



Universidade Federal de Alagoas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Hipersuperfícies com Curvatura Média Constante e Hiperplanos

Natália Rocha Pinheiro

Rio São Francisco



Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Hipersuperfícies com Curvatura Média Constante e Hiperplanos

Natália Rocha Pinheiro

Maceió, Brasil
28 de Janeiro de 2010

NATÁLIA ROCHA PINHEIRO

Hipersuperfícies com Curvatura Média
Constante e Hiperplanos

Dissertação de Mestrado na área de
concentração de Geometria Diferencial sub-
metida em 28 de Janeiro de 2010 à Banca
Examinadora, designada pelo Colegiado do
Programa de Pós-Graduação em Matemática
da Universidade Federal de Alagoas, como
parte dos requisitos necessários à obtenção
do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva.

Maceió
2010

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Lucia Lima do Nascimento

P654i Pinheiro, Natália Rocha.
Hipersuperfícies com curvatura média constante e hiperplanos. /Natália Rocha Pinheiro, 2010.
61 f. : il. grafs. e tabs.

Orientador: Hilário Alencar da Silva.
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática, 2010.

Bibliografia: f. 56-57.
Índice: f. 61.

1. Geometria diferencial. 2. Laplaciano. 3. Função suporte. 4. Curvatura média. 5. Hiperplanos. I. Título.

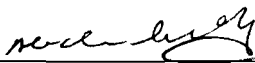
CDU: 514.7

Hipersuperfícies com Curvatura Média Constante e Hiperplanos

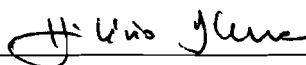
Natália Rocha Pinheiro

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 28 de Janeiro de 2010 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

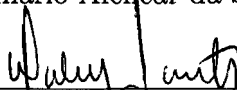
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros



Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva (Orientador)



Profa. Dra. Walcy Santos

Aos meus pais Robério e Tuca
e a minha irmã Talita.

Agradecimentos

Ao professor Hilário Alencar pela orientação no mestrado, por estar sempre disposto a me ajudar, pela amizade, confiança, por acreditar e contribuir no meu crescimento profissional e pessoal e por ser um exemplo de profissional honesto e competente.

Ao professor Manfredo do Carmo pela grande contribuição à Geometria Diferencial.

Aos meus pais Robério Pinheiro e Tuca Rocha por me apoiarem em todas as minhas decisões, pela força em todos os momentos da minha vida, pelo carinho e por serem exemplo do que é família. A minha irmã e grande amiga Talita Pinheiro pelo companheirismo e pelas boas conversas.

Aos professores Adán Corcho, Amauri Barros e Francisco Barros que sempre tinham uma palavra de estímulo e por contribuírem na minha formação acadêmica.

A estudante de mestrado da UFAL Adina Rocha dos Santos pela ajuda dada neste trabalho.

Aos professores Jorge Costa da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB) e Valdenberg Araujo da Universidade Federal de Sergipe (UFS) pelo incentivo ao meu ingresso no mestrado em matemática da UFAL.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico (CNPq) pela concessão da bolsa.

Resumo

Nesta dissertação, apresentamos resultados sobre hipersuperfícies cujas geodésicas tangentes omitem um conjunto não-vazio. Tais resultados foram obtidos por Hilário Alencar e Kátia Frensel e publicados no livro *Differential Geometry - A Symposium in Honour of Manfredo do Carmo* em 1991.

Consideramos M uma variedade diferenciável de dimensão n e $\mathcal{Q}$ o espaço $(n+1)$ -dimensional simplesmente conexo, completo com curvatura seccional constante igual a c . Além disso, seja x uma imersão isométrica de M em $\mathcal{Q}$.

Inicialmente, estendemos para as variedades $\mathcal{Q}$, c arbitrário, as noções de vetor posição e função suporte conhecidas no espaço Euclidiano de dimensão $n+1$ e fazemos uma interpretação geométrica desta função suporte nos casos em que $c = 0$, $c > 0$ e $c < 0$, ou seja, no espaço Euclidiano, Esférico e Hiperbólico.

Denotemos por W o conjunto dos pontos em $\mathcal{Q}$ que não passam nenhuma hipersuperfície totalmente geodésica tangente a imagem de M por x . Usando a função suporte de x , caracterizamos as imersões para as quais o conjunto W é não-vazio. Analisamos separadamente as hipersuperfícies completas não-compactas com curvatura média constante bem como as hipersuperfícies compactas com curvatura média constante.

Palavras Chave: Laplaciano; Função Suporte; Curvatura Média; Estabilidade; Imersão Isométrica; Hiperplanos; Esfera Geodésica.

Abstract

In this work, we present results concerning hypersurfaces whose tangent geodesic does not intercept a nonempty special set. These results were obtained by Hilário Alencar and Kátia Frensel in a work which was published in the book *Differential Geometry - A Symposium in Honour of Manfredo do Carmo* in 1991.

Let us consider an isometric immersion x from M to $\mathcal{Q}$ where M denotes a differentiable manifold of dimension n as well as $\mathcal{Q}$ stands for the $(n + 1)$ -dimensional, space form of constant sectional curvature c .

Initially, we extend for $\mathcal{Q}$, c arbitrary, the notions of position vector and support function known in $(n + 1)$ -dimensional Euclidean space and we present a geometric interpretation of such a support function in the Euclidean, Spherical and Hyperbolic space.

We denote by W the set of points of $\mathcal{Q}$ for which does not cross any totally geodesic hypersurface tangent to the image of M by x . By using the support function of x , we characterize the immersions for which the set W is nonempty. We analyze separately the complete noncompact case as well as the compact case among hypersurfaces with constant mean curvature.

Keywords: Laplacian; Support Function; Mean Curvature; Stability; Isometric Immersion; Hyperplanes; Geodesic Sphere.

Sumário

1	Preliminares	8
1.1	Noções de Geometria Riemanniana	8
1.2	Estabilidade	20
2	A Função Suporte em Espaços de Curvatura Constante	23
2.1	A Função Suporte em $\mathbb{R}^{n+1}$	24
2.2	A Função Suporte em $\mathbb{S}^{n+1}$	25
2.3	A Função Suporte em $\mathbb{H}^{n+1}$	27
2.4	O Laplaciano da Função Suporte	32
2.5	A Fórmula de Minkowski da Função Suporte	42
3	Hipersuperfícies cujas Geodésicas Tangentes omitem um Con- junto Não-Vazio	45
3.1	Hipersuperfícies Completas	46
3.2	Hipersuperfícies Compactas	52
	Referências Bibliográficas	55

Introdução

Nesta dissertação, apresentaremos resultados sobre hipersuperfícies cujas geodésicas tangentes omitem um conjunto não-vazio, os quais foram obtidos por Hilário Alencar e Kátia Frensel e publicados no livro *Differential Geometry - A Symposium in Honour of Manfredo do Carmo* em 1991.

Consideremos $\mathcal{Q}_c^{n+1}$ uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa com curvatura seccional constante igual a c , M^n uma variedade diferenciável e $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica. Para todo ponto $p \in M^n$, seja $(\mathcal{Q}_c^n)_p$ a hipersuperfície totalmente geodésica de $\mathcal{Q}_c^{n+1}$ tangente a $x(M^n)$ em $x(p)$.

Denotemos por

$$W = \mathcal{Q}_c^{n+1} - \bigcup_{p \in M} (\mathcal{Q}_c^n)_p$$

o conjunto dos pontos omitidos pelas hipersuperfícies totalmente geodésicas tangentes a $x(M^n)$.

Caracterizaremos as hipersuperfícies com curvatura média constante completas não-compactas e hipersuperfícies com curvatura média constante compactas em $\mathcal{Q}_c^{n+1}$ com condições sobre W . Em todo o trabalho, as variedades diferenciáveis M^n são conexas e quando nos referirmos às variedades compactas, estamos supondo que são compactas sem bordo.

Inicialmente, apresentaremos resultados para hipersuperfícies mínimas completas não-compactas de $\mathcal{Q}_c^{n+1}$.

O primeiro resultado nesta direção foi provado por Hasanis e Koutroufiotis, a saber:

Teorema 0.1. (*Hasanis e Koutroufiotis, ver [10]*) *Se uma imersão isométrica $x : M^2 \rightarrow \mathcal{Q}_c^3$, $c \geq 0$, é mínima com W não-vazio, então x é totalmente geodésica.*

A demonstração deste teorema usa fortemente a hipótese que M tem dimensão 2.

O teorema acima não é válido para dimensões maiores. Hilário Alencar, em sua tese de doutorado, ver [1], deu exemplos de hipersuperfícies mínimas não totalmente geodésicas em $\mathbb{R}^{2n}$, $n \geq 4$, cujo W contém um ponto.

Hilário Alencar e Kátia Frensel, ver [3], p. 6, estenderam o Teorema 0.1 assumindo a hipótese adicional que o conjunto W é aberto.

Teorema 0.2. *(Alencar e Frensel, ver [3], p. 6) Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa e $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica mínima. Se o conjunto W é aberto e não-vazio, então x é totalmente geodésica.*

Quando o conjunto W é somente não-vazio, Alencar e Frensel obtiveram o seguinte resultado para os casos em que $c \leq 0$.

Proposição 0.1. *(Alencar e Frensel, ver [3], p. 8) Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa e $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$, $c \leq 0$, uma imersão isométrica mínima. Se W é não-vazio, então x é estável.*

Este resultado não é válido para o caso em que $c > 0$. As hipersuperfícies totalmente geodésicas de $\mathbb{S}^{n+1}$ são exemplos de hipersuperfícies mínimas não-estáveis com W não-vazio.

A recíproca da Proposição 0.1 é falsa. Em [9], p. 57, J. Gomes apresentou exemplos de hipersuperfícies mínimas estáveis em $\mathcal{Q}_c^{n+1}$, $c < 0$, tais que o conjunto W é vazio.

No caso em que as hipersuperfícies são compactas em $\mathcal{Q}_c^{n+1}$, também apresentaremos alguns resultados. Neste caso, caracterizaremos as hipersuperfícies com curvatura média constante.

Um dos primeiros resultados nesta direção foi obtido por Pogorelov no caso em que $H = 0$.

Teorema 0.3. *(Pogorelov, ver [13]) Sejam M^n uma variedade Riemanniana compacta, orientável e $x : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão isométrica mínima. Se W é não-vazio, então x é totalmente geodésica.*

Se restringirmos $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$ às imersões isométricas com curvatura média constante não-nula, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 0.4. *(Alencar e Frensel, ver [3], p. 11) Sejam M^n uma variedade Riemanniana compacta, orientável e $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica com curvatura média constante diferente de zero. Então W é não-vazio se, e somente se, x é umbílica, isto é, $x(M^n)$ é uma esfera geodésica em $\mathcal{Q}_c^{n+1}$.*

Em [5], Barbosa, do Carmo e Eschenburg provaram o seguinte teorema:

Teorema 0.5. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana compacta, orientável e $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica com curvatura média constante não-nula. Então x é estável se, e somente se, x é umbílica.*

Como consequência deste resultado, Alencar e Frensel obtiveram o seguinte corolário do Teorema 0.4.

Corolário 0.1. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana compacta, orientável e $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica com curvatura média constante não-nula. Então W é não-vazio se, e somente se, x é estável.*

Este trabalho está dividido em 3 capítulos. No capítulo 1, apresentaremos definições e resultados da Geometria Riemanniana e de Estabilidade que serão necessários para a compreensão dos próximos capítulos. No capítulo 2, estenderemos para as variedade $\mathcal{Q}_c^{n+1}$, c arbitrário, as noções de vetor posição e função suporte conhecidas em $\mathbb{R}^{n+1}$, $c = 0$. Também neste capítulo, daremos separadamente uma interpretação geométrica da função suporte nos casos em que $c = 0$, $c > 0$ e $c < 0$. No capítulo 3, mostraremos que a função suporte de uma imersão isométrica $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$ satisfaz uma equação diferencial e demonstraremos o Teorema 0.2, a Proposição 0.1, o Teorema 0.3 e o Teorema 0.4 enunciados anteriormente.

Recentemente, Hilário Alencar e Márcio Batista, ver [2], generalizaram o Teorema 0.2 e a Proposição 0.1 para hipersuperfícies r -mínimas em $\mathcal{Q}_c^{n+1}$.

Capítulo 1

Preliminares

Iniciaremos a seção 1.1 apresentando os conceitos básicos da Geometria Riemanniana tais como variedades diferenciáveis (imersões e campos de vetores), métricas Riemannianas, conexões Riemannianas, geodésicas e curvatura. Em seguida, introduziremos a segunda forma fundamental associada a uma imersão isométrica. As demonstrações dos resultados podem ser encontradas em [6].

Na seção 1.2 definiremos estabilidade para imersões com curvatura média constante e imersões mínimas.

1.1 Noções de Geometria Riemanniana

Denotaremos por M^n uma variedade diferenciável de dimensão n e, para cada $p \in M$, indicaremos por $T_p M$ o espaço tangente a M em p e TM seu fibrado tangente, isto é, a união de todos os espaços tangentes a M . Variedade diferenciável significará de classe C^∞ .

Indicaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M , por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M e por $\mathcal{F}(M)$ o conjunto das funções em M .

Definição 1.1.1. *Sejam M^n e N^k variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ é uma imersão, se $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é injetiva para todo $p \in M$.*

Observação 1.1.1. *Seja $x : M^n \rightarrow N^{n+1}$ uma imersão. O conjunto $x(M) \subset N$ é denominado uma *hipersuperfície* de N^{n+1} .*

Um *campo de vetores* $v : M \rightarrow TM$ em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $v(p) \in T_p M$.

Considerando uma parametrização $y : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e um campo de vetores $\frac{\partial}{\partial y_i} : y(U) \rightarrow TM$, podemos escrever, para cada $p \in y(U)$,

$$v(p) = \sum_{i=1}^n a_i(y^{-1}(p)) \frac{\partial}{\partial y_i}(p),$$

onde cada $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_i}(p) \right\}, i = 1, \dots, n$, é a base de vetores tangentes a M em p associada a y .

