UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE BACHARELADO EM MATEMÁTICA

VINÍCIUS DA SILVA

Espaços de Dimensão Infinita e Aplicações

Maceió
junho de 2023

VINÍCIUS DA SILVA

Espaços de Dimensão Infinita e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Colegiado do Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharelado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Perdigão de Lemos

Maceió
junho de 2023

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Girlaine da Silva Santos – CRB-4 – 1127

S586e Silva, Vinícius da.
Espaços de dimensão infinita e aplicações / Vinícius da Silva. – 2023.
58 f. : il.

Orientadora: Eduardo Perdigão Lemosa.
Monografia (Trabalho de conclusão de curso em Matemática : Bacharelado) - Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2023.

Bibliografia: f. 58.

1. Espaços Vetoriais Topológicos. 2. Espaço Normando. 3. Teorias das Distribuições. 4. Série de Fourier. I. Título.

CDU: 515.122

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus por tudo, sendo Ele, a base da minha vida.

Agradeço à minha família e à minha namorada, Mísia, por sempre estarem comigo, me apoiarem e ajudarem.

Agradeço aos meus amigos de infância, Felipe e Junior, por serem ótimos amigos que são e pela alegria de sempre (Fifa de Domingo).

Agradeço aos meus amigos do instituto, para a vida, Matheus Martins, Diego Chicuta e Robson Stokes, pelos ótimos momentos e conversas sobre variados assuntos, em especial ao Robson, que além de um ótimo amigo, foi um ótimo orientador, me ensinou muito, não só matemática, mas muito sobre filosofia e ciência. Meus sinceros agradecimentos.

Agradeço ao Professor Perdigão, pela orientação e pelos cursos ministrados, dos quais, foram de grande valia para esse pequeno texto.

Agradeço aos professores Rafael Lucena e Guilhermo Maza por estarem na banca e pelas ótimas aulas que tive, os cursos de análise (1 e 2) e lógica, destacando as boas conversas que me incentivaram bastante.

Agradeço aos professores Adelaison Peixoto e Márcio Cavalcante, pelas orientações nos PIBICs e no projeto da OBMEP, além da boa amizade.

Agradeço ao meu ex-professor do ensino médio e amigo, Leon Lima, do qual me ajudou muito no inicio dessa caminhada. Também torcedor do Maior de Alagoas (CSA).

Da A Parte e o Todo, ao Jardim das Aflições à Odiceia.
Filipenses 4:13.

RESUMO

Este Trabalho tem como principal objetivo de abordar os espaços vetoriais de dimensão infinita, com o intuito de apresentar algumas aplicações dos principais resultados e fazer uso para uma introdução à Teoria das Distribuições, uma ferramenta moderna da análise funcional, desenvolvido por Laurent Schwartz, na década de cinquenta. Tal ferramenta, pode ser aplicado na resolução de equações diferenciais e sistemas dinâmicos.

Palavras-chave: Espaços Vetoriais Topológicos. Espaços Normados. Séries de Fourier. Distribuições.

ABSTRACT

This work aims to address infinite-dimensional vector spaces, with the purpose of presenting some applications of the main results and using them for an introduction to the Theory of Distributions, a modern tool of functional analysis developed by Laurent Schwartz in the 1950s. This tool can be applied to solve differential equations and dynamic systems.

Keywords: Topological Vector Spaces. Normed Spaces. Fourier series. Distributions.

SUMÁRIO

1 ESPAÇOS VETORIAIS TOPOLÓGICOS

Muitos problemas que os analistas estudam não dizem respeito principalmente a um único objeto, como uma função, medida ou um operador, mas lidam, em vez disso, com grandes classes de tais objetos. A maioria das classes interessantes que ocorrem dessa maneira são espaços vetoriais, seja com escalares reais ou complexos. Uma vez que os processos de limite desempenham um papel em todos os problemas analíticos (explícita ou implicitamente), não deve ser surpresa que esses espaços vetoriais sejam fornecidos com métricas, ou pelo menos com topologias, que mantêm alguma relação natural com os objetos dos quais os espaços são feitos. A maneira mais simples e importante de fazer isso é introduzir uma norma. Ao longo deste texto, o termo espaço vetorial se referirá a um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ (complexo $\mathbb{C}$ ou real $\mathbb{R}$). Esse pequeno texto introdutório, não cabe para definir todos os conceitos utilizados, fizemos apenas os essenciais para o texto, para mais definições e resultados, recomendamos as bibliografia mencionada no fim desse capítulo.

