

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE TECNOLOGIA
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

LUCAS DIEGO DE FREITAS LINO

**INCORPORAÇÃO DE MODELOS ELASTO-PLÁSTICOS AO
MÉTODO DOS PONTOS MATERIAIS PARA SIMULAÇÃO DE
PROBLEMAS GEOMECÂNICOS**

MACEIÓ
2022

LUCAS DIEGO DE FREITAS LINO

**INCORPORAÇÃO DE MODELOS ELASTO-PLÁSTICOS AO
MÉTODO DOS PONTOS MATERIAIS PARA SIMULAÇÃO DE
PROBLEMAS GEOMECÂNICOS**

Monografia submetida à coordenação do curso de Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro Civil.

Orientador: Adeildo Soares Ramos Júnior
Universidade Federal de Alagoas

Coorientador: Ricardo Albuquerque Fernandes
Universidade Federal de Alagoas

MACEIÓ
2022

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

L758i Lino, Lucas Diego de Freitas.
Incorporação de modelos elasto-plásticos ao método dos pontos
materiais para simulação de problemas geomecânicos / Lucas Diego de
Freitas Lino. – 2022.
140 : il. color.

Orientador: Adeildo Soares Ramos Júnior.
Coorientador: Ricardo Albuquerque Fernandes.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Engenharia Civil)
– Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2022.

Bibliografia: f. 115-117.
Apêndices: f. 119-140.

1. Engenharia civil. 2. Geomecânica. 3. Geologia. 4. Método dos Pontos
Materiais (Método numérico). 5. Geologia estrutural. 6. Modelos
constitutivos. 7. Elasto-plásticos. I. Título.

CDU: 624: 55

Dedico este trabalho a Deus, que tem sustentado os meus caminhos, e sua infinita graça me atinge todos os dias. Dedico também à minha família, que me apoiou e proporcionou as condições necessárias para concentrar-me nos estudos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pois sua infinita graça se renova todos os dias em minha vida. Por me sustentar em momentos difíceis e por me guiar ao longo dos trajetos sinuosos da vida. Por ter me dado forças para continuar seguindo em frente durante os momentos desgastantes da graduação.

Agradeço aos meus pais, Eliane Lino e Manacés Lino, e aos meus irmãos, por me apoiarem ao longo desses anos de estudo, incentivarem minha educação e proporcionarem um ótimo ambiente familiar, contribuindo para minha formação.

À minha noiva, Anne Oliveira, por estar comigo em todos os momentos, felizes ou tristes, durante essa jornada. Por me apoiar, incentivar, aconselhar e comemorar as pequenas ou grandes conquistas. Por toda ajuda e carinho ao longo desses anos.

Ao Prof. Dr. Adeildo Ramos, meu orientador, à Prof^a. Ma. Luciana Vieira, e a toda banca examinadora do TCC, pelas críticas construtivas. Em especial, ao Me. Ricardo Fernandes, meu coorientador, pela disponibilidade e indispensável ajuda, não só durante a elaboração deste trabalho, mas também durante os anos de pesquisa no LCCV, colaborando para minha formação e crescimento profissional.

Ao Dr. Tiago Lôbo, por todo o conhecimento compartilhado ao longo dos anos. Por sempre ter me auxiliado, sendo disposto e prestativo em qualquer momento. Pelas inúmeras reuniões de assistência. Por ter guiado minha formação voltada à pesquisa e contribuído para meu crescimento profissional.

A todos os amigos que direta ou indiretamente participaram da minha formação. A todos os pesquisadores e a todo o corpo técnico do LCCV, pelo desenvolvimento de um ambiente referência de incentivo à pesquisa. Ao Petróleo Brasileiro S.A., através da FUNDEPES, pela bolsa de pesquisa.

Aos docentes, técnicos, auxiliares e colaboradores que fazem parte do CTEC.

À UFAL, pela manutenção do ensino público gratuito de excelente qualidade.

*Around here, however, we don't look backwards for very long. We **keep moving forward**, opening up new doors and doing new things, because we're curious... and curiosity keeps leading us down new paths. - Walt Disney*

RESUMO

LINO, Lucas. Incorporação de modelos elasto-plásticos ao Método dos Pontos Materiais para simulação de problemas geomecânicos. 2022. 140 f. – Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas. Maceió, 2022.

O estudo do solo e das rochas constitui uma etapa essencial para o desenvolvimento de estruturas mais econômicas e eficientes na Engenharia Civil. Especificamente, os problemas geomecânicos, ou seja, problemas que envolvem a investigação dos geomateriais (solo e rocha), são abordados pela Geomecânica, uma subdisciplina das geociências que estuda os conceitos da Geologia associados ao seu comportamento mecânico. Devido à alta complexidade envolvida na análise dos problemas geomecânicos, decorrente da grande variabilidade das propriedades dos solos e das rochas, costuma-se empregar a modelagem computacional aliada ao uso de métodos numéricos para prever o comportamento das estruturas, dos geomateriais e da interação entre eles. Isto posto, uma vez que grande parte dos problemas geomecânicos podem incluir deformações com ordens de magnitude elevadas, a escolha de um método numérico capaz desenvolver simulações que envolvem grandes deformações é essencial, como é o caso do Método dos Pontos Materiais. O MPM é um método numérico criado para resolver problemas que compreendem grandes deformações e onde a relação tensão-deformação depende do histórico da deformação, características necessárias para a simulação de problemas geomecânicos de diversas áreas, por exemplo, a análise da formação de dobras e falhas (Geologia Estrutural), estabilidade de poços de petróleo (indústria de óleo e gás) e estabilidade de taludes (Engenharia Civil). Além disso, as relações estabelecidas entre a tensão e a deformação, denominadas modelos constitutivos, definem o comportamento mecânico do material durante as simulações. Assim, é necessária a escolha de um modelo constitutivo adequado, pois a resposta mecânica das simulações no MPM está relacionada diretamente às relações constitutivas estabelecidas. Este trabalho apresenta a implementação numérica dos modelos constitutivos elasto-plásticos, em que o comportamento inicial é elástico linear, onde as deformações são recuperáveis, e após um certo nível de tensão o material apresenta comportamento plástico, onde ocorrem deformações permanentes (característica dos geomateriais). A partir dos modelos constitutivos implementados, este trabalho apresenta a análise dos resultados obtidos de simulações de aplicações específicas da Geologia Estrutural. Conceitos introdutórios da Geologia Estrutural sobre a formação de dobras associadas a regimes contracionais (alvo das aplicações escolhidas) são apresentados, dando suporte às discussões dos resultados. Ademais, foram realizadas comparações do efeito das propriedades dos materiais, e do modelo constitutivo utilizado, na geometria das dobras, para cada aplicação.

Palavras-chave: Modelos constitutivos. Elasto-plástico. MPM. Geomecânica. Geologia Estrutural.

ABSTRACT

LINO, Lucas. Incorporating elasto-plastic models into the Material Point Method to simulate geomechanical problems. 2022. 140 p. – Civil Engineering Course, Federal University of Alagoas. Maceió, 2022.

The study of soil and rock is an essential step to develop more economical and efficient structures in Civil Engineering. More specifically, geomechanical problems, i.e., problems involving the investigation of geomaterials (soil and rock), are addressed in Geomechanics, a subdiscipline within the geosciences that deals with Geology concepts associated with its mechanical behavior. Due to the high complexity involved in the analysis of geomechanical problems, as soil and rock properties present great variability, one tends to apply computational modelling and numerical methods to predict the behavior of structures, geomaterials and the interaction between them. Furthermore, as most of the geomechanical problems comprise large deformations, choosing a numerical method capable of simulating such behavior is crucial, such as the Material Point Method. The MPM is a numerical method created to solve problems concerning large deformations and history-dependent stress-strain relations, required features to simulate geomechanical problems from different fields, for instance, analysis of the formation of folds and faults (Structural Geology), wellbore stability (oil and gas industry) and slope stability (Civil Engineering). In addition, the relation between stresses and strains, named constitutive models, defines the mechanical behavior of materials during the simulations. Thus, one needs to choose an appropriate constitutive model as the mechanical response of the simulations in MPM is directly related to the established constitutive relations. This work presents the numerical implementation of elasto-plastic constitutive models, in which the behavior is initially linear elastic, with reversible deformations, and after a certain level of stress the material presents plastic behavior, where permanent deformations take place (aspects of a geomaterial). After the implementation of the models, this work presents the analysis of the results from simulations of Structural Geology applications. Initial Structural Geology concepts about the formation of folds related to contractional regimes (target of chosen applications) are presented, in which give support to the discussion of results. Moreover, comparisons of the effect of material properties, and the choice of constitutive model, on fold geometry are made, for each application.

Keywords: Constitutive models. Elasto-plastic. MPM. Geomechanics. Structural Geology.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Problemas geomecânicos simulados com o MPM. | 21 |
| Figura 2 – Diagrama tensão-deformação típico de um aço de baixo carbono e esquema do corpo de prova utilizado no ensaio de tração. | 27 |
| Figura 3 – Diagramas tensão-deformação para a definição de conceitos e propriedades dos modelos constitutivos. | 28 |
| Figura 4 – Endurecimento e amolecimento com representação dos ciclos de carregamento/descarregamento. | 30 |
| Figura 5 – Detalhamento do comportamento de carregamento/descarregamento de um material elástico linear com endurecimento. | 30 |
| Figura 6 – Modelos constitutivos uniaxiais mais simples. | 33 |
| Figura 7 – Modelos constitutivos uniaxiais rígidos plásticos. | 33 |
| Figura 8 – Modelos constitutivos uniaxiais elásticos lineares plásticos. | 34 |
| Figura 9 – Modelo elasto-plástico com endurecimento não linear. | 34 |
| Figura 10 – Modelo reológico elástico linear. | 35 |
| Figura 11 – Modelo reológico de atrito linear. | 36 |
| Figura 12 – Modelo reológico de amortecimento linear. | 37 |
| Figura 13 – Modelo reológico representativo do comportamento rígido plástico com endurecimento. | 37 |
| Figura 14 – Modelo reológico representativo do comportamento elasto-plástico com endurecimento linear. | 38 |
| Figura 15 – Modelo de Maxwell. | 38 |
| Figura 16 – Modelo de Kelvin. | 39 |
| Figura 17 – Modelo de Bingham. | 39 |
| Figura 18 – Modelo elástico linear isotrópico unidimensional e elemento de material submetido a um estado triaxial de tensões. | 41 |
| Figura 19 – Modelo elasto-plástico com endurecimento. | 46 |
| Figura 20 – Superfície de escoamento de Tresca no espaço de tensões principais e sua projeção no plano π | 54 |
| Figura 21 – Superfície de escoamento de von Mises no espaço de tensões principais e sua projeção no plano π , em comparação com a projeção do critério de Tresca. | 56 |
| Figura 22 – Representação dos critérios de Mohr-Coulomb e Tresca utilizando o círculo de Mohr. | 57 |
| Figura 23 – Superfície de escoamento de Mohr-Coulomb no espaço de tensões principais e sua projeção no plano π | 58 |
| Figura 24 – Regra de fluxo de Mohr-Coulomb. | 59 |

| | |
|--|-----|
| Figura 25 – Superfície de escoamento de Drucker-Prager no espaço de tensões principais e sua projeção no plano π , em comparação com a projeção do critério de Mohr-Coulomb. | 62 |
| Figura 26 – Representação figurativa do modelo 3D criado, em comparação com o modelo criado no <i>Abaqus CAE</i> | 81 |
| Figura 27 – Histórico de deformação do exemplo de verificação do modelo de von Mises. | 82 |
| Figura 28 – Erro relativo da tensão equivalente do exemplo de verificação do modelo de von Mises. | 82 |
| Figura 29 – Representação figurativa do modelo 3D do exemplo de Drucker-Prager, em comparação com o modelo criado no <i>Abaqus CAE</i> | 84 |
| Figura 30 – Histórico de deformação do exemplo de verificação do modelo de Drucker-Prager. | 85 |
| Figura 31 – Erro relativo da tensão equivalente do exemplo de verificação do modelo de Drucker-Prager. | 85 |
| Figura 32 – Ilustração dos tipos básicos de falhas. | 88 |
| Figura 33 – Ilustração dos aspectos geométricos das dobras. | 88 |
| Figura 34 – Ilustração das falhas contracionais e flambagem. | 89 |
| Figura 35 – Ilustração de um duplex e dos diferentes tipos de dobras geradas por falhas contracionais. | 90 |
| Figura 36 – Modelo da aplicação 1. | 91 |
| Figura 37 – Comparação entre o modelo elástico linear e o modelo de Mohr-Coulomb (perfeitamente plástico, com endurecimento e amolecimento), aos 3 segundos. | 94 |
| Figura 38 – Comparação entre o modelo elástico linear e o modelo de Mohr-Coulomb (perfeitamente plástico, com endurecimento e amolecimento), aos 6 segundos. | 95 |
| Figura 39 – Comparação entre o resultado de Fernández e Vargas Jr. (2018) e os resultados com os modelos elasto-plásticos, para a simulação com endurecimento, aos 6 segundos. | 96 |
| Figura 40 – Comparação entre o resultado de Fernández e Vargas Jr. (2018) e os resultados com os modelos elasto-plásticos, para a simulação com amolecimento, aos 6 segundos. | 96 |
| Figura 41 – Fotografia em campo da anticlinal Bargy. | 98 |
| Figura 42 – Seção transversal estudada contendo a interpretação da estrutura da anticlinal Bargy e sua estratigrafia. | 99 |
| Figura 43 – Modelo desenvolvido por Smart et al. (2012) e no MPM, para a aplicação 2. | 100 |
| Figura 44 – Resultados da rodada <i>A</i> de simulação com o modelo de Mohr-Coulomb. | 104 |
| Figura 45 – Resultados da rodada <i>A</i> de simulação com o modelo de Drucker-Prager. | 105 |
| Figura 46 – Resultados da rodada <i>A</i> de simulação com o modelo de von Mises. | 106 |
| Figura 47 – Comparação entre os resultados com todos os modelos constitutivos, simulados na rodada <i>A</i> (2000 metros). | 107 |

| | |
|--|-----|
| Figura 48 – Comparação entre os resultados com o modelo de Mohr-Coulomb, em todas as rodadas de simulações (2000 metros). | 108 |
| Figura 49 – Comparação entre os resultados com o modelo de Drucker-Prager, em todas as rodadas de simulações (2000 metros). | 109 |
| Figura 50 – Comparação entre os resultados com os modelos de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb, em todas as rodadas de simulações (2000 metros). | 110 |
| Figura 51 – Comparação da deformação plástica equivalente entre os resultados com os modelos de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb, na rodada <i>A</i> de simulação. | 111 |
| Figura 52 – Comparação entre os resultados de Smart et al. (2012) e os resultados com os modelos de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb, aos 2000 metros (rodada <i>A</i>). | 112 |
| Figura 53 – Esquema do procedimento de solução do MPM para um único passo de tempo. | 123 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|-----|
| Tabela 1 – Parâmetros do material do exemplo de verificação do modelo de von Mises | 81 |
| Tabela 2 – Parâmetros do material do exemplo de verificação do modelo de Drucker-Prager | 84 |
| Tabela 3 – Parâmetros do exemplo de verificação do modelo de Drucker-Prager | 84 |
| Tabela 4 – Parâmetros de modelagem da aplicação 1 | 92 |
| Tabela 5 – Parâmetros do modelo elástico linear da aplicação 1 | 92 |
| Tabela 6 – Parâmetros dos modelos elasto-plásticos da aplicação 1 | 92 |
| Tabela 7 – Parâmetros para caracterização do comportamento dos modelos elasto-plásticos da aplicação 1 | 93 |
| Tabela 8 – Parâmetros de modelagem da aplicação 2 | 101 |
| Tabela 9 – Propriedades materiais das camadas estratigráficas da aplicação 2 | 102 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|------|--|
| FLIP | <i>Fluid Implicit Particle method.</i> |
| GIMP | <i>Generalized Interpolation Material Point.</i> |
| ISRM | <i>International Society for Rock Mechanics.</i> |
| LCCV | Laboratório de Computação Científica e Visualização. |
| MEF | Método dos Elementos Finitos. |
| MPM | Método dos Pontos Materiais. |
| POO | Programação Orientada a Objetos. |
| UFAL | Universidade Federal de Alagoas. |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|--------------------|--|
| ϕ | Ângulo de atrito. |
| ψ | Ângulo de dilatância. |
| c | Coesão. |
| ν | Coefficiente de Poisson. |
| $\partial\Omega$ | Contorno do contínuo. |
| Ω | Configuração deformada. |
| Ω_0 | Configuração inicial. |
| δ | Delta de Dirac. |
| $\bar{\epsilon}_p$ | Deformação plástica equivalente. |
| ρ | Densidade de massa. |
| r | Energia interna por unidade de massa. |
| \mathbf{b} | Força de campo. |
| Φ | Função de escoamento. |
| ω | Função peso arbitrária. |
| \mathbf{I} | Matriz identidade. |
| \mathbf{M} | Matriz de massa. |
| G | Módulo de cisalhamento. |
| H | Módulo de endurecimento. |
| E | Módulo de elasticidade. |
| E_{ep} | Módulo tangente elasto-plástico. |
| K | Módulo volumétrico. |
| $\dot{\gamma}$ | Multiplicador plástico. |
| ϵ_e | Parcela elástica do tensor de deformações. |
| ϵ_p | Parcela plástica do tensor de deformações. |

| | |
|--|---|
| p | Parcela hidrostática do tensor de tensões. |
| Ψ | Potencial de fluxo. |
| J_2 | Segundo invariante do tensor desviador de tensões. |
| σ_y | Tensão de escoamento. |
| \mathbf{s} | Tensor desviador de tensões. |
| \mathbf{C}, C_{ijkl} | Tensor de constantes elásticas. |
| \mathbf{W} | Tensor de rotação. |
| $\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{ij}$ | Tensor de tensões de Cauchy. |
| $\boldsymbol{\varepsilon}, \varepsilon_{kl}$ | Tensor de deformação. |
| $\mathbf{D}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ | Tensor taxa de deformação. |
| $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ | Tensor taxa de tensões. |
| $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$ | Tensor taxa de tensões de Jaumann. |
| $\boldsymbol{\alpha}$ | Variáveis internas associadas ao fenômeno de endurecimento. |
| \mathbf{a} | Vetor de aceleração. |
| \mathbf{u} | Vetor de deslocamentos. |
| \mathbf{N} | Vetor de fluxo. |
| \mathbf{f}^{ext} | Vetor de forças externas. |
| \mathbf{f}^{int} | Vetor de forças internas. |
| \mathbf{X} | Vetor de posição na configuração inicial. |
| \mathbf{x} | Vetor de posição na configuração atual. |
| \mathbf{v} | Vetor de velocidade. |
| \mathbf{n} | Vetor normal à superfície do domínio. |
| V | Volume. |

LISTA DE ALGORITMOS

| | |
|--|-----|
| Algoritmo 1 – Integração do modelo elástico linear | 124 |
| Algoritmo 2 – Integração do modelo de von Mises | 125 |
| Algoritmo 3 – Integração do modelo de Drucker-Prager | 126 |
| Algoritmo 4 – Retorno para a porção suave do cone de Drucker-Prager | 127 |
| Algoritmo 5 – Retorno para o ápice do cone de Drucker-Prager | 127 |
| Algoritmo 6 – Integração do modelo de Mohr-Coulomb | 128 |
| Algoritmo 7 – Retorno para a porção suave do plano principal da pirâmide de Mohr- Coulomb | 129 |
| Algoritmo 8 – Retorno para o vértice (1) ou (2) | 130 |
| Algoritmo 9 – Retorno para o ápice da pirâmide de Mohr-Coulomb | 131 |

LISTA DE ALGORITMOS EM MATLAB

| | |
|---|-----|
| Algoritmo MATLAB 1 – Modelo de von Mises em MATLAB | 133 |
| Algoritmo MATLAB 2 – Modelo de Drucker-Prager em MATLAB | 136 |

SUMÁRIO

| | |
|--|-----------|
| 1 – INTRODUÇÃO | 19 |
| 1.1 Apresentação | 19 |
| 1.2 Escopo do trabalho | 22 |
| 1.3 Objetivos | 23 |
| 1.4 Justificativa | 23 |
| 1.5 Metodologia | 24 |
| 1.6 Delimitação do trabalho | 24 |
| 1.7 Estrutura da monografia | 25 |
| 2 – MODELOS CONSTITUTIVOS | 26 |
| 2.1 Noções gerais da modelagem constitutiva | 26 |
| 2.1.1 Ensaio de tração | 27 |
| 2.1.2 Endurecimento/Amolecimento | 29 |
| 2.1.3 Outras propriedades relativas ao ensaio de tração | 31 |
| 2.1.4 Introdução aos modelos uniaxiais | 32 |
| 2.1.5 Modelos reológicos | 34 |
| 2.2 Teoria da Elasticidade Linear | 40 |
| 2.2.1 Modelo elástico linear unidimensional e tridimensional | 40 |
| 2.2.2 Generalização do modelo elástico linear | 43 |
| 2.3 Teoria da Plasticidade | 45 |
| 2.3.1 Modelo elasto-plástico unidimensional | 45 |
| 2.3.1.1 Decomposição aditiva da deformação axial | 46 |
| 2.3.1.2 Função de escoamento | 47 |
| 2.3.1.3 Regra de fluxo plástico | 48 |
| 2.3.1.4 Lei de endurecimento | 48 |
| 2.3.1.5 Resumo do modelo | 49 |
| 2.3.1.6 Determinação do multiplicador plástico | 49 |
| 2.3.1.7 Módulo tangente elasto-plástico | 50 |
| 2.3.2 Generalização do modelo elasto-plástico | 50 |
| 2.3.3 Critérios clássicos de escoamento | 53 |
| 2.3.3.1 Critério de Tresca | 53 |
| 2.3.3.2 Critério de von Mises | 54 |
| 2.3.3.3 Critério de Mohr-Coulomb | 57 |
| 2.3.3.4 Critério de Drucker-Prager | 61 |
| 3 – IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DOS MODELOS ELASTO-PLÁSTICOS | 64 |

| | | |
|----------|---|----------------|
| 3.1 | Algoritmo de atualização das tensões | 64 |
| 3.2 | Implementação numérica do modelo Elástico Linear | 65 |
| 3.3 | Implementação numérica dos modelos elasto-plásticos | 65 |
| 3.3.1 | Modelo de von Mises | 67 |
| 3.3.2 | Modelo de Drucker-Prager | 70 |
| 3.3.3 | Modelo de Mohr-Coulomb | 73 |
| 3.4 | Verificação dos algoritmos implementados | 79 |
| 3.4.1 | Verificação do modelo de von Mises | 80 |
| 3.4.2 | Verificação do modelo de Drucker-Prager | 83 |
| 4 | – SIMULAÇÃO DAS APLICAÇÕES | 87 |
| 4.1 | Introdução a falhas e dobras | 87 |
| 4.2 | Aplicação 1 - Dobra gerada por regime contracional em camada única | 90 |
| 4.2.1 | Modelagem da aplicação 1 | 91 |
| 4.2.2 | Resultados das simulações da aplicação 1 | 93 |
| 4.3 | Aplicação 2 - Dobra gerada por falha contracional | 97 |
| 4.3.1 | Modelagem da aplicação 2 | 97 |
| 4.3.2 | Resultados das simulações da aplicação 2 | 102 |
| 5 | – CONCLUSÃO | 113 |
| | Referências | 115 |
| | Apêndices | 118 |
| | APÊNDICE A – MÉTODO DOS PONTOS MATERIAIS | 119 |
| A.1 | Equações governantes | 119 |
| A.2 | Forma fraca da equação de conservação do momento | 120 |
| A.3 | Discretização do Método dos Pontos Materiais | 121 |
| A.4 | Considerações finais | 122 |
| | APÊNDICE B – ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO DOS MODELOS ELASTO-PLÁSTICOS | 124 |
| | APÊNDICE C – IMPLEMENTAÇÃO DOS ALGORITMOS EM MATLAB | 132 |

1 INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta, na seção 1.1, uma breve contextualização histórica na qual o trabalho está inserido, os principais problemas geomecânicos aplicados no Método dos Pontos Materiais (MPM), a relevância dos modelos constitutivos na resposta mecânica das simulações, finalizando com uma breve revisão bibliográfica do tema abordado. O escopo do trabalho é apresentado na seção 1.2 e os objetivos gerais e específicos são expostos na seção 1.3. A justificativa, metodologia e delimitação do trabalho são tratados nas seções 1.4, 1.5 e 1.6, respectivamente. Por fim, a estrutura do trabalho é apresentada na seção 1.7.

1.1 Apresentação

A Geomecânica é uma subdisciplina das geociências dedicada ao estudo da origem e magnitude das tensões presentes crosta terrestre, além das deformações que também são originadas (TURNER et al., 2017). No contexto da Engenharia Civil, é comum utilizar o termo Geotecnia para designar o ramo que justapõe as áreas da Geologia e Mecânica. Assim, a Engenharia Geotécnica é o campo dentro da Engenharia Civil que lida com os materiais naturais encontrados sob, ou perto, da superfície terrestre, as rochas e solos. Em suma, a Engenharia Geotécnica e a Geomecânica são termos que caracterizam o estudo do comportamento mecânico dos materiais naturais.

Os primeiros estudos que envolveram a Geologia e Mecânica, em termos da Engenharia, abordaram taludes naturais, pesos unitários e teorias empíricas da pressão da terra datados do século 18 (SKEMPTON, 1985). Para os engenheiros, o solo é entendido como um aglomerado de grãos de minerais relativamente soltos e matéria orgânica; já as rochas, possuem fortes forças moleculares que impedem a desagregação desse conjunto de minerais (HOLTZ; KOVACS, 1981).

À medida que a ciência e a tecnologia avançaram, a demanda por estruturas mais econômicas e eficientes cresceu. Dessa maneira, o estudo das rochas e solos intensificou-se, suscitando o aparecimento dos diferentes campos de estudo dentro da Geomecânica e Engenharia Geotécnica, como a Mecânica dos Solos e Mecânica das Rochas.

É censo comum que a publicação do trabalho desenvolvido por Karl Terzaghi, em 1925, deu origem à Mecânica dos Solos moderna. A partir de então, Terzaghi foi o responsável por guiar o avanço tecnológico no campo da Mecânica dos Solos e da própria Engenharia Geotécnica ao redor do mundo (DAS; SIVAKUGAN, 2014). Mais adiante, na década de 60, a Mecânica das Rochas foi oficialmente reconhecida como uma disciplina a parte e, em conjunto com a formação da Sociedade Internacional de Mecânica das Rochas (ISRM), em 1963, houve grande ganho tecnológico para a Engenharia e Geologia (HUDSON; HARRISON, 1997).

A Mecânica dos Solos é a aplicação dos conceitos e princípios da Mecânica e Hidráulica

aos problemas de engenharia, lidando com as propriedades e comportamento do solo como um material estrutural (MURTHY, 2002). De igual importância, a Mecânica das Rochas tem por objetivo o estudo das propriedades e comportamento de maciços rochosos acessíveis, voltados para aplicações na Engenharia e Mineração (JAEGER; COOK; ZIMMERMAN, 2007).

Ambos os campos de estudo descritos dedicam-se a uma causa comum: a resolução de problemas geomecânicos. Dessa forma, suas atuações abrangem tópicos da Geologia Estrutural (formação de dobras, falhas e fraturas em maciços rochosos), tópicos na indústria de óleo e gás (estabilidade de poços de petróleo e métodos de extração de minérios), tópicos sustentáveis (energia geotérmica e eliminação de resíduos radioativos), até tópicos mais direcionados ao contexto da Engenharia Civil (estabilidade de taludes, muros de contenção, aterros, barragens, represas e túneis, para citar alguns).

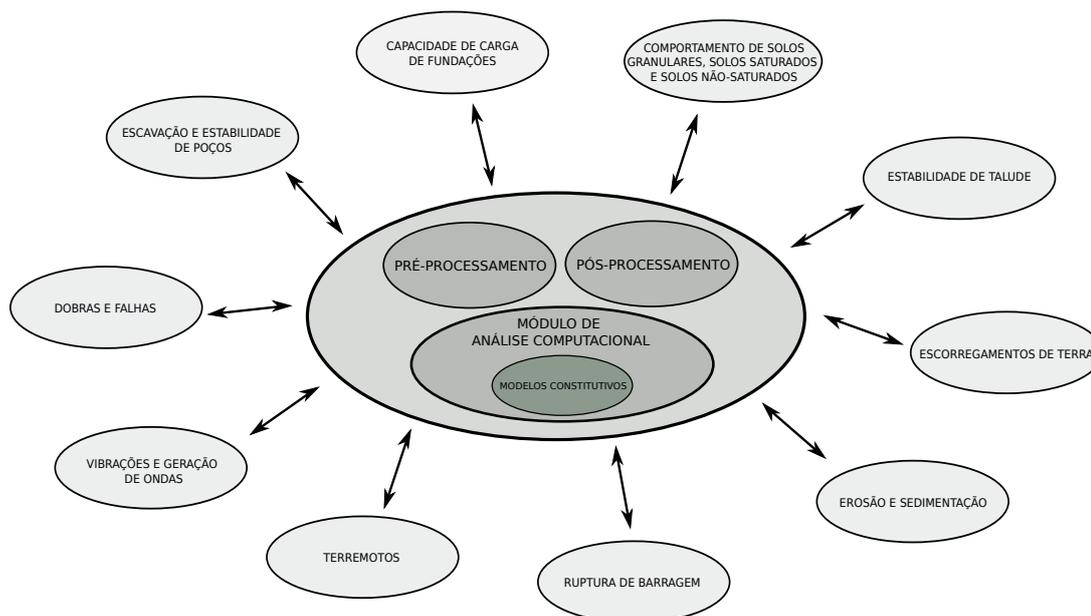
A análise de problemas geomecânicos constitui objeto de elevada complexidade devido à grande variabilidade das propriedades dos solos e das rochas. O solo, por exemplo, é um material heterogêneo constituído por um conjunto de partículas de minerais sólidos, e com vazios em seu interior (preenchidos com ar, água ou ambos), gerando grande variabilidade em suas propriedades de um ponto para outro. Rochas, possuem a presença de poros e fissuras, que promovem a não linearidade da relação tensão-deformação e introduzem um efeito escala na análise do seu comportamento (GOODMAN, 1989).

A modelagem computacional e utilização de métodos numéricos na análise de problemas geomecânicos costumam ser bastante empregadas, uma vez que se busca capturar e prever o comportamento da estrutura, solo e/ou rocha, e da interação entre elas, através da simulação de diversas condições e cenários (RAHMAN; ÜLKER, 2018). Na Geologia Estrutural, por exemplo, a modelagem geomecânica é utilizada para simular o processo de deformação dos maciços rochosos, sobretudo da formação de dobras e falhas, e a influência das propriedades dos materiais na geometria e no histórico das tensões e deformações dessas estruturas.

Há diversos métodos numéricos aptos para a simulação do comportamento mecânico dos geomateriais, sendo o Método dos Elementos Finitos (MEF) o mais comum e difundido entre a comunidade acadêmica. Durante sua análise, o MEF resolve as equações governantes para obter o estado de tensões e deformações devido ao carregamento, e discretiza o contínuo em uma malha de elementos finitos. No entanto, o MEF apresenta sérias restrições com simulações de grandes deformações por conta da distorção excessiva gerada na malha.

Métodos numéricos capazes de simular por completo o processo de instabilidade, fornecer respostas adequadas para o processo de deformação e considerar relações tensão-deformação dependentes do histórico da deformação são escolhas naturais, como é o caso do Método dos Pontos Materiais (MPM). O MPM foi originalmente criado para resolver problemas que envolvem grandes deformações e onde a relação tensão-deformação depende do histórico da deformação do material (SULSKY; ZHOU; SCHREYER, 1995), pontos essenciais nas simulações de problemas geomecânicos. Por estas características, o MPM tem sido aplicado a uma variedade de problemas geomecânicos, conforme ilustrado na Figura 1.

Figura 1 – Problemas geomecânicos simulados com o MPM.



Fonte: Adaptado de [Fern et al. \(2019\)](#).

A relação estabelecida entre a tensão e a deformação é quem define o comportamento mecânico do material durante as simulações. Essas relações, traduzidas na forma de equações matemáticas, são conhecidas como modelos constitutivos. O estudo dos modelos constitutivos é de fundamental importância para prever o comportamento mecânico dos materiais idealizados para a simulação dos problemas geomecânicos no MPM. O modelo constitutivo mais simples é o elástico linear isotrópico, onde, de forma mais geral, a tensão é considerada proporcional à deformação ($\sigma = E \cdot \varepsilon$, em que E é o módulo de elasticidade do material).

Para os problemas geomecânicos em geral, o modelo elástico linear não é adequado, já que a atuação das cargas nos geomateriais tendem a causar deformações irreversíveis. Nesses casos, modelos constitutivos elasto-plásticos são utilizados, onde deformações plásticas são geradas quando as tensões atingem valores maiores que os estabelecidos pela superfície de escoamento.

A definição da superfície de escoamento faz parte de um conjunto de definições para a caracterização completa de um material elasto-plástico. As demais definições são listadas a seguir ([FERNÁNDEZ, 2020](#); [SOUZA NETO](#); [PERIĆ](#); [OWEN, 2008](#); [BELYTSCHKO et al., 2014](#)):

- (a) Decomposição dos incrementos de deformação em uma parcela elástica (reversível) e plástica (permanente);
- (b) Critério de ruptura (definição da superfície de escoamento);
- (c) Regra de fluxo plástico (para a determinação dos incrementos de deformação);
- (d) Função da evolução da superfície de escoamento;
- (e) Critérios de carregamento/descarregamento.

O primeiro item descreve uma das principais hipóteses compreendida na teoria da

plasticidade de pequenas deformações: a decomposição aditiva do incremento de deformação em partes elásticas e plásticas, $d\varepsilon = d\varepsilon_e + d\varepsilon_p$. O item (b), já citado, se refere à definição da superfície de escoamento, que representa o limite entre elasticidade e o começo das deformações plásticas. Os critérios de ruptura clássicos, e, conseqüentemente, mais discutidos na literatura, são: Tresca, von Mises, Mohr-Coulomb e Drucker-Prager. As definições restantes, assim como o detalhamento dos conceitos aqui introduzidos, serão apresentados nos capítulos seguintes.

A implementação numérica dos modelos constitutivos elasto-plásticos clássicos não é um desenvolvimento recente. [Chen e Schreyer \(1995\)](#) apresentaram, dentre os conteúdos abordados, formulações dos modelos constitutivos de von Mises e Drucker-Prager para materiais quase frágeis, considerando a plasticidade perfeita e endurecimento. A plasticidade perfeita (quando a superfície de escoamento se mantém constante com o aumento de deformação, desde que o limite elástico tenha sido atingido) e endurecimento (a superfície de escoamento evolui com o aumento de deformação, após alcançado limite elástico) também serão discutidos neste trabalho.

A análise e implementação numérica, de forma mais geral, de modelos plásticos, viscoplásticos e viscoelásticos foram assuntos bem aprofundados por [Simo e Hughes \(1998\)](#). Em seu trabalho, vale destacar os diversos algoritmos fornecidos atrelando conceitos como: associatividade, não associatividade, endurecimento, amolecimento e diferentes algoritmos de retorno. Por outro lado, os autores [Zhang, Chen e Liu \(2017\)](#) e [Fernández \(2020\)](#) particularizaram a implementação dos modelos elasto-plásticos clássicos para o contexto do MPM, trazendo estratégias de divisão da superfície de escoamento dos modelos de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb em diferentes zonas para facilitar a implementação do algoritmo de retorno das tensões para o domínio elástico.

Na implementação numérica desenvolvida por [Souza Neto, Perić e Owen \(2008\)](#), o modelo de Mohr-Coulomb é tratado com uma representação multissuperfície, ou seja, a superfície de escoamento é representada por um conjunto de superfícies não suaves cujas raízes definem seis planos no espaço das tensões principais. Para o modelo de Drucker-Prager, o autor desenvolve considerações extras afim de garantir o escoamento plástico e tratar a singularidade existente na função da superfície de escoamento.

Este trabalho adotará o mesmo conceito de multissuperfície para a implementação numérica do modelo de Mohr-Coulomb. Para ambos os modelos de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager, a não associatividade também será considerada. Todos os modelos aqui apresentados serão capazes de simular o comportamento de endurecimento e amolecimento. Esses conceitos e sua formulação teórica serão melhor detalhados nos capítulos 2 e 3.

1.2 Escopo do trabalho

Neste trabalho, daremos ênfase no estudo teórico e implementação computacional de modelos constitutivos dentro de um *framework*/simulador de MPM. Os modelos constitutivos implementados são: von Mises, Drucker-Prager e Mohr-Coulomb. O trabalho inclui aplicações

de problemas geomecânicos da Geologia Estrutural, focando na análise dos efeitos dos diferentes modelos constitutivos, e seus parâmetros, utilizados para as simulações.

1.3 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é realizar o estudo teórico e implementação numérica de modelos constitutivos elasto-plásticos no Método dos Pontos Materiais, analisando seus efeitos nas simulações de problemas geomecânicos.

Os objetivos específicos são:

- (a) Aprofundar os conhecimentos sobre modelos constitutivos elasto-plásticos para realizar a implementação numérica.
- (b) Investigar a aplicação de problemas geomecânicos da Geologia Estrutural no MPM para compor as aplicações a serem simuladas.
- (c) Desenvolver a implementação numérica dos modelos constitutivos de von Mises, Drucker-Prager e Mohr-Coulomb, para simular as aplicações de Geologia Estrutural escolhidas;
- (d) Validar a implementação numérica dos modelos constitutivos, por meio da comparação com resultados-base fornecidos por *frameworks* de métodos numéricos consolidados na literatura;
- (e) Compreender o processo de deformação das rochas através da simulação das aplicações escolhidas, utilizando os modelos elasto-plásticos implementados no simulador do MPM;
- (f) Verificar o efeito das propriedades dos modelos constitutivos na simulação das aplicações escolhidas;
- (g) Realizar análises qualitativas para os resultados encontrados nas simulações das aplicações, comparando os efeitos entre cada modelo constitutivo utilizado.

1.4 Justificativa

O uso dos Métodos dos Pontos Materiais para simular problemas geomecânicos advém da necessidade de capturar o comportamento em simulações que envolvem grandes deformações, e quando os modelos constitutivos dependem do histórico da deformação. A utilização de modelos constitutivos elasto-plásticos deriva de sua capacidade de considerar deformações permanentes nos geomateriais. Além disso, os modelos elasto-plásticos (especialmente os modelos sensíveis à pressão hidrostática) são essenciais para representar de forma minimamente realista o comportamento dos geomateriais. Assim, a quantidade de problemas geomecânicos que podem ser simulados de forma satisfatória é um ponto-chave para a implementação de modelos elasto-plásticos no simulador do MPM. Por fim, a implementação de modelos elasto-plásticos no MPM para simulação de problemas geomecânicos facilita a observação e análise de fenômenos complexos a partir da possibilidade de execução de diferentes cenários para um mesmo problema.

1.5 Metodologia

A implementação numérica dos modelos constitutivos foi realizada, em um primeiro momento, em linguagem MATLAB. As aplicações de verificação foram desenvolvidas por meio de simulações utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF) através do *Abaqus CAE*, um programa comercial de análise em elementos finitos consolidado no mercado. Para utilizar a linguagem MATLAB, foi adquirida uma licença de estudante, fornecida por um preço menor e acessível; e para o *software Abaqus CAE*, foi utilizada uma licença grátis disponível para estudantes, contendo certas limitações em suas funcionalidades, mas adequada às necessidades do trabalho. A implementação numérica dos modelos elasto-plásticos, acoplados ao *framework* de MPM, realizou-se em linguagem C++.

De forma resumida, o desenvolvimento do trabalho foi composto das seguintes etapas:

- (a) Revisão bibliográfica sobre a teoria de modelos constitutivos e aplicações escolhidas para o trabalho;
- (b) Revisão bibliográfica sobre o MPM e implementação numérica de modelos constitutivos elasto-plásticos;
- (c) Implementação dos modelos de von Mises, Drucker-Prager e Mohr-Coulomb em linguagem MATLAB;
- (d) Formulação das aplicações de verificação dos modelos implementados em linguagem MATLAB, finalizando na análise dos resultados;
- (e) Implementação dos modelos de von Mises e Drucker-Prager no *framework* de MPM;
- (f) Implementação do modelo de Mohr-Coulomb no *framework* de MPM;
- (g) Modelagem e execução das aplicações escolhidas para o trabalho;
- (h) Análise dos resultados obtidos das simulações;
- (i) Escrita da monografia;
- (j) Finalizações na redação para a entrega da monografia;
- (k) Apresentação da monografia.

1.6 Delimitação do trabalho

Este trabalho simulou as aplicações utilizando um *framework* de MPM desenvolvido pelos pesquisadores do Laboratório de Computação Científica e Visualização (LCCV) da UFAL. Especificamente, utilizou-se uma extensão do MPM, o GIMP (*Generalized Interpolation Material Point*). Além disso, conceitos dos modelos constitutivos de forma mais geral são apresentados, no entanto a modelagem e simulação numérica no MPM foi bidimensional.

A teoria da elasto-plasticidade é apresentada inicialmente para o caso de deformações infinitesimais e generalizada para deformações finitas, sendo empregada nas simulações das aplicações com a consideração de deformações finitas, onde somente a plasticidade independente da taxa de deformação é considerada. Especificamente, implementou-se os modelos hipoeelásticos-plásticos afim considerar a formulação da plasticidade finita. Ademais, são desconsiderados

efeitos da temperatura e não ocorre fluxo de calor, isto é, a teoria apresentada é desenvolvida dentro de um contexto isotérmico.

Todos os modelos constitutivos elasto-plásticos implementados apresentam comportamento inicial elástico linear, com uma lei de endurecimento/amolecimento isotrópico por deformação linear por partes. Assim, neste trabalho estamos considerando materiais isotrópicos e homogêneos.

1.7 Estrutura da monografia

A redação do texto se encontra dividida em 5 capítulos principais. O capítulo 2 descreve a teoria de modo geral sobre os modelos constitutivos, com ênfase nos modelos elasto-plásticos. O capítulo 3 expõe a implementação numérica dos modelos constitutivos de von Mises, Drucker-Prager e Mohr-Coulomb, finalizando na verificação de suas implementações. O capítulo 4 traz um breve resumo de conceitos-chave da Geologia Estrutural, e faz o detalhamento da modelagem das simulações e análise dos resultados dos problemas geomecânicos, da Geologia Estrutural, escolhidos para este trabalho. O último capítulo descreve as considerações finais e as possibilidades para a continuação dos estudos realizados neste trabalho. Por fim, destaca-se que o apêndice inclui uma explicação, de forma sucinta, sobre o Método dos Pontos Materiais, contém os pseudo-algoritmos da implementação detalhada no capítulo 3 e os algoritmos dos modelos Drucker-Prager e Mohr-Coulomb da implementação inicial realizada em linguagem MATLAB.

2 MODELOS CONSTITUTIVOS

Sumário

| | | |
|-------|--|-----------|
| 2.1 | Noções gerais da modelagem constitutiva | 26 |
| 2.1.1 | Ensaio de tração | 27 |
| 2.1.2 | Endurecimento/Amolecimento | 29 |
| 2.1.3 | Outras propriedades relativas ao ensaio de tração | 31 |
| 2.1.4 | Introdução aos modelos uniaxiais | 32 |
| 2.1.5 | Modelos reológicos | 34 |
| 2.2 | Teoria da Elasticidade Linear | 40 |
| 2.2.1 | Modelo elástico linear unidimensional e tridimensional | 40 |
| 2.2.2 | Generalização do modelo elástico linear | 43 |
| 2.3 | Teoria da Plasticidade | 45 |
| 2.3.1 | Modelo elasto-plástico unidimensional | 45 |
| 2.3.2 | Generalização do modelo elasto-plástico | 50 |
| 2.3.3 | Critérios clássicos de escoamento | 53 |

2.1 Noções gerais da modelagem constitutiva

A ação de um conjunto de cargas sob um corpo deformável é traduzida na forma de deslocamentos, rotações e/ou deformações. A descrição matemática da resposta do material do corpo deformável, frente à ação desse conjunto de cargas, corresponde à modelagem constitutiva ([FERNÁNDEZ, 2020](#)).

Na modelagem constitutiva, relações tensão-deformação são estabelecidas para descrever o comportamento de diferentes materiais, por exemplo: borrachas, metais, concreto, rochas, argilas, vidros e polímeros. Neste sentido, uma variedade de modelos constitutivos foram concebidos, todos visando a representação da elasticidade, plasticidade, viscoelasticidade e viscoplasticidade.

As teorias da elasticidade e plasticidade foram idealizadas baseadas na observação, a partir de experimentos em laboratório, do comportamento macroscópico de sólidos deformáveis ([CHEN; HAN, 1988](#)). Isto posto, muitos conceitos e propriedades das relações tensão-deformação de materiais podem ser retirados da resposta fornecida por ensaios de tração uniaxial. Na subseção a seguir, o ensaio de tração será apresentado, evidenciando as características relevantes dos modelos constitutivos.

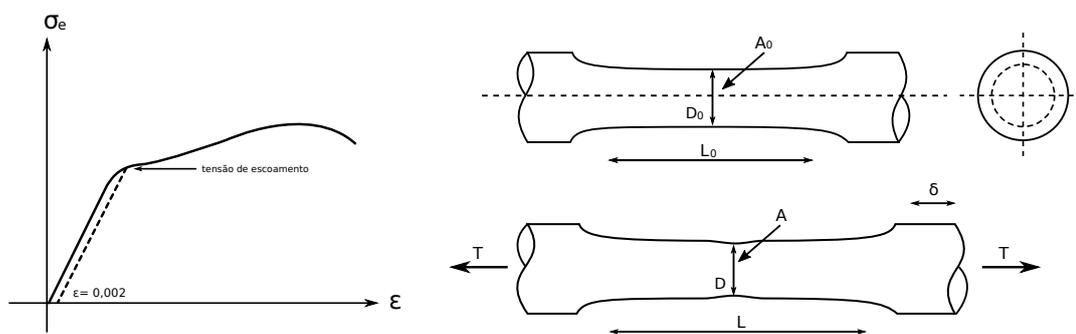
2.1.1 Ensaio de tração

No ensaio de tração uniaxial (Figura 2), o corpo de prova cilíndrico é anexado a uma máquina de ensaio de tração, onde uma força T é aplicada em sua linha central, sob uma taxa prescrita. A distância L entre dois pontos, o diâmetro D da seção e a força T são medidas. À medida que a força T varia, medidas de D e L são tomadas, fornecendo as seguintes informações (SHAMES; COZZARELLI, 1997):

- Tensão real (σ_r): obtida pela expressão T/A , em que A é a área da seção transversal calculada a partir do diâmetro atual D ;
- Tensão de engenharia (σ_e): obtida pela expressão T/A_0 , em que A_0 é a área da seção transversal calculada a partir do diâmetro inicial D_0 ;
- Deformação de engenharia (ε_e): obtida pela expressão δ/L_0 , em que $\delta = L - L_0$ é o alongamento e L_0 é o comprimento inicial medido.