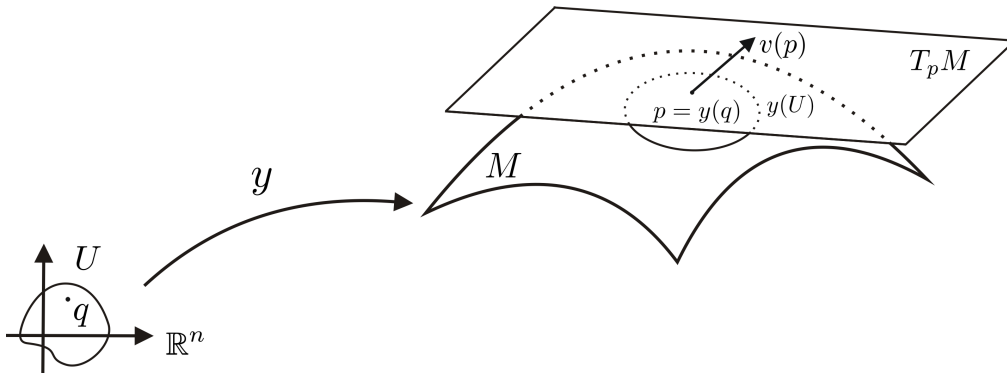


Figura 1.1: Campo de vetores

Escrevendo f ao invés de $f \circ y$, podemos também pensar em um campo de vetores como uma aplicação $v : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ definida da forma

$$(vf)(p) = \sum_{i=1}^n a_i(y^{-1}(p)) \frac{\partial}{\partial y_i} f(p).$$

Definição 1.1.2. Uma métrica Riemanniana em M é uma correspondência que associa a cada $p \in M$ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ em $T_p M$, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido:

Se $y : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $y(x_1, \dots, x_n) = \bar{p} \in y(U)$ e $\frac{\partial}{\partial y_i}(\bar{p}) = dy(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}(\bar{p}), \frac{\partial}{\partial y_j}(\bar{p}) \right\rangle_{\bar{p}} = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

é uma função diferenciável em U .

Outra maneira de exprimir a diferenciabilidade da métrica Riemanniana é dizer que, para todo par X e Y de campos de vetores diferenciáveis em uma vizinhança V de M , a função $\langle X, Y \rangle$ é diferenciável em V .

As funções g_{ij} são chamadas *expressão da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas* $y : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$. Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma *variedade Riemanniana*.

Exemplo 1.1.1 (Variedades Imersas). Seja $x : M^n \rightarrow N^{n+m}$ uma imersão. Se N tem uma estrutura Riemanniana, x induz uma estrutura Riemanniana em M por $\langle u, v \rangle_p = \langle dx_p(u), dx_p(v) \rangle_{x(p)}$, $u, v \in T_p M$. Como dx_p é injetiva, $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ é positivo definido. As demais condições da definição de métrica Riemanniana são facilmente verificadas. A métrica de M é chamada *métrica induzida* por x . Neste caso, dizemos que x é uma *imersão isométrica*.

Agora definiremos conexão afim.

Definição 1.1.3. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

que satisfaz às seguintes propriedades:

- (i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
- (ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
- (iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,
- (iv) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (conexão simétrica),

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{D}(M)$ e $[X, Y]$ é o colchete dos campos X e Y , ou seja, é o campo de vetores dado por $[X, Y] = XY - YX$.

Proposição 1.1.1. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo de vetores V ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ um outro campo de vetores $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , denominado derivada covariante de V ao longo de c , tal que:

$$(i) \quad \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt};$$

- (ii) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde V é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I ;
- (iii) se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}}Y$.

Definição 1.1.4. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. A conexão é dita compatível com a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ quando, para toda curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ e quaisquer pares de campos de vetores paralelos P e P' ao longo de c (isto é, $\frac{DP}{dt} = \frac{DP'}{dt} = 0, \forall t \in I$), tivermos $\langle P, P' \rangle$ igual a uma constante.

Proposição 1.1.2. Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se, e só se,

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle X, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

Teorema 1.1.1. (Levi-Civita) Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M tal que:

- (i) ∇ é simétrica;
- (ii) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

Observação 1.1.2. A conexão dada pelo teorema acima é denominada conexão de Levi-Civita (ou Riemanniana) de M .

No que se segue, M será uma variedade Riemanniana munida de sua conexão Riemanniana.

Definição 1.1.5. Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica em $t_0 \in I$, se $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$ no ponto t_0 . Se γ é uma geodésica em t , para todo $t \in I$, dizemos que γ é uma geodésica.

Proposição 1.1.3. Dado $p \in M$, existem uma vizinhança V de p em M , um número $\varepsilon > 0$ e uma aplicação C^∞

$$\gamma : (-2, 2) \times \mathcal{U} \rightarrow M,$$

$\mathcal{U} = \{(q, w) \in TM; q \in V, w \in T_q M, |w| < \varepsilon\}$, tal que $t \rightarrow \gamma(t, q, w)$, $t \in (-2, 2)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade w , para cada $q \in V$ e cada $w \in T_q M$, com $|w| < \varepsilon$.

Esta proposição nos permite introduzir o conceito de aplicação exponencial da seguinte maneira:

Sejam $p \in M$ e $\mathcal{U} \subset TM$ um aberto dado pela proposição acima. Então a aplicação $\exp : \mathcal{U} \rightarrow M$ dada por

$$\exp(q, u) = \gamma(1, q, u) = \gamma\left(|u|, q, \frac{u}{|u|}\right), \quad (q, u) \in \mathcal{U},$$

é chamada a *aplicação exponencial* em $\mathcal{U}$.

Geometricamente, $\exp_q(u)$ é o ponto de M obtido percorrendo um comprimento igual a $|u|$, a partir de q , sobre a geodésica que passa por q com velocidade igual a $\frac{u}{|u|}$.

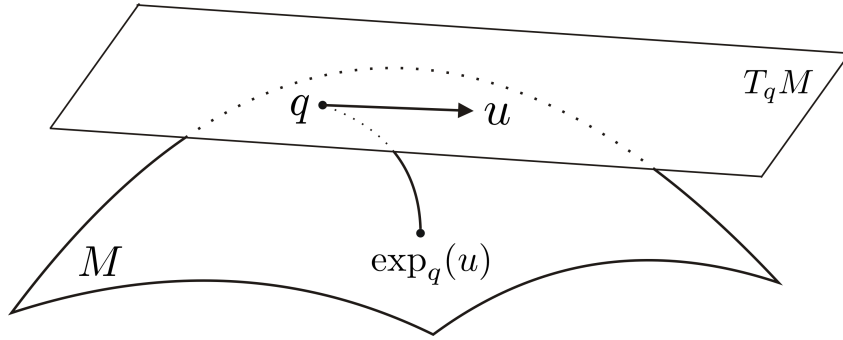


Figura 1.2: Aplicação exponencial

Definição 1.1.6. Uma variedade Riemanniana M é (geodesicamente) completa se para todo $p \in M$, a aplicação exponencial, $\exp_p$, está definida para todo $v \in T_p M$, isto é, se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.

Definição 1.1.7. Um segmento de geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é chamado minimizante se $l(\gamma) \leq l(c)$, onde $l(\cdot)$ indica o comprimento de uma curva e c é qualquer curva diferenciável por partes ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

Definição 1.1.8. (Referencial Geodésico) Sejam M uma variedade Riemanniana de dimensão n e $p \in M$. Considere uma vizinhança $U \subset M$ de p e n campos de vetores $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{X}(U)$, ortonormais em cada ponto de U tal que, em p , $\nabla_{e_i} e_j(p) = 0$. Um tal conjunto $\{e_i\}$, $i = 1, \dots, n$, de campos de vetores é chamado um referencial (local) geodésico em p .

Seja M uma variedade. Sejam $X \in \mathcal{X}(M)$ e $f \in \mathcal{D}(M)$. Definimos a *divergência* de X como a função

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &: M \rightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \operatorname{div} X(p) = \operatorname{tr}(Y(p) \rightarrow \nabla_Y X(p)), \quad p \in M, \end{aligned}$$

onde $\operatorname{tr}(Y(p) \rightarrow \nabla_Y X(p))$ é o traço da aplicação linear $Y(p) \rightarrow \nabla_Y X(p)$, $p \in M$.

O *gradiente* de f é o campo vetorial $\operatorname{grad} f$ em M definido por

$$\langle \operatorname{grad} f(p), v \rangle = df_p(v), \quad p \in M, \quad v \in T_p M.$$

Afirmção 1.1. *Consideremos $\{e_i\}$, $i = 1, \dots, n$, um referencial geodésico em $p \in M$. Temos que*

$$\operatorname{grad} f(p) = \sum_{i=1}^n e_i(f) e_i(p)$$

e

$$\operatorname{div} X(p) = \sum_{i=1}^n e_i(f_i)(p), \quad \text{onde } X = \sum_{i=1}^n f_i e_i.$$

Demonstração. De fato, como $\{e_1(p), \dots, e_n(p)\}$ é uma base de $T_p M$, segue-se que

$$\operatorname{grad} f(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) e_i(p).$$

Daí, $a_i(p) = \langle \operatorname{grad} f(p), e_i(p) \rangle$. Mas, por definição,

$$\langle \operatorname{grad} f(p), e_i(p) \rangle = df_p(e_i(p)) = e_i(p)(f).$$

Logo,

$$\operatorname{grad} f(p) = \sum_{i=1}^n e_i(f) e_i(p).$$

Agora, se $T_X : T_p M \rightarrow T_p M$ é dado por $T_X(Y(p)) = \nabla_Y X(p)$, então

$$T_X(e_i(p)) = \nabla_{e_i} X(p)$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla_{e_i} \left(\sum_{j=1}^n f_j e_j \right) (p) \\
&= \sum_{j=1}^n (e_i(p)(f_j) e_j + f_j \nabla_{e_i} e_j(p)) \\
&= \sum_{j=1}^n e_i(p)(f_j) e_j.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\operatorname{div} X(p) = \operatorname{tr} (T_X) = \sum_{i=1}^n e_i(p) f_i = \sum_{i=1}^n e_i(f_i)(p).$$

□

Seja M uma variedade Riemanniana. O operador $\Delta : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$, dado por

$$\Delta f = \operatorname{div} (\operatorname{grad} f), \quad f \in \mathcal{D}(M),$$

é denominado operador *Laplaciano* de M .

Afirmção 1.2. *Considerando um referencial geodésico $\{e_i\}$, $i = 1, \dots, n$, em $p \in M$, temos que*

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^n e_i(e_i(f))(p).$$

Demonstração. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \operatorname{div} (\operatorname{grad} f) \\
&= \operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^n e_i(f) e_i \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \left\langle \nabla_{e_j} \left(\sum_{i=1}^n e_i(f) e_i \right), e_j \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{e_j} (e_i(f) e_i), e_j \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n \langle e_j(e_i(f)) e_i + e_i(f) \nabla_{e_j} e_i, e_j \rangle.
\end{aligned}$$

Em p , usando o fato que $\{e_i\}$ é um referencial geodésico, temos

$$\Delta f(p) = \sum_{i,j=1}^n \langle e_j(e_i(f))e_i, e_j \rangle (p) = \sum_{i=1}^n e_i(e_i(f))(p).$$

□

Definição 1.1.9. A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação

$$R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Outra maneira de olhar a Definição 1.1.9 é considerar um sistema de coordenadas $\{x_i\}$ em torno de $p \in M$. Como $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$, obtemos

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\right) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

isto é, a curvatura mede a não-comutatividade da derivada covariante.

Intimamente relacionado com o operador curvatura está a curvatura seccional (ou Riemanniana), que passamos a definir.

Seja $\sigma \subset T_p M$ um subespaço bidimensional do espaço tangente $T_p M$ e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes.

Definição 1.1.10. Dado $p \in M$, seja $\{x, y\}$ uma base qualquer de σ . O número real

$$K(p, \sigma) = K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$$

é chamado curvatura seccional de σ em p .

Corolário 1.1.1. Sejam M uma variedade Riemanniana de dimensão n , p um ponto de M e $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de $T_p M$. Escreva $R_{ijkl} = \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l \rangle$, $i, j, k, l = 1, \dots, n$. Então $K(p, \sigma) = K_0 = \text{constante}$ para todo $\sigma \subset T_p M$ se, e somente se,

$$R_{ijkl} = K_0(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}),$$

onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ se } i = j, \\ 0 & , \text{ se } i \neq j. \end{cases}$$

Em outras palavras, $K(p, \sigma) = K_0$ para todo $\sigma \subset T_p M$ se, e só se, $R_{ijij} = -R_{ijji} = K_0$ para todo $i \neq j$, e $R_{ijkl} = 0$ nos outros casos.

Algumas combinações das curvaturas seccionais aparecem com tanta frequência que elas merecem nomes.

Sejam $p \in M$ e $x = z_n$ um vetor unitário em $T_p M$. Tomemos uma base ortonormal $\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ do hiperplano de $T_p M$ ortogonal a x e consideremos as seguintes médias:

$$\text{Ric}_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} K(x, z_i)$$

e

$$K(p) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \text{Ric}_p(z_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j=1}^n \langle R(z_i, z_j)z_i, z_j \rangle.$$

$\text{Ric}_p(x)$ é chamada a *curvatura de Ricci* no ponto p na direção x e $K(p)$ é a *curvatura escalar* (ou média) em p .

Exemplo 1.1.2. Seja M uma variedade Riemanniana conexa de dimensão n com curvatura seccional constante igual a c . Então

$$\text{Ric}_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} K(x, z_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} c = c.$$

Consideremos uma imersão isométrica $x : M^n \rightarrow N^{n+m=k}$ de uma variedade diferenciável M de dimensão n em uma variedade Riemanniana N de dimensão igual a $k = n + m$. Queremos definir a segunda forma fundamental da imersão x . Para isto, introduziremos a seguinte definição:

Seja $\bar{\nabla}$ a conexão Riemanniana de N . Se X e Y são campos locais de vetores em M e $\bar{X}, \bar{Y}$ são extensões locais de X e Y , respectivamente, a N , definimos

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T,$$

onde o expoente T indica a componente tangente do vetor $\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}$.

No que se segue, indicaremos por $\mathcal{X}(U)^\perp$ os campos diferenciáveis em U de vetores normais a $f(U) \approx U$.

Definição 1.1.11. A aplicação $B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \rightarrow \mathcal{X}(U)^\perp$ definida por

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\perp$$

é a segunda forma fundamental de x .

