



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS MACEIÓ

Francisco Alan Lima da Silva

A PROBABILIDADE DE NÃO EXISTIR CICLOS CURTOS
NUM GRAFO ESPARSO

MACEIÓ
2023

FRANCISCO ALAN LIMA DA SILVA

A PROBABILIDADE DE NÃO EXISTIR CICLOS CURTOS
NUM GRAFO ESPARSO

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Universidade Federal de Alagoas, como requisito necessário para obtenção do grau de Bacharel em Matemática

Maceió, 2023

Catálogo na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

S586p

Silva, Francisco Alan Lima da.

A probabilidade de não existir ciclos curtos num grafo esparso / Francisco Alan Lima da Silva. - 2023.

118 f. : il.

Orientador: Alan Anderson da Silva Pereira.

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Bacharelado)
– Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2023.

Bibliografia: f. 109.

Apêndices: f. 113-118.

1. Teoria dos grafos - Modelo de configurações. 2. Grafos esparsos - Ciclos curtos. I. Título.

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE MATEMÁTICA BACHARELADO
Fone: 3214-1405 / E-mail: coordenacao.mat@im.ufal.br

DECLARAÇÃO DE NOTA DE TCC

Declaramos à Coordenação do Curso de Graduação em Matemática Bacharelado que o Trabalho de Conclusão de Curso do(a) aluno(a) **FRANCISCO ALAN LIMA DA SILVA**, matrícula nº **20112457**, intitulado “**a PROBABILIDADE DE NÃO EXISTIR CICLOS CURTOS NUM GRAFO ESPARSO**”, foi avaliado e recebeu da Banca Examinadora a seguinte nota: **__10__ (Dez)**, média obtida a partir das seguintes notas atribuídas pelos componentes da Banca Examinadora:

Prof. Dr. Alan Anderson da Silva Pereira (Orientador) - UFAL: 10

Prof. Dr. Diogo Carlos dos Santos - UFAL: 10

Prof. Dr. Antônio Josefran de Oliveira Bastos - UFC: 10



Documento assinado digitalmente
ALAN ANDERSON DA SILVA PEREIRA
Data: 23/10/2023 13:55:27-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Maceió, 20 de outubro de 2023.

Prof. Dr. Alan Anderson da Silva Pereira



Documento assinado digitalmente
DIOGO CARLOS DOS SANTOS
Data: 26/10/2023 07:39:34-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Diogo Carlos dos Santos



Documento assinado digitalmente
ANTONIO JOSEFRAN DE OLIVEIRA BASTOS
Data: 25/10/2023 14:48:50-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Antônio Josefran de Oliveira Bastos

*Ao meu querido tio Ari, que em vida
me inspirou a ser uma pessoa melhor todos os dias.*

Agradecimentos

Agradeço aos meus orientadores. Primeiro o Alan Anderson, que antes de tudo é um grande amigo, que me auxiliou em todos os momentos que precisei, que me guiou com calma e sabedoria por todos esses anos que trabalhamos juntos.

Depois, ao Josefran Bastos, a quem devo os primeiros passos na caminhada para a minha formação, mesmo quando eu estava perdido.

Por fim, ao Davi Lima, que me ensinou o poder de boas referências, e me encorajou a conhecer cada vez mais a boa matemática.

À minha mãe, Auridea; meu padrasto, Aulete; minha irmã, Juliana; e toda a minha família pelo amor, carinho e apoio incondicional durante toda a minha jornada.

À minha Vitoria, a quem devo os sorrisos diários mais sinceros, de quem quero todos os abraços, a quem amo todos os dias.

Aos meus amigos, Cícero e Samuel, com quem formei o trio mais amado do Instituto de Matemática (por pelo menos umas três pessoas).

A todos as amizades que fiz no Instituto de Matemática, que é tanta gente que não caberia nem mesmo em uma página inteira de nomes.

À Elaine e ao Diogo, meus professores e amigos, cuja sala que dividem disputa com a do Alan o título de sala que mais visitei durante todo o período da minha graduação.

À quem inevitavelmente me ajudou no processo. Aos coordenadores, aos professores, aos técnicos.

Aos meus amigos Dasaev e Sara pela amizade.

Ao Instituto TIM, ao CNPq e à FAPEAL pelo apoio financeiro.

Resumo

Considere uma sequência de grafos, $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde cada G_n é tomado com distribuição $\text{CM}(\vec{D}^{(n)})$. Fixado $h \in \mathbb{N}$ e assumindo certas condições de regularidade da sequência $(D^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, Bordenave e Caputo provaram em [Bordenave e Caputo 2015] que a probabilidade assintótica de G_n não ter ciclos de tamanho $\leq h$ é positiva. Como corolário, temos em [Bordenave e Caputo 2015] uma fórmula assintótica para a cardinalidade do conjunto dos grafos com mesma sequência de graus de G_n , que têm ciclos de tamanho curto, que também foi apresentada e provada aqui. As provas desses resultados aqui apresentadas foram divididas em vários outros resultados menores, com o intuito de deixar o caminho o mais linear possível durante a leitura. Além disso, nos preocupamos em trazer uma riqueza muito maior de detalhes durante as demonstrações, assim como os requisitos, afim de tornar o trabalho (quase) autocontido.

Palavras-chave: grafos, modelo de configurações, probabilidade.

Abstract

Consider a sequence of graphs, $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$, where each G_n is taken with distribution $\text{CM}(\vec{D}^{(n)})$. Fixing $h \in \mathbb{N}$ and assuming certain regularity conditions on the sequence $(D^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, Bordenave and Caputo proved in [Bordenave e Caputo 2015] that the asymptotic probability of G_n not having cycles of size $\leq h$ is positive. As a consequence, in [Bordenave e Caputo 2015], we have an asymptotic formula for the cardinality of the set of graphs with the same degree sequence as G_n that have short cycles, which was also presented and proven here. The proofs of these results presented here were divided into several smaller results, aiming to make the path as linear as possible during the reading. Additionally, we aimed to provide a much greater wealth of details during the demonstrations, as well as the requirements, in order to make the work (almost) self-contained.

Keywords: graphs, configuration model, probability.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Um exemplo simples de grafo	21
Figura 2 – Um grafo com a conexão v_1v_2 destacada	22
Figura 3 – Um grafo estrelado	22
Figura 4 – A árvore T	27
Figura 5 – As componentes $T_2(1)$ e $T_1(2)$ de T	27
Figura 6 – À esquerda a árvore T , e à direita a árvore T' obtida por se adicionar a T o vértice v e a aresta uv	28
Figura 7 – G e seu truncamento $G_{v_1,1}$ de altura 1 a partir do vértice v_1	30
Figura 8 – Dois grafos com sequência de graus $(1, 1, 1, 2, 3)$ que não são isomorfos.	34
Figura 9 – Grafo das Sete Pontes de Königsberg	40

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
2	TEORIA DE GRAFOS	21
2.1	Grafos Simples	21
2.2	Alguns Grafos Famosos	24
2.3	Grafos Conexos e Árvores	24
2.4	Subgrafos e Isomorfismos	30
2.5	Emparelhamentos Perfeitos	31
2.6	Sequência de graus dada	33
2.7	A Fórmula de Cayley para árvores rotuladas*	35
2.8	Exercícios	37
3	MODELO DE CONFIGURAÇÃO PARA MULTIGRAFOS	39
3.1	Conheça os multigrafos	39
3.2	Modelo de Configurações para Multigrafos	42
3.3	Multigrafos direcionados	49
3.4	Exercícios	50
4	MODELO DE CONFIGURAÇÃO PARA MULTIGRAFOS DIRECIO- NADOS	53
4.1	Grafos Direcionados	53
4.2	Modelo de Configurações para Multigrafos Direcionados	55
4.3	Exercícios	59
5	COLORAÇÃO	61
5.1	Coloração própria	61
5.2	Multigrafos Daltônicos	63
5.3	Exercícios	66
6	MODELO DE CONFIGURAÇÃO GENERALIZADO	67
6.1	Multigrafos com sequência de graus dada	67
6.2	Modelo de Configurações para $c \in \mathcal{C}_=$	68
6.3	Modelo de Configurações para $c \in \mathcal{C}_<$	70
6.4	Modelo de Configurações Generalizado	71
6.5	Exercícios	73
7	CÓPIAS DE SUBGRAFOS	75

7.1	Número de cópias de um subgrafo	75
7.2	Soma direta de multigrafos	79
7.3	Número de cópias de um mesmo ciclo	79
7.4	O Excesso	81
7.5	Semiunião de multigrafos direcionados coloridos	84
7.6	Exercícios	87
8	A PROBABILIDADE DE NÃO EXISTIR CICLOS CURTOS NUM GRAFO ESPARSO	89
8.1	Número de ciclos em um grafo esparso	89
8.2	A esperança do número de cópias isomórficas de um subgrafo	90
8.3	Z_n converge para uma Poisson	97
8.4	$\mathbb{E}[(Z_n)_r]$ é limitada	100
8.5	Prova de que Z_n converge para uma Poisson	103
8.6	Um corolário do Teorema 8.1.1	106
8.7	Exercícios	107
	REFERÊNCIAS	109
	APÊNDICES	111
	APÊNDICE A – TEOREMA DE INVERSÃO DE LAGRANGE	113
	APÊNDICE B – ASSINTÓTICOS	115
	APÊNDICE C – CONVERGÊNCIA FRACA DE MEDIDAS	117

1 Introdução

O modelo de configurações é um “método” para gerar grafos aleatórios com uma estrutura em comum: a sua sequência de graus. O tipo de grafos que estamos gerando importa muito no processo, como teremos várias oportunidades de ver. No texto, trataremos de grafos que são sobreposições de vários multigrafos e vários multigrafos direcionados. Faremos a sobreposição definindo uma coloração sobre V , onde V é o conjunto pretendido para ser o conjunto dos vértices, que nada mais é do que uma coleção de mapas que definem ou multigrafos, ou multigrafos direcionados. Nosso objetivo aqui é estudar propriedades assintóticas a respeito da presença de ciclos num determinado regime, que chamaremos esparsos.

No Capítulo 2, veremos definições e primeiros resultados a respeito de teoria de grafos. Um grafo é uma dupla (V, E) , formada por um conjunto V , que denominaremos o conjunto dos vértices do grafo, e E um conjunto formado por pares não-ordenados de elementos de V , que chamaremos o conjunto das arestas. Definiremos sequência de graus e a ideia de isomorfismo entre grafos. A Seção 2.5 é dedicada ao estudo de emparelhamentos perfeitos, no sentido de grafos. Veremos ainda que o conjunto das arestas de um grafo pode ser definido via uma função $V^2 \rightarrow \{0, 1\}$ que é simétrica e anula na diagonal; por sua vez, a seção seguinte foi reservada para o Teorema de Erdős-Gallai, um teorema central na teoria de sequências gráficas (i.e, sequências que realizam algum grafo simples). Já a Seção 2.7 é de leitura opcional, e traz a prova da Fórmula de Cayley para árvores rotuladas. O teorema diz que a quantidade de árvores com conjunto de vértices $[n]$, é n^{n-2} .

Prosseguindo, no Capítulo 3 trazemos a definição de multigrafos, junto com o primeiro passo em direção ao modelo de configurações generalizado. A primeira vez que uma configuração aparece é aqui. Na ocasião, trataremos uma configuração como sendo um emparelhamento no conjunto W associado a uma sequência $\vec{d}$ que realiza algum multigrafo. O conjunto das configurações (no sentido de multigrafos), será denotado por Σ_1 , enquanto o conjunto dos multigrafos cuja sequência de graus é $\vec{d}$ será denotado por $\mathcal{MG}(\vec{d})$. Depois, introduziremos uma função $\Gamma : \Sigma_1 \rightarrow \mathcal{MG}(\vec{d})$, que provaremos ser sobrejetora. O principal resultado do capítulo é um teorema que calcula a cardinalidade da pré-imagem de um grafo H por Γ , em termos da função ω^H que define H .

O Capítulo 4 é bem parecido com o Capítulo 3, sendo nele definido multigrafo direcionado. O modelo de configuração construído neste capítulo foi para esse tipo de grafos. Nesse caso, trataremos uma configuração simplesmente como sendo uma bijeção dos conjuntos W_1 e W_2 associados as sequências $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$ que realizam um multigrafo direcionado. Também associaremos a cada sequência $\vec{d} = \begin{pmatrix} \vec{d}_1 \\ \vec{d}_2 \end{pmatrix}$ um conjunto $W = W_1 \cup W_2$

satisfazendo $W_i = \bigcup_{j=1}^n W_i(j)$, onde $|W_i(j)| = \omega_i(j)$ e a união é disjunta.

No Capítulo 5, é introduzida a coloração (de arestas) utilizada para definir multigrafos direcionados coloridos, onde faremos modelo de configurações. Uma cor lá é definida como sendo uma dupla $c = (i, j)$, onde $1 \leq i, j \leq L$ para algum L inteiro positivo. Cada cor $c = (i, j)$ tem sua própria cor conjugada $\bar{c} = (j, i)$. Claramente $c = (i, i) = \bar{c}$, para todo $i \in [L]$. Cada par de cores $(c, \bar{c})$ determinará um multigrafo (se $c = \bar{c}$); ou um multigrafo direcionado (se $c \neq \bar{c}$). Cada multigrafo direcionado colorido é, portanto, a sobreposição dos multigrafos de cor $c \in \mathcal{C}_=$ cuja função que define as arestas (i, j) é $\omega_c(i, j)$; e dos multigrafos direcionados de cores $(c, \bar{c})$, onde $c \in \mathcal{C}_<$, cujas funções que definem as arestas saindo de i e chegando em j e as arestas saindo de j e chegando em i , são dadas, respectivamente, por $\omega_c(i, j)$ e $\omega_{\bar{c}}(i, j)$. Por fim, definimos o multigrafo daltônico de um grafo direcionado colorido, obtido ao ignorar a cor das arestas, ou seja, dado pela função $\bar{\omega}(i, j) = \sum_{c \in \mathcal{C}} \omega_c(i, j)$.

Definidos os modelos de configurações para multigrafos e multigrafos direcionados, e também os multigrafos direcionados coloridos, definiremos no Capítulo 6 um modelo de configurações que é a medida produto sobre modelos de configurações de multigrafos e multigrafos direcionados. A justificativa para isto é que o modelo de grafos abordado no trabalho, como já dito anteriormente, é sobreposição de multigrafos (indexados pela diagonal de $[L] \times [L]$) e multigrafos direcionados (indexados pelos pares (i, j) e (j, i) , onde $i \neq j$).

Quase no fim, o Capítulo 7 estabelece boa parte das notações que serão utilizadas de maneira específica em algum ponto da prova. Claro que muito do que é definido também é utilizado como ferramenta recorrente durante as demonstrações no Capítulo 8. A primeira é a variável aleatória Y que conta o número de cópias fiéis de um multigrafo H dado dentro de um grafo G . Prosseguindo, definimos uma nova variável aleatória que conta a quantidade de cópias isomórficas de um grafo H dado dentro de um grafo G . Depois, veremos que elas duas se relacionam via grupo de automorfismos de H , i.e, das funções bijetivas $V(H) \rightarrow V(H)$ que deixam H invariante. Como os grafos que estamos interessados em contar são os ciclos de tamanho $\leq h$, definiremos dois conjuntos: um dos ciclos com conjunto de vértices $[l]$, com $l \leq h$, o conjunto $\mathcal{L}_{\leq h}$; e outro dos grafos isomorfos a algum elemento de $\mathcal{L}_{\leq h}$, com conjunto de vértices contido em $[n]$, que na ocasião denotaremos $\mathcal{H}$. Então definiremos o excesso de um grafo G , que é simplesmente a quantidade de arestas que o seu grafo daltônico tem a mais que vértices, que será de grande utilidade. Para finalizar o capítulo, definiremos um tipo especial de união de grafos.

Toda a construção dos capítulos anteriores (salvo alguns tópicos do Capítulo 2) tem como objetivo dar definições e notações utilizadas na demonstração do Teorema 8.1.1, no Capítulo 8. Neste, definiremos o que é uma sequência de sequências de graus $\vec{D}^{(n)}$ ser (θ, P) -esparsa. O regime esparsa consiste em tomar uma sequência de grafos G_n com

distribuição $\text{CM}(\vec{D}^{(n)})$. Dada uma sequência tomada no regime esparsa, provaremos que, assintoticamente, é positiva a probabilidade de não existir ciclos de tamanho menor ou igual a qualquer número $h \in \mathbb{N}$ previamente fixado. Para provar o teorema, introduziremos uma nova variável aleatória, Z , que conta o número de ciclos de tamanho $\leq h$ em um grafo G dado. Com essa definição, é suficiente provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z(G_n, h) = 0) = 0.$$

Para obter tal resultado, provaremos que $Z(G_n, h)$ converge em distribuição para uma variável aleatória Poisson. Por sua vez, para provar essa convergência, faremos isso provando que $(Z(G_n, h))_r \rightarrow \lambda^r$, onde λ é o parâmetro da Poisson que procuramos.

2 Teoria de Grafos

Dado um conjunto V , estaremos interessados em estudar as relações entre os elementos desse conjunto. Elas (as relações), podem ser das mais diversas. Por exemplo, é de interesse dos donos de uma rede social estudar as relações entre usuários desta rede. Quando dois usuários têm interesses e amizades em comum, espera-se que eles se relacionem, já que isso é crucial nesse ramo de negócios.

Para estudar essas relações, podemos utilizar uma ferramenta poderosa: os grafos. Estes são estruturas que nos permitem fazer as relações com os elementos de um dado conjunto (que chamamos de conjunto de vértices do grafo).

2.1 Grafos Simples

Faremos a seguinte brincadeira: dados dois elementos distintos u, v de um conjunto V , queremos saber se eles estão relacionados (por exemplo se $u, v \in \mathbb{N}$, ver se eles são primos entre si). Se estiverem, indicaremos isto guardando o par não-ordenado $\{u, v\}$ em um segundo conjunto E .

Durante o texto, representaremos o conjunto dos pares não-ordenados de V por $\binom{V}{2}$. A escolha da notação se justifica pelo fato de que esse conjunto tem exatamente $\binom{|V|}{2}$ elementos.

Definição 2.1.1. Um **grafo simples**, ou mais simplesmente um **grafo**, é uma dupla $G = (V, E)$, formado por um conjunto V e um subconjunto E de $\binom{V}{2}$. Chamamos de **vértices** os elementos de V , e aos elementos de E , damos o nome de **arestas**.

Ao conjunto dos grafos simples daremos o nome $\mathcal{GS}$. Chamaremos ainda o conjunto dos grafos simples de n vértices de $\mathcal{GS}_n$.

Dado um grafo G , representaremos graficamente os seus vértices por pontos ou círculos e cada aresta uv será representada por um arco ligando u e v .

Exemplo 2.1.1 (Exemplo simples de grafo). Um exemplo de grafo é o que é formado por dois vértices u e v , e a aresta $\{u, v\}$. O grafo do qual estamos falando é o par $G = (V, E)$, onde $V = \{u, v\}$ e $E = \{\{u, v\}\}$, que está desenhado na Figura 1 abaixo.

$$u \bullet \text{---} \bullet v$$

Figura 1 – Um exemplo simples de grafo

Sempre que escrevermos $V(G)$ e $E(G)$, estaremos nos referindo ao conjunto dos vértices de G e ao conjunto das arestas de G , respectivamente. Por simplicidade, quando não houver possibilidade de confusão, escreveremos uv para representar a aresta $\{u, v\}$.

Definição 2.1.2. Seja G um grafo. Diremos que os vértices $u, v \in V(G)$ estão **conectados em G** , e denotaremos $u \sim v$, se $uv \in E(G)$.

Abaixo daremos alguns exemplos de grafos simples e destacaremos as conexões de alguns vértices.

Exemplo 2.1.2. O grafo G com conjunto de vértices $V(G) = \{v_1, \dots, v_8\}$ e conjunto de arestas $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5, v_1v_6, v_6v_7, v_6v_8\}$ está representado na Figura 2 com a aresta v_1v_2 destacada em vermelho, para ilustrar o que é ter $v_1 \sim v_2$.

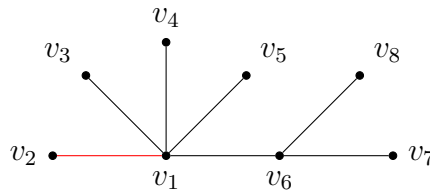


Figura 2 – Um grafo com a conexão v_1v_2 destacada

Exemplo 2.1.3 (Grafo estrelado). Quando algum vértice, digamos v_1 , de um grafo G está conectado a todos os outros e todos os outros estão conectados apenas a v_1 , costumamos dizer que G é um grafo estrelado, ou uma estrela. Abaixo, na Figura 3 desenhamos uma estrela. O vértice v_1 ligado a todos os outros está destacado em vermelho.

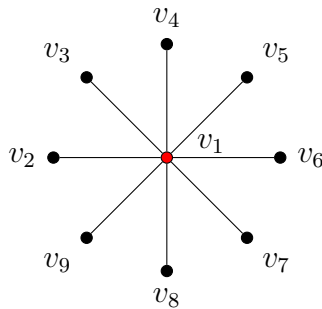


Figura 3 – Um grafo estrelado

O motivo do nome “estrelado” fica evidente no desenho: o nosso grafo se parece com uma estrela. Cada estrela é um grafo bipartido (veja Definição 2.2.2).

Uma entidade que será de grande importância durante todo o texto, é o grau de um vértice que definiremos a seguir.

Definição 2.1.3. Seja $G = (V, E)$ um grafo. Definimos o **grau do vértice** $v \in V$, e denotamos por $d(v)$, a cardinalidade do conjunto dos vértices conectados a v em G . Em símbolos,

$$d(v) = \#\{u \in V : u \sim v\}.$$

Dado novamente o grafo do Exemplo 2.1.2, temos que $d(v_1) = 5, d(v_2) = d(v_3) = d(v_4) = d(v_5) = d(v_7) = d(v_8) = 1$ e $d(v_6) = 3$. Note que a soma $s = \sum_{i=1}^8 d(i) = 14$ é um número par. Veremos abaixo que isso acontece para qualquer grafo simples.

Fixe $G = (V, E)$ um grafo e dois vértices $u, w \in V$. Quando fazemos a soma s dos graus de todos os vértices $v \in V$, isto é,

$$s = \sum_{v \in V} d(v),$$

note que contamos a aresta uw duas vezes. De fato, contamos ela uma vez quando olhamos para $d(u)$ e outra quando olhamos para $d(w)$. Concluimos daí que $s = 2|E|$.

Proposição 1. *Seja $G = (V, E)$ um grafo. Então*

$$s = \sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Corolário 1. *A quantidade de vértices de grau ímpar num grafo é par.*

Com efeito, se fosse ímpar, teríamos s ímpar, o que contraria o fato que s é par.

Definição 2.1.4. Chamaremos de **sequência de graus** de um grafo $G = ([n], E)$, o vetor cujas entradas são os graus dos vértices em G , $(d(1), \dots, d(n))$.

A Proposição 1 deixa evidente que uma condição necessária para que uma sequência $(d(1), \dots, d(n))$ seja sequência de graus de algum grafo, é que se tenha que $s = \sum_{i=1}^n d(i)$ é um número par.

Outra condição necessária é que $d(i) \leq n - 1$ para todo i , já que não podemos ter um vértice ligado a mais do que $n - 1$ outros no grafo. Esta condição implica que $\sum_{i=1}^n d(i) \leq n(n - 1) = 2|\binom{V}{2}|$.

Veremos no exemplo a seguir, no entanto, que não basta que a soma dos termos de uma sequência de n números inteiros seja par e a soma dos $d(i)$ seja menor ou igual do que a cardinalidade de $\binom{V}{2}$ para que haja um grafo que admita essa sequência de graus.

Exemplo 2.1.4. Não existe nenhum grafo de 4 vértices cuja sequência de graus seja $(1, 1, 3, 3)$, muito embora $d(i) \leq 3$ para todo i . Pode-se verificar isto olhando todos os grafos de 4 vértices. Uma vez que há 6 espaços para se preencher com 0, 1, $\dots$, 5 ou 6 arestas, temos $2^6 = 64$ grafos distintos para testar.

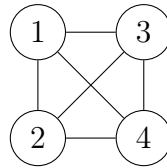
2.2 Alguns Grafos Famosos

Nesta seção mostraremos alguns exemplos de grafos.

Definição 2.2.1. Um grafo G de n vértices é dito ser **completo** quando $d(v) = n - 1$, para todo $v \in V(G)$. Denotaremos por K_n o grafo completo de n vértices.

Um grafo completo de n vértices é um grafo cujos vértices se ligam, via arestas, a todos os outros vértices. Portanto, $G = (V, E)$ é completo se, e somente se, $E = \binom{V}{2}$.

Exemplo 2.2.1. O grafo K_4 e as suas 6 arestas.



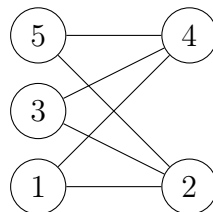
Definição 2.2.2. Um grafo $G = (V, E)$ é dito ser **grafo bipartido** quando conseguimos escrever $V = V_1 \cup V_2$, com V_1 e V_2 disjuntos, de modo que se $uv \in E$, então $u \in V_1$ e $v \in V_2$, ou $u \in V_2$ e $v \in V_1$.

De maneira equivalente, um grafo é bipartido se é possível escrever V como uma união disjunta $V_1 \cup V_2$, de modo que se $u, v \in V_i, i = 1, 2$, então $uv \notin E$. Quando escrevermos $V = V_1 \cup V_2$, queremos dizer que V_1 e V_2 fazem de G bipartido como na definição.

Chamaremos de **grafo bipartido completo** um grafo $G = (V_1 \cup V_2, E)$ bipartido tal que $d(v) = |V_i|$ para todo $v \in V_j$ com $i \neq j$. Ou seja, num grafo bipartido, todos os vértices de V_1 se ligam a todos os vértices de V_2 .

Se $|V_1| = n$ e $|V_2| = m$, então denotaremos o grafo bipartido completo com conjunto de vértices $V_1 \cup V_2$ por $K_{n,m}$.

Exemplo 2.2.2. O grafo bipartido $K_{2,3}$ e suas também 6 arestas.



2.3 Grafos Conexos e Árvores

Nesta seção mostraremos vários resultados sobre árvores, um dos quais (o Teorema 2.3.1) garante que todo grafo conexo de n vértices tem pelo menos $n - 1$ arestas (um

resultado que é bastante intuitivo). Falaremos ainda sobre caminhos e definiremos o que é o grafo H estar contido no grafo G .

Para o que segue, fixe G um grafo.

Definição 2.3.1. Um **caminho** (em G) de tamanho k é uma sequência de vértices (de G) $[v_1, v_2, \dots, v_k]$ que não repete vértices, exceto possivelmente o primeiro e o último, que são tais que $v_i \sim v_{i+1}$, para todo $i = 1, \dots, k - 1$.

Intuitivamente, quando olhamos para um caminho ligando u a v , pensamos na trajetória que algo faz por cima do grafo partindo de u , passando por cima de vértices utilizando as arestas que os ligam como estrada, de modo que não se passe pelo mesmo vértice duas vezes no meio da trajetória, até chegar em v .

Definição 2.3.2. Um caminho $[v_1, \dots, v_{k+1}]$ de tamanho k é dito ser **caminho fechado** ou **ciclo** se $v_1 = v_{k+1}$.

Diremos que v pertence a um caminho se v for um dos termos da sequência que define o caminho.

Iremos considerar que existe um caminho ligando u a v , o caminho unitário $[v]$.

Se existe um caminho $[u, u_1, \dots, u_n, v]$ ligando u a v , então o caminho $[v, u_n, \dots, u_1, u]$ liga v a u .

Note que existir um caminho ligando u, v dois vértices é uma propriedade transitiva. De fato, se existem dois caminhos $[u, u_1, \dots, u_r, w]$ e $[w, v_1, \dots, v_s, v]$ ligando u a w , e w a v respectivamente, com $u_i \neq v_j$ para todo i, j , então a **concatenação**

$$[u, u_1, \dots, u_r, w, v_1, \dots, v_s, v]$$

é um caminho ligando u a v . Por outro lado, considere agora o conjunto S dos índices i tais que existe j para o qual $u_i = v_j$. Se S é não-vazio, considere m o seu menor elemento. Seja n o índice tal que $u_m = v_n$. Então o caminho

$$[u, u_1, \dots, u_m = v_n, v_{n+1}, \dots, v_s, v]$$

liga u a v .

Assim, pelo que foi visto acima, está provado que a relação (u, v) definida por “existe um caminho em G ligando u a v ” é de equivalência. Logo, temos em G uma partição no conjunto dos vértices, i.e, conseguimos uma família de índices Λ e representantes v_λ tais que

$$V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \widehat{v_\lambda},$$

onde $\widehat{v_\lambda} = \{u \in V : (u, v_\lambda)\}$ e a união é disjunta.

Definição 2.3.3. Dizemos que $H = (V_1, E_1)$ é **subgrafo** de $G = (V_2, E_2)$, quando $V_1 \subset V_2$ e $E_1 \subset E_2$, e escrevemos $H \subset G$. Neste caso, diremos que G **contém uma cópia fiel** de H , ou que H está contida em G , ou ainda que H acontece em G .

Ao maior subgrafo de G (no sentido da continência) que tem conjunto de vértices $\hat{v}$, damos o nome de **componente conexa** de v (ou de qualquer vértice em $\hat{v}$), e denotaremos por C_v . Dado $v \in V(G)$, defina o conjunto $D = \{H \subset G : V(H) = \hat{v}\}$. Então

$$C_v = \bigcup_{H \in D} H.$$

Um grafo $G = (V, E)$ é dito ser **conexo** se dados $u, v \in V$ existe um caminho ligando u a v . Chamaremos de **árvore** um grafo conexo e sem ciclos. Equivalentemente, G é conexo se dado $v \in V$, então $V = \hat{v}$.

Proposição 2. *Um grafo T é uma árvore se, e somente se, entre cada par de vértices existe um único caminho que os liga.*

Demonstração. Primeiro suponha que T é uma árvore. Pelo fato de T ser conexo, sabemos que existe pelo menos um caminho ligando cada par de vértices. Provaremos a unicidade por contrapositiva.

Suponha que T é um grafo conexo, e existem dois caminhos diferentes ligando algum par de vértices $u, v \in V(T)$, digamos $[u = r_0, r_1, \dots, r_{m-1}, v = r_m]$ e $[u = s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, v = s_n]$. Seja $i < \min\{m, n\}$ o primeiro índice para o qual $r_i \neq s_i$. Chame $u' = r_{i-1} = s_{i-1}$. Agora considere (j, k) o par com j (e portanto k) mínimo tal que $j, k > i$ e $r_j = s_k$ (note que tal par sempre existe pois $r_m = s_n$). Chame $v' = r_j = s_k$. Então o caminho fechado $[u', r_i, \dots, r_{j-1}, v', s_{k-1}, \dots, s_i, u']$ é um ciclo. Concluimos que T não é uma árvore.

Por outro lado, se para cada par de vértices em T há um único caminho que os liga, em particular T é conexo. Suponha por absurdo que T contenha algum ciclo. Então existe um caminho fechado formado por pelo menos três vértices distintos. Seja $[v_1, \dots, v_r, \dots, v_s, v_1]$ este caminho. Então ele é a concatenação de dois caminhos: $[v_1, v_2, \dots, v_{r-1}, v_r]$ e $[v_r, v_{r+1}, \dots, v_s, v_1]$, que por definição de ciclo são caminhos distintos. Mas ambos ligam v_1 a v_r , um absurdo, uma vez que supomos que o caminho ligando qualquer par de vértices de T era único. Concluimos assim que T não pode conter ciclos. Juntando isso ao fato de que ele é conexo, concluimos que T é uma árvore. $\square$

Decorre imediatamente da Proposição acima que toda aresta em uma árvore é uma **ponte**, isto é, uma aresta de um grafo conexo que ao ser removida o torna desconexo. De fato, dados T uma árvore e uv uma aresta em T , temos que a remoção dessa aresta faz T desconexo, já que $[u, v]$ é o único caminho em T ligando u a v .

