpha \\ &\geq C^{-1} \sum_{I \in \mathcal{R}^n} \Lambda_{n,I}^{-\alpha} \cdot \varepsilon_0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

lembrando que, pelo modo como $\mathcal{C}$ foi escolhida

$$\sum_{C_i \in \mathcal{C}} |C_i^{\varepsilon_0}|^\alpha \leq \varepsilon_0$$

e que como $\alpha < \alpha_n$, temos

$$\sum_{I \in \mathcal{R}^n} \Lambda_{n,I}^{-\alpha} > C$$

a desigualdade em 2.2 não pode ser satisfeita, logo, 2.1 está provada.

Isso mostra que supondo $HD(K) < \alpha_n$, e considerando uma cobertura finita $\mathcal{C}$, construímos uma nova cobertura $\tilde{\mathcal{C}}_{I_0}$ com menos elementos que $\mathcal{C}$ para a qual $\sum_{V \in \tilde{\mathcal{C}}_{I_0}} |V|^\alpha < \varepsilon_0$. Repetindo esse argumento um número finito de vezes encontramos uma cobertura de K sem elementos, que é um absurdo. Portanto,

$$\alpha_n \leq HD(K)$$

como queríamos.

Finalmente, vamos mostrar (3). Pela distorção limitada, existe $a = a(K) > 0$ para a qual $\Lambda_{n,I} \leq a\lambda_{n,I}$ para todo $n \geq 1$ e $I \in \mathcal{R}^n$.

Sendo $\lambda = \inf|\Psi'| > 1$, temos $\lambda^n \leq \Lambda_{n,I}$. Encontraremos δ_n para o qual

$$a^{\alpha_n+\delta_n} \cdot \lambda^{-n\delta_n} \cdot C = 1$$

isto é,

$$\begin{aligned} 1 = a^{\alpha_n+\delta_n} \cdot \lambda^{-n\delta_n} \cdot C &\Leftrightarrow 1 = a^{\alpha_n} \cdot a^{\delta_n} \cdot \lambda^{-n\delta_n} \cdot C \\ &\Leftrightarrow a^{-\delta_n} \cdot \lambda^{n\delta_n} = a^{\alpha_n} \cdot C \\ &\Leftrightarrow \log(a^{-1} \cdot \lambda^n)\ \delta_n = \log(a^{\alpha_n} \cdot C) \\ &\Leftrightarrow \delta_n = \frac{\log(a^{\alpha_n} \cdot C)}{\log(a^{-1} \cdot \lambda^n)} \end{aligned}$$

tomamos então $\delta_n := \dfrac{\alpha_n \log a + \log C}{-\log a + n \log \lambda}$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{I \in \mathcal{R}^n} \lambda_{n,I}^{-(\alpha_n+\delta_n)} &\leq a^{(\alpha_n+\delta_n)} \sum_{I \in \mathcal{R}^n} \Lambda_{n,I}^{-\alpha} \cdot \Lambda_{n,I}^{-\delta_n} \\ &\leq a^{(\alpha_n+\delta_n)} \cdot \lambda^{-n\delta_n} \sum_{I \in \mathcal{R}^n} \Lambda_{n,I}^{-\alpha_n} \\ &= a^{(\alpha_n+\delta_n)} \cdot \lambda^{-n\delta_n} \cdot C = 1 \end{aligned}$$

isso implica $\beta_n \leq \alpha_n + \delta_n$, que nos dá

$$\beta_n - \alpha_n \leq \frac{\alpha_n \log a + \log C}{-\log a + n \log \lambda} \leq \frac{HD(K) \log a + \log C}{-\log a + n \log \lambda}$$

fazendo $n \longrightarrow \infty$ temos que $\beta_n - \alpha_n \longrightarrow 0$. Logo, $d(K) = HD(K)$, como desejado.

□

Corolário 2.1.1 (da demonstração). *Seja K um conjunto de Cantor com partição de Markov $\mathcal{R} = \{I_1, .., I_r\}$ e mapa afim, crescente e sobrejetor em cada um dos intervalos desta partição, então a dimensão de Hausdorff $s = HD(K)$ de K é o único $s \in \mathbb{R}$ que satisfaz*

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^s = 1$$

onde $\lambda_i = |\psi'|_{I_i}|$, $i = 1, ..., r$.

A próxima proposição nos dá uma informação topológica da diferença aritmética de pares de conjuntos de Cantor levando em conta a soma das suas dimensões de Hausdorff.

Proposição 2.10. *Se $K, \tilde{K}$ são conjuntos de Cantor tais que $HD(K)+HD(\tilde{K})<1$, então $K-\tilde{K}$ tem interior vazio.*

Demonstração. Consideramos em $\mathbb{R}$ o mapa $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dado por $f(x,y)=x-y$, que é Lipschitz. Usando o Teorema 2.1 juntamente com o Corolário 2.6.1 temos que $HD(K\times\tilde{K})=HD(K)+HD(\tilde{K})<1$. Segue que $f(K\times\tilde{K})=K-\tilde{K}$ tem dimensão de Hausdorff menor que 1, pela proposição 2.3, noutras palavras, este conjunto possui medida de Lebesgue nula, em particular, interior vazio. □

No entanto, a seguir, mostraremos um teorema que nos diz que dados dois conjuntos de Cantor K e $\tilde{K}$ com dimensão de Hausdorff s e $\tilde{s}$, respectivamente, se $s+\tilde{s}>1$, então $K-\lambda\tilde{K}$ tem medida de Lebesgue positiva para quase todo $\lambda\in\mathbb{R}$. Para enunciá-lo, precisaremos de algumas notações.

Dado $\lambda\in\mathbb{R}$, tome $\theta\in(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ tal que $\lambda=-\tan\theta$. E seja L_θ a reta em $\mathbb{R}^2$ com vetor diretor $v_\theta=(\cos\theta,\sin\theta)$. Podemos então definir uma correspondência entre L_θ e $\mathbb{R}$, $f:\mathbb{R}\to L_\theta$ pondo $f(x)=x\cdot v_\theta$. Com esta notação, podemos definir π_θ como a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^2$ sobre a reta L_θ.

Dados dois conjuntos de Cantor K e $\tilde{K}$, temos

$$\pi_\theta(K\times\tilde{K})=(K,\tilde{K})\cdot(\cos\theta,\sin\theta)=K\cos\theta+\tilde{K}\sin\theta$$

colocando $\cos\theta$ em evidência e lembrando que $-\tan\theta=\lambda$, temos

$$\pi_\theta(K\times\tilde{K})=\cos\theta(K-\lambda\tilde{K})$$

(observe que $\cos\theta\neq0$).

Teorema 2.2. *Sejam $K_1,K_2\subset\mathbb{R}$ conjuntos de Cantor e $K=K_1\times K_2\subset\mathbb{R}^2$ tal que $HD(K)>1$, então $\pi_\theta(K)$ tem medida de Lebesgue positiva para quase todo $\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.*

Isso é consequência de um importante resultado devido a Marstrand trata da projeção de conjuntos de cantor regulares.

Teorema 2.3 (Teorema de Marstrand)**.** *Seja $X\subset\mathbb{R}^2$ um conjunto de Borel:*

a) Se $HD(X)\leq1$, então $HD(\pi_\theta(X))=HD(X)$ para quase todo $\theta\in(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$;

b) Se $HD(X)>1$, então π_θ tem medida positiva, e assim, dimensão 1 para quase todo $\theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

Demonstração. Iniciamos a demonstração enunciando algumas afirmações que serão úteis na demonstração dos itens (a) e (b) e cujas demonstrações podem ser encontradas em [9].

i) Como $\pi_\theta(X) \subset L_\theta$, $HD(\pi_\theta(X)) \leq 1$, e lembrando que π_θ é lipschitz, $HD(\pi_\theta(X)) \leq HD(X)$, donde

$$HD(\pi_\theta(X)) \leq \min\{HD(X), 1\}.$$

ii) Se existe uma medida com suporte limitado μ em X para a qual

$$I_s(\mu) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(u)d\mu(v)}{|u-v|^s} < \infty,$$

então $\mathcal{H}^s(X) = \infty$, logo, $HD(X) \geq s$.

iii) Se $\mathcal{H}^s(X) > 0$, então existe uma medida com suporte limitado μ em X com

$$I_t(\mu) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(u)d\mu(v)}{|u-v|^t} < \infty$$

para todo $0 < t < s$.

iv) Se μ é uma medida com suporte limitado em $\mathbb{R}$ tal que

$$0 < \int_{\mathbb{R}} |\hat{\mu}(P)|^2 < \infty$$

então o suporte de μ tem medida de Lebesgue positiva.

a) Seja $s = HD(X)$, por (i), $HD(\pi_\theta(X)) \leq HD(X)$. Se $t < s < 1$, por (iii), existe uma medida com suporte limitado μ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(u)d\mu(v)}{|u-v|^t} < \infty$$

segue do Teorema da Representação de Riez, existe uma medida com suporte limitado em $\mathbb{R}$ para a qual

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu_\theta(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x \cdot v_\theta) d\mu(u)$$

para f contínua.

Para cada θ, projetamos a medida μ sobre a reta L_θ para obter a medida μ_θ em π_θ, assim, μ_θ é definida por

$$\mu_\theta([a,b]) = \mu(\{x; a \leq \vec{x} \cdot v_\theta \leq b\})$$

para cada intervalo $[a,b]$, onde $\vec{x}$ é o vetor unitário na direção de x.

Temos então

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_\theta(x)d\mu_\theta(y)}{|x-y|^t} &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(u)d\mu(v)}{|(\vec{x}-\vec{y})\cdot v_\theta|^t} \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(u)d\mu(v)}{|u-v|^t|\vec{\tau}\cdot v_\theta|^t}\end{aligned} \tag{2.3}$$

onde $\vec{\tau}$ é o vetor unitário na direção $u-v$.

Pelo Teorema de Fubinni,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_\theta(x)d\mu_\theta(y)}{|x-y|^t}d\theta &= \int_0^\pi\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(u)d\mu(v)}{|u-v|^t|\vec{\tau}\cdot v_\theta|^t}d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{d\theta}{|\vec{\tau}\cdot v_\theta|^t}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(u)d\mu(v)}{|u-v|^t} \\ &= C\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(u)d\mu(v)}{|u-v|^t} < \infty\end{aligned} \tag{2.4}$$

onde

$$C = \int_0^\pi \frac{d\theta}{|\vec{\tau}\cdot v_\theta|^t} = \int_0^\pi \frac{d\theta}{|\cos(\tau-\theta)|^t} < \infty$$

uma vez que $t<1$ essa integral independe de $\vec{\tau}$. Donde

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_\theta(x)d\mu_\theta(y)}{|x-y|^t} < \infty$$

para quase todo θ.

Logo, para todo $t<s$, $HD(\pi_\theta(X)) \geq t$, pela afirmação (ii) $HD(\pi_\theta(X)) = s$ para quase todo θ.

b) Seja $HD(X) = s > 1$, pela afirmação (iii), existe μ tal que

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(u)d\mu(v)}{|u-v|} < \infty.$$

Concluiremos o resultado utilizando a afirmação (iv).

Para isso, como no item anterior, podemos obter uma medida com suporte limitado μ_θ para a qual

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu_\theta(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x\cdot v_\theta)d\mu(u)$$

estudaremos a Transformada de Fourier $\hat{\mu}_\theta$ da medida μ_θ assim definida. Temos

$$\begin{aligned}|\hat{\mu}_\theta(p)|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{iup}d\mu_\theta(x)\int_{\mathbb{R}} e^{-ivp}d\mu_\theta(y) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{ip(x-y)}d\mu_\theta(x)d\mu_\theta(y) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{ip(u-v)\cdot v_\theta}d\mu(u)d\mu(v)\end{aligned} \tag{2.5}$$

então

$$|\hat{\mu}_\theta(p)|^2 + |\hat{\mu}_{\theta+\pi}(p)|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \cos\left(p(u-v)\cdot v_\theta\right) d\mu(u) d\mu(v) \tag{2.6}$$

como $L_\theta = L_{\theta+\pi}$, isso nos dá

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |\hat{\mu}_\theta(p)|^2 d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \cos\left(p(u-v)\cdot v_\theta\right) d\mu(u) d\mu(v) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_0^{2\pi} \cos\left(p(u-v)\cdot v_\theta\right) d\theta d\mu(u) d\mu(v) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_0^{2\pi} \cos\left(p(u-v)\cos\theta\right) d\theta d\mu(u) d\mu(v)\end{aligned} \tag{2.7}$$

como a integral em θ independe de $u-v$, podemos usar a função de Bessel dada por $J_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(z\cos\theta) d\theta$ e obtermos

$$\int_0^{2\pi} |\hat{\mu}_\theta(p)|^2 d\theta = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} J_0(p|u-v|) d\mu(u) d\mu(v). \tag{2.8}$$

Se $0 < m < \infty$, o Teorema de Fubini nos dá

$$\begin{aligned}\int_{-m}^{m}\int_0^{2\pi} |\hat{\mu}_\theta(p)|^2 d\theta dp &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{-m}^{m} J_0(p|u-v|) dp d\mu(u) d\mu(v) \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{-m|u-v|}^{m|u-v|} J_0(z)\frac{1}{|u-v|} dz d\mu(u) d\mu(v)\end{aligned} \tag{2.9}$$

onde $z = p|u-v|$. Como $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} J_0(z) dz$ converge, existe M, não dependendo de m, tal que

$$\int_{-m|u-v|}^{m|u-v|} J_0(z) dz \leq M.$$

Usando isso, temos

$$\int_{-m}^{m}\int_0^{2\pi} |\hat{\mu}_\theta(p)|^2 d\theta dp \leq M\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(u) d\mu(v)}{|u-v|} \tag{2.10}$$

fazendo $m \longrightarrow \infty$ e usando novamente o Teorema de Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}}\int_0^{2\pi} |\hat{\mu}_\theta(p)|^2 d\theta = \int_{\mathbb{R}} J_0(z)\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(u) d\mu(v)}{|u-v|} < \infty \tag{2.11}$$

daí,

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\mu}_\theta(p)|^2 dp < \infty$$

para quase todo θ. Pela afirmação (iv), μ_θ tem suporte com medida de Lebesgue positiva, como o suporte de μ_θ, mas o suporte de μ_θ é a projeção do suporte de μ, que deverá estar contido na projeção de X, segue que, para quase todo θ, $\pi_\theta(X)$ tem medida positiva, como queríamos.

□

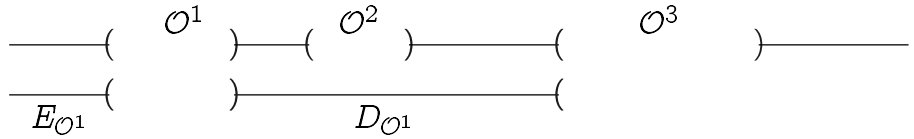
3 Espessura de Conjuntos de Cantor

No capítulo anterior, tratamos da dimensão de Hausdorff que, comparando com a de Lebesgue, é mais adequada para trabalhar com alguns conjuntos fractais.

Uma outra forma de "medir" conjuntos bastante útil para conjuntos de Cantor é a sua espessura. A espessura de um conjunto de Cantor é útil para estudar desde propriedades desse conjunto e até sua interseção com outros conjuntos de Cantor. Esse capítulo será dedicado a definir e desenvolver resultados que tratam da espessura dos conjuntos de Cantor regulares.

3.1 Definição e Resultados Iniciais

Dado um gap limitado $\mathcal{O}$ de um conjunto de Cantor K, ou seja, $\mathcal{O}$ é uma componente conexa limitada do complementar de K, associamos os intervalos $E_{\mathcal{O}}$ e $D_{\mathcal{O}}$ como os intervalos à esquerda e à direita que os separam dos gaps mais próximos de tamanho, pelo menos $|\mathcal{O}|$, esses intervalos são chamados de pontes à esquerda e à direita de $\mathcal{O}$, respectivamente.



Definição 3.1. *Seja K um conjunto de Cantor, e $\mathcal{O}$ um de seus gaps limitados. Definimos a espessura à esquerda de $\mathcal{O}$ por $\tau_E(\mathcal{O}) = \dfrac{|E_{\mathcal{O}}|}{|\mathcal{O}|}$, e a espessura à direita de $\mathcal{O}$ por $\tau_D(\mathcal{O}) = \dfrac{|D_{\mathcal{O}}|}{|\mathcal{O}|}$. Definimos ainda*

$$\tau_E(K) = \inf\{\tau_E(\mathcal{O}); \mathcal{O} \text{ é gap limitado de } K\}$$

como a espessura à esquerda de K, e

$$\tau_D(K) = \inf\{\tau_D(\mathcal{O}); \mathcal{O} \text{ é gap limitado de } K\}$$

como a espessura à direita de K. Por fim,

$$\tau(K) = \min(\tau_E(K), \tau_D(K))$$

é a espessura de K.

Uma outra forma de definirmos a espessura de um conjunto de Cantor K, e que será útil na demonstração de alguns resultados, é através das apresentações desse conjunto de Cantor. Chamamos de apresentação de um conjunto de Cantor K uma enumeração $\mathbf{O} = \{\mathcal{O}^n\}$ de seus gaps limitados.

Para $x \in \partial\mathcal{O}^n$, definimos a $\mathbf{O}$-componente conexa de K em x, denotada por C_x como sendo a componente conexa de $\hat{I} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}^i$ que contém x, onde $\hat{I}$ é o fecho convexo de K, com essa notação podemos dar uma nova definição de espessura.

Definição 3.2. *Seja K um conjunto de Cantor, $\mathbf{O}$ uma apresentação de K e x um extremo de um gap limitado de K. Fazendo $\tau(K, \mathbf{O}, x) := \dfrac{|C_x|}{|\mathcal{O}^n|}$ definimos a espessura $\tau(K)$ por*

$$\tau(K) = \sup_{\mathbf{O}} \inf_{x} \tau(K, \mathbf{O}, x)$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os extremos dos gaps limitados e o supremo sobre todas as apresentações.

A Definição 3.1 é contemplada no comentário acima ao considerarmos as apresentações dos gaps em ordem não crescente de tamanho, isto é, $\mathbf{O} = \{\mathcal{O}^n\}$ com $|\mathcal{O}^n| \geq |\mathcal{O}^m|$ se $n \leq m$. Apresentações com tal propriedade realizam o supremo, de modo que as definições estão bem estabelecidas.

Uma importante observação é que, se K e $\tilde{K}$ são conjuntos de Cantor regulares suficientemente próximos e h é o homeomorfismo que conjuga os mapas Ψ e $\tilde{\Psi}$ que definem K e $\tilde{K}$, respectivamente, então se $\mathbf{O} = \{\mathcal{O}^n\}$ é uma apresentação de K, $h(\mathbf{O}) = \{\tilde{\mathcal{O}}^m\}$ é uma apresentação de $\tilde{K}$ (onde h se aplica nos extremos dos gaps, onde ela está bem definida). E, similarmente, dada uma apresentação $\tilde{\mathbf{O}}$ de $\tilde{K}$, obtemos uma apresentação de K tomando $h^{-1}(\tilde{\mathbf{O}})$.

Podemos também definir a densidade de um conjunto de Cantor K como segue.

Definição 3.3. *Seja K um conjunto de Cantor, $\mathbf{O}$ uma apresentação de K e x um extremo de um gap limitado de K. Definimos a densidade $\theta(K)$ por*

$$\theta(K) = \inf_{\mathbf{O}} \sup_{x} \tau(K, \mathbf{O}, x)$$

onde o supremo é tomado sobre todos os extremos dos gaps limitados e o ínfimo sobre todas as apresentações.

Observe que, dado um conjunto de Cantor K, para quaisquer duas apresentações $\mathbf{O} = \{\mathcal{O}^n\}$ e $\tilde{\mathbf{O}} = \{\tilde{\mathcal{O}}^m\}$ de K, temos

$$\sup_u \tau(K, \mathbf{O}, x) \geq \inf_u \tau(K, \tilde{\mathbf{O}}, x)$$

donde

$$\tau(K) \leq \theta(K).$$

Definição 3.4. *Definimos a espessura local de K num ponto $x \in K$ como*

$$\tau_{loc}(K, x) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \tau(\overline{K \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)})$$

similarmente, definimos as espessuras locais à esquerda e à direita, respectivamente por $(\tau_E)_{loc}(K, x) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \tau_E(\overline{K \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)})$ *e* $(\tau_D)_{loc}(K, x) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \tau_D(\overline{K \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)})$.

Do mesmo modo, podemos definir a espessura local de um conjunto de Cantor.

Utilizando a propriedade da distorção limitada, pode-se mostrar que para um conjunto de Cantor regular, a espessura local não depende da escolha do ponto.

A seguir, provamos algumas proposições que relacionam a dimensão de Hausdorff com a espessura e densidade de um conjunto de Cantor.

Proposição 3.1. *Seja $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto de Cantor, a dimensão de Hausdorff de K satisfaz $HD(K) \geq \dfrac{\log 2}{\log(2 + \frac{1}{\tau(K)})}$.*

Demonstração. Seja $\alpha = \dfrac{\log 2}{\log(2 + \frac{1}{\tau})}$, e $\mathcal{U} = \{U_i\}$ uma cobertura aberta finita para K, mostraremos que

$$\sum_i |U_i|^\alpha \geq \operatorname{diam}(K)^\alpha.$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, $\mathcal{U}$ disjunta. De fato, se $\mathcal{U}$ não é disjunta, existem dois elementos que se intersectam, então consideramos a cobertura $\tilde{\mathcal{U}}$ formada a partir de $\mathcal{U}$ ao substituirmos tais elementos por sua união, e como

$$\sum_j |\tilde{U}_j|^\alpha \leq \sum_i |U_i|^\alpha$$

nosso resultado não será afetado.

Como $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta, ela cobre tudo, exceto uma quantidade finita k de gaps de K. Seja $\mathcal{O} = (x, y)$ um dos gaps não cobertos por K e sejam

C_x e C_y as componentes conexas de x e y, respectivamente. Então existem abertos A_x e A_y (possivelmente, união de U_i's) que cobrem C_x e C_y, respectivamente. Seja $A = A_x \cup A_y$ e Conv$A$ o fecho convexo de A, temos então

$$|A_x| \geq |C_x| \geq \tau(K)|\mathcal{O}| \geq \tau(K)(|A| - |A_x| - |A_y|)$$

e

$$|A_y| \geq |C_y| \geq \tau(K)|\mathcal{O}| \geq \tau(K)(|A| - |A_x| - |A_y|)$$

uma vez que$\tau(K)$ é o ínfimo da razão entre comprimentos de pontes e seus respectivos gaps. E temos então

$$|A_x|^\alpha + |A_y|^\alpha \geq |A|^\alpha$$

e substituindo A_x e A_y por A em $\mathcal{U}$, obtemos uma nova cobertura $\mathcal{U}^1 = \{U_j^1\}$ tal que $\sum\limits_j |U_j^1|^\alpha \leq \sum\limits_i |U_i|^\alpha$.

Repetindo esse argumento para todos os gaps não cobertos por $\mathcal{U}$, obtemos uma cobertura $\mathcal{U}^k = \{U_s^k\}$ com $\sum\limits_s |U_s^k|^\alpha \leq \sum\limits_i |U_i|^\alpha$.

Agora, como $\mathcal{U}^k$ é uma cobertura de K,

$$\sum_i |U_i|^\alpha \geq \sum_s |U_s^k|^\alpha \geq |K|^\alpha$$

e a proposição está provada.

□

Podemos provar um resultado similar para densidade de um conjunto de Cantor K.

Proposição 3.2. *Seja $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto de Cantor, a dimensão de Hausdorff de K satisfaz $HD(K) \leq \dfrac{\log 2}{\log(2 + \frac{1}{\theta(K)})}$.*

Demonstração. Dado $\theta_1 \geq \theta(K)$. Podemos tomar uma apresentação $\mathbf{O} = \{\mathcal{O}_n\}$ de K tal que

$$\sup_x \tau(K, \mathbf{O}, x) \leq \theta_1$$

Usaremos essa apresentação para formar uma sequência de coberturas para K. Para isso, iniciamos com o fecho convexo de K, denotado por I, então para cada $n \geq 1$, sejam $\mathcal{O}_1, ..., \mathcal{O}_n$ os n primeiros gaps dessa apresentação, $\mathcal{U}_n = \{U_i^n\}$ é a cobertura de K formada pelos intervalos de $I \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} \mathcal{O}_j$.

Seja $\beta = \dfrac{\log 2}{\log(2+\frac{1}{\theta_1})}$. Mostraremos que a sequência

$$S_n = \sum_{U_i^n \in \mathcal{U}_n} |U_i^n|^\beta$$

é limitada. Para isso, observamos primeiro que a diferença entre as coberturas $\mathcal{U}_{n-1}$ e $\mathcal{U}_n$ é o intervalo U^{n-1} que contém o gap $\mathcal{O}_n = (x_n, y_n)$, que será substituído pelos intervalos C_{x_n} e C_{y_n}, isto é, a $\mathbf{O}$-componente convexa de x e y, de modo que

$$\sum_{U_i^n \in \mathcal{U}_n} |U_i^n|^\beta - \sum_{U_i^{n-1} \in \mathcal{U}_{n-1}} |U_i^{n-1}|^\beta = |C_{x_n}|^\beta + |C_{y_n}|^\beta - |U^{n-1}|$$

Por outro lado, $|C_{x_n}| \leq \theta_1 |\mathcal{O}_n|$ e $|C_{y_n}| \leq \theta_1 |\mathcal{O}_n|$ temos então

$$|C_{x_n}|^\beta + |C_{y_n}|^\beta \leq |U_{n-1}|^\beta$$

o que nos dá

$$\sum_{U_i^n \in \mathcal{U}_n} |U_i^n|^\beta \leq \sum_{U_i^{n-1} \in \mathcal{U}_{n-1}} |U_i^{n-1}|^\beta$$

segue que S_n é limitada e não-crescente.

Uma vez que o diâmetro dessas coberturas tendem para 0 quando $n \longrightarrow \infty$, temos

$$\mathcal{H}^\beta(K) \leq \infty$$

e da definição de medida de Hausdorff, segue que $HD(K) \leq \beta$.

Como $\theta_1 > \theta$ é arbitrário, a proposição está provada.

□

A próxima proposição nos diz que a espessura e densidade de um conjunto de Cantor regular não pode ser nula ou infinita, noutras palavras, que a razão entre comprimentos de gaps e componentes conexas são sempre bem controladas.

Proposição 3.3. *Se $K \subset \mathbb{R}$ é um conjunto de Cantor regular, então $0 < \tau(K) \leq \theta(K) < \infty$.*

Demonstração. Construiremos uma apresentação $\mathbf{O}$ de K para a qual

$$0 < \inf_x \tau(K, \mathcal{U}, x) \leq \sup_x \tau(K, \mathcal{U}, x) < \infty \tag{3.1}$$

Seja $\mathcal{R} = \{I_1, I_2, ..., I_r\}$ a partição de Markov de K e $\mathcal{O}^1, ..., \mathcal{O}^{r-1}$ os gaps entre os intervalos dessa partição. Para qualquer gap $\mathcal{O}$, tome $s(\mathcal{O}) \geq 0$ o menor inteiro

tal que $\Psi^{s(\mathcal{O})}$ não está contido em nenhum dos $I \in \mathcal{R}$. Como o tamanho dos gaps, bem como intervalos de uma etapa avançada sempre diminuem o comprimento com relação a etapas anteriores, para cada $\overline{s}$, o conjunto dos $\mathcal{O}$ para os quais $s(\mathcal{O}) \leq \overline{s}$ é finito.

Podemos então construir uma apresentação $\mathbf{O} = \{\mathcal{O}_k\}$ dos gaps de K de modo que

$$i \leq j \Rightarrow s(\mathcal{O}_i) \leq s(\mathcal{O}_j)$$

mostraremos que a apresentação assim obtida satisfaz 3.1.

Seja $x \in \partial\mathcal{O}_i$ e C_x a $\mathbf{O}$-componente de K em x. Afirmamos que $\Psi^n(C_x)$ está contido em algum $I_{in} \in \mathcal{R}$ para todo $0 \leq n \leq s(\mathcal{O}_i) - 1$. De fato, se assim não fosse, C_x conteria um gap $\mathcal{O}_j$ para o qual, pela definição de $s(\mathcal{O}_j)$, temos $s(\mathcal{O}_j) < s(\mathcal{O}_i)$, e pela construção de $\mathbf{O}$ isso nos dá $j < i$, o que é um absurdo pela definição de $\mathbf{O}$-componente.

Segue da distorção limitada que existe uma constante $a > 0$, dependendo apenas de K e Ψ para a qual

$$a^{-1} \cdot \frac{|C_x|}{|\mathcal{O}_i|} \leq \frac{|\Psi^{s(\mathcal{O}_i)}(C_x)|}{|\Psi^{s(\mathcal{O}_i)}(\mathcal{O}_i)|} \leq a \cdot \frac{|C_x|}{|\mathcal{O}_i|}$$

ou mais precisamente,

$$a^{-1}\frac{|\Psi^{s(\mathcal{O}_i)}(C_x)|}{|\Psi^{s(\mathcal{O}_i)}(\mathcal{O}_i)|} \leq \tau(K, \mathcal{U}, x) \leq a\frac{|\Psi^{s(\mathcal{O}_i)}(C_x)|}{|\Psi^{s(\mathcal{O}_i)}(\mathcal{O}_i)|}.$$

Mostraremos que os valores de $\frac{|\Psi^{s(\mathcal{O}_i)}(C_x)|}{|\Psi^{s(\mathcal{O}_i)}(\mathcal{O}_i)|}$ são limitados por 0 e ∞.

Para isso, observamos primeiro que, pela definição de $s(\mathcal{O}_i)$, $\Psi^{s(\mathcal{O}_i)} \in \{\mathcal{O}^1, ..., \mathcal{O}^{r-1}\}$, de modo que os possíveis valores $|\Psi^{s(\mathcal{O}_i)}(\mathcal{O}_i)|$ são limitados.

Agora, para $\Psi^{s(\mathcal{O}_i)}(C_x)$. Por um lado, se $C_x = [x, y]$ e $y \in \partial\mathcal{O}$, então $\mathcal{O}$ é um gap ilimitado de K ou $\mathcal{O} = \mathcal{O}_j$ para algum $j < i$ e temos $s(\mathcal{O}) < s(\mathcal{O}_i)$. Por ser extremo de um gap, $\Psi^{s(\mathcal{O}_i)}(y)$ deve ser extremo de algum $I \in \mathcal{R}$, de modo que $I \subset \Psi^{s(\mathcal{O}_i)}$, de modo que

$$0 < m < |\Psi^{s(\mathcal{O}_i)}(C_x)|.$$

Por outro lado, $\text{diam}(\Psi^{s(\mathcal{O}_i)}(C_x)) \leq \text{diam}(K)$, logo,

$$|\Psi^{s(\mathcal{O}_i)}(C_x)| < M < \infty.$$

Segue que

$$0 < \sigma_1 \leq \tau(K, \mathbf{O}, x) \leq \sigma_2$$

e isso vale para todo extremo de gap em $\mathbf{O}$, logo

$$0 < \sigma_1 \leq \inf_x \tau(K, \mathbf{O}, x) \leq \sup_x \tau(K, \mathbf{O}, x) \leq \sigma_2 < \infty$$

de modo que

$$0 < \sigma_1 \leq \inf_x \tau(K, \mathbf{O}, x) \leq \sup_{\tilde{\mathbf{O}}} \inf_x \tau(K, \tilde{\mathbf{O}}, x) = \tau(K)$$

e

$$\theta(K) = \inf_{\tilde{\mathcal{U}}} \sup_x \tau(K, \mathcal{U}, x) \leq \sup_x \tau(K, \mathcal{U}, x) \leq \sigma_2 < \infty$$

onde $\tilde{\mathbf{O}}$ é uma apresentação de K

Por fim, lembrando que $\tau(K) \leq \theta(K)$, temos

$$0 < \tau(K) < \theta(K) < \infty$$

como queríamos.