De posse dessas informações, é comum plotar a tensão de engenharia versus a deformação. O uso da tensão de engenharia, e não a tensão real, é motivado pela difícil medição da área da seção transversal, já que contrações laterais ocorrem à medida que a magnitude da força de tração é aumentada (esse fenômeno é chamado de efeito de Poisson e será detalhado mais adiante). Assim, a Figura 2 mostra o diagrama tensão-deformação típico de um corpo de prova feito de aço de baixo carbono, que servirá como base para discussão das propriedades mecânicas nesta subseção.

Figura 2 – Diagrama tensão-deformação típico de um aço de baixo carbono e esquema do corpo de prova utilizado no ensaio de tração.



Fonte: Autor (2022).

A primeira característica notada no diagrama da Figura 2 é o trecho em forma de linha reta, formado no início do carregamento. Durante esse estágio, a tensão é proporcional à deformação, sendo expressa matematicamente da seguinte maneira:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (2.1)$$

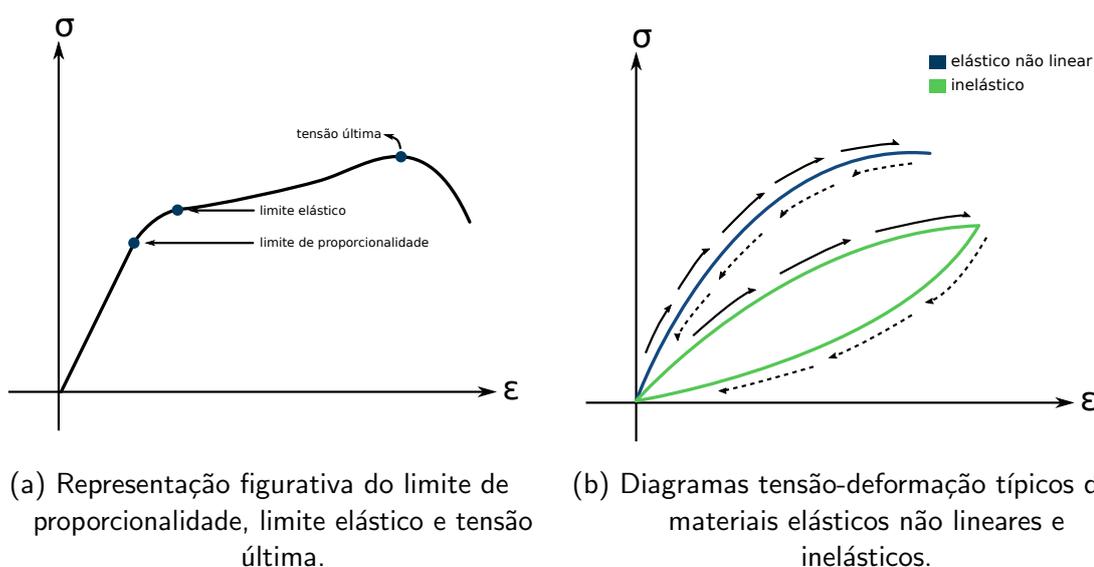
onde E é o módulo de elasticidade. Popularmente conhecida como "Lei de Hook", essa expressão foi obtida por Robert Hook, no século 17, resumida em sua famosa declaração "*ut tension,*

sic vis", traduzida aproximadamente para "como a extensão, assim é a força" (SHAMES; COZZARELLI, 1997).

Ao fim do trecho retilíneo durante o carregamento, há um ponto correspondente à perda da linearidade entre a tensão e a deformação, chamado de limite de proporcionalidade (Figura 3a). Além disso, há um nível de tensão, acima do limite de proporcionalidade, associado a mudanças irreversíveis na geometria do material, quando este é descarregado. A esse nível, correspondente à mudança do comportamento elástico para o plástico, chamamos de limite elástico (Figura 3a).

Para os aços, o limite de proporcionalidade e o limite elástico não são facilmente medidos. Dessa forma, é comum a aplicação de uma definição mais útil para a engenharia, a tensão de escoamento. A tensão de escoamento é equivalente a um valor que resulta em uma pequena deformação residual (arbitrada) durante o carregamento, usualmente $\varepsilon = 0,002$, como ilustrado no diagrama da Figura 2.

Figura 3 – Diagramas tensão-deformação para a definição de conceitos e propriedades dos modelos constitutivos.



Fonte: Autor (2022).

Outra característica que os aços possuem é a proximidade entre o limite de proporcionalidade e o limite elástico, de forma que muitas vezes não se faz distinção entre esses dois pontos. Materiais que possuem essa particularidade, ou seja, o limite de proporcionalidade muito perto do limite elástico, são chamados de elásticos lineares. Em contrapartida, materiais que possuem o limite de proporcionalidade muito menor que o limite elástico, são denominados elásticos não lineares (Figura 3b).

Apesar das diferenças entre materiais elásticos lineares e elásticos não lineares, ambos possuem uma característica em comum: o caminho que a curva de descarregamento toma, retornando à configuração original do material, é igual ao caminho da curva de carregamento.

Se um material retorna à configuração original através de uma curva de descarregamento diferente da curva de carregamento, é chamado de inelástico. A Figura 3b mostra os diagramas de materiais elásticos não lineares (linha azul) e inelásticos (linha verde). Setas contínuas indicam carregamento e setas tracejadas indicam descarregamento.

Retornando às discussões iniciais, vale destacar que até o ponto da tensão de escoamento, ou seja, durante o regime elástico, a área da seção transversal não causa grandes diferenças entre a tensão de engenharia e tensão real. No entanto, como destacado anteriormente, à medida que a força T é aplicada, há uma diminuição contínua na área da seção transversal do corpo de prova. A esse efeito de contração lateral é dado o nome "efeito de Poisson". Após o ponto correspondente à tensão de escoamento, ou seja, durante o regime plástico, o aumento da carga aplicada causará deformações mais significativas, aumentando também a desigualdade entre os valores de tensão de engenharia e tensão real, devido ao efeito de Poisson.

A diminuição constante da área da seção transversal reduzirá a capacidade de resistência do corpo de prova. Neste sentido, o valor da tensão de engenharia que representa a capacidade máxima do corpo de prova é chamado de tensão última (Figura 3a). Este valor corresponde ao maior ponto em todo o diagrama tensão-deformação, e após atingido, a curva do diagrama cai rapidamente até que o corpo de prova quebre (ocorre fratura). Especificamente, o rompimento do corpo de prova ocorre devido ao fenômeno de "estiramento", ou seja, a área da seção transversal é reduzida drasticamente devido ao fluxo plástico desenvolvido em seu domínio (SHAMES; COZZARELLI, 1997).

Até aqui, discutimos as principais definições dos modelos constitutivos a partir do ensaio de tração e do diagrama tensão-deformação de um aço de baixo carbono. Nas subseções seguintes, serão introduzidos mais conceitos que servirão para o entendimento da Teoria da Elasticidade e Teoria da Plasticidade.

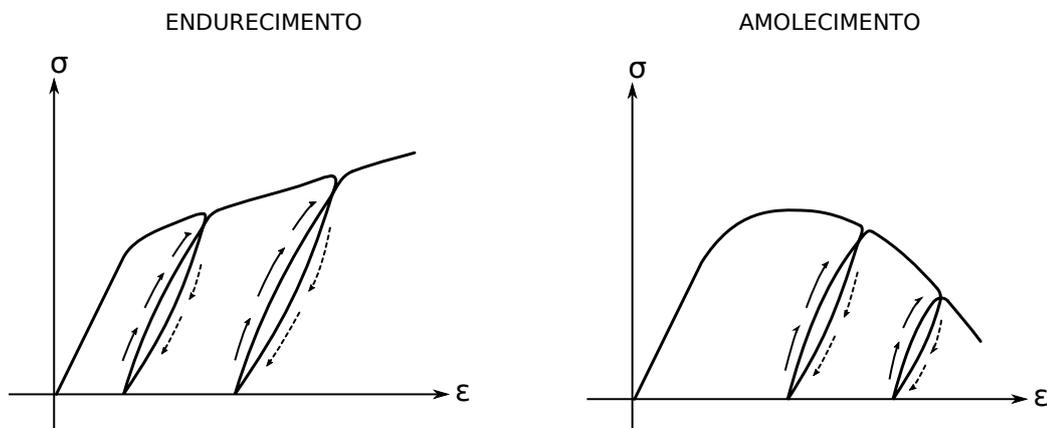
2.1.2 Endurecimento/Amolecimento

Em muitos materiais, a curva do diagrama tensão-deformação apresenta uma ascendência ou descendência predominante após o ponto da tensão de escoamento, como mostra a Figura 4. Ao efeito de ascendência no diagrama, denomina-se endurecimento; e ao efeito de descendência, denomina-se amolecimento.

Destaca-se agora um importante fenômeno que ocorre em materiais com as mesmas características como as apresentadas para o aço de baixo carbono (trecho inicial elástico linear e regime plástico ocorre após o ponto da tensão de escoamento). No regime elástico, após o descarregamento do material, as deformações são totalmente recuperadas e o material volta à sua forma original. Além disso, a curva de descarregamento percorre o mesmo caminho da curva de carregamento. Caso seja feito um descarregamento, com a carga no regime plástico, a curva gerada não percorre o mesmo caminho da curva de carregamento. A nova curva de descarregamento localiza-se mais a direita da antiga curva, e com inclinação semelhante ao

trecho linear elástico inicial (Figura 4).

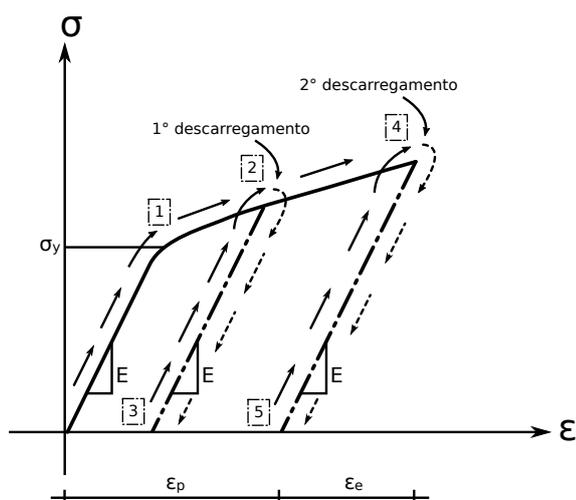
Figura 4 – Endurecimento e amolecimento com representação dos ciclos de carregamento/descarregamento.



Fonte: Autor (2022).

Conforme simbolicamente representado na Figura 4, as novas curvas de carregamento/descarregamento formam na verdade um *loop* de histerese. Isso significa que há uma pequena perda de energia, geralmente na forma de calor. Na prática, idealizações são feitas para simplificar o modelo matemático representativo do comportamento do material. Conforme mostra a Figura 5, as curvas de carregamento/descarregamento são consideradas ocupando o mesmo caminho, suavizando a transição entre o regime elástico e o regime plástico.

Figura 5 – Detalhamento do comportamento de carregamento/descarregamento de um material elástico linear com endurecimento.



Fonte: Adaptado de [Oliver e Saracibar \(2017\)](#).

O fenômeno aqui discutido por ser resumido como ilustrado na Figura 5, onde setas contínuas indicam carregamento e setas tracejadas indicam descarregamento. Durante o primeiro

ciclo de carregamento, o material se encontra no regime elástico, caracterizado pelo módulo de elasticidade E , e caso a carga não ultrapasse a tensão de escoamento σ_y (ponto 1), deformações elásticas são produzidas ε_e (deformações recuperáveis). Quando a tensão aplicada ao material excede σ_y , inicia-se o regime plástico. A partir de agora, as deformações não poderão ser recuperadas após o descarregamento do material até tensão nula (ponto 3), aparecendo uma deformação residual denominada deformação plástica ε_p . Verifica-se então que durante um novo ciclo de descarregamento/carregamento (pontos 2 – 3 e 3 – 2, respectivamente), o material possui novamente o comportamento elástico linear caracterizado pelo módulo de elasticidade E . A diferença entre o carregamento inicial e o carregamento 3 – 2 está no ponto para que o regime plástico inicie novamente, sendo necessário atingir a tensão máxima sob a qual o material foi submetido anteriormente. Em mais um ciclo de carregamento, descarregamento e recarregamento (pontos 2 – 4 – 5 – 4), verifica-se outra vez a formação de deformação plástica residual (ponto 5) e a necessidade de se alcançar um maior valor de tensão para retornar ao regime plástico (OLIVER; SARACIBAR, 2017).

2.1.3 Outras propriedades relativas ao ensaio de tração

Este capítulo iniciou as discussões a partir do ensaio de tração, onde foi possível extrair diversas informações para o entendimento dos modelos constitutivos. Além disso, o ensaio de tração pode ser utilizado para o desenvolvimento de classificações e descrição de outras propriedades úteis para os modelos constitutivos, como será visto mais adiante.

A forma como a fratura de um corpo de prova ocorre em um ensaio de tração pode servir como base para a classificação de diferentes tipos de materiais. Materiais que não exibem deformações plásticas expressivas até que a fratura ocorra, são chamados de frágeis. Materiais onde deformações plásticas são relativamente elevadas antes da fratura, são chamados de dúcteis. Materiais frágeis geralmente apresentam maior dispersão nos resultados de ensaios de laboratório, enquanto que materiais dúcteis possuem boa reprodução nos ensaios de laboratório.

Outra propriedade relevante diz respeito ao efeito de Poisson. O efeito de Poisson não só induz contrações laterais no material, quando este é submetido a uma carga de tração, como mencionado anteriormente, mas também expansões laterais quando esta carga é de compressão. No regime elástico, os ensaios de tração e compressão demonstram que a deformação lateral é proporcional à deformação longitudinal (SHAMES; COZZARELLI, 1997), matematicamente:

$$\varepsilon_{\text{lat}} = -\nu \cdot \varepsilon_{\text{long}}, \quad (2.2)$$

onde ν é denominado coeficiente de Poisson, possuindo um intervalo entre 0 e 0,5. Com a introdução do coeficiente de Poisson, é interessante considerar outros ensaios para caracterização dos materiais, como o ensaio de cisalhamento puro e ensaios de pressão. No ensaio de cisalhamento puro, uma torção é aplicada ao corpo de prova cilíndrico, onde é possível obter a seguinte expressão matemática entre a tensão cisalhante de engenharia e a deformação cisalhante de engenharia:

$$\sigma_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}, \quad (2.3)$$

onde G é o módulo de cisalhamento. Nos ensaios de pressão, o corpo de prova é submetido a uma pressão hidrostática $p = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$ e a deformação volumétrica é medida $\varepsilon_v = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$, onde, durante o regime elástico, obtém-se a seguinte relação:

$$p = -K \cdot \varepsilon_v, \quad (2.4)$$

em que K é o módulo volumétrico do material e o sinal negativo é adotado para considerar pressões de compressão com valores positivos. É importante ressaltar que nos ensaios discutidos até este momento, assumiu-se temperatura baixa e uniforme do corpo de prova. Além disso, a taxa de aplicação da carga durante os ensaios é pequena o suficiente para evitar efeitos dinâmicos (regime quase estático). A dependência da taxa de aplicação é um fenômeno associado a materiais viscoelásticos e viscoplásticos, que serão brevemente introduzidos nas subseções posteriores. Em relação aos efeitos térmicos, qualquer material sob condições de elevada temperatura, submetido à tensão constante sob um longo período de tempo, sofrerá deformações contínuas com o tempo. O fenômeno descrito anteriormente é conhecido como fluência, e possui especial relação com materiais viscoelásticos e viscoplásticos (SHAMES; COZZARELLI, 1997).

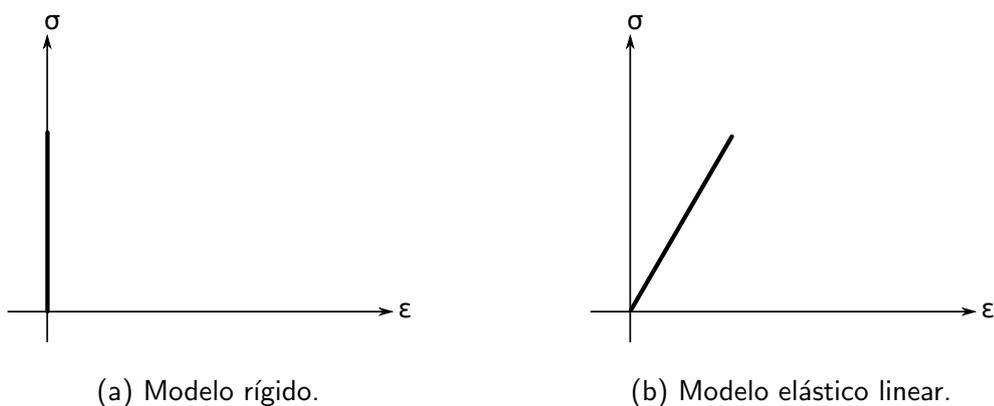
2.1.4 Introdução aos modelos uniaxiais

Diante de todos os conceitos abordados, é nítida a complexidade dos diagramas tensão-deformação para representar o comportamento real dos materiais. Neste sentido, idealizações são feitas para facilitar a representação e análise do comportamento mecânico dos diversos materiais através dos diagramas tensão-deformação, considerando o ensaio de tração uniaxial sob carregamento lento e temperaturas moderadas (SHAMES; COZZARELLI, 1997). Modelos são criados para caracterizar essas idealizações, conforme será apresentado a seguir.

As idealizações mais simples são dos materiais rígidos e elásticos lineares, como mostrado na Figura 6. Observe que no modelo rígido (Figura 6a), o material não apresenta deformações elásticas ou plásticas. O modelo elástico linear (Figura 6b) já foi apresentado anteriormente, onde após o descarregamento as deformações elásticas ε_e são recuperadas totalmente.

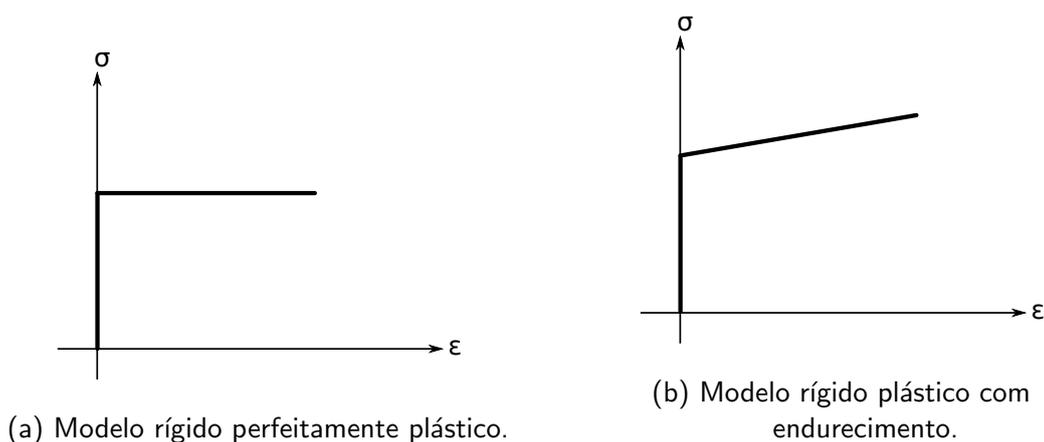
Aliado aos modelos rígidos, pode haver grande necessidade de considerar a plasticidade a partir de certo ponto. Assim, a Figura 7a mostra o modelo rígido perfeitamente plástico, onde a partir de certo nível de tensão, deformações plásticas ocorrem e a tensão mantém-se constante. Caso o endurecimento seja considerado durante o regime plástico, obtém-se o modelo rígido plástico com endurecimento, conforme a Figura 7b.

Figura 6 – Modelos constitutivos uniaxiais mais simples.



Fonte: Autor (2022).

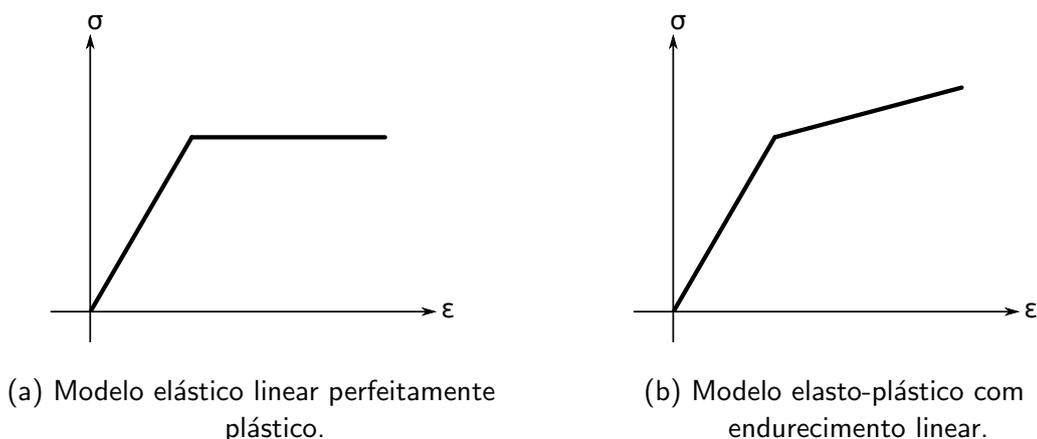
Figura 7 – Modelos constitutivos uniaxiais rígidos plásticos.



Fonte: Autor (2022).

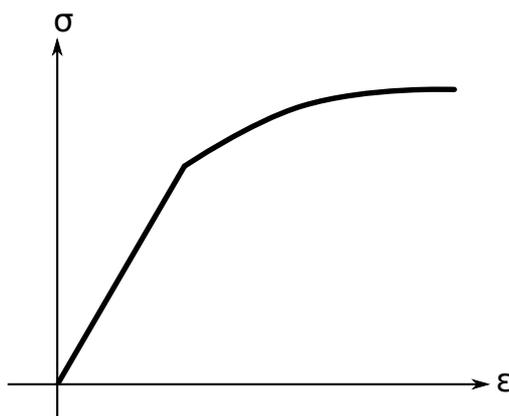
De forma semelhante aos modelos rígidos, há casos que para representar o comportamento do material a desconsideração de deformações plásticas não pode ocorrer. Nesses casos, emprega-se o modelo elástico linear perfeitamente plástico, como mostra a Figura 8a. Quando o material apresenta endurecimento durante o regime plástico, utiliza-se o modelo elasto-plástico com endurecimento (Figura 8b). Por fim, destaca-se que muitos materiais não apresentam um endurecimento na forma de linha reta. Assim, para uma representação mais fiel do fenômeno de endurecimento, emprega-se o modelo elasto-plástico com endurecimento não linear, como mostra a Figura 9.

Figura 8 – Modelos constitutivos uniaxiais elásticos lineares plásticos.



Fonte: Autor (2022).

Figura 9 – Modelo elasto-plástico com endurecimento não linear.



Fonte: Autor (2022).

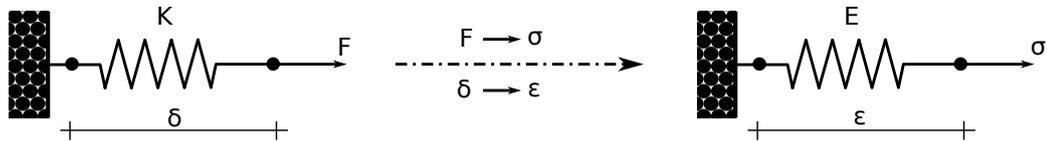
2.1.5 Modelos reológicos

Na subseção anterior, mostrou-se que a partir do ensaio de tração uniaxial, sob regime quase estático e moderadas temperaturas, é possível idealizar os principais modelos constitutivos uniaxiais para materiais sólidos. As restrições impostas de carregamento lento e moderadas temperaturas não são válidas para todos os tipos de materiais, sendo necessária a formulação de outras idealizações para a representação de seu comportamento.

Os modelos reológicos são idealizações feitas a partir da adoção de elementos simples (mola, amortecedor e elementos que representam atrito), criadas para representar matematicamente o comportamento mecânico de materiais mais complexos (OLIVER; SARACIBAR, 2017). Esses elementos simples são combinados para formar modelos únicos, idealizados para reproduzir situações específicas, ou seja, reproduzir o comportamento de um material através da combinação de múltiplos modelos reológicos.

O comportamento elástico linear é idealizado pelo elemento mola, que representa a proporcionalidade entre a tensão e a deformação, por meio de uma constante da mola interpretada como sendo o módulo de elasticidade E , ilustrado na Figura 10.

Figura 10 – Modelo reológico elástico linear.



Fonte: Adaptado de [Oliver e Saracibar \(2017\)](#).

Matematicamente, a idealização do comportamento elástico linear a partir do elemento mola utiliza os conceitos da lei de Hook para molas lineares ($F = k \cdot \delta$, onde δ é o deslocamento), e pode ser evidenciada considerando uma barra uniforme elástica, com comprimento L e área da seção transversal A . A tensão da barra σ é proporcional à sua deformação ε ($\sigma = E \cdot \varepsilon$, em que E é o módulo de elasticidade da barra), onde $\sigma = F/A$, $\varepsilon = \delta/L$ e δ é o deslocamento sofrido com a aplicação de uma força uniaxial F . Logo, podemos fazer as seguinte relações:

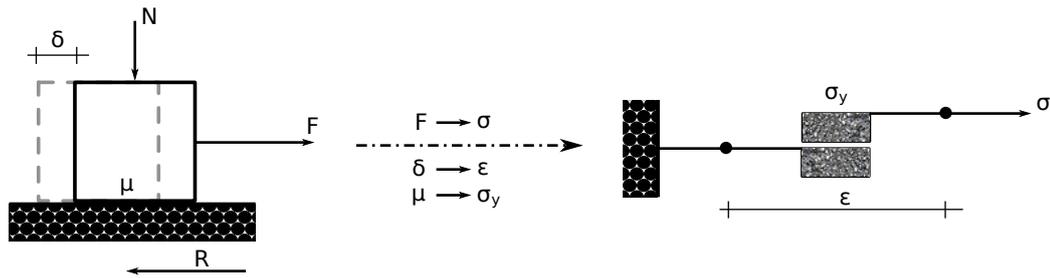
$$\begin{aligned} \frac{F}{A} &= E \cdot \frac{\delta}{L}, \\ F &= \frac{EA}{L} \cdot \delta, \\ F &= k \cdot \delta. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Na equação anterior, simplificamos $k = EA/L$, chegando na expressão final da lei de Hook unidimensional para molas lineares ($F = k \cdot \delta$), confirmando a relação estabelecida entre o elemento mola e o comportamento elástico linear.

O modelo reológico com elementos de atrito provém da formulação do modelo de atrito de Coulomb. No modelo de Coulomb, um bloco sólido é considerado sob uma superfície áspera e sujeito a uma força vertical N e horizontal F , sendo δ o deslocamento horizontal sofrido pelo bloco após a aplicação da força F , conforme mostrado na Figura 11. Coulomb estabeleceu que a força de atrito R , contrária à força F , não pode ser maior que uma força limite $F_{\text{lim}} = \mu \cdot N$, em que $\mu \geq 0$ é o coeficiente de atrito de Coulomb.

Fazendo analogia com o modelo de Coulomb, a tensão σ representa a força F e a deformação ε representa o deslocamento δ , como mostra a Figura 11. Além disso, a força limite $F_{\text{lim}} = \mu \cdot N$ é representada pela tensão limite σ_y .

Figura 11 – Modelo reológico de atrito linear.



Fonte: Adaptado de [Oliver e Saracibar \(2017\)](#).

Combinações dos modelos reológicos elástico linear e de atrito linear podem ser feitas para representar materiais rígidos plásticos e elasto-plásticos, como será visto mais a frente. Essencialmente, o modelo reológico de atrito linear é utilizado para representar o efeito da plasticidade nos materiais. Matematicamente, pode ser descrito da seguinte forma ([OLIVER; SARACIBAR, 2017](#)):

$$\begin{aligned} \sigma < \sigma_y &\rightarrow \Delta\varepsilon = 0, \\ \sigma = \sigma_y &\rightarrow \Delta\varepsilon \neq 0, \\ \sigma > \sigma_y &\rightarrow \text{não é possível,} \end{aligned} \quad (2.6)$$

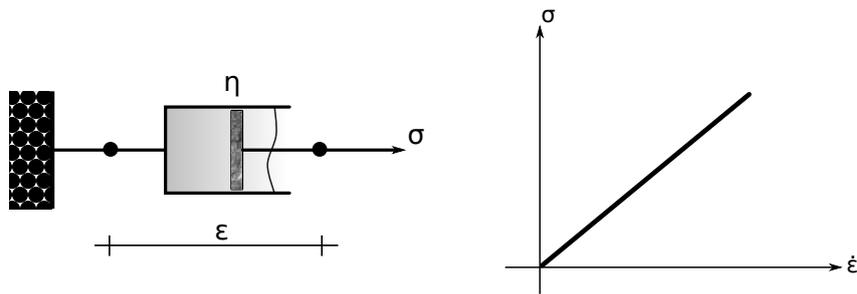
onde $\sigma \geq 0$ é tensão correspondente à carga que está sendo aplicada. Observe na equação acima que uma vez que a tensão limite é atingida $\sigma = \sigma_y$, o valor de tensão mantém-se constante e deformações residuais são geradas $\Delta\varepsilon \neq 0$, fenômeno que define a plasticidade perfeita. Assim, o elemento de atrito linear configura plasticidade perfeita e para que seja idealizado o endurecimento ou amolecimento dos materiais plásticos, é necessária a sua combinação com outro elemento.

O modelo reológico de amortecimento linear é utilizado para representar o comportamento de materiais viscosos. Materiais viscosos assemelham-se ao comportamento dos fluidos e, quando representados pelos modelos reológicos de amortecimento linear, são aqueles onde a taxa de deformação é proporcional à tensão:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta}, \quad (2.7)$$

onde η é o coeficiente de viscosidade. A Figura 12 mostra a representação do modelo reológico de amortecimento linear, que pode ser utilizado em combinação com os modelos reológicos elástico linear e de atrito linear para a representação de materiais com características viscosas-elásticas e viscosas-plásticas: são os materiais viscoelásticos lineares e viscoplásticos lineares.

Figura 12 – Modelo reológico de amortecimento linear.

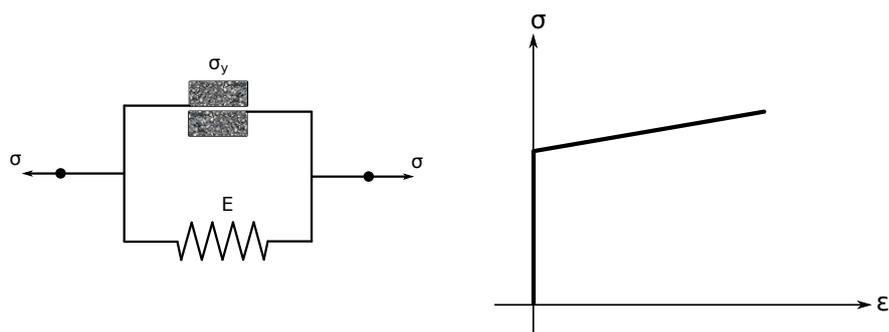


Fonte: Autor (2022).

Como descrito anteriormente, os modelos reológicos são usados principalmente para a representação de materiais complexos a partir da combinação dos elementos simples aqui apresentados. Essas combinações podem ser realizadas pois todos os elementos simbolizam modelos reológicos lineares. Mostraremos, em primeiro lugar, que os modelos uniaxiais da seção anterior também podem ser obtidos a partir dessas combinações.

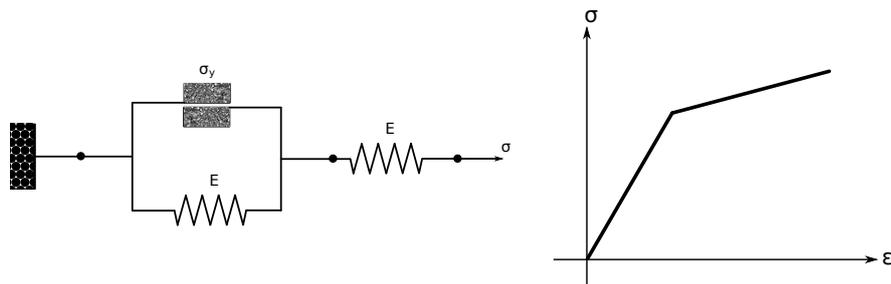
Como primeiro exemplo, têm-se o modelo rígido plástico com endurecimento, mostrado na Figura 13, idealizado a partir da combinação em paralelo da mola e do elemento de atrito. Em seguida, se aumentarmos um pouco mais a complexidade, utilizando novamente a mola para formar uma combinação em série junto à combinação anterior, é possível representar o modelo elasto-plástico com endurecimento linear, como mostra a Figura 14.

Figura 13 – Modelo reológico representativo do comportamento rígido plástico com endurecimento.



Fonte: Autor (2022).

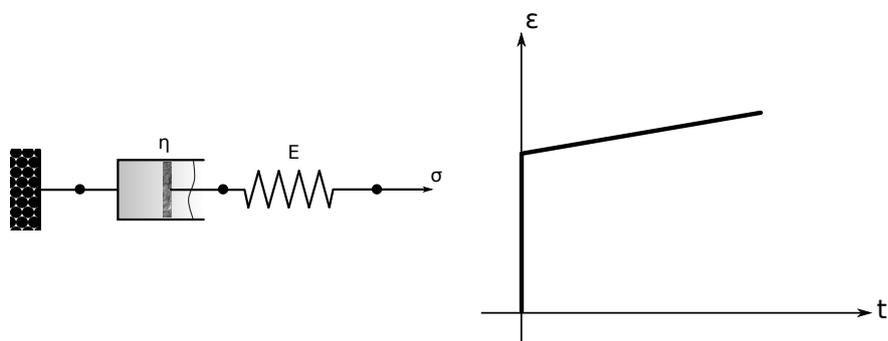
Figura 14 – Modelo reológico representativo do comportamento elasto-plástico com endurecimento linear.



Fonte: Autor (2022).

Para representar os materiais viscoelásticos, costuma-se combinar o elemento mola com o elemento amortecedor. Os modelos de Maxwell e de Kevin estão entre os mais simples encontrados na literatura. O modelo de Maxwell consiste na ligação em série do elemento mola e amortecedor (Figura 15), enquanto que o modelo de Kevin é construído com a ligação em paralelo desses dois elementos (Figura 16).

Figura 15 – Modelo de Maxwell.



Fonte: Autor (2022).

Para o modelo de Maxwell, quando um esforço é aplicado, cada elemento contribui com uma parcela para a composição da taxa de deformação. No elemento mola, a taxa de deformação é diretamente proporcional à taxa de tensão ($\dot{\epsilon}_m = \dot{\sigma}/E$); e no elemento amortecedor, a taxa de deformação leva em conta somente a tensão no momento de aplicação ($\dot{\epsilon}_a = \sigma/\eta$). Dessa forma, a taxa de deformação do modelo de Maxwell pode ser representada da seguinte maneira:

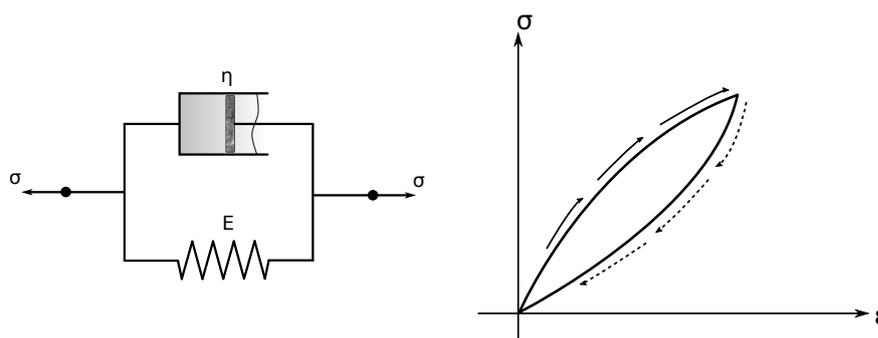
$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_m + \dot{\epsilon}_a = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}. \quad (2.8)$$

A combinação em paralelo do modelo de Kevin fornece uma característica interessante, observada no diagrama da Figura 16. Veja que a mola sempre provoca o retorno do material para sua configuração inicial. No entanto, o amortecedor é responsável por dissipar parte da

energia durante esse retorno, provocando a diferença mostrada entre a curva de carregamento e descarregamento. Além disso, análogo ao modelo de Maxwell, para o modelo de Kelvin a contribuição das tensões dos dois elementos somam-se. Assim, a tensão é representada por meio da seguinte equação:

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_a = E\dot{\epsilon} + \eta\dot{\epsilon}. \tag{2.9}$$

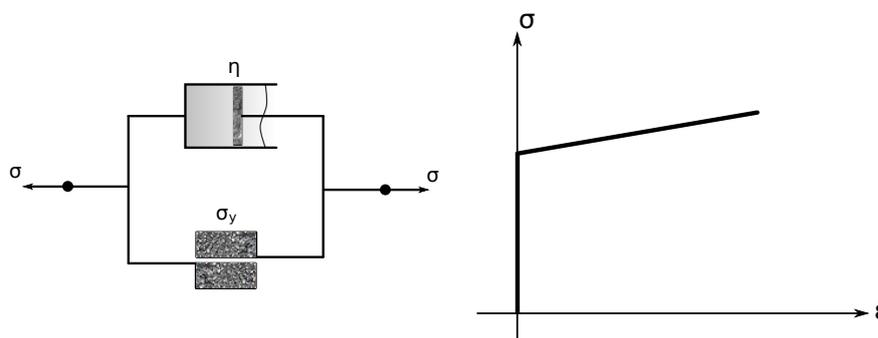
Figura 16 – Modelo de Kelvin.



Fonte: Autor (2022).

Os modelos viscoplásticos representam materiais viscosos que apresentam comportamento plástico após determinado valor de tensão. Como descrito anteriormente, costuma-se empregar o elemento de atrito para representar a plasticidade nos modelos reológicos. Como exemplo de modelo viscoplástico, consideremos a combinação em paralelo do amortecedor e do elemento de atrito, formando o chamado modelo de Bingham (Figura 17).

Figura 17 – Modelo de Bingham.



Fonte: Autor (2022).

Para representar matematicamente o modelo dos materiais viscoplásticos, muitas vezes é necessária a escrita de uma regra de fluxo, que dita a evolução da deformação em função do histórico da tensão. O modelo de Bingham possui a seguinte regra de fluxo:

$$\dot{\varepsilon} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \sigma < \sigma_y \\ (\sigma - \sigma_y)/\eta & , \text{ se } \sigma \geq \sigma_y \end{cases}, \quad (2.10)$$

onde η é equivalente à inclinação do trecho retilíneo do diagrama mostrado na Figura 17. Por fim, note que os diagramas das Figuras 13, 15 e 17 não são equivalentes entre si. Enquanto que o diagrama do modelo rígido plástico com endurecimento plota a tensão versus deformação, o modelo de Maxwell plota a deformação versus tempo e o modelo de Bingham plota a tensão versus a taxa de deformação.

2.2 Teoria da Elasticidade Linear

O comportamento elástico é caracterizado por duas condições principais: a tensão é função única da deformação e o material é capaz de voltar completamente à sua configuração original após a retirada da força aplicada sob ele (MASE; MASE, 1999). Especificamente, a teoria da elasticidade linear pode ser entendida como uma simplificação da teoria geral da elasticidade. As simplificações adotadas nesta seção são: deformações infinitesimais e o material se encontra em condições isotérmicas. Além disso, a teoria apresentada restringe-se aos materiais homogêneos.

Nesta seção, apresentaremos os materiais elásticos lineares, iniciando as discussões com o modelo elástico linear isotrópico unidimensional, em seguida expandindo para o tridimensional (Subseção 2.2.1). Na Subseção 2.2.2, será apresentada uma generalização do modelo elástico linear, onde as propriedades podem variar dependendo da direção da aplicação da carga, ou seja, a anisotropia é considerada.

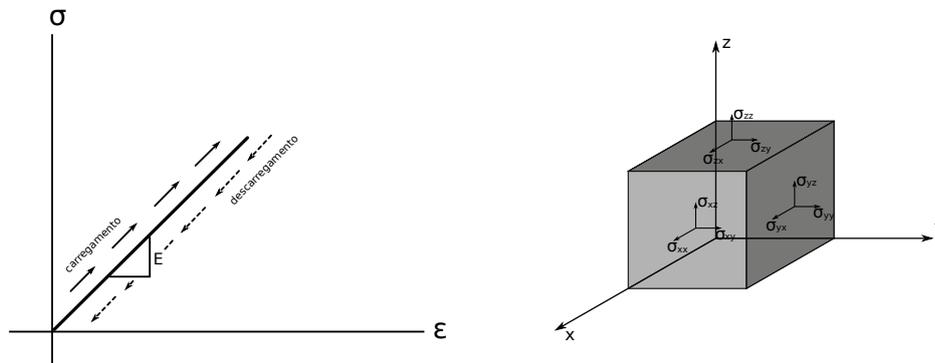
2.2.1 Modelo elástico linear unidimensional e tridimensional

A lei de Hook unidimensional estabelece que a tensão σ é diretamente proporcional à deformação ε , através da constante de proporcionalidade E , chamada de módulo de elasticidade (OLIVER; SARACIBAR, 2017). A Figura 18 mostra o diagrama tensão-deformação do modelo constitutivo elástico linear isotrópico unidimensional, e sua relação constitutiva, como já apresentada na Seção 2.1, possui a seguinte expressão:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \quad (2.11)$$

Nos modelos elásticos lineares, a curva de descarregamento retorna pelo mesmo caminho da curva de carregamento, como detalhado na Seção 2.1. Vale apontar que por conta da consideração de isotropia na Equação 2.11, o módulo de elasticidade é o mesmo independente da direção de aplicação da força.

Figura 18 – Modelo elástico linear isotrópico unidimensional e elemento de material submetido a um estado triaxial de tensões.



Fonte: Autor (2022).