Seja T uma árvore. Fixe uv uma aresta de T . Então conseguimos particionar $V(T)$ em dois conjuntos fazendo o seguinte. Considere V_u o conjunto dos vértices w de T cujo único caminho ligando w a u não contém v , e V_v o conjunto dos vértices w cujo único caminho ligando w a v não contém u . Então

$$V(T) = V_u \cup V_v.$$

Com efeito, dado w um vértice de T , então existe um único caminho ligando w a u . Se v não pertence ao tal caminho, então $w \in V_u$. Por outro lado, se v pertence ao tal caminho, temos que ele é da forma $[w, \dots, v, u]$, uma vez que $v \sim u$. Então $[w, \dots, v]$ é um caminho ligando w a v que não contém u , e portanto $w \in V_v$. Que eles são disjuntos é evidente pela definição de V_u e V_v .

Tomando os maiores subgrafos de T que contém os conjuntos de vértices V_u e V_v , obtemos como resultado duas árvores $T_v(u)$ e $T_u(v)$, respectivamente. Em $T_u(v)$, chamamos u de **referência** e v de **raiz**.

Exemplo 2.3.1. Considere a árvore T desenhada abaixo.

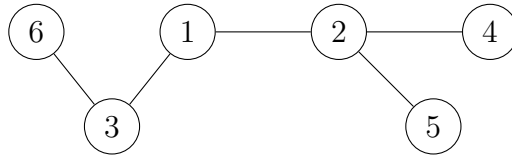


Figura 4 – A árvore T .

Como $1 \sim 2$, podemos obter as componentes $T_2(1)$ e $T_1(2)$ de T . Mostramos as duas na Figura 5.

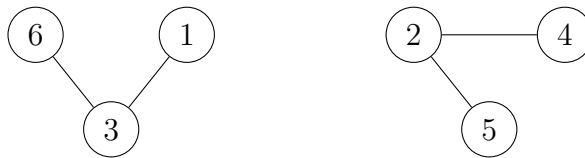


Figura 5 – As componentes $T_2(1)$ e $T_1(2)$ de T .

Intuitivamente as componentes são obtidas “retirando-se” a aresta $\{1, 2\}$ e separando as duas componentes, cada uma delas sendo tratada como uma árvore separadamente.

Um resultado bastante divertido sobre árvores é que toda árvore finita com mais de um vértice tem duas **folhas**, i.e, vértices de grau 1.

Proposição 3. *Seja T uma árvore finita com mais de um vértice. Então existem pelo menos dois vértices de T que têm grau 1.*

Demonstração. Considere o caminho de maior tamanho ligando dois vértices em T . Os extremos desse caminho, digamos os vértices u e v , devem ter grau 1. Com efeito, se um dos dois, digamos v , tivesse grau pelo menos 2, então teríamos o caminho $[u, u_1, \dots, u_n, v]$ e um outro vértice w conectado a v . Mas aí seria $[u, u_1, \dots, u_n, v, w]$ um caminho de tamanho maior que o caminho de maior tamanho em T , um absurdo. Segue que o grau de u e v é 1. $\square$

Mostraremos a seguir que dada uma árvore T e um vértice u de T , a adição de um novo vértice v ao grafo, junto da aresta uv , torna o grafo resultante ainda uma árvore.

Lema 2.3.1. *Seja $T = (V, E)$ uma árvore. Se $u \in V$ e $v \notin V$, então $T' = (V', E')$ é uma árvore, onde $V' = V \cup \{v\}$ e $E' = E \cup \{uv\}$.*

Com efeito, v se liga a algum outro vértice w de forma única pelo caminho $[v, u, \dots, w]$, que provém do único caminho em T que liga u a w . Para ligar qualquer outro par de vértices em T , não podemos passar por v , pois se não teríamos um caminho da forma $[w_1, \dots, u, v, u, \dots, w_2]$, que não é possível pois repete a aresta uv . Daí, a única forma de ligar um par de vértices $w_1, w_2 \neq v$ em T' , é tomando o mesmo único caminho que os liga em T . Isso prova que T' é uma árvore.

Exemplo 2.3.2 (Ilustrando o Lema 2.3.1). Considere a árvore T e o seu vértice $u \in V(T)$ destacado (do lado esquerdo) na Figura 6. Obtemos uma nova árvore T' (à direita na mesma figura), adicionando um vértice v que não está no conjunto de vértices de V , e a aresta uv .

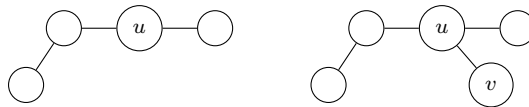


Figura 6 – À esquerda a árvore T , e à direita a árvore T' obtida por se adicionar a T o vértice v e a aresta uv .

Agora daremos mais uma caracterização para as árvores.

Proposição 4. *Seja T um grafo de n vértices. T é uma árvore se, e somente se, T é conexo e tem $n - 1$ arestas.*

Demonstração. A prova de que toda árvore de n vértices tem $n - 1$ arestas é por indução e é completamente análoga a prova acima. Primeiro note que a árvore de 1 vértice tem 0 arestas, e a única árvore de dois vértices tem uma aresta. Agora dada uma árvore T de n vértices, olhando as duas componentes ao arrancar uma aresta uv de T , uma tem $k - 1$

arestas e a outra $n - k - 1$. Juntando as $n - 2$ arestas das duas componentes e a aresta arrancada, temos que T tem $n - 1$ arestas, o que desejávamos provar.

A prova da volta será por indução. Suponha que todo grafo conexo de n vértices e $n - 1$ arestas é uma árvore. Considere agora um grafo $T = (V, E)$ conexo de $n + 1$ vértice e n arestas. Afirmamos que T tem pelo menos um vértice de grau 1. Com efeito, se não tivesse, então seria $d(v) \geq 2$, para todo $v \in V$, uma vez que T é conexo e não pode ter vértices de grau 0. Daí teríamos

$$2n = 2|E| = \sum_{v \in V} d(v) \geq \sum_{v \in V} 2 = 2|V| = 2n + 2,$$

um absurdo. Seja, pois $v \in V$ de grau 1, e u o único vértice ligado a v em T . Considere o grafo T' obtido por remover de T o vértice v e a aresta uv . Então T' ainda é conexo (pois removemos um vértice de grau 1), e tem n vértices e $n - 1$ arestas. Por hipótese de indução, T' é uma árvore. Pelo Lema 2.3.1, a adição do vértice v e da aresta uv à árvore T' torna o grafo resultante uma árvore. Mas o grafo resultante é justamente T , de onde concluímos que T é uma árvore. $\square$

No futuro, precisaremos utilizar o fato de que todo grafo conexo de k vértices contém uma árvore de k vértices. Este é o conteúdo do teorema a seguir.

Teorema 2.3.1. *Se H é um grafo conexo de k vértices, então existe uma árvore $K \subset H$ de k vértices.*

Demonstração. Seja H um grafo conexo com k vértices. Construiremos um subgrafo conexo de H com k vértices e $k - 1$ arestas. Para tal, comece adicionando ao nosso grafo a aresta v_1v_2 de $E(H)$ e os vértices $v_1, v_2 \in V(H)$. Prosseguindo, tome $u_1 \neq v_1, v_2$, um vértice de H . Como H é conexo, existe um caminho $[u_1, u_2, \dots, u_n, v_1]$. Se $u_i \neq v_1, v_2$, para todo $2 \leq i \leq n$, adicione o vértice u_n e a aresta u_nv_2 ao nosso grafo, e chame $u_n = v_3$. Por outro lado, se $u_i = v_1$ ou v_2 para algum $2 \leq i \leq n$, tome j o menor índice que satisfaz essa propriedade e adicione o vértice u_{j-1} e a aresta u_ju_{j-1} ao nosso grafo e chame $u_{j-1} = v_3$. Note que se continuarmos tal construção, sempre teremos que $v_i \neq v_1, \dots, v_{i-1}$. Continue o processo até obter um grafo com conjunto de vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Note que o grafo é conexo pois o n -ésimo vértice adicionado se liga a algum dos $n - 1$ vértices que já haviam sido adicionados. Além disso, como começamos com uma aresta e dois vértices, e a cada passo adicionamos uma aresta e um vértice, o grafo resultante tem $k - 1$ arestas. Chame de K o grafo que resulta desse processo. Como K tem k vértices, $k - 1$ arestas e é conexo, segue que K é uma árvore. Logo, conseguimos um subgrafo de G que é uma árvore de k vértices, como queríamos demonstrar. $\square$

2.4 Subgrafos e Isomorfismos

No Capítulo 7, definiremos algumas variáveis aleatórias que contam cópias isomórficas e fiéis de um grafo dado (de um tipo especial definido mais na frente) dentro de outro. Começaremos, portanto, a preparar o terreno para facilitar o entendimento do conteúdo lá apresentado.

Exemplo 2.4.1 (Subgrafos de árvores). Dadas T uma árvore e uv uma aresta sua, as componentes conexas $T_v(u)$ e $T_u(v)$ são subgrafos de T .

Exemplo 2.4.2. Fixando um vértice v de um grafo G , definimos o truncamento de G a partir de v com altura 1, como sendo o grafo $G_{v,1} = (V_1, E_1)$, onde $V_1 = \{v\} \cup \{u \in V : u \sim v\}$ e $E_1 = \{vu : u \in V_1 \setminus \{v\}\}$. Claramente $G_{v,1} \subset G$. Na Figura 7 está ilustrado o truncamento a partir de v_1 com altura 1, no grafo G do Exemplo 2.1.2. Nela, destacamos (à esquerda) quais as arestas e vértices de G que serão mantidas. Já à direita, temos o seu truncamento.

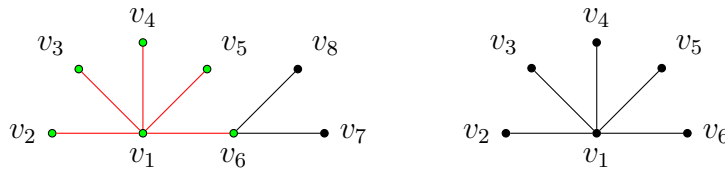


Figura 7 – G e seu truncamento $G_{v_1,1}$ de altura 1 a partir do vértice v_1 .

Diremos que dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ são **isomorfos** se existir uma função bijetora $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ que preserva arestas, i.e, $uv \in E_1$ se, e somente se, $\varphi(u)\varphi(v) \in E_2$. É evidente que se dois grafos são isomorfos, os seus conjuntos de vértices têm mesma cardinalidade. Muitas vezes diremos que se G e H são isomorfos, então G é uma **cópia isomórfica** de H , e vice-versa.

Claramente a relação $G \cong H$ definida por “ G é isomorfo a H ” é de equivalência. Isto decorre dos fatos: que $\varphi(v) = v$ é isomorfismo que preserva arestas; que se $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ é isomorfismo que preserva arestas, então $\varphi^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$ é isomorfismo que preserva arestas; e que composição de isomorfismos que preservam arestas é isomorfismo que preserva arestas. Para alguns propósitos, é conveniente considerar que dois grafos isomorfos são “a mesma coisa”. É o que se faz quando se está trabalhando com grafos não-rotulados.

Se uma cópia isomórfica de um grafo H é subgrafo de um grafo G , diremos que G contém uma cópia isomórfica de H .

Exemplo 2.4.3. Seja H o grafo formado por dois vértices u e v e a aresta uv . Então qualquer grafo $G = (V, E)$ com $|E| \geq 1$ contém uma cópia isomórfica de H . De fato, qualquer grafo formado por dois vértices e uma aresta é isomorfo a H .

Note que até agora demos uma ordenação natural para a sequência de graus porque pedimos que seu conjunto de vértices fosse $[n]$ sempre. No entanto, há uma outra forma de se ordenar os termos de uma sequência de graus sem precisar ordenar o conjunto de vértices. Podemos simplesmente anotar os graus de cada um dos vértices e depois ordená-los do maior para o menor. Dessa forma, ganhamos que quaisquer dois grafos isomorfos têm mesma sequência de graus, por causa da preservação das arestas.

Se G tem sequência de graus $(d_i)_{i=1}^n$, $d_i \geq d_{i+1}$ para todo $1 \leq i \leq n-1$, então todo grafo isomorfo a G tem sequência de graus (d_i) . Mas será que a recíproca é verdadeira? Veremos a resposta para esta pergunta na Seção 2.6.

2.5 Emparelhamentos Perfeitos

Nesta seção, veremos o que é um emparelhamento perfeito, e definiremos dois emparelhamentos especiais que utilizaremos para provar resultados nas seções seguintes. Antes, no entanto, definiremos a matriz de adjacência de um grafo, e veremos que, na verdade, um grafo de n vértices pode ser tratado com uma matriz $n \times n$ simétrica, que se anula na diagonal e tem coeficientes em $\{0, 1\}$.

Ao conjunto das matrizes $n \times n$, $M = (m_{ij})$ simétricas ($m_{ij} = m_{ji}$ para todos i, j), que $m_{ij} \in \{0, 1\}$ para todos i, j , e que se anulam na diagonal ($m_{ii} = 0$ para todo i), daremos o nome de SZ_n .

Até agora vimos que um grafo G é uma dupla formada por um conjunto de vértices V e um subconjunto E de $\binom{V}{2}$, das arestas de G . Veremos agora como definir as arestas de uma forma um pouco diferente, via uma função ω .

Dado o grafo $G = (V, E)$, defina a função $\omega : V^2 \rightarrow \{0, 1\}$, dada por $\omega(u, v) = \mathbf{1}(uv \in E)$. Obviamente ω é simétrica e $\omega(u, u) = 0$ para todo $u \in V$. Analogamente, dada uma função simétrica $\omega : V^2 \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $\omega(u, u) = 0$, defina o conjunto $E = \{uv : \omega(u, v) = 1\}$. Não é difícil ver que $E \subset \binom{V}{2}$. Então dado $G = (V, E)$, todas as informações de E são dadas por V e um função ω , unicamente determinada por E .

Tendo isso em mente, trataremos daqui em diante de um grafo como sendo uma dupla $G = (V, \omega)$, onde ω é uma função simétrica do conjunto dos pares ordenados de elementos de V no conjunto $\{0, 1\}$, que anula no conjunto $\Delta = \{(u, u) : u \in V\}$.

Com essa nova notação, dado um grafo $G = (V, \omega)$, o grau de $u \in V$ é dado por

$$d(u) = \sum_{v \in V} \omega(u, v).$$

Definição 2.5.1. Definimos a **matriz de adjacência** do grafo $G = ([n], \omega)$ como sendo a matriz $M_G = (m_{ij}) \in SZ_n$, tal que $m_{ij} = \omega(i, j)$.

Não é difícil ver que toda matriz $(m_{ij}) \in SZ_n$ define um grafo $([n], \omega)$ fazendo $\omega(i, j) = m_{ij}$. Além do mais, a correspondência entre os elementos de $\mathcal{GS}_n$ e SZ_n é biunívoca. Com isso concluímos que, pelo menos essencialmente, SZ_n é o conjunto dos grafos simples com conjunto de vértices $[n]$. Em outras palavras, estamos dizendo que a função

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{GS}_n &\rightarrow SZ_n \\ G &\mapsto M_G \end{aligned}$$

é uma bijeção.

Exemplo 2.5.1. A matriz de adjacência do grafo K_n é a matriz cujos coeficientes são $m_{ij} = 1(i \neq j)$, ou seja, a matriz

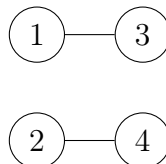
$$M_{K_n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Dado um grafo $G = ([n], \omega)$, a soma dos elementos da coluna i da matriz M_G é $s = \sum_{j=1}^n \omega(i, j) = d(i)$, o grau do vértice i .

Definição 2.5.2. Um **emparelhamento perfeito** num grafo de n vértices $G = ([n], \omega)$, é um subgrafo K de G tal que $d(u) = 1$ para todo $u \in [n]$.

A matriz de adjacência de um emparelhamento perfeito em G é, portanto, uma matriz de SZ_n tal que a soma dos elementos da coluna i é 1 para todo i . Note ainda que num emparelhamento, ao colocar um elemento 1 no coeficiente m_{ij} , toda a linha i e a coluna j devem ser preenchidas com 0. Mas como a matriz é simétrica, também devemos ter $m_{ji} = 1$, donde toda linha j e a coluna i devem ser preenchidas com 0. Assim, preenchamos duas colunas por vez e portanto a quantidade de colunas deve ser par, o que implica que o número de vértices de G deve ser par.

Exemplo 2.5.2. Se G é um grafo tal que $d(u) = 1$ para todo $u \in V(G)$, então G é um emparelhamento perfeito em si mesmo. Portanto, o grafo $K = ([4], \omega)$ tal que $\omega(1, 3) = \omega(3, 1) = \omega(2, 4) = \omega(4, 2) = 1$, e $\omega(i, j) = 0$ para todos os outros valores i, j , desenhado abaixo é um emparelhamento em si mesmo.



A matriz M_K do grafo K está representada logo abaixo

$$M_K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Veremos no Lema a seguir quantos são os emparelhamentos perfeitos em um grafo completo com S vértices, com S par.

Lema 2.5.1. *Seja S um inteiro positivo par. Então o conjunto Σ_1 dos emparelhamentos perfeitos sobre K_S tem cardinalidade*

$$|\Sigma_1| = \frac{S!}{(S/2)!2^{S/2}} = (S-1)!!.$$

Demonstração. Queremos dispor todos os vértices de K_S em uma lista de modo a formar pares. Esta disposição deve ser de tal modo que não importe a ordem em que os elementos da dupla estão dispostos. Além disso, não deve importar a ordem em que a dupla está disposta na lista.

Note que podemos dispor os S elementos na lista de $S!$ maneiras distintas. Na lista, estarão dispostas exatamente $S/2$ duplas. Mas não importa a ordem dos elementos em cada dupla, e portanto dividimos o total de maneiras de dispor por $2^{S/2}$. Além disso, não importa a posição de cada uma das $S/2$ duplas na disposição da lista e portanto dividimos o resultado por $(S/2)!$. Segue daí que

$$|\Sigma_1| = \frac{S!}{(S/2)!2^{S/2}},$$

como queríamos demonstrar. □

Estaremos interessados em contar o número de emparelhamentos perfeitos do grafo bipartido completo sobre conjuntos W_1 e W_2 com mesma cardinalidade.

Lema 2.5.2. *Dado o grafo bipartido completo sobre os conjuntos (W_1, W_2) , que denotaremos por K , com $|W_1| = S = |W_2|$, o conjunto Σ_2 dos emparelhamentos perfeitos em K tem $S!$ elementos.*

Demonstração. Note que cada emparelhamento é uma bijeção $W_1 \rightarrow W_2$. Como há um total de $S!$ dessas bijeções distintas, concluímos que $|\Sigma_2| = S!$. □

2.6 Sequência de graus dada

Começaremos com um problema.

Problema 1. Dada a sequência de graus $\vec{d}$ é possível determinar se existe ou não um grafo com essa sequência de graus?

A resposta para a pergunta acima (afirmativa), foi dada por Erdős e Gallai em [Erdős e Gallai 1960]. O seguinte Teorema (para uma prova leia [Erdős e Gallai 1960]) nos dá condição necessária e suficiente para que uma sequência $(d_i)_{i=1}^n$ seja sequência de graus de algum grafo simples G . Ele é um teorema central na teoria de sequências gráficas.

Teorema 2.6.1 (Erdős-Gallai). *A sequência $(d_i)_{i=1}^n$, $d_i \geq d_j$ se $i < j$, é sequência de graus de um grafo simples se, e somente se, $s = \sum_{i=1}^n d_i$ é par e*

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min\{d_i, k\}, \quad \text{para } 1 \leq k \leq n. \quad (2.1)$$

Utilizaremos o Teorema acima para provar que uma sequência que já vimos neste texto não é sequência de graus de nenhum grafo simples.

Exemplo 2.6.1. No Exemplo 2.1.4 vimos, sem provar de fato, que $(3, 3, 1, 1)$ não é sequência de graus. Pelo Teorema de Erdős-Gallai, para $k = 2$, temos

$$\sum_{i=1}^2 d_i = 6 \geq 4 = 2 + \sum_{i=3}^4 \min\{d_i, 2\},$$

o que mostra que a sequência dada de fato não é de um grafo simples.

No entanto, outra pergunta que pode vir a surgir é se dada uma sequência que define um grafo, ela define somente um grafo (no sentido de isomorfismo entre grafos).

Já vimos anteriormente que dois grafos isomorfos têm mesma sequência de graus. Mas se dois grafos têm mesma sequência de graus, conseguimos garantir que eles são isomorfos? Como veremos no Exemplo 2.6.2, a resposta para esta pergunta é um sonoro NÃO.

Exemplo 2.6.2 (Dois grafos não isomorfos). Verifique os dois grafos abaixo. Eles têm mesma quantidade de vértices, mesma quantidade de arestas e mesma sequência de graus, mas não há nenhum isomorfismo entre seus conjuntos de vértices que preserve arestas. De fato, o vértice de grau 3 no grafo da esquerda está conectado a dois vértices de grau 1, enquanto no segundo, o vértice de grau 3 está conectado a apenas um.



Figura 8 – Dois grafos com sequência de graus $(1, 1, 1, 2, 3)$ que não são isomorfos.

2.7 A Fórmula de Cayley para árvores rotuladas*

Nesta seção daremos uma prova para a Fórmula de Cayley para árvores. Esta é a prova apresentada em [Shukla 2018], e utiliza uma recorrência não linear para contar o número exato de árvores rotuladas de n vértices. O conteúdo aqui apresentado não prejudica em nada a leitura dos próximos capítulos e é meramente expositiva. A sua leitura é opcional.

Na prova serão utilizadas funções geradoras para encontrar o termo geral da recorrência montada.

Denotaremos o conjunto das árvores com conjunto de vértices $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ por $\mathcal{T}_n$. Para facilitar a notação, denotaremos $T_n = |\mathcal{T}_n|$. Não é difícil ver que $T_1 = T_2 = 1$.

Teorema 2.7.1 (Fórmula de Cayley). $|\mathcal{T}_n| = n^{n-2}$.

Demonstração. Contaremos a quantidade de árvores que têm uma aresta uv específica. Fixe uma aresta $uv \in \binom{V}{2}$. Denote por $E_n(uv)$ o número de árvores que contém a aresta uv . Note que para qualquer aresta específica wz , temos $E_n(uv) = E_n(wz)$. Isto porque poderíamos simplesmente trocar u por w , e v por z em cada árvore e continuaríamos com a mesma quantidade de árvores, mudando apenas qual aresta específica cada uma contém. Assim, denotaremos apenas por E_n o número de árvores rotuladas que contenham alguma aresta específica.

Como há $\binom{n}{2}$ possíveis pares de vértices e cada árvore de n vértices tem exatamente $n - 1$ arestas, então temos que

$$\frac{n(n-1)}{2} E_n = (n-1) T_n. \quad (2.2)$$

Daí resulta que

$$T_n = \frac{n}{2} E_n. \quad (2.3)$$

Contaremos agora o número de árvores rotuladas que contém uma aresta uv específica. Note que as componentes C_u e C_v ainda são árvores, uma contendo $k+1$ vértices e outra contendo $n-k-1$ vértices, respectivamente. Na componente C_u , temos u e outros k vértices, que podem ser escolhidos de $\binom{n-2}{k}$ formas distintas (todas exceto u e v). Depois de escolhidos os vértices, o número de possibilidades para C_u é justamente T_{k+1} , o número de árvores de $k+1$ vértices rotuladas. Os vértices que sobram estarão na componente C_v , que tem T_{n-k-1} possibilidades de ser organizada. Juntando todas as possíveis árvores montadas (para k entre 0 e $n-2$) e pondo uv de volta, temos exatamente todas as possibilidades de árvores de n vértices rotuladas que contém uv . Segue daí que

$$E_n = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} T_{k+1} T_{n-k-1}. \quad (2.4)$$

Substituindo (2.4) em (2.3), obtemos a seguinte recorrência não-linear

$$T_n = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} T_{k+1} T_{n-k-1}. \quad (2.5)$$

Utilizando a função geradora da exponencial, dada aqui por

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{n+1} \frac{x^{n+1}}{n!}. \quad (2.6)$$

Pelo produto de Cauchy de duas séries infinitas

$$(S(x))^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(T_{k+1} \frac{x^{k+1}}{k!} \right) \left(T_{n-k+1} \frac{x^{n-k+1}}{(n-k)!} \right).$$

Substituindo $m = n + 2$, temos

$$\begin{aligned} (S(x))^2 &= \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-2} \left(T_{k+1} \frac{x^{k+1}}{k!} \right) \left(T_{m-k-1} \frac{x^{m-k-1}}{(m-k-2)!} \right) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{2n}{2n(n-2)!} \frac{(n-2)!}{k!(n-k-2)!} T_{k+1} T_{n-k-1} x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2x^n}{n(n-2)!} \left[\frac{n}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} T_{k+1} T_{n-k-1} \right], \end{aligned}$$

que por (2.5) e por ser $(n-1)! = (n-1)(n-2)!$ nos faz concluir que

$$\begin{aligned} (S(x))^2 &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(n-1)}{n} T_n \frac{x^n}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n-1)}{n} T_n \frac{x^n}{(n-1)!}, \end{aligned}$$

pois para $n = 1$, o primeiro termo da série é nulo. Agora derivando ambos os lados obtemos que

$$\begin{aligned} 2S(x)S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2(n-1)T_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2nT_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} 2T_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

de onde concluimos que

$$S(x)S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nT_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} T_n \frac{x^n}{(n-1)!} \quad (2.7)$$

Por outro lado, por (2.6), temos que

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nT_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}. \quad (2.8)$$

Substituindo (2.6) e (2.8) em (2.7), e dividindo por $S(x)$ obtemos

$$S'(x) = \frac{S'(x)}{S(x)} - \frac{1}{x}. \quad (2.9)$$

Não é difícil ver que

$$\frac{d}{dx} \left(\log \frac{S(x)}{x} \right) = \frac{S'(x)}{S(x)} - \frac{1}{x}. \quad (2.10)$$

Substituindo (2.10) em (2.9), temos que

$$\frac{dS}{dx}(x) = \frac{d}{dx} \left(\log \frac{S(x)}{x} \right).$$

Integrando a expressão acima, obtemos

$$S(x) = \log \frac{S(x)}{x} + K, \quad (2.11)$$

onde K é uma constante. Agora note que por (2.6) temos que $S(0) = 0$ e que

$$\frac{S(x)}{x} = T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} T_{n+1} \frac{x^n}{n!},$$

donde $\frac{S(x)}{x}|_{x=0} = S_1 = 1$. Por (2.11) temos que $S(0) = \log(0) + K$, donde $K = 0$ é a nossa constante procurada. Daí concluímos que $S(x) = \log \frac{S(x)}{x}$. Tomando a exponencial,

$$S(x) = x e^{S(x)}. \quad (2.12)$$

Expandindo $S(x)$ em série de potências utilizando (com muita fé) o Teorema de Inversão de Lagrange (veja Apêndice A), obtemos

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n!}. \quad (2.13)$$

Comparando (2.13) e (2.6), concluímos que $T_{n+1} = n^{n-1}$, para todo $n \geq 0$, ou seja, $T_n = n^{n-2}$ para todo $n \geq 1$, como queríamos. $\square$

2.8 Exercícios

Exercício 2.8.1. Quantas arestas tem o grafo K_n ?

Exercício 2.8.2. Calcule o número de grafos simples de n vértices.

Exercício 2.8.3. Quantas árvores rotuladas de $1000!$ vértices existem?

Exercício 2.8.4. Encontre um grafo com sequência de graus $(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4)$.

Exercício 2.8.5. Seja $G = (V, E)$ um grafo e $v \in V$ um vértice qualquer. Provar que

$$d(v) = \sum_{u \in V} \mathbf{1}(u \sim v).$$

Exercício 2.8.6. Considere o grafo $G_n = ([n], E(n))$, onde $u \sim v$ em G_n quando $\text{mdc}(u, v) = 1$. Seja $\varphi(j)$ a função que conta quantos números relativamente primos com j existem entre 1 e j . Mostre que $d(j) = \varphi(j)$ se, e somente se, $j = n$.

Exercício 2.8.7. Seja $T = (V, E)$ uma árvore. Considere o conjunto $F = \{v \in V : d(v) = 1\}$. Mostre que

$$\sum_{u \in V \setminus F} d(u) = |F| + 2|V \setminus F| - 2.$$

Exercício 2.8.8. Mostre que não pode existir um grafo com sequência de graus $(5, 5, 4, 4, 3, 1)$.

Exercício 2.8.9. Prove sem utilizar indução que $2^{n(n-1)/2} > n^{n-2}$ para todo $n > 2$.

3 Modelo de configuração para multigrafos

Com os grafos conseguimos apenas determinar quando elementos de um dado conjunto estão conectados, mas nunca com que intensidade ou quantidade de conexões. Por outro lado, existe um outro tipo de estrutura que nos fornece melhores informações sobre essas conexões. Por exemplo em redes de transporte, podem haver mais de uma rodovia conectando dois pontos de uma cidade, e daí ter mais arestas é de extrema importância.

Nas seções que seguem, estaremos interessados em uma classe especial de grafos: os multigrafos. Definiremos para esta classe um modelo de configurações, que é uma “versão para crianças” de um modelo de configurações para multigrafos coloridos.

3.1 Conheça os multigrafos

Começaremos definindo multigrafos. Depois de definir sequência de graus de um multigrafo, mostraremos que para que uma sequência de inteiros positivos seja sequência de graus de algum grafo é necessário e suficiente que ela seja de soma par. Concluiremos mostrando que vários multigrafos podem ter a mesma sequência de graus.

Consideraremos $V = [n]$ para o que segue, a menos dos casos onde seja indicado o contrário.

Definição 3.1.1. Seja $n \in \mathbb{N}$. Um **multigrafo** é um par $G = (V, \omega)$, onde $\omega : V^2 \rightarrow \mathbb{N}$ é uma função tal que $\omega(u, u)$ é par e $\omega(u, v) = \omega(v, u)$.

Num multigrafo $G = (V, \omega)$, iremos convencionar que $\omega(u, v)$ é o número de arestas ligando u e v , se $u \neq v$; e $\omega(u, u)/2$ é o número de *loops* em u .

Exemplo 3.1.1 (As Sete Pontes de Königsberg). Talvez o (multi)grafo mais famoso da história seja o das sete pontes de Königsberg. Ele surge de um problema famoso na antiga cidade de Königsberg (atual Kaliningrado). Pelas ruas da cidade, os habitantes perguntavam se era possível atravessar as sete pontes sem que se repetisse nenhuma. A solução negativa do problema dá início à teoria dos grafos. Na Figura 9 representamos o tal grafo. Cada vértice nele representa um dos quatro pedaços de terra da cidade, e cada aresta representa uma das sete pontes ligando essas regiões.