□

Para encerrar esta seção, mostraremos que conjuntos de Cantor regulares são pequenos para a medida de Lebesgue, de modo que a dimensão e medida de Hausdorff se tornam essenciais para seus estudos.

Proposição 3.4. *Se $K \subset \mathbb{R}$ é um conjunto de Cantor regular, então a dimensão de Hausdorff e a box-counting dimension de K satisfazem*

$$0 < d(K) = HD(K) < 1.$$

Consequentemente, K possui medida de Lebesgue nula.

Demonstração. Como a igualdade entre as dimensões foi provada no Teorema 2.1, mostraremos que $0 < HD(K) < 1$.

Combinando as Proposições 3.1 e 3.2, temos

$$\frac{\log 2}{\log(2 + \frac{1}{\tau(K)})} \leq HD(K) \leq \frac{\log 2}{\log(2 + \frac{1}{\theta(K)})}$$

pela Proposição 3.3, temos

$$0 < \frac{\log 2}{\log(2 + \frac{1}{\sigma_1})} \leq \frac{\log 2}{\log(2 + \frac{1}{\tau(K)})} \leq HD(K) \leq \frac{\log 2}{\log(2 + \frac{1}{\theta(K)})} \leq \frac{\log 2}{\log(2 + \frac{1}{\sigma_2})} < 1.$$

Uma vez provada essa desigualdade, o fato de K possuir medida de Lebesgue nula segue da definição de dimensão de Hausdorff.

□

3.2 Continuidade da Espessura e Espessuras Laterais

Nesta seção, estudaremos a continuidade das espessuras e espessuras laterais de um conjunto de Cantor Regular. Iniciaremos com o caso das espessuras, mostrando que se K um conjunto de Cantor regular e $\tilde{K}$ está suficientemente próximo de K na topologia $C^{1+\varepsilon}$, suas espessuras também estão próximas.

Para isso, mostraremos que se K está próximo de $\tilde{K}$, $\tau(\tilde{K},h(\mathcal{U}),h(x))$ está próximo de $\tau(K,\mathcal{U},x)$ para toda apresentação $\mathcal{U}$ e todo ponto x. A ideia é que, para quaisquer x e $\mathcal{U}$, se fizermos h suficientemente próxima da identidade as espessuras estão também próximas.

Teorema 3.1. *A espessura e densidade de um conjunto de Cantor regular K depende continuamente de K.*

Demonstração. Fixados $\alpha,\delta>0$, suponhamos que $\tilde{K}$ está suficientemente próximo de K para que $|h(x)-x|\leq\alpha\delta$ para todo $x\in K$, onde $h:K\to\tilde{K}$ é o homeomorfismo que conjuga os mapas expansores Ψ e $\tilde{\Psi}$ que definem K e $\tilde{K}$, respectivamente. (Ver Proposição 2.8)

Vamos mostrar que se $\varepsilon>0$, α e δ são suficientemente pequenos,

$$(1+\varepsilon)^{-2}\theta(K)-\varepsilon(1+\varepsilon)^{-1}\leq\theta(\tilde{K})\leq(1+\varepsilon)^{2}\theta(K)+\varepsilon(1+\varepsilon) \tag{3.2}$$

$$(1+\varepsilon)^{-2}\tau(K)-\varepsilon(1+\varepsilon)^{-1}\leq\tau(\tilde{K})\leq(1+\varepsilon)^{2}\tau(K)+\varepsilon(1+\varepsilon) \tag{3.3}$$

Fazendo $A:=\sup|\Psi'|$ e $B:=2\theta(K)+8$. Se α é suficientemente pequeno, a $2AB\alpha$-vizinhança de K e $\tilde{K}$ estão contidas no domínio de Ψ e $\tilde{\Psi}$, respectivamente. No que segue, Ψ, $\tilde{\Psi}$ e h estão sendo aplicadas apenas nos pontos de seus respectivos domínios.

Sejam $\mathbf{O}=\{\mathcal{O}^n\}$ uma apresentação de K e $x\in\partial\mathcal{O}^n$ para algum n, e seja C_x a $\mathbf{O}$-componente de x em K. Tome $k>0$ o menor inteiro tal que $|\Psi^k(\mathcal{O}\cup C_x)|\geq B\alpha$, então

$$|\Psi^k(\mathcal{O}\cup C_x)|\leq|\Psi'||\Psi^{k-1}(\mathcal{O}\cup C_x)|\leq AB\alpha.$$

Daí, se $\delta<\frac{AB}{2}$, temos que

$$\begin{aligned}|\tilde{\Psi}^k(h(\mathcal{O})\cup h(C_x))| &= |\tilde{\Psi}^k(h(\mathcal{O}\cup C_x))|\\ &\leq AB\alpha+2\alpha\delta\\ &\leq AB\alpha+2\alpha\frac{AB}{2}\\ &= 2AB\alpha.\end{aligned}$$

A distorção limitada nos dá

$$e^{-c(AB\alpha)} \leq \frac{\frac{|\Psi^k(C_x)|}{|\Psi^k(\mathcal{O})|}}{\frac{|C_x|}{|\mathcal{O}|}} \leq e^{c(AB\alpha)} \tag{3.4}$$

e

$$e^{-c(2AB\alpha)} \leq \frac{\frac{|\tilde{\Psi}^k(h(C_x))|}{|\tilde{\Psi}^k(h(\mathcal{O}))|}}{\frac{|h(C_x)|}{|h(\mathcal{O})|}} \leq e^{c(2AB\alpha)}. \tag{3.5}$$

Se α é suficientemente próximo de 0 os limites inferiores e superiores de ambas as equações ficam próximos de 1, de modo que podemos escrevê-las, respectivamente como

$$(1+\varepsilon)^{-1} \leq \frac{\frac{|\Psi^k(C_x)|}{|\Psi^k(\mathcal{O})|}}{\frac{|C_x|}{|\mathcal{O}|}} \leq (1+\varepsilon) \tag{3.6}$$

e

$$(1+\varepsilon)^{-1} \leq \frac{\frac{|\tilde{\Psi}^k(h(C_x))|}{|\tilde{\Psi}^k(h(\mathcal{O}))|}}{\frac{|h(C_x)|}{|h(\mathcal{O})|}} \leq (1+\varepsilon). \tag{3.7}$$

Agora, separaremos nossos argumentos em dois casos, de acordo com o crescimento de Ψ.

No primeiro caso, suponhamos que $|\Psi^k(\mathcal{O})| \geq \alpha$, então

$$\begin{aligned}
\left|\frac{|\Psi^k(C_x)|}{|\Psi^k(\mathcal{O})|} - \frac{|h(\Psi^k(C_x))|}{|h(\Psi^k(\mathcal{O}))|}\right| &= \left|\frac{|\Psi^k(C_x)||h(\Psi^k(\mathcal{O}))| - |h(\Psi^k(C_x))||\Psi^k(\mathcal{O}))|}{|\Psi^k(\mathcal{O})||h(\Psi^k(\mathcal{O}))|}\right| \\
&= \left|\frac{|\Psi^k(C_x)||h(\Psi^k(\mathcal{O}))| - |\Psi^k(C_x)||\Psi^k(\mathcal{O})|}{|\Psi^k(\mathcal{O})||h(\Psi^k(\mathcal{O}))|}\right. \\
&\quad \left. + \frac{|\Psi^k(C_x)||\Psi^k(\mathcal{O})| - |h(\Psi^k(C_x))||\Psi^k(\mathcal{O}))|}{|\Psi^k(\mathcal{O})||h(\Psi^k(\mathcal{O}))|}\right| \\
&\leq \frac{|\Psi^k(C_x)|||h(\Psi^k(\mathcal{O}))| - |\Psi^k(\mathcal{O})||}{|\Psi^k(\mathcal{O})||h(\Psi^k(\mathcal{O}))|} \\
&\quad - \frac{|\Psi^k(\mathcal{O})||h(\Psi^k(C_x))| - |\Psi^k(C_x)||}{|\Psi^k(\mathcal{O})||h(\Psi^k(\mathcal{O}))|} \\
&\leq \frac{AB\alpha 2\alpha\delta + AB\alpha 2\alpha\delta}{\alpha(\alpha - 2\alpha\delta)} = \frac{4AB\delta}{1-2\delta}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

. Se $\delta > 0$ é suficientemente pequeno, temos que

$$\left|\frac{|\Psi^k(C_x)|}{|\Psi^k(\mathcal{O})|} - \frac{|h(\Psi^k(C_x))|}{|h(\Psi^k(\mathcal{O}))|}\right| \leq \varepsilon. \tag{3.9}$$

Multiplicando por -1 a equação (3.7) e somando a (3.6) obtemos

$$(1+\varepsilon)^{-1}\frac{|C_x|}{|\mathcal{O}|} - (1+\varepsilon)\frac{|h(C_x)|}{|h(\mathcal{O})|} \overset{(i)}{\leq} \frac{|\Psi^k(C_x)|}{|\Psi^k(\mathcal{O})|} - \frac{|\Psi^k(h(C_x))|}{|\Psi^k(h(\mathcal{O}))|} \overset{(ii)}{\leq} (1+\varepsilon)\frac{|C_x|}{|\mathcal{O}|} - (1+\varepsilon)^{-1}\frac{|h(C_x)|}{|h(\mathcal{O})|}.$$

De (i) e (3.9), temos que

$$(1+\varepsilon)^{-1}\frac{|C_x|}{|\mathcal{O}|}-(1+\varepsilon)\frac{|h(C_x)|}{|h(\mathcal{O}))|}\leq\varepsilon,$$

o que nos dá

$$(1+\varepsilon)^{-1}(\varepsilon+(1+\varepsilon)^{-1}\tau(K,\mathbf{O},x))\leq\tau(\tilde{K},h(\mathbf{O}),h(x)). \tag{3.10}$$

Combinando (ii) e (3.9), chegamos na seguinte expressão

$$\varepsilon\leq(1+\varepsilon)\frac{|C_x|}{|\mathcal{O}|}-(1+\varepsilon)^{-1}\frac{|h(C_x)|}{|h(\mathcal{O})|},$$

donde

$$\tau(\tilde{K},h(\mathbf{O}),h(x))\leq(1+\varepsilon)((1+\varepsilon)\tau(K,\mathbf{O},x)+\varepsilon). \tag{3.11}$$

Agora estudaremos o caso em que $|\Psi^k(\mathcal{O})|\leq\alpha$. Como $|\Psi^k(\mathcal{O}\cup C_x)|\geq B\alpha$, devemos ter

$$|\Psi^k(C_x)|\geq B\alpha-\alpha$$

usando isso e lembrando do modo como h foi tomada, temos

$$|\tilde{\Psi}(h(\mathcal{O}))|\geq\alpha+2\alpha\delta$$

o que nos dá

$$|\Psi^k(h(C_x))|\geq B\alpha-\alpha-2\alpha\delta.$$

Usando isso e a segunda desigualdade em (3.4), temos

$$\frac{|C_x|}{|\mathcal{O}|}\geq e^{c(AB\alpha)}\cdot\frac{B\alpha-\alpha}{\alpha}=(B-1)e^{-c(AB\alpha)}. \tag{3.12}$$

Similarmente, com a segunda desigualdade em (3.5), obtemos

$$\frac{|h(C_x)|}{|h(\mathcal{O})|}\geq e^{c(2AB\alpha)}\cdot\frac{B\alpha-\alpha-2\alpha\delta}{\alpha+2\alpha\delta}=\frac{(B-1-2\delta)}{1+2\delta}e^{-c(2AB\alpha)}. \tag{3.13}$$

Agora, como $B=2\theta(K)+8$, supondo α e δ suficientemente pequenos, as desigualdades (3.12) e (3.13) nos dão, respectivamente

$$\tau(K,\mathbf{O},x)\geq\theta(K)+3 \tag{3.14}$$

e

$$\tau(\tilde{K},h(\mathbf{O}),h(x))\geq\theta(K)+3. \tag{3.15}$$

Estamos prontos para provar (3.2) e (3.3).

Dada qualquer apresentação $\mathbf{O}$ de K, podemos construir, como se segue, uma apresentação $\tilde{\mathbf{O}}$ de $\tilde{K}$ tal que

$$\sup_{\tilde{x}} \tau(\tilde{K}, \tilde{\mathbf{O}}, \tilde{x}) \leq (1+\varepsilon)^2 \sup_{x} \tau(K, \mathbf{O}, x) + \varepsilon(1+\varepsilon).$$

Pelas propriedades de supremo e ínfimo, podemos supor, sem perda de generalidade

$$\sup_{x} \tau(K, \mathbf{O}, x) \leq \theta(K) + 1.$$

Isso vale, em particular, tomando $\tilde{\mathbf{O}} = h(\mathbf{O})$, e nesse caso, temos

$$\tau(K, \mathbf{O}, x) \leq \theta(K) + 1$$

para todo x, de modo que (3.14) não pode valer. Isso nos diz que estamos no caso $|\Psi^k(\mathcal{O})| > \alpha$, que nos dá

$$\tau(\tilde{K}, h(\mathbf{O}), h(x)) \leq (1+\varepsilon)((1+\varepsilon)\tau(K, \mathbf{O}, x) + \varepsilon)$$

para todo x. Lembrando que h é uma bijeção, isso vale para todos os extremos de gaps de $\tilde{K}$, agora como dada uma apresentação de K associamos uma de $\tilde{K}$ que satisfaz a desigualdade, essa relação se segue para o ínfimo sobre todas as partições, de modo que

$$\theta(\tilde{K}) \leq (1+\varepsilon)^2 \theta(K) + (1+\varepsilon)\varepsilon. \tag{3.16}$$

Agora, dada uma apresentação $\mathbf{O}$ de K, construiremos uma apresentação $\tilde{\mathbf{O}}$ de $\tilde{K}$ tal que

$$(1+\varepsilon)^{-1}(\varepsilon + (1+\varepsilon)^{-1} \sup_{x} \tau(K, \mathbf{O}, x)) \leq \sup_{\tilde{x}} \tau(\tilde{K}, \tilde{\mathbf{O}}, \tilde{x})$$

supondo, sem perda de generalidade

$$\sup_{\tilde{x}} \tau(\tilde{K}, \tilde{\mathbf{O}}, \tilde{x}) \leq \theta(\tilde{K}) + 1$$

e se $\tilde{K}$ está suficientemente próximo de K, usando (3.16),

$$\sup_{\tilde{x}} \tau(\tilde{K}, \tilde{\mathbf{O}}, \tilde{x}) \leq \theta(K) + 2$$

isso vale, em particular, para $\tilde{\mathbf{O}} = h(\mathbf{O})$, e temos, de modo similar ao anterior,

$$\tau(\tilde{K}, \tilde{\mathbf{O}}, \tilde{x}) \leq \theta(K) + 2$$

para todo $\tilde{x}$, de modo que (3.15) não pode valer, assim

$$(1+\varepsilon)^{-1}(\varepsilon + (1+\varepsilon)^{-1} \tau(K, \mathbf{O}, x)) \leq \tau(\tilde{K}, h(\mathbf{O}), h(x)).$$

como h é uma bijeção, isso vale para todos os extremos de gaps em $\tilde{K}$, logo, para o supremo sobre todos os $\tilde{x}$. E como dada uma apresentação de $\tilde{K}$ conseguimos uma em K para a qual a desigualdade é satisfeita (aplicando h^{-1} a essa apresentação), temos

$$\varepsilon(1+\varepsilon)^{-1}+(1+\varepsilon)^{-2}\theta(K)\leq\theta(\tilde{K}). \tag{3.17}$$

Finalmente, (3.16) juntamente com (3.17) prova (3.2).

Dada uma apresentação $\tilde{\mathbf{O}}$ de $\tilde{K}$, podemos construir uma apresentação $\mathbf{O}$ de K tal que

$$\inf_{\tilde{x}}\tau(\tilde{K},\tilde{\mathbf{O}},\tilde{x})\leq(1+\varepsilon)((1+\varepsilon)\inf_{x}\tau(K,\mathbf{O},x)+\varepsilon).$$

Supondo, sem perda de generalidade

$$\tau(K,\mathbf{O},x)\leq\inf_{x}\tau(K,\mathbf{O},x)+1$$

Tomando o supremos sobre todas as apresentações, temos

$$\tau(K,\mathbf{O},x)\leq\tau(K)+1.$$

Isso vale, em particular para $\mathbf{O}=h^{-1}(\tilde{\mathbf{O}})$. Além disso

$$\tau(K,\mathbf{O},x)\leq\tau(K)+1\leq\theta(K)+1$$

onde a segunda desigualdade é válida porque $\tau(K)\leq\theta(K)$ para qualquer conjunto de Cantor regular. Disto temos, novamente, que (3.14) não pode valer, daí

$$\tau(\tilde{K},\tilde{\mathbf{O}},\tilde{x})\leq(1+\varepsilon)((1+\varepsilon)\tau(K,h^{-1}(\tilde{\mathbf{O}}),h^{-1}(\tilde{x}))+\varepsilon)$$

para todo $\tilde{x}$. Lembrando que h^{-1} é uma bijeção, a desigualdade vale para todos os extremos de gaps de K, logo, para o ínfimo entre tais extremos. Ademais, a cada apresentação de $\tilde{K}$ podemos associar uma apresentação de K que satisfaz a desigualdade, logo, esta propriedade vale para o supremo entre as partições. Isso prova que

$$\tau(\tilde{K})\leq(1+\varepsilon)^2\tau(K)+(1+\varepsilon)\varepsilon. \tag{3.18}$$

Finalmente, dada uma apresentação $\tilde{\mathbf{O}}$ de $\tilde{K}$, vamos construir uma apresentação $\mathbf{O}$ de K para a qual

$$(1+\varepsilon)^{-1}((1+\varepsilon)^{-1}\inf_{x}\tau(K,\mathbf{O},x)+\varepsilon)\leq\inf_{\tilde{x}}\tau(\tilde{K},\tilde{\mathbf{O}},\tilde{x}).$$

Suponha, sem perda de generalidade

$$\tau(\tilde{K},\tilde{\mathbf{O}},\tilde{x})\leq\inf_{\tilde{x}}\tau(\tilde{K},\tilde{\mathbf{O}},\tilde{x})+1.$$

Tomando o supremo sobre todas as apresentações, temos que

$$\tau(\tilde{K},\tilde{\mathbf{O}},\tilde{x}) \leq \tau(\tilde{K})+1.$$

Se $\tilde{K}$ e K estão suficientemente próximos, usando (3.18), temos

$$\tau(\tilde{K},\tilde{\mathbf{O}},\tilde{x}) \leq \tau(K)+2$$

que por sua vez nos dá

$$\tau(\tilde{K},\mathbf{O},\tilde{x}) \leq \tau(K)+2 \leq \theta(K)+2.$$

Isso vale, em particular, quando $\mathbf{O} = h^{-1}(\tilde{\mathbf{O}})$ e, neste caso, (3.15) não pode ser satisfeita. Logo

$$(1+\varepsilon)^{-1}((1+\varepsilon)^{-1}\tau(K,h^{-1}(\tilde{\mathbf{O}}),h^{-1}(\tilde{x}))+\varepsilon) \leq \tau(\tilde{K},\tilde{\mathbf{O}},\tilde{x}).$$

Como h^{-1} é uma bijeção, essa desigualdade vale para todos os extremos de gaps de K, logo, continuará válida ao tomarmos o ínfimo sobre todos os extremos. Como dada uma apresentação de K conseguimos uma apresentação de $\tilde{K}$ para a qual a desigualdade é satisfeita (aplicando h a essa apresentação), temos

$$(1+\varepsilon)^{-1}((1+\varepsilon)^{-1}\tau(K)+\varepsilon)) \leq \tau(\tilde{K}) \tag{3.19}$$

Finalmente, de (3.18) e (3.18) temos provada (3.3).

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos provado que a espessura e a densidade de um conjunto de Cantor regular K dependem continuamente de K, como queríamos.

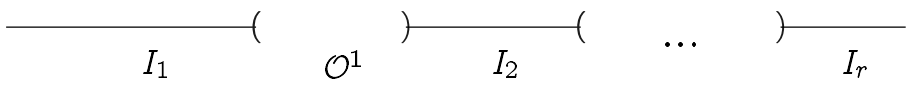
□

Um resultado similar é válido para a espessura local de conjuntos de Cantor regulares.

No exemplo abaixo veremos que, ao contrário da espessura, as espessuras laterais nem sempre são contínuas. Antes disso, daremos a definição de conjunto de cantor afim.

Definição 3.5. *Chamaremos de conjunto de Cantor afim com partição de Markov* $\{I_1, I_2, ..., I_i\}$ *ao conjunto de Cantor regular* K *com esta partição de Markov e o mapa* Ψ_i *definido em cada um dos* I_i *é afim e sobrejetor. No caso em que* Ψ_i *é afim mas não sobrejetor dizemos que* K *é afim generalizado.*

Chamamos de Conjunto de Cantor afim do tipo



ao conjunto de Cantor afim com essa partição de Markov e cujo mapa Ψ_i é crescente em cada um dos intervalos dessa partição.

Exemplo 3.1. Considere o conjunto de Cantor afim K do tipo

Sejam $\mathcal{O}^1 = (2,3)$ e $\mathcal{O}^2 = (4,5)$ os gaps da primeira etapa de K, como $|\mathcal{O}^1| = |\mathcal{O}^2|$, temos $\tau_E(K) = \tau_D(K) = 1$.

Modificamos rapidamente esta construção para obter o conjunto de Cantor afim $\hat{K}$ do tipo

Fazendo $\hat{\mathcal{O}}^1 = (2,3-\varepsilon)$, $\hat{\mathcal{O}}^2 = (4,5)$, temos $|\hat{\mathcal{O}}^1| \leq |\hat{\mathcal{O}}^2|$, temos $\tau_E(\hat{K}) = \frac{2}{1-\varepsilon} \longrightarrow 2$ quando $\varepsilon \longrightarrow 0$ e $\tau_D(\hat{K}) = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \longrightarrow 1$ quando $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Agora, seja $\tilde{K}$ o conjunto de Cantor afim do tipo

Fazendo $\tilde{\mathcal{O}}^1 = (2,3)$ e $\tilde{\mathcal{O}}^2 = (4,5-\varepsilon)$, então $|\tilde{\mathcal{O}}^1| \geq |\tilde{\mathcal{O}}^2|$, de modo que $\tau_E(\tilde{K}) = \frac{1}{1-\varepsilon} \longrightarrow 1$ quando $\varepsilon \longrightarrow 0$ e $\tau_D(\tilde{K}) = \frac{2+\varepsilon}{1-\varepsilon} \longrightarrow 2$ quando $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Segue que as espessuras laterais não são contínuas.

No entanto, em [5], C. G. Moreira mostrou encontrar um subconjunto aberto e denso na topologia $C^{1+\varepsilon}$ de conjuntos de Cantor regulares cujos elementos têm essas espessuras variando continuamente.

Para mostrar isso, faremos uso do lema a seguir.

Lema 3.1. *Os conjuntos de Cantor afim generalizados são densos na topologia $C^{1+\epsilon}$. Ou seja, dado um conjunto de Cantor K, podemos aproximá-lo por um conjunto $\tilde{K}$ que coincide como subconjunto da reta com um conjunto de Cantor afim generalizado (que não precisa ser definido pela mesma aplicação).*

Demonstração. Seja K um conjunto de Cantor regular, definido por uma aplicação Ψ cuja derivada Ψ' é (C,ε)-Hölder, e com partição de Markov $I_1, I_2, ..., I_k$, construiremos um conjunto de Cantor $\tilde{K}$ que coincide como subconjunto da reta com um conjunto de Cantor afim generalizado.

Para isso, consideramos $\tilde{K}$ com a mesma partição de Markov de K, mas definido por uma nova aplicação $\tilde{\Psi}$ que construiremos a seguir.

Considere uma etapa avançada da construção de K, digamos uma etapa n, para n suficientemente grande. Nesta etapa construímos $\tilde{\Psi}$ como uma aplicação afim em cada um dos intervalos desta etapa, coincidindo com Ψ nos extremos dos intervalos. Tomando dois intervalos consecutivos desta etapa I_j, I_{j+1}, (ambos contidos num mesmo intervalo da partição de Markov original), completaremos $\tilde{\Psi}$ no gap $\mathcal{O}_j$ que os separa, faremos isso estendendo a derivada de $\tilde{\Psi}$.

Primeiro, observamos que, pela propriedade da distorção limitada, existe uma constante A, dependendo apenas de n tal que $|\mathcal{O}| \geq A|I_i|$, $i = j, j+1$.

Ao aplicarmos o Teorema do Valor Médio à aplicação Ψ nos extremos dos intervalos I_i, obtemos $\Psi'(c_i) = \lambda_i$ para algum $c_i \in I_i$, $i = j, j+1$. Como $\tilde{\Psi}$ é linear em I_j, I_{j+1} e coincide com Ψ nos extremos desses intervalos, temos $\tilde{\Psi}' \equiv \lambda_i$ em I_i, $i = j, j+1$. Para completarmos $\tilde{\Psi}'$ em $\mathcal{O}_j = (a,b)$ continuamente (de modo que $\tilde{\Psi}$ seja de classe C^1), denotamos por c o ponto médio de (a,b), e fazemos $\tilde{\Psi}'$ afim em (a,c) e (c,b) assumindo valor λ em c, onde λ satisfaz a condição abaixo

$$\begin{aligned}
\int_a^b \tilde{\Psi}'(t)dt &= \Psi(b) - \Psi(a) \\
\left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{\lambda_j + \lambda}{2}\right) + \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{\lambda_{j+1} + \lambda}{2}\right) &= (b-a)\Psi'(\xi) \\
\lambda &= 2\Psi'(\xi) - \frac{\lambda_j + \lambda_{j+1}}{2} \\
&= 2\Psi'(\xi) - \frac{\Psi'(c_j) + \Psi'(c_{j+1})}{2}
\end{aligned}$$

para algum $\xi \in (a,b)$. Mostraremos que $\tilde{\Psi}'$ é Hölder. Dados x, y, temos algumas possibilidades para as posições de x e y.

- $x, y \in I_i, i = j, j+1$:

$$|\tilde{\Psi}'(x) - \tilde{\psi}'(y)| = 0 \leq C|x-y|^{\varepsilon};$$

- $x \in I_j$, $y \in I_{j+1}$:

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}'(x) - \tilde{\Psi}'(y)| &= |\lambda_j - \lambda_{j+1}| \\ &= |\Psi'(c_j) - \Psi'(c_{j+1})| \\ &= C|c_j - c_{j+1}|^{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Agora, se $|x-y| \leq |c_j - c_{j+1}|$, temos que $|\tilde{\Psi}'(x) - \tilde{\Psi}'(y)| \leq C|x-y|^{\varepsilon}$. Caso $|x-y| < |c_j - c_{j+1}|$, como $|x-y| > |a-b| = |U|$, temos

$$\begin{aligned} |c_j - c_{j+1}| &\leq |x - c_1| + |x-y| + |y - c_2| \\ &\leq |I_j| + |U| + |I_{j+1}| \\ &\leq \frac{|x-y|}{A} + |U| + \frac{|x-y|}{A} \\ &= |x-y|\left(\frac{2+A}{A}\right) \end{aligned}$$

onde a última desigualdade vale porque $\frac{|x-y|}{A} \geq |I|$. De modo que

$$|\tilde{\Psi}'(x) - \tilde{\Psi}'(y)| \leq C\left(\frac{2+A}{A}\right)^{\varepsilon} |x-y|^{\varepsilon}$$

diminuindo ε, se necessário, podemos fazer $\left(\frac{2+A}{A}\right)^{\varepsilon}$ próximo de 1, de modo que

$$|\tilde{\Psi}'(x) - \tilde{\Psi}'(y)| \leq \tilde{C}|x-y|^{\tilde{\varepsilon}}$$

com $(\tilde{C}, \tilde{\varepsilon})$ próximo de (C, ε).

Abordando os demais casos com técnicas similares temos que a aplicação assim construída é $(\tilde{C}, \tilde{\varepsilon})$-Hölder com constante de Hölder próxima de C e expoente de Hölder próximo de ε, os detalhes não serão apresentados aqui.

□

Teorema 3.2. *Seja $\mathcal{K}$ a coleção dos conjuntos de Cantor regulares. Existe $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}$ aberto e denso na topologia $C^{1+\varepsilon}$ tal que a restrição de τ_E e τ_D são contínuas.*

Demonstração. Dado um conjunto de Cantor $K \in \mathcal{K}$, tomamos $\tilde{K}$ como o conjunto de Cantor afim generalizado próximo a K garantido pelo lema 3.1. $\tilde{K}$ assim escolhido é definido por funções afins, não necessariamente sobrejetivas, os gaps da n-ésima etapa da construção de $\tilde{K}$ são da forma $\tilde{O}^n = (\tilde{\Psi}^{-n}(z), \tilde{\Psi}^{-n}(w))$ e os gaps da primeira etapa são da forma $\tilde{O}^1 = (x, y)$, isso nos dá

$$\frac{|\tilde{O}^1|}{|\tilde{O}^n|} = \frac{m_1 m_2 ... m_n |x-y|}{|w-z|}$$

onde $m_i > 1$, $i = 1,..,n$ são as derivadas de $\tilde{\Psi}$ restrita aos intervalos da partição de Markov correspondentes. Segue que o conjunto das razões limitadas entre gaps do conjunto de Cantor é finito.

Agora, consideramos o conjunto $\mathcal{W}$ dos gaps $\tilde{\mathcal{O}}_1$ e $\tilde{\mathcal{O}}_2$ de $\tilde{K}$ tais que não existe um gap $\tilde{\mathcal{O}}'$ entre $\tilde{\mathcal{O}}_1$ e $\tilde{\mathcal{O}}_2$ tal que $|\tilde{\mathcal{O}}'| > 2\max\{|\tilde{\mathcal{O}}_1|, |\tilde{\mathcal{O}}_2|\}$. Pela observação anterior, basta analisarmos estas razões entre os gaps das primeiras etapas da construção de $\tilde{K}$, de modo que este conjunto de gaps também é finito. Então, modificando rapidamente, se necessário, o comprimento dos gaps de $\mathcal{W}$, temos que para algum $\delta > 0$,

$$1+\delta < \frac{|\tilde{\mathcal{O}}_1|}{|\tilde{\mathcal{O}}_2|} \quad \text{ou} \quad \frac{|\tilde{\mathcal{O}}_1|}{|\tilde{\mathcal{O}}_2|} < 1-\delta.$$

De fato, para cada dois gaps com o mesmo comprimento, basta modificarmos o comprimento de um deles de modo que a razão entre tais gaps seja diferente de 1, obtendo um conjunto de Cantor K', que está próximo de $\tilde{K}$. Como existe apenas uma qualidade finita de possibilidades, tomamos o menor δ obtido ao analisarmos cada par e a afirmação acima será verdadeira. Agora, podemos utilizar argumentos similares aos da demonstração do teorema 3.1, para mostrar que os conjuntos de Cantor K' assim construídos são pontos de continuidade para as espessuras laterais.

□

4 Interseções Estáveis de Conjuntos de Cantor com Espessura Grande

Neste capítulo, veremos como a espessura pode nos ajudar no estudo de interseções estáveis e diferenças aritméticas de conjuntos de Cantor regulares. Vamos provar o Gap Lemma, mostrar como a interseção não vazia nos dá informações sobre a diferença aritmética de conjuntos de Cantor e daremos alguns exemplos de situações nos quais estes resultados podem ser utilizados.