1.1 Definição

Definição 1.1. Uma métrica em um conjunto X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tendo as seguintes propriedades:
(i) $d(x,y) \geq 0$ para todos $x,y \in X$, a igualdade é válida se, e somente se, $x = y$.
(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ para todos $x,y \in X$.
(ii) (Desigualdade triangular) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, para todos $x,y,z \in X$.

O par (X,d), onde X é um conjunto para o qual uma métrica d foi definida, é chamado de **espaço métrico.** Quando não houver duvida sobre a métrica, denota-se apenas X para esse espaço.

Definição 1.2. Uma topologia em um conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:
(i) $\emptyset$ e X estão em τ.
(ii) A união dos elementos de qualquer subcoleção de τ está em τ.
(iii) A intersecção dos elementos de qualquer subcoleção finita de τ está em τ.

O par (X,τ), onde X é um conjunto para o qual uma topologia τ foi definida, é chamado de **espaço topológico.** Quando não houver duvida sobre a topologia, denota-se apenas X para esse espaço.

Definição 1.3. Seja τ uma topologia em um espaço vetorial X sobre o corpo $\mathbb{F}$, tal que:
(i) todo ponto de X é um conjunto fechado, e
(ii) as operações $+ : X \times X \to X$ e $\cdot : \mathbb{F} \times X \to X$ no espaço vetorial são contínuas em relação a τ.
Sob essas condições, τ é dito ser uma **topologia vetorial** em X, e X é um **espaço vetorial topológico**.

Exemplo 1.1. Os espaços $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{R}^n$ com a topologia usual, são exemplos de espaços vetoriais topológicos com as definições de soma e produto por escalar naturais.

Quando uma topologia é gerada apartir de uma métrica, diz-se que essa é proveniente da métrica ou a topologia é induzida pela métrica. No exeplo acima, $\mathbb{R}^n$ também é metrico, por exemplo, com a métrica definida no **Exemplo 2.1.**

1.2 Invariancia

Definição 1.4. Uma propriedade P é chamada de invariante topológico, quando P é preservada por homeomorfismos.

Seja X um espaço vetorial topológico. Associe a cada $x \in X$ e a cada escalar $\alpha \neq 0$ o operador de translação T_x e o operador de multiplicação M_α, pelas fórmulas

$$T_x(y) = y + x, \quad M_\alpha(x) = \alpha x, \quad (x \in X).$$

Se X é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$, $A, B \subset X$, $x \in X$, e $\lambda \in \mathbb{F}$, serão utilizadas as seguintes notações:

$$\begin{aligned} x + A &= \{x + a : a \in A\} \\ x - A &= \{x - a : a \in A\} \\ A + B &= \{a + b : a \in A,\ b \in B\} \\ \lambda A &= \{\lambda a : a \in A\}. \end{aligned}$$

Em particular, quando $\lambda = -1$, temos que $-A$ denota o conjunto de todos os inversos adtivos de A.

Definição 1.5. Uma aplicação m em um espaço vetorial topológico X é chamada de translação-invariante, quando para todo $x \in X$ e $E \subset X$, tem-se $m(E + x) = m(E)$.

A seguinte proposição embora seja simples, é de grande relevância.

Proposição 1.1. *T_x e M_α são homeomorfismos de X sobre X.*

Uma consequência dessa proposição é que toda topologia vetorial τ é translação-invariante (ou simplesmente invariante, para abreviar).

Definição 1.6. (Base Local): Uma base local de um espaço vetorial topológico X, é uma coleção $\mathscr{B}$ de vizinhanças de 0 tal que toda vizinhança de 0 contém um membro de $\mathscr{B}$.

Definição 1.7. (Conjunto Aberto): Um conjunto $E \subset X$ é aberto se, e somente se, cada uma de suas translações $x + E$ for aberta. Assim, τ é completamente determinado por qualquer base local. No contexto do espaço vetorial, o termo *base local* sempre significará uma base local em 0.

Os conjuntos abertos de X, são então precisamente aqueles que são uniões de translações de membros de $\mathscr{B}$.