Analogamente ao que se faz com grafos, em um multigrafo, o número de arestas incidindo sobre um determinado vértice é o que chamamos de grau desse vértice. Como

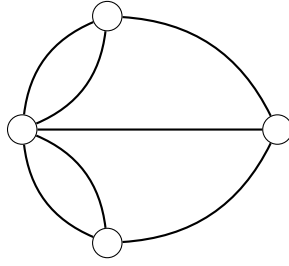


Figura 9 – Grafo das Sete Pontes de Königsberg

um *loop* incide duas vezes no mesmo vértice, ele contribui duas vezes para o grau, e por isso é importante que consideremos o número de *loops* em u como sendo $\omega(u, u)/2$.

Definição 3.1.2. Seja $G = (V, \omega)$ um grafo. Definimos o **grau do vértice** $u \in V$ como sendo o número

$$d(u) = \sum_{v=1}^n \omega(u, v).$$

Chamamos de **sequência de graus** de G o vetor $\vec{d} = (d(1), d(2), \dots, d(n))$.

Veremos na proposição a seguir que para uma sequência $\vec{d} = (d(1), d(2), \dots, d(n))$ ser sequência de graus de algum multigrafo basta que $d(i)$ seja inteiro não-negativo para todo i e a soma das entradas seja par.

Proposição 5. *Seja $\vec{d} = (d(1), \dots, d(n))$ uma sequência de inteiros não-negativos. Então $\vec{d}$ é sequência de graus de algum multigrafo G com conjunto de vértices $[n]$ se, e somente se, $\sum_{i=1}^n d(i)$ é par.*

Demonstração. A necessidade é trivial, uma vez que cada aresta e *loop* é contado duas vezes para o grau.

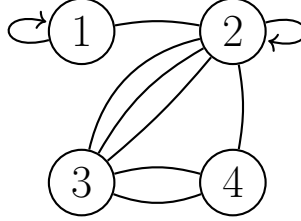
Para provar a suficiência, sejam $d(1), \dots, d(n)$ números inteiros não-negativos cuja soma é par. Monte um multigrafo com conjunto de vértices $[n]$ como segue. Se $d(i) = 2k_i$, então adicione k_i *loops* em i . Os $d(j)$ que sobraem serão todos ímpares e haverá uma quantidade par deles. Sejam $d(j_1), d(j_2), \dots, d(j_{2l})$ os termos ímpares da sequência. Então existem k_m para os quais $d(j_m) = 2k_m + 1$. Sendo assim, adicione no vértice j_m um total de k_m *loops*. Por fim adicione as arestas $\{j_1, j_2\}, \{j_3, j_4\}, \dots, \{j_{2l-1}, j_{2l}\}$. O resultado desse processo é um multigrafo com sequência de graus $\vec{d}$ por construção. $\square$

Estaremos interessados em trabalhar com multigrafos com sequência de graus $\vec{d}$ fixada. Dito isto, fixe $\vec{d}$ uma sequência de inteiros positivos de soma par.

Definição 3.1.3. Chamaremos de $\mathcal{MG}(\vec{d})$ o conjunto dos multigrafos com sequência de graus $\vec{d}$.

Partiremos para alguns exemplos.

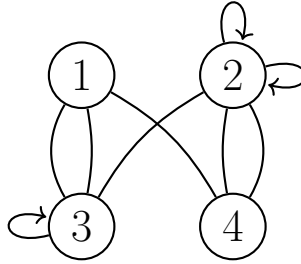
Exemplo 3.1.2. Abaixo temos o multigrafo G com conjunto de vértices $[4]$, definido por $\omega(1, 2) = \omega(2, 1) = \omega(2, 4) = \omega(4, 2) = 1$; $\omega(1, 1) = \omega(2, 2) = \omega(3, 4) = \omega(4, 3) = 2$; $\omega(2, 3) = \omega(3, 2) = 3$.



A sequência de graus de G é $(3, 7, 5, 3)$.

Daremos agora um exemplo de multigrafo que tem a mesma sequência de graus de G do exemplo acima, mas não é isomorfo a ele.

Exemplo 3.1.3. O multigrafo G' desenhado abaixo tem sequência de graus $(3, 7, 5, 3)$ mas não é isomorfo ao multigrafo G do Exemplo 3.1.2.



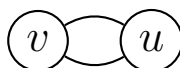
Isso reforça o problema de unicidade: em geral, há diversos multigrafos distintos com a mesma sequência de graus.

Proposição 6. *Seja $G = (V, \omega)$ um multigrafo. Se existe um vértice $v \in V$ tal que $d(v) - \omega(v, v) \geq 2$, então existe um multigrafo $H \neq G$ com mesma sequência de graus de G .*

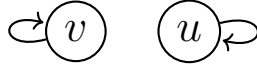
Note que estamos pedindo para que haja um vértice que tenha pelo menos duas conexões que não sejam *loops*.

Demonstração. Temos duas possibilidades: ou existe um vértice $u \in V$ com aresta dupla conectada a v , ou existem $u, w \in V$ conectados a v .

Suponha que v tem pelo menos duas arestas conectadas a um vértice u de G , como na figura abaixo.

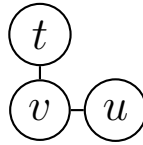


Apague as arestas e coloque um *loop* em cada um dos dois vértices, não alterando mais nada no restante do multigrafo.

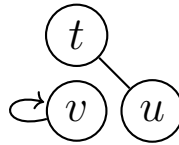


Note que o grau dos dois vértices permanece inalterado por essa mudança. Obtemos assim um novo multigrafo H que não é isomorfo a G e que tem mesma sequência de graus de G .

Agora suponha que existem dois vértices $u, t \in V$ conectados a v .



Apague as duas arestas e ponha um *loop* em v e uma aresta conectando t e u , e deixe o resto do multigrafo como antes.



Novamente os graus de todos os vértices do multigrafo continuam inalterados. Assim, construímos um multigrafo H que não é isomorfo a G e que tem mesma sequência de graus de G . $\square$

Proposição 7. *Seja $G = (V, \omega)$ um multigrafo. Se existe $v \in V$ com $d(v, v) \geq 2$ e (i.) existe $\omega(u, u) \geq 2$, ou (ii.) existem $u, w \in V$ com $\omega(u, w) \geq 1$, então existe $H \neq G$ multigrafo com mesma sequência de graus de G .*

Demonstração. Suponha que existam $u, v \in V$ tais que $\omega(u, u) \geq 2$ e $\omega(v, v) \geq 2$. Então temos pelo menos dois *loops* em G , um em u e um em v . Podemos obter um multigrafo $H \neq G$ desfazendo os dois *loops* e adicionando uma aresta dupla ligando u e v . Claramente H tem mesma sequência de graus de G .

No segundo caso, se temos um *loop* em v e uma aresta em ligando u e w , podemos desfazer o *loop* e a aresta e adicionar as arestas uv e vw . Chame o grafo resultante desse procedimento de H . A sequência de graus de H é a mesma de G , mas $H \neq G$. $\square$

3.2 Modelo de Configurações para Multigrafos

Na presente seção definiremos o que é uma configuração, e como obter um multigrafo a partir de uma configuração. Mostraremos ainda que a função Γ que associa as tais configurações a um elemento de $\mathcal{MG}$ é sobrejetora, e portanto cada multigrafo provém de

alguma configuração via Γ . No final da seção, contaremos a quantidade de configurações que são levadas por Γ em um grafo $H = (V, \omega)$ fixado.

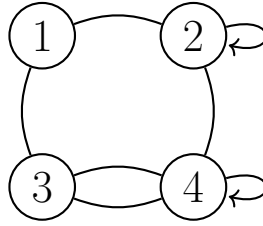
Definição 3.2.1. Para cada sequência de graus $\vec{d}$ de um multigrafo, fixe um conjunto

$$W = \bigcup_{i=1}^n W(i),$$

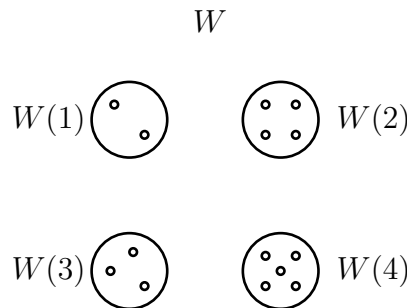
com $\sum_{i=1}^n d(i)$ pontos, de tal modo que $|W(i)| = d(i)$ para cada $i \in [n]$. Chamaremos W de **conjunto associado** a $\vec{d}$.

O que estamos fazendo é criar n “aglomerados” de pontos $W(i)$ com $d(i)$ pontos cada.

Exemplo 3.2.1. Considere o multigrafo G desenhado abaixo. Ele é definido por $\omega(1, 2) = \omega(1, 3) = \omega(3, 4) = 1$; $\omega(2, 2) = \omega(3, 4) = \omega(4, 4) = 2$. Omitimos os valores não-nulos de $\omega(i, j)$ para $i > j$, mas basta lembrar que $\omega(i, j) = \omega(j, i)$. Os demais valores são iguais a 0.



Abaixo representaremos em um desenho o nosso conjunto W , que é união dos aglomerados $W(i)$, cada um contendo exatamente $d(i)$ pontos. Note que $d(1) = 2, d(2) = 4, d(3) = 3$ e $d(4) = 5$.



O conjunto W é uma espécie de “grafo em branco” com vértices espalhados por vários outros conjuntos. Estaremos interessados em completar esses espaços vazios com ligações que formem pares nesse conjunto de vértices. Quando fazemos isso, chamamos o resultado de *configuração*.

Agora formalizaremos o conceito de configuração que utilizaremos nesta seção. Ao invés de utilizar W como um grafo em branco, chamaremos de configuração um tipo especial de função cujo domínio é W^2 .

Definição 3.2.2. Dado um conjunto não-vazio V de cardinalidade par, chamaremos de **emparelhamento** uma função $\sigma : V^2 \rightarrow \{0, 1\}$ que para todos $u, v \in V$, satisfaz

1. $\sigma(u, u) = 0$ (*Anulamento na diagonal*);
2. $\sigma(u, v) = \sigma(v, u)$ (*Simetria*);
3. $\sum_{w \in V} \sigma(u, w) = 1$ (*Fidelidade*).

No caso especial em que $V = W(\vec{d})$, chamaremos σ de **configuração** em W .

Observação 1. Na definição acima poderíamos ter pedido que σ fosse uma função $\binom{V}{2} \rightarrow \{0, 1\}$, e seria suficiente que $\sum_{v \in V} \sigma(\{u, v\}) = 1$ para termos um emparelhamento, mas com isso a notação ficaria complicada nas contas que seguem.

Veremos que um emparelhamento é, essencialmente, um emparelhamento perfeito (sobre um grafo completo) no sentido de grafos.

Exemplo 3.2.2. Dando uma enumeração em V , digamos $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{2n}\}$, um emparelhamento sobre V pode ser representado como sendo uma matriz simétrica com entradas em $\{0, 1\}$, cuja diagonal se anula e a soma dos elementos de cada coluna é 1, fazendo-se $m_{ij} = \sigma(v_i, v_j)$. A matriz $M = (m_{ij}) \in SZ_{2n}$ é matriz de um emparelhamento perfeito sobre K_{2n} . No caso onde temos uma configuração, para deixar evidente as ligações entre os conjuntos $W(i)$, podemos representar uma configuração como uma matriz simétrica $M = M(\sigma)$ em blocos

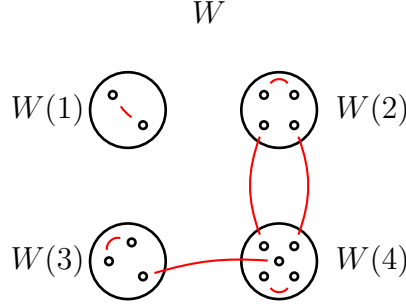
$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{bmatrix},$$

onde cada bloco M_{ij} é a matriz dos valores $\sigma(u, v)$ com $u \in W(i)$ e $v \in W(j)$.

Definição 3.2.3. Denotaremos por $\Sigma_1 = \Sigma_1(\vec{d})$ o conjunto das configurações de W .

Como vimos agora a pouco, faz sentido tratar uma configuração como um emparelhamento perfeito sobre K_{2n} , e por isso a escolha da mesma notação que utilizamos na Seção 2.5. Representaremos os elementos de Σ_1 por um desenho que liga u e v quando $\sigma(u, v) = 1$. Note que u é elemento de algum aglomerado $W(i)$ e v de algum aglomerado $W(j)$, podendo ser $i = j$. No exemplo abaixo desenhamos um elemento de Σ_1 .

Exemplo 3.2.3. Considere o conjunto W obtido a partir do grafo do Exemplo 3.2.1. Abaixo ilustramos um emparelhamento perfeito em W .



Definição 3.2.4. Dada uma configuração $\sigma \in \Sigma_1$, denote por $\Gamma(\sigma)$ o multigrafo com conjunto de vértices $[n]$ definido por $\omega^\sigma(i, j) = \text{“número de conexões entre elementos dos aglomerados } W(i) \text{ e } W(j)\text{”}$.

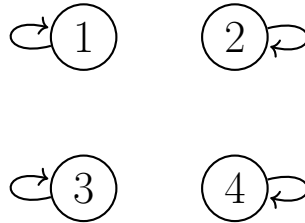
O que Γ faz é adicionar uma aresta ij para cada ligação entre elementos de $W(i)$ e $W(j)$. Pela definição de configuração, formalmente temos que $\Gamma(\sigma)$ é o multigrafo $([n], \omega^\sigma)$ que obedece

$$\omega^\sigma(i, j) = \sum_{u \in W(i)} \sum_{v \in W(j)} \sigma(u, v). \quad (3.1)$$

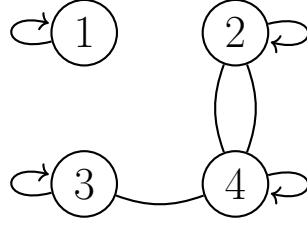
Note que se $u, v \in W(i)$, então $\omega(u, v) = 1$ é contado duas vezes em (3.1), portanto o número de *loops* é contado dobrado por ω^σ , bem como queremos.

No exemplo abaixo obtemos o multigrafo que é gerado por Γ a partir da configuração do Exemplo 3.2.3.

Exemplo 3.2.4. Considere a configuração σ obtida pelo multigrafo do Exemplo 3.2.3. Começaremos a construção adicionando os *loops*. Note que um par de elementos de $W(i)$ se conectando em cada i . Daí, adicionaremos um *loop* em cada vértice do nosso grafo resultante.



Prosseguindo, observe que há dois pares saindo do vértice 2 para o vértice 4, e há um par saindo de 3 para 4. Portanto, precisamos adiciona dois pares de arestas ligando 2 e 4, e um par ligando 3 e 4.



Note que o número de arestas incidindo em cada vértice de $\Gamma(\sigma)$ permanece inalterado em relação ao grafo sobre o tomamos a configuração σ , uma vez que tomamos as arestas conectadas ao vértice i de acordo com o número de elementos no aglomerado (que é igual ao grau de i no multigrafo original).

Proposição 8. *Se σ é uma configuração sobre $W(\vec{d})$, então $\Gamma(\sigma)$ tem sequência de graus $\vec{d}$.*

Demonstração. Denote $d^\sigma(i)$ o grau do vértice i no grafo $\Gamma(\sigma)$. Afirmamos que para todo $i \in [n]$, temos $d^\sigma(i) = d(i)$. De fato, seja $i \in [n]$ arbitrário. Pela definição de grau temos que

$$\begin{aligned} d^\sigma(i) &= \sum_{j=1}^n \omega^\sigma(i, j) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{u \in W(i)} \sum_{v \in W(j)} \sigma(u, v) \\ &= \sum_{u \in W(i)} \sum_{j=1}^n \sum_{v \in W(j)} \sigma(u, v). \end{aligned}$$

Agora note que $W = \bigcup_{j=1}^n W(j)$ (e esta união é disjunta), e portanto

$$\begin{aligned} d^\sigma(i) &= \sum_{u \in W(i)} \sum_{v \in W} \sigma(u, v) \\ &= \sum_{u \in W(i)} 1 = |W(i)| = d(i), \end{aligned}$$

o que prova que a sequência de graus de $\Gamma(\sigma)$ é $\vec{d}$. □

Na proposição a seguir mostraremos que cada multigrafo G com sequência de graus $\vec{d}$ é atingido por pelo menos uma configuração $\sigma \in \Sigma(\vec{d})$ via Γ . A ideia utilizada para demonstrar a Proposição 9 é ligar $\omega(i, j)$ elementos de W_i para W_j se $i \neq j$ (via bijeções), e emparelhar $\omega(i, i)$ elementos de W_i (via emparelhamentos).

Proposição 9. *A função $\Gamma : \Sigma_1 \rightarrow \mathcal{MG}(\vec{d})$ é sobrejetora.*

Demonstração. Sejam $G = (V, \omega) \in \mathcal{MG}(\vec{d})$ e $W(\vec{d}) = \bigcup_{i=1}^n W(i)$ o conjunto associado à $\vec{d}$. Como para todo $i = 1, \dots, n$ temos que $|W(i)| = d(i) = \sum_{j=1}^n \omega(i, j)$, então podemos

particionar o conjunto $W(i)$ em conjuntos $W_j(i)$ de cardinalidade $\omega(i, j)$, ou seja, escrever $W(i) = \bigcup_{j=1}^n W_j(i)$, onde $|W_j(i)| = \omega(i, j)$.

Por definição de multigrafo, $|W_j(i)| = |W_i(j)|$. Portanto para cada par $i < j$ podemos tomar uma função bijetora arbitrária fixa

$$f_{ij} : W_j(i) \rightarrow W_i(j).$$

No caso em que $i = j$, tome um emparelhamento arbitrário fixo

$$f_{ii} : W_i(i)^2 \rightarrow \{0, 1\}$$

em $W_i(i)$. Note que dados $u, v \in W$, existem $i = i(u), j = j(v)$ tais que $u \in W(i)$ e $v \in W(j)$, podendo inclusive ser $i = j$.

Iremos construir abaixo uma configuração $\sigma : W^2 \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $\Gamma(\sigma) = G$.

Suponha $i \leq j$. Para cada par $u \in W_j(i)$ e $v \in W_i(j)$ defina os seguintes valores

$$\sigma(u, v) = \begin{cases} \mathbf{1}(f_{ij}(u) = v), & \text{se } i \neq j; \\ \mathbf{1}(f_{ii}(u, v) = 1), & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Em seguida, ponha $\sigma(v, u) = \sigma(u, v)$. Caso $u \in W_j(i)$ e $v \in W_l(k)$ com $j \neq k$ ou $i \neq l$, ponha $\sigma(u, v) = \sigma(v, u) = 0$. Afirmamos que σ é uma configuração.

Com efeito, as condições 1. e 2. da Definição 3.2.2 são satisfeitas pela forma como construímos σ . Para ver que σ obedece a condição 3. da mesma definição, observe que para cada $u \in W$, existem i, j tais que $u \in W_j(i)$. Portanto, apenas é possível que $\sigma(u, v) = 1$ se $v \in W_i(j)$. Assim,

$$\sum_{v \in W} \sigma(u, v) = \sum_{v \in W_i(j)} \sigma(u, v) = 1,$$

pelas definições de bijeção e emparelhamento. Agora resta mostrar que $\Gamma(\sigma) = G$. Para ver isto, note que

$$\omega^\sigma(i, j) = \sum_{u \in W(i)} \sum_{v \in W(j)} \sigma(u, v).$$

No entanto se $u \in W(i)$ e $v \in W(j)$, então $\sigma(u, v) \neq 0$ se, e apenas se, $u \in W_j(i)$ e $v \in W_i(j)$. Daí,

$$\omega^\sigma(i, j) = \sum_{u \in W_j(i)} \sum_{v \in W_i(j)} \sigma(u, v).$$

Agora note que para cada $u \in W_j(i)$, temos que $\sum_{v \in W_i(j)} \sigma(u, v) = 1$, donde

$$\omega^\sigma(i, j) = \sum_{u \in W_j(i)} 1 = |W_j(i)| = \omega(i, j),$$

como queríamos demonstrar. □

A Proposição acima nos diz que cada multigrafo em $\mathcal{MG}(\vec{d})$ pode ser obtido via Γ por pelo menos uma configuração, mas pode ser que ele seja proveniente de várias configurações, como veremos a seguir. O Teorema 3.2.1 conta a quantidade exata de configurações σ que vão em grafo fixado $H \in \mathcal{MG}(\vec{d})$ qualquer por Γ .

É importante lembrar que o conjunto Σ_1 depende de W , e portanto depende de $\vec{d}$.

Teorema 3.2.1. *Seja H um multigrafo com conjunto de vértices $[n]$ e com sequência de graus $(d(1), \dots, d(n))$. O número de configurações $\sigma \in \Sigma_1$ tal que $\Gamma(\sigma) = H$ é dado por*

$$n_1(H) = \frac{\prod_{i=1}^n d(i)!}{\prod_{i=1}^n (\omega(i, i)/2)! 2^{\omega(i, i)/2} \prod_{i < j} \omega(i, j)!},$$

onde $\omega(i, j)$ é o número de arestas entre o par ij em H e $\omega(i, i)/2$ é o número de loops no vértice i em H .

Demonstração. Para facilitar a escrita na demonstração, dada uma configuração σ , quando $\sigma(u, v) = 1$, diremos que “há uma aresta entre u e v ”.

Contaremos a quantidade de configurações $\sigma \in \Sigma_c$ tais que para todo $i < j$, há exatamente $\omega(i, j)$ elementos $u \in W(i)$ e $v \in W(j)$ tais que $\sigma(u, v) = 1$; e tais que para todo $i \in [n]$, há exatamente $\omega(i, i)/2$ pares $u, v \in W(i)$ tais que $\sigma(u, v) = 1$.

Fixe $i < j$. Comece escolhendo $\omega(i, j)$ elementos de $W(i)$ e $\omega(i, j)$ elementos de $W(j)$ para produzir $\omega(i, j)$ arestas entre $W(i)$ e $W(j)$. Note que há

$$\omega(i, j)! \tag{3.2}$$

maneiras distintas de fazer essas escolhas, o número de bijeções entre conjuntos de cardinalidade $\omega(i, j)$.

Prosseguindo, podemos escolher $\omega(i, i)$ elementos de $W(i)$ para produzir os $\omega(i, i)/2$ loops em i . Note que a quantidade de maneiras de se produzir esses loops de forma distinta é a mesma de se tomar o total de emparelhamento perfeitos no grafo completo com $\omega(i, i)$ vértices, uma vez que cada elemento de $W(i)$ escolhido tem grau 1 e eles se ligam a elementos do próprio $W(i)$. Sendo assim, há

$$\frac{\omega(i, i)!}{(\omega(i, i)/2)! 2^{\omega(i, i)/2}} \tag{3.3}$$

maneiras distintas de se tomarem os tais loops.

Por último, para cada vértice i temos, distintamente,

$$\binom{d(i)}{\omega(i, 1), \dots, \omega(i, n)} = \frac{d(i)!}{\omega(i, 1)! \cdots \omega(i, n)!} \tag{3.4}$$

maneiras de se escolher os elementos de $W(i)$ para acoplar com os elementos de $W(j)$, $1 \leq j \leq n$. Agora, faremos os vértices i variar. Note que por (3.2), há

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \omega(i, j)!$$

maneiras distintas de escolher todas as arestas entre vértices $i \neq j$ de $[n]$. Já por (3.3), há

$$\prod_{i=1}^n \frac{\omega(i, i)!}{(\omega(i, i)/2)! 2^{\omega(i, i)/2}}$$

maneiras distintas de se tomar os *loops* em cada vértice $i \in [n]$ do nosso grafo. Para concluir essa parte, por (3.4) há

$$\prod_{i=1}^n \frac{d(i)!}{\omega(i, 1)! \cdots \omega(i, n)!} = \frac{\prod_{i=1}^n d(i)!}{\prod_{i,j} \omega(i, j)!}$$

maneira de acoplar-se os elementos entre os aglomerados $W(i)$ e $W(j)$ com $1 \leq i, j \leq n$.

Juntando tudo, temos que

$$n_1(H) = \frac{\prod_{i=1}^n d(i)!}{\prod_{i,j} \omega(i, j)!} \prod_{i < j} \omega(i, j)! \prod_{i=1}^n \frac{\omega(i, i)!}{(\omega(i, i)/2)! 2^{\omega(i, i)/2}} \quad (3.5)$$

$$= \prod_{i=1}^n \frac{d(i)!}{(\omega(i, i)/2)! 2^{\omega(i, i)/2}} \frac{\prod_{i=1}^n \omega(i, i)! \prod_{i < j} \omega(i, j)!}{\prod_{i,j} \omega(i, j)!} \quad (3.6)$$

Note que em (3.6), a segunda parcela pode ser simplificada

$$\frac{\prod_{i=1}^n \omega(i, i)! \prod_{i < j} \omega(i, j)!}{\prod_{i,j} \omega(i, j)!} = \frac{\prod_{i < j} \omega(i, j)!}{\prod_{i \neq j} \omega(i, j)!} = \frac{1}{\prod_{i > j} \omega(i, j)!} = \frac{1}{\prod_{i < j} \omega(i, j)!} \quad (3.7)$$

Agora, substituindo (3.7) em (3.6), segue que o número de configurações que resultam em H pela função Γ é dado por

$$n_1(H) = \frac{\prod_{i=1}^n d(i)!}{\prod_{i=1}^n (\omega(i, i)/2)! 2^{\omega(i, i)/2} \prod_{i < j} \omega(i, j)!},$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Temos, assim, tudo em mãos para definir o modelo de configurações para multigrafos.

Definição 3.2.5. Chamaremos de **modelo de configurações para multigrafos** a lei de Γ quando tomamos σ aleatoriamente de maneira uniforme em Σ_1 .

3.3 Multigrafos direcionados

Definiremos agora o que é um multigrafo ser direcionado. O objetivo é apenas entender o que é ter arestas direcionadas num multigrafo, sem se preocupar com resultados relacionados à esses grafos em si.

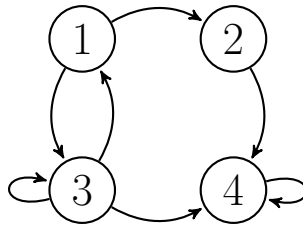
Definição 3.3.1. Seja $n \in \mathbb{N}$. Um **multigrafo direcionado** é um par $G = (V, \omega)$, onde $V = [n]$ e $\omega : V^2 \rightarrow \mathbb{N}$ é uma função.

Num multigrafo direcionado temos que

1. $\omega(u, u)$ é o número de *loops* no vértice u ; e
2. $\omega(u, v)$, $u \neq v$, é o número de arestas partindo de u e chegando em v .

Note a diferença: agora não há mais a necessidade de se ter $\omega(u, v) = \omega(v, u)$. Isso ocorre porque nos multigrafos direcionados não apenas estamos interessados em saber se dois vértices estão conectados via arestas, mas também nos importamos com o sentido dessa conexão. Nos multigrafos as arestas são como estradas de mão dupla ligando os vértices. Já nos multigrafos direcionados, elas são como estradas de mão única que ligam esses vértices.

Exemplo 3.3.1 (Um exemplo de multigrafo). Abaixo temos um exemplo de multigrafo. Nele, $V = [4]$ e temos os valores $\omega(1, 2) = \omega(1, 3) = \omega(2, 4) = \omega(3, 1) = \omega(3, 4) = 1$; $\omega(3, 3) = \omega(4, 4) = 2$.



Uma outra forma de definir multigrafos direcionados é como uma dupla $G = (V, E)$, onde V é um conjunto não-vazio e $E \subset V^2 \times \mathbb{N}$. Com essa definição, (e, n) indica que a aresta e foi adicionada n vezes no multigrafo.

Fixe $G = (V, \omega)$ um multigrafo direcionado.

Definição 3.3.2. O **grau do vértice** $u \in V$, $d(u)$, é o número de arestas que partem de u , ou seja,

$$d(u) = \sum_{v \in V} \omega(u, v).$$

Damos o nome de **sequência de graus de** G ao vetor cujas entradas são os graus dos vértices de G ,

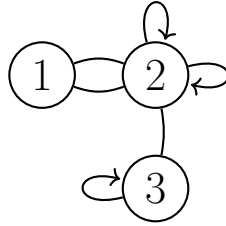
$$\vec{d} = (d(1), \dots, d(n)).$$

3.4 Exercícios

Exercício 3.4.1. Seja G um multigrafo com conjunto de vértices $[n]$, com r arestas e s *loops*. Calcule Σ_1 em termos de r e s .

Exercício 3.4.2. Calcule a quantidade de multigrafos G com conjunto de vértices $[3]$ que têm sequência de graus $(2, 2, 2)$ mas não são isomorfos a K_3 .

Exercício 3.4.3. Considere G o multigrafo desenhado abaixo.



- Calcule $|\Sigma_1|$.
- Calcule $|\Gamma^{-1}(G)|$.
- Seja σ uma configuração tomada aleatoriamente de maneira uniforme no conjunto Σ_1 . Calcule $\mathbb{P}(\Gamma(\sigma) = G)$.

Exercício 3.4.4. Dê exemplo de dois multigrafos que têm mesma sequência de graus, mesmo conjunto de vértices, são isomorfos, mas não iguais.

4 Modelo de configuração para multigrafos direcionados

O objetivo deste capítulo é construir o modelo de configurações direcionado. Aqui, estaremos interessados em gerar cópias aleatórias de multigrafos direcionados com sequência de graus fixada, assim como já fizemos para o modelo de multigrafos.

4.1 Grafos Direcionados

Nesta seção, trataremos de um modelo de configurações para multigrafos direcionados. Já vimos no final da seção passada a definição de multigrafos direcionados, mas veremos agora uma opção alternativa que ajuda no estudo desses grafos via sequência de graus. Ao invés de definir apenas uma função ω_1 que define um multigrafo direcionado, utilizaremos uma segunda função $\omega_2 : V^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$, que satisfaz $\omega_2(u, v) = \omega_1(v, u)$.

Definição 4.1.1. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $V = [n]$. Um **multigrafo direcionado** é um par $G = (V, \omega)$, onde $\omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ e $\omega_1(u, v) = \omega_2(v, u)$, para todos $u, v \in [n]$.

Um multigrafo direcionado pode ser representado graficamente como sendo um multigrafo tal que

1. $\omega_1(u, v) = \omega_2(v, u)$ é o número de arestas saindo de u e chegando em v de cor c_1 , e também o número de arestas saindo de v e chegando em u de cor c_2 .
2. $\omega_1(u, u) = \omega_2(u, u)$ é o número de *loops* de cor c_1 no vértice u .

Como observado acima, convencionaremos que só serão representados graficamente *loops* de cor c_1 . Para ver um exemplo de multigrafo direcionado segundo essa nova definição, veja Exemplo 4.1.1.

Definição 4.1.2. Seja $G = (V, \omega)$ um multigrafo direcionado. Definimos o grau na cor c_i , com $i = 1, 2$, do vértice $u \in [n]$ de G , como sendo o número

$$d_i(u) = \sum_{v \in V} \omega_i(u, v).$$

O grau na cor i do vértice u no multigrafo direcionado G pode ser interpretado como o número de arestas da cor i saindo de u e chegando em algum vértice de G .

Note que pela definição acima estamos tratando simplesmente de um multigrafo direcionado. A sequência de graus da cor c_1 no vértice u conta quantas arestas partem de

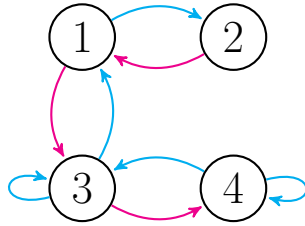
u com a cor c_1 . A sequência de graus de cor c_2 , conta quantas arestas azuis chegam em u de cor c_1 .