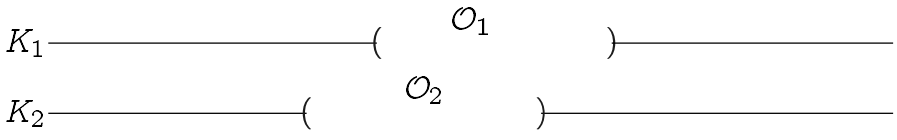
4.1 O Gap Lemma de Newhouse

Veremos agora o primeiro resultado dessa seção, que usa a espessura de conjuntos de Cantor regulares para estabelecer condições sob as quais sua interseção é não vazia. Esse teorema, que pode ser encontrado em [5], é uma versão mais forte do Gap Lemma de Newhouse, de fato, o obtemos o Gap Lemma de Newhouse como seu corolário.

Teorema 4.1. *Dados K_1 e K_2 conjuntos de Cantor. Se $\tau_E(K_1)\cdot\tau_D(K_2) > 1$ e $\tau_D(K_1)\cdot\tau_E(K_2) > 1$, então ou K_1 está contido num gap de K_2 ou K_2 está contido num gap de K_1 ou $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$.*

Demonstração. Suponha que K_1 não está contido num gap de K_2 e que K_2 não está contido num gap de K_1, mostraremos que $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$.

Como nenhum deles está contido num gap do outro, existe um par de gaps $(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$, com $\mathcal{O}_1 \in K_1$ e $\mathcal{O}_2 \in K_2$ se intersectando, podemos supor, sem perda de generalidade a configuração abaixo.



Como, por hipótese, $\tau_E(K_1)\cdot\tau_D(K_2) > 1$, temos

$$\frac{|E_{\mathcal{O}_1}|}{|\mathcal{O}_1|}\cdot\frac{|D_{\mathcal{O}_2}|}{|\mathcal{O}_2|} > 1 \Rightarrow |E_{\mathcal{O}_1}| > |\mathcal{O}_2| \text{ ou } |D_{\mathcal{O}_2}| > |\mathcal{O}_1|.$$

Logo, $E_{\mathcal{O}_1} \cap \partial\mathcal{O}_2 \neq \emptyset$ ou $D_{\mathcal{O}_2} \cap \partial\mathcal{O}_1 \neq \emptyset$. Uma análise similar pode ser feita para $\tau_D(K_1)\cdot\tau_E(K_2) > 1$.

Tomando, sem perda de generalidade, $u \in E_{\mathcal{O}_1} \cap \partial\mathcal{O}_2$ (os demais casos são análogos), se $u \in K_1$, temos $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$, uma vez que $\partial\mathcal{O}_2 \subset K_2$. Se $u \notin K_1$, então existe um novo gap $\mathcal{O}_1^1$ tal que $u \in \mathcal{O}_1^1$, neste caso repetimos a construção para $(\mathcal{O}_1^1, \mathcal{O}_2)$.

Fazendo isso sucessivas vezes construímos uma sequência de gaps $(\mathcal{O}_1^n, \mathcal{O}_2^m)$ convergindo para um ponto de acumulação de $K_1 \cap K_2$, como este ponto está na fronteira de uma sequência de gaps, ele deverá pertencer a ambos os conjuntos de Cantor logo, $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$.

□

Corolário 4.1.1 (Gap Lemma). *Sejam K_1, K_2 conjuntos de Cantor. Se $\tau(K_1)\cdot\tau(K_2) > 1$, então ou K_1 está contido num gap de K_2 ou K_2 está contido num gap de K_1 ou $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$.*

O seguinte corolário nos dá condições suficientes para que a soma aritmética de dois conjuntos de Cantor contenha intervalo.

Corolário 4.1.2. *Sejam K_1 e K_2 conjuntos de Cantor tais que $\tau(K_1)\tau(K_2) > 1$ e I_1, I_2 os fechos convexos de K_1 e K_2, respectivamente. Suponhamos que, I_1 tem comprimento maior que qualquer gap de K_2 e que I_2 tem comprimento maior que qualquer gap de K_1, então $K_1 + K_2 = I_1 + I_2$.*

Demonstração. Consideramos os Conjuntos de Cantor K_1 e K_2, cujos fechos convexos correspondem a I_1 e I_2, respectivamente.

Tome $k \in I_1 + I_2$, então $k - K_1$ ainda é um conjunto de Cantor e sua espessura é preservada, uma vez que comprimentos de intervalos são invariantes por translação e esta propriedade seguirá para seu ínfimo.

Como $\tau(K_1)\cdot\tau(K_2) > 1$, temos $\tau(k - K_1)\cdot\tau(K_2) > 1$. Além disso, os gaps de K_1 e $k - K_1$ possuem o mesmo comprimento, segue que $k - K_1$ não está contido em qualquer gap de K_2, e K_2 não está contido em qualquer gap de $k - K_1$.

Usando o Gap Lemma, temos $(k - K_1) \cap K_2 \neq \emptyset$, daí $k \in K_1 + K_2$. Como k é arbitrário em $I_1 + I_2$, temos $K_1 + K_2 = I_1 + I_2$. □

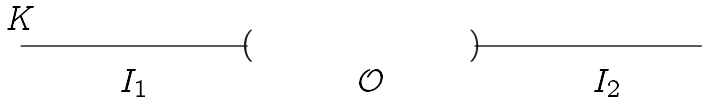
Uma situação particularmente útil de interseção não vazia entre conjuntos de Cantor é quando esta propriedade segue sendo válida para conjuntos de Cantor suficientemente próximos, isso é o que chamamos de interseção estável.

Definição 4.1. *Dizemos que dois conjuntos de Cantor K_1 e K_2 têm interseção estável se houver uma vizinhança do par (K_1, K_2) numa topologia adequada, aqui consideraremos a $C^{1+\epsilon}$, tal que para $(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2)$ nesta vizinhança, temos $\tilde{K}_1 \cap \tilde{K}_2 \neq \emptyset$. (K_1, K_2) têm interseção extremal estável se o extremo direito de K_1 coincide com o extremo esquerdo de K_2 e, para conjuntos de Cantor $(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2)$, numa vizinhança de (K_1, K_2), tais que seus fechos convexos se intersectam temos $\tilde{K}_1 \cap \tilde{K}_2 \neq \emptyset$.*

Dado um par de conjuntos de Cantor regulares $(K, \tilde{K})$ cujo produto das espessuras é maior que 1, segue do Teorema 3.1 que esta propriedade é válida para pares de conjuntos de Cantor regulares suficientemente próximos. Se K e $\tilde{K}$ possuem um par de gaps lincados, isto é, existe um gap $\mathcal{O}$ em K e $\tilde{\mathcal{O}}$ em $\tilde{K}$ tais que $\mathcal{O}$ contém exatamente um ponto de bordo de $\tilde{O}$ e vice-versa, então $(K, \tilde{K})$ possui interseção estável, uma vez que o Gap Lemma garante interseção não vazia para todo conjunto de Cantor regular suficientemente próximo.

Estudaremos agora um exemplo simples de interseção estável, utilizando conjuntos de Cantor do tipo afim com dois intervalos em sua partição de Markov, ou seja, a situação mais simples possível. Neste contexto, é mostrado em [5], que existem muitos pares de conjuntos de Cantor desse tipo com interseção estável garantida pelo Gap Lemma.

Tomemos o conjunto de Cantor afim K do tipo



onde $|I_1| = a$, $|I_2| = c$ e $|\mathcal{O}| = b$ temos que $\tau_E(K) = \frac{a}{b}$ e $\tau_D(K) = \frac{c}{b}$. E o conjunto de Cantor afim $\tilde{K}$ do tipo

onde $|\tilde{I}_1| = \tilde{a}$, $|\tilde{I}_2| = \tilde{c}$ e $|\tilde{\mathcal{O}}| = \tilde{b}$.

Desde que $\tau_E(\tilde{K}) \cdot \tau_D(K) = \dfrac{\tilde{a}c}{\tilde{b}b} > 1$ e $\tau_D(\tilde{K}) \cdot \tau_E(K) = \dfrac{\tilde{c}a}{\tilde{b}b} > 1$, os conjuntos K e $\tilde{K}$ têm interseção estável sempre que um não estiver contido num gap do outro.

Além disso, se $a+b+c=1$, então $HD(K)=\lambda$, onde λ é o único número real tal que $a^\lambda+c^\lambda=1$. Segue que, $\frac{c}{a}=r\Rightarrow c=ar$, daí

$$\begin{aligned} a^\lambda+c^\lambda=1 &\Rightarrow a^\lambda+(ar)^\lambda=1 \\ &\Rightarrow a^\lambda(1+r^\lambda)=1 \\ &\Rightarrow a=\frac{1}{(1+r^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}} \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned} \left(\frac{c}{r}\right)^\lambda+c^\lambda &\Rightarrow c^\lambda\left(\frac{1}{r^\lambda}+1\right)=1 \\ &\Rightarrow c=\frac{1}{(1+\frac{1}{r^\lambda})^{\frac{1}{\lambda}}}=\frac{r}{(r^\lambda+1)^{\frac{1}{\lambda}}} \end{aligned}$$

e finalmente,

$$b=1-a-c\Rightarrow b=\frac{(1+r^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}-1-r}{(1+r^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}}.$$

Segue da Proposição 3.1 que se $\tau(K)\geq 1$,

$$\log\left(2+\frac{1}{\tau(K)}\right)\leq\log 3\Rightarrow\frac{\log 2}{\log(2+\frac{1}{\tau(K)})}\geq\frac{\log 2}{\log 3}.$$

de modo que

$$HD(K)\geq\frac{\log 2}{\log(2+\frac{1}{\tau(K)})}\geq\frac{\log 2}{\log 3}>0{,}6.$$

Sejam K e K' conjuntos de Cantor tais que $HD(K),HD(K')\leq 0{,}6$ temos, pela observação acima, $\tau(K)\cdot\tau(K')<1$ e não podemos utilizar o Gap Lemma para garantir que K_1 e K_2 têm interseção estável.

Temos, no entanto, o resultado abaixo.

Teorema 4.2. *Dados $\lambda_1,\lambda_2\in(0,1)$, com $\lambda_1+\lambda_2>1$, existem conjuntos de Cantor K e $\tilde{K}$ com dimensão de Hausdorff λ_1 e λ_2, respectivamente, e interseção estável. Além disso, podemos obter $(K,\tilde{K})$ e $(\tilde{K},K+1)$ com interseção extremal estável.*

Demonstração. Mostraremos este resultado exibindo conjuntos de Cantor que satisfazem as propriedades solicitadas.

Tomemos conjuntos de Cantor afim K e $\tilde{K}$ com partições de Markov $\{I_1,I_2\}$ e $\{\tilde{I}_1,\tilde{I}_2\}$ e gaps $\mathcal{O}$ e $\tilde{\mathcal{O}}$, respectivamente. Sejam $|I_1|=a$, $|I_2|=c$, $|\mathcal{O}|=b$, $|\tilde{I}_1|=\tilde{a}$, $|\tilde{I}_2|=\tilde{c}$ e $|\tilde{\mathcal{O}}|=\tilde{b}$, então, por observações anteriores, desde que $\frac{a\tilde{c}}{b\tilde{b}},\frac{c\tilde{a}}{b\tilde{b}}>1$, K e $\tilde{K}$ têm interseção estável, supondo que um não esteja contido num gap do outro.

Se tais conjuntos estão na posição onde seus extremos se tocam, temos que K e $\tilde{K}$ têm interseção extremal estável. Se o extremo esquerdo de K coincide com o extremo esquerdo de $\tilde{K}$, $K+1$ e $\tilde{K}$ têm interseção extremal estável, desde que $\tilde{a}+\tilde{b}+\tilde{c}=1$.

Continuaremos supondo $a+b+c=\tilde{a}+\tilde{b}+\tilde{c}=1$. Suporemos ainda que

$$\frac{c}{a}=\frac{\tilde{c}}{\tilde{a}}=r\Rightarrow \tilde{a}c=a\tilde{c}$$

de modo que

$$\frac{a\tilde{c}}{b\tilde{b}}>1\Leftrightarrow \frac{\tilde{a}c}{b\tilde{b}>1}$$

queremos então que $a\tilde{c}>b\tilde{b}$ (e consequentemente, $\tilde{a}c>b\tilde{b}$), ou seja, queremos r satisfazendo

$$\frac{1}{(1+r^{\lambda_1})^{\frac{1}{\lambda_1}}}\cdot\frac{r}{(1+r^{\lambda_2})^{\frac{1}{\lambda_2}}}>\frac{(1+r^{\lambda_1})^{\frac{1}{\lambda_1}}-1-r}{(1+r^{\lambda_1})^{\frac{1}{\lambda_1}}}\cdot\frac{(1+r^{\lambda_2})^{\frac{1}{\lambda_2}}-1-r}{(1+r^{\lambda_2})^{\frac{1}{\lambda_2}}}$$

o que ocorre se, e somente se

$$r>(1+r^{\lambda_1})^{\frac{1}{\lambda_1}}-1-r)\cdot(1+r^{\lambda_2})^{\frac{1}{\lambda_2}}-1-r)$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0^+}\frac{(1+r^{\lambda})^{\frac{1}{\lambda}}-1-r}{r^{\lambda}} &= \lim_{r\to 0^+}\frac{\frac{1}{\lambda}(1+r^{\lambda})^{\frac{1}{\lambda}-1}\cdot\lambda r^{\lambda-1}-1}{\lambda r^{\lambda-1}}\\ &= \lim_{r\to 0^+}\frac{(1+r^{\lambda})^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}}{\lambda}-\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{\lambda r^{\lambda-1}}\\ &= \frac{1}{\lambda}.\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to 0^+}\frac{(1+r^{\lambda_1})^{\frac{1}{\lambda_1}}-1-r)\cdot(1+r^{\lambda_2})^{\frac{1}{\lambda_2}}-1-r)}{r}\\ =\ &\lim_{r\to 0^+}\frac{(1+r^{\lambda_1})^{\frac{1}{\lambda_1}}-1-r)\cdot(1+r^{\lambda_2})^{\frac{1}{\lambda_2}}-1-r)\cdot(r^{\lambda_1+\lambda_2})}{r(r^{\lambda_1+\lambda_2})}\\ =\ &\frac{1}{r^{\lambda_1}}\cdot\frac{1}{r^{\lambda_2}}\cdot\lim_{r\to 0^+}\frac{r^{\lambda_1+\lambda_2}}{r}\\ =\ &\frac{1}{r^{\lambda_1+\lambda_2}}\cdot 0=0\end{aligned}$$

de modo que a desigualdade é satisfeita para r suficientemente pequeno.

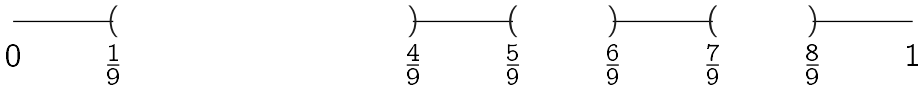
Logo, os exemplos acima podem ser tomado de modo que tais propriedades sejam satisfeitas.

□

4.2 Exemplos Sobre Diferenças Aritméticas e Interseções Estáveis

Nesta seção, veremos alguns exemplos interessantes de conjuntos de Cantor afins, explorando algumas de suas propriedades.

Exemplo 4.1. Consideramos o Conjunto de Cantor $K = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_i}{9^i}; \delta_i \in \{0,4,6,8\} \right\}$, que é o conjunto de Cantor afim do tipo



Mostraremos que $\tau_{loc}(K) = 1$ mas $\text{int}(K+K) = \emptyset$.

Para construirmos K dinamicamente, consideramos a aplicação $\Psi : [0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{4}{9},\frac{5}{9}] \cup [\frac{6}{9},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1] \to [0,1]$ definida por

$$\Psi(x) = \begin{cases} 9x, & x \in [0,\frac{1}{9}] \\ 9x-4, & x \in [\frac{4}{9},\frac{5}{9}] \\ 9x-6, & x \in [\frac{6}{9},\frac{7}{9}] \\ 9x-8, & x \in [\frac{8}{9},1] \end{cases}$$

Sejam $I_0 = [0,\frac{1}{9}], I_4 = [\frac{4}{9},\frac{5}{9}], I_6 = [\frac{6}{9},\frac{7}{9}], I_8 = [\frac{8}{9},1]$, temos que $\Psi(x)$ satisfaz todas as condições da Definição 2.7 e que $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Psi^{-n}(I_0 \cup I_4 \cup I_6 \cup I_8)$, donde K é um conjunto de Cantor regular e $\{I_0, I_4, I_6, I_8\}$ sua partição de Markov.

Denotaremos por $\mathcal{O}^1_\emptyset, \mathcal{O}^2_\emptyset$ e $\mathcal{O}^3_\emptyset$ os gaps da primeira etapa da construção. Os intervalos da n-ésima etapa da construção serão denotados por $I_{\underline{a}}$, onde $\underline{a} = a_1 ... a_n$, $a_i \in \{0,4,6,8\}$ é uma palavra de quatro símbolos. Então, a $(n+1)$-ésima etapa será formada por intervalos do tipo $I_{\underline{a}i}$, $i = 0,4,6,8$ e $\mathcal{O}^j_{\underline{a}}$, $j = 1,2,3$.

Calcularemos agora a espessura de K. Para isso, observamos que os comprimentos dos intervalos da $(n+1)$-ésima etapa são dados por $|I_{\underline{a}i}| = \frac{1}{9^{n+1}}$. De modo similar, podemos estimar o comprimentos dos gaps dessa etapa por $|\mathcal{O}^2_{\underline{a}}| = |\mathcal{O}^3_{\underline{a}}| = \frac{1}{9^{n+1}}$, para $\mathcal{O}^1_{\underline{a}}$, temos $|\mathcal{O}^1_{\underline{a}}| = \frac{3}{9^n}$.

Segue que $|\mathcal{O}^1_{\underline{a}}| > |\mathcal{O}^2_{\underline{a}}| = |\mathcal{O}^3_{\underline{a}}|$. Além disso, se $|\mathcal{O}^1_{\underline{a}i}$ é o maior gap da $(n+2)$-ésima etapa, então $|\mathcal{O}^1_{\underline{a}i}| = |\mathcal{O}^2_{\underline{a}}| = |\mathcal{O}^3_{\underline{a}}|$. Com essas informações, podemos identificar as pontes de cada gap.

Note que

$$\begin{aligned} E_{O^1_{\underline{a}}} &= I_{\underline{a}0} & D_{O^1_{\underline{a}}} &= I_{\underline{a}4} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}2} \cup I_{\underline{a}6} \cup \mathcal{O}_{\underline{a}^3} \cup I_{\underline{a}8} \\ E_{O^2_{\underline{a}}} &= I_{\underline{a}4} & D_{O^2_{\underline{a}}} &= I_{\underline{a}6} \\ E_{O^3_{\underline{a}}} &= I_{\underline{a}6} & D_{O^3_{\underline{a}}} &= I_{\underline{a}8} \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \tau_E(\mathcal{O}^1_{\underline{a}}) &= \frac{1}{3} \\ \tau_D(\mathcal{O}^1_{\underline{a}}) &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

e, claramemte, $\tau_E(\mathcal{O}^i_{\underline{a}}) = \tau_D(\mathcal{O}^i_{\underline{a}}) = 1$, $i = 2,3$. Logo, $\tau(K) = \dfrac{1}{3} < 1$.

Agora calcularemos a espessura local de K. Como K é um conjunto de Cantor regular, a espessura local não depende do ponto na qual é calculada. Calcularemos então em $p = \frac{1}{9}$:

$$\tau_{loc}\left(K, \frac{1}{9}\right) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \tau\left(\overline{K \cap \left(\frac{1}{9} - \varepsilon, \frac{1}{9} + \varepsilon\right)}\right).$$

Dado $\varepsilon > 0$, podemos considerar m tal que $\dfrac{1}{9^m} < \varepsilon$. Deste modo, os intervalos e gaps em torno de $\frac{1}{9}$ para qualquer etapa $n > m$ estão contidos em $\overline{K \cap \left(\frac{1}{9} - \varepsilon, \frac{1}{9} + \varepsilon\right)}$. Por nossas contas anteriores, temos

$$\tau_{loc}\left(K, \frac{1}{9}\right) = 1.$$

Podemos observar ainda que

$$\begin{aligned} K + K &= \{x \in [0,2];\ x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_i}{9^i},\ \delta_i \in \{0,4,6,8\} + \{0,4,6,8\}\} \\ &= \{x \in [0,2];\ x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_i}{9^i},\ \delta_i \in \{0,4,6,8,10,12,14,16\}\} \\ &= \{x \in [0,2]; \frac{x}{2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_i}{9^i},\ \delta_i \in \{0,1,3,4,5,6,7,8\}\}. \end{aligned}$$

Observe que o dígito 1 não é permitido na expansão de $\frac{x}{2}$ na base 9, logo, $K + K$ forma um conjunto de Cantor regular com medida nula, logo, com interior vazio, e dimensão de Hausdorff $\lambda = \frac{\log(8)}{\log(9)} < 1$, que é o único número tal que $8 \cdot (\frac{1}{9})^{\lambda} = 1$.

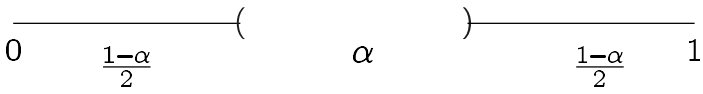
Finalmente,

$$\begin{aligned} K-K &= \{x\in[-1,1];\ x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\delta_i}{9^i},\ \delta_i\in\{0,4,6,8\}-\{0,4,6,8\}\} \\ &= \{x\in[-1,1];\ x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\delta_i}{9^i},\ \delta_i\in\{-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8\}\} \\ &= \{x\in[-1,1];\frac{x+1}{2}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\delta_i}{9^i},\ \delta_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}\}. \end{aligned}$$

Temos então $K-K=[-1,1]$, que é um intervalo.

Seja K um conjunto de Cantor regular, o conjunto $K-K$ corresponde a projeção de $K\times K$ a 45° sobre o eixo x, mais que isso, ao projetarmos o retângulo $[a,b]\times[c,d]$ a 45°, obtemos o intervalo $[a-d,b-c]$. Essa relação será explorada nos exemplos abaixo.

Nos dois próximos exemplos, K_α será o conjunto de Cantor do tipo afim com a partição de Markov abaixo.



Exemplo 4.2. Vamos estudar K_α para $\alpha\in(0,\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{2},1)$.

Iniciamos observando que, para $\lambda\neq 0$

$$\tau(\lambda K_\alpha)=\tau(K_\alpha)=\tau_E(K_\alpha)=\tau_D(K_\alpha)=\frac{1-\alpha}{2\alpha}.$$

Deste modo, se $\alpha<\frac{1}{3}$, $\tau(K_\alpha)>1$ e segue que, para todo $\lambda\in\mathbb{R}^*$, $(K_\alpha,\lambda K_\alpha)$ tem interseção estável e $K_\alpha-\lambda K_\alpha$ contém intervalo.

Além disso, a dimensão de Hausdorff de K_α é dada por

$$HD(K_\alpha)=-\frac{\log 2}{\log(\frac{1-\alpha}{2})}.$$

O que nos dá $HD(K_\alpha)<\frac{1}{2}$ quando $\alpha>\frac{1}{2}$. Temos ainda que λK_α é a imagem de K_α por uma aplicação Lipschitz, logo

$$HD(\lambda K_\alpha)\leq HD(K_\alpha).$$

Como K_α é um conjunto de Cantor regular,

$$HD(K_\alpha\times\lambda K_\alpha)=HD(K_\alpha)+HD(\lambda K_\alpha)$$

por fim, como a projeção é lipschitz, temos

$$HD(K_\alpha - \lambda K_\alpha) < 1$$

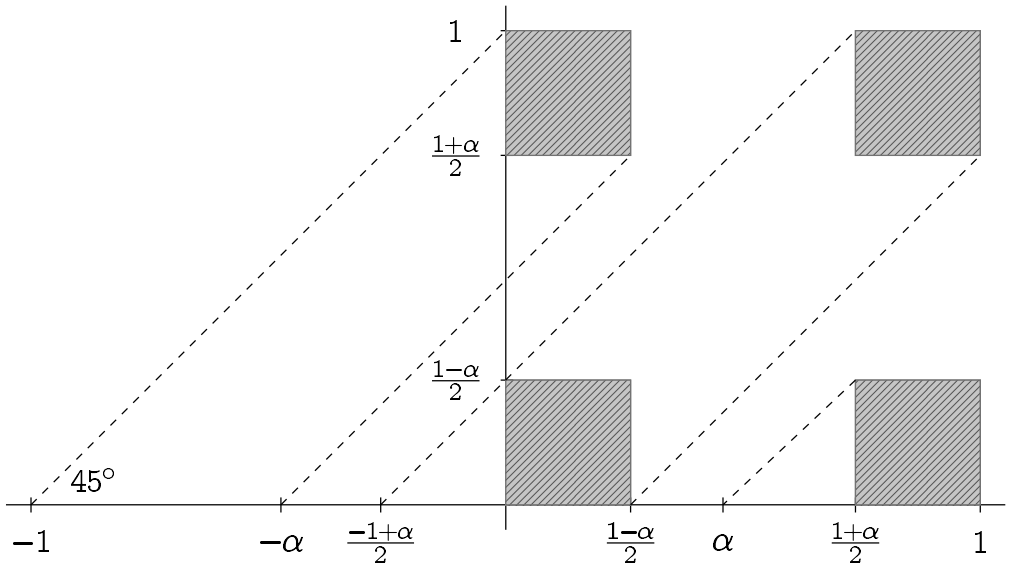
isso nos diz que $K_\alpha - \lambda K_\alpha$ tem medida nula para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemplo 4.3. Para $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, mostraremos que $K_\alpha - K_\alpha$ tem medida nula, mas existe um intervalo de valores de λ para os quais $K_\alpha - \lambda K_\alpha$ tem medida de Lebesgue positiva.

Para o primeiro resultado, estudaremos o conjunto $K = K_\alpha \times K_\alpha$. Na primeira etapa da construção teremos 4 quadrados de lados $\frac{1-\alpha}{2}$, ao projetarmos K num ângulo de 45°, a fim de calcular $K_\alpha - K_\alpha$, o quadrado superior direito se projeta sobre o quadrado do canto inferior esquerdo, de modo que podem ser vistos como o mesmo conjunto no cálculo de $K_\alpha - K_\alpha$, daí, a projeção do primeiro estágio consiste da união de intervalos

$$\left[-1, -\alpha\right] \bigcup \left[\frac{\alpha - 1}{2}, \frac{1-\alpha}{2}\right] \bigcup \left[\alpha, 1\right].$$

Se $\alpha > \frac{1}{3}$, temos $-\alpha < \frac{\alpha-1}{2}$ e $\alpha > \frac{1-\alpha}{2}$, de modo que esta união consiste de três componentes conexas.



Pela autossemelhança de K, a autodiferença de K_α é construída como um conjunto de Cantor afim do tipo

que, pela Proposição 3.4, tem medida nula.

Para o segundo resultado do exemplo, vamos considerar $\lambda \in [0,1]$. E suficiente mostrar que existem λ tais que a projeção do primeiro estágio de $K = K_\alpha \times \lambda K_\alpha$ seja sobrejetiva, isto é, cubra o intervalo $[-\lambda, 1]$ e, pela autossemelhança de K, isso também ocorreria nos demais estágios da construção, o que nos dá $K_\alpha - \lambda K_\alpha = [-\lambda, 1]$. Desenvolveremos condições sob as quais isso acontece.

Calculando a diferença da primeira etapa da construção de K_α e de λK_α, isto é,

$$\left\{\left[0, \frac{1-\alpha}{2}\right] \bigcup \left[\frac{1+\alpha}{2}, 1\right]\right\} - \left\{\left[0, \frac{\lambda(1-\alpha)}{2}\right] \bigcup \left[\frac{\lambda(1+\alpha)}{2}, \lambda\right]\right\},$$

obtemos como resultado

$$\left[-\lambda, \frac{1-\alpha}{2} - \frac{\lambda(1+\alpha)}{2}\right] \bigcup \left[\frac{1+\alpha}{2} - \lambda, 1 - \frac{\lambda(1+\alpha)}{2}\right] \bigcup \left[-\frac{\lambda(1-\alpha)}{2}, \frac{1-\alpha}{2}\right] \bigcup \left[\frac{1+\alpha}{2} - \frac{\lambda(1-\alpha)}{2}, 1\right],$$

e para que seja igual ao intervalo $[-\lambda, 1]$, precisamos que

$$\begin{cases} \frac{1-\alpha}{2} - \frac{\lambda(1+\alpha)}{2} \geq \frac{1+\alpha}{2} - \lambda \Rightarrow \frac{2\alpha}{1-\alpha} \geq \lambda \\ 1 - \frac{\lambda(1+\alpha)}{2} \geq -\frac{\lambda(1-\alpha)}{2} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \geq \lambda \\ \frac{1-\alpha}{2} \geq \frac{1+\alpha}{2} - \frac{\lambda(1-\alpha)}{2} \Rightarrow \frac{2\alpha}{1-\alpha} \geq \lambda, \end{cases}$$

ou

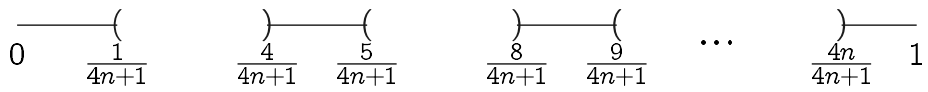
$$\begin{cases} \frac{1-\alpha}{2} - \frac{\lambda(1+\alpha)}{2} \geq -\frac{\lambda(1-\alpha)}{2} \Rightarrow \frac{1-\alpha}{2\alpha} \geq \lambda \\ \frac{1-\alpha}{2} \geq \frac{1+\alpha}{2} - \lambda \Rightarrow \alpha \leq \lambda \\ 1 - \frac{\lambda(1+\alpha)}{2} \geq \frac{1+\alpha}{2} - \frac{\lambda(1-\alpha)}{2} \Rightarrow \frac{1-\alpha}{2\alpha} \geq \lambda. \end{cases}$$

Quando $\alpha > \frac{1}{3}$, $\frac{2\alpha}{1-\alpha} > 1$, como $\lambda < 1$, a $\frac{2\alpha}{1-\alpha} \geq \lambda$ nunca pode ocorrer. Logo, o primeiro conjunto de desigualdades não pode ser satisfeito.

Agora, como $\alpha < \frac{1}{2}$, temos que $[\alpha, \frac{1-\alpha}{2\alpha}]$ é não vazio. Este intervalo corresponde a valores de λ para os quais $K_\alpha - \lambda K_\alpha = [-\lambda, 1]$, logo, contém intervalo.

Exemplo 4.4. Construiremos exemplos de conjuntos de Cantor afins cuja dimensão de Hausdorff é muito próxima de 1 e a autodiferença aritmética tem medida nula.

Consideramos K^n o conjunto de Cantor afim com a partição de Markov abaixo



denotando por E_k^n a k-ésima etapa da construção de K^n, temos

$$E_1^n \times E_1^n = \bigcup_{j=0}^{n} \left[\frac{4j}{4n+1}, \frac{4j+1}{4n+1}\right] \times \bigcup_{j=0}^{n} \left[\frac{4j}{4n+1}, \frac{4j+1}{4n+1}\right]$$

ao projetarmos a 45°, obtemos

$$\begin{aligned} E_1^n - E_1^n &= \bigcup_{r,s=0}^{n} \left[\frac{4(r-s)-1}{4n+1}, \frac{4(r-s)+1}{4n+1}\right] \\ &= \bigcup_{j=-n}^{n} \left[\frac{4j-1}{4n+1}, \frac{4j+1}{4n+1}\right]. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\frac{4j+1}{4n+1} < \frac{4(j+1)+1}{4n+1}.$$

Logo, os intervalos desta união são disjuntos. Pela similaridade das demais etapas da construção de $K^n \times K^n$, $K^n - K^n$ é um conjunto de Cantor afim cuja partição de Markov é formada pelos intervalos que compõe $E_1^n - E_1^n$ e sua dimensão de Hausdorff e dada por

$$\lambda = -\frac{\log(2n+1)}{\log 2 - \log(4n+1)} < 1$$

que é o único número tal que $(2n+1)\left(\frac{2}{4n+1}\right)^{\lambda} = 1$. Segue que $K^n - K^n$ tem medida nula.