B é um campo local em N normal a M e não depende das extensões $\bar{X}$, $\bar{Y}$. Com efeito, se $\bar{X}_1$ é uma outra extensão de X , temos

$$(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y) - (\bar{\nabla}_{\bar{X}_1} \bar{Y} - \nabla_X Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X} - \bar{X}_1} \bar{Y},$$

que se anula em M , pois $\bar{X} - \bar{X}_1 = 0$ em M . Além disso, se $\bar{Y}_1$ é uma outra extensão de Y ,

$$(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y) - (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}_1 - \nabla_X Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} (\bar{Y} - \bar{Y}_1) = 0,$$

pois $\bar{Y} - \bar{Y}_1 = 0$ ao longo de uma trajetória de X .

Portanto $B(X, Y)$ está bem definida.

Proposição 1.1.4. A aplicação B é bilinear e simétrica.

Demonstração. Sejam $X, Y, Z \in \mathcal{X}(U)$ e $f, g \in \mathcal{D}(U)$ e indicaremos por $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{f}, \bar{g}$ as extensões de X, Y, Z, f, g , respectivamente, a $\bar{U}$.

Inicialmente mostraremos que B é uma aplicação bilinear. De fato, usando as propriedades de linearidade das conexões ∇ e $\bar{\nabla}$ e como $f = \bar{f}$, $g = \bar{g}$ e $\bar{X}(\bar{g}) = X(g)$ em M , temos:

$$\begin{aligned} B(X + Z, Y) &= \bar{\nabla}_{\bar{X} + \bar{Z}} \bar{Y} - \nabla_{X+Z} Y \\ &= \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y + \bar{\nabla}_{\bar{Z}} \bar{Y} - \nabla_Z Y \\ &= B(X, Y) + B(Z, Y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(X, Y + Z) &= \bar{\nabla}_{\bar{X}} (\bar{Y} + \bar{Z}) - \nabla_X (Y + Z) \\ &= \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y + \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Z} - \nabla_X Z \\ &= B(X, Y) + B(X, Z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(fX, Y) &= \bar{\nabla}_{\bar{f}\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_{fX} Y \\ &= \bar{f} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - f \nabla_X Y \\ &= f B(X, Y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(X, gY) &= \bar{\nabla}_{\bar{X}}(\bar{g}\bar{Y}) - \nabla_X(gY) \\
&= \bar{g}\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - g\nabla_X Y + \bar{X}(\bar{g})\bar{Y} - X(g)Y \\
&= gB(X, Y).
\end{aligned}$$

Portanto, B é uma aplicação bilinear.

Finalmente, como $[\bar{X}, \bar{Y}] = [X, Y]$ em M , B é uma aplicação simétrica. Com efeito,

$$\begin{aligned}
B(X, Y) &= \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y \\
&= \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - [\bar{X}, \bar{Y}] - \nabla_X Y + [X, Y] \\
&= \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X}) - \nabla_X Y + (\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\
&= \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X} - \nabla_Y X \\
&= B(Y, X).
\end{aligned}$$

□

Observação 1.1.3. Como B é uma aplicação bilinear, podemos associá-la a uma aplicação linear auto-adjunta $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ dada por

$$\langle S_\eta(X), Y \rangle_{T_p M} = \langle B(X, Y), \eta \rangle_{T_{x(p)} N},$$

onde $\eta \in (TM)^\perp$.

Podemos escrever esta aplicação linear associada à segunda forma fundamental em termos da derivada covariante da seguinte maneira:

$$S_\eta(X) = -(\bar{\nabla}_X \eta)^T.$$

Aqui estamos identificando η com a extensão local de η normal a M .

De fato,

$$\begin{aligned}
\langle S_\eta(X), Y \rangle_{T_p M} &= \langle B(X, Y), \eta \rangle_{T_{x(p)} N} \\
&= \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y, \eta \rangle_{T_{x(p)} N} \\
&= \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}, \eta \rangle_{T_{x(p)} N} \\
&= -\langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} \eta \rangle_{T_{x(p)} N} \\
&= \langle -\bar{\nabla}_{\bar{X}} \eta, \bar{Y} \rangle_{T_{x(p)} N} \\
&= \left\langle -(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \eta)^T, \bar{Y} \right\rangle_{T_{x(p)} N}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left\langle S_\eta(X) - (\bar{\nabla}_X \eta)^T, Y \right\rangle_{T_p M} = 0$$

e, portanto,

$$S_\eta(X) = -(\bar{\nabla}_X \eta)^T.$$

Agora consideremos o caso particular em que a codimensão da imersão é 1, isto é, $x : M^n \rightarrow N^{n+1}$. Definimos a *curvatura média* H de x por

$$H = \frac{1}{n} \text{tr}(S_\eta),$$

onde $\text{tr}(S_\eta)$ é o traço da matriz da aplicação S_η . Além disso,

$$\|B\|^2 = \text{tr}(S_\eta(S_\eta)^t),$$

onde $(S_\eta)^t$ representa a transposta de (S_η) , é uma norma para a segunda forma fundamental de x .

Sejam $p \in M$ e η o vetor normal unitário a x . Como $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ é simétrica, existe uma base ortonormal de vetores próprios $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p M$ com valores próprios reais $k_1, \dots, k_n$, respectivamente, isto é, $S_\eta(e_i) = k_i e_i$, $1 \leq i \leq n$.

Vamos supor que M e N são ambas orientáveis e estão orientadas e seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base na orientação de M . Escolhemos η de modo que $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$ seja uma base na orientação de N . Neste caso, denominamos os e_i as *direções principais* e os k_i as *curvaturas principais* de x .

Daí, a matriz da aplicação na base $\{e_1, \dots, e_n\}$ é dada por

$$S_\eta = \begin{pmatrix} k_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k_n \end{pmatrix}.$$

Logo, reescrevendo H e $\|B\|^2$ em termos das curvaturas principais, obtemos

$$H = \frac{1}{n} \text{tr}(S_\eta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i \quad \text{e} \quad \|B\|^2 = \text{tr}(S_\eta(S_\eta)^t) = \text{tr}((S_\eta)^2) = \sum_{i=1}^n k_i^2.$$

Definição 1.1.12. Uma imersão $x : M^n \rightarrow N^{n+m=k}$ é geodésica em $p \in M$, se para todo $\eta \in (T_p M)^\perp$ a segunda forma fundamental B é identicamente nula em p . A imersão x é totalmente geodésica, se ela é geodésica para todo $p \in M$.

Proposição 1.1.5. Uma imersão $x : M \rightarrow N$ é geodésica em $p \in M$ se, e só se, toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de N em p .

Definição 1.1.13. Uma imersão $x : M \rightarrow N$ é mínima, se para todo $p \in M$ e todo $\eta \in (T_p M)^\perp$ tem-se que $\text{tr}(S_\eta) = 0$.

Definição 1.1.14. Seja N^{n+1} uma variedade com uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja ∇ a sua conexão Riemanniana. Dizemos que uma imersão $x : M^n \rightarrow N^{n+1}$ é (totalmente) umbílica se, para todo $p \in M$, a segunda forma fundamental B de x em p satisfaz

$$\langle B(X, Y), \eta \rangle(p) = \lambda(p) \langle X, Y \rangle, \quad \lambda(p) \in \mathbb{R},$$

para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e todo campo unitário η normal a $x(M)$.

1.2 Estabilidade

Nesta seção, consideremos uma imersão $x : M^n \rightarrow N^{n+1}$ de uma variedade diferenciável orientada e conexa em uma variedade Riemanniana orientada. Seja $D \subset M$ um domínio relativamente compacto com bordo ∂D suave e denotemos por $\overline{D}$ o fecho de D . Escolhemos a orientação de M compatível com a orientação de N .

Definição 1.2.1. Uma variação de x em D é uma função diferenciável $X : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \overline{D} \rightarrow N$ tal que, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$,

$$\begin{aligned} X_t &: \overline{D} \rightarrow N \\ p &\mapsto X(t, p) \end{aligned}$$

é uma imersão com $X_0 = x$.

Dizemos que uma variação X_t fixa o bordo ∂D , se

$$X_t|_{\partial D} = x|_{\partial D},$$

para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

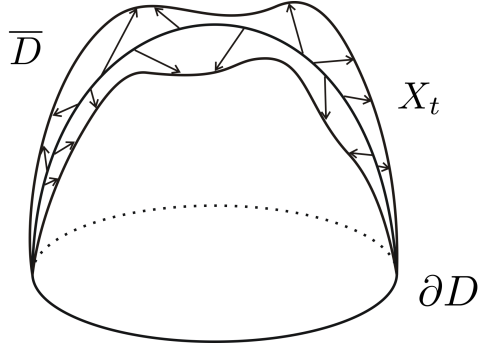


Figura 1.3: Variação que fixa o bordo.

Nesta dissertação só trataremos das variações que fixam o bordo.

Definimos a *função área* $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$A_D(t) = \int_D dM_t,$$

onde dM_t é o elemento volume de M na métrica induzida por X_t , e a *função volume* $V : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$V(t) = \int_{[0,t] \times D} X^* dN.$$

Dado $p \in \overline{D}$, seja $W(p) = \frac{\partial X}{\partial t}|_{t=0}$ a variação do campo vetorial de X .

Uma variação é *normal*, se W é paralelo a η . Dizemos que uma variação *preserva volume* se $V(t) = V(0)$, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

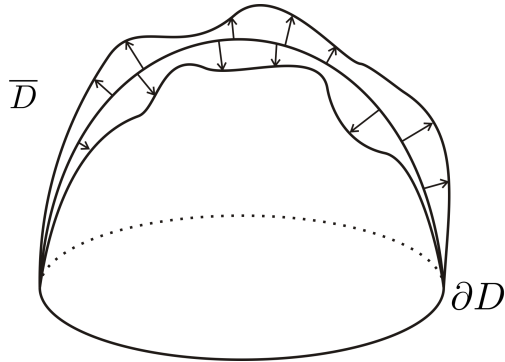


Figura 1.4: Variação normal.

Vamos definir estabilidade para imersões com curvatura média constante.

Definição 1.2.2. *Sejam $x : M^n \rightarrow N^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante e $D \subset M$ um domínio relativamente compacto com bordo ∂D suave. A restrição $x|_D$ é estável, se $A''(0) \geq 0$ para toda variação que preserva volume. Dizemos que x é estável se, para qualquer D , $x|_D$ é estável.*

Seja $\tilde{\mathcal{F}}$ o conjunto das funções diferenciáveis $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ com $f|_{\partial M} = 0$ e $\int_M f dM = 0$. A seguinte proposição é um importante resultado para saber se uma imersão é estável.

Proposição 1.2.1. *Seja $x : M^n \rightarrow N^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante. A imersão x é estável se, e somente se,*

$$\int_M (-f \Delta f - (\text{Ric}(\eta) + \|B\|^2) f^2) dA \geq 0,$$

para toda $f \in \tilde{\mathcal{F}}$. Aqui Δ é o Laplaciano da métrica induzida e $\text{Ric}(\eta)$ é a curvatura de Ricci de N na direção η .

Quando a imersão x é mínima, temos a seguinte definição para estabilidade:

Definição 1.2.3. *Sejam $x : M^n \rightarrow N^{n+1}$ uma imersão mínima e $D \subset M$ um domínio relativamente compacto com bordo ∂D suave. A restrição $x|_D$ é estável, se $A''(0) \geq 0$ para toda variação. Dizemos que x é estável se, para qualquer D , $x|_D$ é estável.*

Uma proposição análoga à Proposição 1.2.1 para imersões mínimas é a seguinte:

Proposição 1.2.2. *Seja $x : M^n \rightarrow N^{n+1}$ uma imersão mínima. A imersão x é estável se, e somente se,*

$$\int_M (-f \Delta f - (\text{Ric}(\eta) + \|B\|^2) f^2) dA \geq 0.$$

Aqui Δ é o Laplaciano da métrica induzida e $\text{Ric}(\eta)$ é a curvatura de Ricci de N na direção η .

Observamos que para o caso em que x é mínima, a proposição acima não precisa da hipótese que $f \in \tilde{\mathcal{F}}$.

Capítulo 2

A Função Suporte em Espaços de Curvatura Constante

Seja $\mathcal{Q}_c^{n+1}$ uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa com curvatura seccional constante igual a c . Neste capítulo, estenderemos para as variedades $\mathcal{Q}_c^{n+1}$, c arbitrário, as noções de função suporte e vetor posição já conhecidas em $\mathbb{R}^{n+1}$ e daremos uma interpretação geométrica da função suporte.

Seja S_c a solução da equação diferencial ordinária $y'' + cy = 0$ com condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$. Então

$$S_c(r) = \begin{cases} r & , \text{ se } c = 0, \\ \frac{\sin(\sqrt{c} r)}{\sqrt{c}} & , \text{ se } c > 0, \\ \frac{\sinh(\sqrt{-c} r)}{\sqrt{-c}} & , \text{ se } c < 0. \end{cases}$$

Consideremos a função $r(\cdot) = d(\cdot, p_0)$, onde d é a função distância geodésica em $\mathcal{Q}_c^{n+1}$ e $p_0 \in \mathcal{Q}_c^{n+1}$, e denotemos por $\text{grad } r$ o gradiente em $\mathcal{Q}_c^{n+1}$ da função r .

Definição 2.0.4. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana orientada de dimensão n e $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica. Dado $p_0 \in \mathcal{Q}_c^{n+1}$, o campo de vetores*

$$X(p) = S_c(r) \text{grad } r(p)$$

em $\mathcal{Q}_c^{n+1}$ é chamado de vetor posição com origem em p_0 .

A função $g : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(p) = \langle X(p), \eta(p) \rangle$$

é denominada a função suporte da imersão x .

Aqui η é o vetor normal unitário à imersão x e identificamos $x(p)$ com p .

2.1 A Função Suporte em $\mathbb{R}^{n+1}$

Seja $(\mathcal{Q}_0^n)_p$ o hiperplano tangente a $x(M^n)$ em $p \in M$. Então a distância do ponto p_0 a $(\mathcal{Q}_0^n)_p$ é dada por $g(p)$.