Observação 2. Embora não sejam desenhados *loops* de cor c_2 , o grau na cor c_2 conta $\omega_2(i, i)$ para cada $i \in V$.

Observação 3. Atente-se ao fato que apenas precisamos conhecer a função ω_1 para que o grafo todo esteja determinado.

Nos exemplos e definições desta seção, trataremos a cor c_1 como sendo ciano e a cor c_2 como sendo magenta para facilitar a visualização inicial e evitar carregar os rótulos nas arestas o tempo todo.

Exemplo 4.1.1 (Um exemplo de multigrafo direcionado). Abaixo temos um exemplo de multigrafo direcionado com 4 vértices, de cores ciano e mangenta, respectivamente. Neste grafo temos $\omega_1(1, 2) = \omega_2(2, 1) = \omega_1(1, 3) = \omega_2(3, 1) = \omega_1(4, 3) = \omega_2(3, 4) = \omega_2(3, 3) = \omega_2(4, 4) = 1$; $\omega_1(3, 3) = \omega_1(4, 4) = 2$.

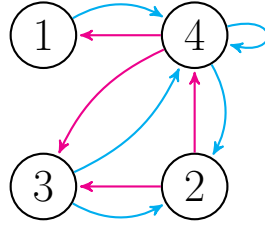


O grau da cor c_1 no vértice 3 é $d_1(3) = \omega_1(3, 1) + \omega_1(3, 3) = 2$. Nesse vértice há uma aresta saindo do vértice 3 de cor ciano e um *loop* de mesma cor.

Definição 4.1.3. Definimos as **sequências de graus na cor ciano e magenta** de $G = ([n], \omega)$ como sendo os vetores $\vec{d}_1 = (d_1(1), \dots, d_1(n))$ e $\vec{d}_2 = (d_2(1), \dots, d_2(n))$, respectivamente.

Podemos ver que o multigrafo do exemplo acima tem sequência de graus $(1, 0, 2, 2)$ na cor ciano e $(1, 1, 2, 1)$ na cor magenta. Mas note que ter somente a sequência de graus na cor ciano nada diz sobre a sequência de graus da cor magenta. De fato, exibiremos no Exemplo 4.1.2 um grafo com sequência de graus $(1, 0, 2, 2)$ na cor ciano, mas com sequência de graus na cor magenta diferente da do exemplo anterior.

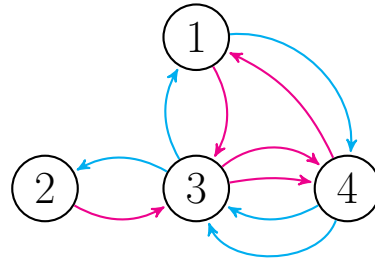
Exemplo 4.1.2 (Um multigrafo com outra sequência de graus). Desenharemos abaixo um multigrafo que tem sequência de graus da cor ciano $(1, 0, 2, 2)$, mas diferentemente do multigrafo do Exemplo 4.1.1, a sua sequência de graus na cor magenta é $(0, 2, 0, 3) \neq (1, 1, 2, 1)$.



O resultado é que dois grafos muito distintos um do outro podem ter mesma sequência de graus de uma das cores.

Mais forte ainda que o resultado apresentado no exemplo acima, podem existir dois multigrafos não-isomorfos cujas sequências de graus das duas cores são iguais. Para mostrar isso, exibiremos um multigrafo com as mesmas sequências de graus do multigrafo do Exemplo 4.1.1, mas que não é isomorfo a ele.

Exemplo 4.1.3. Observe o multigrafo desenhado logo abaixo. Ele tem mesmas sequências de graus que o multigrafo do Exemplo 4.1.1, mas não é isomorfo a ele. De fato, ele não possui nenhum *loop*, enquanto o multigrafo de lá tem dois.



Com isso concluímos que existem multigrafos direcionados que, embora tenham as mesmas sequências de graus, não são isomorfos.

4.2 Modelo de Configurações para Multigrafos Direcionados

Chamaremos de sequência de graus do multigrafo direcionado G o vetor

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} \vec{d}_1 \\ \vec{d}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1(1), \dots, d_1(n) \\ d_2(1), \dots, d_2(n) \end{pmatrix},$$

dos graus dos vértices nas cores ciano e magenta no grafo G . Como no modelo de configurações estudamos grafos gerados aleatoriamente a partir de uma sequência de graus dada, estaremos interessados apenas nos vetores $\vec{d}$ que realizam algum grafo, i.e, que existe algum grafo que tem $\vec{d}$ como sequência de graus.

Definição 4.2.1. Para cada sequência de graus de algum multigrafo direcionado $\vec{d}$, fixe um conjunto

$$W_1 = W_1(\vec{d}) = \bigcup_{i=1}^n W_1(i),$$

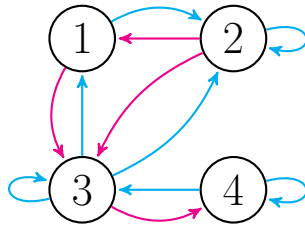
com $S_1 = \sum_{i=1}^n d_1(i)$ pontos, tal que $|W_1(i)| = d_1(i)$. De maneira completamente análoga, fixe

$$W_2 = W_2(\vec{d}) = \bigcup_{i=1}^n W_2(i),$$

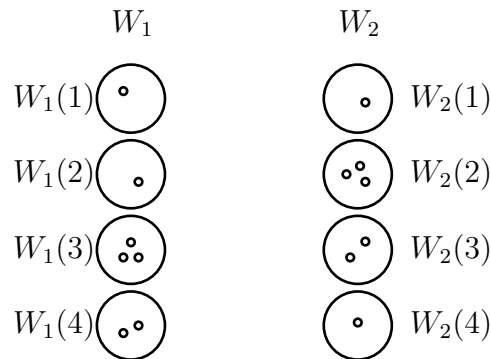
um conjunto com $S_2 = \sum_{i=1}^n d_2(i)$ pontos, tal que $|W_2(i)| = d_2(i)$. Chamaremos W_1 e W_2 de **conjunto associado** ao vetor de graus $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$, respectivamente.

Iremos mostrar em um exemplo como conseguimos os construir os conjuntos associados W_1 e W_2 dada uma sequência de graus $\vec{d} = \begin{pmatrix} \vec{d}_1 \\ \vec{d}_2 \end{pmatrix}$.

Exemplo 4.2.1. Temos na figura abaixo um multigrafo direcionado G de 4 vértices com sequência de graus da cor ciano $(1, 1, 3, 2)$ e da cor magenta $(1, 3, 2, 1)$.



Abaixo desenharemos os conjuntos W_1 e W_2 associados a sequência de graus $\vec{d}$. Pelas suas sequências de graus, devemos fazer $W_1(1)$ com um elemento, $W_1(2)$ com um elemento, $W_1(3)$ com três elementos e $W_1(4)$ com dois elementos. Os $W_2(j)$ terão um, três, dois e um elementos para $j = 1, j = 2, j = 3$ e $j = 4$, respectivamente.



Note que os conjuntos W_1 e W_2 tem mesma cardinalidade. De fato, as somas dos graus na cor 1 e 2 devem ser iguais em qualquer multigrafo direcionado. Em símbolos,

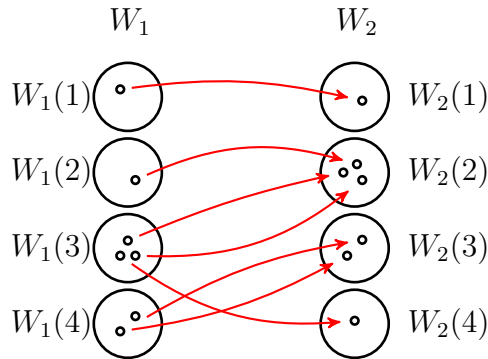
$$|W_1| = S_1 = \sum_{i=1}^n d_1(i) = \sum_{i=1}^n d_2(i) = S_2 = |W_2|.$$

Denotaremos por Σ_2 o conjunto das bijeções de W_1 para W_2 . Representaremos cada elemento de Σ_2 por um desenho que leva uma seta de elementos do conjunto W_1 para algum elemento único do conjunto W_2 . Além do mais, elementos distintos de W_1 são obviamente levados em elementos distintos de W_2 .

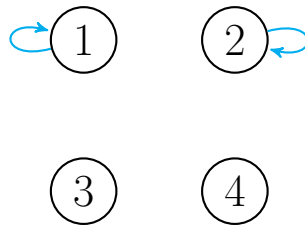
Definição 4.2.2. Sejam $W_1(\vec{d}), W_2(\vec{d})$ os conjuntos associados aos graus das cores ciano e magenta em um grafo com sequência de graus $\vec{d}$. Chamamos de **configuração** uma bijeção $\sigma : W_1 \rightarrow W_2$.

Para uma configuração $\sigma \in \Sigma_2$ dada, considere $\Gamma(\sigma)$ o multigrafo sobre $[n]$ obtido adicionando-se a aresta direcionada ij de cor ciano e a aresta direcionada ji de cor magenta tantas vezes quanto houverem conexões entre $W(i)$ e $W(j)$.

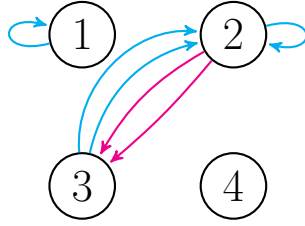
Exemplo 4.2.2. Ilustraremos o que foi comentado acima utilizando o multigrafo do Exemplo 4.2.1. Considere os conjuntos W_1 e W_2 lá construídos. Considere a seguinte configuração que chamaremos de σ .



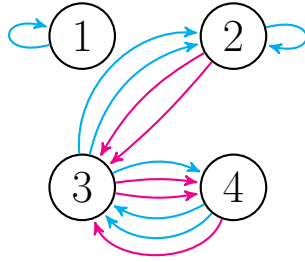
Construíremos agora o grafo $\Gamma(\sigma)$. Como há uma seta ligando elementos de $W_1(1)$ e $W_2(1)$, adicionaremos um *loop* no vértice 1. Pelo mesmo motivo adicionaremos o um *loop* no vértice 2. Note que estes são os únicos *loops* para adicionar.



Agora adicionaremos as arestas que partem do vértice 3 para o 2. Como há duas setas saindo de 3 para 2 em σ , adicionaremos duas aresta de cor ciano saindo de 3 e chegando em 2. Pelo mesmo motivo, adicionaremos duas arestas de cor magenta saindo de 2 e chegando em 3.



Para finalizar, adicionaremos uma aresta ciano saindo de 3 e chegando em 4, e duas saindo de 4 para 3. Depois adicionaremos as arestas magenta fazendo os caminhos contrários.



Uma observação importante sobre o multigrafo resultante acima é que ele tem a mesma sequência de graus do multigrafo do Exemplo 4.2.1 que utilizamos para construir os conjuntos W_1 e W_2 utilizados como base para este exemplo.

Proposição 10. *A função Γ preserva sequência de graus, no sentido de que o grafo resultante por uma configuração tomada sobre W_1 e W_2 construídos a partir um multigrafo direcionado G tem a mesma sequência de graus de G . Ademais, Γ é sobrejetora.*

Teorema 4.2.1. *Seja H um multigrafo direcionado sobre $[n]$ com arestas de cores 1 e 2 e com sequência de graus $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1(1), \dots, d_1(n) \\ d_2(1), \dots, d_2(n) \end{pmatrix}$. O número de configurações $\sigma \in \Sigma_2$ tal que $\Gamma(\sigma) = H$ é dado por*

$$n_2(H) = \frac{\prod_{i=1}^n d_1(i)! d_2(i)!}{\prod_{i,j} \omega_1(i, j)!},$$

onde $\omega_1(i, j) = \omega_2(j, i)$ é o número de arestas de i para j com cor 1 em H .

Demonstração. Contaremos o número de mapas bijetores $W_1 \rightarrow W_2$ tais que para todos $i, j \in [n]$, incluindo o caso $i = j$, há exatamente $\omega_1(i, j)$ elementos de $W_1(i)$ sendo mapeados para $W_2(j)$.

Comece fixando um vértice i . A ideia é espalhar os pontos de $W_1(i)$ pelos aglomerados $W_2(1), \dots, W_2(n)$, mandando $\omega_1(i, j)$ setas de $W_1(i)$ para $W_2(j)$, com $j = 1, \dots, n$. Com isso, teremos que o grafo que resulta de cada uma dessas configurações tem os graus de 1 em todos os vértices iguais ao de H .

Note que podemos distribuir esses pontos como descrito no parágrafo acima de

$$\left(\begin{matrix} d_1(i) \\ \omega_1(i, 1), \dots, \omega_1(i, n) \end{matrix} \right) \quad (4.1)$$

maneiras distintas. Analogamente, podemos distribuir os elementos de $W_2(i)$ para se ligarem com os elementos de $W_1(j)$, com $j = 1, \dots, n$, um total de

$$\binom{d_2(i)}{\omega_2(i, 1), \dots, \omega_2(i, n)} \quad (4.2)$$

vezes distintas. Assim, por (4.1) e (4.2), rodando por todo o conjunto $[n]$, dada uma partição inicial dos vértices de cada $W_1(i)$, concluimos que podemos mandar as setas para os blocos de tamanho $\omega_1(i, j)$ um total de

$$\prod_{i=1}^n \binom{d_1(i)}{\omega_1(i, 1), \dots, \omega_1(i, n)} \binom{d_2(i)}{\omega_2(i, 1), \dots, \omega_2(i, n)} \quad (4.3)$$

maneiras distintas. Resta apenas contar quantas bijeções distintas podemos obter depois de decididos quais os $\omega_1(i, j)$ elementos de $W_1(i)$ que serão enviados em $W_2(j)$. Note que para cada $i \in [n]$, podemos fazer isto de $\omega_1(i, j)!$ maneiras distintas, de onde há um total de

$$\prod_{i,j} \omega_1(i, j)! \quad (4.4)$$

dessas bijeções distintas possíveis de se obter. Por (4.3) e (4.4), o total de configurações $\sigma \in \Sigma_1$ gerando H por Γ é dado por

$$n_2(H) = \frac{\prod_{i=1}^n d_1(i)! d_2(i)!}{\prod_{i,j} \omega_1(i, j)! \omega_2(i, j)!} \prod_{i,j} \omega_1(i, j)!. \quad (4.5)$$

No entanto, como $\omega_1(i, j) = \omega_2(j, i)$, e o produto do denominador da primeira parcela do lado direito em (4.5) faz i e j rodar sobre todo o conjunto $[n]$, de onde podemos concluir que

$$\prod_{i,j} \omega_1(i, j)! \omega_2(i, j)! = \prod_{i,j} (\omega_1(i, j)!)^2. \quad (4.6)$$

Substituindo (4.6) em (4.5), concluimos que

$$\begin{aligned} n_2(H) &= \frac{\prod_{i=1}^n d_1(i)! d_2(i)! \prod_{i,j} \omega_1(i, j)!}{\prod_{i,j} (\omega_1(i, j)!)^2} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n d_1(i)! d_2(i)!}{\prod_{i,j} \omega_1(i, j)!}, \end{aligned}$$

e o resultado segue. $\square$

Definição 4.2.3. Definimos o **modelo de configurações direcionado** como sendo a lei de Γ quando tomamos σ aleatoriamente de maneira uniforme sobre Σ_2 .

4.3 Exercícios

Exercício 4.3.1. Demonstre a Proposição 10.

5 Coloração

Neste capítulo trataremos de um tipo de coloração de arestas em multigrafos direcionados que nos permite estudar um modelo de configurações especial nessa classe de grafos. Daremos a ela o nome de coloração própria.

5.1 Coloração própria

Definiremos a seguir alguns conjuntos especiais de cores. Veremos que uma cor, pelo menos durante todo o resto do texto, nada mais é que uma dupla ordenada de inteiros limitados por um inteiro dado. Utilizaremos o conjunto de cores para definir a coloração própria para multigrafos.

Definição 5.1.1. Dado L um inteiro positivo, o **conjunto de cores** é o conjunto

$$\mathcal{C} = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq L\}.$$

Alguns conjuntos especiais estão listados abaixo.

1. $\mathcal{C}_= = \{(i, i) : 1 \leq i \leq L\};$
2. $\mathcal{C}_< = \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq L\};$
3. $\mathcal{C}_\leq = \mathcal{C}_= \cup \mathcal{C}_<;$
4. $\mathcal{C}_> = \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_\leq;$
5. $\mathcal{C}_\neq = \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_=.$

Chamaremos estes conjuntos de conjunto de cores com respeito a relação $=, <, \leq, >$ e $\neq$, respectivamente.

Fixe $\mathcal{C}$ um conjunto de cores. Associaremos a cada cor $c \in \mathcal{C}$, uma segunda cor $\bar{c}$, que chamaremos a sua cor conjugada. Utilizaremos isso para definir uma classe de grafos que é sobreposição de vários multigrafos e multigrafos direcionados.

Definição 5.1.2. Dada uma cor $c = (i, j) \in \mathcal{C}$, diremos que o par $\bar{c} = (j, i)$ é a **cor conjugada de c** .

Uma importante classe de funções $V^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$, é a das funções que definem multigrafos e multigrafos direcionados. Fixando para cada $c \in \mathcal{C}_\leq$ uma função $\omega_c : V^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ que define um multigrafo, se $c \in \mathcal{C}_=$, ou um multigrafo direcionado, se $c \in \mathcal{C}_<$, obtemos uma $\mathcal{C}$ -coloração sobre V , como bem definimos abaixo.

Definição 5.1.3. Seja $V = [n]$. Diremos que uma coleção de mapas $\omega = \{\omega_c\}_{c \in \mathcal{C}}$, com $\omega_c : V^2 \rightarrow \mathbb{N}_0$ para todo c , é uma **$\mathcal{C}$ -coloração sobre V** , se essa coleção satisfaz as seguintes condições:

1. Se $c \in \mathcal{C}_=$, então
 - 1.1 $\omega_c(u, u)$ é par, para todo $u \in V$;
 - 1.2 $\omega_c(u, v) = \omega_c(v, u)$, para todos $u, v \in V$.
2. Se $c \in \mathcal{C}_\neq$, então $\omega_c(u, v) = \omega_{\bar{c}}(v, u)$, para todos $u, v \in V$.

Note que para $c \in \mathcal{C}_=$, temos as duas propriedades de multigrafos obedecidas, e portanto $G_c = (V, \omega_c)$ é um multigrafo. Analogamente, se $c \in \mathcal{C}_\neq$, temos que G_c é um multigrafo direcionado bicolorido. Estudaremos multigrafos que são a sobreposição de todos os multigrafos $G_c = (V, \omega_c)$, $c \in \mathcal{C}_\leq$, os quais chamaremos de multigrafos direcionados coloridos.

Com tudo em mãos, partiremos para a definição do objeto sobre o qual escreveremos a partir de agora.

Definição 5.1.4. Sejam n um inteiro positivo, $V = [n]$ e ω uma $\mathcal{C}$ -coloração sobre V . O multigrafo $G = (V, \omega)$, é chamado de **multigrafo direcionado com arestas $\mathcal{C}$ -coloridas**, ou mais simplesmente de **multigrafo direcionado colorido**.

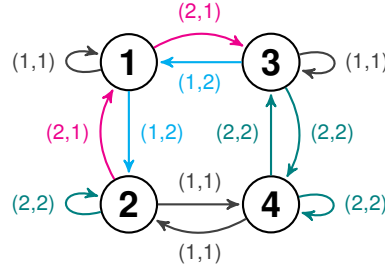
Um multigrafo direcionado colorido pode ser interpretado como sendo um multigrafo tal que, para cada cor $c \in \mathcal{C}$, se tem:

1. se $u \neq v$, então $\omega_c(u, v) = \omega_{\bar{c}}(v, u)$ é o número de arestas com cor c saindo de u e chegando em v ;
2. se $u = v$ e $c \in \mathcal{C}_=$, então $\frac{1}{2}\omega_c(u, u)$ é o número de *loops* de cor c no vértice u ;
3. se $u = v$ e $c \in \mathcal{C}_<$, então $\omega_c(u, u) = \omega_{\bar{c}}(u, u)$ é o número de *loops* de cor c no vértice u .

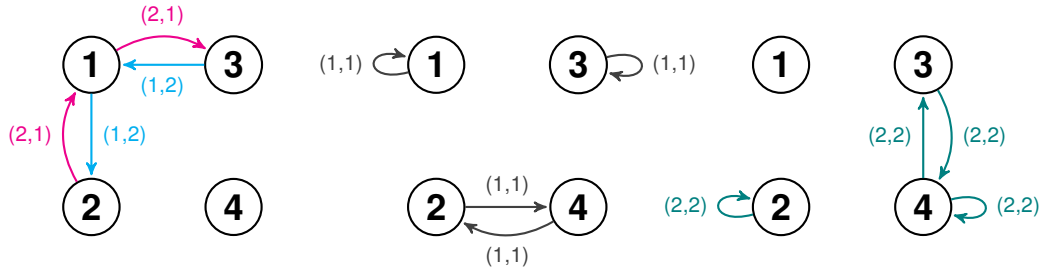
Note que o item 1 nos diz também que $\omega_c(u, v)$ é o número de arestas de cor $\bar{c}$ saindo de v e chegando em u . Por convenção, não existirão *loops* de cor $c \in \mathcal{C}_>$.

Fazendo uma boa análise, percebemos que um multigrafo direcionado colorido $G = (V, \omega)$ nada mais é que a sobreposição dos multigrafos $G_c = (V, \omega_c)$ de cor $c = (i, i)$ e multigrafos direcionados $G_c = (V, \omega_c)$ com cores $c = (i, j)$ e $\bar{c} = (j, i)$, com $i \neq j$. Ilustraremos isso no exemplo abaixo.

Exemplo 5.1.1. Considere o multigrafo $G = ([3], \omega)$ desenhado abaixo e definido por $\omega_{(1,2)}(1,2) = \omega_{(2,1)}(2,1) = \omega_{(1,2)}(3,1) = \omega_{(2,1)}(3,1) = \omega_{(1,1)}(2,4) = \omega_{(1,1)}(4,2) = \omega_{(2,2)}(3,4) = \omega_{(2,2)}(4,3) = 1; \omega_{(1,1)}(1,1) = \omega_{(2,2)}(2,2) = \omega_{(1,1)}(3,3) = \omega_{(2,2)}(4,4) = 2$. Os valores omitidos são todos iguais a zero.



Note que o multigrafo G é sobreposição dos três grafos a seguir, dois dos quais são multigrafos (os dois da direita) e um é multigrafo direcionado bicolorido (o da esquerda).



Definição 5.1.5. Denotaremos por $\widehat{\mathcal{G}}(\mathcal{C})$ a classe dos multigrafos direcionados com arestas $\mathcal{C}$ -coloridas. Um subconjunto importante de $\widehat{\mathcal{G}}(\mathcal{C})$ é o **conjunto dos grafos**, $\mathcal{G}(\mathcal{C})$, das duplas $G = (V, \omega)$ tais que

1. G não tem arestas múltiplas de cores iguais, i.e, $\omega_c(u, v) = 0, 1$ para toda cor c e todos vértices u, v ;
2. G não tem *loops*, i.e, $\omega_c(u, u) = 0$, para toda cor c e todo vértice u .

5.2 Multigrafos Daltônicos

Dado um multigrafo direcionado colorido, $G = (V, \omega)$, podemos definir o seu grafo daltônico, $\overline{G} = (V, \overline{\omega})$, que pode ser identificado como um multigrafo não-direcionado, pois como veremos, $\overline{\omega}(u, v) = \overline{\omega}(v, u)$, e ele deixa de fazer distinção entre as cores.

Definição 5.2.1. Dado $G \in \widehat{\mathcal{G}}(\mathcal{C})$, definimos o **multigrafo daltônico** de G , que escreveremos $\overline{G} = (V, \overline{\omega})$, pondo

$$\overline{\omega}(u, v) = \sum_{c \in \mathcal{C}} \omega_c(u, v). \quad (5.1)$$

Veremos que o multigrafo daltônico de um grafo $G \in \widehat{\mathcal{G}}(\mathcal{C})$, realmente é um multigrafo.

Proposição 11. *Seja $G = ([n], \bar{\omega}) \in \widehat{\mathcal{G}}(\mathcal{C})$. Então o grafo daltônico $\overline{G}$ é um multigrafo, i.e., $\bar{\omega}(u, v) = \bar{\omega}(v, u)$ para todos $u, v \in [n]$. Ademais, se $L = 1$, $G = \overline{G}$.*

Demonstração. Sejam $G \in \widehat{\mathcal{G}}(\mathcal{C})$ e $u, v \in V$. Já vimos que $\omega_c(u, v) = \omega_{\bar{c}}(v, u)$, para toda cor $c \in \mathcal{C}$. Em particular, segue daí que

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(u, v) &= \sum_{c \in \mathcal{C}} \omega_c(u, v) = \sum_{c \in \mathcal{C}} \omega_{\bar{c}}(v, u) \\ &= \sum_{c \in \mathcal{C}} \omega_c(v, u) = \bar{\omega}(v, u), \end{aligned}$$

uma vez que $\bar{c}$ roda todo o conjunto $\mathcal{C}$. Se $L = 1$, então

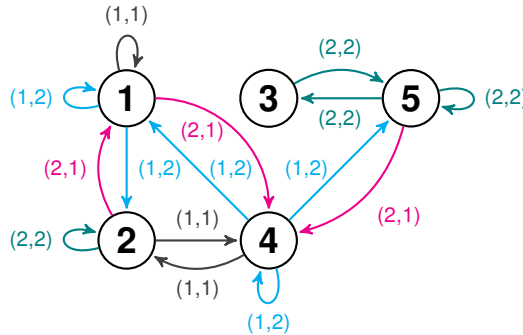
$$\bar{\omega}(u, v) = \omega_{(1,1)}(u, v),$$

de onde G coincide com $\overline{G}$. □

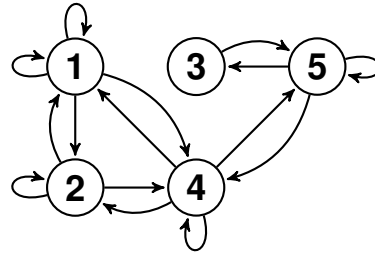
Como $\overline{H}$ é um multigrafo, então faz sentido falar na sua sequência de graus. Denotaremos a sequência de graus de $\overline{H}$ por $\vec{d}_{\overline{H}} = (\vec{d}(1), \dots, \vec{d}(n))$.

Para ilustrar a construção do multigrafo daltônico de um multigrafo direcionado bicolorido dado, segue abaixo um exemplo.

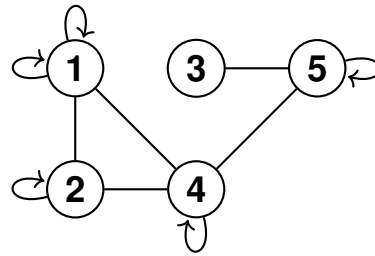
Exemplo 5.2.1 (Obtenção do grafo daltônico). Na imagem abaixo temos um multigrafo colorido direcionado com $n = 5$ e $L = 2$. Ele é definido por $\omega_{(1,1)}(1, 1) = \omega_{(2,2)}(2, 2) = \omega_{(2,2)}(5, 5) = \omega_{(1,2)}(1, 2) = \omega_{(2,1)}(2, 1) = \omega_{(2,1)}(1, 4) = \omega_{(1,2)}(4, 1) = \omega_{(1,1)}(2, 4) = \omega_{(1,1)}(4, 2) = \omega_{(2,2)}(4, 5) = \omega_{(2,2)}(5, 4) = \omega_{(1,1)}(3, 5) = \omega_{(1,1)}(5, 3) = 1$; $\omega_{(1,2)}(1, 1) = \omega_{(1,2)}(4, 4) = 2$. Os valores omitidos são todos iguais a 0.



Abaixo temos o seu grafo daltônico. Note que as cores das arestas passam a não ser mais enxergadas.



Por fim, observe que o multigrafo daltônico tem a propriedade universal dos multigrafos não-direcionados: $\bar{\omega}(u, v) = \bar{\omega}(v, u)$. Daí, podemos identificar o grafo $\bar{G}$ com um multigrafo não-direcionado. No nosso exemplo, temos o seguinte multigrafo.

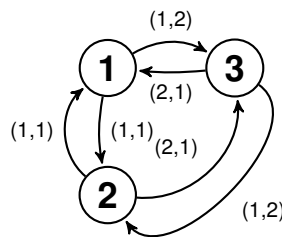


Trataremos o multigrafo daltônico $\bar{G}$ de um grafo G como sendo um multigrafo sem direção. Tendo isso em mente, faz sentido chamar alguns grafos de $\widehat{\mathcal{G}}(C)$ de simples: aqueles que seu grafo daltônico é simples.

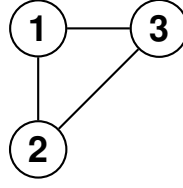
Definição 5.2.2. Diremos que $G \in \widehat{\mathcal{G}}(C)$ é um **grafo simples** se $\bar{G}$ não tem *loops* e nem arestas múltiplas.

Diferente da Definição 5.1.5, um grafo simples além de não poder ter arestas múltiplas de nenhuma cor, não pode ter também arestas de mais de uma cor partindo de um vértice i e chegando em um vértice j .

Exemplo 5.2.2 (Um exemplo de grafo simples). O multigrafo direcionado colorido G definido por $\omega_{(1,1)}(1, 2) = \omega_{(1,2)}(1, 3) = \omega_{(2,1)}(2, 3) = 1$ é um grafo simples. Abaixo representamos tal multigrafo.



O seu grafo daltônico pode ser obtido sem muita dificuldade.



Dado um multigrafo H , cada aresta e do seu grafo daltônico $\overline{H}$ é a identificação de duas arestas e_1 e e_2 do multigrafo H , uma de cor c e outra de cor $\bar{c}$, então a quantidade de arestas em $\overline{H}$, é metade da quantidade de arestas de H . Isso nos dá a seguinte proposição, que encerra a nossa seção.

Por simplicidade iremos denotar o grau de grau na cor c do vértice u de um grafo H por $d_c^H(u)$. Abaixo, obteremos uma fórmula para o número de arestas do grafo daltônico de um grafo colorido direcionado H .

Proposição 12. *Seja $H = ([n], \omega) \in \widehat{\mathcal{G}}(\mathcal{C})$. Então*

$$|E(\overline{H})| = \frac{1}{2} \sum_{c \in \mathcal{C}} \sum_{i=1}^n d_c^H(i).$$

Demonstração. Já sabemos que a quantidade de arestas de um multigrafo é igual a metade da soma dos graus de todos os seus vértices. Daí, temos que

$$|E(\overline{H})| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \bar{d}(i).$$

Por outro lado, afirmamos que $\bar{d}(i) = \sum_{c \in \mathcal{C}} d_c^H(i)$. De fato, basta observar que

$$\begin{aligned} \bar{d}(i) &= \sum_{j=1}^n \bar{\omega}(i, j) = \sum_{j=1}^n \sum_{c \in \mathcal{C}} \omega_c(i, j) \\ &= \sum_{c \in \mathcal{C}} \sum_{j=1}^n \omega_c(i, j) = \sum_{c \in \mathcal{C}} d_c^H(i). \end{aligned}$$

Juntando esses dois resultados, concluímos que

$$|E(\overline{H})| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{c \in \mathcal{C}} d_c^H(i) = \frac{1}{2} \sum_{c \in \mathcal{C}} \sum_{i=1}^n d_c^H(i),$$

o que conclui a demonstração. □

5.3 Exercícios

Exercício 5.3.1. Considere um multigrafo H cujo grafo daltônico é um ciclo de tamanho n qualquer, com conjunto de vértices $[n]$. Calcule $\sum_{c \in \mathcal{C}} \sum_{i=1}^n d_c^H(i)$.