Temos ainda que a dimensão de Hausdorff de K^n é dada por

$$\lambda = \frac{\log(n+1)}{\log(4n+1)}$$

que é o único número para o qual $(n+1)\left(\frac{1}{4n+1}\right)^{\lambda} = 1$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log(4n+1)} = 1$$

temos o requerido.

Uma conjectura proposta por Palis e provada por Moreira e Yoccoz em [11], nos diz que, genericamente, a diferença aritmética de dois conjuntos de Cantor contém um intervalo ou tem medida nula. O exemplo abaixo, apresentado por Sanammi em [1] e Bamón-Plaza-Vera em [12], mostra que, de fato, isto não é válido para todo par de conjuntos de Cantor.

Exemplo 4.5. Construiremos exemplos de conjuntos de Cantor regulares cuja autodiferença aritmética tem medida positiva.

Para esse resultado, consideraremos o exemplo de Sannami e Bamón-Plaza-Vera, dos chamados conjuntos de Cantor centrais.

Para sua construção, consideramos que seja dada uma sequência $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ...)$ de números reais tal que $\lim_{i\to\infty} \alpha_i = \frac{1}{3}$ e $\alpha_i < \frac{1}{3}$.

Iniciando com o intervalo $[0,1]$, remova um intervalo aberto central de proporção α_1, isto é, o intervalo $(\frac{1-\alpha_1}{2}, \frac{1+\alpha_1}{2})$. Isso gera dois intervalos, um à direita e outro à esquerda, que denotaremos por I_1^1 e I_2^1.

Na segunda etapa, removemos o intervalo aberto central de proporção α_2 de cada um dos intervalos restantes. Para acharmos precisamente os intervalos removidos nesta etapa, o intervalo $\mathcal{O}_1^1 = (x,y)$ removido de I_1^1, tem seus extremos são dados por

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha_1}{2} - \alpha_2\left(\frac{1-\alpha_1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1-\alpha_1}{2}\right)\left(\frac{1-\alpha_2}{2}\right)$$

e

$$y = \left(\frac{1-\alpha_1}{2}\right)\left(\frac{1-\alpha_2}{2}\right) + \alpha_2\left(\frac{1-\alpha_1}{2}\right) = \left(\frac{1-\alpha_1}{2}\right)\left(\frac{1+\alpha_2}{2}\right).$$

Por simetria, o gap $\mathcal{O}_2^1$ removido de I_2^1 é obtido ao transladarmos por $\frac{1+\alpha_1}{2}$. Após a remoção desses gaps, restam quatro intervalos de comprimento $(\frac{1-\alpha_1}{2})(\frac{1-\alpha_2}{2})$, os quais denotaremos por I_1^2, I_2^2, I_3^2 e I_4^2.

Continuamos o processo removendo do centro cada um dos 2^k intervalos da k-ésima etapa intervalos abertos de proporção α_k, e isso gera 2^k intervalos que denotaremos I_i^k, $i = 1, ..., 2^n$.

Ao continuarmos esse processo indefinidamente obtemos o conjunto de Cantor central $K_{\underline{\alpha}}$.

O conjunto $K_{\underline{\alpha}}$ assim obtido é um conjunto de Cantor regular, e sua regularidade está relacionada com a convergência da sequência α_i. O leitor interessado pode consultar a prova desse fato em [12].

Agora, observe que, como $\alpha_n < \frac{1}{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se chamarmos K_n o conjunto formado pela união dos 2^n intervalos da n-ésima etapa da construção de $K_{\underline{\alpha}}$, temos

$$K_{\underline{\alpha}} - K_{\underline{\alpha}} = \bigcap_{n\geq 1} (K_n - K_n).$$

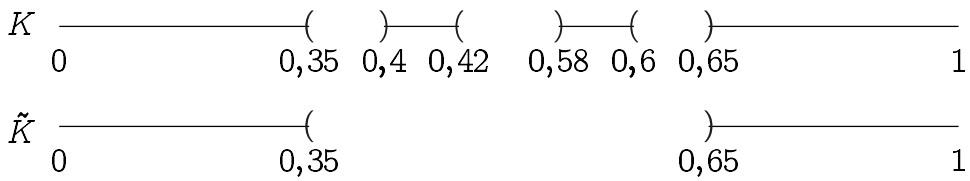
Além disso, K_n é formado pela união de 3^n intervalos e comprimento $2\prod_{i=1}^{n}\alpha_i$, donde $K_{\underline{\alpha}} - K_{\underline{\alpha}}$ tem medida de Lebesgue positiva.

5 Teste da Espessura Generalizado

No capítulo anterior, estudamos exemplos pares de conjuntos de cantor cujos produto das espessuras é maior que 1, deste modo, podemos usar o Gap Lemma para garantir que possuem interseção estável.

Esse critério é suficiente, mas existem pares de conjuntos de Cantor cujo produto da espessura é menor que 1, mas que possuem interseção estável. A seguir veremos um exemplo disso.

Exemplo 5.1. Considere os conjuntos de Cantor afins do tipo



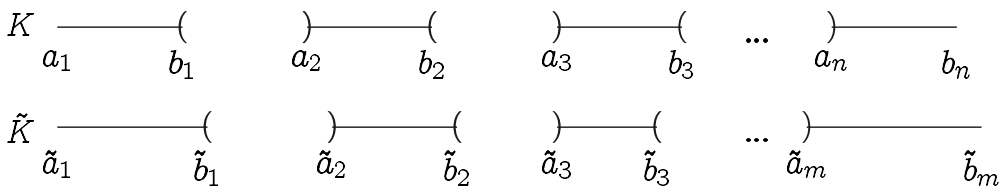
como $\tau(\tilde{K}) = \frac{7}{6} > 1$, segue do Gap Lemma que $\tilde{K}$ possui autointerseção estável. Observando que $\tilde{K} \subset K$ temos que K possui autointereseção estável. Porém, $\tau(K) = \frac{2}{5} < 1$, de modo que o Gap Lemma não poderia ser utilizado para garantir tal interseção.

Esse exemplo mostra que existem conjuntos de Cantor com interseção estável cujo produto da espessura é menor que 1, e além disso, mostra que podemos ter $\tilde{K} \subset K$ com $\tau(\tilde{K}) > \tau(K)$.

Neste capítulo, desenvolveremos critérios apresentados em [5], que são mais gerais e podem ser utilizados para garantir a existência de interseções estáveis e extremais estáveis. Iniciaremos abordando os conjuntos de Cantor afins, neste caso será possível testar critérios para interseção estável por meio de um algoritmo finito. Em seguida estudaremos conjuntos de Cantor regulares mais gerais.

5.1 Teste da Espessura Generalizado Para Conjuntos de Cantor do Tipo Afim e Afim Generalizado

Nesta seção, consideraremos conjuntos de Cantor do tipo afim com as partições de Markov abaixo



cujos domínios de Markov são, respectivamente, $\mathcal{D} = \bigcup_{j=1}^{n} [a_j, b_j]$ e $\tilde{\mathcal{D}} = \bigcup_{j=1}^{m} [\tilde{a}_j, \tilde{b}_j]$.

Definição 5.1 (Teste da Espessura Generalizado Para Conjuntos de Cantor do Tipo Afim). *Dados dois conjuntos de Cantor afins como acima, com domínios de Markov $\mathcal{D}$ e $\tilde{\mathcal{D}}$. Dizemos que $(K, \tilde{K})$ satisfaz o Teste da Espessura Generalizado (GTT), se para cada $t \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}^*_+$ quaisquer, ou $\lambda\mathcal{D} + t$ está contido num gap de $\tilde{\mathcal{D}}$ ou $\tilde{\mathcal{D}}$ está contido num gap de $\lambda\mathcal{D} + t$ ou $(\lambda\mathcal{D} + t) \cap \tilde{\mathcal{D}} \neq \emptyset$.*

Basicamente, esta definição trata de conjuntos de Cantor do tipo afim para os quais qualquer dilatação ou translação nos dá uma conclusão similar ao Gap Lemma, mas desta vez para o domínio de Markov destes conjuntos. Observe ainda que não falamos sobre as espessuras destes conjuntos de Cantor.

Sejam $\mathcal{R}^i$ a partição de Markov da i-ésima etapa de K e $\mathcal{D}^i$ o domínio de Markov associado a essa etapa e sejam $\tilde{\mathcal{R}}^j$ a partição de Markov da j-ésima etapa de $\tilde{K}$ e $\tilde{\mathcal{D}}^j$ o domínio de Markov associado a essa etapa, vale a seguinte proposição.

Proposição 5.1. *Sejam K e $\tilde{K}$ conjuntos de Cantor do tipo afim, se $(K, \tilde{K})$ satisfaz o GTT com respeito aos domínios de Markov $\mathcal{D}$ $\tilde{\mathcal{D}}$, então também satisfaz com respeito aos domínios $\mathcal{D}^i$ e $\tilde{\mathcal{D}}^j$, para quaisquer $i, j \geq 1$.*

Demonstração. Iniciamos supondo que algum λ e t, temos $\lambda\mathcal{D} + t$ contido num gap de $\tilde{\mathcal{D}}$, então $\lambda\mathcal{D}^i + t \subset \lambda\mathcal{D} + t$ também estará contido num gap de $\tilde{\mathcal{D}}$, logo, num gap de $\tilde{\mathcal{D}}^j$.

Agora, suponhamos que $\lambda\mathcal{D} + t$ e $\tilde{\mathcal{D}}$ se intersectam, digamos, $\lambda I + t \cap J \neq \emptyset$ para $I \in \mathcal{R}$ e $J \in \tilde{\mathcal{R}}$, então

$$((\lambda I + t) \cap \mathcal{D}^i) \cap (J \cap \tilde{\mathcal{D}}^j) \neq \emptyset$$

ou $(\lambda I + t) \cap J$ está contida em algum gap duma etapa $k < i$ de $\lambda K + t$, logo, num gap de $\lambda\mathcal{D}^i + t$ ou $\lambda I + t \cap J$ está contida em algum gap duma etapa anterior $\tilde{k} < j$ de $\tilde{K}$, logo, de $\tilde{\mathcal{D}}^j$. Isso encerra nossa demonstração.

□

Isso nos diz que o GTT não depende da partição de Markov escolhida, assim, considerar quaisquer uma delas não representa restrição nos resultados obtidos.

Para continuar nosso estudo, buscaremos entender o conjunto dos t's que satisfazem essa definição. A próxima proposição é nosso primeiro resultado neste sentido.

Proposição 5.2. *Dados dois conjuntos de Cantor do tipo afim K e $\tilde{K}$, com domínios de Markov $\mathcal{D}$ e $\tilde{\mathcal{D}}$, respectivamente. O par $(K,\tilde{K})$ ou $(\mathcal{D},\tilde{\mathcal{D}})$ satisfaz o GTT se, e somente se, $\tilde{\mathcal{D}}-\lambda\mathcal{D}$ contém o conjunto dos t tais que $\tilde{\mathcal{D}}$ não está contido num gap de $\lambda\mathcal{D}+t$ ou $\lambda\mathcal{D}+t$ não está contido num gap de $\tilde{\mathcal{D}}$ para qualquer $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$.*

Demonstração. Iniciaremos supondo que $(K,\tilde{K})$ satisfazem o GTT. Então, fixados t e λ, suponhamos que $\lambda\mathcal{D}+t$ não esteja contido num gap de $\tilde{\mathcal{D}}$ e $\tilde{\mathcal{D}}$ não está contido num gap de $\lambda\mathcal{D}+t$, então $(\lambda\mathcal{D}+t)\cap\tilde{\mathcal{D}}\neq\emptyset$.

Segue que existe $y\in(\lambda\mathcal{D}+t)\cap\tilde{\mathcal{D}}$, daí, existem $x\in\lambda\mathcal{D}+t$ e $\tilde{x}\in\tilde{\mathcal{D}}$ tais que

$$y=\lambda x+t=\tilde{x}\Rightarrow t=\tilde{x}-\lambda x\Rightarrow t\in\tilde{\mathcal{D}}-\lambda\mathcal{D}$$

Reciprocamente, suponha que se $\tilde{\mathcal{D}}$ não está contido num gap de $\lambda\mathcal{D}+t$ e $\lambda\mathcal{D}+t$ não está contido num gap de $\tilde{\mathcal{D}}$, então $t\in\tilde{\mathcal{D}}-\lambda\mathcal{D}$, daí existem $\tilde{x}\in\tilde{\mathcal{D}}$ e $x\in\mathcal{D}$ tais que

$$t=\tilde{x}-\lambda x\Rightarrow\lambda x+t=\tilde{x}\Rightarrow(\lambda\mathcal{D}+t)\cap\tilde{\mathcal{D}}\neq\emptyset$$

e a proposição está provada. □

Com esse resultado, podemos buscar uma interpretação geométrica para tais valores de t. Para cada λ,t fixados, obtemos uma reta $\lambda x+t$ quando x varia em D. A Definição 5.1 nos diz que tais retas devem estar contidas num retângulo do tipo $(b_i,a_{i+1})\times[\tilde{a}_1,\tilde{b}_m]$ ou $[a_1,b_n]\times(\tilde{b}_i,\tilde{a}_{i+1})$ ou intersecta $\mathcal{D}\times\tilde{\mathcal{D}}$ (duas dessas condições não podem ser satisfeitas simultaneamente). Observamos ainda que como $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$, tais retas formam o conjunto das retas que cortam o eixo horizontal num ângulo de 0 a $\frac{\pi}{2}$ e satisfazem as condições citadas.

Algebricamente, o conjunto dos t para os quais $\lambda\mathcal{D}+t$ está contido em algum gap da forma $(\tilde{b}_i,a_{i+1})$ de $\tilde{\mathcal{D}}$ é

$$\bigcup_{i=1}^{m-1}\{t\in\mathbb{R};[\lambda a_1+t,\lambda b_n+t]\subset(\tilde{b}_i,\tilde{a}_{i+1})\}=\bigcup_{i=1}^{m-1}(\tilde{b}_i-\lambda a_1,\tilde{a}_{i+1}-\lambda b_n)\qquad(5.1)$$

e o conjunto dos t para os quais $\tilde{\mathcal{D}}$ está contido em algum gap de $(\lambda b_i + t, \lambda a_{i+1} + t)$ de $\lambda\mathcal{D} + t$ e dado por

$$\bigcup_{i=1}^{n-1} \{t \in \mathbb{R}; [\tilde{a}_1, \tilde{b}_m] \subset (\lambda b_i + t, \lambda a_{i+1} + t)\} = \bigcup_{i=1}^{n-1} (\tilde{b}_m - \lambda a_{i+1}, \tilde{a}_1 - \lambda b_i) \tag{5.2}$$

Como a diferença aritmética $\tilde{\mathcal{D}} - \lambda\mathcal{D}$ é igual a

$$\bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} [\tilde{a}_i - \lambda b_j, \tilde{b}_i - \lambda a_j]$$

temos pela Proposição 5.2 que $(K, \tilde{K})$ satisfaz o GTT se, e somente se, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ e cada $t \in \mathbb{R}$ temos que $\tilde{\mathcal{D}} - \lambda\mathcal{D}$ não contém os t satisfazendo as equações (5.1) e (5.2), isto é,

$$\bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} [\tilde{a}_i - \lambda b_j, \tilde{b}_i - \lambda a_j] \subset [\tilde{a}_1 - \lambda b_n, \tilde{b}_m - \lambda a_1] \backslash A \cup B \tag{5.3}$$

onde $A = \bigcup_{i=1}^{m-1} (\tilde{b}_i - \lambda a_1, \tilde{a}_{i+1} - \lambda b_n)$ e $B = \bigcup_{i=1}^{n-1} (\tilde{b}_m - \lambda a_{i+1}, \tilde{a}_1 - \lambda b_i)$.

A condição dada em (5.3) é dada por um número finito de intervalos, existem finitas possibilidades para as posições relativas de seus extremos. Como os extremos são da forma $x - \lambda y$, para cada possibilidade de posição existe um intervalo de valores de λ que a mantém, e tais valores são determinados por desigualdades do tipo $x_1 - \lambda y_1 < x_2 - \lambda y_2$ ou $x_1 - \lambda y_1 \leq x_2 - \lambda y_2$. Esses intervalos de valores de λ deverão ter seus extremos dados em função de $a_i, b_i, \tilde{a}_j$ e $\tilde{b}_j$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$.

Neste ponto de vista, um conjunto de Cantor regular satisfaz o GTT se e somente se, as posições relativas de intervalos tais que (5.3) não vale correspondem a intervalos de valores de λ vazios. E podem ser obtidos por um número finito de desigualdades envolvendo $a_i, b_i, \tilde{a}_j, \tilde{b}_j$.

Se as desigualdades acima são estritas, dizemos que $(K, \tilde{K})$ satisfaz o teste da espessura generalizado estritamente. As condições do GTT são fechadas, enquanto as do teste da espessura generalizado estrito são abertas.

Observe que se $(K, \tilde{K})$ satisfaz o teste da espessura generalizado, então $(\lambda K + t, \tilde{K})$ também satisfaz o teste da espessura generalizado para quaisquer $t \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

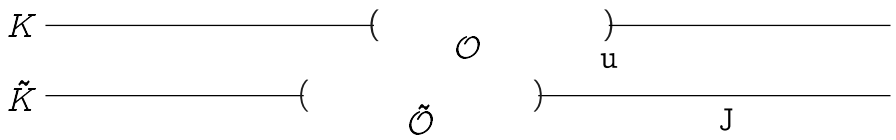
Proposição 5.3. *Sejam $(K, \tilde{K})$ conjuntos de Cantor regulares satisfazendo o GTT, e sejam I um intervalo da i-ésima etapa da construção de K e J um intervalo da j-ésima etapa da construção de $\tilde{K}$, então $(K \cap I, \tilde{K} \cap J)$ satisfaz o GTT.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{D}^i$ o domínio de Markov da i-ésima etapa da construção de K e $\tilde{\mathcal{D}}^j$ o domínio de Markov da j-ésima etapa da construção de $\tilde{K}$, então $I \cap \mathcal{D}^i$ e $J \cap \tilde{\mathcal{D}}^j$ formam um domínio de Markov para $I \cap K$ e $J \cap \tilde{K}$, respectivamente. Pela proposição 5.1, $\mathcal{D}^i$ e $\tilde{\mathcal{D}}^j$ satisfazem o GTT, segue que $I \cap \mathcal{D}^i$ e $J \cap \tilde{\mathcal{D}}^j$ também satisfazem. □

Este resultado nos ajudará a provar a próxima proposição.

Proposição 5.4. *Se $(K, \tilde{K})$ satisfaz o GTT, então ou K está contido num gap de $\tilde{K}$, ou $\tilde{K}$ está contido num gap de K ou $K \cap \tilde{K} \neq \emptyset$.*

Demonstração. Suponhamos que um não esteja contido num gap do outro. Então existe um par de gaps $\mathcal{O}$ da i-ésima etapa de K e $\tilde{\mathcal{O}}$ da j-ésima etapa de $\tilde{K}$ se intercalando, como na figura abaixo



considerando, sem perda de generalidade o extremo u, que pertence a K, se $u \in \tilde{K}$ a interseção é não vazia.

Caso contrário, $(K, \tilde{K} \cap J)$ satisfaz o GTT. Como $\tilde{K} \cap J$ não está contido num gap da partição de Markov $\mathcal{R}^i$ de K nesta etapa, existe um gap de $\tilde{K} \cap J$, digamos, $\tilde{\mathcal{O}}_1$, que contém u, se intercalando com $\mathcal{O}$ e podemos repetir o argumento para $(\mathcal{O}, \tilde{\mathcal{O}}_1)$, como os comprimentos dos intervalos da partição e Markov tende a 0, os comprimentos dos gaps envolvidos não devem diminuir em algum momento, e argumentando como feito no Gap Lemma, obtemos um ponto na interseção de K e $\tilde{K}$.

□

Se $(K, \tilde{K})$ satisfazem o teste da espessura generalizado estritamente e existe um par de gaps se intercalando, $(K, \tilde{K})$ tem interseção estável, e se o extremo direito de K coincide com o extremo esquerdo de $\tilde{K}$, $(K, \tilde{K})$ tem interseção extremal estável.

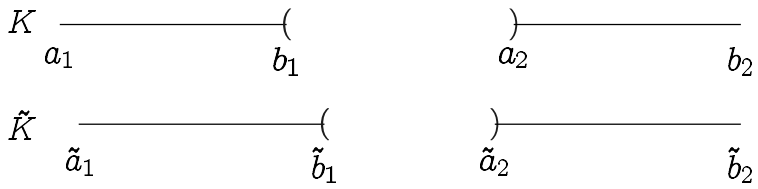
Definição 5.2 (Teste da Espessura Generalizado Para Conjuntos de Cantor Afins Generalizados sem Mapas Decrescentes). *Sejam K e $\tilde{K}$ conjuntos de Cantor afins generalizados com partições de Markov $\mathcal{R} = \{I_1, ..., I_n\}$ e $\tilde{\mathcal{R}} = \{J_1, ..., J_m\}$, mapas expansores Ψ e $\tilde{\Psi}$ que não são decrescente em qualquer*

intervalo da partição de Markov e domínios de Markov $\mathcal{D}$ e $\tilde{\mathcal{D}}$, respectivamente. $(K,\tilde{K})$ satisfazem o Teste da Espessura Generalizado (GTT) se cada par $(\Psi(I_i)\cap\mathcal{D},\tilde{\Psi}(J_j)\cap\tilde{\mathcal{D}})$ satisfaz o GTT para conjuntos de Cantor do tipo afim.

Abaixo veremos um exemplo que ilustra como podemos aplicar o GTT em dois conjuntos de Cantor do tipo afim com dois intervalos em suas partições de Markov.

Apesar de simples, esse exemplo é bem geral, e nos mostra como o GTT pode ser utilizado para caracterizar interseções estáveis. Neste exemplo, satisfazer o Teste da Espessura Generalizado é equivalente ao produto das espessuras direita e esquerda dos conjuntos de Cantor ser maior que 1, que é uma condição similar a que temos no Gap Lemma. No entanto, enquanto o Gap Lemma nos dá uma condição suficiente para que a interseção entre dois conjuntos de Cantor seja não vazia o GTT nos dá uma equivalência, desde que um não esteja contido num gap do outro.

Exemplo 5.2. Considere os conjuntos de Cantor afins do tipo



Definindo os intervalos

$$\begin{aligned} I_1 &:= [\tilde{a}_1,\tilde{b}_1]-[\lambda a_2,\lambda b_2] = [\tilde{a}_1-\lambda b_2,\tilde{b}_1-\lambda a_2] \\ I_2 &:= [\tilde{a}_1,\tilde{b}_1]-[\lambda a_1,\lambda b_1] = [\tilde{a}_1-\lambda b_1,\tilde{b}_1-\lambda a_1] \\ I_3 &:= [\tilde{a}_2,\tilde{b}_2]-[\lambda a_2,\lambda b_2] = [\tilde{a}_2-\lambda b_2,\tilde{b}_2-\lambda a_2] \\ I_4 &:= [\tilde{a}_2,\tilde{b}_2]-[\lambda a_1,\lambda b_1] = [\tilde{a}_2-\lambda b_1,\tilde{b}_2-\lambda a_1] \end{aligned}$$

observando que

$$(\tilde{b}_1-\lambda a_1,\tilde{a}_2-\lambda b_2)\cup(\tilde{b}_2-\lambda a_2,\tilde{a}_1-\lambda b_1) = \mathrm{Conv}(I_2\cup I_3)\backslash(I_2\cup I_3)$$

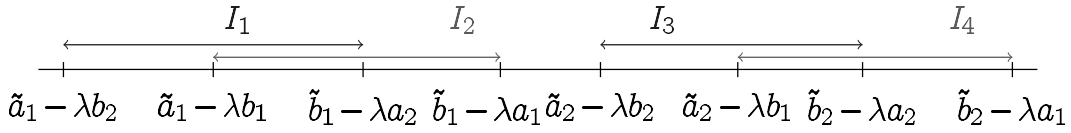
onde $\mathrm{Conv}(I_2\cup I_3)$ denota o fecho convexo de $I_2\cup I_3$. Temos, pela equação 5.3 que $(K,\tilde{K})$ satisfazem o GTT se, e somente se,

$$I_1\cup I_2\cup I_3\cup I_4 \supset [\tilde{a}_1-\lambda b_2,\tilde{b}_2-\lambda a_1]\backslash(\mathrm{Conv}(I_2\cup I_3)\backslash(I_2\cup I_3)).$$

isso ocorre se, e somente se

$$I_1 \cap (I_2 \cup I_3) \neq \emptyset \text{ e } I_4 \cap (I_2 \cup I_3) \neq \emptyset.$$

o desenho abaixo ilustra uma disposição particular da situação descrita, que poderá ajudar o leitor na compreensão dos argumentos



Buscaremos agora condições para que tais interseções sejam não vazias.

$$\begin{aligned}
I_1 \cap I_2 \neq \emptyset &\Leftrightarrow \tilde{b}_1 - \tilde{a}_1 \geq \lambda(a_2 - b_1) \\
I_1 \cap I_3 \neq \emptyset &\Leftrightarrow \tilde{a}_2 - \tilde{b}_1 \leq \lambda(b_2 - a_2) \\
I_4 \cap I_2 \neq \emptyset &\Leftrightarrow \tilde{a}_2 - \tilde{b}_1 \leq \lambda(b_1 - a_1) \\
I_4 \cap I_3 \neq \emptyset &\Leftrightarrow \tilde{b}_2 - \tilde{a}_2 \geq \lambda(a_2 - b_1)
\end{aligned}$$

Noutras palavras,

$$\begin{aligned}
I_1 \cap (I_2 \cup I_3) \neq \emptyset &\Leftrightarrow \frac{\tilde{b}_1 - \tilde{a}_1}{a_2 - b_1} \geq \lambda \geq \frac{\tilde{a}_2 - \tilde{b}_1}{b_2 - a_2} \\
I_4 \cap (I_2 \cup I_3) \neq \emptyset &\Leftrightarrow \frac{\tilde{b}_2 - \tilde{a}_2}{a_2 - b_1} \geq \lambda \geq \frac{\tilde{a}_2 - \tilde{b}_1}{b_1 - a_1}.
\end{aligned}$$

Assim, o GTT vai ser satisfeito se, e somente se,

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{a}_2 - \tilde{b}_1}{b_2 - a_2} \leq \frac{\tilde{b}_1 - \tilde{a}_1}{a_2 - b_1} &\Leftrightarrow \frac{\tilde{b}_1 - \tilde{a}_1}{\tilde{a}_2 - \tilde{b}_1} \cdot \frac{b_2 - a_2}{a_2 - b_1} \geq 1 \Leftrightarrow \tau_E(\tilde{K}) \cdot \tau_D(K) \geq 1 \\
\frac{\tilde{a}_2 - \tilde{b}_1}{b_1 - a_1} \leq \frac{\tilde{b}_2 - \tilde{a}_2}{a_2 - b_1} &\Leftrightarrow \frac{\tilde{b}_2 - \tilde{a}_2}{\tilde{a}_2 - \tilde{b}_1} \cdot \frac{b_1 - a_1}{a_2 - b_1} \geq 1 \Leftrightarrow \tau_D(\tilde{K}) \cdot \tau_E(K) \geq 1.
\end{aligned}$$

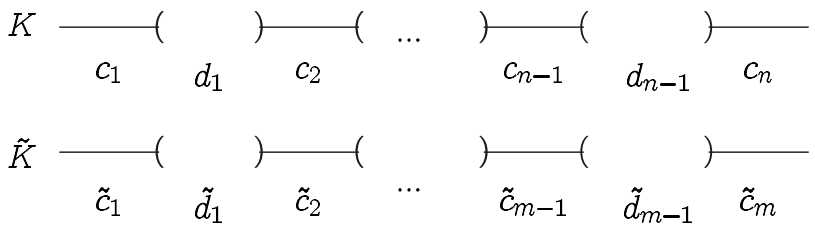
Podemos concluir ainda que $(K, \tilde{K})$ satisfaz o GTT estritamente se, e somente se, $\tau_E(\tilde{K}) \cdot \tau_D(K) > 1$ e $\tau_D(\tilde{K}) \cdot \tau_E(K) > 1$.

Generalizando o exemplo acima, podemos desenvolver um algoritmo finito para decidir se dois conjuntos de Cantor do tipo afim ou afim generalizado sem mapas decrescentes satisfazem o GTT.

Lembre que, um par de conjuntos de Cantor do tipo afim $(K, \tilde{K})$ satisfaz o GTT se, e somente se, $(\lambda K, \tilde{\lambda}\tilde{K})$ satisfaz, para todos $\lambda, \tilde{\lambda} \in \mathbb{R}_+^*$.

Deste modo, não há perda de generalidade em supor que o fecho convexo da partição de Markov de K e $\tilde{K}$ são ambos o intervalo $[0,1]$.

Assim, K e $\tilde{K}$ são conjuntos de Cantor afins do tipo



com $c_1+d_1+...+c_{n-1}+d_{n-1}+c_n=1$ e $\tilde{c}_1+\tilde{d}_1+...+\tilde{c}_{m-1}+\tilde{d}_{m-1}+\tilde{c}_m=1$. Então definindo

$$\begin{aligned}\underline{c} &:= (c_1,c_2,...,c_n)\\ \underline{d} &:= (d_1,d_2,...,d_{n-1})\\ \underline{\tilde{c}} &:= (\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,...,\tilde{c}_m)\\ \underline{\tilde{d}} &:= (\tilde{d}_1,\tilde{d}_2,...,\tilde{d}_{m-1})\end{aligned}$$

chamaremos este processo de normalização dos conjuntos de Cantor K e $\tilde{K}$.

Concluímos então que testar o GTT no par $(K,\tilde{K})$ consiste em verificar um número finito de desigualdades do tipo $f_i(\underline{c},\underline{d},\underline{\tilde{c}},\underline{\tilde{d}})\geq 0$. Pode-se verificar que, novamente, $(K,\tilde{K})$ satisfaz o GTT se, e somente se, $(K\cap I,\tilde{K}\cap J)$ satisfaz o GTT, para quaisquer intervalos I e J na construção de K e $\tilde{K}$, respectivamente.

5.2 Teste da Espessura Generalizado Para Conjuntos de Cantor Regulares

Agora, trataremos do caso em que os conjuntos de Cantor não são necessariamente do tipo afim ou afim generalizado sem mapas decrescentes. Começaremos tratando de conjuntos de Cantor regulares que não possuem mapas decrescentes em qualquer intervalo de sua partição de Markov.

Sejam $(K,\tilde{K})$ conjuntos de Cantor regulares, pelos comentários feitos no final da seção anterior, podemos, sem perda de generalidade, supor que tais conjuntos de Cantor estão renormalizados e escolhermos intervalos I numa etapa i da construção de K e J numa etapa j da construção $\tilde{K}$, respectivamente. De modo similar ao feito para conjuntos de Cantor do tipo afim, aplicamos o GTT em $(\Psi^i(\mathcal{D})\cap I,\tilde{\Psi}^j(\tilde{\mathcal{D}})\cap J)$.