Uma métrica d em um espaço vetorial X será chamada invariante, quando

$$d(x+z,y+z) = d(x,y) \ \text{ para todos } \ x,y,z \in X.$$

Definição 1.8. (Localmente Convexo): Espaço localmente convexo é um espaço vectorial topológico que admite uma base local formada por conjuntos convexos (item (a) abaixo).

Definição 1.9. (Espaço de Fréchet): Um espaço vetorial topológico X é chamado de espaço de Fréchet, quando for ao mesmo tempo:
(i) localmente convexo;
(ii) metrizável;
(iii) completo.

Vejamos alguns tipos de espaços vetoriais topológicos. Nos exemplos a seguir, X sempre denota um espaço vetorial topológico, com topologia τ.
(a) X é localmente convexo, quando existe uma base local $\mathscr{B}$ cujos membros são convexos.
(b) X é localmente limitado, quando 0 tem uma vizinhança limitada.
(c) X é localmente compacto, quando 0 possui uma vizinhança cujo fecho é compacto.
(d) X é metrizável, se τ é compatível com alguma métrica d.
(e) X é um F-espaço, se sua topologia τ é induzida por uma métrica invariante completa d.
(f) X é um espaço de Fréchet, quando X é um F-espaço localmente convexo.
(g) X é normal, se existe uma norma em X tal que a métrica induzida pela norma é compatível com τ.
(h) X tem a propriedade de Heine-Borel, se todo subconjunto fechado e limitado de X é compacto.

Aqui está uma lista de algumas relações entre essas propriedades de um espaço vetorial topológico X.
(a) Se X é localmente limitado, então X tem uma base local enumerável.
(b) X é metrizável se, e somente se, X tem uma base local enumerável.
(c) X é normal se, e somente se, X é localmente convexo e localmente limitado.
(d) X tem dimensão finita se, e somente se, X é localmente compacto.
(e) Se um espaço localmente limitado X tem o propriedade Heine-Borel, então X tem dimensão finita.

Seja C_K^∞, o espaço de todas as funções complexas infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$ que é zero fora de algum conjunto compacto fixo K, com interior não vazio.

O espaço C_K^∞ mencionado acima, é um espaço de Fréchet de dimensão infinita com propriedade Heine-Borel. Ele não é, portanto, limitados localmente e, logo, não é normável; ele também mostra que a recíproca de (a) é falsa. Por outro lado, existem F-espaços localmente limitados que não são localmente convexo.

1.3 Transformação Lineares

Sejam V e W espaços vetoriais sobre o mesmo corpo escalar $\mathbb{F}$. Uma aplicação (ou mapa) $T : V \to W$ é dita linear, quando

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty,$$

para todo x e y em X e todos os escalares α e β em $\mathbb{F}$. Observe que geralmente se escreve Tx, em vez de $T(x)$, quando T é linear. Transformações lineares de X em seu corpo escalar são chamados de **funcionais lineares**. Por exemplo, os operadores de multiplicação M_α são lineares, mas os operadores de translação T_x não são, exceto quando $x = 0$.

Teorema 1.1. *Sejam X e Y espaços vetoriais topológicos. Se $T : X \to Y$ é linear e contínua em 0, então T é contínua. De fato, T é uniformemente contínua, no seguinte sentido: A cada vizinhança W de 0 em Y corresponde uma vizinhança V de 0 em X tal que $y - x \in V$ implica $Ty - Tx \in W$.*

Demonstração. Uma vez que W é escolhido, a continuidade de T em 0 mostra que $T(V) \subset W$ para alguma vizinhança V de 0. Se agora $y - x \in V$, a linearidade de T mostra que $Ty - Tx = T(y - x) \in W$. Assim, T transforma (mapeia) a vizinhança $x + V$ de x na vizinhança pré-atribuída $Tx + W$ de Tx, que diz que T é contínua em x. **Q.E.D.**

Definição 1.10. Um conjunto $A \subset X$ é dito balanceado, quando $\{cx : x \in A \quad \text{e} \quad c \in \mathbb{F}\} \subset A$, para todo $c \in \mathbb{F}$ tal que $|c| \leq 1$.