Exercício 5.3.2. Seja $L = 5$ e $n = 7$. Quantos são os multigrafos $G \in \widehat{\mathcal{G}}(\mathcal{C})$ tais que $\overline{G}$ é um ciclo de tamanho 4 e conjunto de vértices está contido em $V = [7]$?

6 Modelo de Configuração Generalizado

Nesta seção iremos definir o modelo principal deste texto. Tudo o que foi feito até este momento no texto, foi feito na intenção de deixar a construção do modelo de configurações generalizado para multigrafos direcionados coloridos mais intuitiva. Ao invés de fazer os modelos para as cores, como em [Bordenave e Caputo 2015], fizemos para multigrafos e multigrafos direcionados, uma vez que dado $G \in \widehat{\mathcal{G}}$, dependendo da cor $c \in \mathcal{C}$, o multigrafo G_c só pode ser um dos dois.

6.1 Multigrafos com sequência de graus dada

O modelo de configurações necessita de uma sequência de graus para sobreviver. A ideia é simples: gerar aleatoriamente grafos a partir de uma sequência de graus dada. Então para que possamos fazer isso em algum momento desse texto, precisamos definir sequência de graus para o nosso modelo de grafos.

Definição 6.1.1. Sejam $G \in \widehat{\mathcal{G}}(\mathcal{C})$, $c \in \mathcal{C}$ e $u \in V$. Chamaremos de **grau na cor c do vértice u** , o número

$$D_c(u) = \sum_{v \in V} \omega_c(u, v).$$

O **grau do vértice u** é a matriz $L \times L$ dos graus nas cores de u , definida por

$$D(u) = [D_{(i,j)}(u)]_{i,j=1}^L.$$

Por último, definimos o vetor cujas entradas são os graus dos vértices

$$\vec{D} = (D(1), \dots, D(n)),$$

que será chamado de **sequência de graus de G** .

O conjunto das matrizes $L \times L$ cujas entradas são números inteiros não-negativos será denotado por $\mathcal{M}_L$. Diremos que $M \in \mathcal{M}_L$ é **simétrica** quando $M = [M_{(i,j)}]_{i,j=1}^L$ com $M_{(i,j)} = M_{(j,i)}$.

Definição 6.1.2. Seja $n \in \mathbb{N}$. Denotaremos por $\mathcal{D}_n$ o conjunto de todos os vetores $(D(1), \dots, D(n))$ que satisfazem:

1. $D(i) \in \mathcal{M}_L$, para todo $i \in [n]$;

2. A matriz

$$S = \sum_{i=1}^n D(i)$$

é simétrica e os coeficientes da diagonal principal são pares (para todo $i \in [n]$, existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $S_{(i,i)} = 2k_i$).

Note que se $G \in \widehat{\mathcal{G}}(\mathcal{C})$, o vetor de graus de $\vec{D}$ de G satisfaz as duas propriedades da definição acima, de onde temos que $\vec{D} \in \mathcal{D}_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Para uma sequência $\vec{D} \in \mathcal{D}_n$, considere todos os elementos de $\widehat{\mathcal{G}}(\mathcal{C})$ tais que $\vec{D}$ é a sua sequência de graus.

Definição 6.1.3. Fixe $n \in \mathbb{N}$ e $\vec{D} \in \mathcal{D}_n$. Escreveremos

1. $\widehat{\mathcal{G}}(\vec{D})$ para denotar o conjunto de todos os multigrafos $G \in \widehat{\mathcal{G}}(\mathcal{C})$ tais que a sua sequência de graus coincide com $\vec{D}$;
2. $\mathcal{G}(\vec{D}, h)$ para denotar o conjunto dos multigrafos $G \in \widehat{\mathcal{G}}(\vec{D})$ cujo grafo daltônico $\overline{G}$ não contém ciclos de tamanho $l \leq h$;
3. $\mathcal{G}(\vec{D})$ para denotar o conjunto dos grafos simples em $\widehat{\mathcal{G}}(\vec{D})$.

Note agora que como *loops* são ciclos de tamanho 1 e arestas múltiplas são ciclos de tamanho 2, e qualquer outro ciclo tem tamanho pelo menos 3, então $\mathcal{G}(\vec{D}) = \mathcal{G}(\vec{D}, 2)$.

Iremos definir agora um tipo especial de subgrafo de um grafo de $\widehat{\mathcal{G}}(\vec{D})$ dado. Esse subgrafo é obtido removendo todas as arestas que não tenham as cores desejadas.

Definição 6.1.4. Fixe $G \in \widehat{\mathcal{G}}(\vec{D})$. Se $c \in \mathcal{C}_=$, defina o grafo G_c como sendo o subgrafo de G obtido ao se remover todas as arestas de cor diferente de c . Por outro lado, se $c \in \mathcal{C}_<$, defina o grafo G_c como sendo subgrafo de G obtido ao se retirar todas as arestas de cor diferente de c e $\overline{c}$.

Note que pela definição anterior, todo grafo $G \in \widehat{\mathcal{G}}(\vec{D})$ é obtido ao se sobrepor os multigrafos G_c , para todo $c \in \mathcal{C}_\leq$.

Perceba ainda que se $c \in \mathcal{C}_=$, na verdade estamos tratando essencialmente de um multigrafo. De fato, $\omega_c(u, v) = \omega_{\overline{c}}(v, u) = \omega_c(v, u)$. Por outro lado, se $c \in \mathcal{C}_<$, o grafo G_c é um multigrafo direcionado, pois atende a todos os requisitos da definição de um. Com isso, conseguiremos separar o grafo G em vários multigrafos e multigrafos direcionados, e fazer o que já fizemos nas Seções 3 e 4.

6.2 Modelo de Configurações para $c \in \mathcal{C}_=$

Nesta seção analisaremos os multigrafos G_c com $c \in \mathcal{C}_=$. O que faremos, na verdade, é utilizar os resultados obtidos na seção 3.2 para construir as provas para este modelo de

configurações. Isso faz sentido, pois ao trabalhar com o multigrafo G_c , com $c \in \mathcal{C}_=$, na verdade estamos tratando, em essência, de um multigrafo não-direcionado qualquer.

Tome $c \in \mathcal{C}_=$. Por definição, dado $G \in \widehat{\mathcal{G}}(\mathcal{C})$, sabemos que $\omega_c(u, v) = \omega_c(v, u)$ para todos $u, v \in [n]$. Assim, G_c pode ser tratado como sendo um multigrafo não-direcionado. A sequência de graus do multigrafo G_c é $(D_c(1), \dots, D_c(n))$.

Definição 6.2.1. Sejam $c \in \mathcal{C}_=$ e $\vec{D} = (D_c(1), \dots, D_c(n))$ sequência de graus de algum multigrafo G_c que só tem arestas de cor c . Fixe para essa sequência um conjunto $W_c = W_c(\vec{D})$, que satisfaz

$$W_c = \bigcup_{j=1}^n W_c(i),$$

com $S_c = \sum_{j=1}^n D_c(i)$ pontos, de tal modo que $|W_c(i)| = D_c(i)$ para cada $i \in [n]$. Ao conjunto W_c damos o nome de **conjunto associado** a sequência de graus $\vec{D}$.

Definição 6.2.2. Seja $c \in \mathcal{C}_=$. Denotaremos o conjunto das configurações sobre W_c por Σ_c . Chamaremos os elementos de Σ_c de **configurações**.

Sabemos do Lema 2.5.1 que o número de configurações sobre W_c é dado por

$$|\Sigma_c| = \frac{S_c!}{(S_c/2)!2^{S_c/2}}.$$

Dada uma configuração $\sigma_c \in \Sigma_c$, chamamos de $\Gamma_c(\sigma_c)$ o multigrafo com conjunto de vértices $[n]$ com arestas não-direcionadas obtidas ao incluir o par ij tantas vezes quanto houverem duplas $u \in W_c(i), v \in W_c(j)$ tais que $\sigma_c(u, v) = 1$, tal como fizemos para multigrafos. Já vimos na Proposição 8 que ao fazer isso, a sequência de graus de $\Gamma_c(\sigma_c)$ é a mesma de G_c . Assim,

$$d(i) = |W_c(i)| = D_c(i),$$

onde $d(i)$ é o grau do vértice i em $\Gamma_c(\sigma_c)$. Além disso, se H é um multigrafo com essa sequência de graus, então existe $\sigma_c \in \Sigma_c$ para o qual H é igual ao grafo $\Gamma_c(\sigma_c)$. A prova é a mesma da Proposição 9.

Partiremos agora para o importante

Lema 6.2.1. Fixe $c \in \mathcal{C}_=$. Seja H um multigrafo com conjunto de vértices $[n]$ com arestas não-direcionadas e com sequência de graus $(D_c(1), \dots, D_c(n))$. O número de $\sigma_c \in \Sigma_c$ tal que $\Gamma_c(\sigma_c) = H$ é dado por

$$n_c(H) = \frac{\prod_{i=1}^n D_c(i)!}{\prod_{i=1}^n (\omega_c(i, i)/2)! 2^{(\omega_c(i, i)/2)} \prod_{i < j} \omega_c(i, j)!},$$

onde $\omega_c(i, j)$ é o número de arestas entre o par ij em H e $\omega_c(i, i)/2$ é o número de loops no vértice i em H .

Demonstração. Como H é um multigrafo não-direcionado com sequência de graus dada acima, o resultado segue diretamente do Teorema 3.2.1, trocando-se $d(i)$ por $D_c(i)$ e o mapa ω por ω_c . $\square$

6.3 Modelo de Configurações para $c \in \mathcal{C}_<$

Se $c \in \mathcal{C}_<$, sabemos da definição que para todos $u, v \in [n]$, vale $\omega_c(u, v) = \omega_{\bar{c}}(v, u)$. Logo, dado $G \in \widehat{\mathcal{G}}(\mathcal{C})$, temos que o grafo G_c é, na verdade, um multigrafo direcionado.

Tome $c \in \mathcal{C}_<$. A sequência de graus de G_c como multigrafo direcionado é dada por $\vec{D} = (D_c(1), \dots, D_c(n))$.

Definição 6.3.1. Sejam $c \in \mathcal{C}_<$ e $\vec{D} = (D_c(1), \dots, D_c(n))$ sequência de graus de algum multigrafo G_c que só tem arestas de cor c e $\bar{c}$. Fixe para essa sequência um conjunto $W_c = W_c(\vec{D})$, que satisfaz

$$W_c = \bigcup_{i=1}^n W_c(i),$$

com $S_c = \sum_{i=1}^n D_c(i)$ pontos, de tal modo que $|W_c(i)| = D_c(i)$ para cada $i \in [n]$. Analogamente, fixe um conjunto $W_{\bar{c}} = W_{\bar{c}}(\vec{D})$, que satisfaz

$$W_{\bar{c}}(i) = \bigcup_{i=1}^n W_{\bar{c}}(i),$$

com $S_{\bar{c}} = \sum_{i=1}^n D_{\bar{c}}(i)$, de tal modo que $|W_{\bar{c}}(i)| = D_{\bar{c}}(i)$ para cada $i \in [n]$. Aos conjuntos W_c e $W_{\bar{c}}$ damos o nome de **conjuntos associados** as cores c e $\bar{c}$, respectivamente.

Note que os conjuntos W_c e $W_{\bar{c}}$ tem mesma cardinalidade. De fato, as somas dos graus na cor c e $\bar{c}$ devem ser iguais em qualquer elemento de $\widehat{\mathcal{G}}(\mathcal{C})$. Em símbolos,

$$|W_{\bar{c}}| = S_{\bar{c}} = \sum_{i=1}^n D_{\bar{c}}(i) = \sum_{i=1}^n D_c(i) = S_c = |W_c|.$$

Definição 6.3.2. Seja $c \in \mathcal{C}_<$. Denotaremos o conjunto das bijeções $W_c \rightarrow W_{\bar{c}}$ por Σ_c . Chamaremos de **configurações** os elementos de Σ_c .

Para uma configuração $\sigma_c \in \Sigma_c$ dada, seja $\Gamma_c(\sigma_c)$ o multigrafo sobre $[n]$ obtido incluindo-se a aresta direcionada (i, j) de cor c e a aresta direcionada (j, i) de cor $\bar{c}$, tantas vezes quanto houverem elementos de $W_c(i)$ e $W_{\bar{c}}(j)$ ligados. Note que $\Gamma_c(\sigma_c)$ tem a mesma sequência de graus $(D_c(1), \dots, D_c(n))$ de G_c . Também, qualquer multigrafo com sequência de graus $(D_c(1), \dots, D_c(n))$ é igual a $\Gamma_c(\sigma_c)$ para algum $\sigma_c \in \Sigma_c$.

Lema 6.3.1. Fixe $c \in \mathcal{C}_<$. Seja H um multigrafo sobre $[n]$ com arestas de cores c e $\bar{c}$ apenas e com sequência de graus $(D_c(i), D_{\bar{c}}(i))_{i \in [n]}$. O número de configurações $\sigma_c \in \Sigma_c$ tal que $\Gamma_c(\sigma_c) = H$ é dado por

$$n_c(H) = \frac{\prod_{i=1}^n D_c(i)! D_{\bar{c}}(i)!}{\prod_{i,j} \omega_c(i, j)!},$$

onde $\omega_c(i, j) = \omega_{\bar{c}}(j, i)$ é o número de arestas de i para j com cor c em H .

Demonstração. Como H é um multigrafo direcionado, a prova é a mesma da do Teorema 4.2.1. $\square$

6.4 Modelo de Configurações Generalizado

Definiremos agora o modelo de configurações para uma sequência genérica $\vec{D} \in \mathcal{D}_n$ colocando juntos todos os modelos de configurações para cada cor $c \in \mathcal{C}$. Considere o produto cartesiano

$$\Sigma = \prod_{c \in \mathcal{C}_{\leq}} \Sigma_c,$$

onde Σ_c é o conjunto das configurações em W_c , se $c \in \mathcal{C}_{=}$, e $(W_c, W_{\bar{c}})$, se $c \in \mathcal{C}_{<}$. Todo elemento $(\sigma_c)_{c \in \mathcal{C}_{\leq}} \in \Sigma$ é chamado uma **configuração**.

O mapa $\Gamma(\cdot) : \Sigma \rightarrow \widehat{\mathcal{G}}(\vec{D})$ é definido tomando $\Gamma(\sigma) = (\Gamma_c(\sigma_c))_{c \in \mathcal{C}_{\leq}}$, ou seja, a sobreposição de todos os multigrafos $\Gamma_c(\sigma_c)$.

Definição 6.4.1. Definimos o **modelo de configurações**, e denotamos por $\text{CM}(\vec{D})$, a lei de $\Gamma(\sigma)$ quando $\sigma \in \Sigma$ é escolhido aleatoriamente de maneira uniforme.

Proposição 13. Dado $\vec{D} \in \mathcal{D}_n$, vale

$$|\Sigma| = \prod_{c \in \mathcal{C}_{<}} S_c! \prod_{c \in \mathcal{C}_{=}} (S_c - 1)!. \quad (6.1)$$

Demonstração. Segue dos Lemas 2.5.1 e 2.5.2, junto do fato que a cardinalidade do produto cartesiano de conjuntos não-vazios finitos é o produto das suas cardinalidades. $\square$

Definição 6.4.2. Dado $H \in \widehat{\mathcal{G}}_n$, chamaremos a constante

$$b(H) = \prod_{c \in \mathcal{C}_{<}} \prod_{i,j} \omega_c(i, j)! \prod_{c \in \mathcal{C}_{=}} \prod_{i=1}^n (\omega_c(i, i)/2)! 2^{\omega_c(i, i)/2} \prod_{i < j} \omega_c(i, j)!$$

de **constante de configuração** de H .

A razão para o uso deste nome ficará mais claro na próxima proposição.

Proposição 14. Dado $H \in \widehat{\mathcal{G}}(\vec{D})$, vale

$$|\Gamma^{-1}(H)| = \frac{\prod_{c \in \mathcal{C}} \prod_{i=1}^n D_c(i)!}{b(H)}.$$

Demonstração. Comece observando que, uma vez que Σ é o produto cartesiano dos conjuntos Σ_c , e $\Gamma(\sigma)$ é apenas a sobreposição dos grafos $\Gamma(\sigma_c)$, então temos

$$|\Gamma^{-1}(H)| = \prod_{c \in \mathcal{C}_{\leq}} n_c(H_c), \quad (6.2)$$

onde H_c é o subgrafo de H tomado como na Definição 6.1.4. Por outro lado, note que

$$\prod_{c \in \mathcal{C}_<} \prod_{i=1}^n D_c(i)! D_{\bar{c}}(i)! = \prod_{c \in \mathcal{C}_\neq} \prod_{i=1}^n D_c(i)! \quad (6.3)$$

Expandindo (6.2) utilizando as expressões para $n_c(H)$ obtidas nos Lemas 3.2.1 (para $c \in \mathcal{C}_=$) e 4.2.1 (para $c \in \mathcal{C}_<$), obtemos que a cardinalidade de $\Gamma^{-1}(H)$ é dada por

$$\frac{\prod_{c \in \mathcal{C}_=} \prod_{i=1}^n D_c(i)! \prod_{c \in \mathcal{C}_<} \prod_{i=1}^n D_c(i)! D_{\bar{c}}(i)!}{\prod_{c \in \mathcal{C}_=} (\prod_{i=1}^n (\omega_c(i, i)/2)! 2^{(\omega_c(i, i)/2)} \prod_{i < j} \omega_c(i, j)!) \prod_{c \in \mathcal{C}_<} \prod_{i, j} \omega_c(i, j)!}. \quad (6.4)$$

Agora, substituindo (6.3) em (6.4) e notando que o denominador do produto acima é $b(H)$, concluímos que

$$|\Gamma^{-1}(H)| = \frac{\prod_{c \in \mathcal{C}} \prod_{i=1}^n D_c(i)!}{b(H)}, \quad (6.5)$$

como desejávamos demonstrar. $\square$

Veremos a seguir qual a probabilidade de que tomemos um grafo G aleatoriamente com distribuição $\text{CM}(\vec{D})$, com $\vec{D} \in \mathcal{D}_n$ e ele coincida com um grafo $H \in \widehat{\mathcal{G}}(\vec{D})$ dado.

Teorema 6.4.1. *Sejam $\vec{D} \in \mathcal{D}_n$, G com distribuição $\text{CM}(\vec{D})$ e $H \in \widehat{\mathcal{G}}(\vec{D})$. Então*

$$\mathbb{P}(G = H) = \frac{\prod_{c \in \mathcal{C}} \prod_{i=1}^n D_c(i)!}{b(H) \prod_{c \in \mathcal{C}_<} S_c! \prod_{c \in \mathcal{C}_=} (S_c - 1)!},$$

onde $S_c = \sum_{i=1}^n D_c(i)$.

Demonstração. Como a distribuição é uniforme, então a probabilidade de que G , um grafo gerado via Γ por uma configuração $\sigma \in \Sigma$, seja igual a um grafo H dado, é a razão entre quantas configurações vão em H por Γ e a quantidade total de configurações. Logo, devemos calcular

$$\mathbb{P}(G = H) = \frac{|\Gamma^{-1}(H)|}{|\Sigma|}. \quad (6.6)$$

Para concluir a prova, substituiremos (6.5) e (6.1) em (6.6) para obter que

$$\mathbb{P}(G = H) = \frac{\prod_{c \in \mathcal{C}} \prod_{i=1}^n \omega_c(i, j)!}{b(H) \prod_{c \in \mathcal{C}_<} S_c! \prod_{c \in \mathcal{C}_=} (S_c - 1)!},$$

como desejávamos demonstrar. $\square$

Corolário 2. *Seja $h \geq 2$. Se $\mathcal{G}(\vec{D}, h)$ é não-vazio, a lei de G condicionado a $\mathcal{G}(\vec{D}, h)$ é a distribuição uniforme sobre $\mathcal{G}(\vec{D}, h)$.*

Demonstração. Note que se H é um grafo que não contém ciclos de tamanho $h \geq 2$ — e portanto $\mathcal{G}(\vec{D}, 2)$ é não-vazio —, então $\omega_c(i, i) = 0$ (pois *loops* são ciclos de tamanho 1) e $\omega_c(i, j) = 0$ ou 1 para todos $i, j \in [n]$ (pois arestas múltiplas são ciclos de tamanho 2). Daí, concluímos que $b(H) = 1$. Portanto a probabilidade de G ser um elemento de $\mathcal{G}(\vec{D}, h)$ é igual para qualquer elemento do conjunto. Concluímos que a lei de G condicionado a $\mathcal{G}(\vec{D}, h)$ é a distribuição uniforme sobre $\mathcal{G}(\vec{D}, h)$, o que conclui a demonstração. $\square$

Observe que definimos o modelo de configurações sobre o conjunto de configurações $\Sigma = \prod_{c \in \mathcal{C}_\leq} \Sigma_c$. Poderíamos ter definido, para cada cor $c \in \mathcal{C}_\leq$, modelos de configurações “menores”, para multigrafos e multigrafos de cor c .

A ideia é a seguinte: dado um grafo colorido e com sequência de graus $\vec{D}$, definimos o **modelo de configurações na cor c** , e denotamos por $\text{CM}_c(\vec{D})$, a lei de $\Gamma_c(\sigma_c)$, quando σ_c é tomada aleatoriamente de maneira uniforme em Σ_c .

6.5 Exercícios

Exercício 6.5.1. Seja $H \in \widehat{\mathcal{G}}_k$ e $\tau(H)$ o grafo obtido permutando-se os vértices de H por uma função injetora $\tau : [k] \rightarrow [k]$. Mostre que $b(H) = b(\tau(H))$. Obtemos o mesmo resultado se trocarmos os índices de H por uma função injetora $\tau : [k] \rightarrow [n]$, com $n > k$?

Exercício 6.5.2. Sejam $\vec{D} \in \mathcal{D}_n$, G com distribuição $\text{CM}_c(\vec{D})$ e $H \in \widehat{\mathcal{G}}(\vec{D})$. Calcule $\mathbb{P}(G_c = H_c)$, quando $c \in \mathcal{C}_<$; e quando $c \in \mathcal{C}_=$.

Exercício 6.5.3. Sejam $\vec{D} \in \mathcal{D}_n$, G com distribuição $\text{CM}(\vec{D})$ e $H \in \widehat{\mathcal{G}}(\vec{D})$ com cores $c, \bar{c}$ apenas. Calcule $\mathbb{P}(G_c = H)$.

Exercício 6.5.4. Conclua, dos Exercícios 6.5.2 e 6.5.3, junto do Teorema 6.4.1 e da Proposição 14, que $\text{CM}(\vec{D})$ é a medida produto sobre os modelos $\text{CM}_c(\vec{D})$.

7 Cópias de subgrafos

Neste capítulo iremos contar o número de cópias de um subgrafo rotulado H num grafo rotulado G . Iremos analisar as cópias de dois pontos de vista. No primeiro, iremos olhar todos os subgrafos de G que são isomorfos a H com um determinado conjunto de vértices, enquanto no outro levaremos em conta apenas cópias idênticas a H .

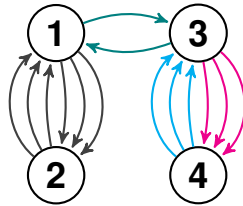
7.1 Número de cópias de um subgrafo

Duas variáveis aleatórias serão importantes nas nossas construções a seguir.

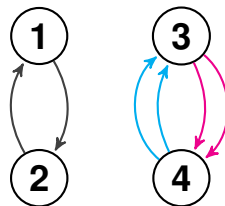
Definição 7.1.1. Sejam $H, G \in \widehat{\mathcal{G}}(\mathcal{C})$. O **número de cópias fiéis** de H em G , $Y(H, G)$, é a quantidade de subgrafos distintos de G que são iguais a H .

Veremos agora em um exemplo como contar a quantidade de cópias fiéis de um grafo H em outro grafo G .

Exemplo 7.1.1 (Calculando $Y(H, G)$). Considere o multigrafo direcionado colorido $G = ([4], \omega^G)$ desenhado abaixo e definido por $\omega_{(2,2)}^G(1, 3) = \omega_{(2,2)}^G(3, 1) = 1$; $\omega_{(1,1)}^G(1, 2) = \omega_{(1,1)}^G(2, 1) = 3$; $\omega_{(1,2)}^G(3, 4) = \omega_{(2,1)}^G(4, 3) = 3$. Todos os valores omitidos são iguais a 0.



Considere agora o multigrafo direcionado colorido $H = ([4], \omega^H)$ desenhado abaixo e definido por $\omega_{(1,1)}^H(1, 2) = \omega_{(1,1)}^H(2, 1) = 1$; $\omega_{(1,2)}^H(3, 4) = \omega_{(2,1)}^H(4, 3) = 2$. Todos os valores omitidos são iguais a 0.



Note que o número de cópias fiéis de H em G é o produto do número de cópias fiéis dos grafos $\begin{array}{c} \textcircled{1} \end{array} \begin{array}{c} \textcircled{2} \end{array}$ e $\begin{array}{c} \textcircled{3} \end{array} \begin{array}{c} \textcircled{4} \end{array}$. Agora note que o número de cópias fiéis do primeiro desses

grafos é dado por

$$\binom{\omega_{(1,1)}^G(1,2)}{\omega_{(1,1)}^H(1,2)} \cdot \binom{\omega_{(1,1)}^G(2,1)}{\omega_{(1,1)}^H(2,1)} = 3^2 = 9,$$

onde a primeira parcela do produto é o número de formas de escolher uma aresta de cor $(1,1)$ saindo de 1 e chegando em 2, enquanto a segunda parcela é o número de formas de escolher uma aresta de cor $(1,1)$ saindo de 2 e chegando em 1. Analogamente, o número de cópias fiéis do segundo grafo em G é dado por

$$\binom{\omega_{(1,2)}^G(3,4)}{\omega_{(1,2)}^H(3,4)} \cdot \binom{\omega_{(2,1)}^G(4,3)}{\omega_{(2,1)}^H(4,3)} = 3^2 = 9,$$

onde a primeira parcela é o número de formas de se escolher duas arestas de cor $(1,2)$ saindo de 3 e chegando em 4, e a segunda parcela é o número de formas de se escolher duas arestas de cor $(2,1)$ saindo de 4 e chegando em 3. Resulta daí que $Y(H, G) = 81$.

Observe que se $G \in \widehat{\mathcal{G}}_n$ for simples, então $Y(H, G) = \mathbb{1}(H \subset G)$. A proposição a seguir nos fornece a quantidade de cópias fiéis de um grafo H em um grafo dado G , quando G não é simples. Obviamente se H não acontece em G , então $Y(H, G) = 0$.

Proposição 15. *Se $G \in \widehat{\mathcal{G}}_n$, temos que*

$$Y(H, G) = \mathbb{1}(H \subset G) \prod_{c \in \mathcal{C}_<} \prod_{u,v} B_c^{H,G}(u,v) \prod_{c \in \mathcal{C}_=} \prod_{u \leq v} B_c^{H,G}(u,v),$$

onde $B_c^{H,G}(u,v) = \binom{\omega_c^G(u,v)}{\omega_c^H(u,v)}$, com a convenção de que se $u = v$ e $c \in \mathcal{C}_=$, então $B_c^{H,G}(u,v) = \binom{(\omega_c^G(u,v)/2)}{(\omega_c^H(u,v)/2)}$.

Demonstração. Seja $H \in \widehat{\mathcal{G}}_n$. Se $H \subset G$, então $\omega_c^H(u,v) \leq \omega_c^G(u,v)$ para todos $c \in \mathcal{C}$, $u, v \in [n]$. Para cada par de vértices em $[n]$, temos $B_c^{H,G}$ maneiras distintas de tomar $\omega_c^H(u,v)$ arestas (ou *loops*) de cor c entre u e v . $\square$

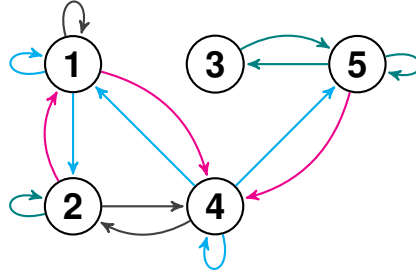
Dado o grafo H , muitas vezes estaremos interessados em saber quantos subgrafos de G são isomorfos a H . Para tal, definiremos a variável aleatória que conta o número de cópias isomórficas de H em G abaixo.

Definição 7.1.2. Sejam $H, G \in \widehat{\mathcal{G}}(\mathcal{C})$. O **número de cópias isomórficas** de H em G , $X(H, G)$, é a quantidade de subgrafos distintos de G isomorfos a H .

Note que a variável Y conta quantas cópias fiéis do grafo H existem dentro do grafo G , i.e, quantos subgrafos de G têm exatamente o mesmo conjunto de vértices e arestas de H . Por sua vez, a variável X conta quantos subgrafos distintos de G são isomorfos a H , uma condição mais fraca que a anterior.

Em todos os exemplos, utilizaremos $L = 2$, e portanto temos apenas 4 cores de arestas. Os rótulos das cores são aqueles presentes no Exemplo 5.2.1.

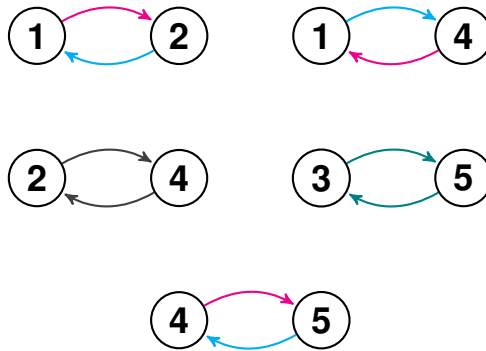
Exemplo 7.1.2 (Diferença de X e Y). Considere o multigrafo G do Exemplo 5.2.1, novamente desenhado abaixo.



Considere agora o multigrafo H desenhado abaixo.



Não é difícil notar que $Y(H, G) = 1$, uma vez que o grafo H acontece apenas uma vez em G . Por outro lado, há cinco subgrafos distintos de G que são isomorfos a H , a saber os grafos



Portanto, $X(H, G) = 5$ nesse caso. Por outro lado, fazendo K rodar todas as possibilidades de multigrafos isomorfos a H com conjunto de vértices contido em $V = [5]$, teríamos que $Y(K, G) \neq 0$ apenas quando K fosse um dos grafos acima. Sendo K qualquer um dos grafos acima, no entanto, teríamos $Y(K, G) = 1$, de onde

$$X(H, G) = \sum_K Y(K, G), \quad (7.1)$$

onde a soma é tomada sobre conjunto dos grafos isomorfos a H com conjunto de vértices em $[n]$.

Definição 7.1.3. O grupo de automorfismos de H é o conjunto das bijeções $\gamma : V(H) \rightarrow V(H)$ que deixam H invariante. Denotaremos por $a(H)$ a cardinalidade do grupo de automorfismos de H .

Considere, por exemplo, o seguinte multigrafo direcionado colorido



Se trocássemos 1 e 3 de lugar, nada ocorreria. Se, no entanto, trocássemos o 1 e 2 de lugar, obteríamos o multigrafo



que com certeza não é igual ao multigrafo original.

A seguir, veremos que X e Y estão relacionadas via grupo de automorfismos de H . Vamos estabelecer isso formalmente.

Proposição 16. *Sejam $G \in \widehat{\mathcal{G}}_n$ e $H \in \widehat{\mathcal{G}}_k$, com $k \leq n$. Então o número de subgrafos distintos de G que são isomorfos a H é dado por*

$$X(H, G) = \frac{1}{a(H)} \sum_{\tau} Y(\tau(H), G),$$

onde a soma é tomada sobre os mapas injetivos $\tau : [k] \rightarrow [n]$ e $\tau(H)$ representa o multigrafo obtido por emergir H em $[n]$ via τ .