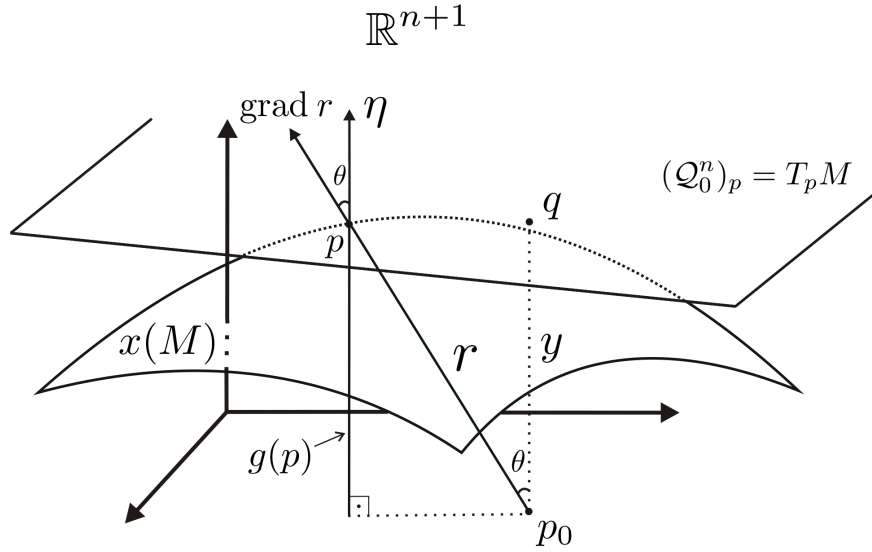


Figura 2.1: Espaço Euclidiano

Com efeito, o cosseno do ângulo entre os vetores $\text{grad } r(p)$ e $\eta(p)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle \text{grad } r(p), \eta(p) \rangle}{|\text{grad } r(p)| |\eta(p)|} = \frac{1}{r(p)} \langle X(p), \eta(p) \rangle = \frac{1}{|X(p)|} \langle X(p), \eta(p) \rangle.$$

Agora seja y a distância de p_0 a $(\mathcal{Q}_0^n)_p$ e seja q o pé da perpendicular baixada de p_0 a $(\mathcal{Q}_0^n)_p$. No triângulo p_0qp , temos que

$$y = |X(p)| \cos \theta = |X(p)| \frac{1}{|X(p)|} \langle X(p), \eta(p) \rangle = \langle X(p), \eta(p) \rangle = g(p).$$

Isto conclui a afirmação.

A definição do vetor posição dada, ver Definição 2.0.4, no caso Euclidiano é bastante natural. De fato, escrevendo $p = (x_1, \dots, x_{n+1})$ e $p_0 = (x_1^0, \dots, x_{n+1}^0)$, temos que

$$r(p) = d(p, p_0) = |X(p)| = |p - p_0| = \left(\sum_{i=1}^{n+1} (x_i - x_i^0)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{grad } r(p) &= \frac{1}{|X(p)|} (x_1 - x_1^0, \dots, x_{n+1} - x_{n+1}^0) \\ &= \frac{1}{|X(p)|} \sum_{i=1}^{n+1} (x_i - x_i^0) e_i \\ &= \frac{1}{|X(p)|} X(p) \\ &= \frac{1}{r} X(p), \end{aligned}$$

ou seja,

$$X(p) = r \text{ grad } r(p).$$

2.2 A Função Suporte em $\mathbb{S}^{n+1}$

No caso em que $c > 0$, vamos supor, sem perda de generalidade, que $c = 1$ e, portanto, $\mathcal{Q}_c^{n+1}$ é a esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$ em $\mathbb{R}^{n+2}$.

Neste caso, para qualquer ponto $p_0 \in \mathbb{S}^{n+1}$, a função distância geodésica $r(\cdot) = d(\cdot, p_0)$, dada pelo comprimento da geodésica minimizante, é diferenciável em $\mathbb{S}^{n+1} - \{p_0, -p_0\}$.

Logo, o vetor posição com origem em p_0 dado por

$$X(p) = \text{sen } r \text{ grad } r(p)$$

só é diferenciável em $\mathbb{S}^{n+1} - \{p_0, -p_0\}$.

Isto implica que a função suporte $g = \langle X, \eta \rangle$ é diferenciável somente em $x(M^n) \subseteq \mathbb{S}^{n+1} - \{p_0, -p_0\}$.

Seja $(\mathcal{Q}_1^n)_p$ a hipersuperfície totalmente geodésica tangente a $x(M^n)$ em $p \in M$. Então a distância Euclidiana do ponto p_0 ao hiperplano que contém $(\mathcal{Q}_1^n)_p$ é dada por $|g(p)|$.

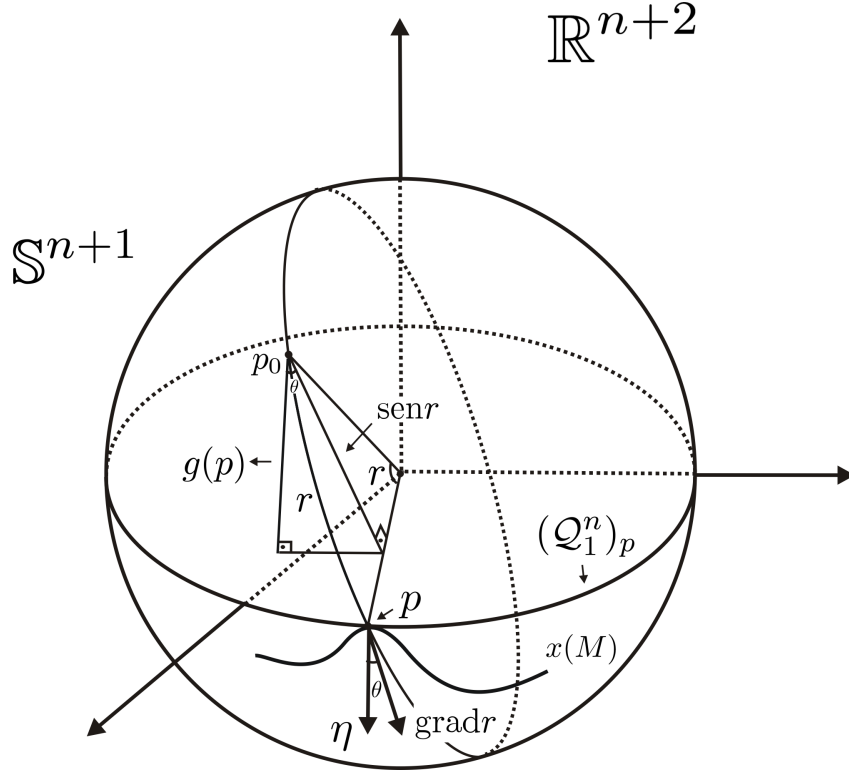


Figura 2.2: Espaço Esférico

De fato, como a esfera é unitária e $r = d(p, p_0)$, obtemos que $\angle(p, p_0) = r$.

Visto que $\text{grad } r(p)$ é o vetor velocidade da geodésica que parte de p_0 , então $\text{grad } r(p)$ é ortogonal a p . Logo, podemos decompor p_0 da seguinte forma:

$$p_0 = \cos r(p)p - \sin r(p)\text{grad } r(p). \quad (2.1)$$

Isto mostra que a definição de vetor posição dada anteriormente também é natural em $\mathbb{S}^{n+1}$.

Observando que $\langle p, \eta(p) \rangle = 0$, obtemos

$$\langle p_0, \eta(p) \rangle = -\sin r(p) \langle \text{grad } r(p), \eta(p) \rangle = -g(p).$$

Logo

$$|g(p)| = |\langle p_0, \eta(p) \rangle|.$$

2.3 A Função Suporte em $\mathbb{H}^{n+1}$

No caso em que $c < 0$, vamos utilizar o modelo do hiperbolóide para o espaço hiperbólico. Para isto, consideremos no espaço vetorial $\mathbb{R}^{n+2}$ a métrica pseudo-Riemanniana $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ definida por

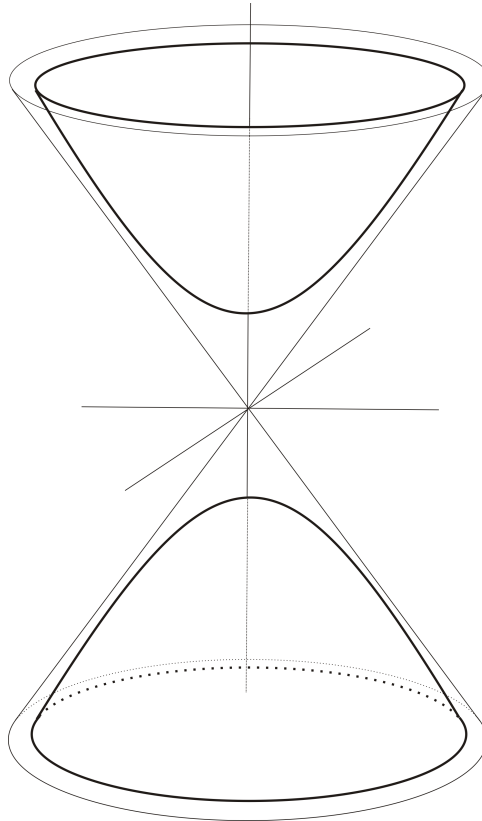
$$\langle\langle v, w \rangle\rangle = v_1 w_1 + \dots + v_{n+1} w_{n+1} - v_{n+2} w_{n+2},$$

onde $v = (v_1, \dots, v_{n+2})$ e $w = (w_1, \dots, w_{n+2})$ são vetores em $\mathbb{R}^{n+2}$.

O produto interno definido acima é chamado *produto interno de Lorentz* e $(\mathbb{R}^{n+2}, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle)$ é chamado *espaço de Lorentz* e indicamos este espaço por $\mathbb{L}^{n+2}$.

Consideremos a hipersuperfície de $\mathbb{L}^{n+2}$ dada por

$$\tilde{\mathbb{H}}^{n+1}(c) = \left\{ v \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle\langle v, v \rangle\rangle = -\frac{1}{c^2} \right\}.$$



Como $\widetilde{\mathbb{H}}^{n+1}(c)$ possui duas componentes conexas, vamos escolher a componente conexa tal que $v_{n+2} > 0$, isto é,

$$\mathbb{H}^{n+1}(c) = \left\{ v \in \mathbb{L}^{n+2}; v_{n+2} > 0 \text{ e } \langle\langle v, v \rangle\rangle = -\frac{1}{c^2} \right\}.$$

A métrica induzida pelo produto de Lorentz em $\mathbb{H}^{n+1}(c)$ é Riemanniana. Além disso, a curvatura seccional de $\mathbb{H}^{n+1}(c)$ é igual a c .

Visto que $\mathbb{H}^{n+1}(c)$ é simplesmente conexa, pois é homeomorfa a $\mathbb{R}^{n+1}$, segue-se que $\mathbb{H}^{n+1}(c)$ é um modelo para o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}(c)$ chamado *modelo de Lorentz* ou *modelo do hiperbolóide*.

As geodésicas neste modelo são interseções de $\mathbb{H}^{n+1}$ com hiperplanos que passam pela origem de $\mathbb{R}^{n+2}$, ver [14], p. 70, corolário 4.

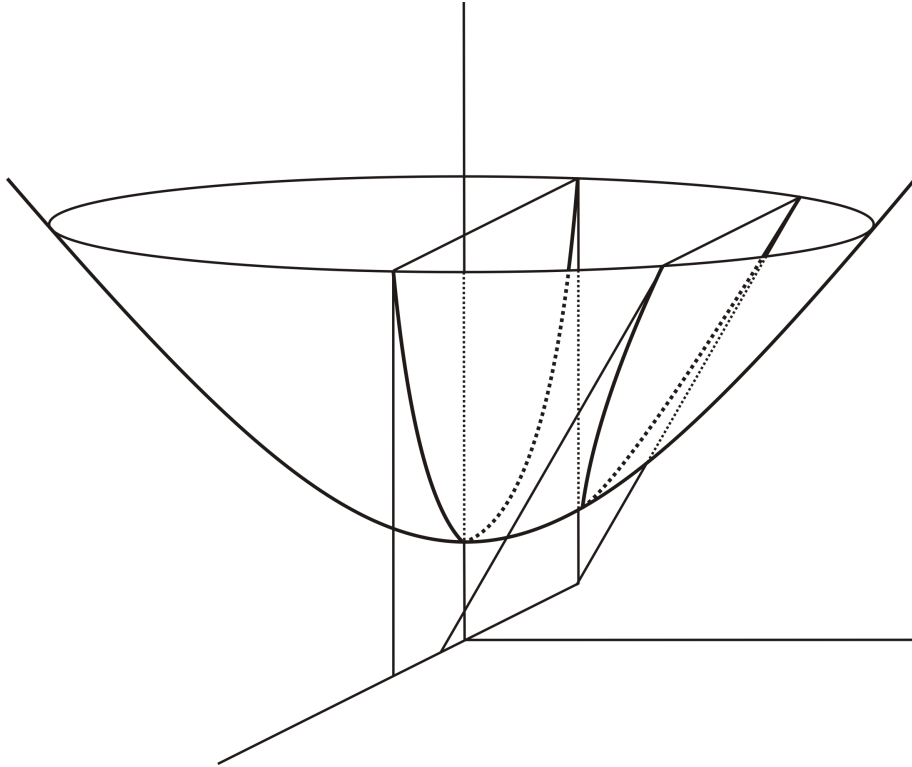


Figura 2.3: Geodésicas do espaço hiperbólico

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $c = -1$ e $p_0 = e_{n+2} = (0, \dots, 0, 1)$.

Seja $(\mathcal{Q}_{-1}^n)_p$ a hipersuperfície totalmente geodésica tangente a $x(M^n)$ em $p \in M$.