Para o modelo tridimensional, considere o elemento de material submetido a um estado triaxial de tensões, conforme mostrado na Figura 18. É possível obter as equações constitutivas para esse elemento, relacionando as deformações com as tensões aplicadas, a partir da superposição dos efeitos individuais das deformações em cada direção, dado que as equações são lineares. Por exemplo, utilizando a Equação 2.11, representamos a deformação ε na direção x , do elemento submetido a um estado uniaxial de tensões σ_{xx} , da seguinte forma:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}. \quad (2.12)$$

Devido ao efeito de Poisson, quando o material é alongado em uma direção, ocorre contrações nas direções normais a esta. Logo, através da Equação 2.2, pode-se escrever as seguintes relações para as deformações ε_{yy} e ε_{zz} , devido à tensão σ_{xx} :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yy} &= -\nu \cdot \varepsilon_{xx} = -\nu \cdot \frac{\sigma_{xx}}{E}, \\ \varepsilon_{zz} &= -\nu \cdot \varepsilon_{xx} = -\nu \cdot \frac{\sigma_{xx}}{E}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

De maneira semelhante ao módulo de elasticidade, o coeficiente de Poisson ν é independente da direção do esforço aplicado. Analogamente, quando o elemento de material está sujeito a um estado uniaxial de tensões na direção y , obtém-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yy} &= \frac{\sigma_{yy}}{E}, \\ \varepsilon_{xx} &= -\nu \cdot \varepsilon_{yy} = -\nu \cdot \frac{\sigma_{yy}}{E}, \\ \varepsilon_{zz} &= -\nu \cdot \varepsilon_{yy} = -\nu \cdot \frac{\sigma_{yy}}{E}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Para a tensão σ_{zz} , tem-se:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{zz} &= \frac{\sigma_{zz}}{E}, \\
\varepsilon_{xx} &= -\nu \cdot \varepsilon_{zz} = -\nu \cdot \frac{\sigma_{zz}}{E}, \\
\varepsilon_{yy} &= -\nu \cdot \varepsilon_{zz} = -\nu \cdot \frac{\sigma_{zz}}{E}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Levando em conta o efeito conjunto de σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{zz} , ou seja, o elemento está sujeito a um estado triaxial de tensões, obtemos as seguintes relações, via superposição, para as deformações ε_{xx} , ε_{yy} e ε_{zz} :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})], \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})], \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})].
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Neste ponto, duas características que um material isotrópico possui valem a pena ser destacadas: tensões normais somente geram deformações nas mesmas direções normais e tensões cisalhantes somente geram deformações cisalhantes nas mesmas direções aplicadas (SHAMES; COZZARELLI, 1997). Neste sentido, para a caracterização completa do material elástico linear tridimensional, lembre-se do ensaio de cisalhamento puro descrito na Seção 2.1, onde estabelece que a tensão de cisalhamento σ_{xy} é diretamente proporcional à deformação cisalhante de engenharia γ_{xy} (Equação 2.3). Assim, considerando as parcelas individuais das tensões cisalhantes do elemento de material mostrado na Figura 18, temos:

$$\begin{aligned}
\gamma_{xy} &= \frac{\sigma_{xy}}{G}, \\
\gamma_{yz} &= \frac{\sigma_{yz}}{G}, \\
\gamma_{zx} &= \frac{\sigma_{zx}}{G},
\end{aligned} \tag{2.17}$$

onde o módulo de cisalhamento G , devido à isotropia, é igual para todas as expressões anteriores. Superpondo as tensões normais e cisalhantes, o modelo elástico linear tridimensional é caracterizado por completo:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})], & \gamma_{xy} &= \frac{\sigma_{xy}}{G}, \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})], & \gamma_{yz} &= \frac{\sigma_{yz}}{G}, \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})], & \gamma_{zx} &= \frac{\sigma_{zx}}{G}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

No exemplo dado, os valores de tensão mostrados (normais e cisalhantes) representam um campo de tensão uniforme no domínio (cubo) do elemento. Por fim, ressaltamos que somente duas das constantes E , ν e G são independentes. A relação entre elas é feita a partir da equação:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (2.19)$$

2.2.2 Generalização do modelo elástico linear

Na subseção anterior, tratamos dos materiais elásticos lineares isotrópicos unidimensionais (Equação 2.11) e tridimensionais (Equação 2.18). Nesta subseção, será apresentado uma generalização do modelo elástico linear, considerando a anisotropia, ou seja, as propriedades do material podem variar de acordo com a direção da tensão aplicada. A Equação 2.11 é escrita na forma generalizada da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.20)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões de Cauchy, \mathbf{C} é o tensor de constantes elásticas de quarta ordem e $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o tensor de deformações. Em notação indicial, a Equação 2.20 é escrita da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad i, j, k, l = \{1, 2, 3\}. \quad (2.21)$$

Como os tensores $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$ são simétricos, os componentes de \mathbf{C} também são simétricos:

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= C_{jikl}, \\ C_{ijkl} &= C_{ijlk}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Em geral, o tensor de constante elásticas \mathbf{C} pode depender da temperatura e varia com a posição em materiais heterogêneos, considerações que não estão sendo abordadas na teoria apresentada. Além disso, o tensor \mathbf{C} possui originalmente $3^4 = 81$ componentes. Por conta da simetria, esse número é reduzido para 36. Para facilitar a representação matemática de um tensor na forma matricial, adotaremos a notação de Voigt, escrevendo as constantes elásticas com algumas simplificações em seus índices (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2005):

$$\begin{aligned} (11) &\rightarrow 1 & (23) &\rightarrow 4, \\ (22) &\rightarrow 2 & (31) &\rightarrow 5, \\ (33) &\rightarrow 3 & (12) &\rightarrow 6. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Expandindo a Equação 2.21, com as simplificações das constantes elásticas, obtém-se o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= C_{11}\varepsilon_{xx} + C_{12}\varepsilon_{yy} + C_{13}\varepsilon_{zz} + C_{14}\gamma_{yz} + C_{15}\gamma_{zx} + C_{16}\gamma_{xy}, \\ \sigma_{yy} &= C_{21}\varepsilon_{xx} + C_{22}\varepsilon_{yy} + C_{23}\varepsilon_{zz} + C_{24}\gamma_{yz} + C_{25}\gamma_{zx} + C_{26}\gamma_{xy}, \\ \sigma_{zz} &= C_{31}\varepsilon_{xx} + C_{32}\varepsilon_{yy} + C_{33}\varepsilon_{zz} + C_{34}\gamma_{yz} + C_{35}\gamma_{zx} + C_{36}\gamma_{xy}, \\ \sigma_{yz} &= C_{41}\varepsilon_{xx} + C_{42}\varepsilon_{yy} + C_{43}\varepsilon_{zz} + C_{44}\gamma_{yz} + C_{45}\gamma_{zx} + C_{46}\gamma_{xy}, \\ \sigma_{zx} &= C_{51}\varepsilon_{xx} + C_{52}\varepsilon_{yy} + C_{53}\varepsilon_{zz} + C_{54}\gamma_{yz} + C_{55}\gamma_{zx} + C_{56}\gamma_{xy}, \\ \sigma_{xy} &= C_{61}\varepsilon_{xx} + C_{62}\varepsilon_{yy} + C_{63}\varepsilon_{zz} + C_{64}\gamma_{yz} + C_{65}\gamma_{zx} + C_{66}\gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Na forma matricial, a Equação 2.24 é escrita como:

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{C} \tilde{\varepsilon}, \quad (2.25)$$

onde $\tilde{\sigma}$ e $\tilde{\varepsilon}$, na notação de Voigt, são vetores coluna 6×1 definidos da seguinte forma:

$$\tilde{\sigma} = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{xy}]^T, \quad \tilde{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}]^T, \quad (2.26)$$

e \mathbf{C} é uma matriz quadrada 6×6 . Observe que o vetor $\tilde{\varepsilon}$ é construído utilizando $\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz}$, $\gamma_{zx} = 2\varepsilon_{zx}$ e $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$. Caso a matriz \mathbf{C} seja simétrica, o número de constantes elásticas é reduzido para 21 ($\mathbf{C}_{pq} = \mathbf{C}_{qp}$). Se considerarmos, além da simetria, que o material possui direções preferenciais de forças em três planos mutuamente ortogonais, ou seja, trata-se de um material ortotrópico elástico linear, reduzimos o número de constantes elásticas para 9:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{C}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{C}_{13} & \mathbf{C}_{23} & \mathbf{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{66} \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

onde a matriz \mathbf{C} é válida somente nos eixos ortotrópicos de simetria. Considerando a isotropia novamente, verifica-se que o tensor de constantes elásticas passa a ter somente 3 constantes elásticas independentes e não nulas:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{C}_{44} \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Fazendo relação com a Equação 2.18 ($\tilde{\varepsilon} = \mathbf{C}^{-1} \tilde{\sigma}$), é possível representar a matriz inversa \mathbf{C}^{-1} de constantes elásticas para o modelo isotrópico elástico linear da seguinte forma:

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

A matriz de constantes elásticas \mathbf{C} do modelo isotrópico elástico linear é dada por (BATHE, 2014):

$$\mathbf{C} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

2.3 Teoria da Plasticidade

A Teoria da Plasticidade estuda os materiais nos quais deformações permanentes podem ser geradas após o descarregamento de uma força externa aplicada sob eles (BELYTSCHKO et al., 2014). As deformações permanentes, ou deformações plásticas, são desenvolvidas quando a solitação excede o limite elástico do material (a tensão de escoamento para os metais, como visto na Seção 2.1). Traremos nossa atenção aos materiais elasto-plásticos, aqueles que apresentam comportamento linear elástico durante o início do carregamento e comportamento plástico quando ultrapassado o limite elástico.

A teoria aqui apresentada é reduzida aos modelos constitutivos que não apresentam dependência da taxa de deformação. Além disso, apresentaremos inicialmente a formulação para o caso unidimensional baseada em pequenas deformações (infinitesimais). No entanto, para os problemas tratados neste trabalho, grandes deformações e rotações são geradas. Nesse contexto, a hipótese de deformações infinitesimais poderá piorar significativamente a precisão dos resultados (SOUZA NETO; PERIĆ; OWEN, 2008).

A apresentação da elasto-plasticidade infinitesimal é mais simples e serve como ponto de partida para o entendimento da plasticidade em regime finito. Assim, apresentaremos na Subseção 2.3.1 a formulação do modelo elasto-plástico unidimensional, estendendo para o caso generalizado considerando a Teoria da Plasticidade de deformações finitas na Subseção 2.3.2.

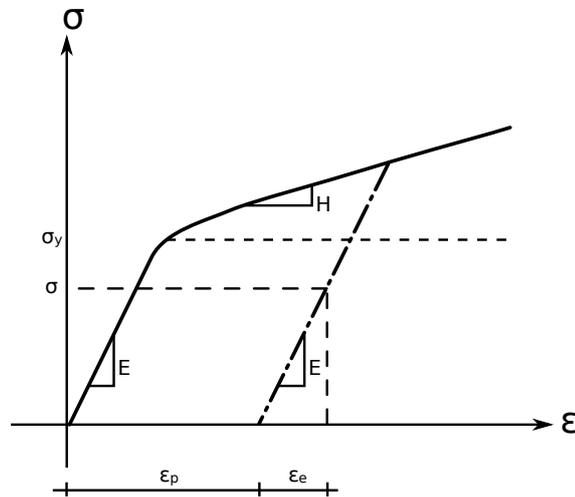
Será considerado que os materiais se encontram dentro de um contexto isotérmico (sem efeitos relacionados à temperatura). Por fim, somente a isotropia será considerada na formulação e os critérios de ruptura clássicos serão apresentados na Subseção 2.3.3, discutindo também sobre as regras de fluxo clássicas e sobre a lei de endurecimento utilizada para cada critério clássico.

2.3.1 Modelo elasto-plástico unidimensional

Iniciaremos apresentando novamente o diagrama tensão-deformação idealizado para o modelo elasto-plástico unidimensional com endurecimento (Figura 19). Como destacado na Seção 2.1, ao início do carregamento, o material elasto-plástico possui um comportamento elástico linear, com a inclinação da reta definida pelo módulo de elasticidade E . Após o ponto correspondente ao limite elástico σ_y , o material se encontra no regime plástico e deformações residuais ε_p passam a ocorrer. A curva de endurecimento é caracterizada pelo módulo de

endurecimento H . Além disso, as curvas de descarregamento e carregamento, quando o material se encontra no regime plástico, são idealizadas como percorrendo o mesmo caminho.

Figura 19 – Modelo elasto-plástico com endurecimento.



Fonte: Adaptado de Souza Neto, Perić e Owen (2008).

Para um certo nível de tensão σ , a deformação total ϵ é dada pela soma entre as deformações elásticas (recuperáveis) e plásticas (permanentes):

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p, \quad (2.31)$$

conhecida como decomposição aditivada da deformação, uma das principais hipóteses da teoria da plasticidade de deformações infinitesimais (SOUZA NETO; PERIĆ; OWEN, 2008). Neste sentido, um conjunto de definições são utilizadas para modelar o comportamento elasto-plástico:

- Decomposição aditiva do incremento de deformação $\dot{\epsilon}$;
- Definição de um critério de ruptura, ditando o começo do regime plástico;
- Definição de uma regra de fluxo para determinar os incrementos de deformação;
- Definição de uma função de evolução, caracterizando o fenômeno de endurecimento;
- Definição dos critérios de carregamento e descarregamento, conhecidos como condições de Kuhn-Tucker.

As definições acima serão apresentadas de forma generalizada na subseção seguinte, e serão detalhadas a seguir para o caso unidimensional.

2.3.1.1 Decomposição aditiva da deformação axial

No caso unidimensional, é realizado a decomposição aditiva da deformação axial total ϵ , em uma parcela elástica ϵ_e e plástica ϵ_p :

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p, \quad (2.32)$$

onde a deformação elástica pode ser definida por:

$$\varepsilon_e = \varepsilon - \varepsilon_p, \quad (2.33)$$

e o comportamento elástico linear inicial do material elasto-plástico determinado pela expressão:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon_e. \quad (2.34)$$

2.3.1.2 Função de escoamento

O domínio elástico, ou seja, o conjunto de valores de tensão onde o material se encontra no regime elástico, para o caso unidimensional, é delimitado pela tensão de escoamento σ_y , sendo definido como:

$$\mathbb{E} = \{\sigma \mid \Phi(\sigma, \sigma_y) < 0\}, \quad (2.35)$$

onde $\Phi(\sigma, \sigma_y)$ é a função de escoamento, que dita o fim do regime elástico e início do regime plástico. A função de escoamento, em geral, possui a seguinte forma:

$$\Phi(\sigma, \sigma_y) = |\sigma| - \sigma_y, \quad (2.36)$$

onde $|\sigma| \leq \sigma_y$. Dessa forma, vemos que não é admitido um valor de tensão acima da tensão de escoamento. Assim, tensões plasticamente admissíveis estão localizadas ou no domínio elástico ou na própria tensão de escoamento. Portanto, tensões admissíveis devem satisfazer a seguinte relação (SOUZA NETO; PERIĆ; OWEN, 2008):

$$\Phi(\sigma, \sigma_y) \leq 0. \quad (2.37)$$

O limite do domínio elástico é definido da seguinte forma:

$$\mathbb{Y} = \{\sigma \mid \Phi(\sigma, \sigma_y) = |\sigma| - \sigma_y = 0\}. \quad (2.38)$$

Caso a tensão se encontre no regime elástico, deformações elásticas estão ocorrendo. Quando valores de tensão atingem o limite (tensão de escoamento), dois fenômenos podem estar ocorrendo: ou descarregamento elástico ou carregamento plástico. Matematicamente, essas condições de escoamento podem ser resumidas, comparando também com a taxa de deformação plástica $\dot{\varepsilon}_p$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma, \sigma_y) < 0 \implies |\sigma| < \sigma_y \implies & \begin{cases} \sigma \text{ está no domínio elástico, } \sigma \in \mathbb{E} \\ \dot{\varepsilon}_p = 0 \end{cases}, \\ \Phi(\sigma, \sigma_y) = 0 \implies |\sigma| = \sigma_y \implies & \begin{cases} \sigma \text{ está no limite do domínio elástico, } \sigma \in \mathbb{Y} \\ \dot{\varepsilon}_p = 0 \text{ quando descarregamento elástico} \\ \dot{\varepsilon}_p \neq 0 \text{ quando carregamento plástico} \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

2.3.1.3 Regra de fluxo plástico

Na Figura 19, mostramos somente o diagrama tensão-deformação para um corpo de prova submetido à tração uniaxial. No entanto, testes de compressão também podem ser realizados, e assumindo que a tensão de escoamento em compressão é igual à de tração. Na prática, verifica-se que a taxa de deformação plástica $\dot{\epsilon}_p$ é positiva quando o material está sujeito à tensão e negativa quando em compressão. Assim, a regra de fluxo plástico para o modelo unidimensional pode ser representada por (SOUZA NETO; PERIĆ; OWEN, 2008):

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\gamma} \text{sign}(\sigma), \quad (2.40)$$

onde $\dot{\gamma}$ é denominado multiplicador plástico e definido por:

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad (2.41)$$

satisfazendo a seguinte condição:

$$\Phi \dot{\gamma} = 0, \quad (2.42)$$

e sign é a função sinal:

$$\text{sign}(a) = \begin{cases} +1 & \text{se } a \geq 0 \\ -1 & \text{se } a < 0 \end{cases}, \quad (2.43)$$

em que a é um escalar qualquer. Verificamos então, como descrito na Equação 2.39, que a taxa de deformação plástica é nula no domínio elástico:

$$\Phi < 0 \implies \dot{\gamma} = 0 \implies \dot{\epsilon}_p = 0, \quad (2.44)$$

e o fluxo plástico pode ocorrer somente quando a tensão atinge seu valor limite:

$$|\sigma| = \sigma_y \implies \Phi = 0 \implies \dot{\gamma} \geq 0. \quad (2.45)$$

As Equações 2.37, 2.44 e 2.45, são conhecidas como condições de Kuhn-Tucker, ou condições de carregamento/descarregamento, e definem quando fluxo plástico começa a ocorrer, podendo ser resumidas em:

$$\Phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \dot{\gamma} \Phi = 0. \quad (2.46)$$

2.3.1.4 Lei de endurecimento

Para finalizar a modelagem constitutiva do material elasto-plástico, é necessária a definição da função de evolução do limite do domínio elástico, ou seja, descrição da lei de endurecimento. Para a incorporação do endurecimento, assume-se que a tensão limite é função da deformação plástica acumulada $\bar{\epsilon}_p$:

$$\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon}_p), \quad (2.47)$$

onde $\bar{\varepsilon}_p$ é definida por:

$$\bar{\varepsilon}_p = \int_0^t |\dot{\varepsilon}_p| dt, \quad (2.48)$$

onde para um ensaio de tração têm-se $\bar{\varepsilon}_p = \varepsilon_p$ e para um ensaio de compressão, $\bar{\varepsilon}_p = -\varepsilon_p$. A partir da Equação 2.48, é possível obter a seguinte relação entre a taxa de deformação plástica acumulada $\dot{\bar{\varepsilon}}_p$ e a taxa de deformação plástica:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_p = |\dot{\varepsilon}_p|, \quad (2.49)$$

em que, fazendo relação com a regra de fluxo plástico (Equação 2.40), obtém-se:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_p = \dot{\gamma}. \quad (2.50)$$

2.3.1.5 Resumo do modelo

Para finalizar, resumimos as equações constitutivas que caracterizam o modelo elasto-plástico unidimensional com endurecimento:

- I. Decomposição aditiva da deformação axial: $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$;
- II. Equação constitutiva do modelo elástico linear unidimensional para o trecho inicial:
 $\sigma = E \cdot \varepsilon_e$;
- III. Função de escoamento: $\Phi(\sigma, \sigma_y) = |\sigma| - \sigma_y$;
- IV. Regra de fluxo plástico: $\dot{\varepsilon}_p = \dot{\gamma} \text{sign}(\sigma)$;
- V. Lei de endurecimento: $\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon}_p)$ e $\dot{\bar{\varepsilon}}_p = \dot{\gamma}$;
- VI. Condições de Kuhn-Tucker: $\Phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \dot{\gamma} \Phi = 0$.

2.3.1.6 Determinação do multiplicador plástico

Para determinar o multiplicador plástico $\dot{\gamma}$, considera-se a seguinte expressão:

$$\dot{\Phi} \dot{\gamma} = 0, \quad (2.51)$$

onde verifica-se que a taxa da função de escoamento é nula quando fluxo plástico ocorre, ou seja, quando $\dot{\gamma} > 0$. Ademais, durante o regime elástico, $\dot{\gamma} = 0$, $\dot{\Phi}$ poderá assumir qualquer valor. A condição descrita anteriormente é denominada condição de consistência, $\dot{\Phi} = 0$. Assim a derivada função de escoamento em relação ao tempo é dada por:

$$\dot{\Phi} = \text{sign}(\sigma) \dot{\sigma} - H \dot{\bar{\varepsilon}}_p, \quad (2.52)$$

onde H é a inclinação da curva de endurecimento (módulo de endurecimento), definida da seguinte maneira:

$$H = H(\bar{\varepsilon}_p) = \frac{d\sigma_y}{d\bar{\varepsilon}_p}. \quad (2.53)$$

A partir da condição de consistência e da Equação 2.52, da equação constitutiva elástica linear unidimensional $\dot{\sigma} = E \cdot (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_p)$, combinando com as Equações 2.48 e 2.50, fazemos as seguintes manipulações:

$$\begin{aligned} \frac{H\dot{\varepsilon}_p}{\text{sign}(\sigma)} &= E \cdot (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_p), \\ \dot{\varepsilon}_p &= \frac{E\dot{\varepsilon}}{H}\text{sign}(\sigma) - \frac{E\dot{\varepsilon}_p}{H}\text{sign}(\sigma), \\ \dot{\gamma} &= \frac{E\dot{\varepsilon}}{H}\text{sign}(\sigma) - \frac{E\dot{\gamma}}{H}[\text{sign}(\sigma)]^2, \\ \dot{\gamma} + \frac{E}{H}\dot{\gamma} &= \frac{E\dot{\varepsilon}}{H}\text{sign}(\sigma), \\ \frac{E+H}{H}\dot{\gamma} &= \frac{E\dot{\varepsilon}}{H}\text{sign}(\sigma), \end{aligned} \quad (2.54)$$

chegando à definição do multiplicador plástico, ocorrendo durante fluxo plástico:

$$\dot{\gamma} = \frac{E}{H+E}\text{sign}(\sigma)\dot{\varepsilon} = \frac{E}{H+E}|\dot{\varepsilon}|. \quad (2.55)$$

2.3.1.7 Módulo tangente elasto-plástico

O módulo tangente elasto-plástico é a constante de proporcionalidade que estabelece a relação entre a tensão e a deformação durante o fluxo plástico:

$$\dot{\sigma} = E_{ep} \cdot \dot{\varepsilon}. \quad (2.56)$$

Utilizando novamente a equação constitutiva $\dot{\sigma} = E \cdot (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_p)$, combinada com as Equações 2.40 e 2.55, obtém-se a seguinte expressão para o módulo tangente elasto-plástico:

$$E_{ep} = \frac{EH}{E+H}. \quad (2.57)$$

Pode-se também expressar o módulo de endurecimento H em termos do módulo de elasticidade e do módulo tangente elasto-plástico:

$$H = \frac{E_{ep}}{1 - E_{ep}/E}. \quad (2.58)$$

2.3.2 Generalização do modelo elasto-plástico

O modelo elasto-plástico unidimensional apresentado anteriormente, dentro da Teoria da Plasticidade de deformações infinitesimais, descreve as principais propriedades que serão estendidas nesta subseção para o caso generalizado e com a formulação baseada na Teoria da Plasticidade de deformações finitas. A generalização é realizada a partir da mesma série

de definições (mostradas na Subseção 2.3.1.5). Assim, apresentaremos a forma generalizada passando pelos mesmos itens enumerados.

Em primeiro lugar, vale destacar que para os problemas de deformações finitas, há dois tipos de modelos elasto-plásticos amplamente utilizados: o modelo hipoeelástico-plástico e o modelo hiperelástico-plástico (ZHANG; CHEN; LIU, 2017). A formulação do modelo hipoeelástico-plástico também leva em conta a decomposição aditiva da deformação. Assim, de forma análoga à decomposição da deformação uniaxial, para o caso generalizado da plasticidade finita têm-se a decomposição aditiva do tensor taxa de deformação $\dot{\epsilon}$ em uma parcela elástica $\dot{\epsilon}_e$ e outra plástica $\dot{\epsilon}_p$:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_p. \quad (2.59)$$

O modelo hipoeelástico, adotado neste trabalho, diferentemente do modelo hiperelástico, é aquele que não pode ser derivado a partir de um funcional para a energia de deformação específica (SIMO; HUGHES, 1998). Além disso, nos modelos hipoeelásticos, as equações constitutivas são formuladas com o uso de taxas de tensões objetivas afim de manter as propriedades de transformação de rotação corretas (HUGHES; WINGETS, 1980). A não objetividade está relacionada ao fato da derivada no tempo do tensor de tensões depender do referencial adotado. Existem várias taxas de tensões objetivas diferentes, por exemplo: Zaremba-Jaumann, Green-Naghdi e Truesdell. Aqui, será utilizada a taxa de tensões de Jaumann, definida em função do tensor de tensões de Cauchy σ :

$$\overset{\nabla}{\sigma} = \dot{\sigma} - W\sigma - \sigma W^T, \quad (2.60)$$

onde W é o tensor de rotação. Logo, a parte elástica do material elasto-plástico pode ser definida da seguinte maneira:

$$\overset{\nabla}{\sigma} = \mathbf{C} : (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_p), \quad (2.61)$$

em que \mathbf{C} é o tensor de constantes elásticas de quarta ordem e deve ser isotrópico (SIMO; HUGHES, 1998). Ademais, na forma mais geral, o modelo elasto-plástico é função de um conjunto de variáveis internas α associadas ao fenômeno de endurecimento, determinadas pela equação:

$$\dot{\alpha} = \dot{\gamma}H, \quad (2.62)$$

onde $H = H(\sigma, \alpha)$ é o módulo de endurecimento generalizado, e define a evolução da superfície de escoamento. Análogo ao conjunto que define o limite do domínio elástico, para o caso generalizado o critério de ruptura define uma superfície de escoamento:

$$\mathbb{Y} = \{\sigma \mid \Phi(\sigma, \alpha) = 0\}, \quad (2.63)$$

onde $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha})$ é a função de escoamento e deve ser uma função isotrópica do tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ (SIMO; HUGHES, 1998). A regra de fluxo plástico generalizada é dada por:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \dot{\gamma} \mathbf{N}, \quad (2.64)$$

onde o tensor $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha})$ é denominado vetor de fluxo. Para completar a caracterização do modelo elasto-plástico generalizado, as condições de Kuhn-Tucker são definidas por:

$$\Phi \leq 0, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \dot{\gamma} \Phi = 0, \quad (2.65)$$

caracterizando o desenvolvimento das deformações plásticas e variáveis internas do modelo constitutivo. Outro aspecto da formulação generalizada é a adoção de um potencial de fluxo $\Psi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha})$ para definir a regra de fluxo e/ou a lei de endurecimento. Assim, obtém-se o vetor de fluxo e o módulo de endurecimento generalizado da seguinte forma:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \mathbf{H} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}}. \quad (2.66)$$

Quando adota-se a função de escoamento $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha})$ como o potencial de fluxo, ou seja $\Psi = \Phi$, o modelo é chamado de associativo. Quando usamos um potencial de fluxo diferente da função de escoamento, o modelo elasto-plástico é chamado de não associativo. De forma análoga à formulação unidimensional, durante o regime plástico, a tensão localiza-se na superfície de escoamento e é necessário obedecer a condição de consistência $\dot{\Phi} = 0$, descrita anteriormente. Dessa forma, a derivada temporal da função de escoamento é dada por:

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} = 0, \quad (2.67)$$

onde utilizamos a seguinte identidade (BELYTSCHKO et al., 2014):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \nabla. \quad (2.68)$$

Combinando a relação constitutiva dada na Equação 2.61, com as Equações 2.62, 2.64, 2.66 e 2.67, obtém-se:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\gamma} \mathbf{N}) + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} = 0. \quad (2.69)$$

Resolvendo para o multiplicador plástico $\dot{\gamma}$, resulta em:

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial \Phi / \partial \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\partial \Phi / \partial \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C} : \mathbf{N} - \partial \Phi / \partial \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{H}}. \quad (2.70)$$

De forma semelhante ao caso unidimensional, durante o regime plástico, a relação entre a tensão e a deformação $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_{ep} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ é estabelecida através do módulo tangente elasto-plástico, definido de forma generalizada como (BELYTSCHKO et al., 2014; ZHANG; CHEN; LIU, 2017):

$$\mathbf{C}_{ep} = \begin{cases} \mathbf{C} & , \text{ se } \dot{\gamma} = 0 \\ \mathbf{C} - \frac{(\mathbf{C} : \mathbf{N}) \otimes (\partial\Phi/\partial\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C})}{\partial\Phi/\partial\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C} : \mathbf{N} - \partial\Phi/\partial\boldsymbol{\alpha} : \mathbf{H}} & , \text{ se } \dot{\gamma} > 0 \end{cases}, \quad (2.71)$$

onde \mathbf{C}_{ep} é um tensor de quarta ordem e \otimes simboliza um produto tensorial (GURTIN, 1981). Por fim, destaca-se que o modelo apresentado é indicado para casos onde as deformações elásticas são pequenas se comparadas com as deformações plásticas geradas durante o regime plástico.

2.3.3 Critérios clássicos de escoamento

A modelagem constitutiva do material elasto-plástico foi apresentada a partir da teoria de deformações infinitesimais, sob o contexto unidimensional (Subseção 2.3.1) e utilizando a consideração de deformações finitas para a formulação generalizada (Subseção 2.3.2). Para os dois casos, a função de escoamento Φ foi tomada em sua forma mais geral. Apresentaremos em seguida os critérios de escoamento mais comuns encontrados na literatura: Tresca, von Mises, Drucker-Prager e Mohr-Coulomb.

2.3.3.1 Critério de Tresca

O critério de escoamento proposto por Tresca, em 1868, especifica que plasticidade começa a ocorrer quando a tensão de cisalhamento máxima atinge um certo valor limite:

$$\frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \tau_y(\alpha), \quad (2.72)$$

onde o limite é dado por τ_y , que é a tensão cisalhante de escoamento, função de uma variável interna que caracteriza o fenômeno de endurecimento α ; e σ_{\max} e σ_{\min} são, respectivamente, as tensões principais máximas e mínimas, definidas como:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \max\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}, \\ \sigma_{\min} &= \min\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}, \end{aligned} \quad (2.73)$$

em que a tensão máxima de cisalhamento é dada por:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}). \quad (2.74)$$

A partir da Equação 2.72, é possível definir a tensão de escoamento da seguinte maneira:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) - \tau_y(\alpha), \quad (2.75)$$

sabendo que o início do regime plástico ocorre quando $\Phi = 0$. Uma outra forma de representar a função de escoamento de Tresca é fazendo uso da tensão de escoamento uniaxial $\sigma_y = 2\tau_y$:

$$\Phi(\sigma) = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) - \sigma_y(\alpha). \quad (2.76)$$

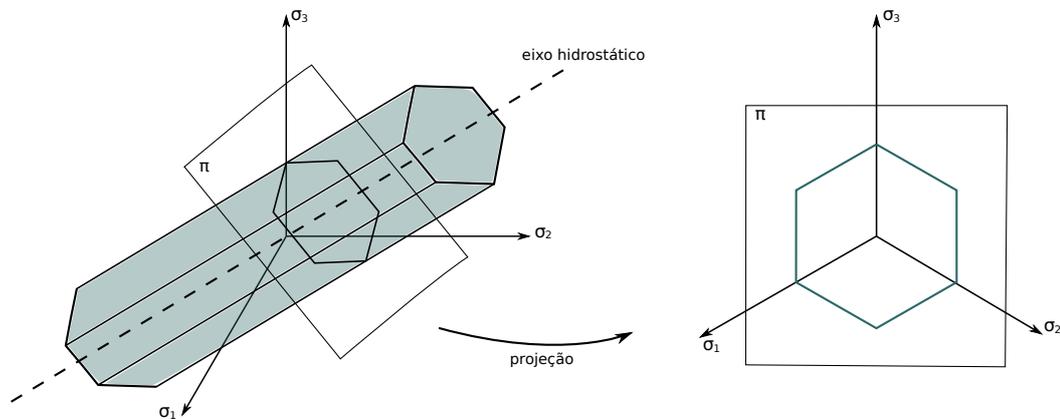
Utilizando as Equações 2.75 ou 2.76, nota-se uma característica em comum: ambas são insensíveis à pressão, ou seja, o componente hidrostático do tensor de tensões p não exerce influência durante o regime plástico, sendo definido da seguinte maneira:

$$p = \frac{1}{3} \cdot \text{tr}[\sigma] = \frac{1}{3} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (2.77)$$

Outra característica importante é que o critério de escoamento de Tresca é isotrópico, ou seja, a sua função de escoamento é uma função isotrópica do tensor de tensões de Cauchy, característica compartilhada entre todos os critérios abordados.

No espaço de tensões principais, a superfície de escoamento de Tresca ($\Phi = 0$) descreve um prisma hexagonal infinito, com seu eixo principal coincidindo com o eixo hidrostático (onde $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$), como mostra a Figura 20. É comum também mostrar a representação da superfície de escoamento a partir de sua projeção no plano π , o plano desviador (onde $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$).

Figura 20 – Superfície de escoamento de Tresca no espaço de tensões principais e sua projeção no plano π .



Fonte: Autor (2022).

2.3.3.2 Critério de von Mises

O critério de ruptura de von Mises estabelece que o regime plástico se inicia quando o segundo invariante do tensor desviador de tensões J_2 atinge um valor limite. Destaca-se então a decomposição do tensor de tensões de Cauchy em uma parcela desviadora e hidrostática:

$$\sigma = p\mathbf{I} + \mathbf{s}, \quad (2.78)$$

onde p é o componente hidrostático, como mostrado na Equação 2.77, e \mathbf{s} é o tensor desviador de tensões. Assim, define-se J_2 da seguinte forma:

$$J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} = \frac{1}{2} \text{tr} [\mathbf{s}^2]. \quad (2.79)$$

Considera-se então dois estados para a definição da função de escoamento de von Mises: cisalhamento puro e tensão uniaxial, respectivamente:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.80)$$

onde, a partir da Equação 2.79, para o estado de cisalhamento puro encontramos $J_2 = \tau^2$ e para o estado uniaxial de tensões encontramos $J_2 = 1/3 \cdot \sigma^2$. Assim, é possível obter a função de escoamento de von Mises para o cisalhamento puro:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{J_2(\mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}))} - \tau_y, \quad (2.81)$$

onde τ_y é a tensão cisalhante de escoamento; e para o estado uniaxial de tensões:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{3J_2(\mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}))} - \sigma_y, \quad (2.82)$$

onde σ_y é a tensão de escoamento e a parcela $\sqrt{3J_2(\mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}))}$ é chamada de tensão equivalente de von Mises.

O critério de von Mises, assim como Tresca, é insensível à pressão hidrostática e isotrópico. A superfície de escoamento de von Mises ($\Phi = 0$), representada no espaço de tensões principais, define um cilindro infinito coincidindo com o eixo hidrostático. A Figura 21 mostra a representação da superfície de escoamento, em conjunto com sua projecção no plano π , comparando com a projecção da superfície de Tresca. Assim, observa-se que os vértices do hexágono de Tresca intersectam o círculo de von Mises.

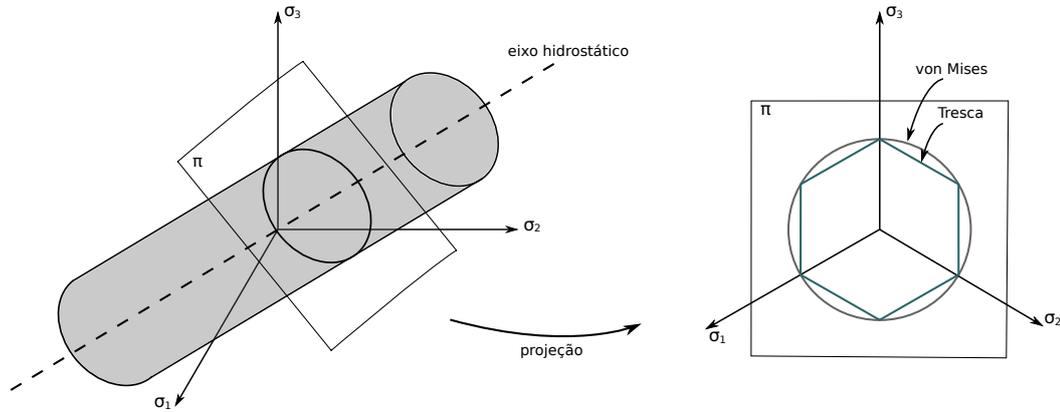
De maneira geral, adota-se uma regra de fluxo associativo ($\Psi = \Phi$) para o critério de ruptura de von Mises. A lei de fluxo associativa para von Mises é conhecida como lei de plasticidade de Prandtl-Reuss, e o vetor de fluxo é definido da seguinte maneira:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left[\sqrt{3J_2(\mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}))} \right] = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|}, \quad (2.83)$$

e o tensor taxa de deformação plástica é:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|}. \quad (2.84)$$

Figura 21 – Superfície de escoamento de von Mises no espaço de tensões principais e sua projeção no plano π , em comparação com a projeção do critério de Tresca.



Fonte: Autor (2022).

Em relação à lei de endurecimento, para todos os critérios abordados é adotado endurecimento isotrópico, isto é, a superfície de escoamento evolui uniformemente, sem distorção ou translação (CHEN; HAN, 1988). Para o modelo de von Mises, o endurecimento isotrópico equivale a um aumento no raio do cilindro definido no espaço de tensões principais. Além disso, há dois tipos de endurecimento isotrópico: endurecimento por deformação e endurecimento por trabalho, sendo o primeiro adotado neste trabalho.

O endurecimento por deformação, visto de forma simplificada para a formulação unidimensional do modelo elasto-plástico, define a variável interna α como uma medida escalar da deformação. Para o modelo de von Mises, utiliza-se a deformação acumulada (ou equivalente) de von Mises:

$$\bar{\epsilon}_p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_p : \dot{\epsilon}_p} dt = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\epsilon}_p\| dt, \quad (2.85)$$

em que a expressão anterior é na verdade uma generalização da Equação 2.48. Assim, seguindo a mesma lógica apresentada para o modelo unidimensional, temos:

$$\dot{\bar{\epsilon}}_p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_p : \dot{\epsilon}_p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\epsilon}_p\|, \quad (2.86)$$

onde comparando com a Equação 2.84, encontramos:

$$\dot{\bar{\epsilon}}_p = \dot{\gamma}. \quad (2.87)$$

O endurecimento é incorporado à função de escoamento de von Mises, assim como para o modelo unidimensional, fazendo a tensão de escoamento função da deformação plástica equivalente:

$$\sigma_y = \sigma_y(\bar{\epsilon}_p), \quad (2.88)$$

onde para o endurecimento isotrópico linear por deformação, a tensão de escoamento é definida pela seguinte expressão:

$$\sigma_y(\bar{\epsilon}_p) = \sigma_{y0} + H \cdot \bar{\epsilon}_p, \quad (2.89)$$

em que σ_{y0} é a tensão de escoamento indicando quando o regime plástico é iniciado, H é o módulo de endurecimento isotrópico linear e plasticidade perfeita é obtida quando $H = 0$.

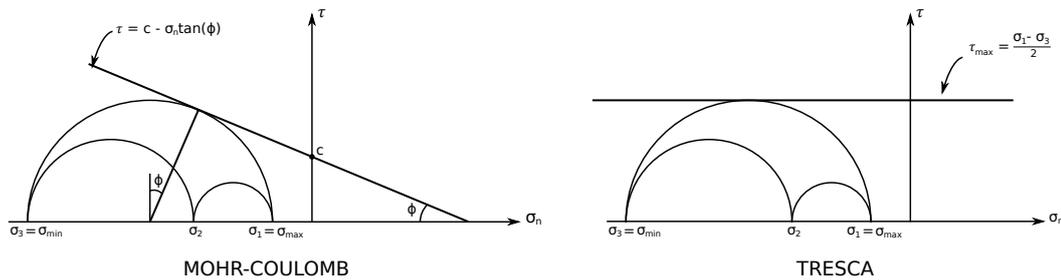
2.3.3.3 Critério de Mohr-Coulomb

O critério de escoamento de Mohr-Coulomb é o exemplo clássico de um critério sensível à pressão e pode ser entendido como uma generalização do critério de Tresca. O critério de Mohr-Coulomb expressa que a plasticidade ocorre quando a tensão cisalhante τ e a tensão normal σ_n atingirem a seguinte combinação crítica (SOUZA NETO; PERIĆ; OWEN, 2008):

$$\tau = c - \sigma_n \cdot \tan \phi, \quad (2.90)$$

onde c é a coesão do material e ϕ é o seu ângulo de atrito. A visualização do conjunto de valores de tensão que obedecem a esse critério é facilitada com a representação utilizando o círculo de Mohr (BRADY; BROWN, 2004). A Figura 22 mostra a representação do critério de Mohr-Coulomb, em comparação com o critério de Tresca, utilizando o círculo de Mohr. Observe que o critério de Tresca é uma linha reta que representa a tensão máxima de cisalhamento τ_{max} . Para o critério de Mohr-Coulomb, o fim do regime elástico ocorre quando o círculo de Mohr, delimitado pelas tensões máximas e mínimas (σ_{max} e σ_{min}), toca a linha tangente definida pela Equação 2.90.

Figura 22 – Representação dos critérios de Mohr-Coulomb e Tresca utilizando o círculo de Mohr.



Fonte: Autor (2022).

Considerando o início do regime plástico, a partir da Figura 22 é possível estabelecer a seguinte relação matemática para o critério de escoamento de Mohr-Coulomb em função das tensões principais $\sigma_1 = \sigma_{max}$ e $\sigma_3 = \sigma_{min}$:

$$\frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \cos \phi = c - \left(\frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} + \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \sin \phi \right) \tan \phi, \quad (2.91)$$

que de maneira simplificada pode ser escrita da seguinte forma:

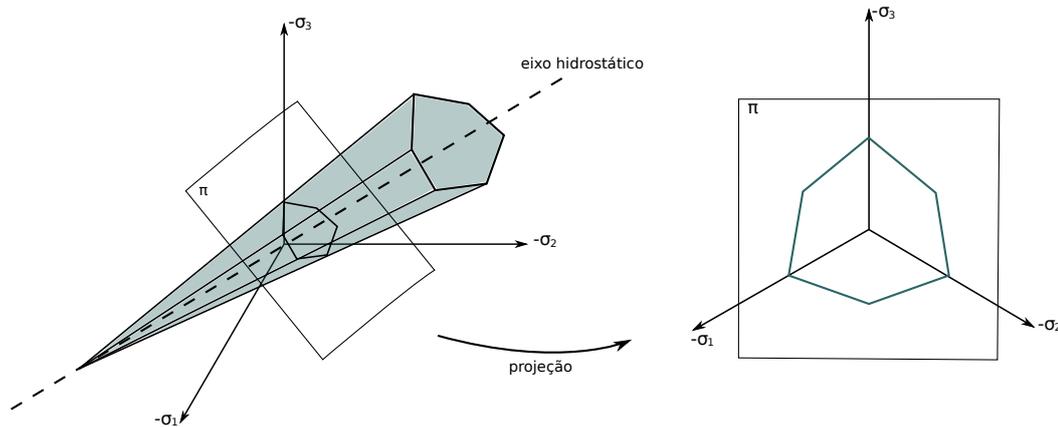
$$(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) + (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) \sin \phi = 2c \cos \phi, \quad (2.92)$$

finalizando na definição da função de escoamento de Mohr-Coulomb:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, c) = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) + (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) \sin \phi - 2c \cos \phi. \quad (2.93)$$

A superfície de escoamento de Mohr-Coulomb possui a forma de uma pirâmide hexagonal no espaço de tensões principais, alinhada ao eixo hidrostático (Figura 23). O ápice da pirâmide localiza-se no ponto $p = c \cot \phi$ e define o limite de resistência à tração do material, característica típica de concretos, solos e rochas.

Figura 23 – Superfície de escoamento de Mohr-Coulomb no espaço de tensões principais e sua projeção no plano π .



Fonte: Autor (2022).

Vale destacar que a representação da superfície de escoamento de Mohr-Coulomb é mostrada tomando as tensões principais negativas ($-\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3$) tendo em vista a convenção de sinais das tensões normais adotada na mecânica do contínuo (MASE; MASE, 1999). Para facilitar a modelagem computacional, costuma-se representar a superfície de Mohr-Coulomb a partir de uma representação multissuperfície, definida pelo seguinte conjunto de funções de escoamento:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\boldsymbol{\sigma}, c) &= \sigma_1 - \sigma_3 + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - 2c \cos \phi, \\ \Phi_2(\boldsymbol{\sigma}, c) &= \sigma_2 - \sigma_3 + (\sigma_2 + \sigma_3) \sin \phi - 2c \cos \phi, \\ \Phi_3(\boldsymbol{\sigma}, c) &= \sigma_2 - \sigma_1 + (\sigma_2 + \sigma_1) \sin \phi - 2c \cos \phi, \\ \Phi_4(\boldsymbol{\sigma}, c) &= \sigma_3 - \sigma_1 + (\sigma_3 + \sigma_1) \sin \phi - 2c \cos \phi, \\ \Phi_5(\boldsymbol{\sigma}, c) &= \sigma_3 - \sigma_2 + (\sigma_3 + \sigma_2) \sin \phi - 2c \cos \phi, \\ \Phi_6(\boldsymbol{\sigma}, c) &= \sigma_1 - \sigma_2 + (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \phi - 2c \cos \phi, \end{aligned} \quad (2.94)$$

onde $\Phi_i(\boldsymbol{\sigma}, c) = 0$ define os planos no espaço de tensões principais para cada $i = \{1, \dots, 6\}$. Dessa forma, o domínio elástico é descrito da seguinte forma:

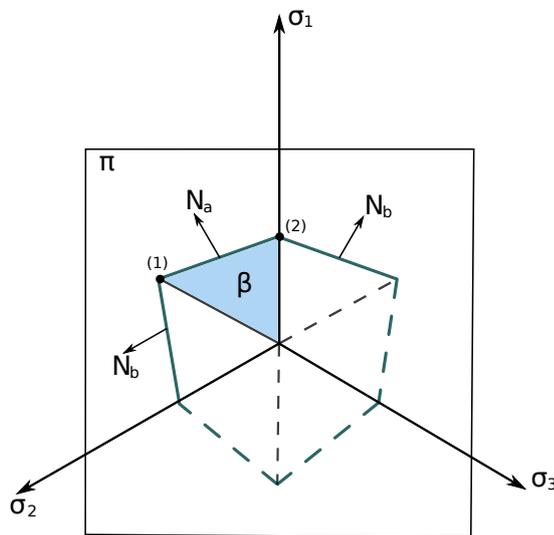
$$\mathbb{E} = \{\boldsymbol{\sigma} \mid \Phi_i(\boldsymbol{\sigma}, c) < 0, i = \{1, \dots, 6\}\}. \quad (2.95)$$

A superfície de escoamento de Mohr-Coulomb possui singularidades no encontro entre os planos definidos pela Equação 2.94 e no ápice da pirâmide hexagonal. Assim, quando usamos a regra de fluxo associativa para o critério de Mohr-Coulomb ($\dot{\Psi} = \dot{\Phi}$), o regime plástico pode ocorrer a partir de uma face, das arestas dos encontros entre os planos individuais ou no ápice da pirâmide. Para a definição da regra de fluxo, considera-se as tensões principais ordenadas:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3, \quad (2.96)$$

de forma que a análise é reduzida a uma das seis regiões do plano π estabelecidas pela representação multissuperfície adotada. Na Figura 24, o plano π está representado com os eixos principais positivos e eixo principal σ_1 na direção vertical, de modo que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ é satisfeito na região β pintada em azul. Assim, a ocorrência da plasticidade é analisada na porção suave do plano principal (face da pirâmide de Mohr-Coulomb correspondente à região β quando visualizamos no plano π), nos vértices (1) e (2) e no ápice da pirâmide de Mohr-Coulomb.

Figura 24 – Regra de fluxo de Mohr-Coulomb.



Fonte: Adaptado de Souza Neto, Perić e Owen (2008).

Quando a plasticidade ocorre na face, ou seja, a partir porção suave do plano principal ($\Phi_1 = 0, \Phi_2 < 0$ e $\Phi_6 < 0$), a regra de fluxo toma a seguinte forma:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \dot{\gamma} \mathbf{N}_a, \quad (2.97)$$

em que \mathbf{N}_a é normal ao plano $\Phi_1 = 0$ e definida da seguinte maneira:

$$\mathbf{N}_a = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = (1 + \sin \phi) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - (1 - \sin \phi) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \quad (2.98)$$

onde os \mathbf{e}_i indicam as direções principais associadas às tensões principais σ_i . Quando plasticidade ocorre nos vértices (1) e (2) ($\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 \leq 0$ e $\Phi_6 \leq 0$), têm-se a seguinte regra de fluxo:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\gamma}_a \mathbf{N}_a + \dot{\gamma}_b \mathbf{N}_b, \quad (2.99)$$

onde para o vértice (1), o vetor de fluxo \mathbf{N}_b é normal ao plano $\Phi_2 = 0$ e definido da seguinte maneira:

$$\mathbf{N}_b = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = (1 + \sin \phi) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - (1 - \sin \phi) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \quad (2.100)$$

e para o vértice (2), o vetor de fluxo \mathbf{N}_b é normal ao plano $\Phi_6 = 0$, sendo definido da seguinte maneira:

$$\mathbf{N}_b = \frac{\partial \Phi_6}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = (1 + \sin \phi) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - (1 - \sin \phi) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2. \quad (2.101)$$

No ápice da pirâmide de Mohr-Coulomb, todos os planos interceptam entre si, e a forma mais geral da regra de fluxo é:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \sum_{i=1}^6 \dot{\gamma}_i \mathbf{N}_i, \quad (2.102)$$

em que é possível definir a parte volumétrica da taxa de deformação plástica da seguinte maneira:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{p,\text{vol}} = 2 \sin \phi \sum_{i=1}^6 \dot{\gamma}_i. \quad (2.103)$$

É comum estabelecer a regra de fluxo não associativa para o modelo de Mohr-Coulomb a partir da substituição do ângulo de atrito ϕ pelo ângulo de dilatância ψ na função de escoamento Φ , afim de evitar dilatações excessivas quando utiliza-se ϕ , onde $\psi \leq \phi$ (SOUZA NETO; PERIĆ; OWEN, 2008).