Neste caso, o GTT será dado por desigualdades do tipo

$$f_i(\underline{c}(\Psi^i(\mathcal{D})\cap I),\underline{d}(\Psi^i(\mathcal{D})\cap I),\underline{c}(\tilde{\Psi}^j(\tilde{\mathcal{D}})\cap J),\underline{d}(\tilde{\Psi}^j(\tilde{\mathcal{D}})\cap J))\geq 0$$

e não depende dos intervalos I e J quando os conjuntos de Cantor envolvidos são afins.

No caso geral, dizemos que $(K, \tilde{K})$ satisfaz o GTT se, e somente se

$$A_i(K, \tilde{K}) := \inf_{I,J} f_i(\underline{c}(\Psi^i(\mathcal{D}) \cap I), \underline{d}(\Psi^i(\mathcal{D}) \cap I), \underline{c}(\tilde{\Psi}^j(\tilde{\mathcal{D}}) \cap J), \underline{d}(\tilde{\Psi}^j(\tilde{\mathcal{D}}) \cap J)) \geq 0.$$

$(K, \tilde{K})$ satisfaz o GTT estritamente se $A_i(K, \tilde{K}) > 0$ para cada i e, neste caso, também temos interseção estável.

Se qualquer das funções que definem K ou $\tilde{K}$ são decrescente, o teste deve ser feito para $\lambda \in \mathbb{R}^*$, e não apenas para λ positivo.

6 Geometrias Limite de Conjuntos de Cantor Regulares

6.1 Definição das Geometrias Limites

Iniciaremos esta capítulo com um exemplo que motivará as definições seguintes.

Exemplo 6.1. Seja K_f o conjunto de Cantor regular com partição de Markov

$$\mathcal{R} = \left\{ \left[0, \frac{1}{5}\right], \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right], \left[\frac{4}{5}, 1\right] \right\}$$

e mapa expansor

$$f(x) = \begin{cases} 5x, & x \in [0, \frac{1}{5}] \\ 3x - \frac{6}{5}, & x \in [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}] \\ -3x + \frac{17}{5}, & x \in [\frac{4}{5}, 1] \end{cases}$$

Chamando $I_0 = [0, \frac{1}{5}]$, $I_2 = [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]$, $I_4 = [\frac{4}{5}, 1]$ e $I = I_0 \cup I_2 \cup I_4$, temos

$$\begin{aligned} f(I_0) &= \text{Conv}(I) \\ f(I_2) &= \text{Conv}(I_0 \cup I_2) \Rightarrow f^2(I_2) = \text{Conv}(I) \\ f(I_4) &= \text{Conv}(I_2 \cup I_4) \Rightarrow f^2(I_4) = \text{Conv}(I) \end{aligned}$$

de modo que f determina o conjunto de Cantor regular K_f. Podemos associar a K_f o alfabeto $\mathbb{A} = \{0, 2, 4\}$ e o conjunto de transições permitidas

$$\mathcal{B} = \{(0,0), (0,2), (0,4), (2,0), (2,2), (4,2), (4,4)\}.$$

Definindo os intervalos

$$\begin{aligned} I(0) &:= I_0,\ I(2) := I_2,\ I(4) := I_4 \\ I(0,0) &:= I_{0,0},\ I(0,2) := I_{0,2},\ I(0,4) := I_{0,4}, \\ I(2,0) &:= I_{2,0},\ I(2,2) := I_{2,2}, \\ I(4,2) &:= I_{4,2},\ I(4,4) := I_{4,4} \end{aligned}$$

e uma função $g(x)$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} 5x, x \in I(0,0) \cup I(0,2) \cup I(0,4) \\ 3x - \frac{6}{5}, x \in I(2,0) \cup I(2,2) \\ -3x + \frac{17}{5}, x \in I(4,2) \cup I(4,4) \end{cases}$$

temos

$$\begin{aligned} g(I(0,0)) &= g(I(2,0)) = I(0) \\ g(I(0,2)) &= g(I(2,2)) = g(I(4,2)) = I(2) \\ g(I(0,4)) &= g(I(4,4)) = I(4). \end{aligned}$$

Observe que, g define o conjunto de Cantor

$$K_g = \bigcap_{n=0}^{\infty} g^{-n}\left(\bigcup_{\mathcal{B}} I(a,b)\right)$$

que coincide com K_f, uma vez que apenas iniciamos sua construção a partir da segunda etapa.

O mapa g construído acima é dito um mapa expansor do tipo $\Sigma_{\mathcal{B}}$. Essa definição será formalizada a seguir.

Seja $\mathbb{A}$ um alfabeto finito, $\mathcal{B}$ um subconjunto de $\mathbb{A}^2$ determinando as sequências de dois símbolos permitidas que formam o subshift do tipo finito $\Sigma_{\mathcal{B}} \subset \mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$, o qual assumiremos topologicamente misturador. Assumiremos ainda que toda letra de $\mathbb{A}$ ocorre em $\Sigma_{\mathcal{B}}$.

Definição 6.1. *Com a notação acima, dizemos que g é um mapa expansor do tipo $\Sigma_{\mathcal{B}}$ se:*

i) O domínio de g é a união disjunta $\bigcup_{\mathcal{B}} I(a,b)$, onde, para cada (a,b), $I(a,b)$ é um subintervalo compacto de $I(a)$, onde $I(a) = [0,1] \times \{a\}$;

ii) Para cada $(a,b) \in \mathcal{B}$, temos que $g|_{I(a,b)}$ é um difeomorfismo suave para $I(b)$ satisfazendo $|g'(t)| > 1$ para todo t.

A definição acima generaliza a noção de conjunto de Cantor regular.

Definição 6.2. *O conjunto de Cantor regular associado a um mapa g do tipo $\Sigma_{\mathcal{B}}$ é o maximal invariante*

$$K = \bigcap_{n \geq 0} g^{-n}\left(\bigcup_{\mathcal{B}} I(a,b)\right).$$

Observe que nossa definição anterior de conjunto de Cantor regular está contemplada nesta nova definição. De fato, dado um conjunto de Cantor K com partição de Markov $\mathcal{R} = \{I_1, ..., I_r\}$ e mapa expansor Ψ, basta considerarmos os intervalos $I(a) = I_a$, $I(a,b) = I_{a,b}$, onde (a,b) é uma transição permitida e considerando $g = f|_{\bigcup\limits_{\mathcal{B}} I(a,b)}$. Os conjuntos de Cantor obtidos são os mesmos, uma vez que apenas iniciamos a construção do conjunto de Cantor a partir da segunda etapa.

Seja $r \in (1, +\infty]$, o subespaço dos mapas C^r-expansores do tipo $\Sigma_{\mathcal{B}}$ munido com a topologia C^r é denotado por $\Omega^r_{\Sigma_{\mathcal{B}}}$. A união $\Omega_{\Sigma_{\mathcal{B}}} = \bigcup\limits_{r>1} \Omega^r_{\Sigma_{\mathcal{B}}}$ é munida da topologia do limite indutivo.

Definimos agora o shift dual

$$\Sigma^-_{\mathcal{B}} := \{(\theta_n)_{n\leq 0}; (\theta_i, \theta_{i+1}) \in \mathcal{B} \text{ para } i < 0\}$$

para $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, ...) \neq \underline{\tilde{\theta}} = (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, ...)$ em $\Sigma^-_{\mathcal{B}}$, e definimos

$$\underline{\theta} \wedge \underline{\tilde{\theta}} := (\theta_{-n}, \theta_{-n+1}, ..., \theta_0)$$

se $\theta_{-j} = \tilde{\theta}_{-j}$ para $j = 0, ..., n$ e $\theta_{-n-1} \neq \tilde{\theta}_{-n-1}$.

Dados $\underline{\theta}, \underline{\tilde{\theta}} \in \Sigma^-_{\mathcal{B}}$, fazemos

$$d(\underline{\theta}, \underline{\tilde{\theta}}) = \begin{cases} 1, & \theta_0 \neq \tilde{\theta_0} \\ |I(\underline{\theta} \wedge \underline{\tilde{\theta}})|, & \theta_0 = \tilde{\theta}_0 \end{cases}.$$

Isso define uma distância ultramétrica em $\Sigma^-_{\mathcal{B}}$, ou seja, uma distância tal que $d(\underline{\theta}, \underline{\tilde{\theta}}) \leq \max\{d(\underline{\theta}, \underline{\gamma}) + d(\underline{\gamma}, \underline{\tilde{\theta}})\}$ para todo $\underline{\theta}, \underline{\tilde{\theta}}, \underline{\gamma} \in \Sigma^-_{\mathcal{B}}$. De fato,

- $d(\underline{\theta}, \underline{\theta}) = 0$
  Temos $\underline{\theta} \wedge \underline{\theta} = (..., \theta_{-2}, \theta_{-1}, \theta_0)$, daí,

  $$d(\underline{\theta}, \underline{\theta}) = |I(\underline{\theta} \wedge \underline{\theta})| = |I(\underline{\theta})| = 0$$

  observe que $I(\underline{\theta}) = I(..., \theta_{-n}, ..., \theta_{-1}, \theta_0)$ é um intervalo degenerado.

- $d(\underline{\theta}, \underline{\tilde{\theta}}) = d(\underline{\tilde{\theta}}, \underline{\theta})$
  Se $d(\underline{\theta}, \underline{\tilde{\theta}}) = 1$ isso é imediado. Caso contrário,

  $$d(\underline{\theta}, \underline{\tilde{\theta}}) = |I(\underline{\theta} \wedge \underline{\tilde{\theta}})| = |I(\underline{\tilde{\theta}} \wedge \underline{\theta})| = d(\underline{\tilde{\theta}}, \underline{\theta}).$$

- Se $\underline{\gamma} = (..., \gamma_{-2}, \gamma_{-1}, \gamma_0) \in \Sigma^-_{\mathcal{B}}$, então $d(\underline{\theta}, \underline{\tilde{\theta}}) \leq d(\underline{\theta}, \underline{\gamma_0}) + d(\underline{\gamma}, \underline{\tilde{\theta}})$
  Dividiremos em três casos:

i) $\theta_0 \neq \gamma_0 \neq \tilde{\theta}_0$:

$$d(\underline{\theta},\underline{\gamma}) + d(\underline{\gamma},\underline{\tilde{\theta}}) = 1+1 > 1 = d(\underline{\theta},\underline{\tilde{\theta}});$$

ii) $\theta_0 \neq \gamma_0 = \tilde{\theta}_0$:

$$d(\underline{\theta},\underline{\gamma}) + d(\underline{\gamma},\underline{\tilde{\theta}}) = 1 + |I_{\underline{\gamma}\wedge\underline{\tilde{\theta}}}| \geq 1 = d(\underline{\theta},\underline{\tilde{\theta}});$$

iii) $\theta_0 = \gamma_0 = \tilde{\theta}_0$:
digamos que $\underline{\theta}$ e $\underline{\tilde{\theta}}$ diferem numa posição n_1, $\underline{\theta}$ e $\underline{\gamma}$ numa posição n_2 e $\underline{\gamma}$ e $\underline{\tilde{\theta}}$ numa posição n_3. Suponhamos, sem perda de generalidade (os demais casos são análogos), $n_1 \leq n_2 \leq n_3$, temos então, $I(\underline{\theta},\underline{\tilde{\theta}}) \subset I(\underline{\theta},\underline{\gamma})$, $I(\underline{\theta},\underline{\tilde{\theta}}) \subset I(\underline{\gamma},\underline{\tilde{\theta}})$ e $I(\underline{\theta},\underline{\gamma}) \subset I(\underline{\gamma},\underline{\tilde{\theta}})$ que nos dá

$$d(\underline{\theta},\underline{\gamma}) + d(\underline{\gamma},\underline{\tilde{\theta}}) = |I(\underline{\theta},\underline{\gamma})| + |I(\underline{\gamma},\underline{\tilde{\theta}})| \leq |I(\underline{\theta},\underline{\tilde{\theta}})|.$$

Mais que isso, em virtude das continências, temos

$$|I(\underline{\theta},\underline{\tilde{\theta}})| \leq \max\{|I(\underline{\theta},\underline{\gamma})|, |I(\underline{\gamma},\underline{\tilde{\theta}})|\}.$$

Donde a distância é ultramétrica.

Agora, para $(a,b) \in \mathcal{B}$ definimos a contração $f_{a,b} : I(b) \to I(a,b)$ por

$$f_{a,b} = [g|_{I(a,b)}]^{-1}$$

Fixando uma palavra $\underline{a} = (a_0,...,a_n)$ onde $(a_i,a_{i+1}) \in \mathcal{B}$ para $i = 0,...,n-1$. para $f_{a_{n-1},a_n} : I(a_n) \to I(a_{n-1})$, definimos

$$I(a_{n-1},a_n) := Im(f_{a_{n-1},a_n})$$

para

$$f_{a_{n-2},a_{n-1},a_n} := f_{a_{n-2},a_{n-1}} \circ f_{a_{n-1},a_n}$$

definimos

$$I(a_{n-2},a_{n-1},a_n) := Im(f_{a_{n-2},a_{n-1},a_n})$$

indutivamente,

$$f_{\underline{a}} = f_{a_0,a_1} \circ f_{a_1,a_2} \circ ... \circ f_{a_{n-1},a_n}$$

e

$$I(a_0,a_1,...,a_n) = I(\underline{a}) := Im(f_{\underline{a}})$$

Dado $\underline{\theta} \in \Sigma_{\mathcal{B}}^-$, para cada $n \geq 1$, fazendo $\underline{\theta}^n = (\theta_{-n},...,\theta_{-1},\theta_0)$ temos o mapa $f_{\underline{\theta}^n} : I(\theta_0) \to I(\underline{\theta}^n)$ dado por

$$f_{\underline{\theta}^n} = f_{\theta_{-n},\theta_{-n+1}} \circ f_{\theta_{-n+1},\theta-n+2} \circ ... \circ f_{\theta_{-1},\theta_0}$$

e definimos também $B(\underline{\theta}^n) : I(\underline{\theta}^n) \to I(\theta_0)$ como um mapa afim tal que o difeomorfismo

$$k_n^{\underline{\theta}} = B(\underline{\theta}^n) \circ f_{\underline{\theta}^n}$$

preserva orientação.

$k_n^{\underline{\theta}}$ assim definida é um difeomorfismo de $I(\theta_0)$ em $I(\theta_0)$ e a imagem de $K \cap I(\theta_0)$ por $k_n^{\underline{\theta}}$ é uma cópia ampliada de $K \cap I(\underline{\theta}^n)$.

Observe que, quanto estamos tratando de conjuntos de Cantor do tipo afim, $B(\underline{\theta}^n) = f_{\underline{\theta}^n}^{-1}$, de modo que $k^{\underline{\theta}_n} = Id_{I(\theta_0)}$, em particular, $k_n^{\underline{\theta}}$ converge quando $n \longrightarrow \infty$. Uma convergência similar também ocorre para conjuntos de Cantor em geral, isso é garantido pela próxima proposição, que pode ser encontrada em [3]. Antes de enunciá-la, definimos um conjunto de Cantor K é de classe C^r como um conjunto de Cantor regular tal que o mapa expansor Ψ que o define é de classe C^r nos intervalos de sua partição de Markov (considere derivadas laterais onde for conveniente).

Proposição 6.1. *Se $r \in (1, +\infty)$ e K é um conjunto de Cantor de classe C^r, então:*

i) Para cada $\underline{\theta} \in \Sigma_{\mathcal{B}}^-$ existe um difeomorfismo de classe C^r que preserva orientação $k^{\underline{\theta}} : I_{\theta_0} \to I_{\theta_0}$ tal que $k_n^{\underline{\theta}}$ converge para $k^{\underline{\theta}}$ na topologia C^α para todo $\alpha < r$. A convergência é uniforme numa vizinhança de Ψ;

ii) Se $r \geq 2$ é um inteiro positivo, então $k_n^{\underline{\theta}}$ converge para $k^{\underline{\theta}}$ em $\mathrm{Diff}_+^r(I_{\theta_0})$ (onde Diff_+^r é o conjunto dos difeomorfismo de classe C^r que preservam orientação). Além disso, existe $C > 0$ tal que $||k_n^{\underline{\theta}} - k^{\underline{\theta}}||_{C^{r-1}} \leq C|I_{\underline{\theta}^n}|$.

Então, para $\underline{\theta} \in \Sigma_{\mathcal{B}}^-$, definimos o conjunto de Cantor $K^{\underline{\theta}} := k^{\underline{\theta}}(K)$. Tais conjuntos são chamados *Geometrias Limites de K*, e são tão diferenciáveis quanto K.

Para facilitar a compreensão das definições dadas nesta seção, a encerraremos com um exemplo no qual encontraremos explicitamente cada uma dessas funções.

Exemplo 6.2. O conjunto $C(N)$, com $N \geq 2$ inteiro, é o conjunto dos números reais cujos quocientes parciais de sua expansão em frações contínuas não ultrapassam N, isto é,

$$C(N) = \{x = [0; x_1, x_2, ...] \in (0,1); 1 \leq x_i \leq N,\ i = 1, 2....\}$$

onde $[0; x_1, x_2, ...]$ é a expansão em frações contínuas de x.

Usando a Transformação de Gauss, podemos mostrar que $C(N)$ é um conjunto de Cantor, isso é feito com detalhes em [13], onde são apresentados também outros resultados interessantes, como o Teorema de Hall, que nos diz que $\mathbb{R} = \mathbb{Z}+C(4)+C(4)$. Aqui nos restringiremos ao caso em que $N=2$.

Destacamos que $C(2)$ tem como partição de Markov

$$\mathcal{P} = \{[[0;1,\overline{1,2}],[0;1,\overline{2,1}]],[[0;2,\overline{1,2}],[0;2,\overline{2,1}]]\}$$

e mapa expansor

$$\Psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 1, & x \in [[0;1,\overline{1,2}],[0;1,\overline{2,1}]] \\ \frac{1}{x} - 2, & x \in [[0;2,\overline{1,2}],[0;2,\overline{2,1}]] \end{cases}$$

Podemos associar a $C(2)$ o alfabeto $\mathbb{A} = \{1,2\}$, o conjunto das transições permitidas é dado por $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$, e os intervalos

$$I_1 = [[0;1,\overline{1,2}],[0;1,\overline{2,1}]], \quad I(2) = [[0;2,\overline{1,2}],[0;2,\overline{2,1}]]$$

fazendo

$$\begin{aligned} I(1,1) &:= [[0;1,1,\overline{2,1}],[0;1,1,\overline{1,2}]], \\ I(1,2) &:= [[0;1,2,\overline{2,1}],[0;1,2,\overline{1,2}]], \\ I(2,1) &:= [[0;2,1,\overline{2,1}],[0;2,1,\overline{1,2}]], \\ I(2,2) &:= [[0;2,2,\overline{2,1}],[0;2,2,\overline{1,2}]] \end{aligned}$$

podemos definir

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 1, x \in I(1,1) \cup I(1,2) \\ \frac{1}{x} - 2, x \in I(2,1) \cup I(2,2) \end{cases}$$

de modo que podemos obter $C(2)$ como

$$C(2) = \bigcap_{n=0}^{\infty} g^{-n}(I(1,1) \cap I(1,2) \cap I(2,1) \cap I(2,2))$$

e temos então

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, x \in I(1,1) \cup I(1,2) \\ \frac{1}{x+2}, x \in I(2,1) \cup I(2,2) \end{cases}$$

Observe que $f_{a,b}(x)$ tem derivada negativa para quaisquer $(a,b) \in \mathcal{B}$. Segue que, fixado $\underline{\theta} \in \Sigma_{\mathcal{B}}$, temos que $f_{\underline{\theta}^n}$ preserva orientação se n é par e inverte se n é ímpar. De modo que, para n par, queremos que $B(\underline{\theta}^n)$ preserve orientação, e inverta se n for ímpar.

No caso em que n é par, $B(\underline{\theta}^n)$ é dada por

$$B(\underline{\theta}^n) = \frac{1}{[0;\underline{\theta}^n,\overline{1,2}]-[0;\underline{\theta}^n,\overline{2,1}]}(x-[0;\underline{\theta}^n,\overline{2,1}]).$$

Para n ímpar, $B(\underline{\theta}^n)$ é dada por

$$B(\underline{\theta}^n) = -\frac{1}{[0;\underline{\theta}^n,\overline{2,1}]-[0;\underline{\theta}^n,\overline{1,2}]}(x-[0;\underline{\theta}^n,\overline{1,2}])+1.$$

Segue que, uma vez fixado $\underline{\theta}$, $k_n^{\underline{\theta}}$ também está totalmente determinada.

6.2 Definição do Operador de Renormalização

Recordaremos brevemente a ação de um grupo num conjunto.

Definição 6.3. *Seja $(G,\cdot)$ um grupo, e S um conjunto. Dizemos que G age em S se existe uma aplicação $\alpha : G\times S \to S$ tal que*

$$\alpha(1,s)=s, \quad \alpha(g\cdot h,s)=\alpha(g,\alpha(h,s))$$

para quaisquer $g,h\in G$, $s\in S$, onde 1 é o elemento neutro de G.

Um exemplo de ação de um grupo sobre um conjunto muito útil em sistemas dinâmicos é a iteração de um mapa.

Exemplo 6.3. Seja $X\subset\mathbb{R}$ e $(\mathbb{Z},+)$ o grupo dos inteiros com a adição usual. Dada qualquer função invertível $f : X\to X$, temos que f define uma ação de $\mathbb{Z}$ sobre X. De fato, se $\alpha : \mathbb{Z}\times X\to X$ é definida por

$$\alpha(n,x)=f^n(x)$$

Como 0 é o elemento neutro de $\mathbb{Z}$, temos que

$$\alpha(0,x)=f^0(x)=Id_X(x)=x.$$

E para $m,n\in\mathbb{Z}$ quaisquer, vale

$$\alpha(mn,x)=f^{nm}(x)=f^n(f^m(x))=\alpha(n,\beta(m,x))$$

e isto vale para qualquer $x\in X$.

Seja G um grupo agindo num conjunto S. Fixando $g\in G$, temos que G define um conjunto de funções, $\alpha : S\to S$, dadas por $\alpha(g,s)$, que tem por inversa $\alpha(g^{-1},s)$.

De outro modo, fixando $s \in S$, podemos definir a órbita de s como sendo

$$O(s) := \{\alpha(g,s); g \in G\}$$

isso nos dá uma classe de equivalência em S, a qual denotaremos por $[s] := O(s)$, de modo que podemos considerar o conjunto quociente

$$S/G = \{[s]; s \in S\}.$$

Com esses conceitos, podemos definir o operador de renormalização como segue.

Para cada $r \in (1, +\infty]$ e $a \in \mathbb{A}$, definimos

$$\mathcal{P}^r(a); = \{h; h \text{ é um } C^r\text{-mergulho de } I(a) \text{ em } \mathbb{R}\}.$$

Isto é, cada $h \in \mathcal{P}^r(a)$ é um difeomorfismo de classe C^r sobre sua imagem.

Seja $(\mathrm{Aff}(\mathbb{R}), \circ)$ o grupo das funções afins em $\mathbb{R}$ com a composição usual. A aplicação $\alpha : \mathrm{Aff}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}^r(a) \to \mathcal{P}^r(a)$ dada por $\alpha(t,h) = t \circ h$ define uma ação de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ sobre $\mathcal{P}^r(a)$. De fato, sejam $t_1, t_2 \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R})$, $Id_{\mathbb{R}}$ a função identidade em $\mathbb{R}$ e $h \in \mathcal{P}^r(a)$,

$$\alpha(id_{\mathbb{R}}, h) = id_{\mathbb{R}} \circ h = h, \quad \alpha(t_1 \circ t_2, h) = t_1 \circ t_2 \circ h = \alpha(t_1, \alpha(t_2, h)).$$

Denotaremos por $\overline{\mathcal{P}}^r(a)$ o espaço quociente gerado por esta ação. Definimos também

$$\mathcal{P}(a) := \bigcup_{r>1} \mathcal{P}^r(a)$$

e

$$\overline{\mathcal{P}}(a) := \bigcup_{r>1} \overline{\mathcal{P}}^r(a)$$

e munimos cada um deles com a topologia do limite indutivo.

Definição 6.4. *Para $(a_0, a_1) \in \mathcal{B}$ e $g \in \Omega^r_{\Sigma_{\mathcal{B}}}$, definimos o operador de renormalização*

$$\begin{aligned} T^g_{a_1,a_0} : \mathcal{P}^r(a_0) &\to \mathcal{P}^r(a_1) \\ h &\mapsto h \circ f_{a_0,a_1}. \end{aligned}$$

Se $\underline{a} = (a_0, a_1, ..., a_n)$ é uma palavra com transições permitidas em $\mathcal{B}$, definimos $T^g_{\underline{a}} : \mathcal{P}^r(a_0) \to \mathcal{P}^r(a_n)$ por

$$T^g_{\underline{a}} = T^g_{a_n,a_{n-1}} \circ T^g_{a_{n-1},a_{n-2}} \circ ... \circ T^g_{a_1,a_0}.$$

Segue da definição acima que

$$T^g_{a_0,a_1,a_2} = T^g_{a_2,a_1} \circ T^g_{a_1,a_0}(h) = T^g_{a_2,a_1}(h \circ f_{a_0,a_1}) = h \circ f_{a_0,a_1} \circ f_{a_1,a_2} = h \circ f_{a_0,a_1,a_2}$$

e indutivamente,

$$T^g_{\underline{a}}(h) = h \circ f_{\underline{a}}.$$

Observe que

$$\alpha(t, T^g_{\underline{a}}(h)) = t \circ T^g_{\underline{a}}(h) = t \circ h \circ f_{\underline{a}}$$

por outro lado,

$$T^g_{\underline{a}}(\alpha(t,h)) = \alpha(t,h) \circ f_{\underline{a}} = t \circ h \circ f_{\underline{a}}$$

ou seja, $\alpha(t, T^g_{\underline{a}}(h)) = T^g_{\underline{a}}(\alpha(t,h))$, noutras palavras, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aff}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}^r(a_0) & \xrightarrow{(Id_{\mathrm{Aff}(\mathbb{R})}, T^g_{\underline{a}})} & \mathrm{Aff}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}^r(a_n) \\ \Big\downarrow \alpha & & \Big\downarrow \alpha \\ \mathcal{P}^r(a_0) & \xrightarrow[T^g_{\underline{a}}]{} & \mathcal{P}^r(a_n) \end{array}$$

o operador de renormalização comuta com a ação de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ em $\mathcal{P}^r(a)$, de modo que ela está bem definida no espaço quociente $\overline{\mathcal{P}}^r(a)$.

Neste caso, temos

$$\begin{array}{rcl} \overline{T}^g_{a_0,a_1} : \overline{\mathcal{P}}(a_0) & \to & \overline{\mathcal{P}}(a_1) \\ [h] & \mapsto & [h \circ f_{a_0,a_1}]. \end{array}$$

Agora, estudaremos o conjunto limite dos operadores de renormalização. Seja

$$\mathcal{A} := \{(\underline{\theta}, A); \theta \in \Sigma^-_{\mathcal{B}} \text{ e } A \text{ é um mergulho afim de } I(\theta_0) \text{ em } \mathbb{R}\}$$

fazendo $\mathcal{P}^r = \bigcup_{\mathbb{A}} \mathcal{P}^r(a)$, definimos o mapa canônico

$$\begin{array}{rcl} \beta : \mathcal{A} & \to & \mathcal{P}^r \\ (\underline{\theta}, A) & \mapsto & A \circ k^{\underline{\theta}} \end{array}$$

observe que $A \circ k^{\underline{\theta}} \in \mathcal{P}^r(\theta_0)$.

Definimos também $F^{\underline{\theta}}: I(\theta_0) \to I(\theta_{-1},\theta_0)$ como um mapa afim com a mesma orientação de f_{θ_{-1},θ_0}.

Podemos elevar a ação dos operadores de renormalização para $\mathcal{A}$ fazendo, para $(\theta_0,\theta_1) \in \mathcal{B}$

$$T_{\theta_1,\theta_0}(\underline{\theta}, A) = (\underline{\theta}\theta_1, A \circ F^{\underline{\theta}\theta_1}).$$

Os T_{θ_1,θ_0} assim definidos são os ramos inversos dos mapas S definidos por

$$S(\underline{\theta}, A) = (\sigma^{-1}(\underline{\theta}), A \circ (F^{\underline{\theta}})^{-1})$$

onde σ é o shift definido em $\Sigma_{\mathcal{B}}$.

Se fixarmos $\underline{\theta} \in \Sigma_{\mathcal{B}}$, $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ ainda age por composição à esquerda em $\mathcal{A}$.

Para uso posterior, será útil considerarmos, para $\theta_0 \in \mathbb{A}$,

$$T_{\theta_0}(\underline{\theta}, A) := (\underline{\theta}, A \circ F^{\underline{\theta}})$$

onde $\underline{\theta} = (...,\theta_0) \in \Sigma_{\mathcal{B}}$.

6.3 Configurações, Compactos Recorrentes e Interseções Estáveis

Fixemos dois conjuntos de Cantor regulares K e $\tilde{K}$ determinados, respectivamente por $(\mathbb{A},\mathcal{B},\Sigma_{\mathcal{B}},g)$ e $(\tilde{\mathbb{A}},\tilde{\mathcal{B}},\Sigma_{\tilde{\mathcal{B}}},\tilde{g})$. Definimos $K(a) := K \cap I(a)$ e $\tilde{K}(\tilde{a}) := \tilde{K} \cap I(\tilde{a})$.

Considerando os conjuntos $\mathcal{P}(a)$ e $\tilde{\mathcal{P}}(\tilde{a})$, dizemos que $h \in \mathcal{P}(a)$ é uma configuração suave para $K(a)$ e $\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{P}}(\tilde{a})$ uma configuração suave para $\tilde{K}(\tilde{a})$

Definição 6.5. *Dado um par $(h,\tilde{h})$ com $h \in \mathcal{P}(a)$ e $\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{P}}(\tilde{a})$ de configurações suaves para $K(a)$ e $\tilde{K}(\tilde{a})$, respectivamente, dizemos que elas:*

i) Estão ligadas, se $h(I(a)) \cap \tilde{h}(I(\tilde{a})) \neq \emptyset$;

ii) Têm interseção, se $h(K(\underline{a})) \cap \tilde{h}(\tilde{K}(\underline{\tilde{a}})) \neq \emptyset$;

iii) Têm interseção estável, se a interseção não vazia é mantida ao perturbarmos $(h,\tilde{h}) \in \mathcal{P} \times \tilde{\mathcal{P}}$ ou $(g,\tilde{g}) \in \Omega_{\Sigma_{\mathcal{B}}} \times \Omega_{\Sigma_{\tilde{\mathcal{B}}}}$

onde, $\mathcal{P} = \bigcup_{\mathbb{A}} \mathcal{P}(a)$ e $\tilde{\mathcal{P}} = \bigcup_{\tilde{\mathbb{A}}} \tilde{\mathcal{P}}(\tilde{a})$.

Considerando o subgrupo $H \subset \mathrm{Aff}(\mathbb{R}) \times \mathrm{Aff}(\mathbb{R})$, dado por

$$H = \{(t,t); t \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R})\}$$

com a operação de composição em cada entrada, então H age em $\mathcal{P}(a) \times \tilde{\mathcal{P}}(\tilde{a})$ com a aplicação

$$\alpha((t,t),(h,\tilde{h})) = (t \circ h, t \circ \tilde{h})$$

Claramente, se $(h,\tilde{h})$ estão ligadas, tem interseção ou interseção estável, o mesmo ocorre para $(t \circ h, t \circ \tilde{h})$. Por outro lado, se $(t \circ h, t \circ \tilde{h})$ estão ligados, tem interseção ou interseção estável, o mesmo ocorre para $(t^{-1} \circ t \circ h, t^{-1} \circ t \circ \tilde{h}) = (h,\tilde{h})$. Lembrando que essa ação pode ser estendida para $\mathcal{P}$ e $\tilde{\mathcal{P}}$, temos a seguinte definição.