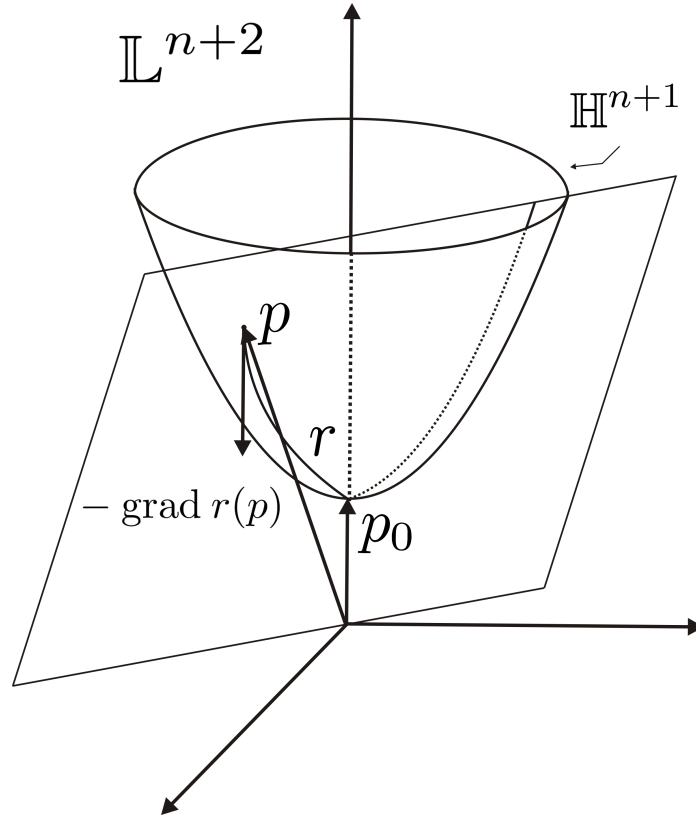
Neste caso, a distância Euclidiana de p_0 ao hiperplano que passa pela origem de $\mathbb{R}^{n+2}$ e contém $(\mathcal{Q}_{-1}^n)_p$ é dada por

$$\frac{|g(p)|}{\sqrt{1 + 2g(p)^2}}. \quad (2.2)$$

De fato, os vetores p_0 , p e $-\text{grad } r(p)$ estão num mesmo plano e não são colineares, então podemos escrever p_0 como combinação linear dos outros dois vetores, isto é,

$$p_0 = \alpha p - \beta \text{grad } r(p) \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

ver figura abaixo.



Observemos que, como $\langle \text{grad } r(p), p \rangle = 0$,

$$-1 = \|p_0\|^2 = \alpha^2 \|p\|^2 + \beta^2 \|\text{grad } r(p)\|^2 = -\alpha^2 + \beta^2.$$

Logo, $\alpha = \cosh r(p)$ e $\beta = \sinh r(p)$ e, portanto,

$$p_0 = \cosh r(p)p - \sinh r(p)\text{grad } r(p). \quad (2.3)$$

Como $\cosh r(p)p - p_0 = X(p)$, obtemos que a definição de vetor posição, neste caso, também é natural.

Seja $\eta(p)$ o vetor normal a M em p . Como $\langle\langle p, \eta \rangle\rangle = 0$,

$$\begin{aligned} \langle\langle p_0, \eta(p) \rangle\rangle &= \cosh r(p) \langle\langle p, \eta(p) \rangle\rangle - \sinh r(p) \langle\langle \text{grad } r(p), \eta(p) \rangle\rangle \\ &= -\langle\langle \sinh r(p)\text{grad } r(p), \eta(p) \rangle\rangle \\ &= -\langle\langle X(p), \eta(p) \rangle\rangle \\ &= -g(p). \end{aligned}$$

Escrevendo $\eta(p) = (\eta_1, \dots, \eta_{n+1}, \eta_{n+2})$, vemos que

$$\begin{aligned} \langle\langle p_0, \eta(p) \rangle\rangle &= \langle\langle (0, \dots, 0, 1), (\eta_1, \dots, \eta_{n+1}, \eta_{n+2}) \rangle\rangle \\ &= 0 \cdot \eta_1 + \dots + 0 \cdot \eta_{n+1} - 1 \cdot \eta_{n+2} \\ &= -\eta_{n+2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle p_0, \eta(p) \rangle &= \langle (0, \dots, 0, 1), (\eta_1, \dots, \eta_{n+1}, \eta_{n+2}) \rangle \\ &= 0 \cdot \eta_1 + \dots + 0 \cdot \eta_{n+1} + 1 \cdot \eta_{n+2} \\ &= \eta_{n+2}, \end{aligned}$$

onde $\langle, \rangle$ é o produto interno usual de $\mathbb{R}^{n+2}$.

Como $\langle\langle \eta, \eta \rangle\rangle = 1$, $\langle\langle p, \eta(p) \rangle\rangle = 0$ e $\langle\langle v, \eta(p) \rangle\rangle = 0$, para qualquer vetor v tangente a $(\mathcal{Q}_{-1}^n)_p$, temos que

$$\bar{\eta}(p) = \frac{(\eta_1, \dots, \eta_{n+1}, -\eta_{n+2})}{\sqrt{1 + 2\eta_{n+2}^2}}$$

é um vetor unitário em $\mathbb{R}^{n+2}$ perpendicular ao hiperplano que passa pela origem de $\mathbb{R}^{n+2}$ e contém $(\mathcal{Q}_{-1}^n)_p$.

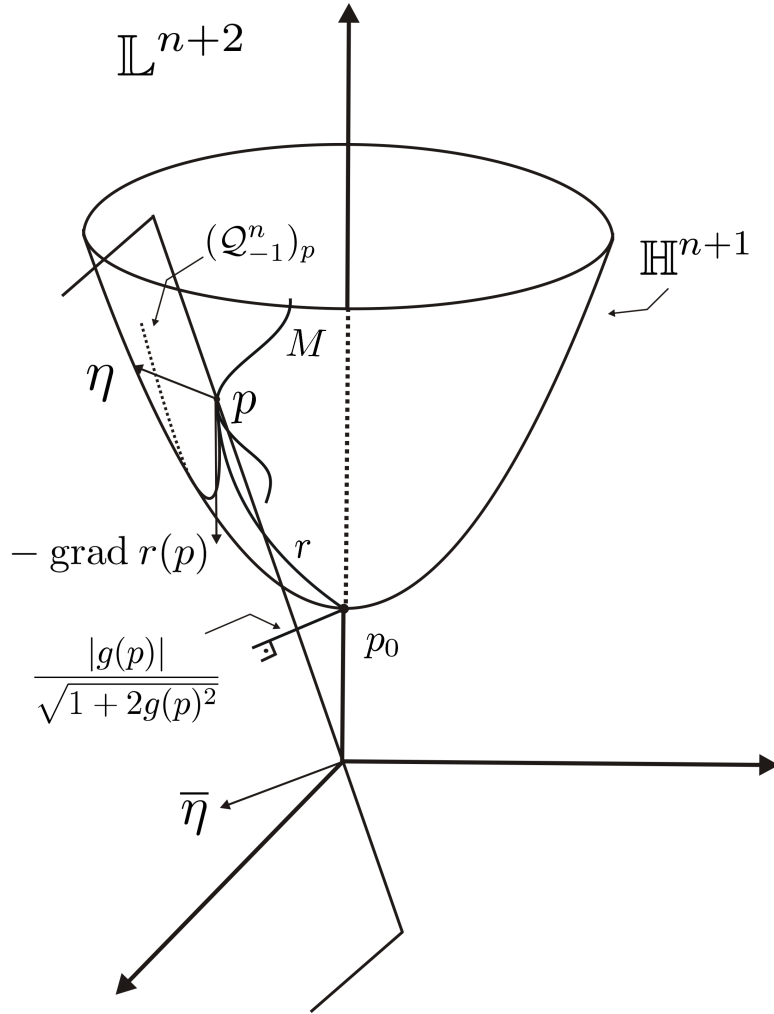


Figura 2.4: Espaço Hiperbólico

De fato,

$$\begin{aligned}
 |\bar{\eta}(p)|^2 &= \frac{\eta_1^2 + \dots + \eta_{n+1}^2 + \eta_{n+2}^2}{1 + 2\eta_{n+2}^2} \\
 &= \frac{\eta_1^2 + \dots + \eta_{n+1}^2 - \eta_{n+2}^2 + 2\eta_{n+2}^2}{1 + 2\eta_{n+2}^2} \\
 &= \frac{1 + 2\eta_{n+2}^2}{1 + 2\eta_{n+2}^2} = 1.
 \end{aligned}$$

Escrevendo $p = (x_1, \dots, x_{n+2})$, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\eta}(p), p \rangle &= \left\langle \frac{(\eta_1, \dots, \eta_{n+1}, -\eta_{n+2})}{\sqrt{1 + 2\eta_{n+2}^2}}, (x_1, \dots, x_{n+2}) \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + 2\eta_{n+2}^2}} (\eta_1 x_1 + \dots + \eta_{n+1} x_{n+1} - \eta_{n+2} x_{n+2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + 2\eta_{n+2}^2}} \langle \eta(p), p \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, a distância Euclidiana de p_0 a este hiperplano é dada por

$$|\langle p_0, \bar{\eta}(p) \rangle| = \left| \frac{-\eta_{n+2}}{\sqrt{1 + 2\eta_{n+2}^2}} \right| = \frac{|g(p)|}{\sqrt{1 + 2g(p)^2}}.$$

2.4 O Laplaciano da Função Suporte

Nesta seção consideremos uma variedade Riemanniana orientada M^n e $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica com curvatura média constante H . Seja $\theta_c = S'_c$. Mostraremos que a função suporte g da imersão x satisfaz

$$\Delta g = -\|B\|^2 g - nH\theta_c,$$

onde Δ é o Laplaciano em M^n .

Antes de provarmos o resultado acima, necessitaremos de três lemas, a saber:

Lema 2.4.1. *Sejam $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica com curvatura média constante H e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial geodésico em $p \in M^n$. Então*

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \eta, e_k \rangle (p) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Além disso,

$$\sum_{i=1}^n \langle X, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle (p) = -\|B\|^2 g(p),$$

onde X é o vetor posição com origem em $p_0 \in \mathcal{Q}_c^{n+1}$.

Demonstração. Como $\langle \eta, e_k \rangle = 0$, temos que

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} \eta, e_k \rangle = -\langle \eta, \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle.$$

Derivando a equação acima, obtemos

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \eta, e_k \rangle + \langle \bar{\nabla}_{e_i} \eta, \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{e_i} \eta, \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle - \langle \eta, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle. \quad (2.4)$$

Como $\langle \eta, \eta \rangle = 1$, segue-se que $\langle \bar{\nabla}_{e_i} \eta, \eta \rangle = 0$. Isto significa que $\bar{\nabla}_{e_i} \eta$ é tangente a M^n .

Visto que $\bar{\nabla}_{e_i} \eta$ é tangente a M^n e $(\bar{\nabla}_{e_i} e_k(p))^T = 0$, pois o referencial é geodésico, temos que a equação (2.4) se reduz a seguinte equação:

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \eta, e_k \rangle(p) = -\langle \eta, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} e_k \rangle(p) = -\langle \eta, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_k} e_i \rangle(p). \quad (2.5)$$

A última igualdade segue do fato que a conexão de uma variedade Riemanniana é simétrica.

Como $\mathcal{Q}_c^{n+1}$ possui curvatura seccional constante e igual a c , então

$$R_{ikik} = \langle R(e_i, e_k)e_i, e_k \rangle = K(e_i, e_k) = c.$$

Assim,

$$R_{ikik}e_k = R(e_i, e_k)e_i = ce_k.$$

Por outro lado,

$$R(e_i, e_k)e_i = \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{e_i} e_i - \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_k} e_i + \bar{\nabla}_{[e_i, e_k]} e_i = \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{e_i} e_i - \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_k} e_i.$$

Logo,

$$\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_k} e_i = \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{e_i} e_i - ce_k. \quad (2.6)$$

Usando (2.5) e (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \eta, e_k \rangle(p) &= -\sum_{i=1}^n \langle \eta, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_k} e_i \rangle(p) \\ &= -\sum_{i=1}^n \langle \eta, \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{e_i} e_i - ce_k \rangle(p) \\ &= -\sum_{i=1}^n \langle \eta, \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle(p) \\ &= -\left\langle \eta, \bar{\nabla}_{e_k} \left(\sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i \right) \right\rangle(p). \end{aligned}$$

Como $\left\langle \eta, \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i \right\rangle = nH$ é constante, vemos que

$$\left\langle \bar{\nabla}_{e_k} \eta, \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i \right\rangle = - \left\langle \eta, \bar{\nabla}_{e_k} \left(\sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i \right) \right\rangle,$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \eta, e_k \rangle (p) &= \left\langle \bar{\nabla}_{e_k} \eta, \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i \right\rangle (p) \\ &= \left\langle (\bar{\nabla}_{e_k} \eta)^T + (\bar{\nabla}_{e_k} \eta)^N, \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i \right\rangle (p) \\ &= \left\langle (\bar{\nabla}_{e_k} \eta)^T, \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}_{e_i} e_i \right\rangle (p) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isto conclui a prova da primeira afirmação.

Agora como $\bar{\nabla}_{e_i} \eta$ é tangente a M^n , podemos reescrevê-lo da forma

$$\bar{\nabla}_{e_i} \eta = \sum_{j=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \eta, e_j \rangle e_j.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \eta, \eta \rangle &= - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \eta, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle \\ &= - \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{j=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \eta, e_j \rangle e_j, \sum_{k=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \eta, e_k \rangle e_k \right\rangle \\ &= - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j,k=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \eta, e_j \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_i} \eta, e_k \rangle \langle e_j, e_k \rangle \right) \quad (2.7) \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \eta, e_j \rangle^2 \\ &= - \|B\|^2. \end{aligned}$$

Escrevendo

$$X = \langle X, \eta \rangle \eta + \sum_{k=1}^n \langle X, e_k \rangle e_k$$

e usando (2.7) e a primeira parte deste lema, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle X, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle (p) &= \sum_{i=1}^n \left\langle \langle X, \eta \rangle \eta + \sum_{k=1}^n \langle X, e_k \rangle e_k, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \eta \right\rangle (p) \\ &= \langle X, \eta \rangle \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \eta, \eta \rangle (p) \\ &= -\|B\|^2 g. \end{aligned}$$

□

Utilizaremos a proposição abaixo para demonstrarmos os lemas 2.4.2 e 2.4.3.

Proposição 2.4.1. *Se V e W são campos de vetores diferenciáveis em $\mathcal{Q}_c^{n+1}$, então*

$$\langle \bar{\nabla}_V \text{grad } r, W \rangle = \frac{\theta_c}{S_c} (\langle V, W \rangle - \langle \text{grad } r, V \rangle \langle \text{grad } r, W \rangle), \quad (2.8)$$

onde r é a função distância geodésica em $\mathcal{Q}_c^{n+1}$.