Teorema 1.2. *Seja T um funcional linear em um espaço vetorial topológico X. Assuma $T(x) \neq 0$ para algum $x \in X$. Então, cada uma das quatro propriedades a seguir, implica as outras três:*
(a) *T é contínua.*
(b) *O espaço nulo (núcleo de T) $\ker(T)$ é fechado.*
(c) *$\ker(T)$ não é denso em X.*
(d) *T é limitado em alguma vizinhança V de 0.*

Demonstração. Como $\ker(T) = T^{-1}(\{0\})$ e $\{0\}$ é um subconjunto fechado do corpo escalar $\mathbb{F}$, (a) implica (b). Por hipótese, $\ker(T) \neq X$. Portanto, (b) implica (c). Assuma que detém (c); ou seja, suponha que o complemento de $\ker(T)$ tenha interior não vazio. Logo,

$$(x + V) \cap \ker(T) = \emptyset \tag{1}$$

para algum $x \in X$ e alguma vizinhança balanceada V de 0. Então $T(V)$ é um subconjunto balanceado do corpo $\mathbb{F}$. Assim, ou $T(V)$ é limitada, caso em que (d) vale, ou $T(V) = \mathbb{F}$. No último caso, existe $y \in V$ tal que $T(y) = -T(x)$, e portanto $x + y \in \ker(T)$, em contradição com (1). Assim, (c) implica (d). Finalmente, se (d) vale, então $|T(x)| < k$, para todo x em V e para algum $k < +\infty$. Se $r > 0$ e se $W = (r/k)V$, então $|T(x)| < r$ para cada x em W. Portanto, T é contínua na origem. Pelo Teorema 1.1, isso implica (a). **Q.E.D.**

Teorema 1.3. *Suponha que X e Y sejam espaços vetoriais topológicos e $T : X \to Y$ é linear. Entre as seguintes quatro propriedades de T, valem as implicações* (a) $\to$ (b) $\to$ (c). *Se X é métrico, então também* (c) $\to$ (d) $\to$ (a)*, de modo que todas as quatro propriedades sejam equivalentes.*
(a) *T é contínua.*
(b) *T é limitado.*
(c) *Se $x_n \longrightarrow 0$, então $\{Tx_n : n = 1, 2, \ldots\}$ é limitado.*
(d) *Se $x_n \longrightarrow 0$, então $Tx_n \longrightarrow 0$.*

Demonstração. Suponha (a), seja E um conjunto limitado em X e seja W uma vizinhança de 0 em Y. Como T é contínua (e $T0 = 0$), existe uma vizinhança V de 0 em X tal que $T(V) \subset W$. Como E é limitado, $E \subset tV$ para todo t suficientemente grande, de modo que

$$T(E) \subset T(tV) = tT(V) \subset tW.$$

Isso mostra que $T(E)$ é um conjunto limitado em Y. Assim, (a) $\to$ (b). Como as sequências convergentes são limitadas, (b) $\to$ (c).

Suponha agora que X seja métrico, que T satisfaça (c) e que $x_n \longrightarrow 0$. Pelo Teorema 1.28 de [1], existem escalares positivos $\gamma_n \longrightarrow \infty$ tal que $\gamma_n x_n \longrightarrow 0$. Portanto, $\{T(\gamma_n x_n)\}$ é um conjunto limitado em Y, e agora, por 1.30 de [1], temos que

$$Tx_n = \gamma_n^{-1} T(\gamma_n x_n) \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \longrightarrow 0.$$

Finalmente, suponha que (a) falhe. Então existe uma vizinhança W de 0 em Y tal que $T^{-1}(W)$ não contém nenhuma vizinhança de 0 em X. Se X tem uma base local enumerável, então existe uma sequência (x_n) em X tal que $x_n \longrightarrow 0$ mas $Tx_n \notin W$. Assim (d) falha. **Q.E.D.**

Para mais informações sobre esses temas, consultar [1], [12], [9], [4], [7], [8] e [16].

2 ESPAÇOS NORMADOS

Espaços normados são especiais o suficiente para fornecer uma base para uma teoria rica e interessante, incluindo muitos modelos concretos de importância prática. De fato, boa parte dos espaços vetoriais topológicos, são espaços normados, de modo que um espaço normado é provavelmente o tipo de espaço mais importante na análise funcional, pelo menos do ponto de vista das aplicações atuais. A estrutura resultante (definida abaixo) é chamada de espaço vetorial normado, espaço linear normado ou simplesmente, espaço normado.