Definição 6.6. *Chamamos de Configurações Suaves Relativas para $K(a)$, $\tilde{K}(\tilde{a})$ aos elementos do conjunto $Q = (\mathcal{P} \times \tilde{\mathcal{P}})/H$.*

Lembrando que $I(a,b) \subset I(a)$ e, para $a_1 \neq a_2$ temos $I(a_1) \cap I(a_2) = \emptyset$, podemos escrever

$$\begin{aligned} K(a_0) &= \bigcap_{n \geq 0} g^{-n}(\bigcup_{(\mathcal{B}} I(a,b)) \cap I(a_0) \\ &= \bigcap_{n \geq 0} g^{-n}(\bigcup_{\mathcal{B}} I(a_0, b_i)) \\ &= \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{\underline{\theta}^n \in \Sigma^n_{\mathcal{B}}(a_0)^-} f_{\underline{\theta}^n}(I(a_0)) \end{aligned}$$

onde $\Sigma^n_{\mathcal{B}}(a_0)^-$ é o conjunto das palavras do tipo $\underline{\theta}^n = (\theta_{-n}, ..., \theta_{-1}, a_0)$ com transições permitidas em $\mathcal{B}$.

Assim, duas configurações suaves relativas se intersectam se, e somente se,

$$\bigcap_{n \geq 0} \left[h\left(\bigcup_{\underline{\theta}^n \in \Sigma^n_{\mathcal{B}}(a_0)^-} f_{\underline{\theta}^n}(I(a_0)) \right) \cap \tilde{h}\left(\bigcup_{\underline{\tilde{\theta}}^n \in \Sigma^n_{\mathcal{B}}(\tilde{a}_0)^-} \tilde{f}_{\underline{\tilde{\theta}}^n}(I(\tilde{a}_0)) \right) \right] \neq \emptyset.$$

Tal interseção pode ser reescrita como

$$\bigcap_{n \geq 0} \left[\left(\bigcup_{\underline{\theta}^n \in \Sigma^n_{\mathcal{B}}(a_0)^-} T_{\underline{\theta}^n}(h(I(a_0))) \right) \cap \left(\bigcup_{\underline{\tilde{\theta}}^n \in \Sigma^n_{\mathcal{B}}(\tilde{a}_0)^-} \tilde{T}_{\underline{\tilde{\theta}}^n}(\tilde{h}(I(\tilde{a}_0))) \right) \right] \neq \emptyset.$$

Em particular, esta interseção é não vazia para cada n, isto nos dá uma sequência em n, formada por conjuntos compactos que é pré-compacta (tem fecho compacto).

Noutras palavras, duas configurações suaves relativas se intersectam se, e somente se, podemos construir uma sequência relativamente compacta onde o $(n+1)$-ésimo termo é obtido a partir do n-ésimo pela aplicação de um operador de renormalização.

Definição 6.7. *Chamamos de Configurações Suaves Relativas das Geometrias Limites de K e $\tilde{K}$, determinadas por $\underline{\theta},\underline{\tilde{\theta}}$, aos elementos de $\mathcal{C}=(\mathcal{A}\times\tilde{\mathcal{A}})/H$.*

Os elementos de $\mathcal{C}$ são da forma

$$[c]=[((\underline{\theta},A),(\underline{\tilde{\theta}},\tilde{A}))]=\{((\underline{\theta},t\circ A),(\underline{\tilde{\theta}},t\circ\tilde{A}));t\in \mathrm{Aff}(\mathbb{R})\}.$$

Com essa nova definição, podemos utilizar o mapa canônico

$$\begin{aligned}\gamma:\mathcal{A}\times\tilde{\mathcal{A}} &\to \mathcal{P}\times\tilde{\mathcal{P}}\\ \mathcal{C} &\mapsto Q\end{aligned}$$

esse mapa se comporta como uma projeção do espaço $\mathcal{C}$ no espaço Q. Ele nos permite definir, de modo natural, configurações ligadas, com interseção e interseção estável em $\mathcal{A}\times\tilde{A}$ ou $\mathcal{C}$.

Definição 6.8. *Um conjunto compacto $\mathcal{L}\in\mathcal{C}$ é recorrente se, para cada*

$$u=((\underline{\theta},A),(\underline{\tilde{\theta}},\tilde{A}))\in\mathcal{L}$$

e $\ell,\tilde{\ell}\geq 0$ com $\ell+\tilde{\ell}>0$, podemos escolher palavras $\underline{a}=(a_0,...,a_\ell)$, $\underline{\tilde{a}}=(\tilde{a}_0,...,\tilde{a}_{\tilde{\ell}})$, $\Sigma_{\mathcal{B}}$ e $\tilde{\Sigma}_{\tilde{\mathcal{B}}}$, com $a_0=\theta_0$, $\tilde{a}_0=\tilde{\theta}_0$ tais que

$$(T_{\underline{a}}(\underline{\theta},A),\tilde{T}_{\tilde{a}}(\underline{\tilde{\theta}},\tilde{A}))=v\in\mathrm{int}(\mathcal{L}).$$

Dizemos que $\mathcal{L}$ é imediatamente recorrente se, além disso, $\ell+\tilde{\ell}=1$ para qualquer $u\in\mathcal{L}$.

Considerando $\underline{a}_i,\underline{\tilde{a}}_i$ palavras da forma $(a_0,...,a_i)$, e $(\tilde{a}_0,...,\tilde{a}_i)$ (onde, para cada i uma das palavras tem, pelo menos uma das palavras tendo mais de uma letra), podemos obter os conjuntos compactos $\mathcal{L}_1,...,\mathcal{L}_N$ formados por $\mathcal{L}$ e suas imagens pelos operadores de renormalização determinados por $(a_i,...,a_\ell),(\tilde{a}_i,...,\tilde{a}_{\tilde{\ell}})$. Temos então

i) $\mathcal{L}':=\bigcup_i\mathcal{L}'_i$, onde $\mathcal{L}'_i$ é uma vizinhança de $\mathcal{L}_i$, é uma vizinhança de $\mathcal{L}$;

ii) $T_{\underline{a}^i}\tilde{T}_{\underline{\tilde{a}}^i}$ está definido em $\mathcal{L}_i$ e o envia em $\mathcal{L}$.

Disto temos

1. $\bar{\mathcal{L}}=\bigcup_i\mathcal{L}_i$ é um compacto imediatamente recorrente que contém $\mathcal{L}$;

2. Qualquer conjunto compacto recorrente para $g, \tilde{g}$ é também recorrente para $(g', \tilde{g}')$ numa vizinhança de $(g, \tilde{g}) \in \Omega_{\Sigma_{\mathcal{B}}} \times \Omega_{\Sigma_{\tilde{\mathcal{B}}}}$;

3. Qualquer configuração relativa contida num compacto recorrente tem interseção. De fato, elas formam uma sequência pela aplicação sucessiva de operadores de renormalização que está contida num compacto (imediatamente recorrente), logo, é relativamente compacta, o que implica que tais configurações possui interseção não vazia.

Podemos então apresentar o seguinte teorema, demonstrado por Moreira e Yoccoz em [11], que utiliza compactos recorrentes para garantir interseção estável.

Teorema 6.1. *Qualquer configuração relativa (de geometrias limites) contidas num compacto recorrente $\mathcal{L}$ tem interseção estável.*

Demonstração. Pelo item 1 das observações acima, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\mathcal{L}$ está contido num compacto imediatamente recorrente.

Dado $u = ((\underline{\theta}, A), (\underline{\tilde{\theta}}, \tilde{A}))$ em $\mathcal{L}$, vamos associá-lo ao elemento $v = \beta(u) = (A \circ k^{\underline{\theta}}, \tilde{A} \circ \tilde{k}^{\underline{\tilde{\theta}}})$ em $\mathcal{P}(\theta_0) \times \tilde{\mathcal{P}}(\underline{\tilde{\theta}_0})$. Como u pertence a um compacto recorrente, pelo item 3 acima, ela tem interseção não vazia, e como tal propriedade é mantida ao aplicarmos β, v tem interseção não vazia. Pelo item 2, a interseção assim obtida é mantida ao perturbarmos $(g, \tilde{g})$.

Para concluir a interseção estável, basta mostrarmos que ao perturbarmos v, ainda obtemos configurações suaves com interseção não vazia. Essa perturbação pode ser escrita na forma

$$(h \circ A \circ k^{\underline{\theta}}, \tilde{h} \circ \tilde{A} \circ \tilde{k}^{\underline{\tilde{\theta}}})$$

onde h e $\tilde{h}$ estão C^r-próximos da identidade para algum $r > 1$. Como tais composições ainda estão em $\mathcal{P} \times \tilde{\mathcal{P}}$, podemos aplicar operadores de renormalização adequados. Se separamos a imagem de numa parte com translação e uma parte sem translação, e considerarmos apenas a parte livre de translação $(h' \circ A' \circ k'^{\underline{\theta}'}, \tilde{h}' \circ \tilde{A}' \circ \tilde{k}'^{\underline{\tilde{\theta}'}})$, obtemos elementos que estão na mesma classe de equivalência em Q, pois diferem por um mapa afim. h' e $\tilde{h}'$ deverão estar mais próximos da identidade que h e $\tilde{h}$ segue, por continuidade, que $[(\underline{\theta}', A'), (\underline{\tilde{\theta}}, \tilde{A}')]$ estão próximos em $\mathcal{C}$. Isso nos dá uma sequência onde os termos são obtidos a partir do anterior pela aplicação de operadores de renormalização, e, por estarem se aproximando (em Q), possuem uma subsequência convergente, segue que as configurações assim obtidas se intersectam, como queríamos.

□

6.4 Transferência do Operador de Renormalização no Espaço $\mathcal{S} \times \mathbb{R}$

Nesta seção, apresentaremos um resultado demonstrado em [11] por Moreira e Yoccoz, que nos ajudará a estudar os conjuntos compactos recorrentes das geometrias limites de conjuntos de Cantor regulares. Mais precisamente, mostraremos um teorema que nos permite transferir esse operador para um espaço mais familiar.

Fixamos o alfabeto $\mathbb{A} = \{1, 2, ..., N\}$, o conjunto de transições permitidas $\mathcal{B} = \{(n,m); n,m \in \mathbb{A}\}$, o shift $\Sigma_{\mathcal{B}}$ e o mapa expansor Φ do tipo $\Sigma_{\mathcal{B}}$, definido, em cada $I(n,m)$, $(n,m) \in \mathcal{B}$ por

$$\Phi(x)|_{I(m,n)}(x) = p_{(n,m)}x + q_{(m,n)}$$

temos então definido um conjunto de Cantor regular do tipo afim K.

Escrevendo $I(n) = [a_n^1, a_n^2]$ e $I(n,m) = [a_{n,m}^1, a_{n,m}^2]$, temos $\Phi(I(n,m)) = I(m)$. Desse modo, p e q são dados explicitamente por

$$p_{(n,m)} = \frac{a_n^2 - a_n^1}{a_{n,m}^2 - a_{n,m}^1} \quad \text{e} \quad q_{(n,m)} = \frac{(a_n^2 - a_n^1)}{a_{n,m}^2 - a_{n,m}^1} a_{n,m}^1 + a_m^1$$

se Φ preserva orientação, e

$$p_{(n,m)} = \frac{a_n^1 - a_n^2}{a_{n,m}^2 - a_{n,m}^1} \quad \text{e} \quad q_{(n,m)} = \frac{a_n^1 - a_n^2}{a_{n,m}^2 - a_{n,m}^1} a_{n,m}^1 + a_n^2$$

se Φ inverte orientação.

Podemos então achar o mapa $F^{\underline{\theta}\theta_1} : I(\theta_1) \to I(\theta_0, \theta_1)$, que, por definição, é a função afim com a mesma orientação de $[\Phi|_{I(\theta_0,\theta_1)}]^{-1}$. Como Φ, e, portanto, sua inversa são funções afins, $F^{\underline{\theta}\theta_1}$ coincide com $[\Phi|_{I(\theta_0,\theta_1)}]^{-1}$.

Se $p_{\theta_0,\theta_1} > 0$, $F^{\underline{\theta}\theta_1}$ preserva orientação, e será dada por

$$F^{\underline{\theta}\theta_1}(x) = \frac{a_{\theta_0,\theta_1}^2 - a_{\theta_0,\theta_1}^1}{a_{\theta_1}^2 - a_{\theta_1}^1}(x - a_{\theta_1}^1) + a_{\theta_0,\theta_1}^1.$$

No caso em que $p_{\theta_0,\theta_1} < 0$, $F^{\underline{\theta}\theta_1}$ inverte orientação, e neste caso,

$$F^{\underline{\theta}\theta_1}(x) = \frac{a_{\theta_0,\theta_1}^1 - a_{\theta_0,\theta_1}^2}{a_{\theta_1}^2 - a_{\theta_1}^1}(x - a_{\theta_1}^1) + a_{\theta_0,\theta_1}^2.$$

Em ambos os casos, obtemos

$$F^{\underline{\theta}\theta_1}(x) = \frac{1}{p_{(\theta_0,\theta_1)}}x - \frac{q_{(\theta_0,\theta_1)}}{p_{(\theta_0,\theta_1)}}.$$

Agora, definindo $\mathcal{S} := \Sigma_{\mathcal{B}}^- \times \Sigma_{\mathcal{B}}^- \times \mathbb{R}^*$, temos o teorema abaixo.

Teorema 6.2. *O mapa $L : \mathcal{C} \to \mathcal{S} \times \mathbb{R}$, dado por*

$$[(\underline{\theta}, ax+b), (\tilde{\underline{\theta}}, \tilde{a}x+\tilde{b})] \mapsto \left(\underline{\theta}, \tilde{\underline{\theta}}, \frac{\tilde{a}}{a}, \frac{\tilde{b}-b}{a}\right)$$

é um homeomorfismo entre o espaço de configurações $\mathcal{C}$ e $\mathcal{S} \times \mathbb{R}$.

Demonstração. Iniciaremos mostrando que L está bem definida. Para isso, tomamos dois representantes de uma mesma classe em $\mathcal{C}$, digamos

$$[(\underline{\theta}, a_1x+b_1), (\tilde{\underline{\theta}}, \tilde{a}_1x+\tilde{b}_1)] = [(\underline{\theta}, a_2x+b_2), (\tilde{\underline{\theta}}, \tilde{a}_2x+\tilde{b}_2)].$$

Então existe um mapa afim $t(x) = ax+b$ tal que

$$\begin{aligned} a_2x+b_2 &= a(a_1x+b_1)+b \\ \tilde{a}_2x+\tilde{b}_2 &= a(\tilde{a}_1x+\tilde{b}_1)+b \end{aligned}$$

isso nos dá

$$\frac{\tilde{a}_2}{a_2} = \frac{a\tilde{a}_1}{aa_1} = \frac{\tilde{a}_1}{a_1}$$

e

$$\frac{\tilde{b}_2-b_2}{a_2} = \frac{a\tilde{b}_1+b-ab_1-b}{a\tilde{a}} = \frac{\tilde{b}_1-b_1}{\tilde{a}_1},$$

de modo que suas imagens devem coincidir.

Para mostrarmos que L é sobrejetiva, tomamos $(\underline{\theta}, \tilde{\underline{\theta}}, a, b) \in \mathcal{S} \times \mathbb{R}$ arbitrário, e então tomando $[(\underline{\theta}, x), (\tilde{\underline{\theta}}, ax+b)] \in \mathcal{C}$, temos

$$L([(\underline{\theta}, x), (\tilde{\underline{\theta}}, ax+b)]) = (\underline{\theta}, \tilde{\underline{\theta}}, a, b).$$

Para a injetividade, suponha que existam $[(\underline{\theta}, a_1x+b_1), (\tilde{\underline{\theta}}, \tilde{a}_1x+\tilde{b}_1)]$ e $[(\underline{\theta}, a_2x+b_2), (\tilde{\underline{\theta}}, \tilde{a}_2x+\tilde{b}_2)]$ para os quais

$$L[(\underline{\theta}, a_1x+b_1), (\tilde{\underline{\theta}}, \tilde{a}_1x+\tilde{b}_1)] = L[(\underline{\theta}, a_2x+b_2), (\tilde{\underline{\theta}}, \tilde{a}_2x+\tilde{b}_2)],$$

pela boa definição de L, podemos considerar representantes particulares destas duas classes. Aplicando $t_1(x) = \frac{x}{a_1} - \frac{b_1}{a_1}$ em $[(\underline{\theta}, a_1x+b_1), (\tilde{\underline{\theta}}, \tilde{a}_1x+\tilde{b}_1)]$ e $t_2(x) = \frac{x}{a_2} - \frac{b_2}{a_2}$ em $[(\underline{\theta}, a_2x+b_2), (\tilde{\underline{\theta}}, \tilde{a}_2x+\tilde{b}_2)]$ podemos supor, sem perda de generalidade, que a condição acima pode ser expressa como

$$L[(\underline{\theta}, x), (\tilde{\underline{\theta}}, \tilde{c}_1x+\tilde{d}_1)] = L[(\underline{\theta}, x), (\tilde{\underline{\theta}}, \tilde{c}_2x+\tilde{d}_2)]$$

mas isso nos dá $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2$ e $\tilde{d}_1 = \tilde{d}_2$, de modo que determinam a mesma classe.

Assim, L^{-1} está bem definida e L e L^{-1} são ambas contínuas, uma vez que suas funções coordenadas o são.

□

Usando essa aplicação, podemos transferir o operador de renormalização das configurações relativas $\mathcal{C}$ para o espaço $\mathcal{S}\times\mathbb{R}$.

Iniciamos tomando $(\underline{\theta},\tilde{\underline{\theta}},a,b)\in\mathcal{S}\times\mathbb{R}$, e temos

$$L^{-1}(\underline{\theta},\tilde{\underline{\theta}},a,b)=[(\underline{\theta},x),(\tilde{\underline{\theta}},ax+b)].$$

Agora, tomando $((\theta_1,\theta_0),(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_0))\in\mathcal{B}\times\tilde{\mathcal{B}}$, temos determinado o par de operadores de renormalização $(T_{\theta_1,\theta_0},\tilde{T}_{\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_0})$, e aplicamos ao que obtemos no passo anterior, que nos dá

$$\begin{aligned}(T_{\theta_1,\theta_0},\tilde{T}_{\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_0})((\underline{\theta},x),(\tilde{\underline{\theta}},ax+b)) &= ((\underline{\theta}\theta_1,[x]\circ F^{\underline{\theta}\theta_1}(x),(\tilde{\underline{\theta}}\tilde{\theta}_1,[ax+b]\circ F^{\tilde{\underline{\theta}}\tilde{\theta}_1}))\\ &= \left(\left(\underline{\theta}\theta_1,\frac{1}{p_{(\theta_0,\theta_1)}}x-\frac{q_{(\theta_0,\theta_1)}}{p_{(\theta_0,\theta_1)}}\right),\right.\\ &\qquad\left.\left(\tilde{\underline{\theta}}\tilde{\theta}_1,\frac{a}{\tilde{p}_{(\tilde{\theta}_0,\tilde{\theta}_1)}}x-\frac{\tilde{q}_{(\tilde{\theta}_0,\tilde{\theta}_1)}}{\tilde{p}_{(\tilde{\theta}_0,\tilde{\theta}_1)}}a+b\right)\right).\end{aligned}$$

Além disso, L envia $\left(\left(\underline{\theta}\theta_1,\frac{1}{p_{(\theta_0,\theta_1)}}x-\frac{q_{(\theta_0,\theta_1)}}{p_{(\theta_0,\theta_1)}}\right),\left(\tilde{\underline{\theta}}\tilde{\theta}_1,\frac{a}{\tilde{p}_{(\tilde{\theta}_0,\tilde{\theta}_1)}}x-\frac{\tilde{q}_{(\tilde{\theta}_0,\tilde{\theta}_1)}}{\tilde{p}_{(\tilde{\theta}_0,\tilde{\theta}_1)}}a+b\right)\right)$ em

$$\left(\underline{\theta}\theta_1,\ \tilde{\underline{\theta}}\tilde{\theta}_1,\frac{p_{(\theta_0,\ \theta_1)}}{\tilde{p}_{(\tilde{\theta}_0,\tilde{\theta}_1)}}a,p_{(\theta_0,\ \theta_1)}b-\frac{\tilde{q}_{(\tilde{\theta}_0,\ \tilde{\theta}_1)}p_{(\theta_0,\theta_1)}}{\tilde{p}_{(\tilde{\theta}_0,\tilde{\theta}_1)}}a+q_{(\theta_0,\theta_1)}\right)$$

que nos dá a transferência desejada. Denotamos

$$L\circ(T_{\theta_1,\theta_0},\tilde{T}_{\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_0})\circ L^{-1}:=T_{((\theta_1,\theta_0),(\tilde{\theta}_0,\tilde{\theta}_1))}$$

e finalizamos definindo os seguintes casos particulares quando aplicamos o operador de renormalização em apenas um dos conjuntos de Cantor:

$$\begin{aligned}T_{((\theta_1,\theta_0),id))}(\underline{\theta},\tilde{\underline{\theta}},a,b) &:= (\underline{\theta}\theta_1,\tilde{\underline{\theta}},ap_{(\theta_0,\theta_1)},bp_{(\theta_0,\theta_1)}+q_{(\theta_0,\theta_1)})\\ T_{(id,(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_0))}(\underline{\theta},\tilde{\underline{\theta}},a,b) &:= \left(\underline{\theta},\tilde{\underline{\theta}}\tilde{\theta}_1,\ \frac{a}{\tilde{p}_{(\tilde{\theta}_0,\tilde{\theta}_1)}},b-a\frac{\tilde{q}_{(\tilde{\theta}_0,\tilde{\theta}_1)}}{\tilde{p}_{(\tilde{\theta}_0,\tilde{\theta}_1)}}\right).\end{aligned}$$

7 Interseções Estáveis de Conjuntos de Cantor do Tipo Afim

7.1 Interseções Estáveis de Conjuntos de Cantor do Tipo Afim

Vimos em capítulos anteriores critérios suficientes para garantir a interseção estável entre pares de conjuntos de Cantor, além de alguns exemplos que satisfazem tais condições.

Nesta seção, apresentamos um resultado demonstrado em [2] por Honary, Moreira e Pourbarat, que apresenta uma família de conjuntos de Cantor do tipo afim, definidos por mapas expansores afins e com dois elementos em sua partição de Markov, que é o caso mais simples possível, que possuem interseção estável em muitas posições relativas, mas que não satisfazem o teste da espessura generalizado nem o Gap Lemma.

Considere os conjuntos de Cantor afins do tipo

definido por

$$\Psi(x) = \begin{cases} (n+3)x, & x \in [0,1] \\ \frac{(n+3)(x-3)}{n}, & x \in [3, n+3] \end{cases}$$

e

definido por

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{8x}{3}, & x \in [0,3] \\ \frac{8(x-5)}{3}, & x \in [5,8] \end{cases}$$

Para ver que tais conjuntos não satisfazem o GTT, tome $\lambda = \frac{3}{5}$ e $t = -\frac{19}{10}$, assim

$$\frac{3}{5}\cdot 3 - \frac{19}{10} < 0 < 1 < \frac{3}{5}\cdot 5 - \frac{19}{10} < \frac{3}{5}\cdot 8 - \frac{19}{10} < 3.$$

De modo que, considerando os respectivos domínios de Markov, $\frac{3}{5}\tilde{\mathcal{D}} - \frac{19}{10}$ e $\mathcal{D}$ não estão contidos um num gap do outro, e $(\frac{3}{5}\tilde{\mathcal{D}} - \frac{19}{10}) \cap \mathcal{D} = \emptyset$, para qualquer valor de n.

Observe ainda que, para $n > 1$

$$\tau(K)\cdot\tau(\tilde{K}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} < 1,$$

de modo que o Gap Lemma não pode ser utilizado para garantir interseção estável.

Uma vez que os conjuntos de Cantor acima são do tipo afim, logo, com mapas sobrejetores, vamos considerar apernas o alfabeto de símbolos, uma vez que todas as transições são permitidas, e considerando os devidos operadores de renormalização, podemos associar a esse par de conjuntos de Cantor os seguintes mapas, definidos em $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
T_0 &:= T_{(0,id)}(a,b) = ((n+3)a, (n+3)b) \\
T_1 &:= T_{(1,id)}(a,b) = \left(\frac{(n+3)}{n}a, \frac{(n+3)}{n}b - \frac{3(n+3)}{n}\right) \\
\tilde{T}_0 &:= T_{(id,0)}(a,b) = \left(\frac{3}{8}a, b\right) \\
\tilde{T}_1 &:= T_{(id,1)}(a,b) = \left(\frac{3}{8}a, b+5a\right).
\end{aligned}$$

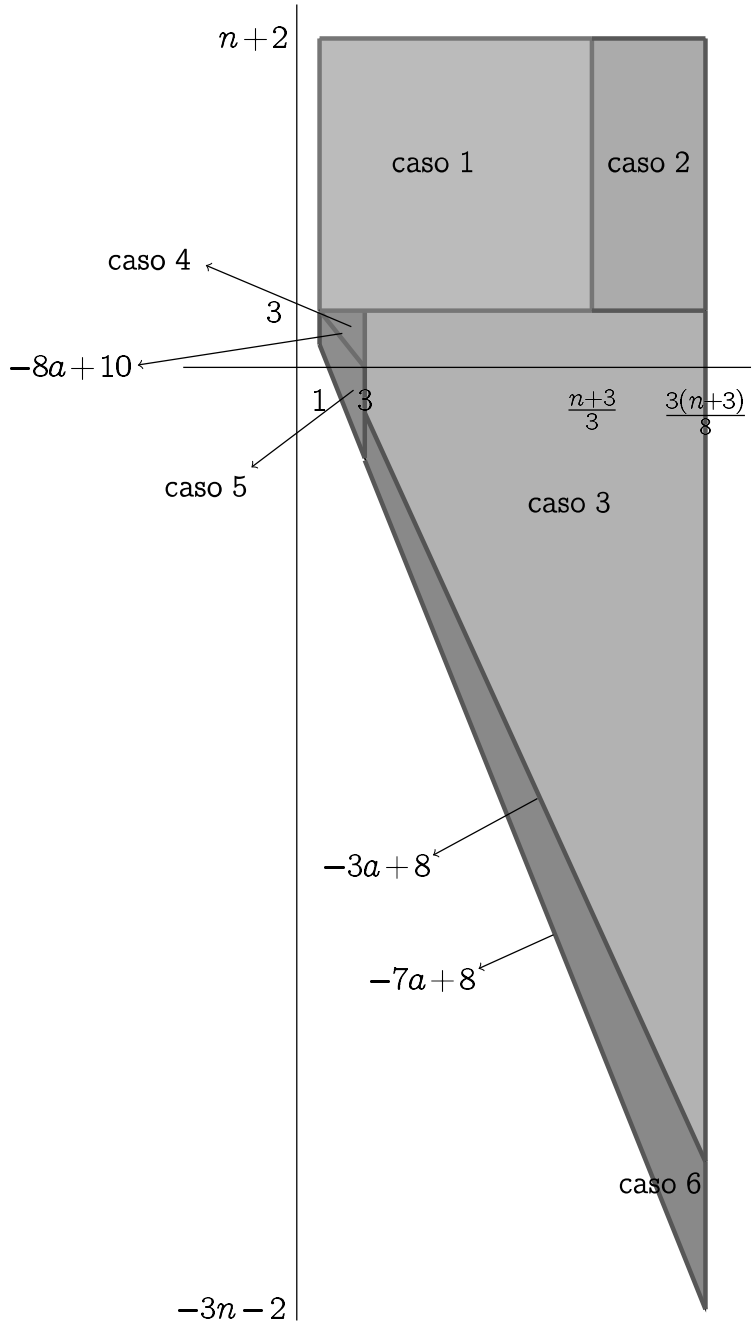
Temos então o seguinte teorema.

Teorema 7.1. *Se K e $\tilde{K}$ são os conjuntos de Cantor definidos acima, então para $n \geq 130$, existe um compacto recorrente não vazio de configurações relativas.*

Demonstração. Mostraremos que o conjunto compacto $\mathcal{L}$ dado por

$$\mathcal{L} = \left\{(a,b); 1 \leq a \leq \frac{3(n+3)}{8},\ 8a+b \geq 7 \text{ e } b \leq n+2\right\}$$

é um compacto recorrente. Na figura abaixo apresentamos a partição desse conjunto que será utilizada na demonstração. Em cada um dos casos destacados, acharemos composições adequadas dos operadores de renormalização que resultarão em pontos de seu interior.



Caso 1: Se $1 \leq a \leq \frac{n+3}{3}$ e $3 \leq b \leq n+2$.

Observe que $1 \leq a \leq \frac{n+3}{3} \leq \frac{3(n+3)}{8}$ e $8a+b \geq 11 > 7$, logo, os pares (a,b) que satisfazem essas desigualdades estão em $\mathcal{L}$. Aplicando T_1, temos

$$T_1(a,b) = \left(\frac{(n+3)}{n}a, \frac{(n+3)}{n}b - \frac{3(n+3)}{n}\right).$$

Agora,

$$1 < \frac{n+3}{n} \leq \frac{(n+3)}{n}a \leq \frac{(n+3)^2}{3n} < \frac{3(n+3)}{8}$$

onde a última desigualdade é válida para $n > 24$. Além disso,

$$0 \leq \frac{(n+3)}{n}b - \frac{3(n+3)}{n} \leq (n+2-3)\left(\frac{n+3}{n}\right) = n+2-\frac{3}{n} < n+2$$

e

$$7 < 8\frac{(n+3)}{n} \leq 8\frac{(n+3)}{n}a + \frac{(n+3)}{n}b - \frac{3(n+3)}{n}$$

onde a primeira desigualdade vale para $n > -3$.

Como as desigualdades são válidas estritamente, $T_1(a,b) \in \text{int}(\mathcal{L})$.

Caso 2: Se $\frac{n+3}{3} < a \leq \frac{3(n+3)}{8}$ e $3 \leq b \leq n+2$.

Quando $n \geq 1$, temos $1 < \frac{n+3}{3}$ e $7 < \frac{8n+33}{3} \leq 8a+b$, de modo que os pares (a,b) que satisfazem essas desigualdades estão em $\mathcal{L}$. Aplicando $T_1 \circ \tilde{T}_0$, temos

$$T_1 \circ \tilde{T}_0(a,b) = T_1\left(\frac{3}{8}a, b\right) = \left(\frac{3(n+3)}{8n}a, \frac{(n+3)}{n}b - \frac{3(n+3)}{n}\right).$$

Então temos

$$1 < \frac{3(n+3)^2}{24n} < \frac{3(n+3)}{8n}a \leq \frac{9(n+3)^2}{64n} < \frac{3(n+3)}{8}$$

onde a última desigualdade é válida para $n \geq 1$,. Além disso,

$$7 < 8 \cdot \frac{3(n+3)^2}{24n} \leq 8 \cdot \frac{3(n+3)}{8n}a + \frac{(n+3)}{n}b - \frac{3(n+3)}{n}$$

e $b < n+2$ é análogo ao caso anterior.

Como as desigualdades valem estritamente, $T_1 \circ \tilde{T}_1(a,b) \in \text{int}(\mathcal{L})$.

Caso 3: Se $3 \leq a \leq \frac{3(n+3)}{8}$, $b < 3$, $3a+b \geq 8$.