Demonstração. Inicialmente provaremos a proposição para o caso em que $c = 0$. Sejam V e W campos de vetores em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $r : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ a função distância geodésica, a qual é dada por

$$r(p) = d(p, p_0) = |p - p_0|,$$

$p_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Como $r^2 = |p - p_0|^2 = \langle p - p_0, p - p_0 \rangle$, temos que

$$W(r^2) = 2 \langle W, p - p_0 \rangle = 2r \langle \text{grad } r, W \rangle,$$

isto é

$$\langle W, p - p_0 \rangle = r \langle \text{grad } r, W \rangle.$$

Aplicando o campo V a equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \nabla_V W, p - p_0 \rangle + \langle W, V \rangle &= \langle \text{grad } r, V \rangle \langle \text{grad } r, W \rangle \\ &\quad + r(\langle \nabla_V \text{grad } r, W \rangle \\ &\quad + \langle \text{grad } r, \nabla_V W \rangle). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Visto que $r \operatorname{grad} r = p - p_0$, podemos escrever (2.9) da forma

$$\begin{aligned} \langle \nabla_V W, p - p_0 \rangle + \langle W, V \rangle &= \langle \operatorname{grad} r, V \rangle \langle \operatorname{grad} r, W \rangle \\ &\quad + r \langle \nabla_V \operatorname{grad} r, W \rangle + \langle p - p_0, \nabla_V W \rangle, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\langle \nabla_V \operatorname{grad} r, W \rangle = \frac{1}{r} (\langle V, W \rangle - \langle \operatorname{grad} r, V \rangle \langle \operatorname{grad} r, W \rangle).$$

Visto que $S_c = r$ e $\theta_c = 1$ em $\mathbb{R}^{n+1}$, concluímos o resultado.

No caso em que $c = 1$, consideremos V e W campos de vetores diferenciáveis em $\mathbb{S}^{n+1}$.

Aplicando o campo V na equação (2.1), apresentada na seção 2 do capítulo 2, vemos que

$$\begin{aligned} 0 &= -\operatorname{sen} r(p) \langle \operatorname{grad} r(p), V \rangle p + \cos r(p) V \\ &\quad - \cos r(p) \langle \operatorname{grad} r(p), V \rangle \operatorname{grad} r(p) \\ &\quad - \operatorname{sen} r(p) \nabla_V \operatorname{grad} r(p), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \nabla_V \operatorname{grad} r(p) &= -\langle \operatorname{grad} r(p), V \rangle p \\ &\quad + \frac{\cos r(p)}{\operatorname{sen} r(p)} (V - \langle \operatorname{grad} r(p), V \rangle \operatorname{grad} r(p)). \end{aligned}$$

Como $\langle p, W \rangle = 0$, temos que

$$\langle \nabla_V \operatorname{grad} r(p), W \rangle = \frac{\cos r(p)}{\operatorname{sen} r(p)} (\langle V, W \rangle - \langle \operatorname{grad} r(p), V \rangle \langle \operatorname{grad} r(p), W \rangle).$$

Visto que, em $\mathbb{S}^{n+1}$, $S_c = \operatorname{sen} r(p)$ e $\theta_c = \cos r(p)$, concluímos o resultado.

Finalmente, provaremos a proposição para o caso em que $c = -1$. Consideremos V e W campos de vetores diferenciáveis em $\mathbb{H}^{n+1}$.

Aplicando o campo V na equação (2.3), apresentada na seção 3 do capítulo 2, vemos que

$$\begin{aligned}
0 &= \sinh r(p) \langle \text{grad } r(p), V \rangle p + \cosh r(p) V \\
&\quad - \cosh r(p) \langle \text{grad } r(p), V \rangle \text{grad } r(p) \\
&\quad - \sinh r(p) \nabla_V \text{grad } r(p),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\nabla_V \text{grad } r(p) &= \langle \text{grad } r(p), V \rangle p \\
&\quad + \frac{\cosh r(p)}{\sinh r(p)} (V - \langle \text{grad } r(p), V \rangle \text{grad } r(p)),
\end{aligned}$$

portanto, como $\langle p, W \rangle = 0$,

$$\langle \nabla_V \text{grad } r(p), W \rangle = \frac{\cosh r(p)}{\sinh r(p)} (\langle V, W \rangle - \langle \text{grad } r(p), V \rangle \langle \text{grad } r(p), W \rangle).$$

Como $S_c = \sinh r(p)$ e $\theta_c = \cosh r(p)$, concluímos a demonstração. $\square$

Lema 2.4.2. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana orientada e $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica. Consideremos $\{e_1, \dots, e_n\}$ campos de vetores ortonormais definidos numa vizinhança de $p \in M$. Então*

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} X, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle (p) = -nH\theta_c,$$

onde H é a curvatura média de x .

Demonstração. Como $X = S_c \text{grad } r$ e $\theta_c = S'_c$, temos que

$$\bar{\nabla}_{e_i} X = \bar{\nabla}_{e_i} (S_c \text{grad } r) = \theta_c \langle \text{grad } r, e_i \rangle \text{grad } r + S_c \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r. \quad (2.10)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\nabla}_{e_i} X, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle &= \langle \theta_c \langle \text{grad } r, e_i \rangle \text{grad } r + S_c \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle \\
&= \theta_c \langle \text{grad } r, e_i \rangle \langle \text{grad } r, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle \\
&\quad + S_c \langle \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle.
\end{aligned} \quad (2.11)$$

Fazendo $V = e_i$ e $W = \bar{\nabla}_{e_i} \eta$ em (2.8), obtemos que

$$S_c \langle \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle = \theta_c \langle e_i, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle - \theta_c \langle \text{grad } r, e_i \rangle \langle \text{grad } r, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle.$$

Substituindo a igualdade acima em (2.11), vem que

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} X, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle = \theta_c \langle e_i, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle.$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} X, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle = \theta_c \sum_{i=1}^n \langle e_i, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle = -nH\theta_c.$$

□

Lema 2.4.3. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana orientada e $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial geodésico em $p \in M^n$. Então*

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} X, \eta \rangle (p) = nH\theta_c(p),$$

onde H é a curvatura média de x .

Demonstração. Usando (2.10) e observando que $\theta'_c = -cS_c$, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} X &= -cS_c \langle \text{grad } r, e_i \rangle^2 \text{grad } r + \theta_c \langle \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, e_i \rangle \text{grad } r \\ &\quad + \theta_c \langle \text{grad } r, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle \text{grad } r + 2\theta_c \langle \text{grad } r, e_i \rangle \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r \\ &\quad + S_c \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} X, \eta \rangle (p) &= -cS_c \langle \text{grad } r, e_i \rangle^2 \langle \text{grad } r, \eta \rangle (p) \\ &\quad + \theta_c \langle \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, e_i \rangle \langle \text{grad } r, \eta \rangle (p) \\ &\quad + \theta_c \langle \text{grad } r, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle \langle \text{grad } r, \eta \rangle (p) \\ &\quad + 2\theta_c \langle \text{grad } r, e_i \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, \eta \rangle (p) \\ &\quad + S_c \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, \eta \rangle (p). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} X, \eta \rangle &= -c S_c \langle \text{grad } r, \eta \rangle \sum_{i=1}^n \langle \text{grad } r, e_i \rangle^2 \\
&+ \theta_c \langle \text{grad } r, \eta \rangle \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, e_i \rangle \\
&+ \theta_c \langle \text{grad } r, \eta \rangle \sum_{i=1}^n \langle \text{grad } r, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle \\
&+ 2\theta_c \sum_{i=1}^n \langle \text{grad } r, e_i \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, \eta \rangle \\
&+ S_c \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, \eta \rangle.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Vamos reescrever cada termo de (2.12) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
-c S_c \langle \text{grad } r, \eta \rangle \sum_{i=1}^n \langle \text{grad } r, e_i \rangle^2 &= -c \langle X, \eta \rangle \sum_{i=1}^n \langle \text{grad } r, e_i \rangle^2 \\
&= -cg \sum_{i=1}^n \langle \langle \text{grad } r, e_i \rangle e_i, \langle \text{grad } r, e_i \rangle e_i \rangle \\
&= -cg \left| \sum_{i=1}^n \langle \text{grad } r, e_i \rangle e_i \right|^2 \\
&= -cg \left| (\text{grad } r)^T \right|^2,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
\theta_c \langle \text{grad } r, \eta \rangle \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, e_i \rangle &= \theta_c \langle \text{grad } r, \eta \rangle \sum_{i=1}^n \frac{\theta_c}{S_c} (1 - \langle \text{grad } r, e_i \rangle^2) \\
&= \frac{\theta_c^2}{S_c^2} g \sum_{i=1}^n (1 - \langle \text{grad } r, e_i \rangle^2) \\
&= \frac{\theta_c^2}{S_c^2} gn - \frac{\theta_c^2}{S_c^2} g \left| (\text{grad } r)^T \right|^2,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
\theta_c \langle \text{grad } r, \eta \rangle \sum_{i=1}^n \langle \text{grad } r, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle &= \theta_c \langle \text{grad } r, \eta \rangle \left\langle \text{grad } r, \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N \right\rangle \\
&= \theta_c \langle \text{grad } r, \eta \rangle \left\langle \text{grad } r, \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, \eta \rangle \eta \right\rangle \\
&= \theta_c \langle \text{grad } r, \eta \rangle \left\langle \text{grad } r, - \sum_{i=1}^n \langle e_i, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle \eta \right\rangle \\
&= \theta_c \langle \text{grad } r, \eta \rangle \langle \text{grad } r, nH\eta \rangle \\
&= nH\theta_c \langle \text{grad } r, \eta \rangle^2,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \langle \text{grad } r, e_i \rangle \langle \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, \eta \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle \text{grad } r, e_i \rangle \frac{\theta_c}{S_c} (- \langle \text{grad } r, e_i \rangle \langle \text{grad } r, \eta \rangle) \\
&= -\frac{\theta_c}{S_c} \langle \text{grad } r, \eta \rangle \sum_{i=1}^n \langle \text{grad } r, e_i \rangle^2 \\
&= -\frac{\theta_c}{S_c^2} g |(\text{grad } r)^T|^2,
\end{aligned} \tag{2.16}$$

onde $(\text{grad } r)^T$ indica a projeção de $\text{grad } r$ em TM .

Usaremos (2.8) para reescrever o último termo de (2.12), isto é,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, \eta \rangle &= \sum_{i=1}^n (e_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, \eta \rangle - \langle \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle) \\
&= \sum_{i=1}^n e_i \left(-\frac{\theta_c}{S_c} \langle \text{grad } r, e_i \rangle \langle \text{grad } r, \eta \rangle \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\theta_c}{S_c} \langle \text{grad } r, e_i \rangle \langle \text{grad } r, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle + nH \frac{\theta_c}{S_c}.
\end{aligned}$$

Como $\theta_c^2 + cS_c^2 = 1$ e $|\text{grad } r| = 1$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \text{grad } r, \eta \rangle (p) &= \frac{1}{s_c^2} \langle \text{grad } r, \eta \rangle \left| (\text{grad } r)^T \right|^2 \\
&\quad - \frac{\theta_c^2}{S_c^3} \left(n - \left| (\text{grad } r)^T \right|^2 \right) g \\
&\quad - \frac{\theta_c}{S_c} nH \left(1 - \left| (\text{grad } r)^T \right|^2 \right) \\
&\quad + \frac{\theta_c^2}{S_c^3} \left| (\text{grad } r)^T \right|^2 g + nH \frac{\theta_c}{S_c}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Substituindo (2.13), (2.14), (2.15), (2.16) e (2.17) em (2.12), vem que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} X, \eta \rangle &= -cg \left| (\text{grad } r)^T \right|^2 - 3 \frac{\theta_c^2}{S_c^2} g \left| (\text{grad } r)^T \right|^2 + n \frac{\theta_c^2}{S_c^2} g \\
&\quad + nH\theta_c \langle \text{grad } r, \eta \rangle^2 + \frac{1}{S_c^2} g \left| (\text{grad } r)^T \right|^2 \\
&\quad - \frac{\theta_c^2}{S_c^2} \left(n - \left| (\text{grad } r)^T \right|^2 \right) g - nH\theta_c \langle \text{grad } r, \eta \rangle^2 \\
&\quad + \frac{\theta_c^2}{S_c^2} \left| (\text{grad } r)^T \right|^2 g + nH\theta_c,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} X, \eta \rangle = \frac{-cS_c^2 - \theta_c^2}{S_c^2} \left| (\text{grad } r)^T \right|^2 g + \frac{1}{S_c^2} \left| (\text{grad } r)^T \right|^2 g + nH\theta_c.$$

Então $\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} X, \eta \rangle (p) = nH\theta_c(p)$, pois $\theta_c^2 + cS_c^2 = 1$. $\square$

O próximo resultado será crucial nas demonstrações dos teoremas do capítulo 3.

Proposição 2.4.2. *(Alencar e Frensel, ver [3], p. 4) Sejam M^n uma variedade Riemanniana orientada e $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica com curvatura média constante H . Então*

$$\Delta g = - \|B\|^2 g - nH\theta_c,$$

onde Δ é o Laplaciano em M^n .

Demonstração. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial geodésico em $p \in M^n$. Vimos que o Laplaciano de uma função f neste referencial é dado por

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^n e_i e_i f(p).$$

Logo, a função suporte $g = \langle X, \eta \rangle$ satisfaz

$$\begin{aligned} \Delta g(p) &= \sum_{i=1}^n e_i e_i \langle X, \eta \rangle (p) = \sum_{i=1}^n e_i (\langle \bar{\nabla}_{e_i} X, \eta \rangle + \langle X, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle) (p) \\ &= \sum_{i=1}^n (\langle \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} X, \eta \rangle + 2 \langle \bar{\nabla}_{e_i} X, \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle + \langle X, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} \eta \rangle) (p). \end{aligned}$$

Usando os Lemas 2.4.1, 2.4.2 e 2.4.3, temos que

$$\Delta g(p) = (nH\theta_c - 2nH\theta_c - \|B\|^2 g) (p) = -\|B\|^2 g(p) - nH\theta_c(p).$$

□

O caso em que $c = 0$ da proposição acima já tinha sido provado, ver, por exemplo, [4] p. 348.

2.5 A Fórmula de Minkowski da Função Suporte

A seguinte proposição é uma generalização da igualdade de Minkowski em $\mathbb{R}^{n+1}$, $c = 0$ e $\theta_c = 1$.

Proposição 2.5.1. (*Heintze, ver [11], p. 397*) *Seja M^n uma variedade Riemanniana compacta e seja $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica. Então*

$$\int_M H g dA = - \int_M \theta_c dA, \quad (2.18)$$

onde H é a curvatura média de x .

Demonstração. Sejam X o vetor posição com origem em p_0 e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial geodésico em $p \in M^n$. Denotemos por X^T e X^N as componentes tangente e normal, respectivamente, do vetor X .