Análogo ao critério de von Mises, a lei de endurecimento isotrópico linear por deformação para Mohr-Coulomb pode ser definida tomando a coesão como função da deformação plástica equivalente de Mohr-Coulomb:

$$c(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) = c_0 + H \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_p, \quad (2.104)$$

considerando o endurecimento associativo. A taxa de deformação plástica equivalente de Mohr-Coulomb, em sua forma mais geral, é dada por:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_p = - \sum_{i=1}^6 \dot{\gamma}_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial c}. \quad (2.105)$$

Quando a plasticidade ocorre no plano principal (porção suave), a taxa de deformação plástica equivalente é dada por:

$$\dot{\epsilon}_p = 2 \cos(\phi) \dot{\gamma}; \quad (2.106)$$

e quando ocorre nos vértices (1) e (2), toma a seguinte forma:

$$\dot{\epsilon}_p = 2 \cos \phi (\dot{\gamma}_a + \dot{\gamma}_b). \quad (2.107)$$

Destaca-se que podemos utilizar uma regra de fluxo associativa junto a um endurecimento não associativo ao se considerar, por exemplo, a definição da taxa de deformação plástica equivalente de von Mises (Equação 2.86), em conjunto com a taxa de deformação plástica de Mohr-Coulomb:

$$\dot{\epsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\epsilon}_p\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\gamma}_i \mathbf{N}_i\|, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (2.108)$$

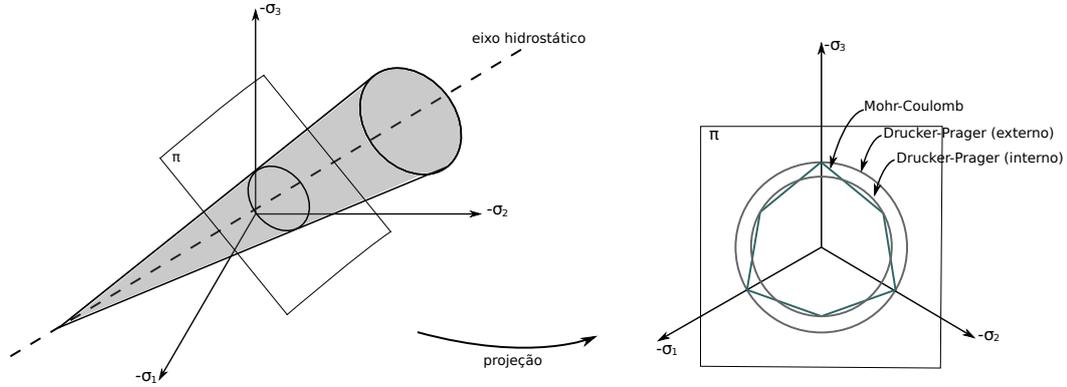
2.3.3.4 Critério de Drucker-Prager

O critério estabelecido por Drucker e Prager consiste basicamente em uma modificação do critério de von Mises para introduzir a sensibilidade à pressão hidrostática, estabelecendo que plasticidade ocorre quando o segundo invariante do tensor desviador de tensão J_2 e a parte hidrostática do tensor de tensões p , atingirem a seguinte combinação crítica (SOUZA NETO; PERIĆ; OWEN, 2008):

$$\sqrt{J_2(\mathbf{s})} + \eta p = k, \quad (2.109)$$

onde η e k são parâmetros do material. A superfície de escoamento de Drucker-Prager, representada no espaço de tensões principais, é um cone com seu eixo coincidindo com o eixo hidrostático, conforme mostra a Figura 25.

Figura 25 – Superfície de escoamento de Drucker-Prager no espaço de tensões principais e sua projeção no plano π , em comparação com a projeção do critério de Mohr-Coulomb.



Fonte: Autor (2022).

Costuma-se escolher os parâmetros η e k para aproximar a superfície de Drucker-Prager para o superfície de Mohr-Coulomb. Dessa forma, definimos a função de escoamento de Drucker-Prager da seguinte maneira:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, c) = \sqrt{J_2(\mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}))} + \eta p(\boldsymbol{\sigma}) - \xi c, \quad (2.110)$$

em que k foi tomado igual a ξc , onde c é a coesão e os parâmetros η e ξ são escolhidos de acordo com a aproximação para a superfície de Mohr-Coulomb. As aproximações mais utilizadas, e adotadas neste trabalho, são para os vértices internos e externos da superfície de Mohr-Coulomb, conforme mostrado na Figura 25. Para os vértices internos, η e ξ são definidos da seguinte maneira:

$$\eta = \frac{6 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 + \sin \phi)}, \quad \xi = \frac{6 \cos \phi}{\sqrt{3} (3 + \sin \phi)}; \quad (2.111)$$

e para os vértices externos, η e ξ tomam a seguinte forma:

$$\eta = \frac{6 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)}, \quad \xi = \frac{6 \cos \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)}. \quad (2.112)$$

Semelhante ao critério de Mohr-Coulomb, a superfície de escoamento de Drucker-Prager possui uma singularidade em seu ápice. Em qualquer outro ponto da superfície do cone, o vetor de fluxo pode ser encontrado da seguinte maneira:

$$\mathbf{N} = \frac{1}{2\sqrt{J_2(\mathbf{s})}} \mathbf{s} + \frac{\eta}{3} \mathbf{I}, \quad (2.113)$$

sendo utilizado para definir a regra de fluxo associativa de Drucker-Prager:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \dot{\gamma} \mathbf{N}, \quad (2.114)$$

onde pode-se utilizar também a decomposição do vetor de fluxo em uma parte desviadora N_d e volumétrica N_v , da seguinte forma:

$$\mathbf{N}_d = \frac{1}{2\sqrt{J_2(\mathbf{s})}}\mathbf{s}, \quad N_v = \eta. \quad (2.115)$$

Assim como para Mohr-Coulomb, costuma-se definir a parte volumétrica da taxa de deformação plástica para a regra de fluxo associativa de Drucker-Prager, dada por:

$$\dot{\epsilon}_{p,\text{vol}} = \dot{\gamma}\eta. \quad (2.116)$$

Uma regra de fluxo não associativa pode ser escolhida, de forma análoga a Mohr-Coulomb, com a adoção do potencial de fluxo Ψ definido como sendo a função de escoamento de Drucker-Prager Φ com a substituição do ângulo de atrito ϕ pelo ângulo de dilatância ψ . Assim, o potencial de fluxo é definido da seguinte maneira:

$$\Psi(\boldsymbol{\sigma}, c) = \sqrt{J_2(\mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}))} + \bar{\eta}p, \quad (2.117)$$

onde $\bar{\eta}$ substitui ϕ na aproximação escolhida da seguinte forma:

$$\bar{\eta} = \frac{6 \sin \psi}{\sqrt{3}(3 \pm \sin \psi)}, \quad (2.118)$$

em que o sinal $-$ indica ajuste para os vértices externos e o sinal $+$ indica ajuste para os vértices internos do hexágono de Mohr-Coulomb (Figura 25). Utilizando Drucker-Prager não associativo, a parte volumétrica do vetor de fluxo é dada por:

$$N_v = \bar{\eta}, \quad (2.119)$$

e parcela volumétrica da taxa de deformação plástica para a regra de fluxo não associativa é obtida pela seguinte equação:

$$\dot{\epsilon}_{p,\text{vol}} = \dot{\gamma}\bar{\eta}. \quad (2.120)$$

A lei de endurecimento isotrópica linear associativa para Drucker-Prager possui a mesma forma do critério de Mohr-Coulomb, definindo a coesão em função da deformação plástica equivalente de Drucker-Prager:

$$c(\bar{\epsilon}_p) = c_0 + H \cdot \bar{\epsilon}_p, \quad (2.121)$$

onde a taxa de deformação plástica equivalente é definida da seguinte maneira:

$$\dot{\bar{\epsilon}}_p = -\dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial c} = \dot{\gamma}\xi. \quad (2.122)$$

3 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DOS MODELOS ELASTO-PLÁSTICOS

Sumário

| | | |
|-------|---|----|
| 3.1 | Algoritmo de atualização das tensões | 64 |
| 3.2 | Implementação numérica do modelo Elástico Linear | 65 |
| 3.3 | Implementação numérica dos modelos elasto-plásticos | 65 |
| 3.3.1 | Modelo de von Mises | 67 |
| 3.3.2 | Modelo de Drucker-Prager | 70 |
| 3.3.3 | Modelo de Mohr-Coulomb | 73 |
| 3.4 | Verificação dos algoritmos implementados | 79 |
| 3.4.1 | Verificação do modelo de von Mises | 80 |
| 3.4.2 | Verificação do modelo de Drucker-Prager | 83 |

3.1 Algoritmo de atualização das tensões

No contexto do MPM, a implementação numérica dos modelos constitutivos é, em geral, formulada de maneira incremental, avaliando as tensões e deformações para cada ponto material do corpo considerado. Algoritmos que integram as relações constitutivas formuladas com taxas são chamados de algoritmos de atualização das tensões (BELYTSCHKO et al., 2014). Assim, a tensão σ^{k+1} pode ser obtida, por meio de um método de integração explícita, a partir da taxa do tensor de tensões $\dot{\sigma}^{k+1/2}$ no instante $t^{k+1/2}$, da seguinte maneira:

$$\sigma^{k+1} = \sigma^k + \dot{\sigma}^{k+1/2} \Delta t. \quad (3.1)$$

Como descrito no Capítulo 2, adotamos o modelo hipoeelástico-plástico, que introduz taxas de tensões objetivas na modelagem constitutiva afim de estender a formulação infinitesimal da elasto-plasticidade para o contexto de deformações finitas. Em específico, utilizou-se a taxa de tensões de Jaumann, que pode ser escrita no instante $t^{k+1/2}$ da seguinte maneira:

$$\nabla_{k+1/2} \sigma^{k+1/2} = \dot{\sigma}^{k+1/2} - \mathbf{W}^{k+1/2} \sigma^k - \sigma^k (\mathbf{W}^{k+1/2})^T. \quad (3.2)$$

Combinando as Equações 3.1 e 3.2, é possível obter o tensor de tensões de Cauchy σ^{k+1} , no instante t^{k+1} , da seguinte forma:

$$\sigma^{k+1} = \sigma^k + \left[\nabla_{k+1/2} \sigma^{k+1/2} + \sigma^k (\mathbf{W}^{k+1/2})^T + \mathbf{W}^{k+1/2} \sigma^k \right] \Delta t, \quad (3.3)$$

onde a equação anterior pode ser simplificada para:

$$\boldsymbol{\sigma}^{k+1} = \underline{\boldsymbol{\sigma}}^k + \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}^{k+1/2} \Delta t, \quad (3.4)$$

em que $\underline{\boldsymbol{\sigma}}^k$ é dado por:

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}^k = \boldsymbol{\sigma}^k + \left[\boldsymbol{\sigma}^k (\mathbf{W}^{k+1/2})^T + \mathbf{W}^{k+1/2} \boldsymbol{\sigma}^k \right] \Delta t, \quad (3.5)$$

e reflete o efeito das rotações no tensor de tensões de Cauchy. É importante ressaltar que esse tipo de algoritmo para a atualização das tensões somente assegura a objetividade da relação constitutiva quando os incrementos adotados são suficientemente pequenos (HUGHES; WINGETS, 1980; SIMO; HUGHES, 1998). Como o MPM é um método explícito, onde o critério de estabilidade requer incrementos de tempo muito pequenos para assegurar a convergência, o uso do algoritmo apresentado anteriormente para a formulação da plasticidade finita é justificável.

3.2 Implementação numérica do modelo Elástico Linear

A relação constitutiva generalizada do modelo elástico linear, com a adoção da taxa de Jaumann, é definida da seguinte forma:

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad (3.6)$$

e pode ser decomposta numa parte desviadora $\dot{\boldsymbol{s}}$ e outra volumétrica \dot{p} da seguinte maneira:

$$\dot{\boldsymbol{s}} = 2G\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_d, \quad \dot{p} = K\dot{\epsilon}_v, \quad (3.7)$$

onde $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_d$ é a parte desviadora do tensor taxa de deformação e $\dot{\epsilon}_v$ é a taxa de deformação volumétrica, definidos da seguinte forma:

$$\dot{\epsilon}_v = tr[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}], \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_d = \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{\dot{\epsilon}_v}{3} \mathbf{I}. \quad (3.8)$$

Ao substituir as Equações 3.7 e 3.8 na Equação 3.4 de atualização das tensões, obtém-se:

$$\boldsymbol{s}^{k+1} = \underline{\boldsymbol{s}}^k + 2G\overset{\nabla}{\boldsymbol{\epsilon}}_d^{k+1/2} \Delta t, \quad p^{k+1} = p^k + K\dot{\epsilon}_v^{k+1/2} \Delta t, \quad (3.9)$$

onde $\underline{\boldsymbol{s}}^k$ é a parte desviadora do tensor $\underline{\boldsymbol{\sigma}}^k$. Por fim, o Algoritmo 1 mostra o passo a passo para se realizar a integração do modelo elástico linear (Apêndice B).

3.3 Implementação numérica dos modelos elasto-plásticos

Para os modelos elasto-plásticos, foi realizada a implementação numérica dos critérios de von Mises, Drucker-Prager e Mohr-Coulomb. Os critérios de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb, devido a sua sensibilidade à pressão hidrostática, são mais direcionados para os geomateriais.

Os critérios de Tresca e von Mises são mais simples do ponto de vista da implementação computacional. Dessa forma, foi implementado somente o critério de von Mises, por sua implementação mais simples que Tresca, e para completar as análises da simulação de casos sem a consideração da pressão hidrostática na formulação do modelo.

Nos modelos elasto-plásticos, além da obtenção das tensões atualizadas $\boldsymbol{\sigma}^{k+1}$, o algoritmo de integração do modelo constitutivo tem por objetivo a obtenção das deformações plásticas atualizadas $\boldsymbol{\varepsilon}_p^{k+1}$, as variáveis internas associadas ao fenômeno de endurecimento atualizadas $\boldsymbol{\alpha}^{k+1}$ e o multiplicador plástico atualizado $\dot{\gamma}^{k+1}$, no instante t^{k+1} , dado seus estados anteriores $\boldsymbol{\varepsilon}_p^k$, $\boldsymbol{\alpha}^k$ e $\dot{\gamma}^k$ no instante t^k , a partir de um incremento de deformação $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k+1} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{k+1/2} \Delta t$ (ZHANG; CHEN; LIU, 2017).

A integração numérica mais simples é obtida utilizando o método de Euler explícito. No entanto, a integração com o método de Euler explícito gera valores de tensão $\boldsymbol{\sigma}^{k+1}$ que não obedecem as condições de Kuhn-Tucker no instante t^{k+1} durante fluxo plástico, ou seja, $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) \neq 0$ para $\dot{\gamma} > 0$ (BELYTSCSKO et al., 2014). Por este motivo, é comum a utilização de algoritmos de retorno, que dividem a integração em dois passos:

- (a) No primeiro passo, é feita uma tentativa elástica ao assumir que o material se encontra no regime elástico. Com essa consideração, as tensões atualizadas são obtidas $\boldsymbol{\sigma}^{k+1, \text{tent}}$, atualizando-as a partir do incremento total de deformação $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k+1}$;
- (b) No segundo passo, verificamos se o material ainda se encontra em regime elástico. Caso esteja em regime elástico após a atualização das tensões, o passo anterior é válido. Caso contrário, as tensões encontradas na tentativa elástica $\boldsymbol{\sigma}^{k+1, \text{tent}}$ são corrigidas para retornar à superfície de escoamento, garantindo a consistência do fluxo plástico.

No método de Euler explícito, a taxa de deformação plástica $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ e a taxa da variável interna $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ são avaliadas no instante t^k . Utilizou-se neste trabalho o método de Euler implícito, onde $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p$ e $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ são avaliados no instante t^{k+1} , e a tensão atualizada $\boldsymbol{\sigma}^{k+1}$ satisfaz $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$ para $\dot{\gamma} > 0$. Assim, as equações para atualização das variáveis elasto-plásticas utilizando o método de Euler implícito são:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^{k+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}^k + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{k+1} \Delta t = \boldsymbol{\varepsilon}^k + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k+1}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_p^{k+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}_p^k + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p^{k+1} \Delta t = \boldsymbol{\varepsilon}_p^k + \Delta\gamma^{k+1} \mathbf{N}^{k+1}, \\ \boldsymbol{\alpha}^{k+1} &= \boldsymbol{\alpha}^k + \dot{\boldsymbol{\alpha}}^{k+1} \Delta t = \boldsymbol{\alpha}^k + \Delta\gamma^{k+1} \mathbf{H}^{k+1},\end{aligned}\tag{3.10}$$

onde $\Delta\gamma^{k+1} = \dot{\gamma}^{k+1} \Delta t$ é o incremento do multiplicador plástico. Verificaremos agora como é feita a correção das tensões encontradas na tentativa elástica $\boldsymbol{\sigma}^{k+1, \text{tent}}$ durante o segundo passo do algoritmo de retorno. Como apresentado no Capítulo 2, através da Equação 2.61, nos materiais elasto-plásticos a taxa de tensões de Jaumann é relacionada com a parte elástica do tensor taxa de deformação da seguinte maneira:

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p).\tag{3.11}$$

Fazendo relação com a Equação 3.4, a atualização das tensões no instante t^{k+1} é dada por:

$$\boldsymbol{\sigma}^{k+1} = \underline{\boldsymbol{\sigma}}^k + \left[\mathbf{C} : \left(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{k+1/2} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p^{k+1/2} \right) \right] \Delta t, \quad (3.12)$$

em que, explicitando para os incrementos de deformação e agrupando a parte elástica da equação anterior, obtemos:

$$\boldsymbol{\sigma}^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}^{k+1,\text{tent}} - \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}_p^{k+1}, \quad (3.13)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}^{k+1,\text{tent}}$ é definido da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\sigma}^{k+1,\text{tent}} = \underline{\boldsymbol{\sigma}}^k + \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{k+1}. \quad (3.14)$$

No segundo passo dos algoritmos de retorno, as tensões são corrigidas pela parcela $-\mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}_p^{k+1}$ e a tensão deve obedecer a seguinte condição:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}^{k+1}) = \Phi(\boldsymbol{\sigma}^{k+1,\text{tent}} - \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}_p^{k+1}) = 0. \quad (3.15)$$

3.3.1 Modelo de von Mises

A implementação do modelo de von Mises é realizada considerando fluxo plástico associativo e endurecimento isotrópico por deformação, linear por partes e associativo. A curva de endurecimento linear por partes é montada a partir de um conjunto de pares $\{[\bar{\epsilon}_{p,i}, \sigma_{y,i}]\}$ fornecidos pelo usuário, interpolando para valores entre pares. Com essas considerações, é possível encontrar equações explícitas, mesmo utilizando o método de Euler implícito, para a integração do modelo de von Mises.

A função de escoamento de von Mises é dada por:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{3J_2(\mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}))} - \sigma_y(\bar{\epsilon}_p), \quad (3.16)$$

onde, para a regra de fluxo associativa, têm-se:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \dot{\gamma} \mathbf{N} = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|}, \quad (3.17)$$

e para a lei de endurecimento associativa, a taxa de deformação plástica equivalente é definida por:

$$\dot{\bar{\epsilon}}_p = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p\| = \dot{\gamma}. \quad (3.18)$$

O primeiro passo é a tentativa elástica, onde utilizamos o Algoritmo 1 para encontrar as tensões $\boldsymbol{\sigma}^{k+1,\text{tent}}$ no instante t^{k+1} , com o incremento total de deformação $\Delta \boldsymbol{\epsilon}^{k+1}$. Verifica-se então se $\boldsymbol{\sigma}^{k+1,\text{tent}}$ está dentro do domínio elástico, ou seja, se $\Phi(\boldsymbol{\sigma}^{k+1,\text{tent}}) \leq 0$. Caso as tensões

da tentativa elástica obedecem à condição anterior, pode-se considerar o seguinte estado como solução da integração:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^{k+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}^k + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k+1}, \\ \boldsymbol{\sigma}^{k+1} &= \boldsymbol{\sigma}^{k+1,\text{tent}}, \\ \bar{\varepsilon}_p^{k+1} &= \bar{\varepsilon}_p^{k+1,\text{tent}} = \bar{\varepsilon}_p^k.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Caso $\Phi(\boldsymbol{\sigma}^{k+1,\text{tent}}) > 0$, é necessário aplicar o algoritmo de retorno descrito anteriormente. Especificamente para o modelo de von Mises, a Equação 3.10 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^{k+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}^k + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k+1}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_p^{k+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}_p^k + \Delta\gamma^{k+1} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\mathbf{s}^{k+1}}{\|\mathbf{s}^{k+1}\|}, \\ \bar{\varepsilon}_p^{k+1} &= \bar{\varepsilon}_p^k + \Delta\gamma^{k+1}.\end{aligned}\quad (3.20)$$

Sabendo que o vetor de fluxo de von Mises não possui parte volumétrica, e utilizando a Equação 3.13, as tensões encontradas na tentativa elástica são corrigidas pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}p^{k+1} &= p^{k+1,\text{tent}}, \\ \mathbf{s}^{k+1} &= \mathbf{s}^{k+1,\text{tent}} - \Delta\gamma^{k+1} 2G \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\mathbf{s}^{k+1}}{\|\mathbf{s}^{k+1}\|}.\end{aligned}\quad (3.21)$$

A seguinte relação pode ser utilizada para simplificar a equação de atualização do tensor desviador de tensões (SOUZA NETO; PERIĆ; OWEN, 2008):

$$\frac{\mathbf{s}^{k+1}}{\|\mathbf{s}^{k+1}\|} = \frac{\mathbf{s}^{k+1,\text{tent}}}{\|\mathbf{s}^{k+1,\text{tent}}\|}, \quad (3.22)$$

obtendo a seguinte expressão:

$$\mathbf{s}^{k+1} = \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Delta\gamma^{k+1} 2G}{\|\mathbf{s}^{k+1,\text{tent}}\|}\right) \mathbf{s}^{k+1,\text{tent}} = \left(1 - \frac{\Delta\gamma^{k+1} 3G}{q^{k+1,\text{tent}}}\right) \mathbf{s}^{k+1,\text{tent}}, \quad (3.23)$$

onde $q^{k+1,\text{tent}} = \sqrt{3J_2(\mathbf{s}^{k+1,\text{tent}})}$ refere-se à tensão equivalente de von Mises proveniente da tentativa elástica e as tensões devem obedecer à condição:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}^{k+1}) = q^{k+1} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_p^{k+1}) = 0, \quad (3.24)$$

em que a tensão equivalente de von Mises pode ser corrigida da seguinte maneira:

$$q^{k+1} = q^{k+1,\text{tent}} - 3G\Delta\gamma^{k+1} = \sqrt{3J_2(\mathbf{s}^{k+1,\text{tent}})} - 3G\Delta\gamma^{k+1}. \quad (3.25)$$

Substituindo a equação anterior e terceira expressão da Equação 3.20 na Equação 3.24, obtém-se:

$$\Phi(\Delta\gamma^{k+1}) = q^{k+1,\text{tent}} - 3G\Delta\gamma^{k+1} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_p^k + \Delta\gamma^{k+1}) = 0, \quad (3.26)$$

onde a única variável desconhecida passa a ser $\Delta\gamma^{k+1}$. Por fim, a equação anterior é resolvida e as variáveis de estado são atualizadas a partir das seguintes equações:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{k+1} &= \varepsilon^k + \Delta\varepsilon^{k+1}, \\ \mathbf{s}^{k+1} &= \left(1 - \frac{\Delta\gamma^{k+1}3G}{q^{k+1,\text{tent}}}\right) \mathbf{s}^{k+1,\text{tent}}, \\ \boldsymbol{\sigma}^{k+1} &= \mathbf{s}^{k+1} + p^{k+1,\text{tent}} \mathbf{I}, \\ \bar{\varepsilon}_p^{k+1} &= \bar{\varepsilon}_p^k + \Delta\gamma^{k+1}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Como descrito anteriormente, o modelo de von Mises adotado possui uma lei de endurecimento isotrópico linear por partes, possibilitando o cálculo de $\Delta\gamma^{k+1}$ a partir de uma expressão fechada. A tensão de escoamento $\sigma_y(\bar{\varepsilon}_p)$ é definida considerando o conjunto de pares $\{[\bar{\varepsilon}_{p,i}, \sigma_{y,i}]\}$, com $i = 1, \dots, n_{\text{pares}}$ e n_{pares} representa o número total de pares de valores fornecidos. Dessa forma, $\sigma_y(\bar{\varepsilon}_p)$ é dado por:

$$\begin{aligned} \sigma_y(\bar{\varepsilon}_p^k) &= \sigma_{y,i} - H_i(\bar{\varepsilon}_p^k - \bar{\varepsilon}_{p,i}), \\ \text{com } H_i &= \frac{\sigma_{y,i+1} - \sigma_{y,i}}{\bar{\varepsilon}_{p,i+1} - \bar{\varepsilon}_{p,i}}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde os subíndices i e $i+1$ indicam os pares que definem a inclinação do trecho retilíneo da função linear por partes onde $\bar{\varepsilon}_p^k$ está localizado. Assim, resolvendo a Equação 3.26 para $\Delta\gamma^{k+1}$, e com as considerações anteriores, encontramos:

$$\Delta\gamma^{k+1} = \frac{q^{k+1,\text{tent}} - \sigma_{y,i} - H_i(\bar{\varepsilon}_p^k - \bar{\varepsilon}_{p,i})}{3G + H_i}, \quad (3.29)$$

onde é necessário realizar um *loop* percorrendo todos os pares do conjunto fornecido que define a função linear por partes com o seguinte critério de parada:

$$\bar{\varepsilon}_{p,i} < \bar{\varepsilon}_p^{k+1} = \bar{\varepsilon}_p^k + \Delta\gamma^{k+1} \leq \bar{\varepsilon}_{p,i+1}. \quad (3.30)$$

Plasticidade perfeita é atingida quando $H = 0$. Especificamente, a plasticidade perfeita no algoritmo é considerada automaticamente no final de cada trecho retilíneo ou quando somente 1 par de valores é fornecido. Desse modo, para tratar a plasticidade perfeita, um par adicional é sempre acrescentado ao conjunto $\{[\bar{\varepsilon}_p, \sigma_y]\}$ fornecido pelo usuário. Assim, o conjunto de pares terá sempre a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \{[\bar{\varepsilon}_p, \sigma_y]\} &= \left[\{[\bar{\varepsilon}_{p,i}, \sigma_{y,i}], [\bar{\varepsilon}_{p,i+1}, \sigma_{y,i+1}], \dots, [\bar{\varepsilon}_{p,n_{\text{pares}}}, \sigma_{y,n_{\text{pares}}}] \right], \\ &\quad \{[1e+100, \sigma_{y,n_{\text{pares}}}] \}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde $\{[1e+100, \sigma_{y,n_{\text{pares}}}] \}$ é o par adicional e a deformação plástica equivalente foi tomada com um valor aproximadamente infinito implicando em $H = 0$ (plasticidade perfeita). Note que

o tamanho real do conjunto passa a ser $n_{\text{pares}} + 1$. A integração do modelo de von Mises é resumida no Algoritmo 2 (Apêndice B).

3.3.2 Modelo de Drucker-Prager

A função de escoamento de Drucker-Prager é dada da seguinte maneira:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, c) = \sqrt{J_2(\mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}))} + \eta p(\boldsymbol{\sigma}) - \xi c(\bar{\varepsilon}_p), \quad (3.32)$$

onde os parâmetros η e ξ são escolhidos de acordo com a aproximação definida para a superfície de escoamento de Mohr-Coulomb. No entanto, a implementação do modelo de Drucker-Prager aqui apresentada é formulada considerando fluxo plástico não associativo, com o potencial de fluxo definido por:

$$\Psi(\boldsymbol{\sigma}, c) = \sqrt{J_2(\mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}))} + \bar{\eta} p, \quad (3.33)$$

onde o parâmetro $\bar{\eta}$ depende da aproximação escolhida para a superfície de escoamento de Mohr-Coulomb, como detalhado do Capítulo 2. Desse modo, a regra de fluxo não associativa para o modelo de Drucker-Prager é expressa por:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\gamma} \mathbf{N} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (3.34)$$

onde \mathbf{N} é o vetor de fluxo. De forma análoga à implementação de von Mises, adotaremos uma lei de endurecimento isotrópica associativa linear por partes, definida para o modelo de Drucker-Prager da seguinte forma:

$$c(\bar{\varepsilon}_p^k) = c_i - H_i(\bar{\varepsilon}_p^k - \bar{\varepsilon}_{p,i}), \quad (3.35)$$

com $H_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{\bar{\varepsilon}_{p,i+1} - \bar{\varepsilon}_{p,i}}$,

onde $i = 1, \dots, n_{\text{pares}}$ e n_{pares} define o número total de pares fornecidos para caracterização da função linear por partes. Seguindo a lógica do algoritmo de retorno, o primeiro passo consiste na tentativa elástica, onde se calculam, com o Algoritmo 1, as tensões elásticas $\boldsymbol{\sigma}^{k+1, \text{tent}}$ no instante t^{k+1} , considerando o incremento total de deformação $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{k+1}$, como descrito na implementação numérica do modelo de von Mises. Uma vez que a predição elástica falha, o modelo de Drucker-Prager aplica o retorno para a superfície de escoamento de duas maneiras: retorno para a porção suave do cone (laterais) e, caso necessário, retorno para o ápice do cone.

Na porção suave do cone, o vetor de fluxo não associativo é definido da seguinte maneira:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2\sqrt{J_2(\mathbf{s})}} \mathbf{s} + \frac{\bar{\eta}}{3} \mathbf{I}. \quad (3.36)$$

Substituindo a equação anterior na Equação 3.13 para a correção das tensões elásticas, obtém-se:

$$\boldsymbol{\sigma}^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}^{k+1,\text{tent}} - \left(\frac{G}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{k+1})}} \mathbf{s}^{k+1} + \frac{K\bar{\eta}}{3} \mathbf{I} \right) \Delta\gamma^{k+1}. \quad (3.37)$$

De forma semelhante à implementação de von Mises, utilizamos a seguinte relação para simplificar a atualização do tensor de tensões (SOUZA NETO; PERIĆ; OWEN, 2008):

$$\frac{\mathbf{s}^{k+1}}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{k+1})}} = \frac{\mathbf{s}^{k+1,\text{tent}}}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{k+1,\text{tent}})}}, \quad (3.38)$$

obtendo a seguinte expressão simplificada para atualização do tensor de tensões:

$$\boldsymbol{\sigma}^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}^{k+1,\text{tent}} - \left(\frac{G}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{k+1,\text{tent}})}} \mathbf{s}^{k+1,\text{tent}} + \frac{K\bar{\eta}}{3} \mathbf{I} \right) \Delta\gamma^{k+1}, \quad (3.39)$$

em que, dividindo numa parcela desviadora e outra hidrostática, obtém-se:

$$\begin{aligned} p^{k+1} &= p^{k+1,\text{tent}} - K\bar{\eta}\Delta\gamma^{k+1}, \\ \mathbf{s}^{k+1} &= \left(1 - \frac{G\Delta\gamma^{k+1}}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{k+1,\text{tent}})}} \right) \mathbf{s}^{k+1,\text{tent}}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

A partir da Equação 3.38, é possível obter a correção da parcela $\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{k+1})}$, da seguinte forma:

$$\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{k+1})} = \sqrt{J_2(\mathbf{s}^{k+1,\text{tent}})} - G\Delta\gamma^{k+1}. \quad (3.41)$$

Em conjunto com a equação anterior e a pressão hidrostática corrigida, utilizamos a seguinte expressão da atualização da deformação plástica equivalente de Drucker-Prager (particularização da terceira expressão da Equação 3.10):

$$\bar{\varepsilon}_p^{k+1} = \bar{\varepsilon}_p^k + \Delta\gamma^{k+1}\xi, \quad (3.42)$$

onde substituímos em $\Phi = 0$ para assegurar a consistência do fluxo plástico na porção suave do cone, resultando na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \Phi(\Delta\gamma^{k+1}) &= \sqrt{J_2(\mathbf{s}^{k+1,\text{tent}})} - G\Delta\gamma^{k+1} + \eta(p^{k+1,\text{tent}} - K\bar{\eta}\Delta\gamma^{k+1}) \\ &\quad - \xi c(\bar{\varepsilon}_p^k + \Delta\gamma^{k+1}\xi) = 0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Novamente, para o modelo de Drucker-Prager, é possível obter uma expressão fechada para $\Delta\gamma^{k+1}$ pois adotamos uma lei de endurecimento linear por partes (Equação 3.35). Dessa forma, resolvendo a equação anterior em função de $\Delta\gamma^{k+1}$, obtemos a seguinte expressão:

$$\Delta\gamma^{k+1} = \frac{\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{k+1,\text{tent}})} + \eta p^{k+1,\text{tent}} - \xi [c_i + H_i(\bar{\varepsilon}_p^k - \bar{\varepsilon}_{p,i})]}{G + \xi^2 H_i + K\eta\bar{\eta}}. \quad (3.44)$$

Após o cálculo do incremento do multiplicador plástico com a equação anterior, o tensor de tensões é atualizado a partir da Equação 3.40. Para validar o retorno para a porção suave do cone, empregamos a seguinte condição:

$$\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{k+1,\text{tent}})} - G\Delta\gamma^{k+1} \geq 0. \quad (3.45)$$

Caso a condição anterior seja satisfeita, o retorno para a porção suave do cone é válido e podemos atualizar o restante das variáveis de estado. Caso contrário, o retorno para o ápice do cone deve ser realizado. O ápice do cone de Drucker-Prager corresponde ao ponto onde:

$$p = c \cot \phi, \quad (3.46)$$

em que, fazendo relação com as Equações 2.111 e 2.112 dos parâmetros η e ξ , determinados de acordo com a aproximação escolhida, chegamos à seguinte equação:

$$p = c \frac{\xi}{\eta}. \quad (3.47)$$

Como o estado de tensões corrigido deve estar localizado no ápice do cone, o primeiro termo da Equação 3.40 é reescrito da seguinte forma:

$$c \left(\bar{\varepsilon}_p^k + \xi \Delta\gamma^{k+1} \right) \frac{\xi}{\eta} = p^{k+1,\text{tent}} - K\bar{\eta}\Delta\gamma^{k+1}. \quad (3.48)$$

A equação anterior é reescrita novamente em termos da parcela volumétrica do incremento de deformação plástica (Equação 2.120), dada por:

$$\Delta\varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1} = \Delta\gamma^{k+1} \bar{\eta}, \quad (3.49)$$

chegando à seguinte equação de consistência para o retorno para o ápice do cone:

$$c \left(\bar{\varepsilon}_p^k + \frac{\xi \Delta\varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1}}{\bar{\eta}} \right) \frac{\xi}{\eta} - p^{k+1,\text{tent}} + K\Delta\varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1} = 0. \quad (3.50)$$

Para simplificação, adota-se as seguintes constantes:

$$\alpha = \frac{\xi}{\bar{\eta}}, \quad \beta = \frac{\xi}{\eta}, \quad (3.51)$$

resultando na expressão simplificada do algoritmo de retorno para o ápice do cone de Drucker-Prager:

$$c \left(\bar{\varepsilon}_p^k + \alpha \Delta\varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1} \right) \beta - p^{k+1,\text{tent}} + K\Delta\varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1} = 0, \quad (3.52)$$

onde a única variável desconhecida é $\Delta\varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1}$. Da mesma forma que encontramos $\Delta\gamma^{k+1}$, pode-se encontrar $\Delta\varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1}$ a partir de uma expressão fechada, dada por:

$$\Delta\varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1} = \frac{p^{k+1,\text{tent}} - \beta [c_i + H_i (\bar{\varepsilon}_p^k - \bar{\varepsilon}_{p,i})]}{\alpha \beta H_i + K}. \quad (3.53)$$

Após a resolução da equação anterior, o tensor de tensões e a deformação plástica equivalente são atualizados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_p^{k+1} &= \bar{\varepsilon}_p^k + \alpha \Delta \varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1}, \\ \boldsymbol{\sigma}^{k+1} &= (p^{k+1,\text{tent}} - K \Delta \varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1}) \mathbf{I},\end{aligned}\quad (3.54)$$

onde é possível observar que o tensor de tensões atualizado possui somente a parcela hidrostática, já que o ápice do cone está localizado no eixo hidrostático. É importante frisar que no cálculo de $\Delta \gamma^{k+1}$ e $\Delta \varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1}$, as mesmas considerações em relação aos pares que caracterizam o endurecimento são levadas em conta, ou seja, seu cálculo é feito realizando um *loop* em todos os pares com o critério de parada definido pela Equação 3.30. Por fim, todo o procedimento aqui descrito é resumido nos Algoritmos 3, 4 e 5 (Apêndice B).

3.3.3 Modelo de Mohr-Coulomb

Para a implementação numérica do modelo de Mohr-Coulomb, é utilizada a representação multissuperfície, descrita pela Equação 2.94 para um fluxo plástico associativo. No entanto, fluxo plástico não associativo será considerado para a formulação aqui apresentada, de forma que os vetores de fluxo são definidos a partir da seguinte equação:

$$\mathbf{N}_i = \frac{\partial \Psi_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (3.55)$$

onde cada Ψ_i possui o mesmo formato de Φ_i na Equação 2.94, com exceção da substituição do ângulo de atrito ϕ pelo ângulo de dilatância ψ , com $\psi \leq \phi$. Ademais, considera-se também as tensões principais ordenadas ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$), simplificando a análise da regra de fluxo plástico para somente uma das seis regiões do plano desviador (plano π), como ilustrado na Figura 24.

Como apresentado na Subseção 2.3.3.3, há quatro possibilidades para que fluxo plástico ocorra: na porção suave do plano principal, nos vértices (1) e (2) e no ápice da pirâmide de Mohr-Coulomb (Figura 24). Para o caso de fluxo não associativo, as regras de fluxo são definidas da seguinte maneira:

(a) Fluxo plástico a partir da porção suave do plano principal:

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_a &= \frac{\partial \Psi_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = (1 + \sin \psi) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - (1 - \sin \psi) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \\ \dot{\varepsilon}_p &= \dot{\gamma}_a \mathbf{N}_a.\end{aligned}\quad (3.56)$$

(b) Fluxo plástico a partir do vértice (1):

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_b &= \frac{\partial \Psi_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = (1 + \sin \psi) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - (1 - \sin \psi) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \\ \dot{\varepsilon}_p &= \dot{\gamma}_a \mathbf{N}_a + \dot{\gamma}_b \mathbf{N}_b.\end{aligned}\quad (3.57)$$

(c) Fluxo plástico a partir do vértice (2):

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_b &= \frac{\partial \Psi_6}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = (1 + \sin \psi) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - (1 - \sin \psi) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \\ \dot{\varepsilon}_p &= \dot{\gamma}_a \mathbf{N}_a + \dot{\gamma}_b \mathbf{N}_b.\end{aligned}\quad (3.58)$$

(d) Fluxo plástico a partir do ápice da pirâmide de Mohr-Coulomb:

$$\dot{\varepsilon}_p = \sum_{i=1}^6 \dot{\gamma}_i \mathbf{N}_i. \quad (3.59)$$

Para o modelo de Mohr-Coulomb, será adotado uma lei de endurecimento isotrópica associativa linear por partes, definida de maneira análoga ao modelo de Drucker-Prager:

$$c(\bar{\varepsilon}_p^k) = c_i - H_i (\bar{\varepsilon}_p^k - \bar{\varepsilon}_{p,i}), \quad (3.60)$$

$$\text{com } H_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{\bar{\varepsilon}_{p,i+1} - \bar{\varepsilon}_{p,i}},$$

em que $i = 1, \dots, n_{\text{pares}}$ e n_{pares} define o número total de pares fornecidos para caracterização da função linear por partes. A evolução da deformação plástica equivalente $\bar{\varepsilon}_p$ é definida para o plano principal e para os vértices (1) e (2) segundo as Equações 2.106 e 2.107, respectivamente. Para o ápice, a Equação 2.105 é utilizada e a seguinte relação entre a taxa de deformação plástica equivalente e a taxa de deformação plástica volumétrica é utilizada pelo algoritmo de integração do modelo:

$$\dot{\varepsilon}_p = \frac{\cos \phi}{\sin \psi} \dot{\varepsilon}_{p,\text{vol}}, \quad (3.61)$$

onde para fluxo plástico não associativo, têm-se:

$$\dot{\varepsilon}_{p,\text{vol}} = 2 \sin \psi \sum_{i=1}^6 \dot{\gamma}_i. \quad (3.62)$$

De maneira semelhante aos modelos de von Mises e Drucker-Prager, no primeiro passo é realizada a tentativa elástica com o intuito de obter as tensões $\sigma^{k+1,\text{tent}}$ no instante t^{k+1} , considerando o incremento total de deformação $\Delta \varepsilon^{k+1}$. Se porventura a tentativa elástica falhe, algoritmos de retorno são aplicados dependendo da posição das tensões atualizadas σ^{k+1} em relação à superfície de escoamento de Mohr-Coulomb.

Como o modelo de Mohr-Coulomb utiliza as tensões principais em sua integração, após a tentativa elástica, é necessária a decomposição das tensões elásticas em suas respectivas tensões principais ordenadas $\sigma_1^{k+1,\text{tent}} \geq \sigma_2^{k+1,\text{tent}} \geq \sigma_3^{k+1,\text{tent}}$. Dessa forma, a condição que checka a ocorrência de fluxo plástico pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\sigma_1^{k+1,\text{tent}} - \sigma_3^{k+1,\text{tent}} + \left(\sigma_1^{k+1,\text{tent}} + \sigma_3^{k+1,\text{tent}} \right) \sin \phi - 2c(\bar{\varepsilon}_p^k) \cos \phi \leq 0, \quad (3.63)$$

definindo se a tentativa elástica é válida ($\Phi \leq 0$) ou não ($\Phi > 0$). Caso seja necessária a aplicação do algoritmo de retorno, as tensões principais da tentativa elástica são corrigidas utilizando a Equação 3.13 particularizada para o modelo de Mohr-Coulomb em termos das tensões principais, tomando a seguinte forma:

$$\sigma_j^{k+1} = \sigma_j^{k+1, \text{tent}} - \sum_{i=1}^6 \Delta\gamma_i^{k+1} \left(2G [\mathbf{N}_{d,i}^{k+1}]_j - KN_{v,i}^{k+1} \right), \quad (3.64)$$

onde $j = 1, 2, 3$, $N_{v,i}^{k+1} = \text{tr} [\mathbf{N}_i^{k+1}] = N_{1,i}^{k+1} + N_{2,i}^{k+1} + N_{3,i}^{k+1}$ é a parcela volumétrica do vetor de fluxo \mathbf{N}_i^{k+1} e $[\mathbf{N}_{d,i}^{k+1}]_j$ denota o j -ésimo autovalor da sua projeção no plano π . Como consequência das quatro possibilidades para a descrição do fluxo plástico do modelo de Mohr-Coulomb, há quatro algoritmos de retorno distintos que podem ser empregados dependendo da posição das tensões atualizadas encontradas. As quatro possibilidades de retorno para a superfície de Mohr-Coulomb são descritas a seguir:

- (a) A tensão atualizada se encontra no plano principal (porção suave). Neste caso, o vetor de fluxo é definido pela primeira expressão da Equação 3.56. Substituindo a expressão do vetor de fluxo na Equação 3.64, encontra-se as seguintes equações para a atualização das tensões principais:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{k+1} &= \sigma_1^{k+1, \text{tent}} - \Delta\gamma^{k+1} \left[2G \left(1 + \frac{1}{3} \sin \psi \right) + 2K \sin \psi \right], \\ \sigma_2^{k+1} &= \sigma_2^{k+1, \text{tent}} + \Delta\gamma^{k+1} \left(\frac{4}{3}G - 2K \right) \sin \psi, \\ \sigma_3^{k+1} &= \sigma_3^{k+1, \text{tent}} + \Delta\gamma^{k+1} \left[2G \left(1 - \frac{1}{3} \sin \psi \right) - 2K \sin \psi \right]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Para o cálculo do incremento do multiplicador plástico, utiliza-se as equações anteriores em conjunto com a particularização da terceira expressão da Equação 3.10 para o modelo de Mohr-Coulomb, que possui a seguinte forma:

$$\bar{\varepsilon}_p^{k+1} = \bar{\varepsilon}_p^k + 2 \cos \phi \Delta\gamma^{k+1}. \quad (3.66)$$

Substituindo as Equações 3.65 e 3.66 na função de escoamento para assegurar a consistência do fluxo plástico no plano principal ($\Phi_1 = 0$ da Equação 2.94), obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \Phi(\Delta\gamma^{k+1}) &= \left(\sigma_1^{k+1, \text{tent}} - \sigma_3^{k+1, \text{tent}} \right) + \left(\sigma_1^{k+1, \text{tent}} + \sigma_3^{k+1, \text{tent}} \right) \sin \phi \\ &\quad - 2c \left(\bar{\varepsilon}_p^k + 2 \cos \phi \Delta\gamma^{k+1} \right) \cos \phi - a \Delta\gamma^{k+1} = 0, \end{aligned} \quad (3.67)$$

em que a é descrito pela equação abaixo:

$$a = 4G \left(1 + \frac{1}{3} \sin \phi \sin \psi \right) + 4K \sin \phi \sin \psi. \quad (3.68)$$

Semelhantemente aos modelos já apresentados, é possível encontrar uma expressão fechada para $\Delta\gamma^{k+1}$. Assim, resolvendo a Equação 3.67 para $\Delta\gamma^{k+1}$, obtém-se a seguinte equação:

$$\Delta\gamma^{k+1} = \frac{\sigma_1^{k+1, \text{tent}} - \sigma_3^{k+1, \text{tent}} + \left(\sigma_1^{k+1, \text{tent}} + \sigma_3^{k+1, \text{tent}} \right) \sin \phi - 2 \cos \phi \left[c_i + \left(\bar{\varepsilon}_p^k - \bar{\varepsilon}_{p,i} \right) H_i \right]}{a + 4H_i \cos^2 \phi}. \quad (3.69)$$

cadores plásticos. Portanto, $\Delta\gamma_a^{k+1}$ e $\Delta\gamma_b^{k+1}$ podem ser calculados a partir de expressões fechadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\Delta\gamma_a^{k+1} &= \frac{4H_i(\sigma_a - \sigma_b)\cos^2\phi - 2\cos\phi(a-b)[c_i + (\bar{\varepsilon}_p^k - \bar{\varepsilon}_{p,i})H_i] + a\sigma_a - b\sigma_b}{(a-b)(8H_i\cos^2\phi + a + b)}, \\ \Delta\gamma_b^{k+1} &= \frac{-4H_i(\sigma_a - \sigma_b)\cos^2\phi - 2\cos\phi(a-b)[c_i + (\bar{\varepsilon}_p^k - \bar{\varepsilon}_{p,i})H_i] + a\sigma_b - b\sigma_a}{(a-b)(8H_i\cos^2\phi + a + b)}.\end{aligned}\quad (3.74)$$

De posse dos valores de $\Delta\gamma_a^{k+1}$ e $\Delta\gamma_b^{k+1}$, utiliza-se a Equação 3.70 para encontrar as tensões principais atualizadas.