Demonstração. Note que contar a quantidade de cópias isomórficas de H em G , é o mesmo que contar o número de novas rotulações distintas dos vértices de H por uma função injetora $\tau : [k] \rightarrow [n]$ que o torna uma cópia fiel de algum subgrafo de G (pela própria definição de isomorfismo), uma vez que $[k] \subset [n]$.

No entanto, existem permutações dos vértices de H que o deixam invariante. Se $H \subset G$, quando uma permutação dos vértices de H o deixa invariante, temos que eles dois (o grafo H e a sua permutação) produzem as mesmas cópias idênticas de algum subgrafo de G . Para cada imersão de H por uma injeção $\tau : [k] \rightarrow [n]$, exatamente a mesma quantidade de permutações que deixam H invariante, também deixam $\tau(H)$ invariante. Sendo $a(H)$ o número de permutações de H que o deixam invariante, concluímos que

$$X(H, G) = \frac{1}{a(H)} \sum_{\tau} Y(\tau(H), G),$$

somando-se sobre todos os mapas τ injetivos. □

7.2 Soma direta de multigrafos

Definiremos um tipo especial de união de grafos, que chamaremos de soma direta dos grafos H e H' .

Definição 7.2.1. Sejam $H \in \mathcal{G}_k$ e $H' \in \mathcal{G}_{k'}$. Definimos o grafo $H \oplus H' \in \mathcal{G}_{k+k'}$, como sendo o multigrafo obtido pela união disjunta de H e uma cópia isomorfa de H' (com conjunto de vértices transladado por k , i.e, o conjunto $\{k+1, \dots, k+k'\}$.) Denotaremos $H \oplus H'$ por **soma direta** de H e H' .

Ilustraremos em um exemplo bastante simples como somamos dois multigrafos.

Exemplo 7.2.1 (Soma direta de multigrafos). Considere $H = \textcircled{1} \xrightarrow{\text{pink}} \textcircled{2} \xleftarrow{\text{blue}} \textcircled{1}$ e $H' = \textcircled{1} \xrightarrow{\text{pink}} \textcircled{2} \xleftarrow{\text{blue}} \textcircled{1}$. O multigrafo $H \oplus H'$ é o representado a seguir.



Por sua vez, o grafo $H' \oplus H$ é o que desenhamos abaixo.



Apenas transladamos o conjunto dos vértices do segundo multigrafo somado.

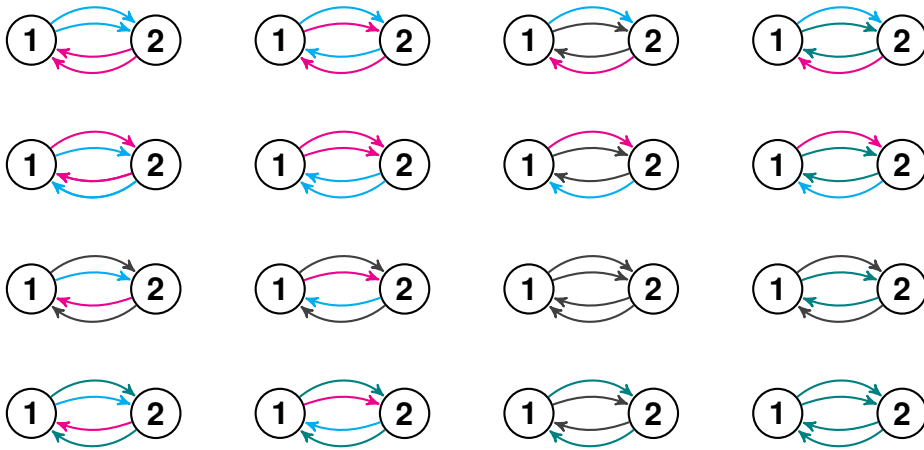
7.3 Número de cópias de um mesmo ciclo

Para o que segue, fixe $n \in \mathbb{N}$. Estabeleceremos algumas notações que serão utilizadas na demonstração do Teorema 8.1.1.

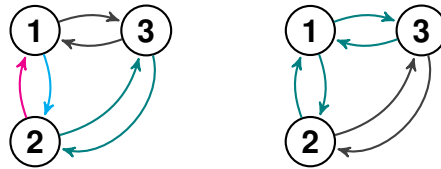
Definição 7.3.1. Para cada $k \in \mathbb{N}$, chamaremos de $\mathcal{L}_k$ o conjunto de todos os grafos $H \in \widehat{\mathcal{G}}_k$ cujo grafo daltônico $\overline{H}$ é um ciclo de tamanho k .

No exemplo abaixo mostramos elementos do conjunto $\mathcal{L}_k$ para $k = 2$ e $k = 3$.

Exemplo 7.3.1. Se $L = 2$, temos que $\mathcal{L}_2$ tem 16 elementos, a saber os multigrafos



Abaixo representamos dois elementos do conjunto $\mathcal{L}_3$.



Note que os grafos daltônicos de todos os multigrafos apresentados neste exemplo são ciclos de tamanho 2 ou 3.

Denotaremos o conjunto dos grafos com conjunto de vértices $[i]$, cujo grafo daltônico é um ciclo de tamanho i , com $1 \leq i \leq h$, por

$$\mathcal{L}_{\leq h} = \bigcup_{i=1}^h \mathcal{L}_i.$$

É importante notar que o conjunto de vértices de grafos em $\mathcal{L}_{\leq h}$ é sempre da forma $[i]$ para algum $1 \leq i \leq h$.

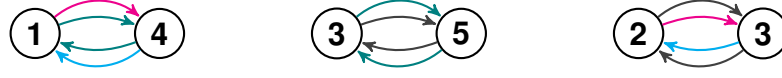
Definição 7.3.2. Para cada $H \in \mathcal{L}_{\leq h}$, denotaremos o conjunto dos multigrafos direcionados coloridos F com conjunto de vértices $V_F \subset [n]$ que são isomorfos a H , por $\mathcal{H}_H$.

Na definição acima, o conjunto $\mathcal{H}_H$ denota o conjunto dos multigrafos direcionados coloridos isomorfos a algum ciclo específico H . Tomando a união sobre todos os ciclos H , temos a seguinte notação para os multigrafos direcionados coloridos com conjunto de vértices $[n]$ que são isomorfos a algum ciclo

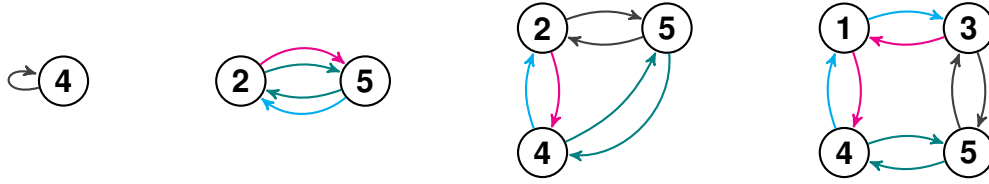
$$\mathcal{H} = \bigcup_{H \in \mathcal{L}_{\leq h}} \mathcal{H}_H.$$

Deixaremos sempre implícito que $\mathcal{H}$ depende de h e de n .

Exemplo 7.3.2. Para $n = 5$ e $H = \textcircled{1} \textcircled{2}$, temos alguns exemplos de elementos de $\mathcal{H}_H$ abaixo.



Para $h = 4$ e $n = 5$, temos abaixo quatro exemplos de elementos de $\mathcal{H}$.



Acima, temos um ciclo de tamanho 1, um de tamanho 2, um de tamanho 3 e um de tamanho 4. Os vértices estão todos contidos em $V = [5]$.

7.4 O Excesso

Uma ferramenta bastante simples de compreender, mas que vai ser crucial no desenvolvimento do texto a partir de agora, é o excesso (de arestas em relação aos vértices) de um grafo com conjunto de vértices $[k]$.

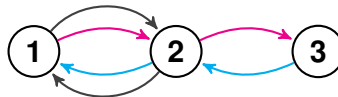
Definição 7.4.1. O **excesso** de $H \in \widehat{\mathcal{G}}_k$ é definido como sendo

$$\text{exc}(H) = \left(\frac{1}{2} \sum_{c \in \mathcal{C}} \sum_{i=1}^k d_c^H(i) \right) - k.$$

Observe que o excesso de H é a quantidade de arestas que o grafo daltônico de H tem a mais que o número de vértices, uma vez que a expressão estranha com dois somatórios no lado direito é apenas o número de arestas do grafo daltônico de H pela Proposição 12. Em símbolos,

$$\text{exc}(H) = |E(\overline{H})| - k.$$

Exemplo 7.4.1. Considere o multigrafo direcionado colorido representado abaixo.



O seu grafo daltônico é o grafo que está representado abaixo.



Note que $|\overline{H}| = 3$, uma vez que $\overline{H}$ tem duas arestas ligando os vértices 1 e 2, e tem uma aresta ligando os vértices 2 e 3. Daí, como H tem 3 vértices, temos que $\text{exc}(H) = 3 - 3 = 0$.

É fácil calcular os excessos de grafos cujo grafo daltônico é conexo ou um ciclo.

Proposição 17. *Seja $H \in \widehat{\mathcal{G}}_k$. Valem as seguintes propriedades:*

- Se $\overline{H}$ é conexo, então $\text{exc}(H) \geq -1$.
- Se $\overline{H}$ é uma árvore, então $\text{exc}(H) = -1$.
- Se $\overline{H}$ é um ciclo, então $\text{exc}(H) = 0$.

Demonstração. A primeira parte segue do fato que toda árvore com k vértices tem $k - 1$ arestas. Para a segunda parte, note que um grafo conexo de k vértices não pode ter menos que $k - 1$ arestas. De fato, todo grafo conexo de k vértices contém uma árvore de k vértices, pela Proposição 2.3.1. Por fim, um ciclo de n vértices tem n arestas. $\square$

Definição 7.4.2. Sejam $H, G \in \widehat{\mathcal{G}}(\mathcal{C})$. Definimos a união de H e G , e denotamos por $H \cup G$, como sendo o grafo com conjunto de vértices $V = V(H) \cup V(G)$ e definido por $\omega(i, j) = \omega^H(i, j) + \omega^G(i, j)$.

Note que na união de dois multigrafos F e G , nunca perdemos nenhuma aresta. Por sua vez, se $V_F \cap V_G \neq \emptyset$, sempre perdemos pelo menos um vértice ao unir F e G . Daí, segue a proposição.

Proposição 18. *Se $F, F' \in \mathcal{H}$, $F \neq F'$, e $V_F \cap V_{F'} \neq \emptyset$, então $\text{exc}(F \cup F') \geq 1$.*

Demonstração. Seja $1 \leq n = |V_F \cap V_{F'}|$. Note que o número de arestas de $\overline{F \cup F'}$ é a soma da quantidade de arestas de $\overline{F}$ e $\overline{F'}$. Além disso

$$|V(F \cup F')| = |V_F| + |V_{F'}| - n,$$

donde

$$\begin{aligned} \text{exc}(F \cup F') &= (|E(\overline{F})| + |E(\overline{F'})|) - (|V_F| - |V_{F'}| + n) \\ &= (|E(\overline{F})| - |V_F|) + (|E(\overline{F'})| - |V_{F'}|) + n \\ &= \text{exc}(F) + \text{exc}(F') + n = n \geq 1, \end{aligned}$$

uma vez que os grafos daltônicos de F e F' são ciclos, e portanto o excesso deles é 0, pela Proposição 17. $\square$

Lema 7.4.1. Se $H \in \mathcal{G}_k$ e $H' \in \mathcal{G}_{k'}$, então

i. $\text{exc}(H \cup H') \geq \text{exc } H + \text{exc } H'$; e

ii. $\text{exc}(H \oplus H') = \text{exc } H + \text{exc } H'$.

Demonstração. i. Sendo $n = \min\{k, k'\}$, temos que

$$\begin{aligned} \text{exc}(H \cup H') &= |E(\overline{H \cup H'})| - (k + k' - n) \\ &\geq |E(\overline{H})| + |E(\overline{H'})| - k - k' + n \\ &\geq (|E(\overline{H})| - k) + (|E(\overline{H'})| - k') \\ &= \text{exc}(H) + \text{exc}(H'), \end{aligned}$$

o que conclui a prova do item.

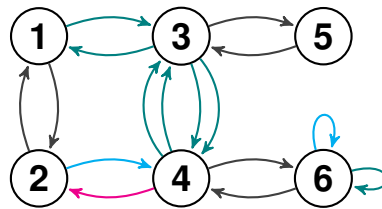
ii. Note que $|V(H \oplus H')| = k + k'$ e $|E(H \oplus H')| = |E(H)| + |E(H')|$, donde

$$\begin{aligned} \text{exc}(H \oplus H') &= (|E(H)| + |E(H')|) - (k + k') \\ &= (|E(H)| - k) + (|E(H')| - k') \\ &= \text{exc}(H) + \text{exc}(H'), \end{aligned}$$

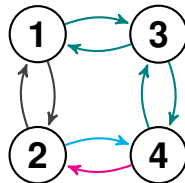
como queríamos demonstrar. $\square$

Ilustraremos em um exemplo o que faremos no Teorema 7.4.1. Quando $Y(F, G) \geq 2$ para algum ciclo F , então conseguimos um grafo K com excesso maior que 1 com alguma cópia isomórfica em G .

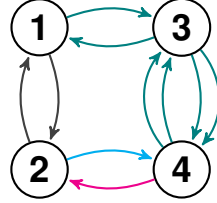
Exemplo 7.4.2. Considere o grafo G representado abaixo. Não é difícil encontrar um grafo K com excesso ≥ 1 tal que $X(K, G) \geq 1$.



Considere agora o ciclo F desenhado logo abaixo.



Note que $Y(F, G) = 4$. Como há mais de uma cópia dele em G , isso quer dizer que existem arestas sobrando em alguma conexão de vértices. Estas conexões extras nos dão, em G , um multigrafo K com excesso ≥ 1 , o qual desenhado logo abaixo.



Não é difícil ver que $X(K, G) = 1$.

Para provar o Teorema principal deste trabalho precisaremos do seguinte resultado.

Teorema 7.4.1. *Se existe $F \in \mathcal{H}$ com $Y(F, G) \geq 2$, então existe $K \in \widehat{\mathcal{G}}$ com $\text{exc}(K) \geq 1$, tal que $X(K, G) \geq 1$.*

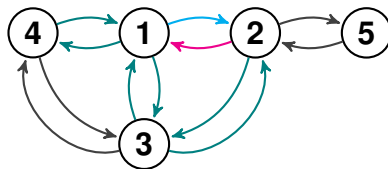
Demonstração. Seja $F \in \mathcal{H}$ um ciclo para o qual $Y(F, G) \geq 2$. Então há duas cópias idênticas, mas distintas, de F em G , ou seja, há dois subgrafos F' e F'' de G , tais que $V_{F'} = V_{F''} = V_F$, ambos isomorfos a F , mas com conjunto de arestas distintos. Pela Proposição 18, segue que $\text{exc}(F' \cup F'') \geq 1$.

Tomando K isomorfo a $F' \cup F''$, temos que $\text{exc}(K) \geq 1$ e $X(K, G) \geq 1$, como queríamos demonstrar. $\square$

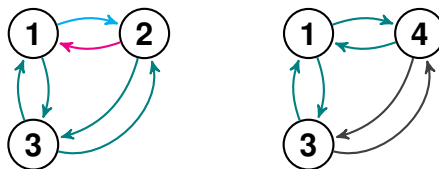
7.5 Semiunião de multigrafos direcionados coloridos

Dados três multigrafos direcionados coloridos F_1, F_2, G , pode acontecer de termos $F_1 \subset G$ e $F_2 \subset G$, sem que tenhamos $F_1 \cup F_2 \in G$, como bem podemos ver no exemplo abaixo.

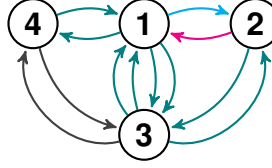
Exemplo 7.5.1 ($F_1 \cup F_2$ não acontece em G). Considere $G \in \widehat{\mathcal{G}}(\mathcal{C})$ desenhado abaixo.



Agora considere os dois ciclos $F_1, F_2 \in \mathcal{H}$ desenhados abaixo.



Note que $F_1 \cup F_2$ é o multigrafo desenhado abaixo, que não acontece em G , embora $F_1 \subset G$ e $F_2 \subset G$.

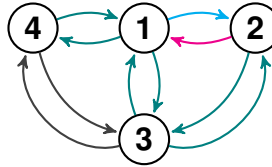


O exemplo acima nos motiva a definir uma nova operação no conjunto $\widehat{\mathcal{G}}(\mathcal{C})$, que denotaremos por semiunião, que faz valer a propriedade de que a semiunião de multigrafos que acontecem em G também acontece em G .

Definição 7.5.1. Definimos a **semiunião** de H e G , e denotamos por $H \vee G$, como sendo o grafo com conjunto de vértices $V = V(H) \cup V(G)$ e definido por $\omega(i, j) = \max\{\omega^H(i, j), \omega^G(i, j)\}$.

Com a definição acima, observe que se $F_1, F_2 \subset G$, então $F_1 \vee F_2 \subset G$. Abaixo ilustramos esse fato em um exemplo.

Exemplo 7.5.2 ($F_1 \vee F_2$ acontece em G). Considere G, F_1, F_2 como no Exemplo 7.5.1. Note que $F_1 \vee F_2$ é o multigrafo desenhado abaixo, que acontece em G .



Como já fizemos antes com união direta, definimos $F_1 \vee F_2 \vee F_3 = (F_1 \vee F_2) \vee F_3$ e indutivamente fica definida a semiunião de qualquer quantidade de multigrafos direcionados coloridos. Utilizaremos ainda a notação

$$\bigvee_{i=1}^k F_i := F_1 \vee \cdots \vee F_k.$$

Veremos agora que a semiunião de ciclos distintos cujos conjuntos de vértices não são disjuntos tem excesso ≥ 1 .

Proposição 19. Se $F_1, F_2 \in \mathcal{H}$, $F_1 \neq F_2$, e $V_{F_1} \cap V_{F_2} \neq \emptyset$, então $\text{exc}(F_1 \vee F_2) \geq 1$.

O resultado acima é muito parecido com o do Lema 18, com uma enorme vantagem: $F_1 \cup F_2$ necessariamente acontece em G se F_1 e F_2 acontecerem em G . A prova fica como exercício (veja Exercício 7.6.1).

Proposição 20. Sejam $G \in \widehat{\mathcal{G}}(\mathcal{C})$ e $F \in \mathcal{H}$. Então $\text{exc}(G \vee F) \geq \text{exc}(G)$.

Demonstração. Note que para cada aresta de F perdida na semiunião com G , os dois vértices que ela conecta também são perdidos. Para que se percam duas arestas, pelo menos três vértices são perdidos. Prosseguindo, o número de arestas perdidas na semiunião é sempre menor ou igual que o número de vértices perdidos. Como o número de arestas e vértices em um ciclo é igual, adicionamos na semiunião não adicionamos mais vértices do que arestas a G , o que faz o excesso de $G \vee F$ nunca ser menor que o excesso de G , como queríamos demonstrar. $\square$

Agora estabeleceremos algumas notações que serão convenientes para utilizar nas demonstrações que seguem a partir de agora.

Definição 7.5.2. Defina o conjunto $\mathcal{D}_{k,r}^{\mathcal{H}}$ das r -uplas, $r \geq 1$, de elementos de $\mathcal{H}$ com k coordenadas distintas por

$$\mathcal{D}_{k,r}^{\mathcal{H}} := \{(F_1, \dots, F_r) \in \mathcal{H}^r : \text{há exatamente } k \text{ } F_i \text{ distintos}\}.$$

Defina agora os conjuntos $\mathcal{P}_k^{\mathcal{H}}$ e $\mathcal{N}_k^{\mathcal{H}}$, das k -uplas de multigrafos distintos de $\mathcal{H}$ sem interseção no conjunto de vértices e com interseção no conjunto de vértices, respectivamente, dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k^{\mathcal{H}} &:= \{(F_i) \in \mathcal{D}_{k,k}^{\mathcal{H}} : V(F_l) \cap V(F_j) = \emptyset, \text{ para todos } l \neq j\}, \text{ e} \\ \mathcal{N}_k^{\mathcal{H}} &:= \{(F_i) \in \mathcal{D}_{k,k}^{\mathcal{H}} : V(F_l) \cap V(F_j) \neq \emptyset, \text{ para algum par } l \neq j\}. \end{aligned}$$

Observação 4. Observe que $\mathcal{P}_k^{\mathcal{H}} \cup \mathcal{N}_k^{\mathcal{H}} = \mathcal{D}_{k,k}^{\mathcal{H}}$, e a união é disjunta, ou seja, temos uma partição no conjunto $\mathcal{D}_{k,k}^{\mathcal{H}}$.

Note agora que dada $(F_i) \in \mathcal{P}_k^{\mathcal{H}}$, então a semiunião dos F_i coincide com a soma direta dos F_i , uma vez que como não há interseção dos vértices, não há arestas para se perder na semiunião. Ou seja, temos que

$$\bigvee_{i=1}^k F_i = F_1 \oplus \dots \oplus F_k,$$

e portanto $\text{exc}(\bigvee_{i=1}^k F_i) = 0$.

A Proposição 20 acima ajuda a estender a Proposição 19 para sequências $(F_i) \in \mathcal{N}_k^{\mathcal{H}}$, como veremos na próxima proposição.

Proposição 21. Se $(F_i) \in \mathcal{N}_k^{\mathcal{H}}$, então $\text{exc}(\bigvee_{i=1}^k F_i) \geq 1$.

Demonstração. Para $k = 2$, temos a Proposição 19. Suponha agora que para $k = n > 2$ o resultado seja verdadeiro sempre. Sejam $(F_i) \in \mathcal{N}_{n+1}^{\mathcal{H}}$ e $r, s \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ tais que

$V_{F_r} \cap V_{F_s} \neq \emptyset$. Seja $j \neq r, s$. Então a sequência formada pelos F_i exceto por F_j , $(F_i)_{i \neq j}$ pertence a $\mathcal{N}_n^{\mathcal{H}}$, e portanto é tal que $\text{exc}(\bigvee_{i \neq j} F_i) \geq 1$. Pela Proposição 20, segue que

$$\begin{aligned} \text{exc} \left(\bigvee_{i=1}^{n+1} F_i \right) &= \text{exc} \left(\left(\bigvee_{i \neq j} F_i \right) \vee F_j \right) \\ &\geq \text{exc} \left(\bigvee_{i \neq j} F_i \right) \geq 1, \end{aligned}$$

o que conclui a nossa prova por indução. □

7.6 Exercícios

Exercício 7.6.1. Demonstre a Proposição 19.

8 A probabilidade de não existir ciclos curtos num grafo esparso

O objetivo principal deste trabalho é mostrar que é positiva a probabilidade de não existir ciclos curtos em uma sequência $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de multigrafos tomados com distribuição $\text{CM}(\vec{D}^{(n)})$ num regime especial, que chamaremos de **esparso**. Com um abuso de notação, algumas vezes diremos que o grafo G_n é esparso, para indicar que (G_n) é tomado no regime esparso.

Todas as demonstrações que aqui se encontram são as apresentadas em [Bordenave e Caputo 2015], com alguma preocupação a mais no desenvolvimento das contas. Dividimos a prova do teorema em alguns lemas, proposições e teoremas, a fim de deixar ela mais intuitiva.

8.1 Número de ciclos em um grafo esparso

Para facilitar a escrita, começaremos definindo a variável aleatória que conta a quantidade de ciclos curtos de um dado grafo $G \in \widehat{\mathcal{G}}_n$.

Definição 8.1.1. Sejam $G \in \widehat{\mathcal{G}}_n$ e $h \in \mathbb{N}$ fixado. O **número de ciclos h -curtos** de G , $Z(G, h)$, é a quantidade de ciclos de tamanho $l \leq h$ do grafo daltônico de G , dado por

$$Z(G, h) = \sum_{H \in \mathcal{L}_{\leq h}} X(H, G). \quad (8.1)$$

Estudaremos agora a probabilidade de não existir ciclos de tamanho $l \leq h$, com h dado, quando tomamos $n \rightarrow \infty$ na sequência de multigrafos $G_n \in \widehat{\mathcal{G}}(\vec{D}^{(n)})$ com distribuição $\text{CM}(\vec{D}^{(n)})$, dadas as hipóteses sobre a sequência $(\vec{D}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ descritas abaixo. Para entender melhor a Hipótese $H2$, veja o Apêndice C.

Para cada $\theta \in \mathbb{N}$, denotamos por $\mathcal{M}_L^{(\theta)}$ o conjunto das matrizes $L \times L$ com entradas inteiras não-negativas limitadas por θ .

Definição 8.1.2. Fixemos $\theta \in \mathbb{N}$ e $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}_L^{(\theta)})$ uma probabilidade em $\mathcal{M}_L^{(\theta)}$. Diremos que a sequência $\vec{D}^{(n)} = (D^{(n)}(u))_{u \in [n]} \in \mathcal{D}_n$, $n \geq 1$, é (θ, P) -esparsa quando satisfizer as duas seguintes condições:

$H1$. Para todo $u \in [n]$, $D^{(n)}(u) \in \mathcal{M}_L^{(\theta)}$;

$H2$. Quando $n \rightarrow \infty$, a medida empírica de vizinhança $\frac{1}{n} \sum_{u=1}^n \delta_{D^{(n)}(u)} \xrightarrow{w} P$.

O principal resultado que provaremos neste trabalho é o Teorema 8.1.1, enunciado abaixo. Para prová-lo, utilizaremos dois teoremas que serão provados posteriormente neste capítulo: o Teorema 8.2.1 e o Teorema 8.3.1.

Teorema 8.1.1 (Bordenave-Caputo). *Fixe $\theta \in \mathbb{N}$, $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}_L^{(\theta)})$ e uma sequência $\vec{D}^{(n)}$ que é (θ, P) -esparsa. Tome $G_n \in \widehat{\mathcal{G}}(\vec{D}^{(n)})$ com distribuição $\text{CM}(\vec{D}^{(n)})$. Para todo $h \in \mathbb{N}$, existe $\alpha_h > 0$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(G_n \in \mathcal{G}(\vec{D}^{(n)}, h)) = \alpha_h. \quad (8.2)$$

Demonstração. Queremos calcular, assintoticamente, a probabilidade de o grafo G_n dado não ter ciclos de tamanho $\leq h$. Pela definição da variável aleatória $Z(G, h)$, podemos reescrever a expressão de (8.1). Para simplificar a notação, escreveremos $Z_n = Z(G_n, h)$.

Queremos provar que, quando tomamos G_n com distribuição $\text{CM}(\vec{D}^{(n)})$, existe $\alpha_h > 0$ para o qual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \alpha_h.$$

Pelo Teorema 8.3.1 a sequência de variáveis aleatórias Z_n converge em distribuição para uma Poisson, digamos W . Assim

$$\alpha_h = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \mathbb{P}(W = 0) = e^{-\mathbb{E}[W]},$$

onde $\mathbb{E}[W] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Z_n]$. Para determinar α_h , basta observar que pela Definição 8.1.1 temos

$$\mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}\left[\sum_{H \in \mathcal{L}_{\leq h}} X(H, G_n)\right] = \sum_{H \in \mathcal{L}_{\leq h}} \mathbb{E}[X(H, G_n)]. \quad (8.3)$$

Pelo Teorema 8.2.1, existe um valor $\lambda_H \geq 0$ para o qual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(H, G_n)] = \lambda_H. \quad (8.4)$$

Logo, pela Equação 8.3, obtemos a expressão

$$\alpha_h = \exp\left(-\sum_{H \in \mathcal{L}_{\leq h}} \lambda_H\right).$$

Chamando $\lambda(h) = \sum_{H \in \mathcal{L}_{\leq h}} \lambda_H$, temos a notação mais simples $\alpha_h = e^{-\lambda(h)}$. $\square$

8.2 A esperança do número de cópias isomórficas de um subgrafo

Nesta seção mostraremos que se G_n é esparso então a esperança do número de cópias isomórficas de um ciclo em G_n converge. O resultado preciso está enunciado a seguir. Para o resto do texto, fixe $\theta \in \mathbb{N}$ um número, e $P \in \mathcal{M}_L^{(\theta)}$ uma probabilidade no conjunto das matrizes $\mathcal{M}_L^{(\theta)}$.

Teorema 8.2.1. *Seja $G_n \in \widehat{\mathcal{G}}(\vec{D}^{(n)})$ com distribuição $\text{CM}(\vec{D}^{(n)})$, onde $\vec{D}^{(n)}$ é (θ, P) -esparso. Para todo $H \in \mathcal{L}_{\leq h}$, quando $n \rightarrow \infty$ temos que existe $\lambda_H \geq 0$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(H, G_n)] = \lambda_H. \quad (8.5)$$

Na verdade, provaremos um resultado suavemente mais forte que pode ser visto no Teorema 8.2.2.

No capítulo anterior, vimos que o número de cópias isomórficas X , pode ser dado por uma expressão que depende do número de cópias fiéis, Y . No intuito de provar o teorema anterior, calcularemos a seguir a esperança do número de cópias fiéis de um grafo $H \in \widehat{\mathcal{G}}_k$ dentro de um grafo $G \in \widehat{\mathcal{G}}(\vec{D})$ tomado aleatoriamente com distribuição $\text{CM}(\vec{D})$. Analisaremos uma cor por vez, já que $\text{CM}(\vec{D})$ é a medida produto sobre as cores $c \in \mathcal{C}_{\leq}$.

Lema 8.2.1. *Sejam $\vec{D} = (D(1), \dots, D(n))$, $G \in \widehat{\mathcal{G}}(\vec{D})$ com distribuição $\text{CM}(\vec{D})$ e $H \in \widehat{\mathcal{G}}_k$ com arestas de cores $c, \bar{c} \in \mathcal{C}_{<}$ apenas. Então*

$$\mathbb{E}[Y(H, G)] = \frac{\prod_{i=1}^k (D_c(i))_{d_c^H(i)} (D_{\bar{c}}(i))_{d_{\bar{c}}^H(i)}}{(S_c)_{s_c^H} \prod_{i,j} \omega_c^H(i, j)!},$$

onde $s_c^H := \sum_{i=1}^k d_c^H(i)$.