Assim,

$$\begin{aligned}
\langle X^N, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle &= \langle X - X^T, (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^T + (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N \rangle \\
&= \langle X - X^T, (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N \rangle \\
&= \langle X, (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N \rangle - \langle X^T, (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N \rangle \\
&= \langle X, (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N \rangle.
\end{aligned}$$

Visto que $\langle X^N, e_i \rangle = 0$, obtemos

$$\langle \bar{\nabla}_{e_i} X^N, e_i \rangle = -\langle X^N, \bar{\nabla}_{e_i} e_i \rangle = -\langle X, (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N \rangle.$$

Dessa forma, o divergente do campo X^T é dado por

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X^T &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} X^T, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} X, e_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} X^N, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} X, e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle X, (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N \rangle.
\end{aligned}$$

Mostraremos que $\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} X, e_i \rangle = n\theta_c$ e $\sum_{i=1}^n \langle X, (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N \rangle = nHg$. De fato, usando (2.8) obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} X, e_i \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} (S_c \operatorname{grad} r(p)), e_i \rangle \\
&= \theta_c \sum_{i=1}^n \langle \operatorname{grad} r(p), e_i \rangle^2 + S_c \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \operatorname{grad} r(p), e_i \rangle \\
&= \theta_c \sum_{i=1}^n \langle \operatorname{grad} r(p), e_i \rangle^2 + \theta_c \sum_{i=1}^n (1 - \langle \operatorname{grad} r(p), e_i \rangle^2) \\
&= n\theta_c.
\end{aligned}$$

Como $\sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i, \eta \rangle \eta = nH\eta$, segue-se que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \left\langle X, (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N \right\rangle &= \left\langle X, \sum_{i=1}^n (\bar{\nabla}_{e_i} e_i)^N \right\rangle = \langle X, nH\eta \rangle \\
&= nH \langle X, \eta \rangle = nHg.
\end{aligned}$$

Portanto, o divergente da componente tangente de X é dado por

$$\operatorname{div} X^T = n\theta_c + nHg.$$

Usando o Teorema de Stokes e o fato de M^n ser uma variedade compacta sem bordo, obtemos

$$\int_M Hg dA = - \int_M \theta_c dA.$$

□

Observação 2.5.1. *Na verdade Heintze (ver [11], p. 397) prova esta proposição para imersões cujos espaços ambientes possuem curvaturas seccionais limitadas superiormente por uma constante. Neste caso, o resultado obtido é uma desigualdade tipo Minkowski.*

Capítulo 3

Hipersuperfícies cujas Geodésicas Tangentes omitem um Conjunto Não-Vazio

Sejam M^n uma variedade diferenciável e $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica. Para todo ponto $p \in M^n$, seja $(\mathcal{Q}_c^n)_p$ a hipersuperfície totalmente geodésica de $\mathcal{Q}_c^{n+1}$ tangente a $x(M^n)$ em $x(p)$.

Denotemos por

$$W = \mathcal{Q}_c^{n+1} - \bigcup_{p \in M} (\mathcal{Q}_c^n)_p$$

o conjunto dos pontos omitidos pelas hipersuperfícies totalmente geodésicas tangentes a $x(M^n)$.

Exemplo 3.0.1. Hiperbolóide de uma folha em $\mathbb{R}^3$.

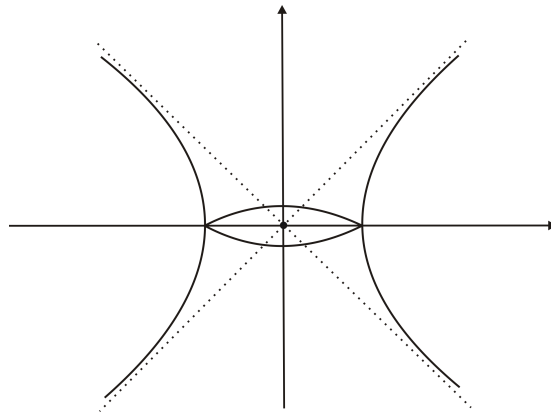


Figura 3.1: $W = \{0\}$.

Exemplo 3.0.2. Esfera unitária em $\mathbb{R}^3$.

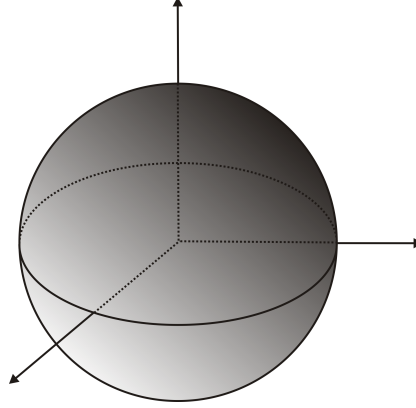


Figura 3.2: $W = \{p \in \mathbb{R}^3; \|p\| < 1\}$.

Neste capítulo, estudaremos as imersões para as quais o conjunto W é não-vazio. Analisaremos separadamente as hipersuperfícies completas não-compactas e as hipersuperfícies compactas.

3.1 Hipersuperfícies Completas

Nesta seção estabeleceremos resultados que caracterizam as hipersuperfícies completas cujo W é aberto e não-vazio. Além disso, apresentaremos uma relação entre W e a estabilidade de uma imersão mínima. Os resultados desta seção foram obtidos por Hilário Alencar e Kátia Frensel, ver [3].

Teorema 3.1.1. (Alencar e Frensel, ver [3], p. 6) *Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa e $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica mínima. Se o conjunto W é aberto e não-vazio, então x é totalmente geodésica.*

Demonstração. Dado $p_0 \in W$, seja X o vetor posição com origem em p_0 . Como W é não-vazio, existe $p_0 \in W$ tal que

$$g(p) = \langle X(p), \eta(p) \rangle \neq 0$$

para qualquer $p \in M$.

Seja $d = \inf \{g(p); p \in M\}$. Suponhamos que este ínfimo é atingido, isto é, existe um ponto $p \in M$ tal que $g(p) = d$. Usando a Proposição 2.4.1 com $H = 0$, segue-se que

$$\Delta g + \|B\|^2 g = 0. \tag{3.1}$$

Portanto, usando o *Princípio do Máximo*, ver [8], p. 6, vemos que g é constante e igual a d . Logo $\|B\| \equiv 0$, isto é, x é totalmente geodésica.

Para concluirmos a demonstração, basta provarmos que existe um ponto $p \in M$ tal que $g(p) = d$. Para isto, consideremos uma seqüência de pontos $\{p_k\}_{k>0}$ em M tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(p_k) = d.$$

Trataremos separadamente os casos em que $c = 0$, $c > 0$ e $c < 0$ e, além disso, vamos admitir, sem perda de generalidade, que $c = 1$ e $c = -1$ quando, respectivamente, $c > 0$ e $c < 0$.

(i) Suponhamos que $c = 0$.

Para cada ponto p_k em M , consideremos o ponto q_k , interseção de $T_{p_k}M$ com a reta perpendicular a $T_{p_k}M$ que passa por $p_0 \in W$.

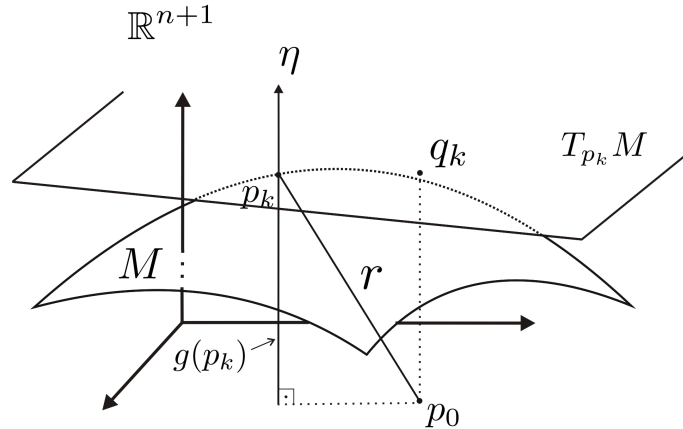


Figura 3.3: Caso $c = 0$.

Como $d(q_k, p_0) = g(p_k)$, ver seção 1 do capítulo 2, é uma seqüência limitada, então $\{q_k\}$ também é limitada. Por Bolzano-Weierstrass, $\{q_k\}$ possui uma subsequência $\{q_{k_j}\}$ que converge para algum $q \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Visto que q é o limite de uma seqüência $\{q_{k_j}\}$ em $T_{p_k}M$ e $\bigcup_{p \in M} T_pM$ é fechado em $\mathbb{R}^{n+1}$, pois $W = \mathbb{R}^{n+1} - \bigcup_{p \in M} T_pM$ é aberto, segue-se que $q \in T_pM$, para algum ponto $p \in M$.

Como $d(p_0, q) = d$ e $d \leq d(p_0, T_pM) \leq d(p_0, q) = d$, então

$$g(p) = d(p_0, T_pM) = d.$$

(ii) Agora vamos provar o teorema para o caso em que $c = 1$.

Para cada ponto $p_k \in M$, seja s_k a projeção ortogonal de p_0 ao hiperplano de $\mathbb{R}^{n+2}$ que contém $(\mathcal{Q}_1^n)_{p_k}$ e seja q_k a interseção de $(\mathcal{Q}_1^n)_{p_k}$ com a reta que passa pela origem e pelo ponto s_k .

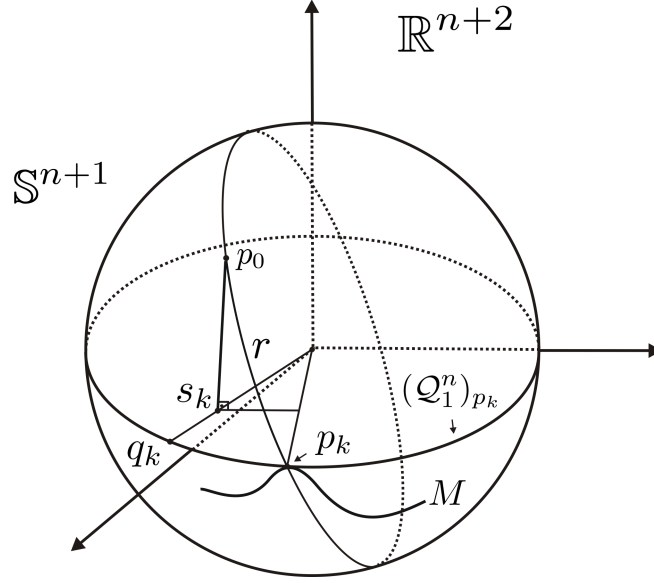


Figura 3.4: Caso $c = 1$.

Para todo k ,

$$q_k \in \mathcal{Q}_c^{n+1} = \mathbb{S}^{n+1} \text{ e } s_k \in \mathbb{B}^{n+2} = \{p \in \mathbb{R}^{n+2}; \|p\| < 1\}.$$

Logo, existe uma subsequência $\{k_j\}$ tal que $\{q_{k_j}\}$ converge para um ponto $q \in \mathbb{S}^{n+1}$ e $\{s_{k_j}\}$ converge para um ponto $s \in \overline{\mathbb{B}^{n+2}}$.

Temos que $\bigcup_{p \in M} (\mathcal{Q}_1^n)_p$ é fechado em $\mathbb{S}^{n+1}$, pois W é aberto, então $q \in (\mathcal{Q}_1^n)_p$ para algum $p \in M$. Além disso, como s_k e q_k são colineares para todo k , segue-se que s e q são colineares. Logo, s pertence ao hiperplano L_p de $\mathbb{R}^{n+2}$ que contém $(\mathcal{Q}_1^n)_p$.

Como $g(p_k) = d(s_k, p_0)$ e

$$d \leq g(p) = d(p_0, L_p) \leq d(p_0, s) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(s_k, p_0) = d,$$

então $g(p) = d$.

- (iii) Para provarmos o teorema no caso em que $c = -1$, utilizaremos o modelo do hiperbolóide visto no Capítulo 2. Definiremos o ponto s_k de forma análoga ao caso anterior.

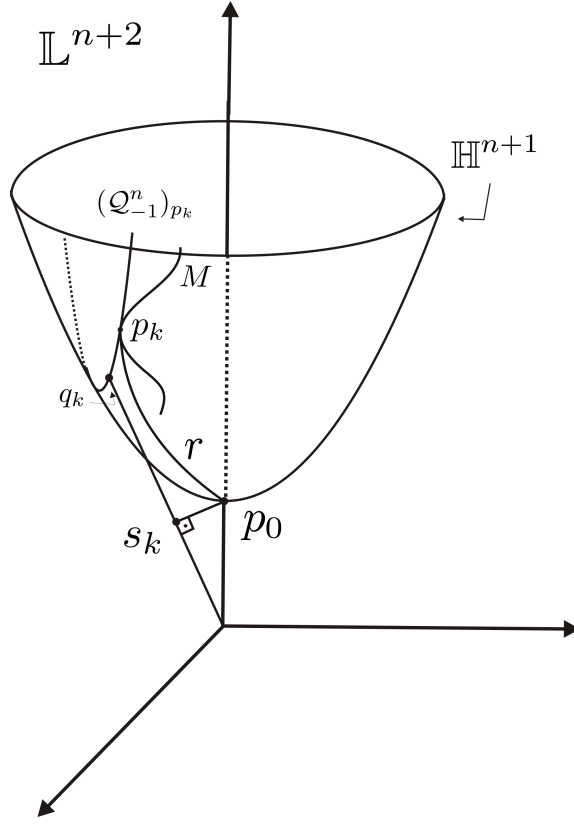


Figura 3.5: Caso $c = -1$.

Usando (2.2), temos que a distância Euclidiana de p_0 ao hiperplano de $\mathbb{R}^{n+2}$ que passa pela origem e contém $(\mathcal{Q}_{-1}^n)_{p_k}$ é dada por

$$\|s_k - p_0\| = \frac{g(p_k)}{\sqrt{1 + 2g(p_k)^2}},$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana.

Afirmção 3.1. $\langle\langle s_k, s_k \rangle\rangle < 0$, onde $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ é o produto interno de Lorentz.

Demonstração. Com efeito, suponhamos que $\langle\langle s_k, s_k \rangle\rangle \geq 0$. Escrevemos $s_k = (s_{k_1}, \dots, s_{k_{n+2}})$.