Neste caso, se $n > 1$ temos $n+2 > 3$, de modo que (a,b) satisfazendo essas desigualdades está em $\mathcal{L}$. Aplicando $\tilde{T}_0$, temos

$$\tilde{T}_0(a,b) = \left(\frac{3}{8}a, b\right).$$

Então, temos

$$1 < \frac{9}{8} \leq \frac{3}{8}a \leq \frac{9}{64}(n+3) < \frac{3}{8}(n+3).$$

Agora,

$$8 \cdot \frac{3}{8}a + b = 3a + b \geq 8 > 7$$

e, por nossa hipótese inicial, $b < n+2$, de modo que todas as desigualdades são satisfeitas estritamente. Assim, $\tilde{T}_0(a,b) \in \text{int}(\mathcal{L})$.

Caso 4: Se $1 \leq a \leq 3$, $b < 3$ e $8a+b \geq 10$.

$(a,b) \in \mathcal{L}$ se $n > 5$. Como

$$T_1(a,b) = \left(\frac{(n+3)}{n}a, \frac{(n+3)}{n}b - 3\frac{(n+3)}{n} \right)$$

temos

$$1 < \frac{(n+3)}{n} \leq \frac{(n+3)}{n}a \geq 3\frac{(n+3)}{n} < 3\frac{(n+3)}{8}$$

onde última desigualdade vale para $n > 8$. Além disso,

$$\frac{(n+3)}{n}b - 3\frac{(n+3)}{n} < 0 < (n+2)$$

para $n > -1$. E

$$8\frac{(n+3)}{n}a + \frac{(n+3)}{n}b = \frac{(n+3)}{n}(8a+b-3) \geq \frac{(n+3)}{n}7 > 7$$

como todas as desigualdades valem estritamente, $T_1(a,b) \in \text{int}(\mathcal{L})$.

Caso 5: Se $1 \leq a < 3$ e $7 \leq 8a+b < 10$.

Observando que $1 \leq a < 3 \leq \frac{3(n+3)}{8}$, para $n \geq 5$ e $8a+b < 10 \Rightarrow b < 10 < n+2$ se $n > 8$, temos que os pares (a,b) que satisfazem essas desigualdades estão em $\mathcal{L}$.

Denotaremos

$$i(a) := \begin{cases} 2, & 1 \leq a \leq \frac{256}{135} \\ 3, & \frac{256}{135} < a < 3 \end{cases}, \qquad c(a) := \frac{3^{i(a)}}{8^{i(a)-1}}a, \qquad m := \frac{n}{n+3}$$

como $1 \leq a < 3$, temos

$$\frac{9}{8} \leq c(a) < \frac{81}{64}$$

e podemos supor, em particular, que

$$\frac{4}{5} < \frac{9}{8} \leq c(a) < \frac{81}{64} < \frac{32}{15}$$

Precisaremos de algumas desigualdades, listadas abaixo:

1. $10 - 3 - 3m - 3m^2 - c(a) < \frac{n^3(n+2)}{(n+3)^4}$, válida para $n > 42$;
2. $4 - 3m > \frac{8n}{(n+3)^2}$, válida para todo n ;
3. $3m^2 + \frac{8m^3}{n+3} - \frac{8}{3}c(a) < \frac{n^2(n+2)}{(n+3)^3}$, para $n > 0$;
4. $4 - \frac{5}{3}c(a) > \frac{8n}{(n+3)^2}$, para todo n;

5. $\frac{27}{32} < \frac{(n-7)}{n+3}m^2$, para $n > 95$;
6. $3+3m-(\frac{17n+143}{3(n+3)})m^2 < \frac{n+1}{n+3}$, para $n > 8$;
7. $3+\frac{n+1}{n+3}m-\frac{2}{3}(\frac{2n+16}{n+3}+3) > \frac{7}{n+3}$, para $n > 25$.

Se tomarmos então $n > 130$ todas essas desigualdades são válidas.

No que segue, encontraremos algumas composições apropriadas dos operadores de renormalização que associamos a K e $\tilde{K}$, escreveremos cada composição de um modo particularmente útil que será argumentado.

I. $\tilde{T}_1^{i(a)} \circ T_0 \circ T_1^3 = \left(\frac{(n+3)^4}{n^3}(\frac{3}{8})^{i(a)}a, \frac{(n+3)^4}{n^3}(8a+t-3-3m-3m^2-c(a))\right)$

Para mostrar que tal composição tem essa forma, iniciamos supondo $i(a) = 2$, e nesse caso, temos

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_1^{i(a)} \circ T_0 \circ T_1^3(a,b) &= \tilde{T}_1^{i(a)} \circ T_0\left(\left(\frac{n+3}{n}\right)^3 a, \left(\frac{n+3}{n}\right)^3 b - 3\left(\frac{n+3}{n}\right)^3 \right. \\
&\qquad \left. -3\left(\frac{n+3}{n}\right)^2 - 3\left(\frac{n+3}{n}\right)\right) \\
&= \tilde{T}_1^{i(a)}\left(\frac{(n+3)^4}{n^3}a, \frac{(n+3)^4}{n^3}(b-3) - 3\frac{(n+3)^3}{n^2} - 3\frac{(n+3)}{n^2}\right) \\
&= \left(\left(\frac{3}{8}\right)^2 \frac{(n+3)^4}{n^3}a, \frac{(n+3)^2}{n}\left(\frac{(n+3)^2}{n^2}(b-3)\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. -3\frac{(n+3)}{n} - 3\right) + 5\frac{(n+3)^4}{n^3}a + 5\cdot\frac{3}{8}\frac{(n+3)^4}{n^3}a\right) \\
&= \left(\left(\frac{3}{8}\right)^2 \frac{(n+3)^4}{n^3}a, \frac{(n+3)^4}{n^3}\left((b-3) - 3\frac{n}{n+3}\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. -3\frac{n^2}{(n+3)^2}\right) + 5\frac{(n+3)^4}{n^3}a + 5\cdot\frac{3}{8}\frac{(n+3)^4}{n^3}a\right) \\
&= \left(\left(\frac{3}{8}\right)^2 \frac{(n+3)^4}{n^3}a, \frac{(n+3)^4}{n^3}\left(b-3-3m-3m^2\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. +5a+5\cdot\frac{3}{8}a\right)\right) \\
&= \left(\left(\frac{3}{8}\right)^2 \frac{(n+3)^4}{n^3}a, \frac{(n+3)^4}{n^3}\left(b-3-3m-3m^2\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. +8a+5a\frac{3}{8}-3a\right)\right) \\
&= \left(\left(\frac{3}{8}\right)^{i(a)} \frac{(n+3)^4}{n^3}a, \frac{(n+3)^4}{n^3}\left(8a+b-3-3m\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. -3m^2-c(a)\right)\right)
\end{aligned}$$

fazendo uma conta similar para $i(a)=3$ temos o resultado desejado.

II. $\tilde{T}_1^{i(a)}\circ T_0\circ T_1^2=\left(\frac{(n+3)^3}{n^2}(\frac{3}{8})^{i(a)}a,\frac{(n+3)^4}{n^3}(8a+t-3-3m-c(a))\right)$

Também iniciaremos supondo que $i(a)=2$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_1^{i(a)}\circ T_0\circ T_1^2(a,b) &= \tilde{T}_1^{i(a)}\circ T_0\left(\left(\frac{n+3}{n}\right)^2 a,\left(\frac{n+3}{n}\right)^2(b-3)-3\left(\frac{n+3}{n}\right)\right)\\
&= \tilde{T}_1^{i(a)}\left(\frac{(n+3)^3}{n^2}a,\frac{(n+3)^3}{n^2}(b-3)-3\frac{(n+3)^2}{n}\right)\\
&= \left(\left(\frac{3}{8}\right)^2\frac{(n+3)^3}{n^2}a,\frac{(n+3)^3}{n^2}(b-3)-3\frac{(n+3)^2}{n}\right.\\
&\qquad\left.+5a\frac{(n+3)^3}{n^2}+5a\left(\frac{3}{8}\right)\frac{(n+3)^3}{n^2}\right)\\
&= \left(\left(\frac{3}{8}\right)^2\frac{(n+3)^3}{n^2}a,\frac{(n+3)^2}{n}\left(\frac{(n+3)}{n}(b-3)-3\right)\right.\\
&\qquad\left.+5a\frac{(n+3)^3}{n^2}+5a\left(\frac{3}{8}\right)\frac{(n+3)^3}{n^2}\right)\\
&= \left(\left(\frac{3}{8}\right)^2\frac{(n+3)^3}{n^2}a,\frac{(n+3)^3}{n^2}\left(b-3-3m+5a+5a\frac{3}{8}\right)\right)\\
&= \left(\left(\frac{3}{8}\right)^{i(a)}\frac{(n+3)^3}{n^2}a,\frac{(n+3)^3}{n^2}\left(8a+b-3-3m-c(a)\right)\right)
\end{aligned}$$

o caso em que $i(a)=3$ é mostrado de modo similar.

III. $\tilde{T}_0\circ\tilde{T}_1^{i(a)-1}\circ T_0\circ T_1^2(a,b)=\left(\frac{(n+3)^3}{n^2}(\frac{3}{8})^{i(a)}a,\frac{(n+3)^3}{n^2}(8a+b-3-\frac{8}{3}c(a))\right)$

Agora, tomando $i(a)=3$, temos

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_0\circ\tilde{T}_1^{i(a)-1}\circ T_0\circ T_1^2(a,b) &= \tilde{T}_0\circ\tilde{T}_1^{i(a)-1}\circ T_0\left(\left(\frac{n+3}{n}\right)^2 a,\left(\frac{n+3}{n}\right)^2(b-3)\right.\\
&\qquad\left.-3\left(\frac{n+3}{n}\right)\right)\\
&= \tilde{T}_0\circ\tilde{T}_1^{i(a)-1}\left(\frac{(n+3)^3}{n^2}a,\frac{(n+3)^3}{n^2}(b-3)\right.\\
&\qquad\left.-3\frac{(n+3)^2}{n}\right)\\
&= \tilde{T}_0\left(\left(\frac{3}{8}\right)^2\frac{(n+3)^3}{n^2}a,\frac{(n+3)^3}{n^2}(b-3)\right.\\
&\qquad\left.-3\frac{(n+3)^2}{n}+5a\frac{(n+3)^3}{n^2}+5a\cdot\frac{3}{8}\frac{(n+3)^3}{n^2}\right)\\
&= \left(\left(\frac{3}{8}\right)^3\frac{(n+3)^3}{n^2}a,\frac{(n+3)^3}{n^2}(b-3)\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -3\frac{(n+3)^2}{n}+5a\frac{(n+3)^3}{n^2}+5a\cdot\frac{3}{8}\frac{(n+3)^3}{n^2}\Big)\\
= & \left(\left(\frac{3}{8}\right)^3\frac{(n+3)^3}{n^2}a,\frac{(n+3)^2}{n}\left(\frac{(n+3)}{n}(b-3)-3\right)\right.\\
& \left.+5a\frac{(n+3)^3}{n^2}+5a\frac{3}{8}\frac{(n+3)^3}{n^2}\right)\\
= & \left(\left(\frac{3}{8}\right)^3\frac{(n+3)^3}{n^2}a,\frac{(n+3)^3}{n^2}(b-3-3m)\right.\\
& \left.+5a\frac{(n+3)^3}{n^2}+5a\frac{3}{8}\frac{(n+3)^3}{n^2}\right)\\
= & \left(\left(\frac{3}{8}\right)^3\frac{(n+3)^3}{n^2}a,\frac{(n+3)^3}{n^2}\left(b-3-3m+5a+5a\frac{3}{8}\right)\right)\\
= & \left(\left(\frac{3}{8}\right)^{i(a)}\frac{(n+3)^3}{n^2}a,\frac{(n+3)^3}{n^2}\left(8a+b-3-3m-\frac{8}{3}c(a)\right)\right)
\end{aligned}
$$

para $i(a)=2$ o resultado é obtido de modo similar.

IV. $\tilde{T}_0\circ\tilde{T}_1^{i(a)-1}\circ T_0\circ T_1(a,b)=\left(\frac{(n+3)^2}{n}(\frac{3}{8})^{i(a)}a,\frac{(n+3)^2}{n}(8a+b-3-\frac{8}{3}c(a))\right)$

Novamente, suporemos $i(a)=3$, e o caso $i(a)=2$ será obtido de modo similar.

$$
\begin{aligned}
\tilde{T}_0\circ\tilde{T}_1^{i(a)-1}\circ T_0\circ T_1(a,b) &= \tilde{T}_0\circ\tilde{T}_1^{i(a)-1}\circ T_0\left(\frac{(n+3)}{n}a,\frac{(n+3)}{n}(b-3)\right)\\
&= \tilde{T}_0\circ\tilde{T}_1^{i(a)-1}\left(\frac{(n+3)^2}{n}a,\frac{(n+3)^2}{n}(b-3)\right)\\
&= \tilde{T}_0\left(\left(\frac{3}{8}\right)^2\frac{(n+3)^2}{n}a,\frac{(n+3)^2}{n}(b-3)+5a\frac{(n+3)^2}{n}\right.\\
&\qquad \left.+5a\frac{3}{8}\frac{(n+3)^2}{n}\right)\\
&= \left(\left(\frac{3}{8}\right)^3\frac{(n+3)^2}{n}a,\frac{(n+3)^2}{n}\left(b-3+5a+5a\frac{3}{8}\right)\right)\\
&= \left(\left(\frac{3}{8}\right)^{i(a)}\frac{(n+3)^2}{n}a,\frac{(n+3)^2}{n}\left(8a+b-3-\frac{8}{3}c(a)\right)\right)
\end{aligned}
$$

Por simplicidade, denotaremos por $(\tilde{a},\tilde{b})$ as imagens de (a,b) pelos operadores acima obtidos.

Iniciamos observando que

$$\frac{(n+3)^2}{n}\left(\frac{3}{8}\right)^{i(a)}a=\frac{(n+3)^2}{8n}c(a)$$

e o mesmo pode ser feito com os demais valores de $\tilde{a}$. Como $\frac{4}{5} < c(a) < \frac{32}{15}$, temos

$$1 < \frac{(n+3)^2}{8n} \cdot \frac{4}{5} \leq \frac{(n+3)^2}{8n} c(a)$$

e

$$\frac{(n+3)^4}{8n^3} c(a) \leq \frac{(n+3)^4}{n^3} \cdot \frac{32}{15} = \frac{(n+3)^3}{n^3} \cdot \frac{32}{45} \cdot 3\frac{(n+3)}{8} < 3\frac{(n+3)}{8}$$

como $\frac{(n+3)^2}{n} \leq \frac{(n+3)^3}{n^2} \leq \frac{(n+3)^4}{n^3}$, isso nos dá

$$1 < \tilde{a} < 3\frac{(n+3)}{8}$$

Para as demais desigualdades necessárias para mostrar que $\mathcal{L}$ é um compacto recorrente, dividiremos em alguns casos.

i) $8a + b \geq 3 + 3m + 3m^2 + \frac{8}{n+3} m^3$

Aplicando o operador I, então

$$\tilde{a} = \frac{(n+3)^4}{n^3} \left(\frac{3}{8}\right)^{i(a)} a \quad \text{e} \quad \tilde{b} = \frac{(n+3)^4}{n^3}(8a + b - 3 - 3m - 3m^2 - c(a))$$

assim,

$$\begin{aligned}
8\tilde{a} + \tilde{b} &= \frac{(n+3)^4}{n^3}\left(8 \cdot \frac{c(a)}{8} + 8a + b\right) \\
&= \frac{(n+3)^4}{n^3}(8a + b - 3 - 3m - 3m^2) \\
&\geq \frac{(n+3)^4}{n^3}\left(3 + 3m + 3m^2 + \frac{8m^3}{n+3} - 3 - 3m - 3m^2\right) \\
&= \frac{(n+3)^4}{n^3} \cdot \frac{8m^3}{(n+3)} \\
&= \frac{(n+3)^3}{n^3} \cdot \frac{8n^3}{(n+3)^3} \\
&> 7
\end{aligned}$$

além disso, pela desigualdade 1, temos

$$\frac{(n+3)^4}{n^3}(7 - 3m - 3m^2 - c(a)) < n + 2$$

usando isso,

$$\begin{aligned}
\tilde{b} &= \frac{(n+3)^4}{n^3}(8a + b - 3 - 3m - 3m^2 - c(a)) \\
&< \frac{(n+3)^4}{n^3}(7 - 3m - 3m^2 - c(a)) \\
&< n + 2
\end{aligned}$$

ii) $8a+b \leq 3+3m+\frac{(n+1)}{n+3}m^2+c(a)$

Neste caso, aplicamos o operador II, e temos

$$\tilde{a}=\frac{(n+3)^3}{n^2}\left(\frac{3}{8}\right)^{i(a)}a \quad \text{e} \quad \tilde{b}=\frac{(n+3)^3}{n^2}(8a+b-3-3m-c(a))$$

e usando a desigualdade 2, temos

$$\begin{aligned}
8\tilde{a}+\tilde{b} &= \frac{(n+3)^3}{n^2}\left(8\cdot\frac{c(a)}{8}+8a+b-3-3m-c(a)\right)\\
&= \frac{(n+3)^3}{n^2}(8a+b-3-3m)\\
&> \frac{(n+3)^3}{n^2}(7-3-3m)\\
&= \frac{(n+3)^3}{n^2}(4-3m)\\
&> \frac{(n+3)^3}{n^2}\cdot 8\cdot\frac{n}{(n+3)^2}\\
&= 8(n+3)\\
&> 7
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\tilde{b} &= \frac{(n+3)^3}{n^2}(8a+b-3-3m-c(a))\\
&< \frac{(n+3)^3}{n^2}\left(3+3m+\frac{(n+1)}{n+3}m^2+c(a)-3-3m-c(a)\right.\\
&= \frac{(n+3)^3}{n^2}\cdot\frac{(n+1)}{(n+3)}\cdot\frac{n^2}{(n+3)^2}\\
&= n+1\\
&< n+2
\end{aligned}$$

iii) $8a+b \geq 3+3m+\frac{8}{(n+3)}m^2+\frac{5}{3}c(a)$ e não estamos no caso (i)

Aplicaremos o operador III, neste caso,

$$\tilde{a}=\frac{(n+3)^3}{n^2}\left(\frac{3}{8}\right)^{i(a)}a \quad \text{e} \quad \tilde{b}=\frac{(n+3)^3}{n^2}\left(8a+b-3-3m-\frac{8}{3}c(a)\right)$$

então temos

$$\begin{aligned} 8\tilde{a}+\tilde{b} &= \frac{(n+3)^3}{n^2}\left(8a+b-3-3m-\frac{5}{3}c(a)\right) \\ &\geq \frac{(n+3)^3}{n^2}\left(3+3m+\frac{8}{n+3}m^2+\frac{5}{3}c(a)-3-3m-\frac{5}{3}c(a)\right) \\ &= \frac{(n+3)^3}{n^2}\cdot\frac{8}{(n+3)}\cdot\frac{n^2}{(n+3)^2} \\ &= 8 \\ &> 7 \end{aligned}$$

e, similarmente, usando a desigualdade 3, temos $\tilde{b} < n+2$

iv. $8a+b \leq 3+\frac{(n+1)}{n+3}m+\frac{8}{3}c(a)$

Aplicaremos o operador IV, assim,

$$\tilde{a}=\frac{(n+3)^2}{n}\left(\frac{3}{8}\right)^{i(a)}a \quad \text{e} \quad \tilde{b}=\frac{(n+3)^2}{n}\left(8a+b-3-\frac{8}{3}c(a)\right)$$

donde, pela desigualdade 4,

$$\begin{aligned} 8\tilde{a}+\tilde{b} &= \frac{(n+3)^2}{n}\left(8\frac{c(a)}{8}+8a+b-3-\frac{8}{3}c(a)\right) \\ &= \frac{(n+3)^2}{n}\left(8a+b-3-\frac{5}{3}c(a)\right) \\ &\geq \frac{(n+3)^2}{n}\left(4-\frac{5}{3}c(a)\right) \\ &> \frac{(n+3)^2}{n}\cdot 8\cdot\frac{n}{(n+3)^2} \\ &= 8 \\ &> 7 \end{aligned}$$

e para $\tilde{b}$, temos

$$\begin{aligned} \tilde{b} &= \frac{(n+3)^2}{n}\left(8a+b-3-\frac{8}{3}c(a)\right) \\ &\leq \frac{(n+3)^2}{n}\left(3+\frac{(n+1)}{n+3}m+\frac{8}{3}c(a)-3-\frac{8}{3}c(a)\right) \\ &= \frac{(n+3)^2}{n}\cdot\frac{(n+1)}{(n+3)}\frac{n}{(n+3)} \\ &= n+1 \\ &< n+2 \end{aligned}$$

Agora, analisaremos duas possibilidades, de acordo com o intervalo onde a se encontra.

- $i(a) = 3$

  Neste caso, $a \in (\frac{256}{135}, 3)$ e, então $c(a) < \frac{3^3}{8^2} \cdot 3 = \frac{81}{64}$ como

  $$\frac{2}{3} \cdot \frac{81}{64} = \frac{27}{32}$$

  temos, pela desigualdade 5,

  $$\frac{2}{3} \cdot \frac{81}{64} \frac{27}{32} < m^2 \frac{(n-7)}{n+3} \Leftrightarrow \frac{8m^2}{n+3} - \frac{(n+1)m^2}{n+3} < c(a) - \frac{5}{3}c(a)$$

  isso nos dá

  $$3 + 3m + \frac{8}{n+3}m^2 + \frac{5}{3}c(a) < 3 + 3m + \frac{n+1}{n+3}m^2 + c(a)$$

  e, temos, pelos itens ii e iii,

  $$3 + 3m + \frac{8}{n+3}m^2 + \frac{5}{3}c(a) \leq 8a + b \leq 3 + 3m + \frac{n+1}{n+3}m^2 + c(a)$$

  de modo que a imagem de (a, b) por composições adequadas dos operadores de renormalização estão em $\text{int}(\mathcal{L})$.

- $i(a) = 2$, $a \in [1, \frac{256}{135}]$

  Neste caso não conseguimos garantir a desigualdade acima. Caso ela continue válida, retornamos a ele, de modo que composições adequadas dos operadores de renormalização estão no interior de $\mathcal{L}$.

  Observe que, para $n > 4$,

  $$3 + 3m + 3m^2 + \frac{8}{n+3}m^3 > 3 + \frac{(n+1)}{n+3}m^3 + \frac{8}{3}c(a)$$

  e os pares (a, b) tais que

  $$\max\{3 + 3m + \frac{n+1}{n+3}m^2 + c(a), 3 + \frac{n+1}{n+3}m + \frac{8}{3}c(a)\} < 8a + b$$

  e

  $$8a + b < \min\{3 + 3m + \frac{8}{n+3}m^2 + \frac{5}{3}c(a), 3 + 3m + 3m^2 + \frac{8}{n+3}m^3\}$$

  não estão contemplados nos casos anteriores. Suponhamos então que tais desigualdades sejam válidas.

  De

  $$3 + 3m + \frac{n+1}{n+3}m^2 + c(a) < 8a + b < 3 + 3m + \frac{8}{n+3}m^2 + \frac{5}{3}c(a)$$

temos

$$\frac{(n+1)}{n+3}m^2+c(a)<\frac{8m^2}{n+3}+\frac{5}{3}c(a)\Leftrightarrow\frac{3m^2(n-7)}{2(n+3)}<c(a) \tag{7.2}$$

além disso, como

$$3+\frac{n+1}{n+3}m+\frac{8}{3}c(a)<8a+b<3+3m+3m^2+\frac{8}{n+3}m^3$$

temos

$$c(a)<\frac{3}{8}\left(\frac{(2n+8)}{n+3}m+3m^2+\frac{8}{n+3}m^2\right)<\frac{3}{8}\left(\frac{2n+16}{n+3}+3\right) \tag{7.3}$$

Aplicando a esses pares (a,b) o operador

$$\begin{aligned}
\tilde{T_1}\circ\tilde{T_0}\circ T_0(a,b) &= \tilde{T_1}\circ\tilde{T_0}((n+3)a,(n+3)b)\\
&= \tilde{T_1}\left(\frac{3}{8}(n+3)a,(n+3)b\right)\\
&= \left(\left(\frac{3}{8}\right)^2(n+3)a,(n+3)\left(b+5\cdot\frac{3}{8}a\right)\right)\\
&= \left(\left(\frac{3}{8}\right)^2(n+3)a,(n+3)\left(8a+b-\frac{49}{8}a\right)\right)\\
&= \left(\left(\frac{3}{8}\right)^2(n+3)a,(n+3)\left(8a+b-\frac{49}{9}\cdot\frac{9}{8}a\right)\right)\\
&= \left(\left(\frac{3}{8}\right)^2(n+3)a,(n+3)\left(8a+b-\frac{49}{9}c(a)\right)\right)
\end{aligned}$$

temos então

$$1<\left(\frac{3}{8}\right)^2(n+3)<\left(\frac{3}{8}\right)^2(n+3)a<3\frac{(n+3)}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{256}{135}<3\frac{(n+3)}{8}$$

usando que $8a+b<3+3m+\frac{8}{n+3}m^2+\frac{5}{3}c(a)$ e as desigualdades (7.2) e 6, temos

$$\begin{aligned}
(n+3)\left(8a+b-\frac{49}{9}c(a)\right) &= (n+3)\left(8a+b-\frac{5}{3}c(a)-\frac{34}{9}c(a)\right)\\
&\leq (n+3)\left(3+3m+\frac{8m^2}{n+3}-\frac{34}{9}\cdot\frac{3(n-7)}{2(n+3)}m^2\right)\\
&= (n+3)\left(3+3m+\frac{8m^2}{n+3}-\frac{17}{3}\cdot\frac{(n-7)}{(n+3)}m^2\right)\\
&= (n+3)\left(3+3m+\frac{m^2}{n+3}\left(8-\frac{17(n-7)}{3}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (n+3)\left(3+3m+\frac{m^2}{n+3}\left(\frac{17n+143}{3}\right)\right) \\ &< (n+3)\frac{(n+1)}{(n+3)} \\ &< n+2 \end{aligned}$$

e usando que $8a+b > 3+\frac{(n+1)}{n+3}m+\frac{8}{3}c(a)$ e as inequações 7.3 e 7,

$$\begin{aligned} (n+3)\left(8\left(\frac{3}{8}\right)^2 a+8a+b-\frac{49}{9}c(a)\right) &= (n+3)\left(8\frac{c(a)}{8}+8a+b-\frac{49}{9}c(a)\right) \\ &= (n+3)\left(8a+b-\frac{40}{9}c(a)\right) \\ &= 8a+b-\frac{8}{3}c(a)-\frac{16}{9}c(a)\Big) \\ &> (n+3)\Bigg(3+\frac{(n+1)}{n+3}m \\ &\qquad -\frac{16}{9}\cdot\frac{3}{8}\left(\frac{2n+16}{n+3}+3\right)\Bigg) \\ &= (n+3)\Bigg(3+\frac{(n+1)}{n+3}m \\ &\qquad -\frac{2}{3}\left(\frac{2n+16}{n+3}+3\right)\Bigg) \\ &> (n+3)\frac{7}{n+3} \end{aligned}$$

como as desigualdades são estritas, $\tilde{T}_1\circ\tilde{T}_0\circ T_0(a,b)\in \text{int}(\mathcal{L})$. Isso finaliza o caso 5.

Caso 6: Se $3\leq a\leq 3\frac{(n+3)}{n}$, $8a+b\geq 7$ e $3a+b<8$.

Como $b<3a+b<8<n+2$ se $n>6$, temos que $(a,b)\in\mathcal{L}$. E neste caso, usando

$$\tilde{T}_1(a,b)=\left(\frac{3}{8}a, b+5a\right)$$

obtemos, para a primeira entrada

$$1<\frac{3}{8}\cdot 3\leq\frac{3}{8}a\leq\frac{3}{8}\cdot 3\frac{(n+3)}{8}<3\frac{(n+3)}{8}$$

para a segunda entrada,

$$b+5a=b+3a+2a<8+2a\leq 8+2\cdot 3\frac{(n+3)}{8}<n+2$$

onde a última desigualdade vale para $n > 33$. Além disso,

$$8 \cdot \frac{3}{8}a + b + 5a = 8a + b \geq 7$$

quando essa desigualdade vale estritamente, junto com as outras, temos $\tilde{T}_1(a,b) \in \text{int}(\mathcal{L})$. O caso onde a igualdade ocorre está contemplado no caso 5.

Isso encerra a demonstração do teorema.

□

8 A Topologia da Diferença de Conjuntos de Cantor do Tipo Afim

8.1 Uma Condição Para a Não Existência Interseções Extremais Estáveis

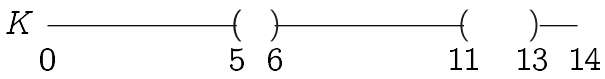
No exemplo 5.1, construímos, a partir de um conjunto de Cantor $\tilde{K} \subset K$ com $\tau(\tilde{K}) > \tau(K)$, e isso foi feito omitindo intervalos da partição de Markov $\mathcal{R} = \{I_1, ..., I_r\}$ de K e considerando o mesmo mapa Ψ que o define restrito a tais intervalos.

No exemplo citado, os intervalos omitidos não estão nos extremos do fecho convexo de K, isto é, I_1 e I_r não foram omitidos. Veremos como proceder para obter uma construção similar caso um desses intervalos tivessem sido escolhidos (é claro que só obtemos um conjunto de Cantor caso existam 2 intervalos da partição de Markov que não tenham sido omitidos, e assumiremos que isso é satisfeito). Observe que esse caso é mais delicado, uma vez que o fecho convexo de K é alterado.

Seja K um conjunto de Cantor regular com partição de Markov $\mathcal{R} = \{I_1, ..., I_r\}$ e função expansora Ψ tal que $\Psi|_{I_1}$ é crescente e sobrejetora e que 0 é o extremo esquerdo de I_1. Omitiremos o intervalo I_r. Se $\Psi|I_{r-1}$ é crescente e sobrejetora, tomamos b como sendo o único ponto fixo de Ψ em I_{r-1}, se $\Psi|_{I_{r-1}}$ é decrescente e sobrejetora, tomamos b como sendo o extremo direito de I_{r-1}. Obtemos então um conjunto de Cantor $\tilde{K} \subset K$, com partição de Markov $\tilde{\mathcal{R}} = \{\tilde{I}_1, ..., \tilde{I}_{r-1}\}$, onde $\tilde{I}_i = \Psi^{-1}([0,b]) \cap I_i$, e mapa expansor $\tilde{\Psi}$ definido como a restrição de Ψ aos intervalos de $\tilde{\mathcal{R}}$. Observe que algum dos $\tilde{I}_i$ podem ser vazios. Caso isso ocorra, nossa partição de Markov deverá ter menos que $r-1$ elementos. Isso não é um problema, uma vez que a quantidade de intervalos remanescentes deverá ser, no mínimo 2.

Daremos um exemplo particular dessa construção, que, juntamente com nosso próximo teorema, mostrará que a existência de interseção extremal estável depende da ordem dos conjuntos de Cantor.

Exemplo 8.1. Considere o conjunto de Cantor do tipo afim



construímos a partir de K um conjunto de Cantor $\tilde{K}$ seguindo o caminho descrito acima.

Como $\Psi|_{[6,11]}$ é sobrejetiva e crescente, tomamos $b=\frac{28}{6}$, que é o único ponto fixo de $\Psi|_{[6,11]}=\frac{14}{5}x-\frac{84}{5}$. Então $\tilde{K}$ terá partição de Markov $\tilde{\mathcal{R}}=\{[0,\frac{10}{3}],[6,\frac{28}{3}]\}$ e será dado por

$$\tilde{K}=\bigcap_{n\geq 1}\Psi^{-n}\left(\left[0,\frac{10}{3}\right]\cup\left[6,\frac{28}{3}\right]\right).$$

Então, se considerarmos o conjunto de Cantor

então $(K,\overline{K})$ não satisfaz o GTT. Para mostrar isso, basta considerarmos $\lambda=\frac{3}{2}$, $t=11+\varepsilon$, $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, então considerando os respectivos domínios de Markov, temos que $\mathcal{D}$ não está contido num gap de $\frac{3}{2}\overline{\mathcal{D}}+11+\varepsilon$, $\frac{3}{2}\overline{\mathcal{D}}+11+\varepsilon$ não está contido num gap de $\mathcal{D}$ e $(\frac{3}{2}\overline{\mathcal{D}}+11+\varepsilon)\cap\mathcal{D}=\emptyset$.