Demonstração. Comece observando que como H tem arestas de cor $c, \bar{c}$ apenas, então temos que

$$Y(H, G) = \mathbf{1}(H \subset G) \prod_{u,v} \binom{\omega_c^G(u, v)}{\omega_c^H(u, v)}. \quad (8.6)$$

Em particular, G conter uma cópia idêntica de H implica que $\omega_c^G(u, v) \geq \omega_c^H(u, v)$, para todos $u, v \in [n]$. Do fato que $Y(H, Q) \neq 0$ se, e somente se, $H \subset Q$, segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y(H, G)] &= \mathbb{E} \left[\sum_{Q: H \subset Q} Y(H, Q) \cdot \mathbf{1}(G_c = Q) \right] \\ &= \sum_{Q: H \subset Q} Y(H, Q) \cdot \mathbb{E}[\mathbf{1}(G_c = Q)] \\ &= \sum_{Q: H \subset Q} Y(H, Q) \cdot \mathbb{P}(G_c = Q), \end{aligned}$$

onde a soma é tomada sobre todos os grafos $Q \in \widehat{\mathcal{G}}_n$ com cores $(c, \bar{c})$ apenas e com sequência de graus $(D_c(i), D_{\bar{c}}(i))_{i \in [n]}$. Por (8.6), pelo Lema 6.3.1 e definindo $\omega_c^H(u, v) = 0$ se $u > k$ ou $v > k$ (e, por consequência, $d_c^H(i) = 0$ para $i > k$), segue que

$$\mathbb{E}[Y(H, G)] = \sum_{Q: H \subset Q} \frac{\prod_{i=1}^n D_c(i)! D_{\bar{c}}(i)!}{S_c! \prod_{u,v} \omega_c^Q(u, v)!} \prod_{u,v} \binom{\omega_c^Q(u, v)}{\omega_c^H(u, v)}. \quad (8.7)$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} \prod_{u,v} \frac{1}{\omega_c^Q(u, v)!} \binom{\omega_c^Q(u, v)}{\omega_c^H(u, v)} &= \prod_{u,v} \frac{\omega_c^Q(u, v)!}{\omega_c^Q(u, v)! \omega_c^H(u, v)! (\omega_c^Q(u, v) - \omega_c^H(u, v))!} \\ &= \prod_{u,v} \frac{1}{\omega_c^H(u, v)! (\omega_c^Q(u, v) - \omega_c^H(u, v))!}, \end{aligned}$$

e portanto temos que

$$\mathbb{E}[Y(H, G)] = \frac{\prod_{i=1}^n D_c(i)! D_{\bar{c}}(i)!}{S_c! \prod_{u,v} \omega_c^H(u, v)!} \sum_{Q: H \subset Q} \prod_{u,v} \frac{1}{(\omega_c^Q(u, v) - \omega_c^H(u, v))!}. \quad (8.8)$$

Por outro lado, aplicando o Lema 6.3.1 para o multigrafo $Q \setminus H$, definido por $\omega_c(u, v) = (\omega_c^Q(u, v) - \omega_c^H(u, v))$, temos que

$$\prod_{u,v} \frac{1}{(\omega_c^Q(u, v) - \omega_c^H(u, v))!} = \frac{n_c(Q \setminus H)}{\prod_{i=1}^n (D_c(i) - d_c^H(i))! (D_{\bar{c}}(i) - d_{\bar{c}}^H(i))!}. \quad (8.9)$$

No entanto, como Q (que tem sequência de graus $(D_c(i), D_{\bar{c}}(i))_i$) roda todos os grafos contendo H_c , então estamos rodando por todos os grafos com sequência de graus $(D_c(i) - d_c^H(i), D_{\bar{c}}(i) - d_{\bar{c}}^H(i))_i$ possíveis e portanto por um resultado análogo ao do Lema 2.5.2 temos que

$$\sum_{Q: H \subset Q} n_c(Q \setminus H) = |\Sigma'_c| = (S_c - s_c^H)!, \quad (8.10)$$

onde Σ'_c é o conjunto das configurações para $Q \setminus H$. Substituindo (8.9) em (8.8) e tomando a soma em Q , obtemos por (8.10) que

$$\mathbb{E}[Y(H, G)] = \frac{\prod_{i=1}^n (D_c(i))_{d_c^H(i)} (D_{\bar{c}}(i))_{d_{\bar{c}}^H(i)}}{(S_c)_{s_c^H} \prod_{i,j} \omega_c^H(i, j)!}.$$

Agora note que $d_c^H(i) = 0$ para $i \geq k$, e portanto temos que

$$\mathbb{E}[Y(H, G)] = \frac{\prod_{i=1}^k (D_c(i))_{d_c^H(i)} (D_{\bar{c}}(i))_{d_{\bar{c}}^H(i)}}{(S_c)_{s_c^H} \prod_{i,j} \omega_c^H(i, j)!}, \quad (8.11)$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Lema 8.2.2. *Seja $G \in \widehat{\mathcal{G}}(\vec{D})$ com distribuição $\text{CM}(\vec{D})$ e $H \in \widehat{\mathcal{G}}_k$ com arestas de cor $c \in \mathcal{C}_=$ apenas. Então*

$$\mathbb{E}[Y(H, G)] = \frac{\prod_{i=1}^n (D_c(i))_{d_c^H(i)}}{\prod_{i < j} \omega_c^H(i, j)! \prod_{i=1}^n (\omega_c^H(i, i)/2)! 2^{\omega_c^H(i, i)/2} ((S_c))_{s_c^H}},$$

onde $s_c^H := \sum_{i=1}^k d_c^H(i)$.

Demonstração. Como H tem arestas apenas de cor $c \in \mathcal{C}_=$, então temos que

$$Y(H, Q) = \mathbb{1}(H \subset Q) \prod_{u < v} \binom{\omega_c^Q(u, v)}{\omega_c^H(u, v)} \prod_{u=1}^n \binom{\omega_c^Q(u, u)/2}{\omega_c^H(u, u)/2}. \quad (8.12)$$

Pelo Lema 6.4.1 e por um argumento semelhante ao da prova do Lema 8.2.1, segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y(H, G)] &= \sum_{Q: H \subset Q} Y_c(H, Q) \cdot \mathbb{P}(G_c = Q) \\ &= \sum_{Q: H \subset Q} \frac{\prod_{i=1}^n D_c(i)! \prod_{u < v} \binom{\omega_c^Q(u, v)}{\omega_c^H(u, v)} \prod_{u=1}^n \binom{\omega_c^Q(u, u)/2}{\omega_c^H(u, u)/2}}{(S_c - 1)!! \prod_{i < j} \omega_c^Q(i, j)! \prod_{i=1}^n (\omega_c^Q(i, i)/2)! 2^{\omega_c^Q(i, i)/2}}. \end{aligned}$$

Desenvolvendo os coeficientes binomiais e utilizando o Lema 6.3.1 para o multigrafo $Q \setminus H$, definido por $\omega_c(u, v) = (\omega_c^Q(u, v) - \omega_c^H(u, v))$, concluímos que

$$\mathbb{E}[Y(H, G)] = \frac{\prod_{i=1}^n D_c(i)!}{(S_c - 1)!! \cdot b(Q)} \sum_{Q: H \subset Q} \frac{n_c(Q \setminus H)}{\prod_{i=1}^n (D_c(i) - d_c^H(i))!}. \quad (8.13)$$

Utilizando um argumento semelhante ao de (8.10), temos pelo Lema 2.5.1 que

$$\sum_{Q: H \subset Q} n_c(Q \setminus H) = |\Sigma'_c| = (S_c - s_c^H - 1)!!. \quad (8.14)$$

Substituindo (8.14) em (8.13), obtemos

$$\mathbb{E}[Y(H, G)] = \frac{(S_c - s_c^H - 1)!! \prod_{i=1}^n D_c(i)!}{p(H)(S_c - 1)!! \prod_{i=1}^n (D_c(i) - d_c^H(i))!} = \frac{\prod_{i=1}^n (D_c(i))_{d_c^H(i)}}{b(H)((S_c))_{s_c^H}}. \quad (8.15)$$

Novamente, como $d_c^H(i) = 0$ para $i > k$, segue que

$$\mathbb{E}[Y(H, G)] = \frac{\prod_{i=1}^k (D_c(i))_{d_c^H(i)}}{b(H)((S_c))_{s_c^H}}, \quad (8.16)$$

como desejávamos demonstrar. $\square$

Agora vamos generalizar os resultados acima para quando H tem cores $c \in \mathcal{C}$. Nesse caso, H é a sobreposição de todos os grafos H_c , com $c \in \mathcal{C}_\leq$. Assim, o número de cópias fiéis de H em G é o produto do número de cópias fiéis de cada H_c em G , ou seja,

$$\mathbb{E}[Y(H, G)] = \prod_{c \in \mathcal{C}_\leq} \mathbb{E}[Y(H_c, G)].$$

Utilizamos isto para provar o lema abaixo.

Lema 8.2.3. *Seja $G \in \widehat{\mathcal{G}}(\vec{D})$ com distribuição $\text{CM}(\vec{D})$ e $H \in \widehat{\mathcal{G}}_k$. Então*

$$\mathbb{E}[Y(H, G)] = \frac{\prod_{c \in \mathcal{C}} \prod_{i=1}^k (D_c(i))_{d_c^H(i)}}{b(H) \prod_{c \in \mathcal{C}_<} (S_c^{(n)})_{s_c^H} \prod_{c \in \mathcal{C}_=} ((S_c^{(n)}))_{s_c^H}},$$

onde $s_c^H := \sum_{i=1}^k d_c^H(i)$.

Demonstração. Tomando o produto sobre todas as cores $c \in \mathcal{C}_\leq$ e utilizando os resultados obtidos em (8.11) e (8.16), obtemos que

$$\mathbb{E}[Y(H, G)] = \frac{\prod_{c \in \mathcal{C}} \prod_{i=1}^k (D_c(i))_{d_c^H(i)}}{b(H) \prod_{c \in \mathcal{C}_<} (S_c^{(n)})_{s_c^H} \prod_{c \in \mathcal{C}_=} ((S_c^{(n)}))_{s_c^H}},$$

como queríamos demonstrar. $\square$

O próximo resultado é muito importante por duas razões. A primeira é que ele próprio, em sua versão apresentada no início da seção, é utilizado na demonstração do teorema principal. A segunda razão é que seus corolários serão utilizado para verificar que Z_n converge em distribuição para uma variável aleatória Poisson.

O teorema a seguir nos fornece uma fórmula assintótica para o valor esperado do número de cópias isomórficas de um multigrafo H dado, quando tomamos uma sequência de grafos com distribuição $\text{CM}(\vec{D}^{(n)})$, onde $\vec{D}^{(n)}$ é (θ, P) -esparsa.

Teorema 8.2.2. *Seja $G_n \in \widehat{\mathcal{G}}(\vec{D}^{(n)})$ com distribuição $\text{CM}(\vec{D}^{(n)})$, onde $\vec{D}^{(n)}$ é (θ, P) -esparsa. Para qualquer inteiro $k \in \mathbb{N}$ fixo, $H \in \widehat{\mathcal{G}}_k$, quando $n \rightarrow \infty$ temos*

$$\mathbb{E}[X(H, G_n)] \sim \frac{\prod_{i=1}^k \mathbb{E}[\prod_{c \in \mathcal{C}} (D_c)_{d_c^H(i)}]}{a(H)b(H) \prod_{c \in \mathcal{C}} (\mathbb{E}[D_c])_{s_c^H/2}} n^{-\text{exc}(H)}, \quad (8.17)$$

onde $D \in \mathcal{M}_L^{(\theta)}$ tem distribuição P e $s_c^H := \sum_{i=1}^k d_c^H(i)$.

Demonstração. Sabemos da Proposição 16 e do Lema 8.2.3 que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(H, G)] &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{a(H)} \sum_{\tau} Y(\tau(H), G) \right] = \frac{1}{a(H)} \sum_{\tau} \mathbb{E}[Y(\tau(H), G)] \\ &= \frac{1}{a(H)} \sum_{\tau} \frac{\prod_{c \in \mathcal{C}} \prod_{i=1}^k (D_c^{(n)}(\tau(i)))_{d_c^{\tau(H)}(\tau(i))}}{b(\tau(H)) \prod_{c \in \mathcal{C}_{<}} (S_c^{(n)})_{s_c^{\tau(H)}} \prod_{c \in \mathcal{C}_{=}} ((S_c^{(n)}))_{s_c^{\tau(H)}}} \\ &= \frac{\sum_{\tau} \prod_{c \in \mathcal{C}} \prod_{i=1}^k (D_c^{(n)}(\tau(i)))_{d_c^H(i)}}{a(H)b(H) \prod_{c \in \mathcal{C}_{<}} (S_c^{(n)})_{s_c^H} \prod_{c \in \mathcal{C}_{=}} ((S_c^{(n)}))_{s_c^H}}, \end{aligned}$$

onde a soma é tomada sobre todas as funções injetoras $\tau : [k] \rightarrow [n]$. Como b é invariante por reorganização dos vértices (veja Exercício 6.5.1), $d_c^H(i) = d_c^{\tau(H)}(\tau(i))$ (pois o grau de i em H é o mesmo que o grau de $\tau(i)$ em $\tau(H)$), e $s_c^H = s_c^{\tau(H)}$ para toda função injetora $\tau : [k] \rightarrow [n]$ (já que a soma dos graus de todas as cores em H e $\tau(H)$ permanece as mesmas), então concluímos que

$$\mathbb{E}[X(H, G)] = \frac{(n)_k \mathbb{E} \left[\prod_{c \in \mathcal{C}} \prod_{i=1}^k (M_c(i))_{d_c^H(i)} \right]}{a(H)b(H) \prod_{c \in \mathcal{C}_{<}} (S_c)_{s_c^H} \prod_{c \in \mathcal{C}_{=}} ((S_c^{(H)}))_{s_c^H}},$$

onde $(M(1), \dots, M(k))$ é uniformemente amostrado sobre $(\vec{D}^{(n)}(1), \dots, \vec{D}^{(n)}(n))$ sem reposição. Defina $f_c : \mathcal{M}_L^{\theta} \rightarrow \{0, 1, \dots, \theta\}$ por $f_c(M) = M_c$, a projeção na entrada $c = (i, j)$ da matriz M . Para cada $c \in \mathcal{C}$, f_c é contínua (pois é uma projeção) e é limitada. Como D tem distribuição P , temos que

$$\mathbb{E}[D_c] = \mathbb{E}[f_c(D)] = \int f_c dP.$$

Pela hipótese $H2$, e como $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{D_c^{(n)}(i)}$ converge fraco para P , então temos que

$$\int f_c d\mu_n \rightarrow \int f_c dP = \mathbb{E}[D_c]. \quad (8.18)$$

Agora observe que, pelo Teorema C.0.2, temos que

$$\int f d\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int f_c d\delta_{D^{(n)}(i)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_c(D^{(n)}(i)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_c^{(n)}(i),$$

e portanto concluímos que

$$S_c^{(n)} = n \int f_c d\mu_n. \quad (8.19)$$

Por (8.18) e (8.19), segue que $S_c^{(n)} \sim n\mathbb{E}[D_c]$. Elevando ambos os lados a s_c^H e $s_c^H/2$, e observando que $(S_c^{(n)})^{s_c^H} \sim (S_c^{(n)})_{s_c^H}$ (veja Teorema B.0.1) e que $(S_c^{(n)})^{s_c^H/2} \sim ((S_c^{(n)}))_{s_c^H}$ (veja Exercício 8.7.1) temos que

$$(S_c^{(n)})_{s_c^H} \sim n^{s_c^H} (\mathbb{E}[D_c])^{s_c^H} \quad \text{e} \quad ((S_c^{(n)}))_{s_c^H} \sim n^{s_c^H/2} (\mathbb{E}[D_c])^{s_c^H/2}.$$

Observe agora que

$$\log_n \left(\prod_{c \in \mathcal{C}_{<}} n^{s_c^H} \prod_{c \in \mathcal{C}_{=}} n^{s_c^H/2} \right) = \sum_{c \in \mathcal{C}_{<}} s_c^H + \frac{1}{2} \sum_{c \in \mathcal{C}_{=}} s_c^H = \frac{1}{2} \sum_{c \in \mathcal{C}} s_c^H = \text{exc}(H) + k,$$

onde a última igualdade decorre da definição de excesso. Daí, concluímos que

$$\prod_{c \in \mathcal{C}_{<}} n^{s_c^H} \prod_{c \in \mathcal{C}_{=}} n^{s_c^H/2} = n^{\text{exc}(H)+k}.$$

Pelo fato de ser $(n)_k \sim n^k$, segue que

$$\frac{(n)_k}{n^{\text{exc}(H)+k}} \sim n^{-\text{exc}(H)}.$$

Para finalizar a demonstração, provaremos que

$$\mathbb{E} \left[\prod_{c \in \mathcal{C}} \prod_{i=1}^k (M_c(i))_{d_c^H(i)} \right] \rightarrow \prod_{i=1}^k \mathbb{E} \left[\prod_{c \in \mathcal{C}} (D_c)_{d_c^H(i)} \right].$$

Para tal, tome $f_i(M) = \prod_{c \in \mathcal{C}} (M_c)_{d_c^H(i)}$, uma função definida em $\mathcal{M}_L^\theta$. Observe que para cada $i = 1, \dots, k$, a função f_i é contínua e limitada. Daí, quando $n \rightarrow \infty$, temos que

$$\prod_{i=1}^k \int f_i d\mu_n \rightarrow \prod_{i=1}^k \int f_i dP = \prod_{i=1}^k \mathbb{E}[f_i(D)] = \prod_{i=1}^k \mathbb{E} \left[\prod_{c \in \mathcal{C}} (D_c)_{d_c^H(i)} \right]. \quad (8.20)$$

Por (8.20), é suficiente mostrar que $\prod_{i=1}^k \int f_i d\mu_n \sim \mathbb{E} \left[\prod_{c \in \mathcal{C}} \prod_{i=1}^k (M_c(i))_{d_c^H(i)} \right]$. Para tal, observe que

$$\int f_i d\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f_i(D^{(n)}(j)) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \prod_{c \in \mathcal{C}} (D_c^{(n)}(j))_{d_c^H(i)}.$$

Pela igualdade acima temos que

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^k \int f_i d\mu_n &= \frac{1}{n^k} \prod_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \prod_{c \in \mathcal{C}} (D_c^{(n)}(j))_{d_c^H(i)} \\ &= \frac{1}{n^k} \sum_{j_1 < \dots < j_k} \prod_{c \in \mathcal{C}} \prod_{i=1}^k (D_c^{(n)}(j_i))_{d_c^H(i)} \\ &= \frac{1}{n^k} \sum_{\tau} \prod_{c \in \mathcal{C}} \prod_{i=1}^k (D_c^{(n)}(\tau(i)))_{d_c^H(i)}, \end{aligned}$$

onde a soma é tomada sobre todas as funções injetoras $\tau : [k] \rightarrow [n]$. Observando novamente que $n^k \sim (n)_k$, segue que

$$\prod_{i=1}^k \int f_i d\mu_n \sim \mathbb{E} \left[\prod_{c \in \mathcal{C}} \prod_{i=1}^k (M_c(i))_{d_c^H(i)} \right],$$

como desejávamos demonstrar.

Juntando todos os resultados acima, temos a fórmula assintótica (8.17) para $\mathbb{E}[X(H, G_n)]$. $\square$

Abaixo temos dois resultados que seguem do lema acima.

Corolário 3. *Seja $G_n \in \widehat{\mathcal{G}}(\vec{D}^{(n)})$ com distribuição $CM(\vec{D}^{(n)})$, onde $\vec{D}^{(n)}$ é (θ, P) -esparsa. Se $H \in \widehat{\mathcal{G}}_k$ e $\text{exc}(H) \geq 1$, então $\mathbb{E}[X(H, G_n)] = o(1)$.*

Demonstração. Sabemos do Lema 8.2.2 que

$$\mathbb{E}[X(H, G_n)] \sim \frac{\prod_{i=1}^k \mathbb{E}[\prod_{c \in \mathcal{C}} (D_c(i))_{d_c^H(i)}]}{a(H)b(H) \prod_{c \in \mathcal{C}} (\mathbb{E}[D_c])^{s_c^H/2}} n^{-\text{exc}(H)}.$$

Como o termo não constante é $n^{-\text{exc}(H)}$ e $\text{exc}(H) \geq 1$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X(H, G_n)] = 0,$$

de onde $\mathbb{E}[X(H, G_n)] = o(1)$, como queríamos demonstrar. $\square$

Corolário 4. *Seja $G_n \in \widehat{\mathcal{G}}(\vec{D}^{(n)})$ com distribuição $CM(\vec{D}^{(n)})$, onde $\vec{D}^{(n)}$ é (θ, P) -esparsa. Se $H \in \widehat{\mathcal{G}}_k$ e $H' \in \widehat{\mathcal{G}}_{k'}$, então*

$$\mathbb{E}[X(H \oplus H', G_n)] \sim \mathbb{E}[X(H, G_n)] \cdot \mathbb{E}[X(H', G_n)]. \quad (8.21)$$

Demonstração. Primeiro de tudo, note que $a(H \oplus H') = a(H) \cdot a(H')$ e $b(H \oplus H') = b(H) \cdot b(H')$. Além disso, pelo Lema 7.4.1

$$n^{-\text{exc}(H \oplus H')} = n^{-\text{exc}(H) - \text{exc}(H')} = n^{-\text{exc}(H)} \cdot n^{-\text{exc}(H')}.$$

Agora, defina

$$q(H) := \prod_{i \in V(H)} \mathbb{E} \left[\prod_{c \in \mathcal{C}} (D_c)_{d_c^H(i)} \right].$$

Afirmamos que $q(H \oplus H') = q(H) \cdot q(H')$. Com efeito, quando $i \in [k]$, temos que $d_c^{H \oplus H'}(i) = d_c^H(i)$. Analogamente, se $i \in V_K$, com K isomorfo a H' , $V_K = \{k+1, \dots, k+k'\}$, então

$d_c^{H \oplus H'}(i) = d_c^K(i)$. Daí, segue que

$$\begin{aligned}
 q(H \oplus H') &= \prod_{i \in V(H \oplus H')} \mathbb{E} \left[\prod_{c \in \mathcal{C}} (D_c)_{d_c^{H \oplus H'}(i)} \right] \\
 &= \prod_{i \in V(H)} \mathbb{E} \left[\prod_{c \in \mathcal{C}} (D_c)_{d_c^{H \oplus H'}(i)} \right] \cdot \prod_{i \in V(K)} \mathbb{E} \left[\prod_{c \in \mathcal{C}} (D_c)_{d_c^{H \oplus H'}(i)} \right] \\
 &= \prod_{i \in V(H)} \mathbb{E} \left[\prod_{c \in \mathcal{C}} (D_c)_{d_c^H(i)} \right] \cdot \prod_{i \in V(K)} \mathbb{E} \left[\prod_{c \in \mathcal{C}} (D_c)_{d_c^K(i)} \right] \\
 &= q(H) \cdot q(K).
 \end{aligned}$$

A prova é concluída observando-se que $q(H') = q(K)$. Por fim, vamos mostrar que

$$\prod_{c \in \mathcal{C}} (\mathbb{E}[D_c])^{s_c^{H \oplus H'}/2} = \prod_{c \in \mathcal{C}} (\mathbb{E}[D_c])^{s_c^H/2} \cdot \prod_{c \in \mathcal{C}} (\mathbb{E}[D_c])^{s_c^{H'}/2}.$$

Para isso, notemos primeiro que a soma dos graus em cada cor do grafo $H \oplus H'$ é a soma dos graus dos vértices dos grafos H e da cópia isomórfica de H' , segue que $s_c^{H \oplus H'} = s_c^H + s_c^{H'}$ para todo $c \in \mathcal{C}$. Daí segue que

$$\begin{aligned}
 \prod_{c \in \mathcal{C}} (\mathbb{E}[D_c])^{s_c^H/2} \cdot \prod_{c \in \mathcal{C}} (\mathbb{E}[D_c])^{s_c^{H'}/2} &= \prod_{c \in \mathcal{C}} (\mathbb{E}[D_c])^{(s_c^H + s_c^{H'})/2} \\
 &= \prod_{c \in \mathcal{C}} (\mathbb{E}[D_c])^{s_c^{H \oplus H'}/2},
 \end{aligned}$$

donde concluímos a prova da última afirmação.

Juntando os cinco resultados que obtemos acima, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[X(H \oplus H', G_n)]}{\mathbb{E}[X(H, G_n)] \cdot \mathbb{E}[X(H', G_n)]} = 1,$$

de onde obtemos que

$$\mathbb{E}[X(H \oplus H', G_n)] \sim \mathbb{E}[X(H, G_n)] \cdot \mathbb{E}[X(H', G_n)],$$

o que desejávamos demonstrar. □

8.3 Z_n converge para uma Poisson

Nosso objetivo a partir de agora será provar que Z_n converge fracamente para uma Poisson. Enunciamos o resultado formalmente a seguir.

Teorema 8.3.1. *Seja $G_n \in \widehat{\mathcal{G}}(\vec{D}^{(n)})$ com distribuição $CM(\vec{D}^{(n)})$, onde $\vec{D}^{(n)}$ é (θ, P) -esparsa. Então a sequência de variáveis aleatórias Z_n converge em distribuição para uma variável aleatória Poisson.*

Para provar o teorema acima utilizaremos o critério de convergência fraca enunciado a seguir.

Teorema 8.3.2 (Remco). *Sejam $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de variáveis aleatórias com valores inteiros e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se para cada $r \in \mathbb{N}$, temos que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(X_n)_r] = \lambda^r,$$

então (X_n) converge em distribuição para uma variável aleatória Poisson com parâmetro λ .

Demonstração. Ver [Hofstad 2016]. □

O resultado acima nos motiva a analisar as variáveis aleatórias $(Z_n)_r$. Para isto, será útil relacionar Z com a variável Y com o auxílio do conjunto $\mathcal{H}$, utilizando para isso a Proposição 16.

Proposição 22. *Seja $G \in \widehat{\mathcal{G}}(\mathcal{C})$. Então*

$$Z(G, h) = \sum_{F \in \mathcal{H}} Y(F, G).$$

Demonstração. Note que se $H \in \mathcal{L}_{\leq h}$, então cada $F \in \mathcal{H}_H$ é contado $a(H)$ vezes na soma da Proposição 16, ou seja, vale a seguinte relação

$$\sum_{\tau} Y(\tau(H), G) = \sum_{F \in \mathcal{H}_H} a(H) \cdot Y(F, G),$$

que prova que

$$X(H, G) = \sum_{F \in \mathcal{H}_H} Y(F, G).$$

Pelo resultado acima, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{H \in \mathcal{L}_{\leq h}} X(H, G) &= \sum_{H \in \mathcal{L}_{\leq h}} \sum_{F \in \mathcal{H}_H} Y(F, G) \\ &= \sum_{F \in \mathcal{H}} Y(F, G), \end{aligned}$$

onde na última igualdade utilizamos o fato que $\mathcal{H} = \bigcup_{H \in \mathcal{L}_{\leq h}} \mathcal{H}_H$, e a união é disjunta. O resultado segue do fato de ser $Z = \sum_{F \in \mathcal{H}} Y(F, G)$. □

A partir do resultado acima podemos obter uma expressão para Z_n^r , que no futuro nos dará informações sobre $(Z_n)_r$.

Proposição 23. *Seja $G \in \widehat{\mathcal{G}}(\mathcal{C})$. Então*

$$Z_n^r = \sum_{k=1}^r \sum_{(F_i)_{i=1}^r \in \mathcal{D}_{k,r}^{\mathcal{H}}} \prod_{i=1}^r Y(F_i, G_n). \quad (8.22)$$

Demonstração. Comece observando que pela Proposição 22, temos que

$$\begin{aligned} Z_n^r &= \left(\sum_{F \in \mathcal{H}} Y(F, G) \right)^r \\ &= \sum_{(F_1, \dots, F_r) \in \mathcal{H}^r} \prod_{i=1}^r Y(F_i, G). \end{aligned}$$

Note agora que a última soma pode ser reescrita como a soma com índice $1 \leq k \leq r$ dos produtos $\prod_{i=1}^r Y(F_i, G_n)$, onde existem exatamente k F_i que são distintos. Portanto, temos que

$$\sum_{(F_i)_{i=1}^r \in \mathcal{H}^r} \prod_{i=1}^r Y(F_i, G_n) = \sum_{k=1}^r \sum_{(F_i)_{i=1}^r \in \mathcal{D}_{k,r}^{\mathcal{H}}} \prod_{i=1}^r Y(F_i, G_n),$$

o que desejávamos provar. $\square$

Um primeiro passo em direção ao Teorema 8.3.1 é a proposição a seguir, que dá uma expressão para a soma sobre sequências $(F_i) \in \mathcal{P}_k^{\mathcal{H}}$ do produto $\prod_{i=1}^k Y(F_i, G)$.

Proposição 24. *Seja $G \in \widehat{\mathcal{G}}_n$ e $k \in \mathbb{N}$. Então*

$$\sum_{(H_i) \in (\mathcal{L}_{\leq h})^k} X(H_1 \oplus \dots \oplus H_k, G) = \sum_{(F_i) \in \mathcal{P}_k^{\mathcal{H}}} \prod_{i=1}^k Y(F_i, G).$$

Demonstração. Por simplicidade de notação, provaremos para $k = 2$. A demonstração do caso geral é idêntica e fica de exercício para o leitor (veja Exercício 8.7.2).

Seja $(H, H') \in (\mathcal{L}_{\leq h})^2$ qualquer. Então o número de cópias isomórficas de $H \oplus H'$ em G é o número de cópias fiéis dos grafos $F \cup F'$, com $F \cong H$, $F' \cong H'$ tais que $V_F \cap V_{F'} = \emptyset$. Ou seja,

$$\begin{aligned} X(H \oplus H', G) &= \sum_{F \in \mathcal{H}_H} \sum_{F' \in \mathcal{H}_{H'}} Y(F \cup F', G) \cdot \mathbb{1}(V_F \cap V_{F'} = \emptyset) \\ &= \sum_{F \in \mathcal{H}_H} \sum_{\substack{F' \in \mathcal{H}_{H'} \\ V_F \cap V_{F'} = \emptyset}} Y(F \cup F', G) \end{aligned}$$

Mas para cada dupla F, F' tal que $V_F \cap V_{F'} = \emptyset$ temos que $Y(F \cup F', G) = Y(F, G) \cdot Y(F', G)$, donde segue que

$$X(H \oplus H', G) = \sum_{F \in \mathcal{H}_H} \sum_{\substack{F' \in \mathcal{H}_{H'} \\ V_F \cap V_{F'} = \emptyset}} Y(F, G) \cdot Y(F', G). \quad (8.23)$$

Tomando a soma sobre todas as possibilidades de $(H, H') \in (\mathcal{L}_{\leq h})^2$ temos que

$$\begin{aligned} \sum_{(H, H') \in (\mathcal{L}_{\leq h})^2} X(H \oplus H', G) &= \sum_{(H, H') \in (\mathcal{L}_{\leq h})^2} \sum_{F \in \mathcal{H}_H} \sum_{\substack{F' \in \mathcal{H}_{H'} \\ V_F \cap V_{F'} = \emptyset}} Y(F, G) \cdot Y(F', G) \\ &= \sum_{F \in \mathcal{H}} \sum_{\substack{F' \in \mathcal{H} \\ V_F \cap V_{F'} = \emptyset}} Y(F, G) \cdot Y(F', G) \\ &= \sum_{(F, F') \in \mathcal{P}_2^{\mathcal{H}}} Y(F, G) \cdot Y(F', G) \end{aligned}$$

o que conclui a nossa demonstração $\square$

8.4 $\mathbb{E}[(Z_n)_r]$ é limitada

Queremos mostrar que Z_n converge fracamente para uma variável aleatória Poisson. O critério que vimos na seção anterior nos conduz a lidar com $(Z_n)_r$. Um passo que tomaremos antes disso é provar que dadas as mesmas condições em que estivemos trabalhando até aqui, temos que para todo $r \in \mathbb{N}$, vale $\mathbb{E}[(Z_n)_r] < \infty$. Para tal, provaremos que cada parcela da fórmula encontrada para Z_n^r na Proposição 23 tem esperança limitada, junto com o fato que $(Z_n)_r \leq Z_n^r$ para cada $r \in \mathbb{N}$, para concluir que também $\mathbb{E}[(Z_n)_r] < \infty$.