Assim, $s_{k_1}^2 + \dots + s_{k_{n+1}}^2 - s_{k_{n+2}}^2 \geq 0$. Logo,

$$s_{k_1}^2 + \dots + s_{k_{n+1}}^2 \geq s_{k_{n+2}}^2. \quad (3.2)$$

Como s_k e $s_k - p_0$ são perpendiculares, temos que

$$\langle s_k, s_k - p_0 \rangle = 0.$$

Daí,

$$\langle s_k, s_k \rangle = \langle s_k, p_0 \rangle = (s_{k_1}, \dots, s_{k_{n+2}}) \cdot (0, \dots, 0, 1) = s_{k_{n+2}}.$$

Portanto, usando (3.2), vem que

$$s_{k_{n+2}} = \langle s_k, s_k \rangle = s_{k_1}^2 + \dots + s_{k_{n+1}}^2 + s_{k_{n+2}}^2 \geq 2s_{k_{n+2}}^2,$$

ou seja,

$$s_{k_{n+2}} \leq \frac{1}{2}.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \|s_k - p_0\|^2 &= \langle s_k - p_0, s_k - p_0 \rangle \\ &= \langle s_k, s_k - p_0 \rangle - \langle p_0, s_k - p_0 \rangle \\ &= -\langle p_0, s_k \rangle + \langle p_0, p_0 \rangle \\ &= -s_{k_{n+2}} + 1 \\ &\geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Logo, $\frac{g(p_k)^2}{1 + 2g(p_k)^2} \geq \frac{1}{2}$. Isto contradiz o fato de $\frac{g(p_k)^2}{1 + 2g(p_k)^2} < \frac{1}{2}$, para qualquer $g(p_k)$. E a igualdade só seria válida se, e somente se, $g(p_k) \equiv 0$. Logo, $\langle \langle s_k, s_k \rangle \rangle < 0$. $\square$

Seja $\lambda_k > 0$ tal que

$$\lambda_k^2 \langle \langle s_k, s_k \rangle \rangle = -1$$

e seja $q_k = \lambda_k s_k$ a interseção de $(\mathcal{Q}_{-1}^n)_{p_k}$ com a reta que passa pela origem e por s_k .

Temos que $\{s_k\}_{k \geq 0}$ é uma seqüência limitada. Passando a uma subseqüência se necessário, existe um ponto s tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = s.$$

Podemos provar, como acima, que $\langle \langle s, s \rangle \rangle < 0$, pois s e $s - p_0$ são perpendiculares e $\|s - p_0\|^2 = \frac{d^2}{1 + 2d^2}$.

Como a seqüência $\left\{ -\frac{1}{\langle \langle s_k, s_k \rangle \rangle} \right\}_{k \geq 0}$ é limitada inferiormente por uma constante positiva e $\|q_k\|^2 = -\frac{\|s_k\|^2}{\langle \langle s_k, s_k \rangle \rangle}$, vemos que a seqüência $\{q_k\}_{k \geq 0}$ é limitada.

Seja $\{q_{k_j}\}_{k_j}$ uma subsequência que converge para um ponto $q \in \mathbb{H}^{n+1}$. Como $\cup_{p \in M} (\mathcal{Q}_{-1}^n)_p$ é fechado, pois seu complementar W é aberto, e $q_k \in (\mathcal{Q}_{-1}^n)_{p_k}$, para todo k , temos que $q \in (\mathcal{Q}_{-1}^n)_p$, para algum $p \in M$. Além disso, como s e q são colineares, segue que s pertence ao hiperplano L_p de $\mathbb{R}^{n+2}$ que contém $(\mathcal{Q}_{-1}^n)_p$.

Logo, $g(p) = d$. De fato,

$$\frac{g(p)}{\sqrt{1 + 2g(p)^2}} = d(p_0, L_p) \leq \|s - p_0\| = \frac{d}{1 + 2d^2},$$

onde $d(p_0, L_p)$ é a distância Euclidiana de p_0 a L_p . $\square$

Quando o conjunto W é não-vazio e não possui a condição de ser aberto, obtemos o seguinte resultado para os casos em que $c \leq 0$.

Proposição 3.1.1. *(Alencar e Frensel, ver [3], p. 8) Seja M^n uma variedade Riemanniana completa e seja $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$, $c \leq 0$, uma imersão isométrica mínima. Se W é não-vazio, então x é estável.*

Demonstração. Sejam $p_0 \in W$ e X o vetor posição com origem em p_0 . Como $p_0 \in W$, podemos escolher uma orientação η em M de modo que a função suporte $g = \langle X, \eta \rangle$ seja positiva.

Como x é mínima, usando a Proposição 2.4.1, temos que

$$\Delta g + \|B\|^2 g = 0.$$

Em [7], Teorema 1, Fischer Colbrie e Schoen provaram que um operador do tipo $\Delta + q$, onde $q : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, é positivo definido se, e só se, existe uma função diferenciável positiva $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Delta f + qf = 0$. Como $g = \langle X, \eta \rangle$ é positiva e $\Delta g + \|B\|^2 g = 0$, o operador $\Delta + \|B\|^2$ é positivo definido, isto é,

$$\int_M (-f\Delta f - \|B\|^2 f^2) dA = \langle -(\Delta + \|B\|^2) f, f \rangle > 0,$$

para toda função $f : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathbb{R}$.

Então, se $c \leq 0$,

$$\int_M (-f\Delta f - (nc + \|B\|^2) f^2) dA > 0,$$

para toda função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de suporte compacto não-nula em M^n .

Como a curvatura de Ricci de $\mathcal{Q}_c^{n+1}$ é nc , obtemos que

$$\int_M (-f\Delta f - (Ric(\eta) + \|B\|^2) f^2) dA > 0.$$

Usando a Proposição 1.2.2, temos que x é estável. $\square$

Observação 3.1.1. A proposição acima não vale para $c > 0$. Hasanis e Koutroufiotis provaram em [10], Corolário 2, que se M^2 é uma superfície completa e $x : M^2 \rightarrow \mathbb{S}^3$ é uma imersão isométrica mínima com W não-vazio, então x é totalmente geodésica e x é um mergulho. Em particular, M^2 é compacta e x não é estável.

Observação 3.1.2. Em [9], p. 57, J. Gomes deu exemplos de hipersuperfícies mínimas estáveis em $\mathcal{Q}_c^{n+1}$, $c < 0$, que não são totalmente geodésicas. Para estas hipersuperfícies, W é vazio. Logo, a recíproca da proposição acima não é válida.

3.2 Hipersuperfícies Compactas

O próximo resultado, sobre imersões mínimas em $\mathbb{S}^{n+1}$, foi obtido por Pogorelov, ver [13]. Daremos uma demonstração diferente da prova original, usando as técnicas de Alencar e Frensel, ver [3].

Teorema 3.2.1. (*Pogorelov, ver [13]*) *Sejam M^n uma variedade Riemanniana compacta, orientável e $x : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão isométrica mínima. Se W é não-vazio, então x é totalmente geodésica.*

Demonstração. Sejam $p_0 \in W$ e X o vetor posição com origem em p_0 . Logo, usando a Proposição 2.4.1 com $H = 0$ e o Teorema de Stokes para uma hipersuperfície compacta sem bordo, obtemos

$$0 = \int_M \Delta g dA = - \int_M \|B\|^2 g dA.$$

Agora como W é não-vazio, existe $p_0 \in W$ tal que

$$g(p) = \langle X(p), \eta(p) \rangle \neq 0$$

para qualquer $p \in M$. Então temos que $\|B\| \equiv 0$, ou seja, x é totalmente geodésica. $\square$

Alencar e Frensel provaram que nas condições do Teorema 3.2.1 com H diferente de zero obtemos que M^n é isométrica a uma esfera geodésica.

Para provarmos este resultado, precisaremos do seguinte:

Lema 3.2.1. (*Fórmula de Newton*) *Sejam $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear e $A = (a_{ij})_{n \times n}$ sua matriz associada a um par de bases qualquer de $\mathbb{R}^n$. Então*

$$\|A\|^2(p) \geq \frac{1}{n} (tr A)^2.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $A = \alpha I$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demonstração. É claro que

$$\|A\|^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \geq \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_{ii} \right)^2 = \frac{1}{n} (\text{tr} A)^2.$$

Além disso, a igualdade na primeira desigualdade ocorre se, e somente se, $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$. Na segunda desigualdade, desigualdade entre as médias aritmética e quadrática, obtém-se a igualdade se, e somente se, $a_{11} = \dots = a_{nn}$. $\square$

Teorema 3.2.2. (Alencar e Frensel, ver [3], p. 11) *Sejam M^n uma variedade Riemanniana compacta, orientável e $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica com curvatura média constante não-nula H . Então W é não-vazio se, e somente se, x é umbílica, isto é, $x(M^n)$ é uma esfera geodésica em $\mathcal{Q}_c^{n+1}$.*

Demonstração. Sejam $p_0 \in W$ e X o vetor posição com origem em p_0 . Como W é não-vazio, existe $p_0 \in W$ tal que

$$g(p) = \langle X(p), \eta(p) \rangle \neq 0$$

para qualquer $p \in M$.

Assim, usando a Proposição 2.4.2 e o Teorema de Stokes para uma hipersuperfície compacta sem bordo, obtemos

$$0 = \int_M \Delta g dA = - \int_M (\|B\|^2 g + nH\theta_c) dA.$$

Logo, $\int_M \|B\|^2 g dA = - \int_M nH\theta_c dA$. Mas, por (2.18), temos que

$$\int_M \|B\|^2 g dA = - \int_M nH\theta_c dA = \int_M nH^2 g dA,$$

isto é,

$$\int_M (\|B\|^2 - nH^2) g dA = 0.$$

Usando o Lema 3.2.1 e o fato de g ser não-nula, temos que $\|B\|^2 = nH^2$, ou seja, a imersão x é umbílica.

Se $x(M^n)$ é uma esfera geodésica em $\mathcal{Q}_c^{n+1}$, então é claro que W é não-vazio. $\square$

Observação 3.2.1. São conhecidos exemplos de toros não mergulhados em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante, ver Wente [15], e de imersões $x : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$, $c \leq 0$, com curvatura média constante não umbílicas, ver Gomes [9] e Hsiang [12]. Em todos estes exemplos o conjunto W é vazio.

Em [5], Barbosa, do Carmo e Eschenburg provaram o seguinte resultado:

Sejam M^n uma variedade Riemanniana compacta, orientável e $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica com curvatura média constante não-nula. Então x é estável se, e só se, x é umbílica.

Como consequência deste resultado, obtemos o seguinte corolário do Teorema 3.2.2:

Corolário 3.2.1. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana compacta, orientável e $x : M^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica com curvatura média constante não-nula. Então W é não-vazio se, e somente se, x é estável.*

Referências Bibliográficas

- [1] Alencar, H. *Hipersuperfícies Mínimas de $\mathbb{R}^{2m}$ invariantes*. Tese de Doutorado (IMPA), 1988.
- [2] Alencar, H. e Batista, M. *Hypersurfaces with higher order mean curvature vanishes*. Preprint, (2010).
- [3] Alencar, H. e Frensel, K. *Hypersurfaces whose tangent geodesic omit a nonempty set*. Differential Geometry-A Symposium in Honour of Manfredo do Carmo. Logman Scientific & Technical, New York, p. 1-13, 1991.
- [4] Barbosa, J. L. e do Carmo, M. P. *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature*. Mathematische Zeitschrift, v. 185, p. 339-353, 1984.
- [5] Barbosa, J. L.; do Carmo, M. P. e Eschenburg, J. *Stability of hypersurfaces of Riemannian manifolds with constant mean curvature*. Mathematische Zeitschrift, v. 197, p. 123-138, 1988.
- [6] do Carmo, M. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides, 4ª Edição, IMPA, Rio de Janeiro, 2008.
- [7] Fischer Colbrie, D. e Schoen, R. *The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of non-negative scalar curvature*. Communications on Pure and Applied Mathematics, v. 33, p. 199-211, 1980.
- [8] Frensel, K. *O Princípio da Tangência e Aplicações*. Dissertação de Mestrado (IMPA), 1983.
- [9] Gomes, J. M. *Sobre hipersuperfícies com curvatura média constante no espaço hiperbólico*. Tese de Doutorado (IMPA), 1984.
- [10] Hasanis, T. e Koutroufiotis, D. *A property of complete minimal surfaces*. Transaction of the American Mathematical Society, v. 281, p. 833-843, 1984.

- [11] Heintze, E. *Extrinsic upper bounds for λ_1* . Mathematische Annalen, v. 280, p. 389-402, 1988.
- [12] Hsiang, W. Y.; Teng, Z. H. e Yu, W. C. *New examples of constant mean curvature immersions of $(2k-1)$ -spheres into Euclidean $2k$ -space*. Annals of Mathematics, v. 117, p. 609-625, 1983.
- [13] Pogorelov, A.V. *On minimal hypersurfaces in spherical space*. Soviet Mathematics Doklady, v. 13, p. 291-292, 1972.
- [14] Ratcliffe, J. G. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics 149, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [15] Wente, H. C. *Counterexample to a conjecture of H. Hopf*. Pacific Journal of Mathematics, v. 121, p. 193-243, number 1, 1986.

Índice Remissivo

- Aplicação exponencial, 12
- Campo de vetores, 8, 9
 - paralelos, 11
- Colchete, 10
- Conexão
 - afim, 10
 - compatível com a métrica, 11
 - de Levi-Civita, 11
 - Riemanniana, 11
 - simétrica, 10
- Curvatura, 15
 - de Ricci, 16
 - escalar, 16
 - média, 19
 - seccional, 15
- Curvaturas principais, 19
- Derivada covariante, 10
- Direções principais, 19
- Divergência, 13
- Espaço de Lorentz, 27
- Fórmula
 - de Minkowski, 42
 - de Newton, 52
- Função
 - área, 21
 - suporte, 24
 - volume, 21
- Geodésica, 11
 - minimizante, 12
- Gradiente, 13
- Hipersuperfície, 8
- Imersão, 8
 - estável, 22
 - geodésica, 20
 - isométrica, 10
 - mínima, 20
 - totalmente geodésica, 20
 - umbílica, 20
- Laplaciano, 14
 - da Função Suporte, 32
- Métrica
 - induzida, 10
 - Riemanniana, 9
- Norma da segunda forma fundamental, 19
- Princípio do Máximo, 47
- Produto interno de Lorentz, 27
- Referencial geodésico, 12
- Segunda forma fundamental, 17
- Variação
 - da imersão, 20
 - normal, 21
 - que fixa o bordo, 20
 - que preserva volume, 21
- Variedade
 - completa, 12
 - Riemanniana, 10
- Vetor posição, 23