- (c) A tensão atualizada está localizada no vértice (2). O algoritmo de retorno para o vértice (2) é totalmente análogo ao apresentado para o vértice (1), com exceção do vetor de fluxo N_b ser definido de acordo com a primeira expressão da Equação 3.58, resultando nas seguintes equações para a atualização das tensões principais:

$$\begin{aligned}\sigma_1^{k+1} &= \sigma_1^{k+1,\text{tent}} - (\Delta\gamma_a^{k+1} + \Delta\gamma_b^{k+1}) [2G(1 + \frac{1}{3}\sin\psi) + 2K\sin\psi], \\ \sigma_2^{k+1} &= \sigma_2^{k+1,\text{tent}} + \Delta\gamma_a^{k+1} (\frac{4}{3}G - 2K)\sin\psi + \Delta\gamma_b^{k+1} [2G(1 - \frac{1}{3}\sin\psi) - 2K\sin\psi], \\ \sigma_3^{k+1} &= \sigma_3^{k+1,\text{tent}} + \Delta\gamma_a^{k+1} [2G(1 - \frac{1}{3}\sin\psi) - 2K\sin\psi] + \Delta\gamma_b^{k+1} (\frac{4}{3}G - 2K)\sin\psi.\end{aligned}\quad (3.75)$$

Semelhantemente ao algoritmo para o vértice (1), a atualização da deformação plástica equivalente é dada pela Equação 3.71 e as tensões principais satisfazem tanto a $\Phi_1 = 0$ quanto a $\Phi_6 = 0$, gerando o mesmo sistema de equações apresentado na Equação 3.72 a ser resolvido em função de $\Delta\gamma_a^{k+1}$ e $\Delta\gamma_b^{k+1}$. No sistema de equações, a e σ_a são os mesmos apresentados no caso anterior, e b e σ_b são definidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}b &= 2G(1 + \sin\phi + \sin\psi - \frac{1}{3}\sin\phi\sin\psi) + 4K\sin\phi\sin\psi, \\ \sigma_b &= \sigma_1^{k+1,\text{tent}} - \sigma_2^{k+1,\text{tent}} + (\sigma_1^{k+1,\text{tent}} + \sigma_2^{k+1,\text{tent}})\sin\phi.\end{aligned}\quad (3.76)$$

Após a resolução do sistema de equações descrito anteriormente, encontra-se as mesmas expressões fechadas para $\Delta\gamma_a^{k+1}$ e $\Delta\gamma_b^{k+1}$ dadas pela Equação 3.74, tão somente com b e σ_b definidos de acordo com a Equação 3.76.

- (d) A tensão atualizada está localizada no ápice. O ápice da superfície de escoamento de Mohr-Coulomb é o ponto ao longo do eixo hidrostático onde:

$$p = c \cot \phi. \quad (3.77)$$

Análogo ao algoritmo de retorno para o ápice do cone de Drucker-Prager, o estado de tensões corrigido deve localizar-se no ápice. Para o modelo de Mohr-Coulomb, a declaração anterior é traduzida matematicamente pela seguinte expressão:

$$c \left(\bar{\varepsilon}_p^k + \frac{\cos \phi}{\sin \psi} \Delta \varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1} \right) \cot \phi = p^{k+1,\text{tent}} - K \Delta \varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1}, \quad (3.78)$$

onde foi utilizada a particularização da terceira expressão da Equação 3.10 para o modelo de Mohr-Coulomb, em conjunto com a Equação 3.61, para expressar a coesão em função da deformação plástica equivalente. Além disso, verifica-se que a única variável desconhecida na equação anterior é $\Delta \varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1}$. Portanto, o incremento de deformação plástica volumétrica pode ser encontrado a partir da seguinte expressão fechada:

$$\Delta \varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1} = \frac{p^{k+1,\text{tent}} - \cot \phi [c_i + (\bar{\varepsilon}_p^k - \bar{\varepsilon}_{p,i}) H_i]}{\cot \phi \alpha H_i + K}, \quad (3.79)$$

onde $\alpha = \cos \phi / \sin \psi$. Por conseguinte, após encontrado o valor para $\Delta \varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1}$, o estado de tensões e a deformação plástica equivalente são atualizados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_p^{k+1} &= \bar{\varepsilon}_p^k + \alpha \Delta \varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1}, \\ \boldsymbol{\sigma}^{k+1} &= (p^{k+1,\text{tent}} - K \Delta \varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1}) \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Com a possibilidade da aplicação de quatro algoritmos de retorno diferentes, é evidente que é necessária uma estratégia para a escolha correta de cada um deles durante a integração. Assim, os seguintes passos são adotados para a escolha do algoritmo de retorno apropriado:

- (a) O retorno para o plano principal é aplicado primeiramente.
- (b) O retorno para o plano principal é válido se as tensões principais atualizadas permanecerem na região do plano π em que a análise está sendo feita (ver Figura 24). Matematicamente, se:

$$\sigma_1^{k+1} \geq \sigma_2^{k+1} \geq \sigma_3^{k+1}, \quad (3.81)$$

então o retorno para a porção suave do plano principal é válido e o estado atualizado encontrado está correto.

- (c) Caso contrário, é aplicado o retorno para o vértice (1) ou para o vértice (2). Para a escolha de qual vértice aplicar o retorno, calcula-se a equação seguir:

$$S = (1 - \sin \psi) \sigma_1^{k+1,\text{tent}} - 2\sigma_2^{k+1,\text{tent}} + (1 + \sin \psi) \sigma_3^{k+1,\text{tent}}. \quad (3.82)$$

Caso $S > 0$, o retorno é aplicado para o vértice (2). Caso contrário, o retorno é para o vértice (1).

- (d) O retorno para o vértice (1) ou (2) é validado. Portanto, caso a condição estabelecida pela Equação 3.81 seja satisfeita, o retorno é válido e as tensões principais atualizadas estão corretas.
- (e) Se nenhum dos retornos anteriores forem válidos, o retorno para o ápice da superfície de escoamento de Mohr-Coulomb é aplicado. Como o resultado encontrado será válido, não é necessária a checagem da Equação 3.81.

Com o detalhamento dos algoritmos de retorno e da estratégia para a sua escolha adequada, o algoritmo de retorno para o modelo de Mohr-Coulomb está completamente definido. Vale destacar que assim como para os modelos de von Mises e Drucker-Prager, o cálculo de $\Delta\gamma^{k+1}$ e $\Delta\varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1}$ é feito a partir de um *loop* nos pares que definem o endurecimento, seguindo o critério de parada da Equação 3.30. Além disso, durante a decomposição das tensões elásticas em suas tensões principais, as direções principais também são computadas para que seja realizada a montagem do tensor de tensões atualizado após o cálculo das tensões principais atualizadas. Em conclusão, destaca-se que os Algoritmos 6, 7, 8 e 9 (Apêndice B) descrevem todo o procedimento abordado nesta subseção.

3.4 Verificação dos algoritmos implementados

Nesta seção, será apresentada a verificação da implementação numérica, descrita na Seção 3.3, dos modelos de von Mises e Drucker-Prager. Especificamente, em um primeiro momento, decidiu-se implementar considerando a Teoria da Plasticidade com incrementos infinitesimais de deformação. De forma bem resumida, na implementação numérica da plasticidade infinitesimal, a tensão na tentativa elástica é atualizada diretamente a partir tensor de deformação da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^{k+1,\text{tent}} &= \boldsymbol{\varepsilon}_p^k + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k+1}, \\ p^{k+1,\text{tent}} &= K\boldsymbol{\varepsilon}_v^{k+1,\text{tent}}, \\ \boldsymbol{s}^{k+1,\text{tent}} &= 2G\boldsymbol{\varepsilon}_d^{k+1,\text{tent}},\end{aligned}\tag{3.83}$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}_v^{k+1,\text{tent}}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_d^{k+1,\text{tent}}$ são as parcelas volumétrica e desviadora do tensor de deformação na tentativa elástica, respectivamente. Além disso, no final do algoritmo é necessário atualizar a parcela elástica do tensor de deformação da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e^{k+1} = \frac{1}{2G}\boldsymbol{s}^{k+1} + \frac{p^{k+1}}{3K}\boldsymbol{I}.\tag{3.84}$$

A implementação dos modelos foi realizada em linguagem MATLAB. As funções referentes aos Algoritmos 2 e 3 são apresentadas no Apêndice C. Para a verificação, utilizou-se o *software Abaqus CAE* (SMITH, 2009), valendo-se uma versão gratuita para estudantes. O procedimento adotado pode ser descrito nos passos a seguir:

- (a) No *Abaqus CAE*, realiza-se a modelagem da geometria, definição e introdução das variáveis do material;
- (b) Definição dos passos de tempo, no *Abaqus CAE*, onde são estabelecidas as condições de contorno e aplicação de deslocamentos prescritos pequenos no modelo criado;
- (c) Criação do *job* de análise e simulação do modelo (no *Abaqus CAE*, a simulação também é feita utilizando o módulo implementado com a Teoria da Plasticidade com deformações infinitesimais);

- (d) Geração de relatório com os resultados simulados, exportando as seguintes variáveis: tensão, deformação, tensão equivalente de von Mises, deformação plástica e deformação plástica equivalente;
- (e) Modificação do arquivo de entrada para o programa em MATLAB, introduzindo as deformações obtidas em cada passo de tempo na simulação pelo *Abaqus CAE* para o cálculo dos incrementos de deformação;
- (f) Simulação no programa em MATLAB;
- (g) Análise do gráfico gerado e comparação da tensão equivalente de von Mises obtida pelo programa em MATLAB e pelo *software Abaqus CAE*, para validação da implementação numérica.

Observe que a aplicação de um deslocamento prescrito pequeno, em cada passo de tempo, nos permite facilmente gerar históricos de carregamento/descarregamento. Por exemplo, poderemos carregar o modelo a partir do aumento gradual do deslocamento prescrito até um certo passo de tempo. Logo após, se quisermos observar o comportamento durante o descarregamento, poderemos realizar uma diminuição gradual desses deslocamentos em cada passo de tempo.

No algoritmo em MATLAB, foi gerado um gráfico deformação equivalente versus tensão equivalente de von Mises para os dois modelos implementados, em que a deformação equivalente é calculada da seguinte forma:

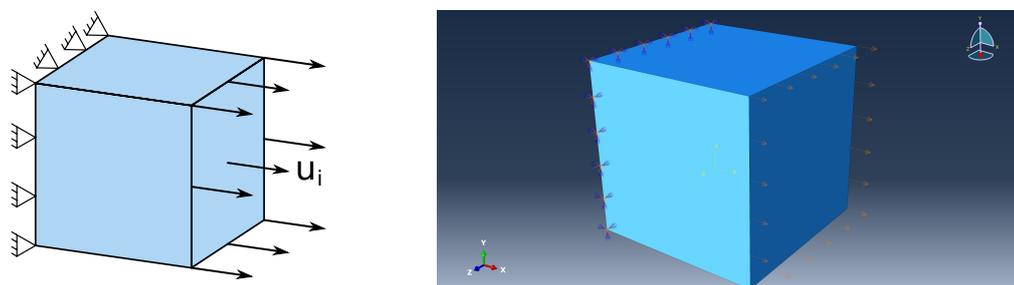
$$\sqrt{\frac{2}{3} \text{tr} [\epsilon_d^2]}, \quad (3.85)$$

onde ϵ_d é a parcela desviadora do tensor de deformação, correspondente à variável *effective_strain* nas classes dos modelos constitutivos implementadas em MATLAB (ver algoritmos em MATLAB no Apêndice C). Destaca-se que a implementação inicial para o modelo de Mohr-Coulomb foi elaborada, apesar de que exercícios de verificação não foram realizados devido a grandes diferenças encontradas entre a implementação adotada pelo *Abaqus* e adotada neste trabalho. Assim, não foi possível estabelecer uma relação entre os parâmetros utilizados nas duas implementações para que fosse feita a comparação dos resultados obtidos. Por fim, para maiores detalhes do modelo do arquivo de entrada, ver Apêndice C. Para um melhor entendimento sobre a implementação numérica com incrementos infinitesimais de deformação, recomenda-se a leitura de [Souza Neto, Perić e Owen \(2008\)](#). Vale a pena destacar que foram realizados outros exemplos iniciais de verificação, no entanto serão apresentados somente os mais relevantes.

3.4.1 Verificação do modelo de von Mises

Para o exemplo de verificação criado para o modelo de von Mises em linguagem MATLAB, foi realizada uma modelagem tridimensional no *Abaqus* afim de analisar a resposta da implementação numérica sob comportamentos mais gerais de solicitação. Dessa forma, um cubo foi modelado, como mostra a figura a seguir:

Figura 26 – Representação figurativa do modelo 3D criado, em comparação com o modelo criado no *Abaqus CAE*.



Fonte: Autor (2022).

Conforme mostrado na Figura 26, deslocamentos prescritos u_i são aplicados na face da direita do cubo, na direção x ; e uma condição de contorno é aplicada na face da esquerda para travá-la. Os deslocamentos u_i fornecidos são pequenos para que seja observado o desenvolvimento do histórico da deformação, desde o regime elástico até o regime plástico. Os parâmetros elásticos e o conjunto de pares $\{\bar{\varepsilon}_p, \sigma_y\}$ para caracterizar o endurecimento são mostrados na tabela abaixo:

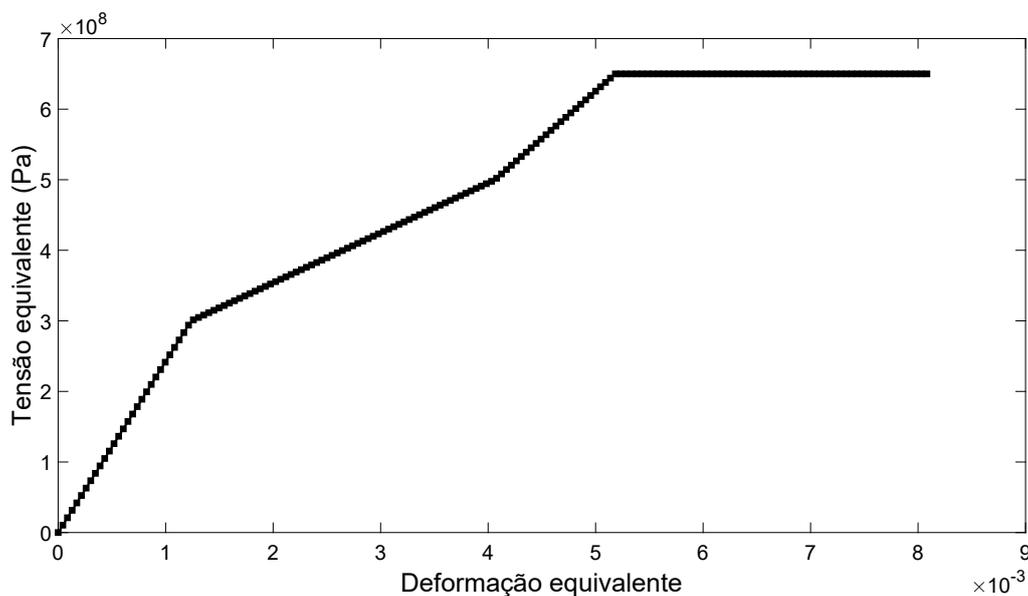
Tabela 1 – Parâmetros do material do exemplo de verificação do modelo de von Mises.

| | |
|--|---------------------------------------|
| Módulo de Elasticidade, E (Pa) | $210 \cdot 10^9$ |
| Coeficiente de Poisson, ν | 0,3 |
| Deformação plástica equivalente, $\bar{\varepsilon}_p$ | Tensão de escoamento, σ_y (Pa) |
| 0 | $300 \cdot 10^6$ |
| 0,002 | $500 \cdot 10^6$ |
| 0,0025 | $650 \cdot 10^6$ |

Fonte: Autor (2022).

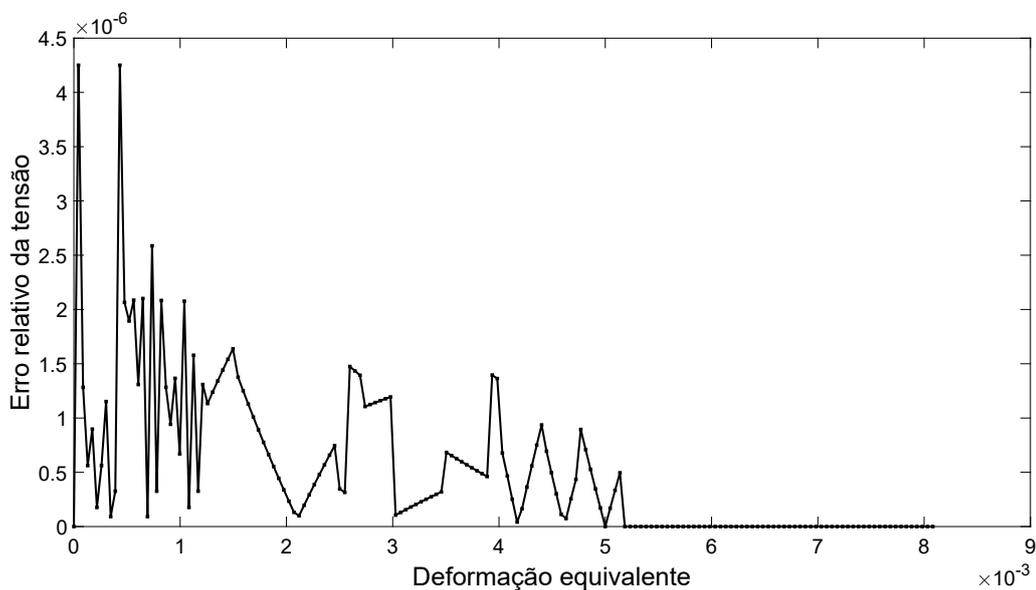
A partir da Tabela 1, é possível observar que foram fornecidos 3 pares de valores $\{\bar{\varepsilon}_p, \sigma_y\}$, caracterizando um endurecimento linear por partes com uma curva com dois trechos de inclinação diferentes. Ademais, um total de 170 passos de tempo foram criados, onde os deslocamentos prescritos pequenos foram aplicados, de maneira que foi possível observar a evolução do histórico da deformação de forma suave. Os resultados para o exemplo 3 são mostrados a seguir:

Figura 27 – Histórico de deformação do exemplo de verificação do modelo de von Mises.



Fonte: Autor (2022).

Figura 28 – Erro relativo da tensão equivalente do exemplo de verificação do modelo de von Mises.



Fonte: Autor (2022).

Na Figura 27, observa-se que o trecho inicial apresenta comportamento elástico linear, definido pelo módulo de elasticidade $E = 210 \cdot 10^9$ Pa. Além disso, como o endurecimento é definido por uma função linear por partes, e 3 pares $\{\bar{\epsilon}_p, \sigma_y\}$ foram fornecidos, dois trechos lineares com inclinações diferentes caracterizam o regime plástico. Quando atinge-se $\sigma = \sigma_y = 650 \cdot 10^6$ Pa, o material apresenta comportamento perfeitamente plástico novamente.

A Figura 28 mostra os erros relativos, em cada passo de tempo, da tensão equivalente obtida no *Abaqus* em comparação com a tensão obtida em MATLAB. Assim, verifica-se que o erro relativo varia bastante para cada passo de tempo, e é nulo após uma tensão equivalente $\sigma = 650 \cdot 10^6$ Pa (plasticidade perfeita é atingida novamente). Vale frisar que esse erro não significa que os valores do algoritmo em MATLAB estão incorretos, e é proveniente de um truncamento realizado nas casas decimais das variáveis exportadas do *Abaqus*. De fato, é possível verificar que mesmo no passo de tempo em que o maior erro absoluto é encontrado ($E_a = 6,85 \cdot 10^2$ Pa), a magnitude da tensão equivalente é tão elevada ($\sigma = 4,91 \cdot 10^8$ Pa) que o erro relativo continua nulo até a quinta casa decimal ($E_r = 1,4 \cdot 10^{-6}$).

3.4.2 Verificação do modelo de Drucker-Prager

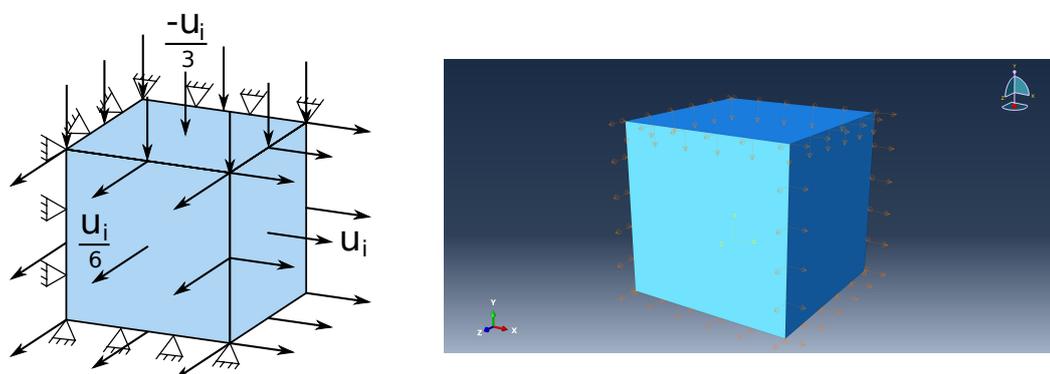
No modelo de Drucker-Prager, a verificação realizada a partir do *software Abaqus CAE* possui uma particularidade, isto é, a formulação apresentada neste trabalho difere levemente da formulação empregada pelo *Abaqus*. Aqui, utilizamos os parâmetros ξ e η na função de escoamento de Drucker-Prager. No *Abaqus*, a entrada de dados é feita por meio do ângulo de atrito β , taxa do fluxo de tensão K e ângulo de dilatação ψ . Quando define-se $K = 1$ no *Abaqus*, as funções de escoamento de Drucker-Prager apresentadas no Capítulo 2 e pelo *Abaqus* tornam-se semelhantes. Logo, para que as formulações implementadas no *Abaqus* e em MATLAB concordem, após definido $K = 1$, β e ψ , os parâmetros em MATLAB são tomados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{\tan \beta}{\sqrt{3}}, \\ \bar{\eta} &= \frac{\tan \psi}{\sqrt{3}}, \\ \xi &= \frac{1}{\sqrt{3}},\end{aligned}\tag{3.86}$$

onde $\xi = 1/\sqrt{3}$ é arbitrado para que a lei de endurecimento, tanto no *Abaqus* quanto em MATLAB, seja definida pela coesão c e pela deformação plástica equivalente $\bar{\epsilon}_p$.

A modelagem do exemplo para verificar a implementação do modelo de Drucker-Prager é semelhante a do exemplo para verificação do modelo de von Mises (Figura 26). No entanto, uma modificação é realizada na tentativa de submeter o cubo a um estado mais generalizado de sollicitação, como mostrado a seguir:

Figura 29 – Representação figurativa do modelo 3D do exemplo de Drucker-Prager, em comparação com o modelo criado no *Abaqus CAE*.



Fonte: Autor (2022).

Conforme apresentado na Figura 29, condições de contorno de travamento são aplicadas a 3 faces do cubo, enquanto as outras 3 são submetidas a deslocamentos prescritos. Observe que em cada direção uma face é travada, e na outra um deslocamento prescrito é aplicado. Nota-se também que os deslocamentos não possuem valores iguais: u_i , na direção x ; $-u_i/3$, na direção y e $u_i/6$ na direção z . As propriedades elásticas do material, bem como os pares $\{\bar{\epsilon}_p, c\}$ para definir o endurecimento são apresentados na tabela abaixo:

Tabela 2 – Parâmetros do material do exemplo de verificação do modelo de Drucker-Prager.

| | |
|---|------------------|
| Módulo de Elasticidade, E (Pa) | $210 \cdot 10^9$ |
| Coefficiente de Poisson, ν | 0,3 |
| Deformação plástica equivalente, $\bar{\epsilon}_p$ | Coesão, c (Pa) |
| 0 | $300 \cdot 10^6$ |
| 0,002 | $500 \cdot 10^6$ |
| 0,0025 | $650 \cdot 10^6$ |

Fonte: Autor (2022).

Os parâmetros η , ξ e $\bar{\eta}$ do modelo de Drucker-Prager foram definidos, em relação ao *Abaqus*, como mostrado na tabela abaixo:

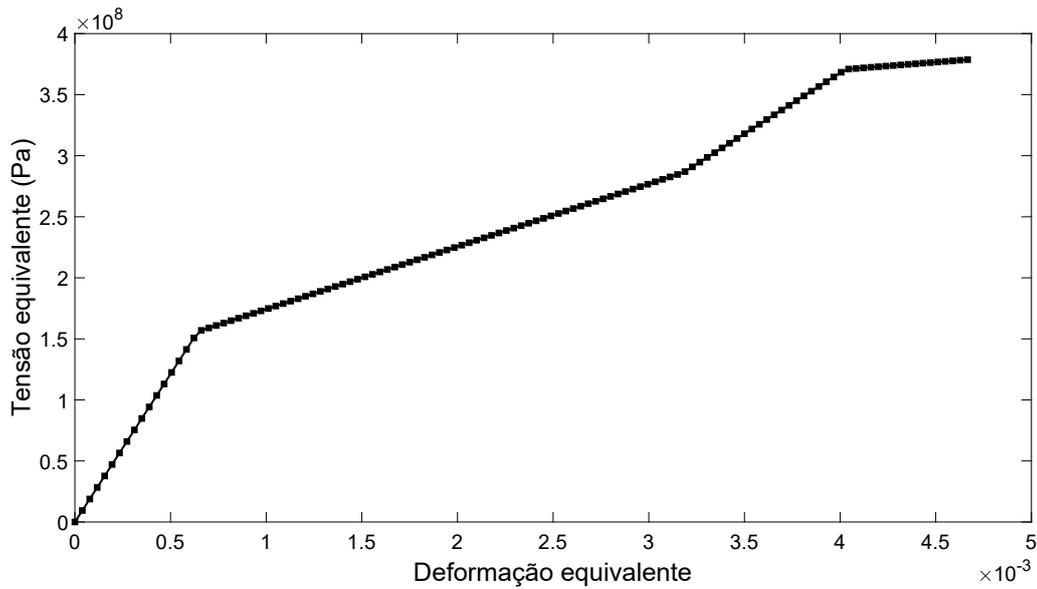
Tabela 3 – Parâmetros do exemplo de verificação do modelo de Drucker-Prager.

| <i>Abaqus</i> | MATLAB |
|--------------------|--------------------------------|
| $\beta = 50^\circ$ | eta, $\eta = 0,68805$ |
| $\psi = 50^\circ$ | etabar, $\bar{\eta} = 0,68805$ |
| $K = 1$ | xi, $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ |

Fonte: Autor (2022).

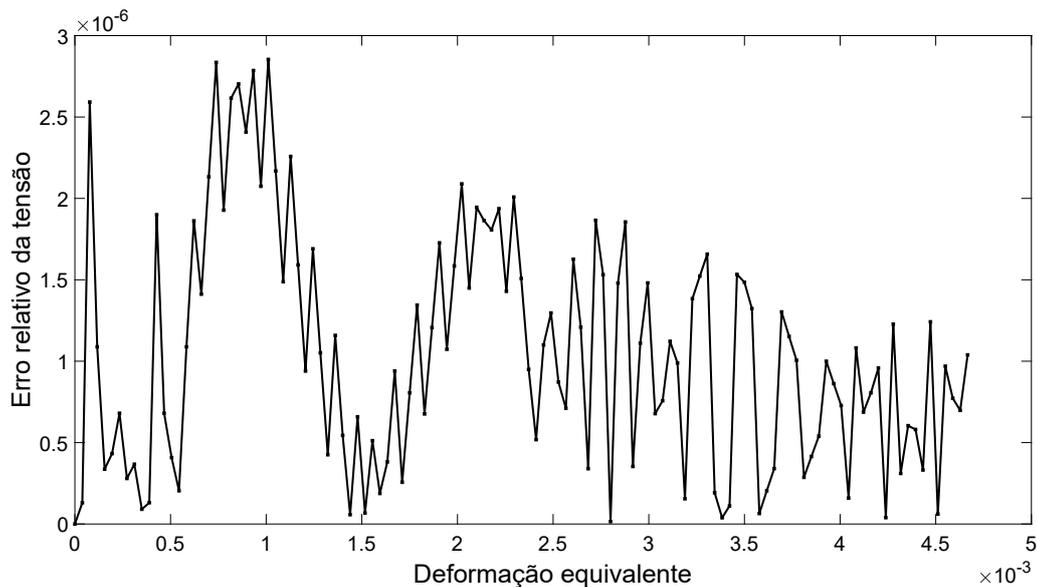
Na Tabela 3, como $\eta = \bar{\eta}$, um fluxo associativo é adotado. Ademais, a simulação foi realizada com 120 passos de tempo e, da mesma forma que para a verificação do modelo de von Mises, calculamos a tensão equivalente de von Mises para gerar um gráfico de tensão equivalente versus deformação equivalente e comparar com a tensão equivalente obtida pelo *Abaqus*. Os resultados para o exemplo de verificação do modelo de Drucker-Prager são mostrados a seguir:

Figura 30 – Histórico de deformação do exemplo de verificação do modelo de Drucker-Prager.



Fonte: Autor (2022).

Figura 31 – Erro relativo da tensão equivalente do exemplo de verificação do modelo de Drucker-Prager.



Fonte: Autor (2022).

Na Figura 30, vemos novamente no trecho inicial o comportamento elástico linear e, após a coesão $c = 300 \cdot 10^6$ Pa, um regime plástico inicia, sendo caracterizado por dois trechos retilíneos com inclinações diferentes. Na Figura 31, mostramos o gráfico do erro relativo, em cada passo de tempo, para os resultados da tensão equivalente obtidos pelo *Abaqus* e em MATLAB. Dessa forma, observa-se novamente que os erros relativos são irrisórios, e os erros absolutos, com ordem de grandeza 10^2 , não exercem grande influência nos resultados devido à magnitude das tensões equivalentes, com ordem de grandeza 10^8 . Destaca-se mais uma vez que os erros encontrados são decorrentes do truncamento das casas decimais durante a exportação das variáveis pelo *Abaqus* (item (d) do procedimento descrito na Seção 3.4). Ademais, verifica-se que à medida que a deformação do cubo aumenta, há uma tendência de convergência do erro absoluto em torno de 300 Pa. Por fim, considera-se que os valores da tensão equivalente encontrados em MATLAB corroboram a implementação numérica inicial do modelo de Drucker-Prager.

4 SIMULAÇÃO DAS APLICAÇÕES

Sumário

| | | |
|-------|--|-----|
| 4.1 | Introdução a falhas e dobras | 87 |
| 4.2 | Aplicação 1 - Dobra gerada por regime contracional em camada única . . | 90 |
| 4.2.1 | Modelagem da aplicação 1 | 91 |
| 4.2.2 | Resultados das simulações da aplicação 1 | 93 |
| 4.3 | Aplicação 2 - Dobra gerada por falha contracional | 97 |
| 4.3.1 | Modelagem da aplicação 2 | 97 |
| 4.3.2 | Resultados das simulações da aplicação 2 | 102 |

4.1 Introdução a falhas e dobras

A Geologia Estrutural é o estudo do processo de deformação das rochas que compõem as camadas superiores da terra (SUPPE, 1985). A deformação sofrida é traduzida em mudanças físicas na forma e orientação das rochas. Assim, pode-se dizer que a Geologia Estrutural tem por objeto de estudo as dobras, falhas e outras estruturas deformacionais na litosfera, buscando entender de que maneira foram formadas e como adquiriram sua configuração atual (FOSSEN, 2012).

Em específico, falhas e dobras são fenômenos geológicos formados em decorrência da deformação gerada pela movimentação dos maciços rochosos. As falhas podem ser definidas como qualquer superfície ou faixa estreita em que um deslocamento causado por cisalhamento é visível (FOSSEN, 2012). Em outras palavras, as falhas atravessam as camadas de rochas, gerando descontinuidades visíveis do fenômeno ocorrido. As dobras, são estruturas visualmente fascinantes, sendo admiradas e analisadas com afinco pelos geólogos devido às suas mais variadas manifestações na natureza (SUPPE, 1985; DAVIS; REYNOLDS, 1996).

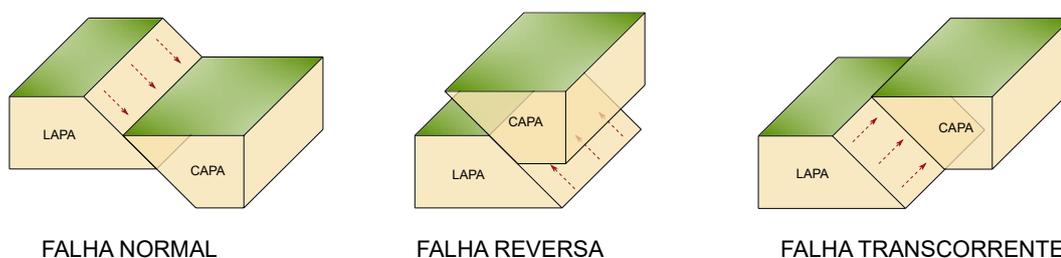
A forma como a rocha irá se deformar (dobra ou falha) depende de fatores como: pressão de confinamento (profundidade), pressão de fluidos, temperatura, cinemática, além das próprias características da rocha. Em especial, a competência da rocha, ou seja, sua resistência mecânica, é um fator característico da rocha de importante influência para determinar o desenvolvimento de uma dobra ou falha. As falhas, de forma geral, ocorrem em rochas de maior resistência, enquanto que as dobras tendem a ocorrer em estruturas menos resistentes.

Falha ou dobra, a análise e estudo da formação desses fenômenos são cruciais para a exploração de petróleo e gás natural, e para a exploração de minérios e outros recursos minerais. As dobras, por exemplo, formam importantes armadilhas para petróleo e gás e corpos de minério

dobrados, possuindo grande importância econômica (FOSSSEN, 2012). Isto posto, as aplicações escolhidas consistem na modelagem geomecânica, incorporando as propriedades mecânicas das rochas nos modelos elasto-plásticos, e simulação da formação de dobras. Antes, porém, vamos destacar alguns termos e definições importantes para as análises a serem desenvolvidas.

As falhas não verticais separam os blocos denominados capa e lapa (Figura 32). Quando a capa é rebaixada em relação à lapa, ocorre uma falha normal. Por outro lado, quando a capa é elevada em relação à lapa, há uma falha reversa. Caso o movimento de falha seja lateral, denomina-se falha transcorrente. Na prática, o ângulo que define o rebaixamento ou elevação da capa em relação à lapa pode variar bastante (ângulo de mergulho). Falhas de baixo ângulo são aquelas com ângulo de mergulho menor que 30°, enquanto que falhas com ângulo de mergulho maior que 60° são denominadas falhas de alto ângulo. Falhas reversas de baixo ângulo são denominadas falhas de cavalgamento.

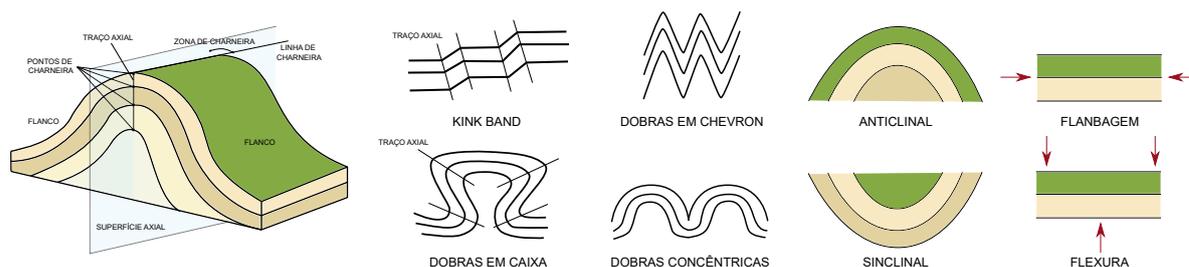
Figura 32 – Ilustração dos tipos básicos de falhas.



Fonte: Autor (2022).

As dobras são formadas usualmente por uma zona denominada charneira que liga dois flancos com diferentes orientações. O ponto de máxima curvatura em uma camada é denominado ponto de charneira, que forma uma linha de charneira quando conectado aos outros pontos de maior curvatura. A superfície axial conecta as linhas de charneira das superfícies dobradas, isto é, é a superfície ou plano que divide a dobra o mais simetricamente possível (Figura 33). Além disso, o traço axial de uma dobra é a linha de interseção da superfície axial com a seção geológica de observação, conectando os pontos de charneira das camadas (FOSSSEN, 2012).

Figura 33 – Ilustração dos aspectos geométricos das dobras.



Fonte: Autor (2022).

Há uma grande variedade de dobras, como: *kink bands*, dobras em chevron, dobras concêntricas e as dobras em caixa, como ilustrado na Figura 33. Há ainda outra classificação importante para as dobras: antiformais ou sinformais. Uma dobra antiformal é aquela em que suas camadas fecham para cima (os flancos se afastam da zona de charneira), e uma dobra sinformal possui a forma de um canal. Quando a sequência estratigráfica é conhecida, as dobras podem ser classificadas como anticlinais ou sinclinais. Uma antiforma é anticlinal quando as camadas mais antigas compõem o núcleo da dobra. Analogamente, uma sinclinal é uma sinforma em que as camadas mais novas compõem o núcleo da dobra (Figura 33).

A forma dos diferentes tipos de dobras está fortemente associada a como o esforço atua sobre as camadas da rocha, ou seja, a resposta geométrica das dobras está principalmente relacionada à orientação dos esforços em relação à orientação das camadas. Na flambagem (*buckling*), uma camada é encurtada a partir de um esforço compressivo em sua direção paralela, e tendem a gerar dobras com aspecto senoidal. Na flexura (*bending*), o esforço compressivo é aplicado através das camadas, isto é, possui um alto ângulo com a orientação das camadas (Figura 33).

Um dos importantes processos na formação das dobras e falhas são estruturas de deformação contracional, e de especial interesse para este trabalho. As estruturas contracionais são formadas quando rochas são encurtadas por forças tectônicas ou gravitacionais (FOSSEN, 2012). Esse encurtamento pode ser acomodado por perda de volume, espessamento vertical com as camadas mantendo sua forma original ou sendo dobradas por flambagem ou até produzir falhas contracionais (Figura 34). Aqui, daremos ênfase às falhas contracionais e, conseqüentemente, suas dobras concebidas. Dessa forma, dobras e falhas contracionais são encontradas em diversas zonas de colisão de placas tectônicas. Além disso, as falhas contracionais são exclusivamente falhas reversas e de cavalgamento.

Figura 34 – Ilustração das falhas contracionais e flambagem.



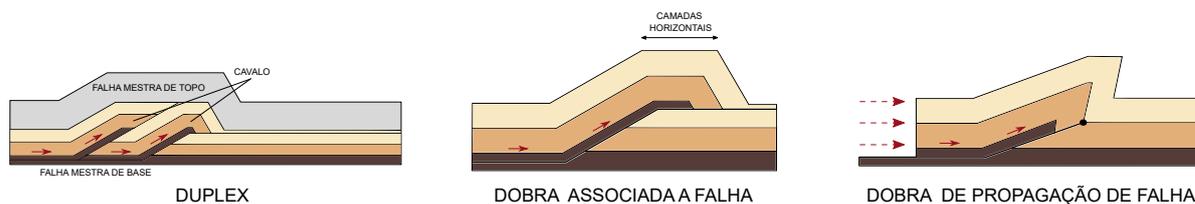
Fonte: Adaptado de Fossen (2012).

Quando as rochas são encurtadas em colisões continentais, podem formar massas rochosas de grande extensão de camadas tectônicas empilhadas umas às outras (*nappes*), separadas por falhas de cavalgamento. Esse sistema de *nappes* empilhadas são delimitados inferiormente por uma falha mestra de base e superiormente por uma falha mestra de topo. De forma geral, uma série de falhas reversas conectadas por uma falha mestra de base de baixo ângulo formam uma estrutura em leque denominada zona de imbricação. Caso haja

uma falha mestra de topo limitando superiormente a zona de imbricação, todo o conjunto é chamado de duplex (Figura 35). Em um duplex, cada unidade imbricada é denominada cavalo, que apresenta em sua configuração normal uma geometria em S, mas pode ser dobrado e rotacionado durante o cavalgamento, formando estruturas mais complexas.

Em regimes contracionais, as dobras estão intimamente associadas ao modo como o encurtamento é manifestado. Quando geradas por falhas contracionais, as dobras podem surgir no momento em que uma rampa é estabelecida, de forma que o bloco de capa é deformado por uma dobra associada a falha (*fault-bend fold*). Um aspecto interessante das dobras associadas a falhas é que as camadas da capa permanecem horizontais após a passagem pela rampa. Por outro lado, quando uma dobra é formada na extremidade de uma falha, denomina-se dobra de propagação de falha (*fault-propagation fold*), movimentando-se junto a essa extremidade (Figura 35). Por fim, há ainda dobras não relacionadas a falhas contracionais, como as dobras de deslocamento (*detachment fold*). As dobras de deslocamento são formadas quando o encurtamento é acomodado por flambagem, e geram tipicamente dobras concêntricas ou em caixa, como ilustrado na Figura 34.

Figura 35 – Ilustração de um duplex e dos diferentes tipos de dobras geradas por falhas contracionais.



Fonte: Adaptado de [Fossen \(2012\)](#).

As aplicações escolhidas para este trabalho simulam a formação de dobras em regimes contracionais. A primeira aplicação (Seção 4.2), aborda uma camada única submetida à flambagem. A segunda aplicação (Seção 4.3), apresenta a simulação de uma falha contracional em múltiplas camadas de rochas. Em conclusão, destaca-se que todos os conceitos abordados resumidamente nesta seção serão de grande valia para as discussões dos resultados das aplicações.

4.2 Aplicação 1 - Dobra gerada por regime contracional em camada única

A primeira aplicação trata-se da simulação de um regime contracional em uma camada única, isto é, esforço compressivo em uma camada formada somente por um material. A Subseção 4.2.1 aborda a modelagem computacional realizada e a Subseção 4.2.2 trata dos resultados e discussões das simulações desenvolvidas. Para a visualização dos resultados, foi utilizado o *software ParaView* ([AHRENS; GEVECI; LAW, 2005](#)), um programa multiplataforma,

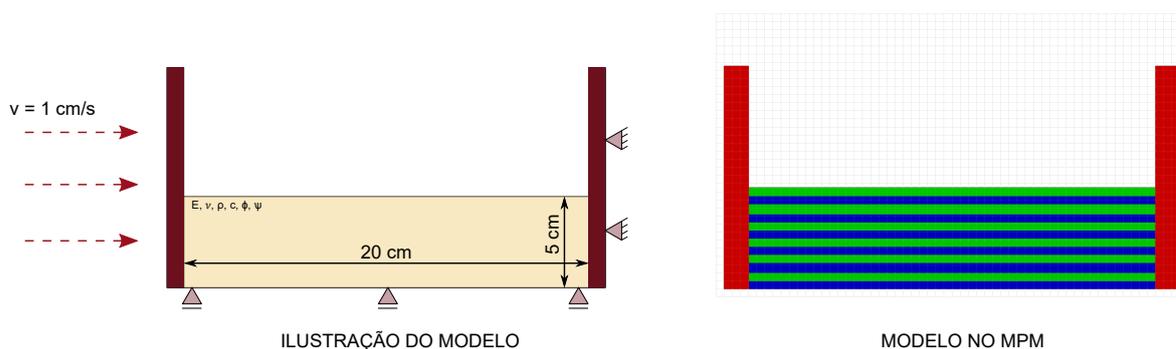
de código aberto, utilizado principalmente por seus recursos de visualização científica associada à análise de dados.

4.2.1 Modelagem da aplicação 1

Esta aplicação é baseada nas simulações desenvolvidas por [Fernández e Vargas Jr. \(2018\)](#), apresentadas no 49º Congresso Brasileiro de Geologia. No modelo apresentado, a camada possui geometria retangular e é submetida à flambagem por meio de um anteparo que se move com velocidade constante para a direita.

A geometria retangular possui 20 cm de comprimento e 5 cm de altura, e é encurtada por um anteparo com velocidade constante prescrita de $v = 1$ cm/s. Além do anteparo que se move da esquerda para a direita, modelamos um obstáculo fixo na extremidade direita da camada retangular, evitando deslizamentos na borda direita da malha que não correspondem ao comportamento esperado durante o processo de deformação. Assim, o modelo é limitado inferiormente pela malha, que restringe o deslocamento vertical, e no lado direito pelo obstáculo fixo, que restringe o deslocamento horizontal, como ilustrado na Figura 36.

Figura 36 – Modelo da aplicação 1.



Fonte: Autor (2022).

Observe na Figura 36 que a camada retangular modelada no MPM está dividida em várias faixas. Essas faixas servem meramente para facilitar a visualização da formação da dobra e não representam diferentes materiais. Além disso, no MPM, foi utilizado o tamanho do elemento da malha de 0,4 cm com 16 partículas por elemento e um tempo de simulação de 6 segundos. Ademais, para melhor capturar a resposta mecânica da simulação, utilizou-se 5% do incremento de tempo crítico Δt_{crit} e um modelo de contato que define uma tensão cisalhante máxima τ_{max} para as superfícies de contato. Aliado à tensão cisalhante máxima, foi utilizado um coeficiente de atrito μ alto, colaborando para que a camada retangular não deslize na interface de contato com o obstáculo fixo. Os parâmetros da modelagem no MPM, como também os descritos anteriormente, são resumidos na Tabela 4.