Definição 2.1. Seja X um espaço vetorial sobre o corpo ordenado $\mathbb{F}$. Uma norma em X é uma função $l : X \to \mathbb{F}$, que associa a cada vetor $x \in X$ o número $l(x)$, chama-se a norma de x, de modo a serem cumpridas as condições abaixo para quaisquer $x, y \in X$ e $c \in \mathbb{F}$ escalar:
1) $l(x) \geq 0$
2) $l(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
3) $l(cx) = |c| \cdot l(x)$;
4) $l(x+y) \leq l(x) + l(y)$.

Uma notação corriqueira para norma é $\|\ \|$, que substitui a imagem $l(\ )$.

Definição 2.2. Um espaço normado X é um espaço vetorial com uma norma definida nele.

Definição 2.3. Uma topologia que provém de uma norma, isto é, é gerada por ela, é dita ser induzida pela norma.

Exemplo 2.1. $\mathbb{R}^n$ é um espaço normado, com a norma :

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^{1/2}.$$

2.1 Espaços de Banach

Definição 2.4. Uma métrica que provém de uma norma, diz-se que ela é induzida pela mesma.

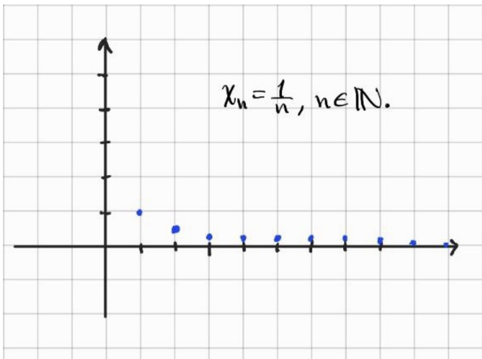
Definição 2.5. Suponha que d seja uma métrica em um conjunto X. Uma sequência (x_n) em X, é uma sequência de Cauchy, quando para todo $\varepsilon > 0$, corresponde um inteiro N tal que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, sempre que $m, n > N$. Se toda sequência de Cauchy em X converge para um ponto de X, então d é dito ser uma métrica completa em X.

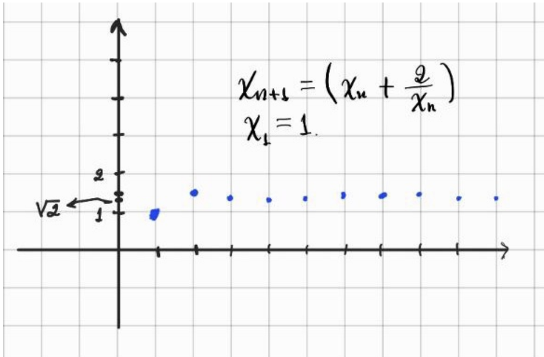
Exemplo 2.2. Vejamos o comportamento de uma sequência convergente (de Cauchy) e uma divergente, mas também sendo de Cauchy.

Em (I), tem-se a sequência de Cauchy (convergente), e em (II), a sequência de Cauchy que não é convergente, para ver isto, tomemos uma sequência de números racionais x_n convergindo para o número irracional $\sqrt{2}$. (Por exemplo, $x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}4$, $x_3 = 1{,}41$, $x_4 = 1{,}414$, com

$\lim x_n = \sqrt{2}$) Sendo convergente em $\mathbb{R}$, como toda sequência convergente também é de Cauchy, segue-se que (x_n) é uma sequência de Cauchy no espaço métrico $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Mas evidentemente (x_n) não é convergente em $\mathbb{Q}$. Logo abaixo, vejamos as imagens.

Figura 2 – Sequência convergente e sequência de Cauchy não convergente em $\mathbb{Q}$.

[I] 

[II] 

Seja τ a topologia de um espaço vetorial topológico X. A noção de sequência de Cauchy pode ser definida neste cenário sem referência a nenhuma métrica. Vejamos como.

Definição 2.6. Fixe uma base local $\mathscr{B}$ para τ. Uma sequência (x_n) em X é então dita ser uma sequência de Cauchy, quando a cada $V \in \mathscr{B}$ (vizinhança V) corresponde um N tal que $x_n - x_m \in V$ se $n,m > N$.