Pela hipótese H1, temos que existe $c_0 = c_0(\theta, h) > 0$ tal que $Y(F, G) \leq c_0$ para todo $F \in \mathcal{H}$. De fato, há apenas uma quantidade finita de arestas em G incidindo sobre cada vértice do ciclo $\overline{F}$, qualquer que seja o tamanho h do ciclo. Assim, dado $(F_1, \dots, F_r) \in \mathcal{H}^r$, temos a cota

$$\prod_{i=1}^r Y(F_i, G_n) \leq c_0^{r-k} \prod_{i=1}^k Y(F_i, G_n).$$

Assim, deve existir $c_1 = c_1(\theta, h, r) > 0$ para o qual

$$\sum_{(F_i) \in \mathcal{H}^r} \prod_{i=1}^r Y(F_i, G_n) \leq c_1 \sum_{k=1}^r \sum_{(F_i) \in \mathcal{D}_{k,k}^{\mathcal{H}}} \prod_{i=1}^k Y(F_i, G_n).$$

Em especial, pela Proposição 23 temos que

$$Z_n^r \leq c_1 \sum_{k=1}^r \sum_{(F_i) \in \mathcal{D}_{k,k}^{\mathcal{H}}} \prod_{i=1}^k Y(F_i, G_n).$$

Por fim, pela Observação 4 isto mostra que

$$Z_n^r \leq c_1 \cdot \left(\sum_{k=1}^r \sum_{(F_i) \in \mathcal{P}_k^{\mathcal{H}}} \prod_{i=1}^k Y(F_i, G_n) + \sum_{k=1}^r \sum_{(F_i) \in \mathcal{N}_k^{\mathcal{H}}} \prod_{i=1}^k Y(F_i, G_n) \right).$$

Para provar que $\mathbb{E}[Z_n^r]$ é limitada, provaremos que ambas as parcelas dentro dos parênteses acima têm esperança limitada. Por linearidade da esperança, basta mostrar que

$$\mathbb{E} \left[\sum_{(F_i) \in \mathcal{P}_k^{\mathcal{H}}} \prod_{i=1}^k Y(F_i, G_n) \right] < \infty \quad \text{e} \quad \mathbb{E} \left[\sum_{(F_i) \in \mathcal{N}_k^{\mathcal{H}}} \prod_{i=1}^k Y(F_i, G_n) \right] < \infty.$$

É o que nos ocuparemos em fazer nos dois próximos lemas.

Lema 8.4.1. *Seja $G_n \in \widehat{\mathcal{G}}(\vec{D}^{(n)})$ com distribuição $CM(\vec{D}^{(n)})$, onde $\vec{D}^{(n)}$ é (θ, P) -esparsa. Para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{(F_i) \in \mathcal{P}_k^{\mathcal{H}}} \prod_{i=1}^k Y(F_i, G) \right] = \lambda(h)^k. \quad (8.24)$$

Demonstração. Observe que pela Proposição 24, temos que

$$\sum_{(F_i) \in \mathcal{P}_k^{\mathcal{H}}} \prod_{i=1}^k Y(F_i, G_n) = \sum_{(H_i) \in (\mathcal{L}_{\leq h})^k} X(H_1 \oplus \cdots \oplus H_k, G_n). \quad (8.25)$$

Utilizando a Proposição 4 na expressão (8.25), temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{(F_i) \in \mathcal{P}_k^{\mathcal{H}}} \prod_{i=1}^k Y(F_i, G_n) \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{(H_i) \in (\mathcal{L}_{\leq h})^k} X(H_1 \oplus \cdots \oplus H_k, G_n) \right] \\ &= \sum_{(H_i) \in (\mathcal{L}_{\leq h})^k} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [X(H_1 \oplus \cdots \oplus H_k, G_n)] \\ &= \sum_{(H_i) \in (\mathcal{L}_{\leq h})^k} \prod_{i=1}^k \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [X(H_i, G_n)], \end{aligned}$$

onde na última igualdade utilizamos que cada parcela do produto converge para passar o limite para dentro do produto. Substituindo (8.5) na expressão anterior, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{(F_i) \in \mathcal{P}_k^{\mathcal{H}}} \prod_{i=1}^k Y(F_i, G_n) \right] = \lambda(h)^k,$$

como desejávamos provar. $\square$

Para o próximo lema, precisaremos definir uma função. Seja G um multigrafo direcionado colorido com conjunto de vértices $V = \{v_1 < v_2 < \cdots < v_l\}$. Defina a função $\pi(G) = \tilde{G}$, que associa o multigrafo G ao multigrafo $\tilde{G}$ que é obtido por rerotular os vértices de G pela função $\tau(v_i) = i$ para todo $1 \leq i \leq l$. Observe que π leva todo multigrafo isomorfo a algum ciclo de tamanho $\leq h$ em um elemento de $\mathcal{L}_{\leq h}$.

Lema 8.4.2. *Seja $G_n \in \widehat{\mathcal{G}}(\vec{D}^{(n)})$ com distribuição $CM(\vec{D}^{(n)})$, onde $\vec{D}^{(n)}$ é (θ, P) -esparsa. Para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que*

$$\mathbb{E} \left[\sum_{(F_i) \in \mathcal{N}_k^{\mathcal{H}}} \prod_{i=1}^k Y(F_i, G_n) \right] = o(1). \quad (8.26)$$

Demonstração. Pelo Lema 7.4.1 e pela Proposição 21, o conjunto $\mathcal{N}_k^{\mathcal{H}}$ se trata justamente do conjunto das sequências $(F_i) \in \mathcal{D}_{k,k}^{\mathcal{H}}$ cuja semiunião $\bigvee_{i=1}^k F_i$ tem excesso ≥ 1 . Defina $\mathcal{K}$

o conjunto formado pelas sequências $(J_i)_{i=1}^k$, nas quais cada coordenada J_i é um ciclo com conjunto de vértices contido em $[kh]$, com no máximo h vértices; e para as quais há pelo menos dois índices i, j tais que $V_{J_i} \cap V_{J_j} \neq \emptyset$. Note que a semiunião das coordenadas de qualquer elemento de $\mathcal{K}$ tem excesso ≥ 1 .

Pela Hipótese H1, as ligações de cada vértice são limitadas e portanto existe uma constante $c_0 = c_0(\theta, h)$ para a qual

$$c_0 \cdot Y\left(\bigvee_{i=1}^k F_i, G_n\right) \geq \prod_{i=1}^k Y(F_i, G_n), \quad (8.27)$$

uma vez que sempre que $Y(F_i, G_n) \neq 0$ para todo i , então $\bigvee_{i=1}^k F_i \subset G_n$. Também, pela forma como definimos $\mathcal{K}$, dado $(J_i) \in \mathcal{K}$ temos que

$$X\left(\bigvee_{i=1}^k J_i, G_n\right) \geq \sum_{F_1 \in \mathcal{H}_{\pi(J_1)}} \cdots \sum_{F_k \in \mathcal{H}_{\pi(J_k)}} Y\left(\bigvee_{i=1}^k F_i, G_n\right) \cdot \mathbb{1}\left(\bigvee_{i=1}^k J_i \cong \bigvee_{i=1}^k F_i\right).$$

Fixe $(H_i) \in (\mathcal{L}_{\leq h})^k$ e tome a soma de X sobre todas as semiuniões de sequências $(J_i) \in \mathcal{K}$ para as quais $\pi(J_i) = H_i$ para todo i . Obtemos assim

$$\sum_{(J_i): (\pi(J_i))=(H_i)} X\left(\bigvee_{i=1}^k J_i, G_n\right) \geq \sum_{F_1 \in \mathcal{H}_{H_1}} \cdots \sum_{F_k \in \mathcal{H}_{H_k}} Y\left(\bigvee_{i=1}^k F_i, G_n\right) \cdot \mathbb{1}(\exists i, j : V_{F_i} \cap V_{F_j} \neq \emptyset).$$

Somando agora sobre todas as sequências $(H_i) \in (\mathcal{L}_{\leq h})^k$, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{(J_i) \in \mathcal{K}} X\left(\bigvee_{i=1}^k J_i, G_n\right) &\geq \sum_{F_1 \in \mathcal{H}} \cdots \sum_{F_k \in \mathcal{H}_H} Y\left(\bigvee_{i=1}^k F_i, G_n\right) \cdot \mathbb{1}(\exists i, j : V_{F_i} \cap V_{F_j} \neq \emptyset) \\ &= \sum_{(F_i) \in \mathcal{N}_k^{\mathcal{H}}} Y\left(\bigvee_{i=1}^k F_i, G_n\right). \end{aligned}$$

A desigualdade em (8.27) junto da igualdade acima mostra que

$$\sum_{(F_i) \in \mathcal{N}_k^{\mathcal{H}}} \prod_{i=1}^k Y(F_i, G_n) \leq c_0 \cdot \sum_{(J_i) \in \mathcal{K}} X\left(\bigvee_{i=1}^k J_i, G_n\right).$$

Como $\mathcal{K}$ tem cardinalidade finita e seus elementos são grafos com excesso ≥ 1 , segue do Corolário 3 que

$$\mathbb{E} \left[\sum_{(F_i) \in \mathcal{N}_k^{\mathcal{H}}} \prod_{i=1}^k Y(F_i, G_n) \right] = o(1),$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Com os dois resultados acima, a demonstração do seguinte lema é quase imediata.

Lema 8.4.3. *Seja $G_n \in \widehat{\mathcal{G}}(\vec{D}^{(n)})$ com distribuição $CM(\vec{D}^{(n)})$, onde $\vec{D}^{(n)}$ é (θ, P) -esparso. Para todo $r \in \mathbb{N}$, temos que $\mathbb{E}[(Z_n)_r]$ é limitada.*

Demonstração. Como Z é uma variável aleatória que toma valores nos inteiros positivos, então para todo $r \in \mathbb{N}$ temos que $(Z_n)_r \leq Z_n^r$, e portanto é suficiente provar que $\mathbb{E}[Z_n^r] < \infty$, para que tenhamos $\mathbb{E}[(Z_n)_r] < \infty$.

Por (8.24) e (8.26) e pela Observação 4, temos o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{(F_i) \in \mathcal{D}_{k,k}^{\mathcal{H}}} \prod_{i=1}^k Y(F_i, G_n) \right] = \lambda(h)^k < \infty, \quad (8.28)$$

o que conclui que $\mathbb{E}[Z_n^r] < \infty$, para todo $r \geq 1$. O resultado segue da observação feita no começo desta demonstração. $\square$

8.5 Prova de que Z_n converge para uma Poisson

Provaremos, finalmente, que Z_n converge em distribuição para uma variável aleatória Poisson com parâmetro $\lambda(h)$. Pelo Teorema 8.3.1 é suficiente que provemos (veja o Teorema 8.3.2) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(Z_n)_r] = \lambda(h)^r. \quad (8.29)$$

Mostraremos isso indiretamente obtendo uma variável aleatória $\tilde{Z}_n$ tal que

- i. $|\mathbb{E}[(Z_n)_r] - \mathbb{E}[(\tilde{Z}_n)_r]| \rightarrow 0$; e
- ii. $\mathbb{E}[(\tilde{Z}_n)_r] \rightarrow \lambda(h)^r$.

Uma vez mostrados os dois itens acima, obtemos que

$$|\mathbb{E}[(Z_n)_r] - \lambda(h)^r| \leq |\mathbb{E}[(Z_n)_r - \mathbb{E}[(\tilde{Z}_n)_r]]| + |\mathbb{E}[(\tilde{Z}_n)_r] - \lambda(h)^r| \xrightarrow{\text{i,ii}} 0,$$

o que mostra que $\mathbb{E}[(Z_n)_r] \rightarrow \lambda(h)^r$, que por fim demonstra o Teorema 8.3.1.

Definição 8.5.1. Defina a variável aleatória que indica se um ciclo $F \in \mathcal{H}$ ocorre uma única vez em G_n , dada por

$$\tilde{Y}(F, G_n) = \mathbb{1}(Y(F, G_n) = 1).$$

Defina também a variável aleatória

$$\tilde{Z}_n(G_n, h) = \sum_{F \in \mathcal{H}} \tilde{Y}(F, G_n).$$

Escreveremos apenas $\tilde{Z}_n$ para denotar a variável aleatória $\tilde{Z}_n(G_n, h)$.

Observe que $\tilde{Z}_n$ conta o número de ciclos que ocorrem uma única vez em G_n , já que

$$\begin{aligned} \sum_{F \in \mathcal{H}} \tilde{Y}(F, G_n) &= \sum_{F \in \mathcal{H}} \mathbb{1}(Y(F, G_n) = 1) \\ &= \#\{F \in \mathcal{H} : Y(F, G_n) = 1\}, \end{aligned}$$

a quantidade de grafos $F \in \mathcal{H}$ que só possuem uma cópia fiel em G_n .

Observação 5. Como $\mathbb{1}(Y(F, G_n) = 1) \leq Y(F, G_n)$ para todo multigrafo F , segue que

$$\tilde{Z}_n = \sum_{F \in \mathcal{H}} \tilde{Y}(F, G_n) = \sum_{F \in \mathcal{H}} \mathbb{1}(Y(F, G_n) = 1) \leq \sum_{F \in \mathcal{H}} Y(F, G_n) = Z. \quad (8.30)$$

Além do mais, em (8.30) a igualdade vale somente quando $Y(F, G_n) = \tilde{Y}(F, G_n)$ para todo $F \in \mathcal{H}$.

Proposição 25. Fixe $\theta \in \mathbb{N}$, $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}_L^{(\theta)})$ e uma sequência $\vec{D}^{(n)}$ que é (θ, P) -esparsa. Tome $G_n \in \widehat{\mathcal{G}}(\vec{D}^{(n)})$ com distribuição $CM(\vec{D}^{(n)})$. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \mathbb{E}[(Z_n)_r] - \mathbb{E}[(\tilde{Z}_n)_r] \right| = 0.$$

Demonstração. Defina $\mathcal{E}$ como sendo o evento “para todo $F \in \mathcal{H}$, $Y(F, G_n) = \mathbb{1}(Y(F, G_n) = 1)$ ”. Claramente $\mathcal{E}$ ocorre se, e apenas se, $Y(F, G_n) \leq 1$ para todo $F \in \mathcal{H}$. Assim, $\mathcal{E}^C$ ocorre se, e somente se, existe $F \in \mathcal{H}$ com $Y(F, G_n) \geq 2$. Afirmamos que existe uma coleção finita $\mathcal{K}$ de multigrafos K , cada um dos quais é isomorfo a algum subgrafo de G_n para todo n , e tal que $\text{exc}(K_n) \geq 1$, satisfazendo

$$\mathbb{1}(\mathcal{E}^C) \leq \sum_{K \in \mathcal{K}} X(K, G_n).$$

De fato, quando $\mathbb{1}(\mathcal{E}^C) = 0$, a desigualdade segue da definição da variável aleatória X para qualquer coleção $\mathcal{K}$. Já quando $\mathbb{1}(\mathcal{E}^C) = 1$, temos que $\mathcal{E}^C$ ocorre e portanto existe $F \in \mathcal{H}$ tal que $Y(F, G_n) \geq 2$. Pelo Teorema 7.4.1, existe um multigrafo K_n com $\text{exc}(K) \geq 1$, cujo conjunto de vértices podemos supor ser da forma $[t]$, com $t \leq h$, tal que $X(K, G_n) \geq 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, conseguimos um multigrafo K_n que é um ciclo adicionado de uma única aresta extra. Como o conjunto de vértices escolhido para cada K_n é finito, as conexões são limitadas e o conjunto de cores é fixado, há apenas uma quantidade finita de K_n distintos. Portanto, a coleção $\mathcal{K} = \{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é finita, de cardinalidade independente de n . Concluimos, portanto, que $\mathbb{1}(\mathcal{E}^C) \leq \sum_{K \in \mathcal{K}} X(K, G_n)$.

Note agora que $\mathcal{E}$ ocorre se, e somente se, $Y(F, G_n) = \tilde{Y}(F, G_n)$, e portanto $Z = \tilde{Z}_n$. Sabemos também que existe uma coleção finita $\mathcal{K}$ de grafos com $\text{exc}(K) \geq 1$, tal que

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}^C) = \mathbb{E}[\mathbb{1}(\mathcal{E}^C)] \leq \mathbb{E} \left[\sum_{K \in \mathcal{K}} X(K, G_n) \right] = o(1),$$

onde a última igualdade decorre do Corolário 3.

Do fato que $\tilde{Z}_n \leq Z_n$, concluimos que $(\tilde{Z}_n)_r \leq (Z_n)_r$ para todo $r \in \mathbb{N}$. Afirmamos que para todo $r \in \mathbb{N}$ vale

$$(Z_n)_r - (\tilde{Z}_n)_r \leq (Z_n)_r \mathbb{1}(\mathcal{E}^C). \quad (8.31)$$

De fato, se $\mathbb{1}(\mathcal{E}^C) = 1$, então $\tilde{Z}_n \neq Z_n$, de onde $\tilde{Z}_n < Z_n$, e portanto $(\tilde{Z}_n)_r < (Z_n)_r$, donde

$$(Z_n)_r - (\tilde{Z}_n)_r < (Z_n)_r;$$

e se $\mathbf{1}(\mathcal{E}^C) = 0$, então $\mathcal{E}$ acontece. Daí $\tilde{Z}_n = Z$, e concluímos que $(\tilde{Z}_n)_r = (Z_n)_r$, e portanto $(Z_n)_r - (\tilde{Z}_n)_r = 0$. Em ambos os casos, verifica-se (8.31). Dessa desigualdade concluímos que

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}[(Z_n)_r] - \mathbb{E}[(\tilde{Z}_n)_r] \right| &= \left| \mathbb{E}[(Z_n)_r - (\tilde{Z}_n)_r] \right| \\ &\leq \mathbb{E}[|(Z_n)_r - (\tilde{Z}_n)_r|] \\ &\leq \mathbb{E}[(Z_n)_r \mathbf{1}(\mathcal{E}^C)]. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(Z_n)_r \mathbf{1}(\mathcal{E}^C)] &\leq \sqrt{\mathbb{E}[(Z_n)_r] \mathbb{E}[\mathbf{1}(\mathcal{E}^C)]} \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}[Z_n^r] \mathbb{P}(\mathcal{E}^C)} \\ &= o(1), \end{aligned}$$

uma vez que $\mathbb{E}[Z^r]$ é limitada e $\mathbb{P}(\mathcal{E}^C) = o(1)$. Logo

$$\left| \mathbb{E}[(Z_n)_r] - \mathbb{E}[(\tilde{Z}_n)_r] \right| = o(1). \quad (8.32)$$

Daí, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \mathbb{E}[(Z_n)_r] - \mathbb{E}[(\tilde{Z}_n)_r] \right| = 0,$$

como desejávamos provar. $\square$

Proposição 26. Fixe $\theta \in \mathbb{N}$, $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}_L^{(\theta)})$ e uma sequência $\vec{D}^{(n)}$ que é (θ, P) -esparsa. Tome $G_n \in \widehat{\mathcal{G}}(\vec{D}^{(n)})$ com distribuição $CM(\vec{D}^{(n)})$. Então

$$\mathbb{E}[(\tilde{Z}_n)_r] \rightarrow \lambda(h)^r.$$

Demonstração. Reescreveremos $(\tilde{Z}_n)_r$ em termos de $\tilde{Y}(F_i, G_n)$ para sequências de grafos $(F_i) \in \mathcal{D}_{r,r}^{\mathcal{H}}$. Especificamente provaremos que

$$(\tilde{Z}_n)_r = \sum_{(F_i) \in \mathcal{D}_{r,r}^{\mathcal{H}}} \prod_{i=1}^r \tilde{Y}(F_i, G_n). \quad (8.33)$$

Para entender do que se trata o lado direito da igualdade, lembre-se que $\tilde{Y}$ é uma indicadora, e portanto $\prod_{i=1}^r \tilde{Y}(F_i, G_n) = 1$ se, e somente se, $Y(F_i, G_n) = 1$ para todo $i \in [r]$. Em qualquer outro caso, o produto é 0. Assim, estamos contando o número de r -uplas de elementos distintos F_i dentro de um conjunto que tem cardinalidade $\tilde{Z}_n$, uma vez que $\#\{F \in \mathcal{H} : Y(F, G) = 1\} = \tilde{Z}_n$. Mas contar isso é contar a quantidade de arranjos de $\tilde{Z}_n$ elementos tomados r a r , ou seja, $(\tilde{Z}_n)_r$.

Agora note que por H1, conseguimos novamente uma coleção finita $\mathcal{K}$ (de cardinalidade independente de n) de multigrafos com excesso ≥ 1 e uma constante $c_1 = c_1(\theta, h, r)$ tal que

$$\sum_{(F_i) \in \mathcal{D}_{r,r}^{\mathcal{H}}} \left| \prod_{i=1}^k Y(F_i, G_n) - \prod_{i=1}^k \tilde{Y}(F_i, G_n) \right| \leq c_1 \sum_{K \in \mathcal{K}} X(K, G).$$

Portanto, temos que

$$\mathbb{E} \left[\sum_{(F_i) \in \mathcal{D}_{r,r}^{\mathcal{H}}} \prod_{i=1}^k \tilde{Y}(F_i, G_n) \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{(F_i) \in \mathcal{D}_{r,r}^{\mathcal{H}}} \prod_{i=1}^k Y(F_i, G_n) \right] + o(1).$$

Por (8.33) e (8.28), concluímos que

$$\mathbb{E}[(\tilde{Z}_n)_r] = \lambda(h)^r + o(1),$$

o que prova que $\mathbb{E}[(\tilde{Z}_n)_r] \rightarrow \lambda(h)^r$, e que (enfim) conclui a prova do nosso Teorema. $\square$

8.6 Um corolário do Teorema 8.1.1

Segue do Teorema 8.1.1 a seguinte fórmula assintótica para a cardinalidade do conjunto dos grafos que não contém ciclos de tamanho $l \leq h$ no regime esparso.

Corolário 5. *Nas condições do Teorema 8.1.1, temos para todo $h \geq 2$ que*

$$|\mathcal{G}(\vec{D}^{(n)}, h)| \sim \alpha_h \frac{\prod_{c \in \mathcal{C}_{<}} S_c^{(n)}! \prod_{c \in \mathcal{C}_{=}} (S_c^{(n)} - 1)!!}{\prod_{c \in \mathcal{C}} \prod_{i=1}^n D_c^{(n)}(i)!}.$$

Demonstração. Comece observando que, para n fixado, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G_n \in \mathcal{G}(\vec{D}^{(n)}, h)) &= \frac{|\{\sigma \in \Sigma : \Gamma(\sigma) \in \mathcal{G}(\vec{D}^{(n)}, h)\}|}{|\Sigma|} \\ &= \frac{1}{|\Sigma|} \sum_{\sigma \in \Sigma} \mathbb{1}(\Gamma(\sigma) \in \mathcal{G}(\vec{D}^{(n)}, h)). \end{aligned}$$

Utilizando a partição do conjunto Σ abaixo

$$\Sigma = \bigcup_{H \in \widehat{\mathcal{G}}(\vec{D}^{(n)})} \{\sigma \in \Sigma : \Gamma(\sigma) = H\},$$

obtemos o seguinte resultado sobre uma das parcelas depois da segunda igualdade desta demonstração

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \Sigma} \mathbb{1}(\Gamma(\sigma) \in \mathcal{G}(\vec{D}^{(n)}, h)) &= \sum_{H \in \mathcal{G}(\vec{D}^{(n)}, h)} \sum_{\sigma: \Gamma(\sigma)=H} 1 \\ &= \sum_{H \in \mathcal{G}(\vec{D}^{(n)}, h)} |\Gamma^{-1}(H)|. \end{aligned}$$

Por sua vez, para cada $H \in \mathcal{G}(\vec{D}^{(n)}, h)$, sabemos que H não tem *loops* e nem arestas múltiplas, de onde $b(H) = 1$, e portanto temos pela Proposição 14 que $|\Gamma^{-1}(H)| = \prod_{c \in \mathcal{C}} \prod_{i=1}^n D_c^{(n)}(i)!$, donde segue que

$$\sum_{\sigma \in \Sigma} \mathbb{1}(\Gamma(\sigma) \in \mathcal{G}(\vec{D}^{(n)}, h)) = |\mathcal{G}(\vec{D}^{(n)}, h)| \prod_{c \in \mathcal{C}} \prod_{i=1}^n D_c^{(n)}(i)!.$$

Juntando todos os resultados acima segue que

$$|\mathcal{G}(\vec{D}^{(n)}, h)| = \frac{|\Sigma| \cdot \mathbb{P}(G_n \in \mathcal{G}(\vec{D}^{(n)}, h))}{\prod_{c \in \mathcal{C}} \prod_{i=1}^n D_c^{(n)}(i)!}.$$

A demonstração é concluída ao observar-se que $|\Sigma| = \prod_{c \in \mathcal{C}_<} S_c^{(n)}! \prod_{c \in \mathcal{C}_=} (S_c^{(n)} - 1)!!$ e que $\mathbb{P}(G_n \in \mathcal{G}(\vec{D}^{(n)}, h)) \sim \alpha_h$. $\square$

8.7 Exercícios

Exercício 8.7.1. Mostre que dado $k \in \mathbb{N}$, temos que $(n)^k \sim ((n))_{2k}$, quando $n \rightarrow \infty$.

Exercício 8.7.2. Demonstre o caso geral da Proposição 24.

Referências

- ASH, R. B.; DOLEANS-DADE, C. A. *Probability and Measure Theory*. Second. [S.l.]: Harcourt/Academic Press, 1999.
- BORDENAVE, C.; CAPUTO, P. Large deviations of empirical neighborhood distribution in sparse random graphs. *Probab. Theory Relat. Fields*, v. 163, 2015.
- DIESTEL, R.; SCHRIJVER, A.; SEYMOUR, P. Graph theory. *Oberwolfach Reports*, v. 4, n. 2, p. 887–944, 2008.
- ERDÖS, P.; GALLAI, T. Graphs with given degrees of vertices. *Mat. Lapok*, v. 11, 1960.
- HOFSTAD, R. v. d. *Random Graphs and Complex Networks*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2016. (Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics).
- SHUKLA, A. A short proof of cayley’s tree formula. *The American Mathematical Monthly*, [Taylor Francis, Ltd., Mathematical Association of America], v. 125, n. 1, p. 65–68, 2018. ISSN 00029890, 19300972. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/48661224>>.

Apêndices

APÊNDICE A – Teorema de Inversão de Lagrange

Teorema A.0.1 (Teorema de Inversão de Lagrange). *Seja $\phi(u) = \sum_{k \geq 0} \phi_k u^k$ uma série de potências formal em $\mathbb{C}[[z]]$, com $\phi_0 \neq 0$. Então, a equação $y = z\phi(y)$ admite uma única solução em $\mathbb{C}[[z]]$ cujos coeficientes são dados por*

$$y(z) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n z^n, \quad \text{onde} \quad y_n = \frac{1}{n} [u^{n-1}] \phi(u)^n.$$

Aqui, $[u^{n-1}] \phi(u)^n$ denota o coeficiente de u^{n-1} na expansão em série de potências formal de $\phi(u)^n$.

APÊNDICE B – Assintóticos

Definição B.0.1. Sejam $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções que se anulam apenas em um conjunto finito de valores n , dizemos que f e g têm mesma ordem de grandeza, e escrevemos $f \sim g$, quando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Proposição 27. A relação $\sim$ definida acima é de equivalência.

Demonstração. Dadas $f, g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ funções que se anulam em apenas uma quantidade finita de valores n , temos que

i. $f(n) \sim f(n)$, pois

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{f(n)} = 1.$$

ii. Se $f(n) \sim g(n)$, então

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(n)}{g(n)} \cdot \frac{f(n)g(n)}{f(n)g(n)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{g(n)}{f(n)} \cdot \left(\frac{f(n)}{g(n)} \right)^2 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)}, \end{aligned}$$

donde $g(n) \sim f(n)$.

iii. Se $f(n) \sim g(n)$ e $g(n) \sim h(n)$, então

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{h(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \frac{g(n)}{h(n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{h(n)} \\ &= 1, \end{aligned}$$

e portanto $f(n) \sim h(n)$.

Pelos três itens acima, fica provado que $\sim$ é de equivalência. □

Teorema B.0.1. Seja $k \in \mathbb{N}$ um natural fixado. Então $(n)_k \sim n^k$.

Demonstração. Comece observando que, fixado $j \in \mathbb{N}$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-j}{n} = 1.$$

Agora, note que

$$\frac{(n)_k}{n^k} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n-j}{n} \rightarrow 1,$$

quando $n \rightarrow \infty$, o que conclui a demonstração. □

APÊNDICE C – Convergência fraca de medidas

Sejam $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots$ medidas finitas nos borelianos de um espaço métrico Ω . Dizemos que a sequência de medidas μ_n converge fracamente para a medida μ , e denotamos $\mu_n \Rightarrow \mu$ ou $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$, quando satisfizer qualquer uma das condições do teorema abaixo. Para ver a prova do Teorema C.0.1, veja [Ash e Doleans-Dade 1999].

Teorema C.0.1 (Teorema de Portmanteau). *Sejam $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots$ medidas finitas nos conjuntos borelianos de um espaço métrico Ω . As seguintes condições são equivalentes.*

- a. $\int_{\Omega} f d\mu_n \rightarrow \int_{\Omega} f d\mu$ para toda função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e limitada.
- b. $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f d\mu_n \geq \int_{\Omega} f d\mu$ para toda função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ semicontínua e limitada por baixo.
- b'. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f d\mu_n \leq \int_{\Omega} f d\mu$ para toda função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ semicontínua e limitada por cima.
- c. $\int_{\Omega} f d\mu_n \rightarrow \int_{\Omega} f d\mu$ para toda função $f : (\Omega, \mathcal{B}(\Omega)) \rightarrow (\mathbb{R}, (\mathcal{B}(\mathbb{R})))$ tal que f é contínua μ -q.c..
- d. $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) \geq \mu(A)$ para todo conjunto aberto $A \subset \Omega$, e $\mu_n(\Omega) \rightarrow \mu(\Omega)$.
- d'. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) \leq \mu(A)$ para todo conjunto aberto $A \subset \Omega$, e $\mu_n(\Omega) \rightarrow \mu(\Omega)$.
- e. $\mu_n(A) \rightarrow \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ tal que $\mu(\partial A) = 0$, onde ∂A denota a fronteira de A .

Teorema C.0.2. *Seja α um número real positivo, f uma função limitada e contínua e μ, λ duas medidas finitas nos borelianos de um espaço métrico Ω . Então*

$$\int_{\Omega} f d(\alpha\mu + \lambda) = \alpha \int_{\Omega} f d\mu + \int_{\Omega} f d\lambda.$$

Demonstração. Provaremos primeiro para funções simples. Seja f uma função simples,

$f = \sum_{i=1}^r x_i \chi(A_i)$. Então

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} f d(\alpha\mu + \lambda) &= \sum_{i=1}^r x_i (\alpha\mu + \lambda)(A_i) \\
 &= \sum_{i=1}^r (\alpha\mu(A_i) + \lambda(A_i)) \\
 &= \alpha \sum_{i=1}^r x_i \mu(A_i) + \sum_{i=1}^r x_i \lambda(A_i) \\
 &= \alpha \int_{\Omega} f d\mu + \int_{\Omega} f d\lambda
 \end{aligned}$$

Tome uma sequência f_n de funções simples convergindo crescendo para f . Por um lado, pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\int_{\Omega} f_n d(\alpha\mu + \lambda) \rightarrow \int_{\Omega} f d(\alpha\mu + \lambda),$$

e por outro, temos que

$$\alpha \int_{\Omega} f_n d\mu + \int_{\Omega} f_n d\lambda \rightarrow \alpha \int_{\Omega} f d\mu + \int_{\Omega} f d\lambda.$$

Por unicidade do limite, segue o resultado. □