Tabela 4 – Parâmetros de modelagem da aplicação 1.

| Parâmetros do MPM | |
|--|-----------------------|
| Tamanho do elemento, Δx | 0,4 cm |
| Porcentagem do passo crítico | 5% |
| Tempo de simulação, t_f | 6 s |
| Aceleração da gravidade, g | 9,81 m/s ² |
| Tensão de cisalhamento máxima, τ_{\max} | 1 MPa |
| Coeficiente de atrito, μ | 0,70 |
| Parâmetros geométricos e velocidade | |
| Comprimento da camada, L | 20 cm |
| Altura da camada, H | 5 cm |
| Velocidade do anteparo, v | 1 cm/s |

Fonte: Autor (2022).

A camada retangular foi simulada com os diferentes modelos constitutivos detalhados no Capítulo 3. Para todos os modelos, os materiais foram simulados com comportamento perfeitamente plástico, com endurecimento e amolecimento (exceto para o material elástico linear). O módulo de elasticidade E , coeficiente de Poisson ν e densidade ρ foram iguais em todas as simulações. Para os modelos elasto-plásticos, foram fornecidos 3 pares para a caracterização do endurecimento e amolecimento. Além disso, o ângulo de atrito ϕ e o ângulo de dilatância ψ foram iguais para os modelos de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb, em que ψ foi tomado com um valor muito pequeno para simular fluxo plástico com preservação de volume. Os parâmetros η , ξ e $\bar{\eta}$ do modelo de Drucker-Prager foram encontrados com a aproximação para os vértices internos da superfície de Mohr-Coulomb (Equações 2.111 e 2.118). Por fim, os parâmetros dos materiais utilizados em cada simulação se encontram nas Tabelas 5, 6 e 7.

Tabela 5 – Parâmetros do modelo elástico linear da aplicação 1.

| | |
|-------------------------------|----------------------|
| Módulo de elasticidade, E | 5 MPa |
| Coeficiente de Poisson, ν | 0,30 |
| Densidade, ρ | 20 kN/m ³ |

Fonte: Autor (2022).

Tabela 6 – Parâmetros dos modelos elasto-plásticos da aplicação 1.

| | |
|--------------------------------|----------------------|
| Módulo de elasticidade, E | 5 MPa |
| Coeficiente de Poisson, ν | 0,30 |
| Densidade, ρ | 20 kN/m ³ |
| Ângulo de atrito, ϕ^* | 20° |
| Ângulo de dilatância, ψ^* | $\approx 0^\circ$ |
| eta, η^{**} | 0,354 |
| xi, ξ^{**} | 0,974 |
| etabar, $\bar{\eta}^{**}$ | ≈ 0 |

* Para os modelos de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb.

** Para o modelo de Drucker-Prager.

Fonte: Autor (2022).

Tabela 7 – Caracterização do comportamento dos modelos elasto-plásticos da aplicação 1.

| Deformação plástica equivalente, $\bar{\varepsilon}_p$ | Coesão, c^* (kPa) |
|---|---------------------|
| Perfeitamente plástico (1 par $\{\bar{\varepsilon}_p, c^*\}$) | |
| 0,00 | 10 |
| Endurecimento (3 pares $\{\bar{\varepsilon}_p, c^*\}$) | |
| 0,00 | 10 |
| 0,01 | 10 |
| 0,10 | 11 |
| Amolecimento (3 pares $\{\bar{\varepsilon}_p, c^*\}$) | |
| 0,00 | 10 |
| 0,01 | 10 |
| 0,10 | 0,1 |

* Tensão de escoamento, σ_y , para o modelo de von Mises.

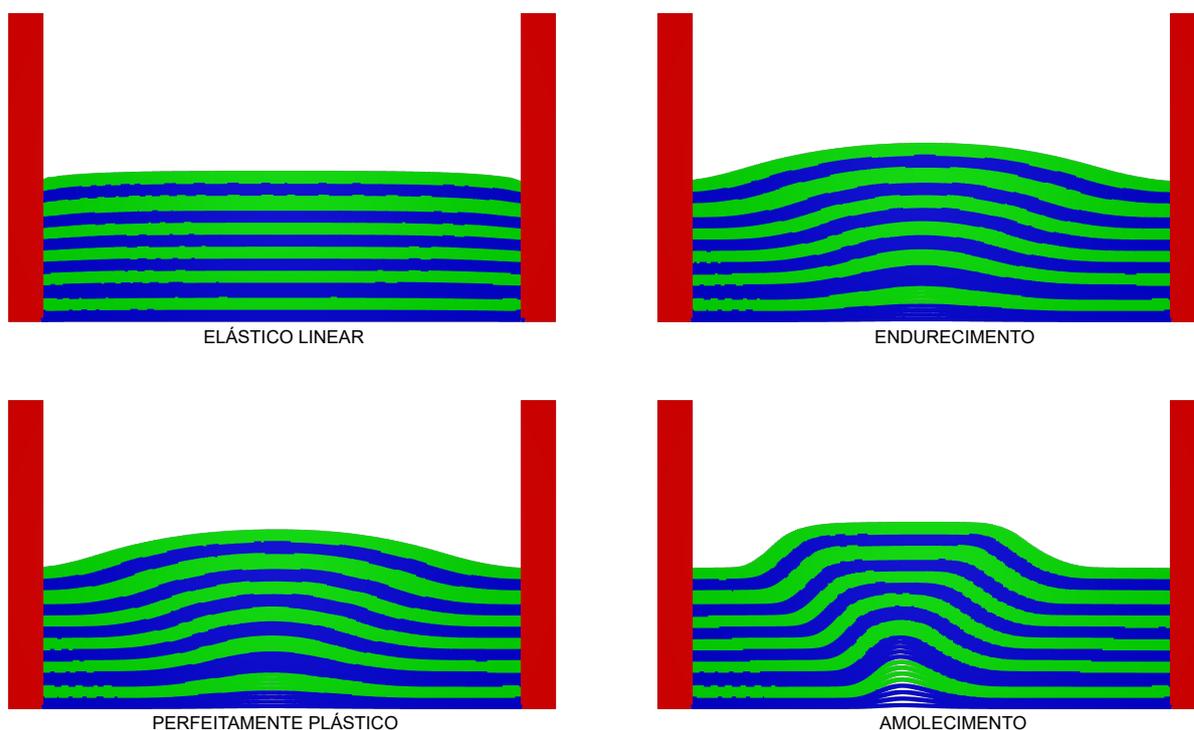
Fonte: Autor (2022).

4.2.2 Resultados das simulações da aplicação 1

Os resultados obtidos mostram que a lei de endurecimento utilizada nos modelos elasto-plásticos exerce importante influencia na geometria final da dobra. A Figura 37 mostra a comparação entre os modelos elástico linear e de Mohr-Coulomb (com comportamento perfeitamente plástico, com endurecimento e amolecimento) na metade da simulação, ou seja, aos 3 segundos. O modelo elástico linear, como se espera, não provoca dobramento na região central da camada retangular, já que deformações permanentes não ocorrem. Na simulação com endurecimento, deformações permanentes são desenvolvidas durante o empurrão inicial, de forma que provocam o surgimento de uma antiforma com baixa amplitude. A dobra inicial formada na simulação com comportamento perfeitamente plástico apresenta aspecto semelhante à simulada com endurecimento. Com amolecimento, a antiforma inicial gerada contém maior amplitude e menor comprimento.

Fazendo relação com os conceitos introduzidos na seção anterior, verifica-se que o encurtamento é acomodado pelo espessamento vertical com as faixas sendo dobradas por flambagem, e a dobra pode ser classificada como uma dobra de deslocamento. Em específico, a dobra desenvolvida em todas as simulações com os modelos elasto-plásticos pode ser classificada como uma dobra em caixa, já que tende a possuir um formato retangular, isto é, os ângulos formados na região dobrada próxima ao anteparo que se move e ao obstáculo fixo aproximam-se progressivamente para ângulos retos. Na simulação com amolecimento, o aspecto de uma dobra em caixa é mais evidente devido às deformações permanentes de alta magnitude desenvolvidas já no início da simulação.

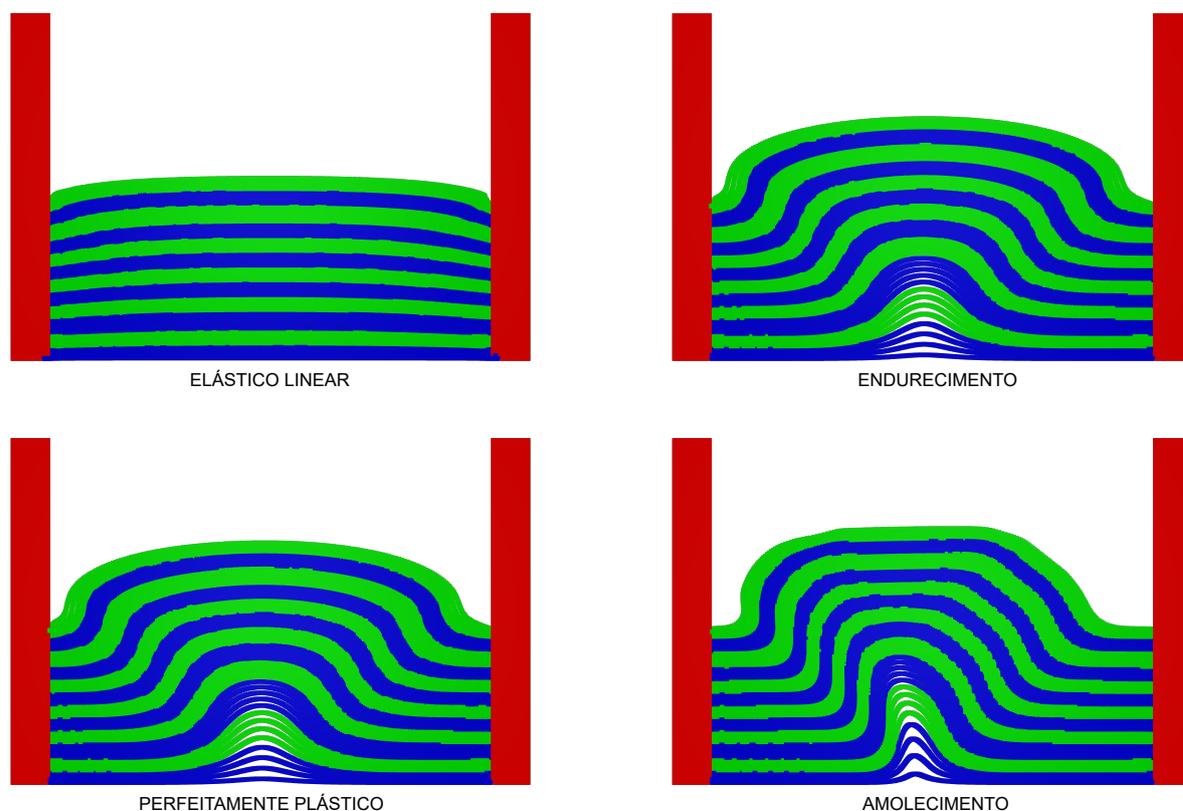
Figura 37 – Comparação entre o modelo elástico linear e o modelo de Mohr-Coulomb (perfeitamente plástico, com endurecimento e amolecimento), aos 3 segundos.



Fonte: Autor (2022).

Aos 6 segundos (tempo final), as dobras simuladas, em todos os casos, aumentam bastante em amplitude (Figura 38). A forma final das dobras nas simulações com endurecimento e comportamento perfeitamente plástico são praticamente idênticas. Nesses casos, a dobra mantém a simetria e possui a região central com faixas desagregadas em razão da intensa deformação sofrida. Com amolecimento, a dobra possui maior amplitude que os casos anteriores e não é totalmente simétrica. Por outro lado, as faixas localizadas no centro da dobra são desagregadas em função da alta deformação sofrida, como nos casos anteriores, no entanto levemente inclinadas. No modelo elástico linear, é possível observar um pequeno aumento em espessamento vertical devido ao efeito de Poisson.

Figura 38 – Comparação entre o modelo elástico linear e o modelo de Mohr-Coulomb (perfeitamente plástico, com endurecimento e amolecimento), aos 6 segundos.

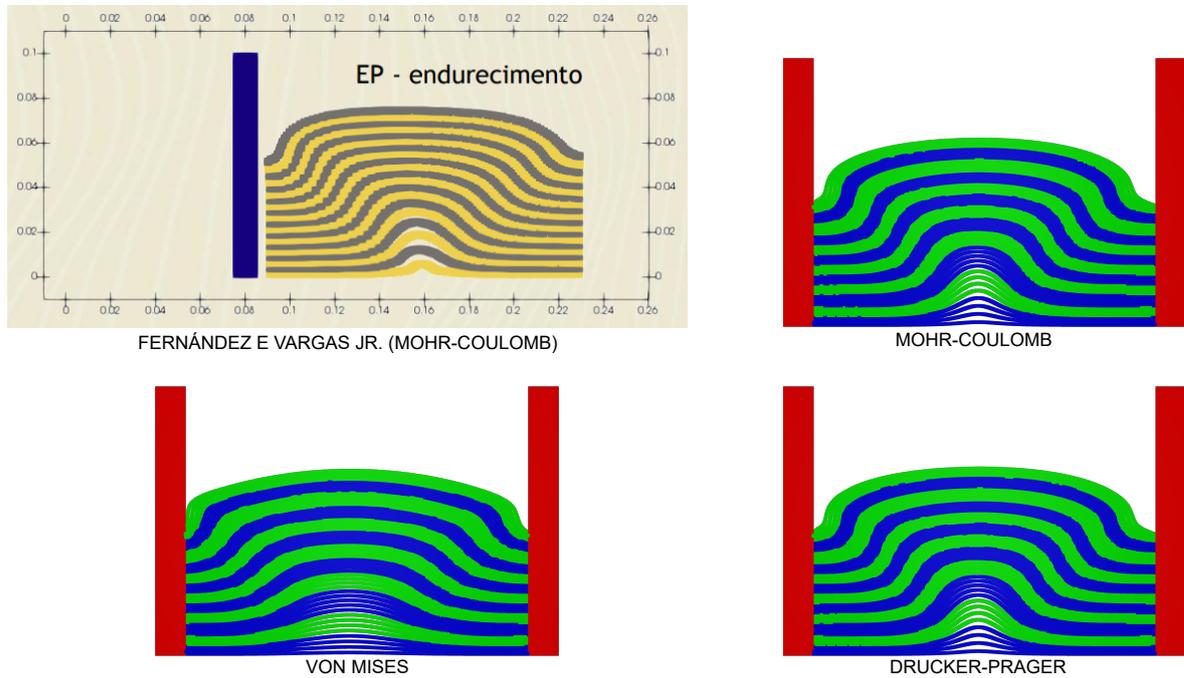


Fonte: Autor (2022).

Os resultados das simulações com o modelo de Drucker-Prager apresentam, de forma geral, o mesmo comportamento das simulações com Mohr-Coulomb. Assim, as considerações tratadas até aqui para Mohr-Coulomb, também se aplicam ao modelo de Drucker-Prager. De outro modo, as simulações com von Mises exibem grandes diferenças com os resultados de [Fernández e Vargas Jr. \(2018\)](#). As Figuras 39 e 40 mostram a comparação entre os resultados obtidos com todos os modelos elasto-plásticos e as simulações de [Fernández e Vargas Jr. \(2018\)](#) (com Mohr-Coulomb), para o comportamento de endurecimento e amolecimento, respectivamente.

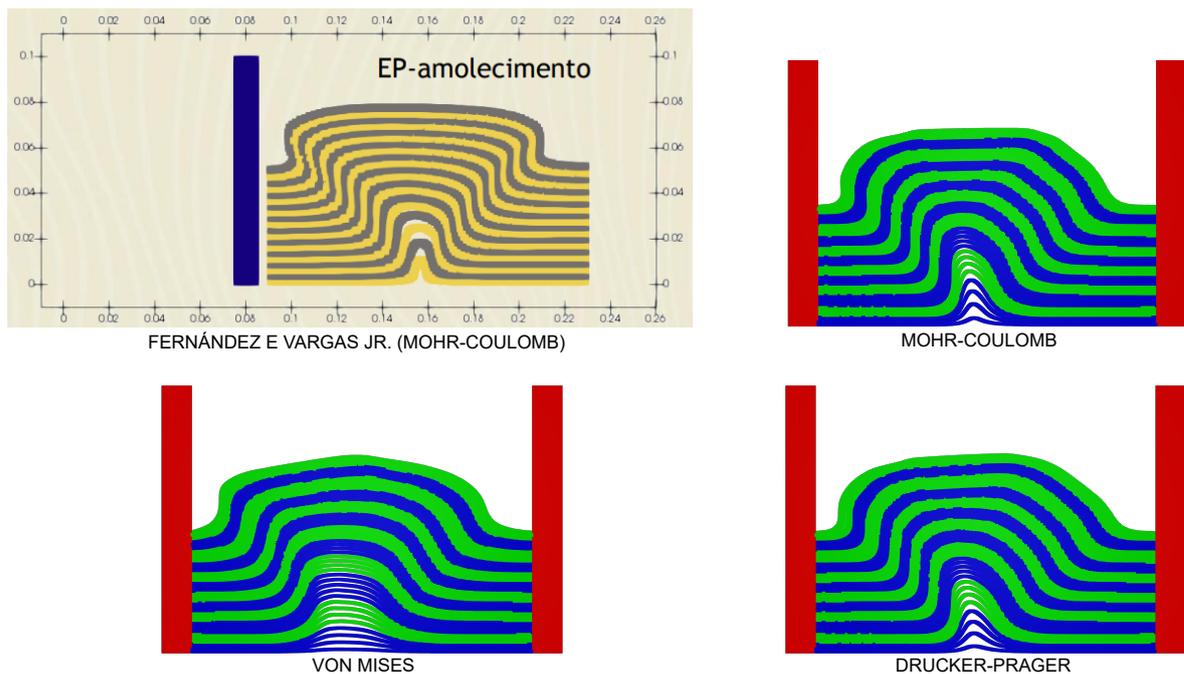
Com endurecimento, os modelos de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb apresentam dobra com aspecto semelhante à simulada por [Fernández e Vargas Jr. \(2018\)](#). No entanto, o modelo de von Mises produz uma dobra com menor amplitude, e com faixas na região central menos separadas, de maior comprimento. No caso de amolecimento, a geometria final das dobras geradas com todos os modelos elasto-plásticos diferem da geometria da dobra obtida por [Fernández e Vargas Jr. \(2018\)](#). Os modelos de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb possuem maior semelhança em relação aos resultados do modelo de von Mises.

Figura 39 – Comparação entre o resultado de Fernández e Vargas Jr. (2018) e os resultados com os modelos elasto-plásticos, para a simulação com endurecimento, aos 6 segundos.



Fonte: Autor (2022).

Figura 40 – Comparação entre o resultado de Fernández e Vargas Jr. (2018) e os resultados com os modelos elasto-plásticos, para a simulação com amolecimento, aos 6 segundos.



Fonte: Autor (2022).

Vale destacar que no caso do amolecimento, as dobras com os modelos de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb estão levemente mais inclinadas para a esquerda em comparação com o resultado de [Fernández e Vargas Jr. \(2018\)](#), ou seja, as dobras não mantêm a simetria. Essa diferença pode ser justificada pelo fato de que, no modelo de [Fernández e Vargas Jr. \(2018\)](#), o ângulo de atrito e o ângulo de dilatância sofrem degradação à medida que a deformação plástica equivalente aumenta sua magnitude, comportamento não incorporado aos modelos implementados neste trabalho. As simulações desenvolvidas mostram potencial para reproduzir a formação de uma dobra associada a um regime contracional. Foi possível verificar que os diferentes modelos constitutivos fornecem diferentes respostas para a geometria final da dobra. Além disso, os parâmetros que caracterizam a lei de endurecimento constituem outra variável de importante influência para o processo de deformação. Por fim, de uma forma geral e qualitativa, os resultados obtidos possuem conformidade com os resultados de [Fernández e Vargas Jr. \(2018\)](#).

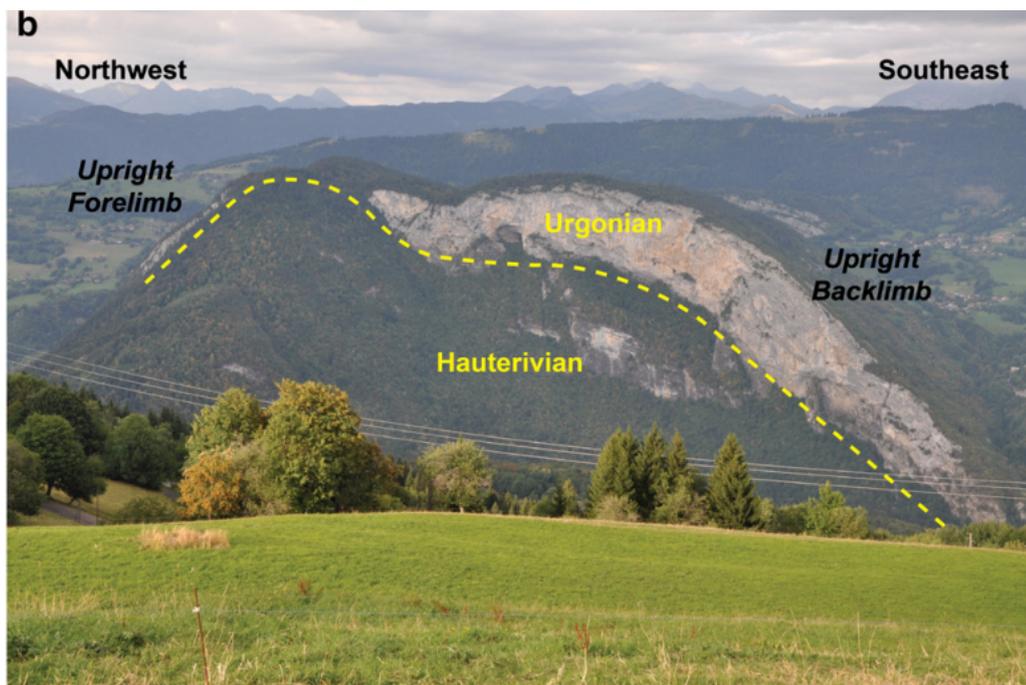
4.3 Aplicação 2 - Dobra gerada por falha contracional

A segunda aplicação tem como base os estudos desenvolvidos por [Smart et al. \(2012\)](#) de uma dobra produzida por uma falha contracional. O estudo tem por objetivo desenvolver metodologias para prever as características naturais de deformação de uma rocha através da modelagem geomecânica. A Subseção 4.3.1 discorre acerca da modelagem geomecânica desenvolvida no MPM e a Subseção 4.3.2 mostra os resultados e discussões das simulações realizadas. Assim como na aplicação anterior, a visualização dos resultados foram elaboradas a partir do *software ParaView* ([AHRENS; GEVECI; LAW, 2005](#)).

4.3.1 Modelagem da aplicação 2

A dobra estudada é a anticlinal Bargy (Figura 41), localizada próxima ao limite noroeste da cadeia Subalpina norte na França, um cinturão de dobramentos e cavalgamentos em rochas sedimentares do período Mesozoico e Cenozoico. Em específico, a modelagem geomecânica e simulações se concentraram em uma seção transversal da anticlinal. As porções mais rasas de rochas da anticlinal Bargy possibilitaram a caracterização da geometria da dobra, enquanto que mapeamentos geológicos e estudos de campo foram necessários para completar a interpretação da estrutura para as porções mais profundas.

Figura 41 – Fotografia em campo da anticlinal Bargy.

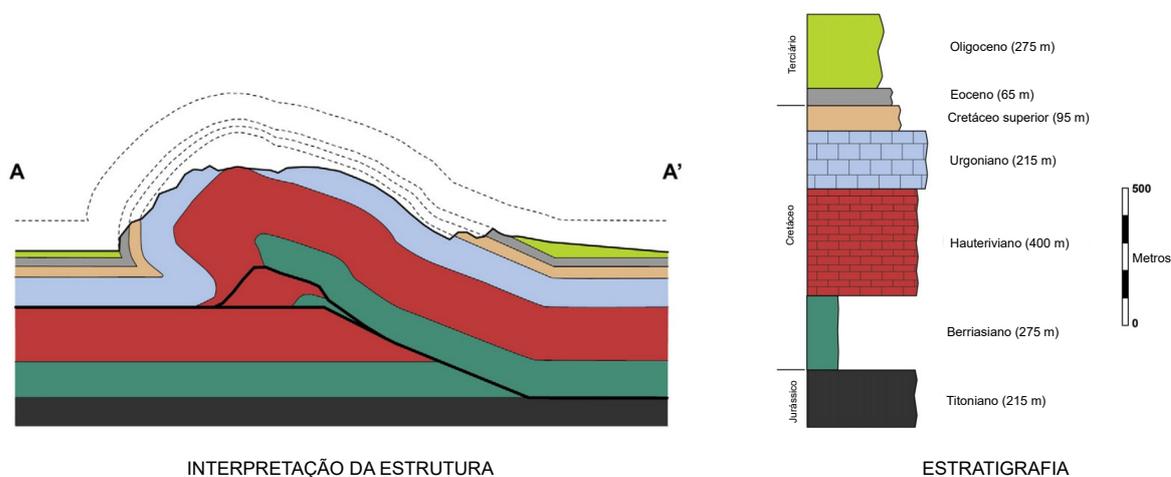


Fonte: [Smart et al. \(2012\)](#).

Restaurações geométricas indicaram que o núcleo da anticlinal contém 1 ou mais cavalos. Para simplificar, [Smart et al. \(2012\)](#) interpretaram a anticlinal como sendo uma estrutura duplex com somente 1 cavalo. Como não há grandes evidências de onde a falha inicia e termina, determinou-se que o limite superior do cavalo está na base da camada de calcário urgoniano e o limite inferior localiza-se na base da camada de folhelho berriasiano.

A Figura 42 mostra a interpretação da estrutura da anticlinal na seção transversal estudada, onde é possível observar que as camadas superiores sofreram intenso processo de erosão e atualmente os calcários urgoniano e hauteriviano definem a forma superior da dobra. Além disso, é mostrada a estratigrafia generalizada da seção, onde cada camada é associada a um período geológico.

Figura 42 – Seção transversal estudada contendo a interpretação da estrutura da anticlinal Bargy e sua estratigrafia.

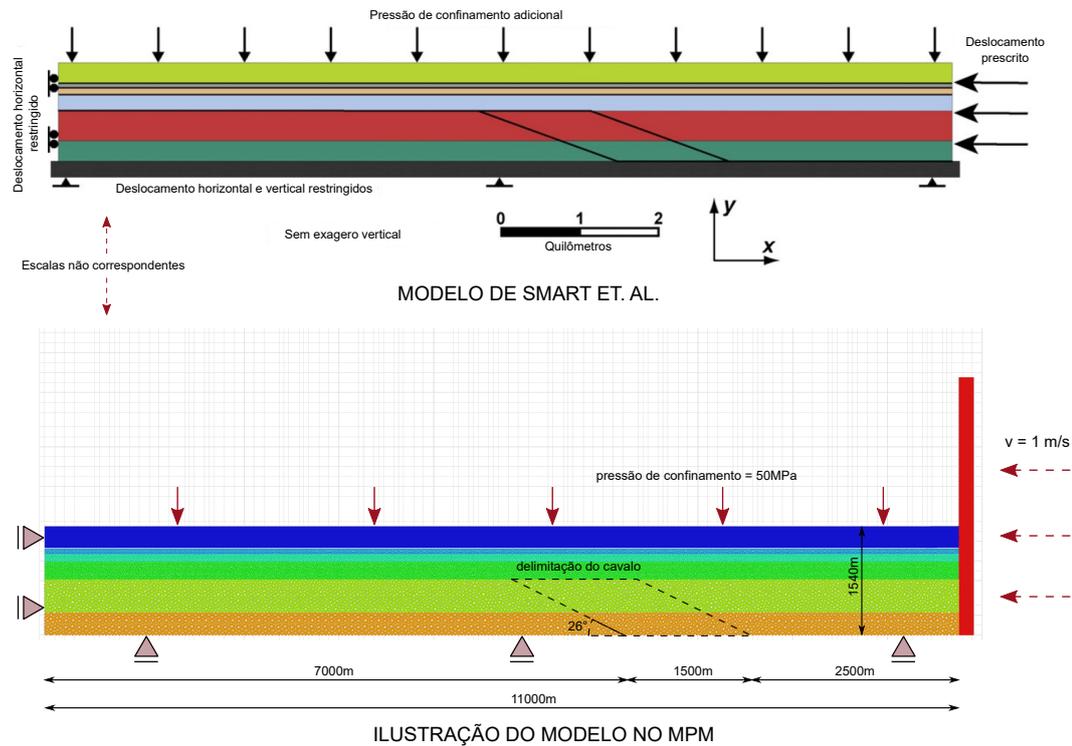


Fonte: Adaptado de [Smart et al. \(2012\)](#).

A Figura 43 mostra o modelo desenvolvido por [Smart et al. \(2012\)](#) baseado na reconstrução geológica da seção transversal deformada (Figura 42). Observa-se que o modelo incorpora a estratigrafia generalizada, como também o cavalo único cortando o Hauteriviano e Berriasiano. Ademais, o calcário titoniano é fixo durante a simulação, ou seja, não se desloca verticalmente nem horizontalmente. [Smart et al. \(2012\)](#) realizou a simulação com o *software Abaqus CAE* ([SMITH, 2009](#)), em análise quase estática. Para simular a deformação contracional, deslocamentos prescritos foram impostos como uma condição de contorno à direita do modelo.

Em nosso modelo, o Berriasiano faz fronteira com o limite inferior da malha de fundo e os deslocamentos são realizados a partir de um anteparo que se move com velocidade prescrita constante da direita para a esquerda, conforme ilustrado na Figura 43. De forma equivalente ao modelo de [Smart et al. \(2012\)](#), no modelo estudado o deslocamento horizontal é restrito na extremidade esquerda (limitado pela malha de fundo) e uma pressão de confinamento é aplicada no topo do Oligoceno para considerar uma profundidade de aproximadamente 2,5 km, referente ao tempo de deformação. Analogamente às cores da estratigrafia apresentada, cada cor do modelo no MPM corresponde a uma camada diferente (Oligoceno em azul e Berriasiano em laranja). Por fim, é importante observar que as escalas utilizadas na ilustração dos modelos na Figura 43 não são correspondentes.

Figura 43 – Modelo desenvolvido por Smart et al. (2012) e no MPM, para a aplicação 2.



Fonte: Adaptado de Smart et al. (2012).

Os parâmetros geométricos não foram fornecidos por Smart et al. (2012). Logo, foi necessário a medição manual do comprimento total das camadas e do ângulo de mergulho do cavalo. A partir das medições realizadas, consideramos o comprimento total das camadas 11 km e o ângulo de mergulho 26° (falha de cavalgamento). O vértice inferior esquerdo da geometria do cavalo está localizado a 7000 m e o comprimento do cavalo possui 1500 m. A altura total das camadas corresponde a 1540 m, conforme ilustrado na Figura 43.

O modelo foi discretizado com tamanho do elemento da malha de fundo de $\Delta x = 60$ m. Afim de melhorar a distribuição de partículas sem aumentar excessivamente o custo computacional, foi utilizado o *software* Gmsh (GEUZAIN; REMACLE, 2009), um gerador de malha de elementos finitos, como uma malha base para gerar as partículas das camadas do Eoceno ao Berriasiano. Para o Oligoceno, utilizou-se uma configuração 3×3 de partículas, ou seja, um total de 9 partículas por elemento (geradas por uma malha quadrada regular). Para o Eoceno ao Urgoniano, utilizou-se o Gmsh, com o fator de escala igual a $\Delta x/1,5$ (maior discretização). Para o Hauteriviano e Berriasiano, o fator de escala do Gmsh foi de $\Delta x/3,0$ (menor discretização). Um total de 56477 partículas foram geradas para todo o modelo.

Como no MPM estamos simulando com análise dinâmica, foi necessário estabelecer um tempo de simulação muito alto e velocidade baixa para tentar evitar que efeitos inerciais interferissem na resposta mecânica da simulação. Assim, adotou-se a velocidade de empurrão do anteparo $v = 1$ m/s e tempo de simulação $t_f = 2000$ segundos, totalizando um empurrão de

2000 metros ao fim da simulação. Devido ao poder de processamento das máquinas utilizadas, todas as simulações demoraram de 3 a 5 dias para rodar por completo o processo de deformação da anticlinal.

Como na aplicação anterior, utilizou-se 5% para a porcentagem do incremento de tempo crítico, com o intuito de obter uma resposta mecânica o mais fiel possível, e o modelo de contato que define uma tensão de cisalhamento limite nas interfaces de contato. No entanto, como no modelo de Smart et al. (2012), não há referências sobre a imposição de um limite para as forças de contato, aproximamos o valor de τ_{\max} para o infinito. Além disso, utilizamos um alto coeficiente de atrito, com valor $\mu = 0,75$, levando em conta a análise dinâmica do MPM.

Cada simulação foi composta por dois passos: no primeiro, o modelo foi deixado em repouso (em acomodação), sob a ação das forças gravitacionais e da pressão de confinamento, e com a ação de um amortecimento local, na tentativa de promover dissipação de energia antes do empurrão, já que não se trata de uma análise quase estática; no segundo, o amortecimento local foi retirado e a velocidade constante foi prescrita ao anteparo, iniciando o processo de deformação. Por fim, os parâmetros geométricos e de simulação no MPM são resumidos na Tabela 8.

Tabela 8 – Parâmetros de modelagem da aplicação 2.

| Parâmetros do MPM | |
|--|-----------------------|
| Tamanho do elemento, Δx | 60 m |
| Porcentagem do passo crítico | 5% |
| Tempo de simulação, t_f | 2000 s |
| Aceleração da gravidade, g | 9,81 m/s ² |
| Tensão de cisalhamento máxima, τ_{\max} | $\approx \infty$ |
| Pressão de confinamento, σ_c | 50 MPa |
| Coeficiente de atrito, μ | 0,75 |
| Parâmetros geométricos e velocidade | |
| Comprimento total das camadas, L | 11000 m |
| Altura total das camadas, H | 1540 m |
| Comprimento do cavalo, L_h | 1500 m |
| Ângulo de mergulho do cavalo | 26° |
| Velocidade do anteparo, v | 1 m/s |

Fonte: Autor (2022).

Os modelos constitutivos apresentados no Capítulo 3 foram utilizados para simular o comportamento mecânico das camadas (von Mises, Drucker-Prager e Mohr-Coulomb). Além disso, conforme descrito por Smart et al. (2012), como não é possível realizar uma caracterização *in situ* das propriedades mecânicas de cada camada estratigráfica que está sendo modelada, seus valores foram retirados da literatura.

A Tabela 9 mostra os valores das propriedades dos materiais de cada camada, que formam o modelo base para a primeira rodada de simulações. Para verificar o efeito das propriedades dos materiais, simulações subsequentes foram realizadas onde, em cada camada, foi considerado ângulo de dilatância maior (mesmo valor do ângulo de atrito) e coesão reduzida (50% menor). Dessa forma, 3 rodadas de simulações foram desenvolvidas para cada modelo constitutivo: rodada *A*, com os valores originais da Tabela 9; rodada *B*, camadas com fluxo plástico associativo, ou seja, ângulo de atrito igual ao ângulo de dilatância; e rodada *C*, camadas com valor de resistência reduzido pela metade.

Os parâmetros do modelo de Drucker-Prager foram encontrados utilizando a aproximação para os vértices internos da superfície de escoamento de Mohr-Coulomb (Equações 2.111 e 2.118). Destaca-se que o ângulo de atrito e ângulo de dilatância não são utilizados no modelo de von Mises, e a tensão de escoamento σ_y é tomada com o mesmo valor da coesão. Todos os modelos foram simulados com comportamento perfeitamente plástico, ou seja, somente 1 par de valores caracterizam a função linear por partes da lei de endurecimento.

Tabela 9 – Propriedades materiais das camadas estratigráficas da aplicação 2.

| Camada | ρ (kg/m ³) | E (GPa) | ν | ϕ (°) | ψ (°) | c (MPa) |
|-------------------|-----------------------------|-----------|-------|------------|------------|-----------|
| Oligoceno | 2000 | 10 | 0,20 | 20 | 10 | 40 |
| Eoceno | 2100 | 15 | 0,25 | 25 | 12,5 | 50 |
| Cretáceo superior | 2200 | 20 | 0,30 | 30 | 15 | 80 |
| Urgoniano | 2300 | 25 | 0,35 | 40 | 20 | 100 |
| Hauteriviano | 2200 | 20 | 0,30 | 35 | 17,5 | 80 |
| Berriasiano | 2100 | 15 | 0,25 | 25 | 12,5 | 50 |
| Titoniano | 2300 | 50 | 0,30 | 45 | 22,5 | 200 |

Abreviações: ρ = densidade, E = módulo de elasticidade, ν = coeficiente de Poisson, ϕ = ângulo de atrito, ψ = ângulo de dilatância e c = coesão.

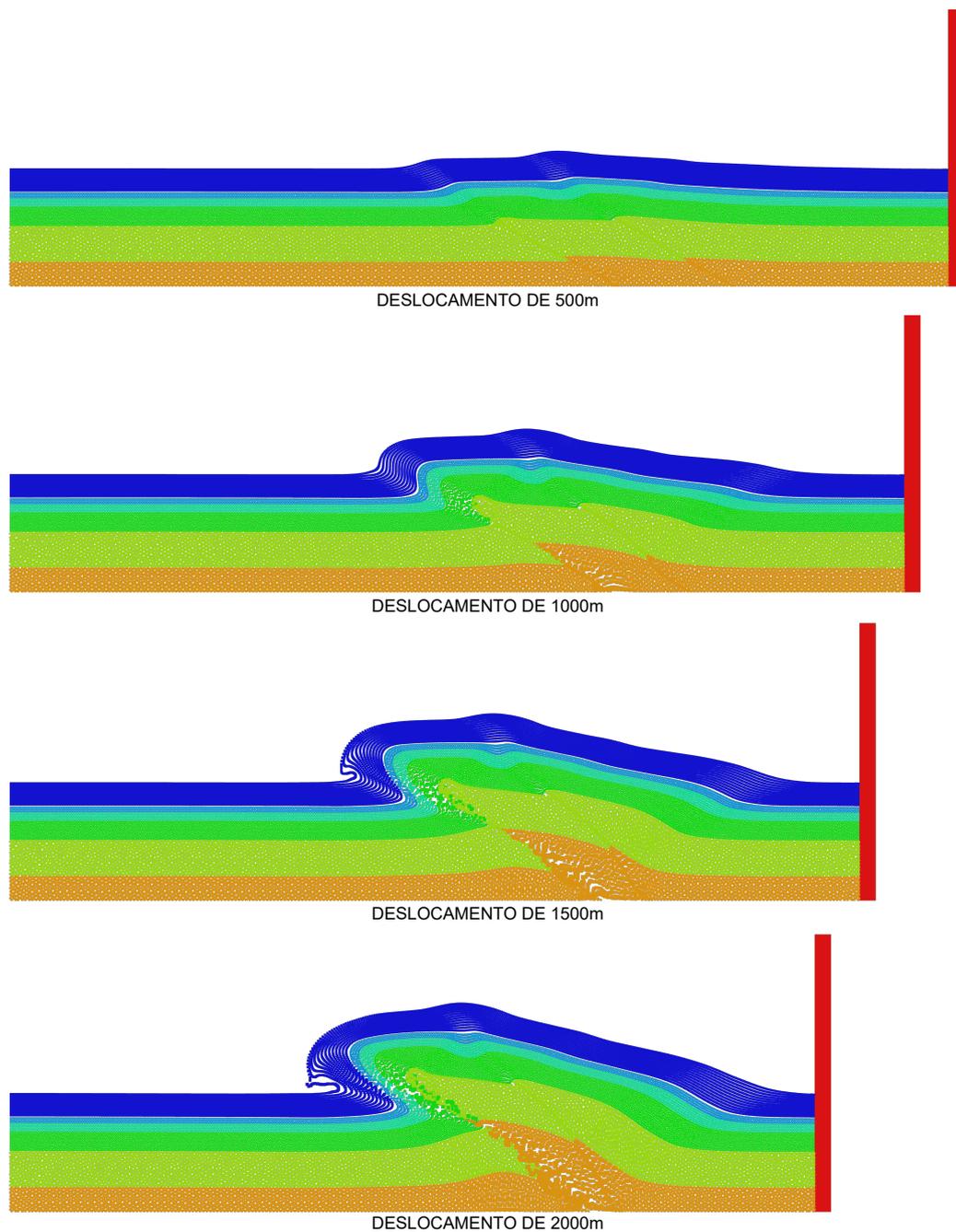
Fonte: Adaptado de [Smart et al. \(2012\)](#).

4.3.2 Resultados das simulações da aplicação 2

Os resultados mostram, a princípio, que o modelo constitutivo utilizado influencia bastante na configuração final da dobra. É possível observar que quando utilizado os modelos de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb, a dobra é gerada através da falha de cavalgamento (Figuras 44 e 45). Quando utilizado o modelo de von Mises, o encurtamento é acomodado através do espessamento vertical das camadas, dobradas por flambagem, formando dobras de deslocamento (Figura 46). Vale ressaltar que modelos constitutivos sensíveis à pressão hidrostática são mais adequados para simular o comportamento das rochas, já que essas possuem forte dependência na pressão hidrostática. É por este motivo que as simulações com Drucker-Prager e Mohr-Coulomb demonstraram os aspectos essenciais da geometria de dobras geradas por falhas contracionais, como a anticlinal Bargy.

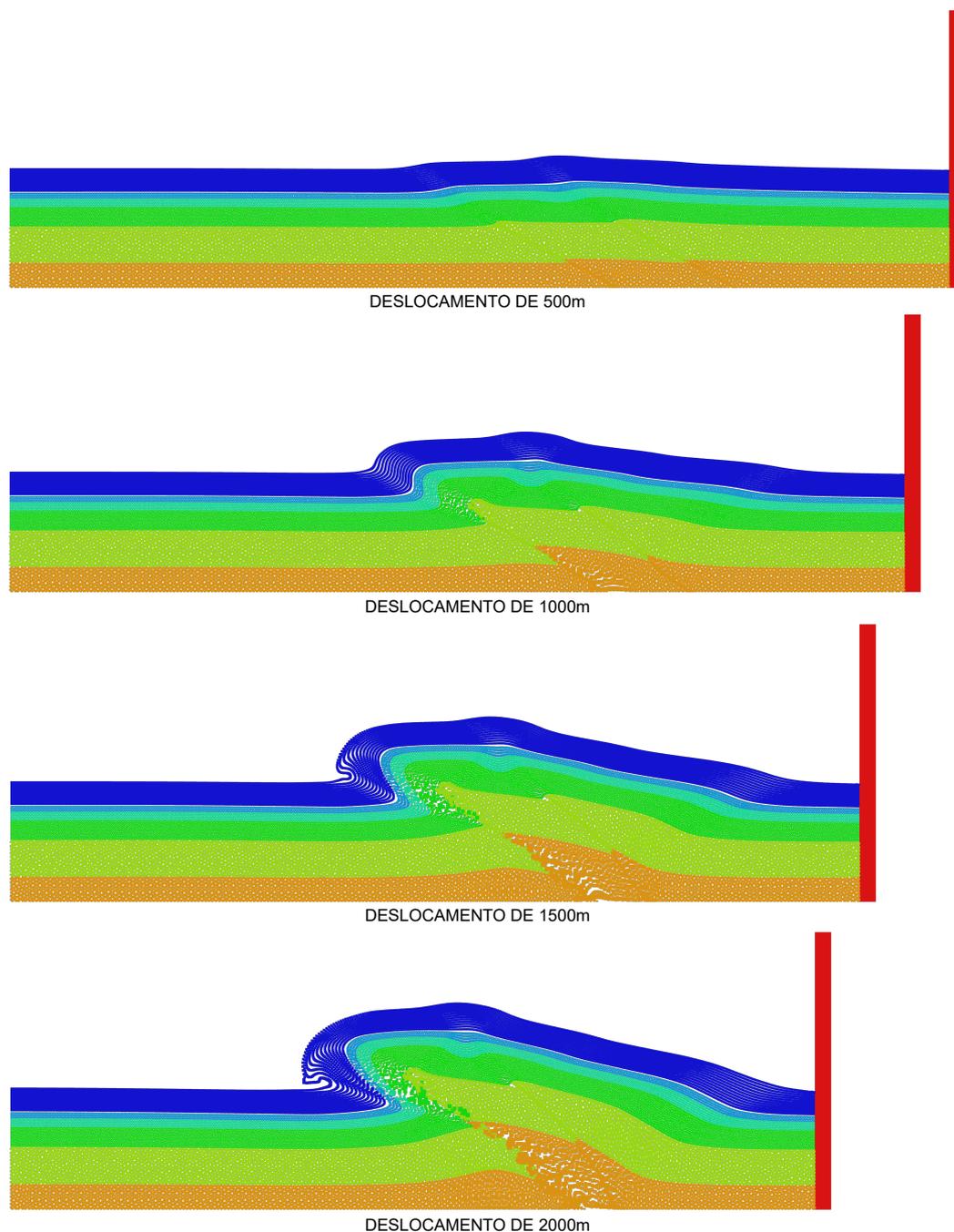
Quando simulado com modelo de Mohr-Coulomb (rodada *A*), o empurrão inicial (cerca de 500 m) provoca o deslizamento do cavalo sobre as rampas de falha, formando um par de pequenos anticlinais assimétricas de baixa amplitude, desenvolvidas na camada do Urgoniano (Figura 44). Deformações permanentes se desenvolvem principalmente na direção das rampas de falha. À medida em que o anteparo avança, a ponta superior esquerda do cavalo (no topo do Hauteriviano) começa a transpor a camada do Urgoniano, provocando sua própria rotação, como também do Cretáceo superior, Eoceno e Oligoceno. Essa rotação das camadas superiores produz um aumento na amplitude da anticlinal e na perda de simetria. Assim, as camadas superiores rotacionam progressivamente, passando de levemente inclinadas, para a posição vertical, e finalmente invertidas. Além disso, a rotação provoca um estiramento nessas camadas, associado ao desenvolvimento de deformações permanentes, como mostrado na Figura 52.

Destaca-se que devido à perda de simetria em decorrência da rotação das camadas superiores, a estrutura duplex formada não apresenta uma configuração normal, como a apresentada na Figura 35. Nos resultados obtidos, a anticlinal formada se assemelha bastante a uma dobra de propagação de falha. Dessa forma, com o aumento do deslocamento do anteparo, a linha de falha se propaga através das camadas, e caso a falha continuasse se propagando, cortaria o flanco inclinado da dobra, acomodando-se acima da porção horizontal esquerda da estrutura. É importante ressaltar que em virtude da natureza dinâmica das simulações, os resultados exibem interpenetração entre camadas, que seriam minimizadas com uma melhor discretização dos elementos da malha de fundo e de partículas.