Porém, $\tau(\tilde{K})=\frac{5}{4}$, de modo que, $\tau(\tilde{K})\cdot\tau(\overline{K})=\frac{5}{4}\cdot 1>1$, assim, $(\tilde{K},\overline{K})$ tem interseção estável garantida pelo Gap Lemma, como $\tilde{K}\subset K$, temos que $(K,\overline{K})$ têm interseção estável. Além disso, $(\tilde{K}+3,\overline{K})$, e assim, $(K+3,\overline{K})$ têm interseção extremal estável. Porém, como $\frac{\log(\frac{14}{5})}{\log 3}\notin\mathbb{Q}$ e para $\lambda=\frac{3}{2}$ e $t=11+\varepsilon$, temos $K\cap(\frac{3}{2}\overline{K}+14)=\emptyset$, pelo teorema 8.1 $\overline{K}-K$ não contém intervalo, ou seja, $(K,\overline{K}+14)$ não tem interseção extremal estável.

Definição 8.1. *Dados dois conjuntos compactos C_1 e C_2 com fechos convexos $[a,b]$ e $[c,d]$, respectivamente, diremos que $C_1\longrightarrow C_2$ se, e somente se, $a<c$, $b<d$ e $c<b$.*

O teorema abaixo, que foi demonstrado em [5], caracteriza quando a diferença aritmética de dois conjuntos de Cantor regulares $K-\tilde{K}$ tais que o extremo direito de K coincide com o extremo esquerdo de $\tilde{K}$ contém um intervalo do tipo $[0,\delta]$, $\delta>0$.

Teorema 8.1. *Seja $(K,\tilde{K})$ um par de conjuntos de Cantor regulares com partições de Markov $\mathcal{R}=\{I_1,...,I_r\}$, $\tilde{\mathcal{R}}=\{J_1,...,J_s\}$ e mapas expansores Ψ e $\tilde{\Psi}$, respectivamente, tais que o extremo direito de K coincide com o extremo esquerdo de $\tilde{K}$ e, além disso, $\Psi'|_{I_r}$ e $\tilde{\Psi}'|_{J_1}$ são afins, crescentes, sobrejetoras e $\frac{\log(\Psi'|_{I_r})}{\log(\tilde{\Psi}'|_{J_1})}\notin\mathbb{Q}$. Então $\tilde{K}-K\not\supset[0,\delta]$ para todo $\delta>0$ se, e somente se, existem $\lambda>0$ e $t\in\mathbb{R}$ tais que $(\lambda K+t)\longrightarrow\tilde{K}$ e $(\lambda K+t)\cap\tilde{K}=\emptyset$.*

Demonstração. Iniciaremos supondo que $\tilde{K} - K \not\supset [0,\delta]$ para todo $\delta > 0$. Como os extremos direito e esquerdo de K e $\tilde{K}$, respectivamente, coincidem, temos que $0 \in \tilde{K} - K$. Noutras palavras, K e $\tilde{K}$ se intersectam. Mas como $\tilde{K} - K \not\supset [0,\delta]$ para todo $\delta > 0$, essa interseção não pode ser estável, isso nos diz que, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $t > 0$ para o qual $(K+t) \longrightarrow \tilde{K}$, mas $(K+t) \cap \tilde{K} = \emptyset$.

Para a volta, fazemos $\lambda_1 = \Psi'|_{I_r}$ e $\lambda_2 = \Psi'|_{J_1}$, como $\alpha = \frac{\log \lambda_1}{\log \lambda_2} \notin \mathbb{Q}$, então $\frac{\lambda_2^n}{\lambda_1^m}$ para (m,n) pares de números inteiros, é denso em $\mathbb{R}^+$. De fato, tomando o log, que é um homeomorfismo, temos que este conjunto é denso se, e somente se,

$$\begin{aligned} A &= \left\{ n\log\lambda_2 - m\log\lambda_1; n,m \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ \log\lambda_2 \left(n - m\frac{\log\lambda_1}{\log\lambda_2} \right); n,m \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \log\lambda_2 \left\{ n - m\frac{\log\lambda_1}{\log\lambda_2}; n,m \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

é denso, o que de fato é verdade.

Definimos uma aplicação

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ \gamma &\mapsto \tilde{K} - \gamma K \end{aligned}$$

onde $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ é o conjunto das partes de $\mathbb{R}$. Mostraremos que f é contínua considerando em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ a métrica de Hausdorff, definida por

$$d(X,Y) = \max\left\{ \sup_{x\in X} d(x,Y), \sup_{y\in Y} d(X,y) \right\}.$$

Então, dado $\delta > 0$, temos, para $\gamma_1 \in \mathbb{R}$ tal que $|\gamma_1 - \gamma| < \delta$,

$$d(f(\gamma_1), f(\gamma)) = \max\left\{ \sup_{t\in\tilde{K}-\gamma K} d(t, \tilde{K} - \gamma_1 K), \sup_{v\in\tilde{K}-\gamma_1 K} d(v, \tilde{K} - \gamma K) \right\}.$$

Note que sup deve ser alcançado nos extremos, que devem ter a forma $\tilde{y} - \gamma y$ e $\tilde{y} - \gamma_1 y$ de modo que a distância entre eles é menor que δ, o que mostra a continuidade de f.

Pelo exposto acima, dado $\delta > 0$, existem infinitos pares de inteiros (m,n) tais que

$$\left| \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1^m} - \lambda \right| < \delta.$$

Então, para δ suficientemente pequeno, tomando $t \notin \tilde{K} - \lambda K$, temos que

$$t \notin \tilde{K} - \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1^m} K \Rightarrow \lambda_2^{-n} t \notin \lambda_2^{-n}\tilde{K} - \lambda_1^{-m} K.$$

Para tais valores, temos

$$(\lambda_1^{-m}K + \lambda_2^{-n}t) \longrightarrow \lambda_2^{-n}\tilde{K}$$

Agora, como $\lambda_1, \lambda_2 > 1$, se $x \in \tilde{K} \cap (K + \lambda_2 t)$, então $x = y + \lambda_2^{-n}t$ para algum $y \in K$, isso nos dá

$$x = \lambda_1^{-m}\lambda_1^m y + \lambda_2^{-n}t = \lambda_1^{-m}\tilde{y} + \lambda_2^{-n}t$$

pois $y \in K$ que é invariante por Ψ. Temos ainda, pela $\tilde{\Psi}$-invariância de $\tilde{K}$, $x = \lambda_2^{-n}\tilde{x}$ para algum $\tilde{x} \in \tilde{K}$. Isso mostra que $x \in \lambda_2^{-n}\tilde{K} \cap (\lambda_1^{-m}K + \lambda_2^{-n}t)$. Noutras palavras,

$$\tilde{K} \cap (K + \lambda_2 t) \subset \lambda_2^{-n}\tilde{K} \cap (\lambda_1^{-m}K + \lambda_2^{-n}t)$$

Assim, se $\lambda_2^{-n}t \notin \lambda_2^{-n}\tilde{K} - \lambda_1^{-m}K$, temos que $\lambda_2^{-n}t \notin \tilde{K} - K$, como $\lambda_2^{-n}t$ pode ser arbitrariamente pequeno, isso implica que, para todo $\delta > 0$, $\tilde{K} - K \not\supset [0, \delta]$.

□

8.2 Cantorvals

Nesta seção, vamos definir um Cantorval, um tipo de conjunto perfeito, compacto, com interior denso e fronteira fractal. Tais conjuntos serão úteis para estudar a estrutura topológica da diferença aritmética de conjuntos de Cantor afins. Diferenças aritméticas que são topologicamente um Cantorval contrastam com aquelas onde as interseções são garantidas pela espessura, nas quais a diferença aritmética é uma união de intervalos.

No que segue, consideramos apenas os gaps limitados do conjunto, que será qualquer componente conexa limitada do seu complementar. Um intervalo é entendido como um intervalo não trivial, e um ponto é entendido como um intervalo trivial. Além disso, usaremos R para indicar elementos à direita e L para indicar elementos à esquerda. Isso destoa de capítulos anteriores, onde utilizamos, por exemplo, τ_D para espessura direita e τ_E para espessura esquerda. Essa modificação será feita para seguirmos o padrão já consolidado na teoria.

Definição 8.2. *Seja $C \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto e perfeito tal que qualquer gap é acumulado em cada lado por infinitos intervalos e gaps é chamado de M-Cantorval. Tal conjunto é formado por pontos, intervalos e gaps.*

Um subconjunto $C \subset \mathbb{R}$ compacto e perfeito no qual todo gap tem um intervalo adjacente à sua esquerda (direita) e é acumulado à direita (esquerda) por infinitos intervalos e gaps é chamado de R-Cantorval (L-Cantorval).

Podemos obter exemplos de um R-Cantorval (L-Cantorval) a partir de um conjunto de Cantor expandindo todos os pontos finais à esquerda (direita) de gaps em intervalos cuja soma dos comprimentos é finita. A construção de exemplos é análoga para M-Cantorvals, mas dessa vez utilizamos um subconjunto denso enumerável do conjunto de Cantor.

Exemplo 8.2. Construiremos, a partir do conjunto de Cantor Ternário, K, um R-Cantorval.

Para isso, iniciamos com o intervalo $[0,1]$ e removemos seu terço médio, $\mathcal{O}_\emptyset = (\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, restando os intervalos $I_1 = [0,\frac{1}{3}]$ e $I_2 = [\frac{2}{3},1]$.

Na segunda etapa removemos de I_2 seu terço médio, $\mathcal{O}_2$, restando três intervalos: I_1, I_{21}, I_{22}. Na terceira etapa, removemos de I_{22} se terço médio $\mathcal{O}_{22}$, restando os intervalos I_1, I_{21}, I_{221} e I_{222}.

De modo geral, na i-ésima etapa, removemos o terço médio de $I_{2...2}$, onde a palavra tem tamanho i-1, removemos o intervalo $\mathcal{O}_{2...2}$, também com palavra de tamanho i-1, restando os intervalos $I_1, I_{21}, ..., I_{2...21}, ..., I_{22}$, onde as palavras têm tamanho $1, 2, ..., i-1, i$, respectivamente.

O conjunto obtido ao fim da construção é um R-Cantorval.

Antes de prosseguirmos, daremos uma classificação para os gaps que aparecem na soma aritmética de conjuntos de Cantor regulares.

Definição 8.3. *Dado um gap $\mathcal{O}$ na soma aritmética de dois conjuntos de Cantor regulares, dizemos que $\mathcal{O}$ é um:*

- *RL-gap: Se $\mathcal{O}$ é um gap entre intervalos;*
- *R-gap: Se $\mathcal{O}$ é um gap com apenas um intervalo em seu extremo esquerdo;*
- *L-gap: Se $\mathcal{O}$ é um gap com um único intervalo em seu extremo direito;*
- *C-gap: Se $\mathcal{O}$ é um gap do tipo Cantor, ou seja, não contém intervalo em seus extremos.*

Observe que todos os gaps de um M-Cantorval são C-gaps, enquanto num R-Cantorval(L-Cantorval) temos R-gaps (L-gaps).

A seguir, mostremos uma proposição que apresenta um conjunto aberto $\mathcal{U}$ de conjuntos de Cantor regulares, no qual para pares genéricos $(K, \tilde{K}) \in \mathcal{U}$, $K + \tilde{K}$ é um M-Cantorval.

Dado um conjunto de Cantor K, com partição de Markov $\mathcal{R} = \{I_1, ..., I_r\}$, com fecho convexo I e mapa expansor Ψ tal que $\Psi|_{I_i} := \Psi^{(i)}$ é crescente e sobrejetora.

Se Ψ é de classe C^2 e $p \in K$ um ponto fixo para $\Psi^{(i)}$ com $p \in I_i$ (este ponto existe pela sobrejetividade de $\Psi^{(i)}$), segue do Teorema de Linearização de Poincaré que existe um difeomorfismo $\phi_{(i)}$ de K tal que $\Psi' := \phi_{(i)} \circ \Psi^i \circ \phi_{(i)}^{-1}$ é afim em $h^{-1}(I_i)$ com inclinação λ_i.

Definição 8.4. *Dado um conjunto de Cantor K com mapa expansor Ψ, com as notações acima e as restrições de Ψ aos intervalos adequados, consideramos $\Psi^R := \phi_r \circ \Psi^{(r)} \circ \phi_r^{-1}$ e $\Psi^L := \phi_1 \circ \Psi^{(1)} \circ \phi_1^{-1}$. Definimos o Conjunto de Cantor Generalizado à Direita de K por $K^R := \phi_r(K)$ e o Conjunto de Cantor Generalizado à Esquerda por $K^L := \phi_1(K)$.*

A próxima definição será bastante utilizada em nossos próximos resultados.

Definição 8.5. *Dados dois conjuntos de Cantor regulares K e $\tilde{K}$, dizemos que o par $(K, \tilde{K})$ satisfaz a Propriedade $*L$ se existem $\lambda > 0$ e $t \in \mathbb{R}$ tais que $K^R \longrightarrow (\lambda \tilde{K}^L + t)$ e $K^R \cap (\lambda \tilde{K}^L + t) = \emptyset$.*

Dizemos que $(K, \tilde{K})$ satisfaz a propriedade $*R$ de $(\tilde{K}, K)$ satisfaz a propriedade $*L$.

A demonstração da próxima proposição, apresentada em [4], nos dá uma estratégia para concluir quando um conjunto é um M-Cantorval. Essa ideia será útil em nosso último resultado. Para ela, faremos uso do seguinte lema.

Lema 8.1. *Se dois conjuntos de Cantor regulares K, $\tilde{K}$ possuem gaps $\mathcal{O} = (a, b)$ de K e $\tilde{\mathcal{O}} = (c, d)$ de $\tilde{K}$ tais que $a + c = b + d$, então podemos perturbar um deles de modo a obter um par de conjuntos de Cantor tal que $a' + c \neq b' + d$ para qualquer conjunto de Cantor numa vizinhança deste par.*

Pelo lema acima, o conjunto dos pares de conjuntos de Cantor regulares tais que $(K, \tilde{K})$ possui um par de gaps tais que $a + c \neq b + d$ tem interior denso, logo, o conjunto dos conjuntos de Cantor onde essa propriedade não é satisfeita é enumerável.

Em particular, este argumento mostra que dado um par de conjuntos de Cantor regulares $(K, \tilde{K})$ existe apenas uma quantidade enumerável de λ para os quais o par $(K, \lambda\tilde{K})$ não possui gaps tais que $a + c \neq b + d$. Donde, para pares genéricos de conjuntos de Cantor regulares $(K, \tilde{K})$ existem gaps em K com extremos a, b e em $\tilde{K}$ com extremos c, d tais que $a + c \neq b + d$.

No que segue, considere $\Omega = \{(K,\tilde{K}); HD(K)+HD(\tilde{K})>1\}$.

Proposição 8.1. *Seja $\mathcal{U}=\{(K,\tilde{K})\}$ o conjunto dos pares de conjuntos de Cantor regulares definidos por funções crescentes tais que $(K,-\tilde{K})$ e $(\tilde{K},-K)$ satisfazem a propriedade $*L$, e $HD(K)+HD(\tilde{K})>1$. Então, para pares no subconjunto residual $\mathcal{U}$ de Ω, $K+\tilde{K}$ é um M-Cantorval.*

Demonstração. Tomando $(K,\tilde{K})\in\mathcal{U}$, temos que $K+\tilde{K}=\overline{\text{int}(K+\tilde{K})}$. Vamos supor que existem gaps $\mathcal{O}=(a,b)$ de K e $\tilde{\mathcal{O}}=(c,d)$ de $\tilde{K}$ tal que $a+c\neq b+d$ e que $\frac{\log(\Psi^L|_{\phi(I_1)})'}{\log(\tilde{\Psi}^L|_{\tilde{\phi}(J_1)})'}, \frac{\log(\Psi^R|_{\phi(I_r)})'}{\log(\tilde{\Psi}^R|_{\tilde{\phi}(J_s)})'}\notin\mathbb{Q}$.

Mostraremos que, sob tais hipóteses, $K+\tilde{K}$ é um M-Cantorval. De fato, os extremos de gaps de $K+\tilde{K}$ são da forma $a+c$ onde $a\in K$ e $c\in\tilde{K}$. Se considerarmos os extremos esquerdos dos gaps, então a e c são extremos esquerdos de gaps de K e $\tilde{K}$, respectivamente. Segue que existe um gap de alguma etapa da construção de K cujo extremo esquerdo é a, logo, existe um intervalo U desta etapa tal que $U=[x,a]$ e, similarmente um intervalo de alguma etapa da construção de $\tilde{K}$ da forma $V=[y,c]$. Fazendo $K'=K\cap U$ e $\tilde{K}'=\tilde{K}\cap V$, temos que os conjuntos de Cantor linearizados de K' e $\tilde{K}'$ são similares aos conjuntos de Cantor linearizados de K e $\tilde{K}$. Segue do teorema 8.1 que $K+\tilde{K}$ não contém intervalos adjacentes a $a+c$, assim, $a+c$ é acumulado por intervalos e gaps. Um argumento análogo vale para o extremo direito, de modo que $K+\tilde{K}$ é um M-Cantorval.

□

Com argumentos similares podemos mostrar a seguinte proposição.

Proposição 8.2. *Seja $\mathcal{U}^R=\{(K,\tilde{K})\}$ um conjunto de pares de conjuntos de Cantor regulares definidos por funções crescentes tais que $(K,-\tilde{K})$ satisfaz a propriedade $*L$ e $(K,-\tilde{K})$ tem interseção extremal estável e $HD(K)+HD(\tilde{K})>1$. Então, para pares genéricos $(K,\tilde{K})\in\mathcal{U}^R$, $K+\tilde{K}$ é um R-Cantorval. Vale o resultado análogo quando $(\tilde{K},-K)$ satisfaz a propriedade $*L$, neste caso, $K+\tilde{K}$ é genericamente um L-Cantorval.*

8.3 Diferença Aritmética de Conjuntos de Cantor do Tipo Afim

Nesta seção, usaremos os resultados das seções 8.1 e 8.2 e os conjuntos de Cantor definidos no capítulo 7 para estudar a topologia da diferença aritmética desses conjuntos de Cantor. Usaremos as notações das seções e capítulo citados.

Antes de enunciarmos nosso último teorema, demonstrado por Honary, Moreira e Pourbarat em [2], provaremos alguns lemas que juntos nos darão a conclusão desejada.

Lema 8.2. *Para n é suficientemente grande e qualquer $\lambda>0$, K e $\lambda\tilde{K}+(n+3)$ têm interseção extremal estável.*

Demonstração. Para provar o lema, é suficiente mostrar que, dado $\lambda>0$, existe $\varepsilon>0$ tal que se

$$n+3-\varepsilon<b<n+3$$

então K e $\lambda\tilde{K}+b$ têm interseção estável.

Para tal, observe que

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_0^j\circ T_1^k &= \tilde{T}_0^j\left(\left(\frac{n+3}{n}\right)^k a,\left(\frac{n+3}{n}\right)^k b-3\left(\left(\frac{n+3}{n}\right)^k+\left(\frac{n+3}{n}\right)^{k-1}+\ldots+\frac{n+3}{n}\right)\right)\\
&= \tilde{T}_0^j\left(\left(\frac{n+3}{n}\right)^k a,\left(\frac{n+3}{n}\right)^k b-3\left(\frac{((\frac{n+3}{n})^k-1)\frac{n+3}{n}}{\frac{n+3}{n}-1}\right)\right)\\
&= \tilde{T}_0^k\left(\left(\frac{n+3}{n}\right)^k a,\left(\frac{n+3}{n}\right)^k b-3\left(\left(\left(\frac{n+3}{n}\right)^k-1\right)\frac{n+3}{3}\right)\right)\\
&= \tilde{T}_0^k\left(\left(\frac{n+3}{n}\right)^k a,\left(\frac{n+3}{n}\right)^k b-\left(\frac{(n+3)^{k+1}}{n^k}-n-3\right)\right)\\
&= \tilde{T}_0^k\left(\left(\frac{n+3}{n}\right)^k a,\left(\frac{n+3}{n}\right)^k(-n-3+b)+n+3\right)\\
&= \left(\left(\frac{3}{8}\right)^j\left(\frac{n+3}{n}\right)^k a,n+3-\left(\frac{n+3}{n}\right)^k(n+3-b)\right).
\end{aligned}$$

Então, tomando $k\in\mathbb{N}$ tal que

$$2\left(\frac{n+3}{n}\right)^{-k}\leq(n+3-b)<2\left(\frac{n+3}{n}\right)^{-k+1},$$

temos

$$2\leq\left(\frac{n+3}{n}\right)^k(n+3-b)<2\left(\frac{n+3}{n}\right).$$

Se $\varepsilon>0$ for tomado suficientemente pequeno, temos $0<(n+3-b)<\varepsilon<2$ ou ainda, para a fixado e ε pequeno, $0<(n+3-b)a<\varepsilon<2$. Temos então

$$2\leq\left(\frac{n+3}{n}\right)^k(n+3-b)a<2\left(\frac{n+3}{n}\right).$$

Multiplicando por $(\frac{3}{8})^j$

$$2\left(\frac{3}{8}\right)^j \leq \left(\frac{n+3}{n}\right)^k \left(\frac{3}{8}\right)^j a(n+3-b) < 2\left(\frac{3}{8}\right)^j \left(\frac{n+3}{n}\right),$$

e reorganizando,

$$\frac{2}{n+3-b}\left(\frac{3}{8}\right)^j \leq \left(\frac{n+3}{n}\right)^k \left(\frac{3}{8}\right)^j a < \frac{2}{n+3-b}\left(\frac{3}{8}\right)^j \left(\frac{n+3}{n}\right).$$

Da primeira desigualdade, considerando j o maior inteiro tal que $\frac{n+3-b}{2} < (\frac{3}{8})^j$, temos

$$1 < \frac{2}{n+3-b}\left(\frac{3}{8}\right)^j \left(\frac{n+3}{n}\right)^k a.$$

Agora, pela segunda desigualdade, observamos que, se n é suficientemente grande,

$$\left(\frac{n}{n+3}\right)\left(\frac{n+3-b}{2}\right)\left(\frac{8}{3}\right) > \left(\frac{3}{8}\right)^j$$

e isso nos dá

$$\left(\frac{n+3}{n}\right)^k \left(\frac{3}{8}\right)^j a < \frac{2}{n+3-b}\left(\frac{3}{8}\right)^j \left(\frac{n+3}{n}\right) < \frac{8}{3}.$$

Para esses valores de k e j, temos

$$1 < \left(\frac{3}{8}\right)^j \left(\frac{n+3}{n}\right)^k a < \frac{8}{3}$$

também pelas desigualdades anteriores,

$$n+3-\left(\frac{n+3}{n}\right)^k (n+3-b) \leq n+3-2 = n+1 < n+2$$

e

$$\begin{aligned} 8\left(\frac{3}{8}\right)^j \left(\frac{n+3}{n}\right)^k a+n+3-\left(\frac{n+3}{n}\right)^k (n+3-b) &\geq 8+n+3-\frac{2(n+3)}{n} \\ &= 10+n-\frac{6}{n} \\ &> 7. \end{aligned}$$

Como as desigualdades são satisfeitas estritamente, temos que $\tilde{T}_0 \circ T_1^k(a,b) \in \text{int}(\mathcal{L})$.

□

Teorema 8.2. *Se n_0 é suficientemente grande, existe um subconjunto residual de medida total $R \subset (n_0,+\infty)\times(0,+\infty)$ tal que se $(\lambda,n) \in R$, então $K - \lambda\tilde{K} = K(n) - \lambda\tilde{K}$ é um R-Cantorval.*

Demonstração. Iniciamos observando que $[0,n+3]$ e $[0,8]$ são os fechos convexos de K e $\tilde{K}$, respectivamente, e tomando $\lambda = \frac{3}{5}$ e $t = -\frac{19}{10}$, temos

$$(\frac{3}{5}\tilde{K} - \frac{19}{10}) \longrightarrow K$$

mas como $\frac{3}{5}\cdot 3 - \frac{19}{10} < 0 < 1 < \frac{3}{5}\cdot 5 - \frac{19}{10}$, temos

$$(\frac{3}{5}\tilde{K} - \frac{19}{10}) \cap K = \emptyset$$

de modo que $(\tilde{K}, K)$ satisfazem a propriedade $*R$.

Além disso, pelo Lema 8.1, o conjunto dos λ tais que $\lambda \neq \frac{b-a}{d-c}$, para cada a,b extremo de gaps em K e c,d extremos de gaps em $\tilde{K}$, é um conjunto genérico, donde, para pares genéricos (λ, n), temos $\frac{\log(n+3)}{\log(\frac{8}{3})} \notin \mathbb{Q}$ e $\lambda \neq \frac{b-a}{d-c}$. Chamaremos de R este conjunto e mostraremos que ele é o conjunto de medida total que procuramos. Para isso, precisamos mostrar que, para $(\lambda, n) \in R$, $K - \lambda\tilde{K}$ é um R-Cantorval.

Fixando λ, temos que o extremo direito de um gap limitado de $K - \lambda\tilde{K}$ é sempre da forma $a - \lambda c$, onde $a \in K$ e $c \in \tilde{K}$ são extremos de gaps. Deste modo, existem intervalos I' e J' da constrição de K e $\tilde{K}$, respectivamente, tais que a é o extremo direito de I' e c é o extremo direito de J'.

Consideramos os conjuntos de Cantor $K' = K \cap I'$ e $\tilde{K}' = \tilde{K} \cap J'$. Então, assim como $(K, \tilde{K})$, $(K', \tilde{K}')$ satisfaz a propriedade $*R$ e $\frac{\log(n+3)}{\log(\frac{8}{3})} \notin \mathbb{Q}$. Segue, do Teorema 8.1, que $\overline{K}_1 - \lambda\overline{K}_2$ não contém intervalos em torno de $a - \lambda c$.

Por outro lado, o extremo esquerdo de um gap limitado de $K - \lambda\tilde{K}$ é da forma $a - \lambda c$, onde $a \in K$ e $c \in \tilde{K}$ são extremos de gaps. Então existem intervalos, digamos, I'' e J'' tais que a é o extremo esquerdo de I'' e c o extremo esquerdo de J''. Fazendo $K'' = K \cap I''$ e $\tilde{K}'' = \tilde{K} \cap J''$, temos que K'' e $\tilde{K}''$ são conjuntos de Cantor similares a K e $\tilde{K}$, de modo que, como $K - \lambda\tilde{K}$ contém um intervalo à direita, $K'' - \lambda\tilde{K}''$ deverão ter um intervalo anexado à direita também. Isso completa nossa prova.

□

Com uma demonstração similar, podemos mostrar que, para pares genéricos $(K', \tilde{K}')$ de conjuntos de Cantor regulares próximos de $(K, \tilde{K})$, o mesmo resultado vale para $\lambda \in (0, +\infty) \backslash C$, onde C é enumerável, $K' - \lambda\tilde{K}'$ é um R-Cantorval.

9 Conclusão

No trabalho apresentado, estudamos conjuntos de Cantor regulares e apresentamos alguns conceitos básicos para o estudo de tais conjuntos, como medida e dimensão de Hausdorff, espessura, densidade, geometrias limite e outros conceitos.

Estudamos a existência de interseção estável entre pares de conjuntos de Cantor, apresentando algumas técnicas que podem ser utilizadas para decidir sobre sua existência. Dentre as técnicas apresentadas, podemos destacar a que utiliza a existência de compactos recorrentes no espaço das configurações de geometrias limite de pares de conjuntos de Cantor. Este método foi apresentado em [11], neste artigo, Moreira e Yoccoz provaram que existe um aberto denso $U \subset \Omega^\infty$, onde

$$\Omega^\infty = \{(K_1, K_2),\ K_1 \text{ e } K_2 \text{ conjuntos de Cantor } C^r\text{-regulares}; HD(K_1) + HD(K_2) > 1\}$$

tal que se $(K_1, K_2) \in U$, então $I_s(K_1, K_2)$ é denso em $K_1 - K_2$ e

$$HD((K_1 - K_2) \backslash I_s(K_1, K_2)) < 1,$$

onde $I_s(K_1, K_2) := \{t \in \mathbb{R}; K_1 \text{ e } K_2 + t \text{ tem interseção estável}\}$. Isso dá uma resposta positiva para uma conjectura proposta por Palis, que nos diz que, para pares genéricos de conjuntos de Cantor regulares da reta (K_1, K_2), $K_1 - K_2$ tem medida de nula ou contém intervalo.

Aqui, apresentamos também exemplos onde o Gap Lemma, teste da espessura generalizados e o método de compactos recorrentes foram utilizados para decidir sobre a existência de interseção estável.

Fizemos ainda um breve estudo da topologia da diferença aritmética de conjuntos de Cantor, apresentando exemplos onde essa diferença é um R-Cantorval.

Referências

[1] A. Sannami, *An Exemple of a Regular Cantor Set Whose Difference Set is a Cantor Set With Positive Measure*, Hokkaido Math, 1992

[2] B. Honary, C. G. Moreira e M. Pourbarat, *Stable Intersection of Affine Cantor Sets*, SBM,2005.

[3] C. G. Moreira, *Conjuntos de Cantor, Dinâmica e Aritmética*, IMPA, 2010

[4] C. G. Moreira, E. M. Muñoz Morales e J. Rivera, *On the topology of arithmetic sums of regular Cantor sets*, Nonlinearity 13 (2000), 2077–2087.

[5] C. G. Moreira, *Stable Intersections of Cantor Set and Homoclinic Bifurcations*, Annales de l'I.H.P, section C, tome 13, n°6(1996), p 741-781.

[6] C. G. Moreira, J.-C. Yoccoz, *Stable intersections of regular Cantorsets with large Hausdorff dimensions*, Ann. of Math. (2) 154 no. 1 (2001),45–96. https://doi.org/10.2307/3062110.

[7] D. Lima, C. Matheus, C.G. Moreira e S. Romaña, *Classical and Dynamics Markov and Lagrange Spectra*, World Scientific, 2020.

[8] J. Palis e F. Takens, *Hyperbolicity and Sensitive Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations*, Cambridge University Press,1992.

[9] Kenneth Falconer, *Fractal Geometry*, Second edition, Wiley, 2009.

[10] M. Pourbarat, *Stable Intersection of Middle-α Cantor Sets*, World Scientific, 2015.

[11] P. Mendes e F. Oliveira, *On the topological structure of the arithmetic sum of two Cantor sets*, Nonlinearity 7 (2) (1994), 329–343.

[12] R. Bamón, S. Plaza, J. Vera, *On Central Sets With Self-Arthmetic Difference of Positive Lebesgue Measure*, J. London Math, 1995.

[13] Talita Araújo, *O Teorema de Hall e o Gap Lemma*, Revista de Matemática da UFOP, 2023, 3(3);12-23, 2023.

[14] Sheldon E. Newhouse, *The Abundance of Wild Hyperbolic Sets And Non-smooth Stable Sets For Diffeomorphisms*, Publ. Math. IHES, 1979, vol 60, 101-151.

[15] C. G. Moreira *Geometric Propeties of the Markov and Lagrange Spectra*, Annals of Mathematics, 2018, vol 188, 145-170.

[16] Marshall Hall Jr, *On the sum and product of continued fractions*, Annals of Mathematics, 1947, vol 48, 966-993.