Figura 44 – Resultados da rodada *A* de simulação com o modelo de Mohr-Coulomb.

Fonte: Autor (2022).

Os resultados obtidos com o modelo de Drucker-Prager (rodada *A*) são bastante semelhantes aos resultados quando simulado com o modelo de Mohr-Coulomb. Como o modelo de Drucker-Prager é uma aproximação para o modelo de Mohr-Coulomb, a similaridade encontrada já era esperada. Assim, observa-se o surgimento do par de anticlinais de baixa amplitude em torno de 500 metros. Como também, a ponta esquerda do cavalo atravessa o Urganiano, provocando a rotação das camadas do Oligoceno ao próprio Urganiano, gerando a assimetria da anticlinal e aumento em sua amplitude.

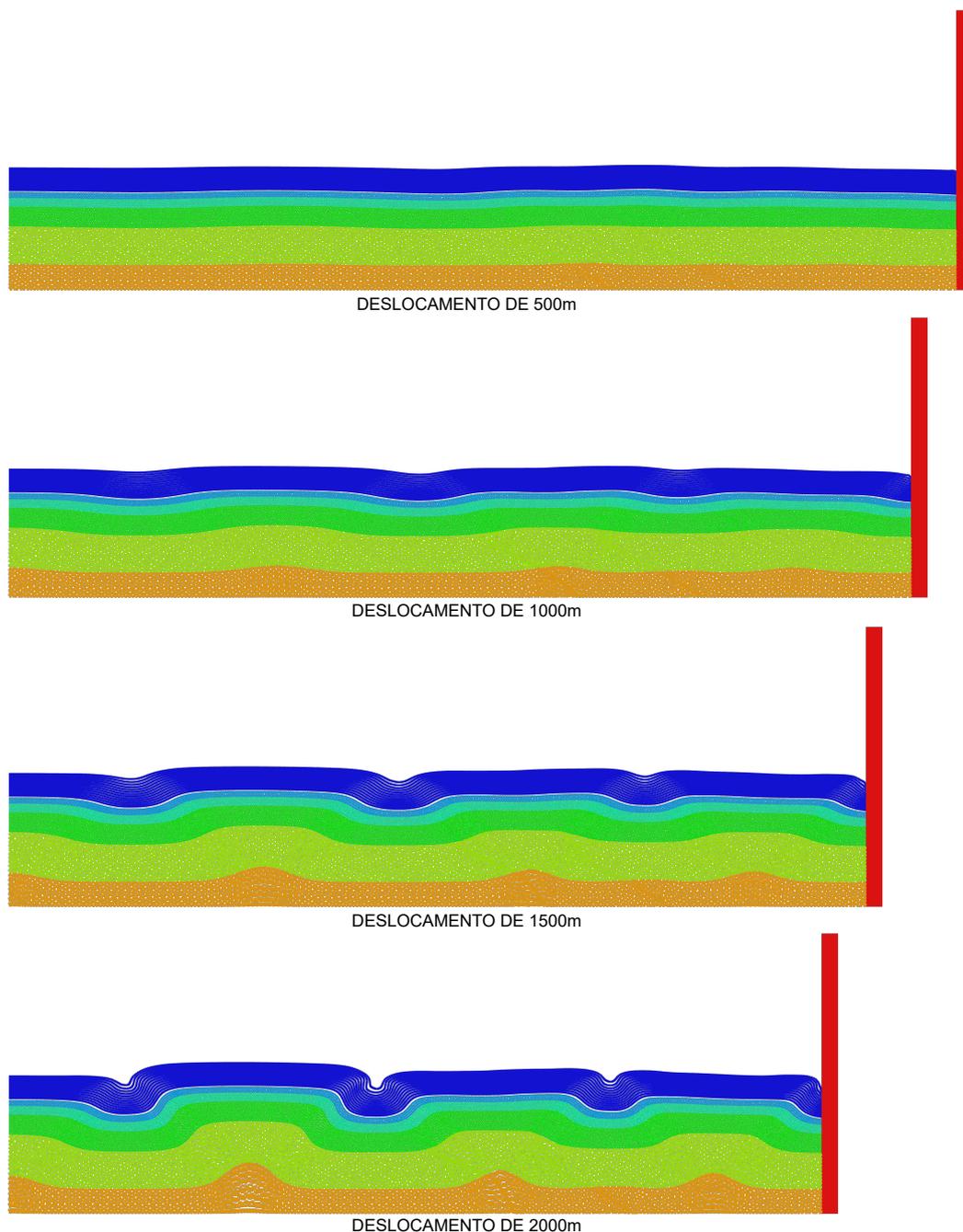
Figura 45 – Resultados da rodada *A* de simulação com o modelo de Drucker-Prager.

Fonte: Autor (2022).

Na rodada *A* de simulação, com o modelo de von Mises (Figura 46), o avanço inicial do anteparo (em torno de 500 metros) não provoca o deslizamento do cavalo sobre a rampa de falha. Ao atingir os 1000 metros, é possível observar que o encurtamento gera dobras de deslocamento de pequena amplitude no centro da estrutura. Em 1500 metros, a amplitude das dobras é maior, sendo possível observar a formação de uma sequência de anticlinais e sinclinais simétricas na região central, isto é, os flancos de cada dobra no centro da estrutura, divididos pelos seus respectivos planos axiais, são simétricos. À medida em que a simulação avança para

o final, a sequência de anticlinais e sinclinais perdem levemente a simetria. Aos 2000 metros, observa-se na configuração final atingida que a amplitude das dobras aumenta à medida em que se afasta do anteparo.

Figura 46 – Resultados da rodada *A* de simulação com o modelo de von Mises.



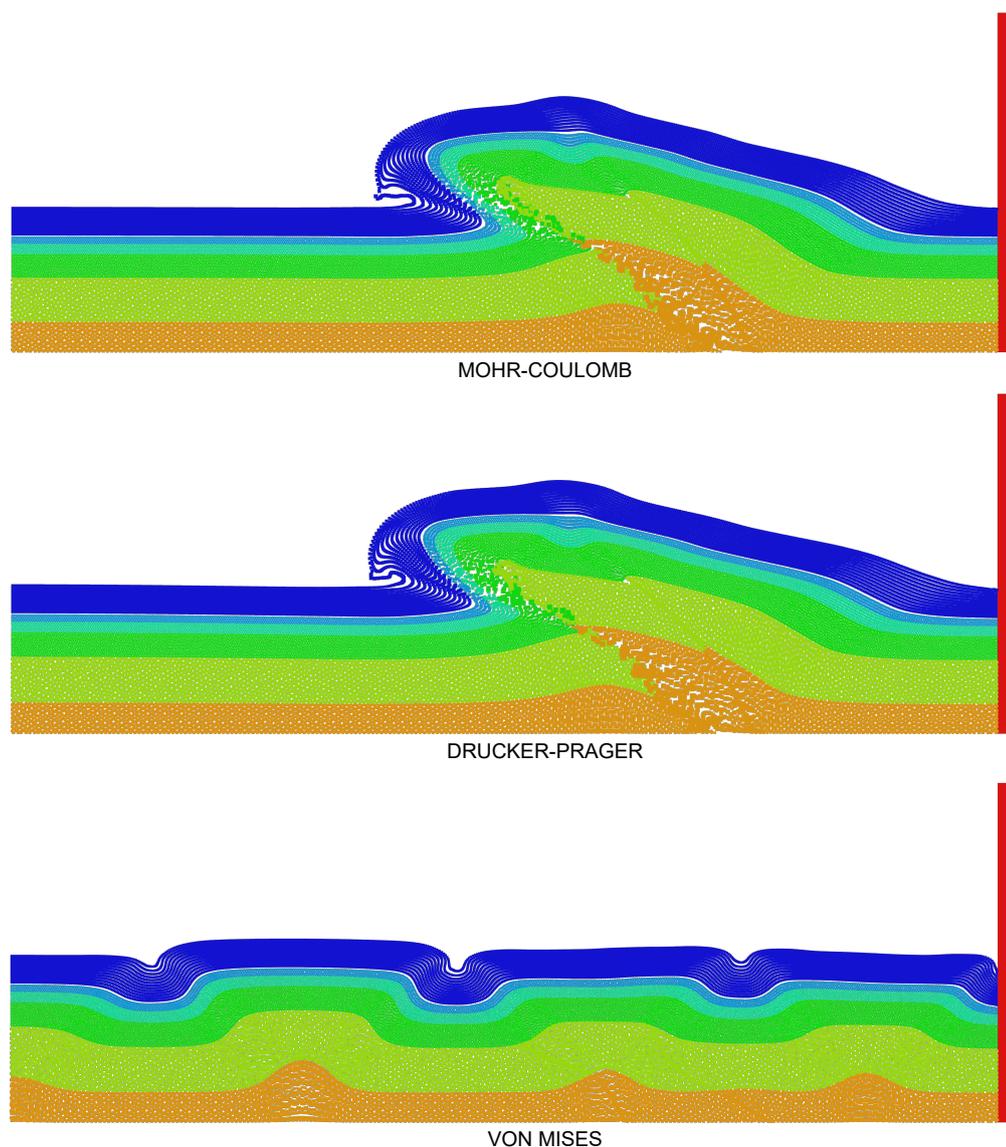
Fonte: Autor (2022).

É importante ressaltar que a desconsideração da pressão hidrostática na formulação de von Mises é o principal fator que leva à geometria deformada final observada na Figura 46. Mais uma vez, fica evidente que a modelagem e simulação dos geomateriais com modelos elasto-

plásticos sensíveis à pressão hidrostática são fundamentais para prever o comportamento correto do processo de deformação sofrido.

A Figura 47 expõe os resultados obtidos na rodada *A* de simulação, utilizando todos os modelos constitutivos. Mais uma vez, é evidente que o modelo de von Mises não é capaz de reproduzir a forma da anticlinal devido à sua insensibilidade à pressão hidrostática. Por outro lado, os modelos de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb conseguem reproduzir com boa similaridade a geometria da anticlinal Bargy.

Figura 47 – Comparação entre os resultados com todos os modelos constitutivos, simulados na rodada *A* (2000 metros).

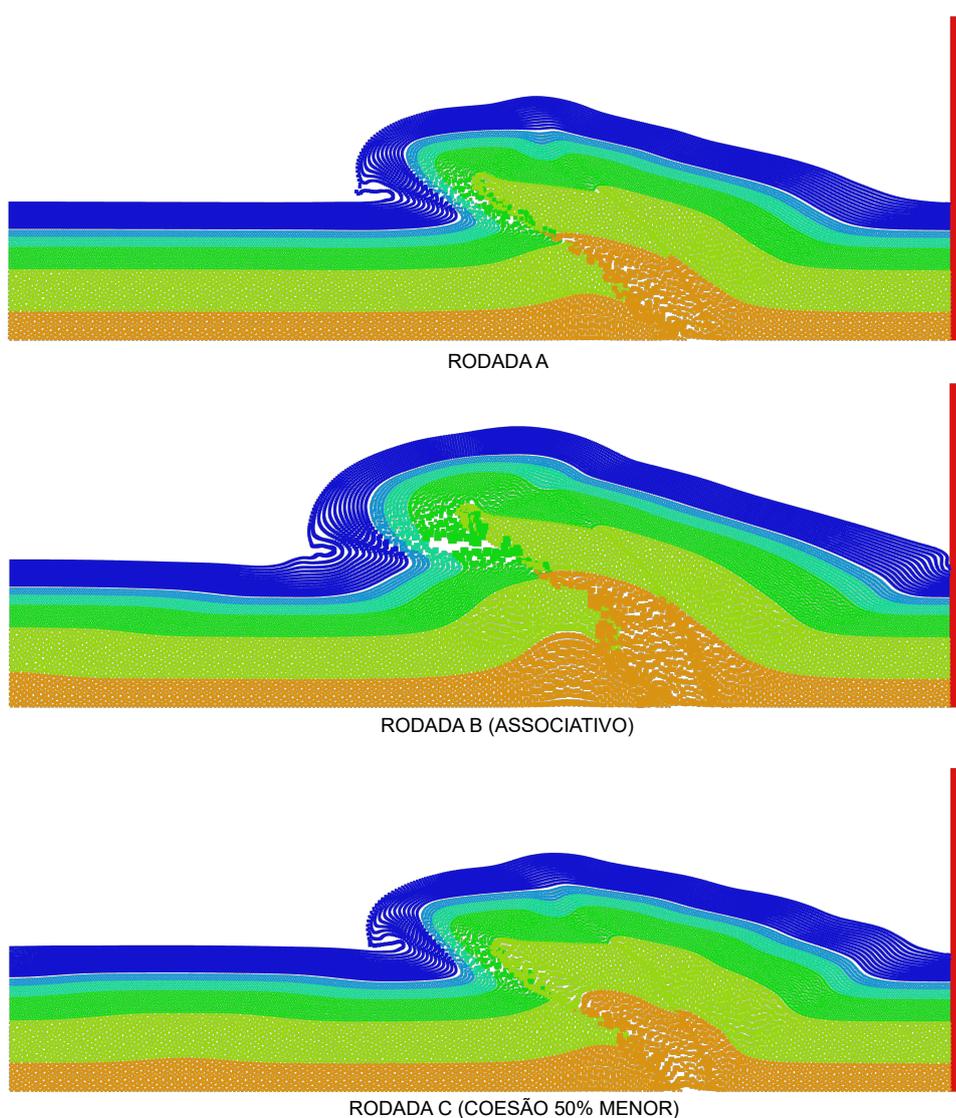


Fonte: Autor (2022).

A Figura 48 mostra a comparação entre os resultados, em todas as rodadas de simulações, com o modelo de Mohr-Coulomb, aos 2000 metros. É possível observar que a anticlinal, simulada na rodada *B* (fluxo plástico associativo), apresenta maior amplitude em sua

configuração final. Além disso, a amplitude da anticlinal localizada abaixo da rampa de falha também é maior. Essa anticlinal é caracterizada como uma dobra de deslocamento, e empurra o cavalo para cima à medida que o anteparo avança. Como o cavalo corta progressivamente a camada do Urganiano, o empurrão sofrido para cima provoca o surgimento de fraturas numéricas mais evidentes, isto é, as partículas são separadas por distâncias maiores que o tamanho do elemento da malha de fundo (comportamento não esperado já que nenhuma lei de fratura foi prescrita aos modelos constitutivos). Aliado a esse comportamento, observa-se penetrações excessivas entre o Urganiano e Hauteriviano na região superior do cavalo.

Figura 48 – Comparação entre os resultados com o modelo de Mohr-Coulomb, em todas as rodadas de simulações (2000 metros).



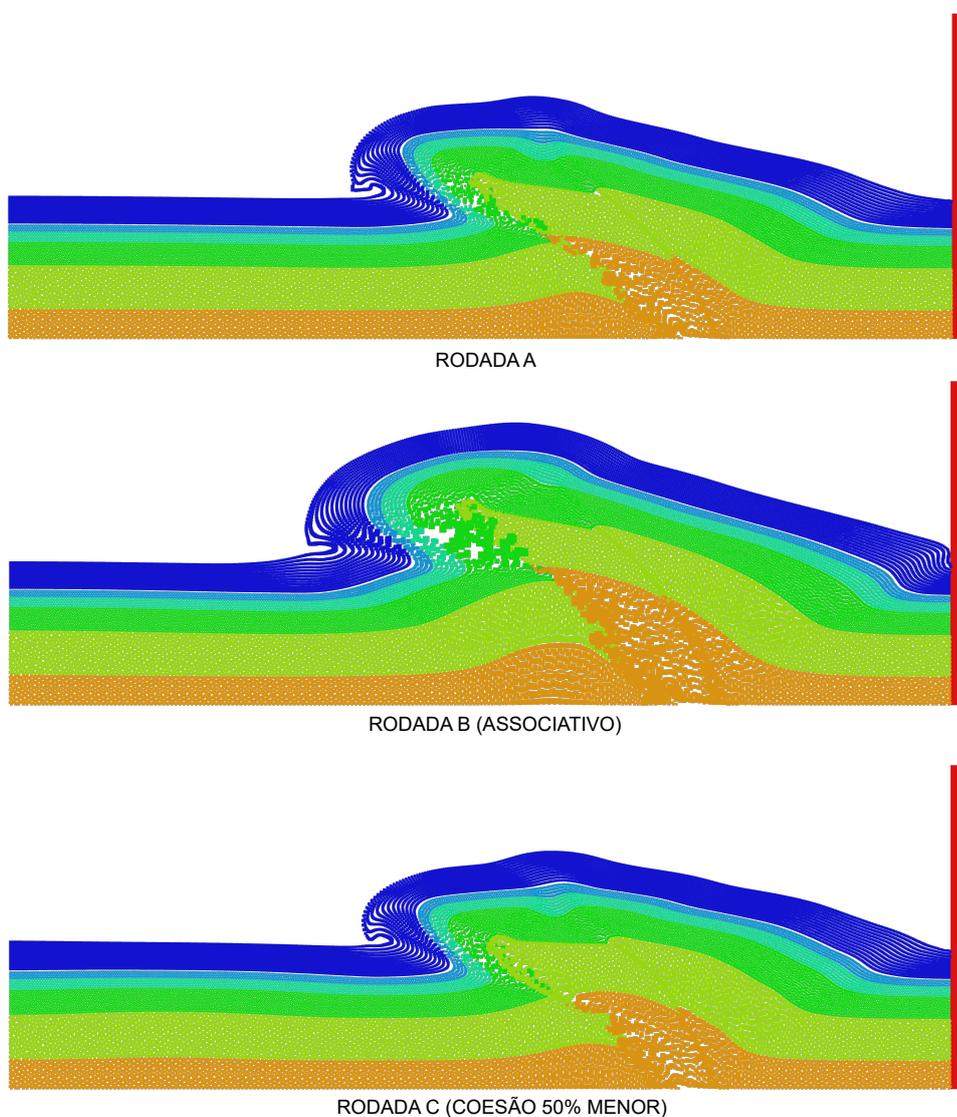
Fonte: Autor (2022).

O resultado da rodada *C* (camadas com 50% menor coesão), resulta em uma geometria final similar ao resultado da rodada *A*. No entanto, observa-se que a anticlinal apresenta

amplitude levemente menor e a porção esquerda da estrutura com uma inclinação suave (não mais horizontal), quando comparada com a rodada *A*.

Quando comparamos a geometria final obtida (aos 2000 metros), com o modelo de Drucker-Prager, em todas as rodadas de simulações, observamos novamente que apresentam forma muito similar aos resultados com o modelo de Mohr-Coulomb. No resultado da rodada *B*, é possível observar o surgimento de fraturas numéricas na região do Urganiano, que é esticada pelo cavalo. Nesse caso, as fraturas numéricas surgem na direção paralela à rampa de falha, enquanto que com Mohr-Coulomb as fraturas numéricas surgem na direção horizontal. Além disso, interpretações elevadas também ocorrem na região superior do cavalo (relativamente maiores que as manifestadas com Mohr-Coulomb).

Figura 49 – Comparação entre os resultados com o modelo de Drucker-Prager, em todas as rodadas de simulações (2000 metros).



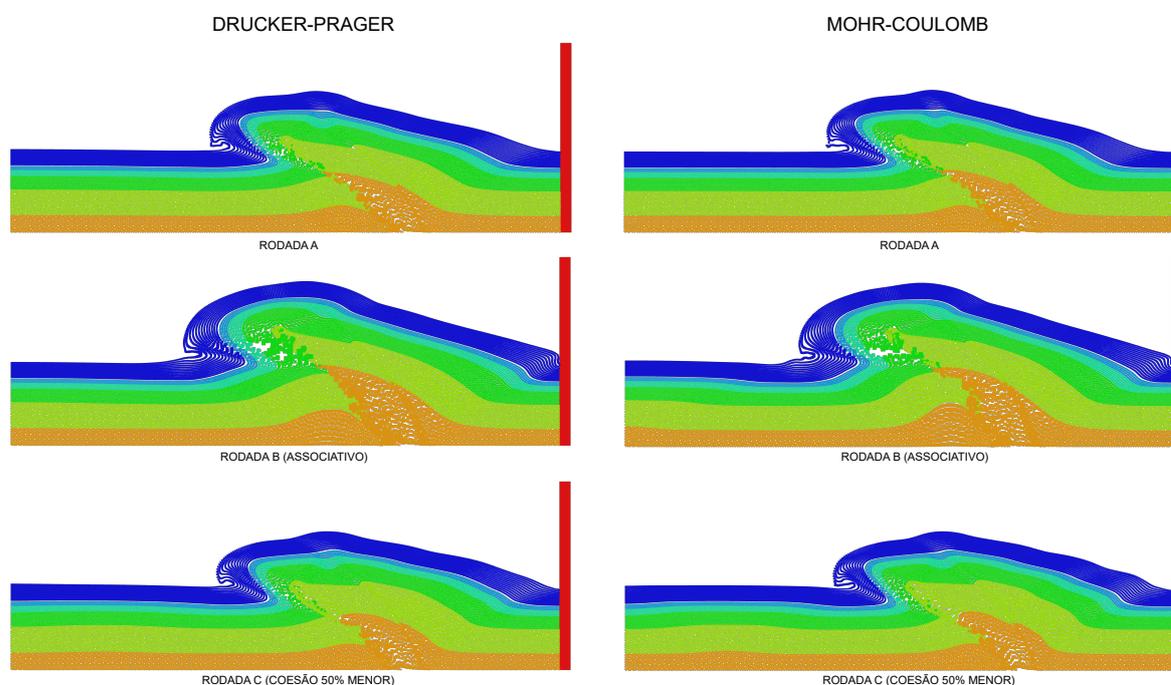
Fonte: Autor (2022).

Na simulação com menor coesão (rodada *C*), a geometria final obtida da anticlinal

apresenta as camadas superiores, localizadas no lado direito, mais suaves. No modelo de Mohr-Coulomb, essas camadas ficam levemente retorcidas (encarquilhadas), devido à menor coesão.

Para o modelo de von Mises, a rodada de simulações *B* não se aplica, e os resultados obtidos na rodada *C* apresentam o mesmo comportamento na rodada *A*. Logo, as mesmas considerações feitas anteriormente para a geometria e evolução da deformação da anticlinal na rodada *A* são aplicadas para os resultados obtidos na rodada *C*. A Figura 50, mostra a comparação, lado a lado, da geometria final obtida com os modelos de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb, em todas as rodadas de simulações.

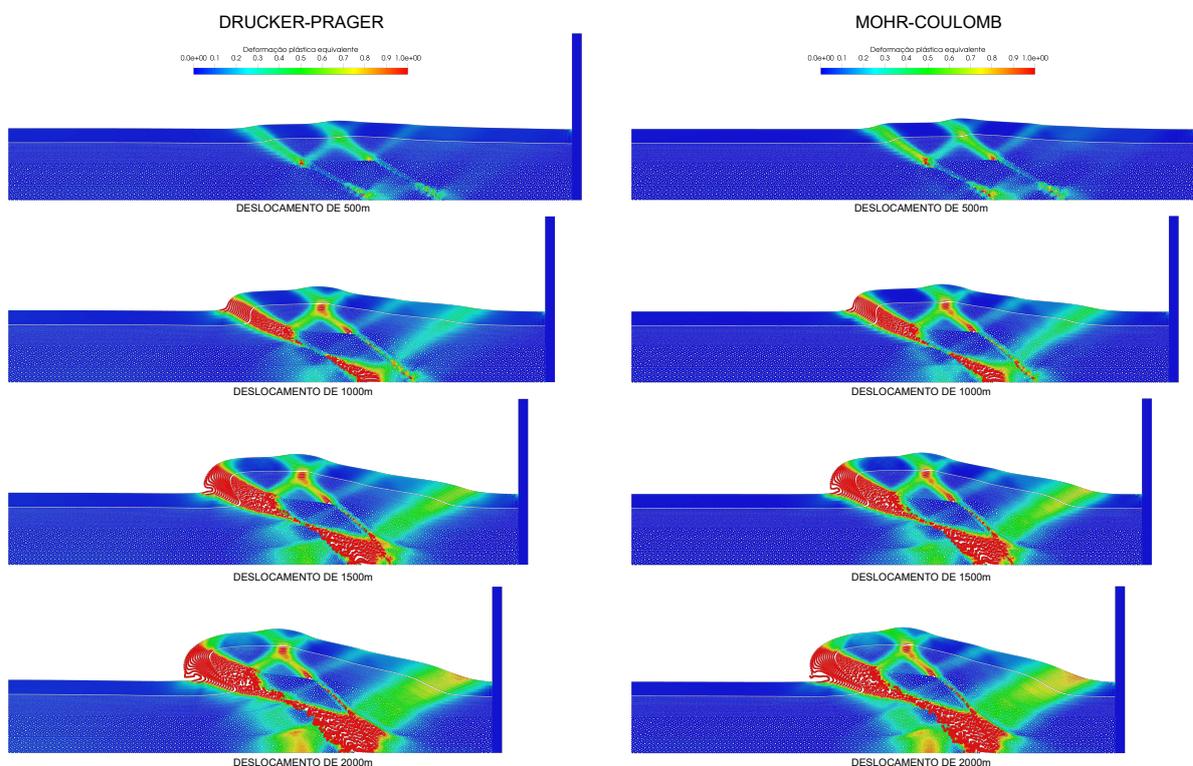
Figura 50 – Comparação entre os resultados com os modelos de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb, em todas as rodadas de simulações (2000 metros).



Fonte: Autor (2022).

A partir da Figura 51, é possível observar a evolução da deformação plástica equivalente, ao longo da simulação, com os modelos de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb. A escala de valores da deformação plástica equivalente varia de 0 (em azul) a 1 (em vermelho) e mostra que deformações permanentes ocorrem de maneira bastante semelhante para os dois modelos elasto-plásticos sensíveis à pressão hidrostática. Observa-se que à medida que o anteparo se move, deformações permanentes surgem na direção paralela às rampas de falha, aumentando gradualmente sua magnitude na rampa de falha da esquerda conforme o cavalo atravessa as camadas superiores. Além disso, deformações permanentes com magnitudes elevadas são desenvolvidas, em direção diagonal, na região do lado direito próxima ao anteparo (especificamente, possui direção aproximadamente perpendicular à direção das rampas de falha).

Figura 51 – Comparação da deformação plástica equivalente entre os resultados com os modelos de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb, na rodada *A* de simulação.



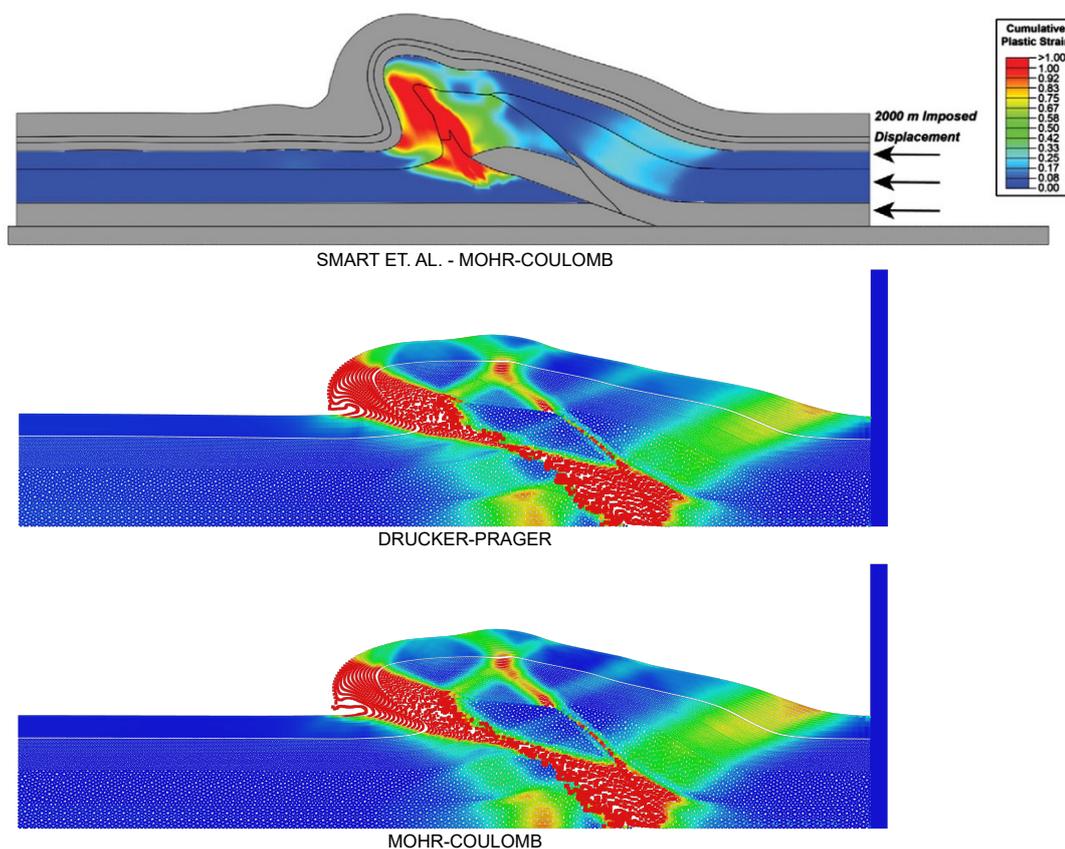
Fonte: Autor (2022).

A Figura 52 apresenta a comparação entre a geometria deformada final da anticlinal (aos 2000 metros), com o resultado de [Smart et al. \(2012\)](#) e os resultados com os modelos de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb (na rodada *A*). Aliado à comparação da geometria, [Smart et al. \(2012\)](#) mostram o gráfico de contorno da magnitude da deformação plástica equivalente somente para os intervalos Urgoniano e Hauteriviano. Assim, Drucker-Prager e Mohr-Coulomb são mostrados para o mesmo parâmetro e com a mesma escala de cores. De maneira semelhante aos resultados de [Smart et al. \(2012\)](#), deformações permanentes são formadas no lado direito, em direção diagonal, no início da inclinação da dobra. Nos resultados com Drucker-Prager e Mohr-Coulomb, deformação plástica equivalente com maiores magnitudes (em vermelho) ocorrem sobretudo no topo esquerdo da anticlinal e na base do cavalo. De outro modo, nos resultados de [Smart et al. \(2012\)](#), maiores magnitudes da deformação plástica equivalente se encontram na região inclinada (invertida) do Urgoniano e Hauteriviano.

Como explicado anteriormente, nas simulações com o MPM utiliza-se análise dinâmica. Como [Smart et al. \(2012\)](#) simularam utilizando análise quase estática, mudanças encontradas na geometria final da anticlinal são esperadas. A principal diferença entre as geometrias finais está no fato de que, na simulação de [Smart et al. \(2012\)](#), à medida em que o empurrão aumenta, a rampa começa a acomodar uma porção grande do cavalo e o crescimento da anticlinal é caracterizado principalmente pelo aumento de amplitude e não em comprimento.

Com Drucker-Prager e Mohr-Coulomb, a falha se propaga para as camadas superiores, causando aumento em amplitude e comprimento da anticlinal.

Figura 52 – Comparação entre os resultados de Smart et al. (2012) e os resultados com os modelos de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb, aos 2000 metros (rodada A).



Fonte: Autor (2022).

Ainda que todos os resultados obtidos não correspondam exatamente à geometria da anticlinal observada (Figura 42), foram capazes de reproduzir com semelhança sua forma e capturaram os aspectos essenciais do processo de deformação de dobras geradas por falhas de cavalgamento. Além disso, as simulações foram capazes de replicar, de forma geral, a assimetria da anticlinal Bargy, com as camadas superiores rotacionadas para a posição inversa. No entanto, nas simulações realizadas, a assimetria desenvolvida é mais acentuada.

Destaca-se que as simulações apresentadas aqui oferecem um ótimo complemento às análises em laboratório do processo de deformação de dobras criadas por falhas contracionais, como os experimentos em caixa de areia. Por fim, as fraturas numéricas e penetrações excessivas identificadas nos resultados obtidos na rodada B são fruto da discretização adotada durante a modelagem da aplicação. Logo, seriam eliminadas com uma modelagem com maior número de partículas por elemento e menor tamanho do elemento da malha de fundo.

5 CONCLUSÃO

No primeiro capítulo, foi apresentado o contexto histórico no qual este trabalho está inserido, destacando-se principalmente a importância dos modelos constitutivos, da modelagem numérica e da escolha do método numérico adequado na análise dos problemas geomecânicos. Além disso, o objetivo geral e os objetivos específicos foram listados, a metodologia adotada foi descrita e a delimitação do trabalho para a implementação dos modelos elasto-plásticos foi exposta.

O segundo capítulo apresentou a revisão bibliográfica sobre modelos constitutivos. Foi abordado primeiramente os conceitos básicos relacionados à modelagem constitutiva. A Teoria da Elasticidade Linear foi mostrada para o caso unidimensional (isotrópico), e em seguida para o caso mais generalizado (anisotrópico, em 3 dimensões). De forma semelhante, discorreu-se sobre o caso unidimensional da Teoria da Plasticidade, finalizando na generalização considerando deformações finitas a partir da introdução de taxas de tensões objetivas em sua formulação. Por fim, foram apresentados os critérios clássicos de escoamento (von Mises, Drucker-Prager e Mohr-Coulomb), e suas características.

O terceiro capítulo abordou a implementação numérica dos critérios clássicos de escoamento apresentados no Capítulo 2 e do modelo elástico linear. Primeiramente, o algoritmo de atualização das tensões foi detalhado. Em segundo lugar, foi exposto o algoritmo de integração do modelo elástico linear. Em seguida, destacou-se que a integração numérica dos modelos elasto-plásticos é dividida em duas etapas: na primeira, as tensões são atualizadas em uma tentativa elástica; na segunda, algoritmos de retorno são aplicados caso a primeira etapa tenha falhado. Com essa consideração, os algoritmos de integração para os modelos elasto-plásticos clássicos foram apresentados detalhadamente. Por fim, foi realizada uma implementação inicial, em linguagem MATLAB, com a consideração de deformações infinitesimais, para a realização de exemplos de verificação inicial dos modelos de von Mises e Drucker-Prager.

Os resultados dos problemas de verificação da implementação numérica de von Mises concordaram com os resultados obtidos pelo *software Abaqus CAE*, onde foi possível observar o comportamento do regime plástico com uma lei de endurecimento linear por partes a partir dos gráficos gerados no programa desenvolvido em MATLAB. Nos problemas de verificação do modelo de Drucker-Prager, os resultados encontrados também coincidiram com os resultados fornecidos nas simulações feitas no *Abaqus*. Para o modelo de Mohr-Coulomb, a implementação inicial foi realizada, no entanto exemplos de verificação não foram feitos pois a formulação implementada no *Abaqus* difere grandemente da implementação adotada neste trabalho.

De forma geral, os resultados encontrados com os algoritmos implementados em linguagem MATLAB foram satisfatórios e, apesar da implementação ter sido feita com a formulação da plasticidade com deformações infinitesimais, serviram como uma base para a implementação em linguagem C++, considerando a teoria apresentada no Capítulo 2 com

deformações finitas.

O Capítulo 4 mostrou a modelagem numérica e os resultados das simulações, com os modelos elasto-plásticos implementados, das aplicações escolhidas para este trabalho. Em um primeiro momento, conceitos de Geologia Estrutural sobre dobras e falhas foram introduzidos. Em especial, discorreu-se sobre a formação de dobras relacionadas a falhas contracionais, foco das aplicações. Assim, a aplicação 1 aborda a simulação de uma camada única submetida à flambagem, e a aplicação 2 apresenta a simulação de uma falha contracional em múltiplas camadas de rochas.

Para a aplicação 1, todas as simulações foram capazes de reproduzir com sucesso o processo de deformação de uma dobra de deslocamento. Foi possível observar a influência dos parâmetros que caracterizam a evolução da superfície de escoamento dos modelos constitutivos na geometria final obtida. Os modelos de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb apresentaram configurações bastante semelhantes. O modelo de von Mises, apesar de exibir maiores diferenças, também se mostrou capaz de simular dobras geradas por regimes contracionais.

Os resultados obtidos na aplicação 2 demonstraram, em primeiro lugar, a influência do modelo constitutivo na configuração final da dobra. O modelo de von Mises produziu dobras de deslocamento (sequência de anticlinais e sinclinais) que não correspondem à estrutura da anticlinal Bargy. Os modelos de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb conseguiram reproduzir com sucesso os aspectos mais gerais da geometria da anticlinal, como sua assimetria devido à rotação das camadas estratigráficas superiores. As simulações com fluxo plástico associativo provocaram aumento de amplitude da dobra, associada ao surgimento de fraturas numéricas e interpenetrações elevadas na região do Urgoniano. Redução na coesão de cada camada estratigráfica gerou pequenas mudanças na configuração final da dobra. Destaca-se que as simulações apresentaram uma maior assimetria em relação à anticlinal Bargy. Com Drucker-Prager e Mohr-Coulomb, deformações permanentes com magnitudes elevadas surgiram sobretudo no topo esquerdo da anticlinal e na base do cavalo, em direção diagonal.

As simulações apresentadas auxiliaram no entendimento das mudanças provocadas pelos diferentes modelos constitutivos e seus parâmetros na geometrias das dobras. Dessa forma, fica evidente que modelos geomecânicos bem elaborados, com condições de contorno, modelo constitutivo e parâmetros dos materiais bem definidos, são capazes de fornecer resultados que representam bem a geometria, de forma geral, de dobras contracionais.

Trabalhos futuros podem ser desenvolvidos visando análises quantitativas da tensão e deformação desenvolvidas nas camadas estratigráficas, ao longo da simulação. Além disso, recomenda-se o uso de técnicas para mitigar o desenvolvimento de fraturas numéricas, que contribuiriam para uma melhor resposta mecânica em materiais com alto ângulo de dilatância.

Referências

- AHRENS, J. P.; GEVECI, B.; LAW, C. C. Paraview: An end-user tool for large-data visualization. In: **The Visualization Handbook**. [S.l.]: Elsevier, 2005. ISBN 978-0123875822. Citado 2 vezes nas páginas 90 e 97.
- BARDENHAGEN, S. G.; KOBER, E. M. The generalized interpolation material point method. **Tech Science Press cmes**, v. 5, p. 477–495, 2004. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/publication/251850619>>. Citado na página 123.
- BATHE, K.-J. **Finite element procedures**. 2. ed. [S.l.]: Klaus-Jürgen Bathe, 2014. ISBN 9780979004957. Citado na página 44.
- BELYTSCHKO, T. et al. **Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures**. 2. ed. Wiley & Sons Ltd, 2014. Disponível em: <www.wiley.com/go/belytschko>. Citado 5 vezes nas páginas 21, 45, 52, 64 e 66.
- BRADY, B. H.; BROWN, E. T. **Rock mechanics: For underground mining**. 3. ed. [S.l.]: Springer, 2004. Citado na página 57.
- CHEN, W.-F.; HAN, D.-J. **Plasticity for Structural Engineers**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 56.
- CHEN, Z.; SCHREYER, H. L. **Formulation and Computational Aspects of Plasticity and Damage Models With Application to Quasi-Brittle Materials**. 1995. Citado na página 22.
- DAS, B. M.; SIVAKUGAN, N. **Introduction to Geotechnical Engineering**. 2. ed. [S.l.]: CENGAGE Learning, 2014. Citado na página 19.
- DAVIS, G. H.; REYNOLDS, S. J. **Structural geology of rocks and regions**. 2. ed. [S.l.]: Wiley & Sons Ltd, 1996. Citado na página 87.
- FERN, J. et al. **The Material Point Method for Geotechnical Engineering: A Practical Guide**. [S.l.]: CRC Press, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 119.
- FERNÁNDEZ, F. **Modelagem Numérica de Problemas Geotécnicos de Grandes Deformações Mediante o Método do Ponto Material**. Tese (Doutorado), 2020. Citado 3 vezes nas páginas 21, 22 e 26.
- FERNÁNDEZ, F.; VARGAS JR., E. do A. Considerações sobre o uso do mpm (material point method) na simulação numérica de processos de deformação em geologia estrutural. In: . [s.n.], 2018. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/publication/327183991>>. Citado 5 vezes nas páginas , 91, 95, 96 e 97.
- FOSSEN, H. **Geologia estrutural**. 2. ed. [S.l.]: São Paulo: Oficina dos textos, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 87, 88, 89 e 90.
- GEUZAINÉ, C.; REMACLE, J.-F. Gmsh: A 3-d finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 79, n. 11, p. 1309–1331, 2009. Citado na página 100.

- GOODMAN, R. E. **Introduction to Rock Mechanics**. 2. ed. [S.l.]: Wiley & Sons, 1989. Citado na página 20.
- GURTIN, M. E. **Introduction to Continuum Mechanics**. [S.l.]: Academic Press, 1981. v. 158. Citado na página 53.
- HOLTZ, R. D.; KOVACS, W. D. **An Introduction to Geotechnical Engineering**. [S.l.]: Prentice Hall, 1981. Citado na página 19.
- HUDSON, J. A.; HARRISON, J. P. **Engineering rock mechanics: An introduction to the principles**. 1. ed. [S.l.]: Elsevier Science Ltd, 1997. Citado na página 19.
- HUGHES, T. J. R.; WINGETS, J. Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 15, p. 1862–1867, 1980. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 65.
- JAEGER, J. C.; COOK, N. G. W.; ZIMMERMAN, R. W. **Fundamentals of Rock Mechanics**. 4. ed. [S.l.]: Blackwell Publishing Ltd, 2007. Citado na página 20.
- LAI, W. M.; RUBIN, D.; KREMPL, E. **Introduction to Continuum Mechanics**. 3. ed. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 1999. Citado na página 120.
- MASE, G. T.; MASE, G. E. **Continuum Mechanics for Engineers**. 2. ed. [S.l.]: CRC Press, 1999. 377 p. ISBN 0849318556. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 58.
- MURTHY, V. N. S. **Geotechnical Engineering: Principles and Practices of Soil Mechanics and Foundation Engineering**. [S.l.]: Marcel Dekker, Inc., 2002. Citado na página 20.
- OLIVER, X.; SARACIBAR, C. A. de. **Continuum Mechanics for Engineers Theory and Problems**. 2. ed. [S.l.: s.n.], 2017. Citado 6 vezes nas páginas 30, 31, 34, 35, 36 e 40.
- RAHMAN, M. S.; ÜLKER, M. B. C. **Modeling and computing for geotechnical engineering: An introduction**. [S.l.]: CRC Press, 2018. ISBN 9781498771672. Citado na página 20.
- SHAMES, I. H.; COZZARELLI, F. A. **Elastic and Inelastic Stress Analysis Revised Printing**. [S.l.]: CRC Press, 1997. Citado 6 vezes nas páginas 27, 28, 29, 31, 32 e 42.
- SIMO, J. C.; HUGHES, T. J. R. **Computational Inelasticity**. [S.l.]: Springer, 1998. v. 7. Citado 4 vezes nas páginas 22, 51, 52 e 65.
- SKEMPTON, A. W. A history of soil properties, 1717-1927. In: BALKEMA, A. A. (Ed.). [S.l.]: XI International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, 1985. p. 95–121. Citado na página 19.
- SMART, K. J. et al. Geomechanical modeling of stress and strain evolution during contractional fault-related folding. **Tectonophysics**, v. 576-577, p. 171–196, 11 2012. ISSN 00401951. Citado 9 vezes nas páginas , 97, 98, 99, 100, 101, 102, 111 e 112.
- SMITH, M. **ABAQUS/Standard User's Manual, Version 6.9**. United States: Dassault Systèmes Simulia Corp, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 79 e 99.
- SOUZA NETO, E. A. d.; PERIĆ, D.; OWEN, D. R. J. **Computational Methods for Plasticity: Theory and applications**. [S.l.]: Wiley & Sons Ltd, 2008. v. 1. Citado 13 vezes nas páginas 21, 22, 45, 46, 47, 48, 57, 59, 60, 61, 68, 71 e 80.

- SULSKY, D.; ZHOU, S.-J.; SCHREYER, H. L. Application of a particle-in-cell method to solid mechanics. **Computer Physics Communications**, v. 87, p. 236–252, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 119.
- SUPPE, J. **Principles of Structural Geology**. 1. ed. [S.l.]: Prentice-Hall, 1985. Citado na página 87.
- TURNER, J. P. et al. Geomechanics and geology: introduction. **Geological Society, London, Special Publications**, Geological Society of London, v. 458, n. 1, p. 1–5, 2017. Citado na página 19.
- VAUCORBEIL, A. de et al. **Material point method after 25 years: theory, implementation, applications**. 2019. Citado na página 123.
- ZHANG, X.; CHEN, Z.; LIU, Y. **The Material Point Method: A Continuum-Based Particle Method for Extreme Loading Cases**. [S.l.]: Elsevier, 2017. Citado 7 vezes nas páginas 22, 51, 52, 66, 120, 121 e 123.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. **The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals**. 6. ed. [S.l.]: Elsevier, 2005. ISBN 1865843830. Citado na página 43.

Apêndices

APÊNDICE A – MÉTODO DOS PONTOS MATERIAIS

A.1 Equações governantes

O Método dos Pontos Materiais foi originalmente desenvolvido por [Sulsky, Zhou e Schreyer \(1995\)](#) como uma extensão do *Fluid Implicit Particle method* (FLIP). O MPM resolve a equação de conservação do momento para corpos contínuos, e sua formulação é similar ao Método dos Elementos Finitos (MEF). Em seu procedimento de solução, o MPM discretiza todo o domínio do problema em elementos finitos, onde as equações de movimento serão solucionadas. Além disso, o domínio material é discretizado em um conjunto de partículas, chamadas pontos materiais, que se movem através da malha de elementos finitos, carregando todas as informações necessárias com elas (massa, momento, energia, tensão e deformação), de modo que suas posições são atualizadas, evitando possíveis problemas de distorção causados pela malha de elementos finitos.

Por este motivo, o MPM tem sido utilizado para simular uma variedade de problemas que envolvem grandes deformações, isto inclui os problemas geomecânicos. Dentre os problemas geomecânicos, pode-se citar: estabilidade de taludes, escorregamentos de terra, capacidade de carga de fundações, ruptura de barragens, falhas e fraturas em maciços rochosos, escavação e estabilidade de poços de petróleo, para citar alguns ([FERN et al., 2019](#)).

As equações que governam o comportamento de um corpo contínuo são chamadas de equações governantes. As equações governantes devem ser satisfeitas em qualquer situação, são elas: conservação de massa, conservação de momento e energia, equações cinemáticas, modelos constitutivos e as condições de contorno e iniciais. Os modelos constitutivos foram apresentados no Capítulo 2 e sua implementação numérica detalhada no Capítulo 3. Aqui, apresentaremos brevemente as equações governantes utilizadas para a modelagem numérica do MPM.

Antes, vale a pena revisar alguns conceitos da mecânica do contínuo. O domínio $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^3$ representa o estado inicial do contínuo no instante t^0 , com as coordenadas na configuração inicial Ω_0 representadas pelo vetor \mathbf{X} . O domínio do contínuo representado por Ω indica a configuração deformada no instante t^f , com as coordenadas da configuração deformada representadas pelo vetor \mathbf{x} . O contorno do domínio do contínuo é formado pela união de dois subdomínios $\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_t$, onde $\partial\Omega_u$ indica o subdomínio onde deslocamentos são prescritos e $\partial\Omega_t$ indica o subdomínio onde trações são prescritas.

O deslocamento de um ponto de um corpo contínuo é definido como a diferença vetorial entre a sua posição na configuração final e inicial, definido da seguinte forma:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (\text{A.1})$$

A aceleração \mathbf{a} e velocidade \mathbf{v} de um ponto do corpo são definidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{D}{Dt}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{v} &= \frac{D}{Dt}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t),\end{aligned}\tag{A.2}$$

onde D/Dt indica a derivada material das quantidades consideradas (LAI; RUBIN; KREML, 1999). Com essa breve revisão da mecânica do contínuo, descreveremos sucintamente as equações governantes. A conservação da massa é automaticamente tratada na formulação do MPM, já que cada partícula recebe uma massa que é fixa durante toda a simulação. A equação da conservação da massa é dada por (ZHANG; CHEN; LIU, 2017):

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v},\tag{A.3}$$

onde ρ é a densidade do corpo. A equação da conservação do momento é descrita pela seguinte equação:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{b},\tag{A.4}$$

onde \mathbf{b} indica a força de corpo e $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor de tensões de Cauchy. A equação de conservação de energia, desconsiderando fonte de calor e o fluxo de calor no meio, toma a seguinte forma:

$$\rho \frac{Dr}{Dt} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \boldsymbol{\sigma},\tag{A.5}$$

onde r é a energia interna por unidade de massa e $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ é o tensor taxa de deformação. As condições de contorno são definidas pela seguinte expressão:

$$\begin{cases} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma})|_{\partial\Omega_t} &= \bar{\mathbf{t}} \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega_u} &= \bar{\mathbf{u}} \end{cases},\tag{A.6}$$

onde $\bar{\mathbf{t}}$ e $\bar{\mathbf{u}}$ são a tração de superfície prescrita e os deslocamentos prescritos, respectivamente. Além disso, \mathbf{n} é o vetor normal à superfície do domínio. Por fim, as condições iniciais são:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) &= \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0) &= \mathbf{v}_0, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t_0) &= \boldsymbol{\sigma}_0,\end{aligned}\tag{A.7}$$

onde \mathbf{u}_0 , \mathbf{v}_0 e $\boldsymbol{\sigma}_0$ são funções conhecidas.

A.2 Forma fraca da equação de conservação do momento

A equação de conservação do momento é utilizada para se obter as equações de movimento do contínuo. No entanto, a discretização da Equação A.4 é muito complicada e costuma-se estabelecer uma forma fraca, da mesma forma como para o MEF. A forma fraca é

obtida quando multiplicamos a Equação A.4 por uma função peso arbitrária ω e integramos no domínio Ω , obtendo a seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} \omega \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} d\Omega = \int_{\Omega} \omega \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \omega \rho \mathbf{b} d\Omega. \quad (\text{A.8})$$

Manipulando a equação anterior, chegamos à forma fraca da equação de conservação do momento linear, dada pela seguinte equação:

$$\int_{\Omega} \omega \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\Omega = \int_{\partial\Omega_i} \omega \cdot \bar{\mathbf{t}} dS + \int_{\Omega} \omega \rho \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \omega \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega, \quad (\text{A.9})$$

onde dS indica integral sobre uma área. Nota-se na equação anterior que o termo $\partial \mathbf{v} / \partial t$ trata-se de uma derivada parcial no tempo, obtido pela simplificação ao utilizar a descrição Lagrangiana, isto é, o termo convectivo é eliminado (ZHANG; CHEN; LIU, 2017).

A.3 Discretização do Método dos Pontos Materiais

Para discretizar a forma fraca da equação de conservação do momento no MPM, o domínio completo do problema é discretizado em uma malha de fundo de elementos finitos. Utilizamos a malha de fundo para aproximar qualquer função $\phi(\mathbf{x})$ utilizando as mesmas funções de forma do MEF, como mostra a equação a seguir:

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_n} \phi^i N_i(\mathbf{x}), \quad (\text{A.10})$$

onde n_n é o número de nós da malha de fundo, o sobrescrito i denota o valor nodal de $\phi(\mathbf{x})$ e $N_i(\mathbf{x})$ é a função de forma do i -ésimo nó. Além disso, como a massa do domínio é concentrada nos pontos materiais, a densidade é aproximada por um somatório das massas dos pontos materiais, utilizando a seguinte equação:

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_p^{n_p} m_p \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p), \quad (\text{A.11})$$

em que n_p é o número total de partículas (pontos materiais), m_p é a massa do ponto material e δ é a função delta de Dirac, avaliada na posição do ponto material dada por \mathbf{x}_p . Dessa forma, resolvendo a Equação A.9 com as aproximações dadas pelas Equações A.10 e A.11, chegamos à equação simplificada da forma fraca discretizada utilizando Método dos Pontos Materiais:

$$\mathbf{M}_e \mathbf{a}_e = \mathbf{f}_e^{int} + \mathbf{f}_e^{ext}, \quad (\text{A.12})$$

onde $\mathbf{M}_e = \sum_{p=1}^{n_p} m_p N_e(\mathbf{x}_p)$ é a matriz de massa reduzida; e os termos \mathbf{f}_e^{int} e \mathbf{f}_e^{ext} são os vetores de forças externas e internas associados ao elemento e , respectivamente. Os vetores de forças externas e internas são definidos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_e^{int} &= - \sum_{p=1}^{n_p} V_p \boldsymbol{\sigma}_p^s(\mathbf{x}_p, t) \cdot \nabla N_e(\mathbf{x}_p, t), \\
\mathbf{f}_e^{ext} &= \sum_{p=1}^{n_p} m_p \mathbf{b}(\mathbf{x}_p, t) N_e(\mathbf{x}_p) + \int_{\partial\Omega_t} N_e(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t) dS,
\end{aligned} \tag{A.13}$$

em que V_p é o volume da partícula, $\boldsymbol{\sigma}_p^s = \boldsymbol{\sigma}/\rho$ é a tensão específica e $\nabla N_e(\mathbf{x}_p)$ é o gradiente da função de forma avaliada na posição do ponto material \mathbf{x}_p .

A.4 Considerações finais

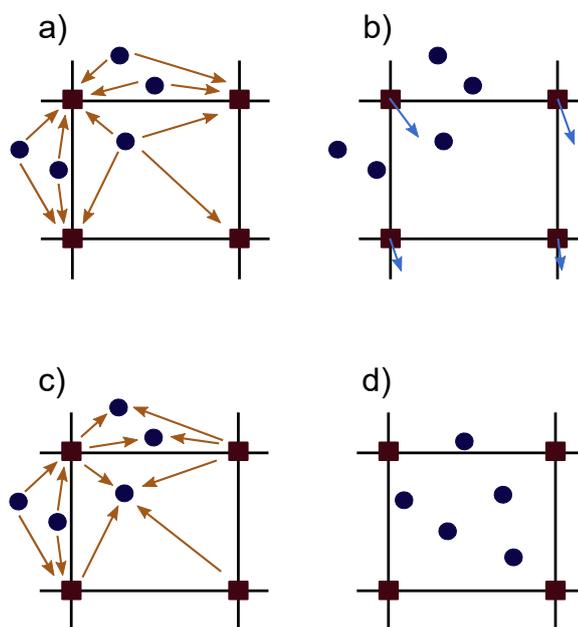
Para resolver numericamente a Equação A.12, é necessário aplicar um algoritmo de integração temporal. No MPM, é comum a utilização de métodos explícitos de integração, onde encontra-se o estado atualizado no instante t^{k+1} a partir do estado atual no instante t^k . No entanto, é importante destacar que, independente do algoritmo utilizado, o procedimento de solução de um problema no MPM envolve resolver os seguintes 4 passos para cada passo de tempo:

- (a) Mapeamento das quantidades de interesse (massa e momento, por exemplo) das partículas para o nós da malha de fundo (Figura 53a);
- (b) Cálculo das forças e acelerações nodais (Figura 53b);
- (c) Mapeamento das acelerações nodais, e outras quantidades de interesse, caso necessário, dos nós para as partículas (Figura 53c);
- (d) Atualização do estado dos pontos materiais (Figura 53d).

Na Figura 53, setas laranjas indicam quantidades sendo mapeadas das partículas para os nós (ou ao contrário) e setas azuis indicam valores de velocidades nodais fictícios. Além disso, para garantir a convergência do algoritmo de integração, é necessário adotar incrementos de tempo Δt pequenos. Logo, surge a necessidade de estabelecer um intervalo de tempo crítico (Δt_{ctr}), de modo que o incremento de tempo atual seja menor ou igual a esse valor estabelecido ($\Delta t \leq \Delta t_{ctr}$). Na prática, o incremento de tempo crítico é função do tamanho do elemento da malha (Δx) e da velocidade da propagação do som (c) no material simulado, matematicamente:

$$\Delta t_{ctr} = \frac{\Delta x}{c}, \quad c = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}. \tag{A.14}$$

Figura 53 – Esquema do procedimento de solução do MPM para um único passo de tempo.



Fonte: Autor (2022).

Utilizou-se uma extensão do MPM, denominada *Generalized Interpolation Material Point*, GIMP (BARDENHAGEN; KOBER, 2004). No GIMP, as partículas sempre ocupam um volume não nulo definido no espaço, resolvendo alguns problemas de passagem de uma partícula de um elemento para outro, presentes na implementação original do MPM. Especificamente, no GIMP as partículas são definidas a partir de funções características $\chi_p(\mathbf{x})$, resultando em funções de forma modificadas que são utilizadas na etapa de mapeamento (VAUCORBEIL et al., 2019).

Destaca-se que os conceitos aqui tratados foram apresentados de forma resumida, e para um entendimento mais aprofundado sobre a formulação do MPM recomenda-se a leitura de Zhang, Chen e Liu (2017). Em conclusão, para realizar as simulações com o MPM, este trabalho utilizou um *framework* de MPM desenvolvido pelos pesquisadores do Laboratório de Computação Científica e Visualização da UFAL. Os modelos constitutivos foram implementados em linguagem C++ e incorporados ao módulo de análise computacional, possibilitando o uso nas aplicações que serão abordadas.

APÊNDICE B – ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO DOS MODELOS ELASTO-PLÁSTICOS

Algoritmo 1: Integração do modelo elástico linear

- (i) Dado o incremento de deformação $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, calcular a taxa desviadora de deformação $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d$ e a taxa volumétrica de deformação $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v$, no instante $t^{k+1/2}$:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^{k+1/2} &= \text{tr} \left[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{k+1/2} \right] = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{xx}^{k+1/2} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{yy}^{k+1/2} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{zz}^{k+1/2}, \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^{k+1/2} &= \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{k+1/2} - \frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^{k+1/2}}{3} \mathbf{I};\end{aligned}\tag{B.1}$$

- (ii) Calcular o tensor desviador de tensão $\underline{\boldsymbol{s}}^k$ para incluir a influência das rotações:

$$\underline{\boldsymbol{s}}^k = \boldsymbol{s}^k + \left[\boldsymbol{s}^k (\mathbf{W}^{k+1/2})^T + \mathbf{W}^{k+1/2} \boldsymbol{s}^k \right] \Delta t;\tag{B.2}$$

- (iii) Atualizar o tensor desviador de tensão \boldsymbol{s} :

$$\boldsymbol{s}^{k+1} = \underline{\boldsymbol{s}}^k + 2G\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^{k+1/2} \Delta t;\tag{B.3}$$

- (iv) Atualizar a parte hidrostática do tensor de tensões:

$$p^{k+1} = p^k + K\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^{k+1/2} \Delta t;\tag{B.4}$$

- (v) Integrar as partes desviadora e hidrostática para compor o tensor de tensões de Cauchy:

$$\boldsymbol{\sigma}^{k+1} = \boldsymbol{s}^{k+1} + p^{k+1} \mathbf{I}.\tag{B.5}$$

Algoritmo 2: Integração do modelo de von Mises

- (i) **Preditor elástico.** A partir do Algoritmo 1, computar a tentativa do seguinte estado elástico:

$$\begin{aligned}
 \bar{\varepsilon}_p^{k+1} &= \bar{\varepsilon}_p^k, \\
 p^{k+1} &= p^{k+1,\text{tent}}, \\
 \mathbf{s}^{k+1} &= \mathbf{s}^{k+1,\text{tent}}, \\
 q^{k+1,\text{tent}} &= \sqrt{3J_2(\mathbf{s}^{k+1,\text{tent}})};
 \end{aligned}
 \tag{B.6}$$

- (ii) Checar condição de admissibilidade plástica:

$$\begin{aligned}
 \text{SE } q^{k+1,\text{tent}} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_p^k) \leq 0, \text{ ENTÃO:} \\
 \boldsymbol{\varepsilon}^{k+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}^k + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k+1}, \\
 \boldsymbol{\sigma}^{k+1} &= \mathbf{s}^{k+1,\text{tent}} + p^{k+1,\text{tent}} \mathbf{I} = \boldsymbol{\sigma}^{k+1,\text{tent}}, \\
 \bar{\varepsilon}_p^{k+1} &= \bar{\varepsilon}_p^{k+1,\text{tent}} = \bar{\varepsilon}_p^k, \text{ SAIR;} \\
 \text{SE NÃO:}
 \end{aligned}
 \tag{B.7}$$

- (iii) **Algoritmo de retorno.** Resolver a equação do multiplicador plástico:

$$\begin{aligned}
 \text{DEFINA } i &= 0; \\
 \text{ENQUANTO } i &< n_{\text{pares}} : \\
 \Delta\gamma^{k+1} &= \frac{q^{k+1,\text{tent}} - \sigma_{y,i} - H_i(\bar{\varepsilon}_p^k - \bar{\varepsilon}_{p,i})}{3G + H_i}, \\
 \bar{\varepsilon}_p^{k+1} &= \bar{\varepsilon}_p^k + \Delta\gamma^{k+1}; \\
 \text{SE } \bar{\varepsilon}_{p,i} &< \bar{\varepsilon}_p^{k+1} \leq \bar{\varepsilon}_{p,i+1}, \text{ ENTÃO:}
 \end{aligned}
 \tag{B.8}$$

- (iv) Atualizar as variáveis de estado utilizando $\Delta\gamma^{k+1}$ encontrado:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon}^{k+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}^k + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{k+1}, \\
 \mathbf{s}^{k+1} &= \left(1 - \frac{\Delta\gamma^{k+1}3G}{q^{k+1,\text{tent}}}\right) \mathbf{s}^{k+1,\text{tent}}, \\
 \boldsymbol{\sigma}^{k+1} &= \mathbf{s}^{k+1} + p^{k+1,\text{tent}} \mathbf{I}, \\
 \bar{\varepsilon}_p^{k+1} &= \bar{\varepsilon}_p^k + \Delta\gamma^{k+1}, \text{ SAIR.}
 \end{aligned}
 \tag{B.9}$$

Algoritmo 3: Integração do modelo de Drucker-Prager

- (i) **Preditor elástico.** A partir do Algoritmo 1, computar a tentativa do seguinte estado elástico:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_p^{k+1} &= \bar{\varepsilon}_p^k, \\ p^{k+1} &= p^{k+1,\text{tent}}, \\ \mathbf{s}^{k+1} &= \mathbf{s}^{k+1,\text{tent}},\end{aligned}\tag{B.10}$$

- (ii) Checar condição de admissibilidade plástica:

$$\begin{aligned}\text{SE } \sqrt{J_2(\mathbf{s}^{k+1,\text{tent}})} + \eta p^{k+1,\text{tent}} - \xi_C (\bar{\varepsilon}_p^{k+1,\text{tent}}) \leq 0, \text{ ENTÃO:} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{k+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}^k + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{k+1}, \\ \boldsymbol{\sigma}^{k+1} &= \mathbf{s}^{k+1,\text{tent}} + p^{k+1,\text{tent}} \mathbf{I} = \boldsymbol{\sigma}^{k+1,\text{tent}}, \\ \bar{\varepsilon}_p^{k+1} &= \bar{\varepsilon}_p^{k+1,\text{tent}} = \bar{\varepsilon}_p^k, \text{ SAIR;}\end{aligned}\tag{B.11}$$

SE NÃO:

- (iii) **Algoritmo de retorno.** Retorno para a porção suave do cone:

$$\text{IR PARA: Algoritmo 4;}\tag{B.12}$$

- (iv) Checar se o retorno para a porção suave é válido:

$$\begin{aligned}\text{SE } \sqrt{J_2(\mathbf{s}^{k+1,\text{tent}})} - G \Delta \gamma^{k+1} \geq 0, \text{ ENTÃO:} \\ \text{Retorno válido - IR PARA: item (vi);}\end{aligned}\tag{B.13}$$

SE NÃO:

- (v) Retorno para o ápice do cone:

$$\text{IR PARA: Algoritmo 5;}\tag{B.14}$$

- (vi) Atualizar a deformação:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{k+1} = \boldsymbol{\varepsilon}^k + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{k+1}, \text{ SAIR.}\tag{B.15}$$

Algoritmo 4: Retorno para a porção suave do cone de Drucker-Prager

- (i) **DEFINA** $i = 0$;
 (ii) **ENQUANTO** $i < n_{\text{pares}}$:

$$\Delta\gamma^{k+1} = \frac{\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{k+1,\text{tent}})} + \eta p^{k+1,\text{tent}} - \xi [c_i + H_i (\bar{\varepsilon}_p^k - \bar{\varepsilon}_{p,i})]}{G + \xi^2 H_i + K \eta \bar{\eta}},$$

$$\bar{\varepsilon}_p^{k+1} = \bar{\varepsilon}_p^k + \Delta\gamma^{k+1} \xi;$$
(B.16)

SE $\bar{\varepsilon}_{p,i} < \bar{\varepsilon}_p^{k+1} \leq \bar{\varepsilon}_{p,i+1}$, **ENTÃO**:

- (iii) Atualizar o estado utilizando $\Delta\gamma^{k+1}$ encontrado:

$$\bar{\varepsilon}_p^{k+1} = \bar{\varepsilon}_p^k + \Delta\gamma^{k+1} \xi,$$

$$p^{k+1} = p^{k+1,\text{tent}} - K \bar{\eta} \Delta\gamma^{k+1},$$

$$\mathbf{s}^{k+1} = \left(1 - \frac{G \Delta\gamma^{k+1}}{\sqrt{J_2(\mathbf{s}^{k+1,\text{tent}})}} \right) \mathbf{s}^{k+1,\text{tent}};$$
(B.17)

- (iv) **IR PARA:** item (iv) do Algoritmo 3.
-

Algoritmo 5: Retorno para o ápice do cone de Drucker-Prager

- (i) **DEFINA** $i = 0$, $\alpha = \xi/\bar{\eta}$, $\beta = \xi/\eta$;
 (ii) **ENQUANTO** $i < n_{\text{pares}}$:

$$\Delta\varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1} = \frac{p^{k+1,\text{tent}} - \beta [c_i + H_i (\bar{\varepsilon}_p^k - \bar{\varepsilon}_{p,i})]}{\alpha \beta H_i + K},$$

$$\bar{\varepsilon}_p^{k+1} = \bar{\varepsilon}_p^k + \alpha \Delta\varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1};$$
(B.18)

SE $\bar{\varepsilon}_{p,i} < \bar{\varepsilon}_p^{k+1} \leq \bar{\varepsilon}_{p,i+1}$, **ENTÃO**:

- (iii) Atualizar o estado utilizando $\Delta\varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1}$ encontrado:

$$\bar{\varepsilon}_p^{k+1} = \bar{\varepsilon}_p^k + \alpha \Delta\varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1},$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{k+1} = (p^{k+1,\text{tent}} - K \Delta\varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1}) \mathbf{I};$$
(B.19)

- (iv) **IR PARA:** item (vi) do Algoritmo 3.
-

Algoritmo 6: Integração do modelo de Mohr-Coulomb

- (i) **Preditor elástico.** A partir do Algoritmo 1, computar a tentativa do seguinte estado elástico:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_p^{k+1} &= \bar{\varepsilon}_p^k, \\ \boldsymbol{\sigma}^{k+1,\text{tent}} &= \boldsymbol{s}^{k+1,\text{tent}} + p^{k+1,\text{tent}} \mathbf{I};\end{aligned}\quad (\text{B.20})$$

- (ii) Decomposição das tensões elásticas. As tensões principais ($\sigma_i^{k+1,\text{tent}}$) e direções principais (\mathbf{e}_i) são calculadas:

$$\sigma_1^{k+1,\text{tent}} \geq \sigma_2^{k+1,\text{tent}} \geq \sigma_3^{k+1,\text{tent}} \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_i \quad (i = 1,2,3); \quad (\text{B.21})$$

- (iii) Checar condição de admissibilidade plástica:

SE:

$$\sigma_1^{k+1,\text{tent}} - \sigma_3^{k+1,\text{tent}} + \left(\sigma_1^{k+1,\text{tent}} + \sigma_3^{k+1,\text{tent}} \right) \sin \phi - 2c \left(\bar{\varepsilon}_p^k \right) \cos \phi \leq 0,$$

ENTÃO:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{k+1} = \boldsymbol{\varepsilon}^k + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{k+1},$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}^{k+1,\text{tent}},$$

$$\bar{\varepsilon}_p^{k+1} = \bar{\varepsilon}_p^{k+1,\text{tent}} = \bar{\varepsilon}_p^k, \quad \text{SAIR};$$

SE NÃO:

(B.22)

- (iv) **Algoritmo de retorno.** Retorno para a porção suave do plano principal:

$$\text{IR PARA: Algoritmo 7;} \quad (\text{B.23})$$

- (v) Checar se o retorno para a porção suave é válido:

$$\text{SE } \sigma_1^{k+1} \geq \sigma_2^{k+1} \geq \sigma_3^{k+1}, \quad \text{ENTÃO:}$$

$$\text{Retorno válido - IR PARA: item (ix);} \quad (\text{B.24})$$

SE NÃO:

- (vi) Retorno para o vértice (1) ou (2):

$$\text{IR PARA: Algoritmo 8;} \quad (\text{B.25})$$

- (vii) Checar se o retorno para o vértice (1) ou (2) é válido:

$$\text{SE } \sigma_1^{k+1} \geq \sigma_2^{k+1} \geq \sigma_3^{k+1}, \quad \text{ENTÃO:}$$

$$\text{Retorno válido - IR PARA: item (ix);} \quad (\text{B.26})$$

SE NÃO:

// CONTINUA...

(viii) Retorno para o ápice do cone:

IR PARA: Algoritmo 9; (B.27)

(ix) Montagem do tensor de tensões atualizado e atualização da deformação:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^{k+1} &= \sum_{i=1}^3 \sigma_i^{k+1} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{k+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}^k + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{k+1}, \quad \mathbf{SAIR}.\end{aligned}\quad (\text{B.28})$$

Algoritmo 7: Retorno para a porção suave do plano principal da pirâmide de Mohr-Coulomb

(i) **DEFINA:**

$$\begin{aligned}i &= 0, \\ a &= 4G \left(1 + \frac{1}{3} \sin \phi \sin \psi\right) + 4K \sin \phi \sin \psi;\end{aligned}\quad (\text{B.29})$$

(ii) **ENQUANTO** $i < n_{\text{pares}}$:

$$\Delta \gamma^{k+1} = \frac{\sigma_1^{k+1, \text{tent}} - \sigma_3^{k+1, \text{tent}} + \left(\sigma_1^{k+1, \text{tent}} + \sigma_3^{k+1, \text{tent}}\right) \sin \phi - 2 \cos \phi \left[c_i + \left(\bar{\varepsilon}_p^k - \bar{\varepsilon}_{p,i}\right) H_i\right]}{a + 4H_i \cos^2 \phi}, \quad (\text{B.30})$$

$$\bar{\varepsilon}_p^{k+1} = \bar{\varepsilon}_p^k + 2 \cos(\phi) \Delta \gamma^{k+1};$$

SE $\bar{\varepsilon}_{p,i} < \bar{\varepsilon}_p^{k+1} \leq \bar{\varepsilon}_{p,i+1}$, **ENTÃO:**

(iii) Atualizar o estado utilizando $\Delta \gamma^{k+1}$ encontrado:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_p^{k+1} &= \bar{\varepsilon}_p^k + 2 \cos(\phi) \Delta \gamma^{k+1}, \\ \sigma_1^{k+1} &= \sigma_1^{k+1, \text{tent}} - \Delta \gamma^{k+1} \left[2G \left(1 + \frac{1}{3} \sin \psi\right) + 2K \sin \psi\right], \\ \sigma_2^{k+1} &= \sigma_2^{k+1, \text{tent}} + \Delta \gamma^{k+1} \left(\frac{4}{3}G - 2K\right) \sin \psi, \\ \sigma_3^{k+1} &= \sigma_3^{k+1, \text{tent}} + \Delta \gamma^{k+1} \left[2G \left(1 - \frac{1}{3} \sin \psi\right) - 2K \sin \psi\right];\end{aligned}\quad (\text{B.31})$$

(iv) **IR PARA:** item (v) do Algoritmo 6.

Algoritmo 8: Retorno para o vértice (1) ou (2)(i) **DEFINA:** (B.32)

$$i = 0,$$

$$a = 4G \left(1 + \frac{1}{3} \sin \phi \sin \psi\right) + 4K \sin \phi \sin \psi, \quad (B.33)$$

$$\sigma_a = \sigma_1^{k+1, \text{tent}} - \sigma_3^{k+1, \text{tent}} + \left(\sigma_1^{k+1, \text{tent}} + \sigma_3^{k+1, \text{tent}}\right) \sin \phi,$$

$$S = (1 - \sin \psi) \sigma_1^{k+1, \text{tent}} - 2\sigma_2^{k+1, \text{tent}} + (1 + \sin \psi) \sigma_3^{k+1, \text{tent}};$$

SE $S > 0$ – Retorno para o vértice (2) – **DEFINA:** (B.34)

$$b = 2G \left(1 + \sin \phi + \sin \psi - \frac{1}{3} \sin \phi \sin \psi\right) + 4K \sin \phi \sin \psi, \quad (B.35)$$

$$\sigma_b = \sigma_1^{k+1, \text{tent}} - \sigma_2^{k+1, \text{tent}} + \left(\sigma_1^{k+1, \text{tent}} + \sigma_2^{k+1, \text{tent}}\right) \sin \phi;$$

SE NÃO – Retorno para o vértice (1) – **DEFINA:** (B.36)

$$b = 2G \left(1 - \sin \phi - \sin \psi - \frac{1}{3} \sin \phi \sin \psi\right) + 4K \sin \phi \sin \psi, \quad (B.37)$$

$$\sigma_b = \sigma_2^{k+1, \text{tent}} - \sigma_3^{k+1, \text{tent}} + \left(\sigma_2^{k+1, \text{tent}} + \sigma_3^{k+1, \text{tent}}\right) \sin \phi;$$

(ii) **ENQUANTO** $i < n_{\text{pares}}$:

$$\Delta\gamma_a^{k+1} = \frac{4H_i (\sigma_a - \sigma_b) \cos^2 \phi - 2 \cos \phi (a - b) [c_i + (\bar{\varepsilon}_p^k - \bar{\varepsilon}_{p,i}) H_i] + a\sigma_a - b\sigma_b}{(a - b) (8H_i \cos^2 \phi + a + b)},$$

$$\Delta\gamma_b^{k+1} = \frac{-4H_i (\sigma_a - \sigma_b) \cos^2 \phi - 2 \cos \phi (a - b) [c_i + (\bar{\varepsilon}_p^k - \bar{\varepsilon}_{p,i}) H_i] + a\sigma_b - b\sigma_a}{(a - b) (8H_i \cos^2 \phi + a + b)}, \quad (B.38)$$

$$\bar{\varepsilon}_p^{k+1} = \bar{\varepsilon}_p^k + 2 \cos \phi (\Delta\gamma_a^{k+1} + \Delta\gamma_b^{k+1});$$

SE $\bar{\varepsilon}_{p,i} < \bar{\varepsilon}_p^{k+1} \leq \bar{\varepsilon}_{p,i+1}$, **ENTÃO:**(iii) Atualizar o estado utilizando $\Delta\gamma_a^{k+1}$ e $\Delta\gamma_b^{k+1}$ encontrado:

$$\bar{\varepsilon}_p^{k+1} = \bar{\varepsilon}_p^k + 2 \cos \phi (\Delta\gamma_a^{k+1} + \Delta\gamma_b^{k+1}),$$

SE $S > 0$ – Encontra-se no vértice (2) :

$$\sigma_1^{k+1} = \sigma_1^{k+1, \text{tent}} - (\Delta\gamma_a^{k+1} + \Delta\gamma_b^{k+1}) [2G (1 + \frac{1}{3} \sin \psi) + 2K \sin \psi],$$

$$\sigma_2^{k+1} = \sigma_2^{k+1, \text{tent}} + \Delta\gamma_a^{k+1} \left(\frac{4}{3}G - 2K\right) \sin \psi + \Delta\gamma_b^{k+1} [2G (1 - \frac{1}{3} \sin \psi) - 2K \sin \psi], \quad (B.39)$$

// CONTINUA...

$$\begin{aligned}\sigma_3^{k+1} &= \sigma_3^{k+1,\text{tent}} + \Delta\gamma_a^{k+1} [2G (1 - \frac{1}{3} \sin \psi) - 2K \sin \psi] \\ &\quad + \Delta\gamma_b^{k+1} (\frac{4}{3}G - 2K) \sin \psi;\end{aligned}$$

SE NÃO – Encontra-se no vértice (1) :

$$\begin{aligned}\sigma_1^{k+1} &= \sigma_1^{k+1,\text{tent}} - \Delta\gamma_a^{k+1} [2G (1 + \frac{1}{3} \sin \psi) + 2K \sin \psi] \\ &\quad + \Delta\gamma_b^{k+1} (\frac{4}{3}G - 2K) \sin \psi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_2^{k+1} &= \sigma_2^{k+1,\text{tent}} + \Delta\gamma_a^{k+1} (\frac{4}{3}G - 2K) \sin \psi \\ &\quad - \Delta\gamma_b^{k+1} [2G (1 + \frac{1}{3} \sin \psi) + 2K \sin \psi],\end{aligned}$$

$$\sigma_3^{k+1} = \sigma_3^{k+1,\text{tent}} + (\Delta\gamma_a^{k+1} + \Delta\gamma_b^{k+1}) [2G (1 - \frac{1}{3} \sin \psi) - 2K \sin \psi]; \quad (\text{B.40})$$

(iv) **IR PARA:** item (vii) do Algoritmo 6.

Algoritmo 9: Retorno para o ápice da pirâmide de Mohr-Coulomb

(i) **DEFINA** $i = 0$, $\alpha = \cos \phi / \sin \psi$;

(ii) **ENQUANTO** $i < n_{\text{pares}}$:

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1} &= \frac{p^{k+1,\text{tent}} - \cot \phi [c_i + (\bar{\varepsilon}_p^k - \bar{\varepsilon}_{p,i}) H_i]}{\cot \phi \alpha H_i + K}, \\ \bar{\varepsilon}_p^{k+1} &= \bar{\varepsilon}_p^k + \alpha \Delta\varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1};\end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

SE $\bar{\varepsilon}_{p,i} < \bar{\varepsilon}_p^{k+1} \leq \bar{\varepsilon}_{p,i+1}$, **ENTÃO:**

(iii) Atualizar o estado utilizando $\Delta\varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1}$ encontrado:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_p^{k+1} &= \bar{\varepsilon}_p^k + \alpha \Delta\varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1}, \\ \sigma_1^{k+1} &= \sigma_2^{k+1} = \sigma_3^{k+1} = p^{k+1,\text{tent}} - K \Delta\varepsilon_{p,\text{vol}}^{k+1};\end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

(iv) **IR PARA:** item (ix) do Algoritmo 6.

APÊNDICE C – IMPLEMENTAÇÃO DOS ALGORITMOS EM MATLAB

Para um estudo inicial, foi implementado um algoritmo em MATLAB utilizando o conceito de Programação Orientada a Objetos (POO). Dessa forma, o algoritmo é dividido em classes responsáveis pela leitura, simulação, computação das variáveis de acordo com o modelo escolhido e saída dos resultados. Os arquivos que contêm as classes onde os modelos de von Mises e Drucker-Prager foram implementados são nomeados *VonMises.m* e *DruckerPrager.m*, respectivamente. Além disso, a implementação numérica dos modelos é feita utilizando a teoria de deformações infinitesimais, como descrito na Seção 3.4 do Capítulo 3. O código completo em MATLAB está [disponível no GitHub](#).

Para que seja feita a análise no programa, o arquivo de entrada deve possuir o seguinte formato:

input_data.txt

```
#ELASTIC.PROPERTIES
(Young's Modulus) (Poisson's ratio)

#PLASTIC.VONMISES.PROPERTIES
(number_of_sampling_points)
(equivalent_plastic_strain) (sigma_y)
(equivalent_plastic_strain) (sigma_y)

#PLASTIC.DRUCKERPRAGER.PROPERTIES
(number_of_sampling_points) (eta) (xi) (etabar)
(equivalent_plastic_strain) (c)
(equivalent_plastic_strain) (c)

#STRAIN.HISTORY
(number_of_elements)
(strain_xx) (strain_yy) (strain_zz) (strain_xy) (strain_xz) (strain_yz)
(strain_xx) (strain_yy) (strain_zz) (strain_xy) (strain_xz) (strain_yz)
```

No arquivo de entrada, são fornecidas as propriedades elásticas, as propriedades do modelo escolhido e o histórico de deformação. O histórico de deformação é extraído do *software Abaqus CAE*, onde cada linha representa a deformação gerada pela aplicação de um deslocamento prescrito pequeno em um passo de tempo, e *number_of_elements* é o número de passos de tempo.

As funções responsáveis pela implementação numérica dos modelos elasto-plásticos recebem as deformações fornecidas pelo arquivo de entrada (que foram extraídas do *Abaqus CAE*). Para cada passo de tempo, ou seja, para cada estado de deformação, utiliza-se a função *computation* para computar a atualização das variáveis de estado. Essa função muda

de acordo com o modelo que está sendo utilizado, definido no arquivo de entrada pelas *labels* `#PLASTIC.VONMISES.PROPERTIES` ou `#PLASTIC.DRUCKERPRAGER.PROPERTIES`. A seguir, segue a função *computation* das classes *VonMises* e *DruckerPrager*, implementadas em linguagem MATLAB:

Algoritmo MATLAB 1 – Modelo de von Mises em MATLAB

```

1 function [is_plastic, is_fail] = computation(obj, strain)
2     %Integration algorithm for the elastoplastic material with Von Mises
   yield surface
3
4     %Initialization of some algorithmic and internal variables
5     is_plastic = false; % plastic yielding flag
6     is_fail = false; % state update failure flag
7
8     %Elastic predictor: Compute elastic trial state
9     %-----
10
11    strain_increment = strain - obj.data_obj.material_obj.strain;
12
13    %Defining the elastic trial state
14    ee_trial = obj.data_obj.material_obj.elastic_strain + strain_increment
   ; % trial elastic strain
15    eps_trial = obj.data_obj.material_obj.equivalent_plastic_strain; %
   equivalent plastic trial strain
16
17    %Defining hydrostatic & volumetric stresses/strains
18    eev_trial = trace(ee_trial); % elastic trial volumetric strain
19    eed_trial = ee_trial - eev_trial * eye(3,3) / 3.; % elastic trial
   deviatoric strain
20
21    p_trial = obj.data_obj.material_obj.K * eev_trial; % hydrostatic
   stress
22    s_trial = 2. * obj.data_obj.material_obj.G * eed_trial; % deviatoric
   stress
23
24    %Check for plastic admissibility
25    %-----
26    varj2t_trial = 0.5 * trace(s_trial * s_trial); % J2 invariant of the
   deviatoric stress tensor
27    q_trial = sqrt(3 * varj2t_trial); % effective stress

```

```

28     sigmay_trial = obj.plfun(eps_trial); % sigma_y trial
29     phi_trial = q_trial - sigmay_trial; % yield trial function
30
31     if (phi_trial > 0)
32         %Plastic step: Apply return mapping
33         %-----
34         dgama = 0; % incremental plastic multiplier
35         is_plastic = true;
36         is_fail = true;
37
38         %Piecewise linear hardening
39         for i = 1:obj.data_obj.material_obj.n_hard
40             dgama = (q_trial - (obj.data_obj.material_obj.sampling_pairs(i
41                 , 2) + obj.data_obj.material_obj.H(i) * (eps_trial - obj.
42                 data_obj.material_obj.sampling_pairs(i, 1)))) / (3. * obj.
43                 data_obj.material_obj.G + obj.data_obj.material_obj.H(i));
44
45             eps = eps_trial + dgama;
46
47             if eps >= obj.data_obj.material_obj.sampling_pairs(i, 1) &&
48                 eps <= obj.data_obj.material_obj.sampling_pairs(i + 1, 1)
49                 is_fail = false;
50                 break;
51             end
52         end
53
54         %Update state
55         obj.data_obj.material_obj.strain = strain;
56         obj.data_obj.material_obj.equivalent_plastic_strain = eps_trial +
57             dgama;
58         s = (1 - ((dgama*3.*obj.data_obj.material_obj.G) / (q_trial))) *
59             s_trial;
60         obj.data_obj.material_obj.stress = s + (p_trial * eye(3, 3));
61         obj.data_obj.material_obj.effective_stress = sqrt(3. * 0.5 * trace
62             (s * s));
63         obj.data_obj.material_obj.elastic_strain = (s / (2. * obj.data_obj
64             .material_obj.G)) + (eev_trial * eye(3, 3) / 3.);
65         obj.data_obj.material_obj.plastic_strain = obj.data_obj.
66             material_obj.strain - obj.data_obj.material_obj.elastic_strain;

```

```
58
59     ed = obj.data_obj.material_obj.strain - (trace(obj.data_obj.
60         material_obj.strain)/3.) * eye(3,3);
61     obj.data_obj.material_obj.effective_strain = sqrt((2. * trace(ed *
62         ed)) / 3.);
63 else
64     %Elastic step: Update stress using linear elastic law
65     %-----
66     obj.data_obj.material_obj.strain = strain;
67     s = s_trial;
68     obj.data_obj.material_obj.stress = s + (p_trial * eye(3, 3));
69     obj.data_obj.material_obj.effective_stress = sqrt(3. * 0.5 * trace
70         (s * s));
71     obj.data_obj.material_obj.elastic_strain = ee_trial;
72     obj.data_obj.material_obj.plastic_strain = obj.data_obj.
73         material_obj.strain - obj.data_obj.material_obj.elastic_strain;
74     obj.data_obj.material_obj.equivalent_plastic_strain = eps_trial;
75
76     ed = obj.data_obj.material_obj.strain - (trace(obj.data_obj.
77         material_obj.strain)/3.) * eye(3,3);
78     obj.data_obj.material_obj.effective_strain = sqrt((2. * trace(ed *
79         ed)) / 3.);
80 end
81 end
```

Algoritmo MATLAB 2 – Modelo de Drucker-Prager em MATLAB

```

1 function [is_plastic, is_fail] = computation(obj, strain)
2     %Integration algorithm for the elastoplastic material with Drucker–
3     Prager yield surface
4
5     %Initialization of some algorithmic and internal variables
6     dgama = 0; % incremental plastic multiplier
7     tol = 10(-12);
8     is_plastic = false; % plastic yielding flag
9     is_fail = false; % state update failure flag
10
11     %Elastic predictor: Compute elastic trial state
12     %-----
13     strain_increment = strain - obj.data_obj.material_obj.strain;
14
15     %Defining the elastic trial state
16     ee_trial = obj.data_obj.material_obj.elastic_strain + strain_increment
17     ; % trial elastic strain
18     eps_trial = obj.data_obj.material_obj.equivalent_plastic_strain; %
19     equivalent plastic trial strain
20
21     %Defining hydrostatic & volumetric stresses/strains
22     eev_trial = trace(ee_trial); % elastic trial volumetric strain
23     eed_trial = ee_trial - eev_trial * eye(3,3) / 3.; % elastic trial
24     deviatoric strain
25
26     p_trial = obj.data_obj.material_obj.K * eev_trial; % hydrostatic
27     stress
28     s_trial = 2. * obj.data_obj.material_obj.G * eed_trial; % deviatoric
29     stress
30
31     %Check for plastic admissibility
32     %-----
33     varj2t_trial = 0.5 * trace(s_trial * s_trial); % J2 invariant of the
34     deviatoric stress tensor
35     cohesion_trial = obj.plfun(eps_trial); % cohesion trial
36     phi_trial = sqrt(varj2t_trial) + p_trial * obj.data_obj.material_obj.
37     eta - obj.data_obj.material_obj.xi * cohesion_trial; % yield trial

```

```

function
31 res = phi_trial;
32
33 if cohesion_trial ~= 0
34     res = res/abs(cohesion_trial);
35 end
36
37 if (res > tol)
38     %Plastic step: Apply return mapping to smooth portion of cone —
        computing analytically
39     %-----
40     is_plastic = true;
41     is_fail = true;
42
43     eps = eps_trial;
44     p = p_trial;
45     s = s_trial;
46
47     %Piecewise linear hardening
48     for i = 1:obj.data_obj.material_obj.n_hard
49         dgama = (sqrt(varj2t_trial) + obj.data_obj.material_obj.eta *
50             p_trial - obj.data_obj.material_obj.xi * (obj.data_obj.
51                 material_obj.sampling_pairs(i, 2) + obj.data_obj.
52                 material_obj.H(i) * ...
53                 (eps_trial - obj.data_obj.material_obj.sampling_pairs(i,
54                     1)))) / ...
55                 (obj.data_obj.material_obj.G + obj.data_obj.material_obj.
56                     xi^2 * obj.data_obj.material_obj.H(i) + obj.data_obj.
57                     material_obj.eta * obj.data_obj.material_obj.etablear *
58                     obj.data_obj.material_obj.K);
59
60         eps = eps_trial + obj.data_obj.material_obj.xi * dgama;
61
62         if eps > obj.data_obj.material_obj.sampling_pairs(i, 1) && eps
63             <= obj.data_obj.material_obj.sampling_pairs(i + 1, 1)
64             is_fail = false;
65             break;
66         end
67     end
68 end

```

```
60
61     p = p_trial - obj.data_obj.material_obj.K * obj.data_obj.
        material_obj.etabar * dgama;
62     if varj2t_trial ~= 0
63         s = (1 - ((dgama*obj.data_obj.material_obj.G) / (sqrt(
        varj2t_trial)))) * s_trial;
64     else
65         s = 0 * s_trial;
66     end
67
68
69     %Check validity of return to smooth portion
70     if sqrt(varj2t_trial) - obj.data_obj.material_obj.G * dgama < 0
71         %Apply return mapping to apex portion of cone -
72         %computing analytically
73
74         %Set some variables
75         is_fail = true;
76         alpha = obj.data_obj.material_obj.xi / obj.data_obj.
            material_obj.etabar;
77         beta = obj.data_obj.material_obj.xi / obj.data_obj.
            material_obj.eta;
78
79         %Piecewise linear hardening
80         for i = 1:obj.data_obj.material_obj.n_hard
81             depv = (- beta * (obj.data_obj.material_obj.sampling_pairs
            (i, 2) + obj.data_obj.material_obj.H(i) * (eps_trial -
            obj.data_obj.material_obj.sampling_pairs(i, 1))) +
            p_trial) / ...
            (alpha * beta * obj.data_obj.material_obj.H(i) + obj.
            data_obj.material_obj.K);
82
83
84             eps = eps_trial + alpha * depv;
85
86             if eps > obj.data_obj.material_obj.sampling_pairs(i, 1) &&
            eps <= obj.data_obj.material_obj.sampling_pairs(i + 1,
            1)
87                 is_fail = false;
88                 break;
```

```
89         end
90     end
91
92     p = p_trial - obj.data_obj.material_obj.K * depv;
93     s = 0 * s;
94 end
95
96 %Update state
97 obj.data_obj.material_obj.strain = strain;
98 obj.data_obj.material_obj.equivalent_plastic_strain = eps;
99 obj.data_obj.material_obj.stress = s + (p * eye(3, 3));
100 obj.data_obj.material_obj.effective_stress = sqrt(3. * 0.5 * trace
    (s * s));
101
102 obj.data_obj.material_obj.elastic_strain = (s / (2. * obj.data_obj
    .material_obj.G)) + ((p * eye(3, 3)) / (3. * obj.data_obj.
    material_obj.K));
103 obj.data_obj.material_obj.plastic_strain = obj.data_obj.
    material_obj.strain - obj.data_obj.material_obj.elastic_strain;
104
105 ed = obj.data_obj.material_obj.strain - (trace(obj.data_obj.
    material_obj.strain)/3.) * eye(3,3);
106 obj.data_obj.material_obj.effective_strain = sqrt((2. * trace(ed *
    ed)) / 3.);
107 else
108 %Elastic step: Update stress using linear elastic law
109 %-----
110 obj.data_obj.material_obj.strain = strain;
111 s = s_trial;
112 obj.data_obj.material_obj.stress = s + (p_trial * eye(3, 3));
113 obj.data_obj.material_obj.effective_stress = sqrt(3. * 0.5 * trace
    (s * s));
114 obj.data_obj.material_obj.elastic_strain = ee_trial;
115 obj.data_obj.material_obj.plastic_strain = obj.data_obj.
    material_obj.strain - obj.data_obj.material_obj.elastic_strain;
116 obj.data_obj.material_obj.equivalent_plastic_strain = eps_trial;
117
118 ed = obj.data_obj.material_obj.strain - (trace(obj.data_obj.
    material_obj.strain)/3.) * eye(3,3);
```

```
119         obj.data_obj.material_obj.effective_strain = sqrt((2. * trace(ed *  
120             ed)) / 3.);  
121     end  
end
```