É claro que diferentes bases locais para a mesma τ dão origem à mesma classe de sequências de Cauchy.

Definição 2.7. Um espaço vetorial topológico X é dito ser completo, quando toda sequência de Cauchy (x_n) em X é convergente e X é fechado. Ou seja, toda sequência de Cauchy converge para algum ponto do próprio espaço.

Definição 2.8. (Espaço de Banach): Um espaço vetorial topológico é dito ser de Banach, quando sua topologia é induzida por uma norma $|| \ \ ||$ e ele é completo.

Definição 2.9. Sejam X e Y espaços de Banach. A transformação linear $T : X \to Y$ é limitada quando existe $c \geq 0$ tal que $||Tx||_Y \leq c||x||_X$, para todo $x \in X$

Essa condição é equivalente a

$$\sup_{x \in X; ||x|| \leq 1} ||Tx||_Y \leq c.$$

É verdade que uma aplicação linear entre espaços de Banach é contínua se, e somente se, é limitada (consequência dos dois últimos teoremas do capítulo anterior). Um tipo especial de espaço de Banach é o Espaço de Hilbert, aqueles cuja norma provém de um produto interno, falaremos mais nesses espaços na sessão 2.3. Um resultado interessante nos Espaços de Hilbert é o Teorema da Representação de Riesz, que assegura que todo funcional linear num espaço desse tipo é um produto interno de um de seus fatores fixado. Usaremos esse fato na demonstração do Teorema 6.3.

2.2 Teoremas de Hahn-Banach e Banach-Steinhaus

Dois teoremas clássicos na teoria dos espaços vetoriais topológicos são apresentados a seguir.

Não mostraremos suas provas, mas podemos citar que a prova do primeiro passa pelo Lema de Zorn e a do segundo, pelo Teorema da Categoria de Baire. Ambas as provas podem ser encontradas em [4], [9], [1] ou [15].

Teorema 2.1. *(Categoria de Baire): Todo espaço métrico completo M é de segunda categoria em si mesmo, isto é, M não pode ser escrito como união enumerável de conjuntos nunca densos.*

Definição 2.10. Um funcional $p : X \to \mathbb{R}$ é dito ser sublinear em X, quando
(i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in X$
(ii) $p(\alpha x) = \alpha p(x), \forall \alpha \geq 0$.

Teorema 2.2. *(Hahn-Banach): Seja Y um subespaço do espaço vetorial X. Se p é um funcional sublinear em X e $f : Y \to \mathbb{R}$ é um funcional linear tal que $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in Y$. Então existe $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ linear tal que*

$$-p(-x) \leq \tilde{f}(x) \leq p(x) \quad e \quad \tilde{f}|_Y = f$$

isto é, $\tilde{f}$ estende-se a f.

Na versão de Hahn-Banach para espaços normados, p é a norma. Agora, vamos apresentar o Teorema de Banach-Steinhaus; ele é muito importante neste texto e será usado na demostração do Teorema 6.3.

Definição 2.11. Um subconjunto de um espaço métrico é dito mágro, quando é uma união enumerável de conjuntos com interior do seu fecho vazio.

Teorema 2.3. *(Banach-Steinhaus): Suponhamos que (T_n) seja uma sequência de operadores limitados de X em Y, ambos espaços de Banach. Suponhamos que, para todo $x \in X$, $\lim T_n x$ existe. Então, se definirmos $Tx = \lim T_n x$, temos que $T : X \to Y$ é linear e limitado.*

O Teorema de Banach-Steinhaus juntamente com o Teorema da Cateoria de Baire, que afirma que todo espaço métrico completo não é magro, nos fornece o seguinte corolário:

Corolário 2.3.1. Sejam X e Y espaços normados, X completo e $Z \subset \{T \in \mathscr{L}(X,Y) : T$ é linear e contínua$\}$ com $\sup_{T \in Z} \|Tx\| < +\infty$, para todo $x \in X$. Então, existe $c \geq 0$ tal que $\|T\| \leq c$, para todo $T \in Z$.

Esse corolário é conhecido como Teorema da Continuidade Uniforme. Na verdade, há muitas outras aplicações desse teorema. São exemplos o Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado.

Teorema 2.4. *(Aplicação Aberta): Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$, com T limitada. Se T é sobrejetiva, então T é aberta.*

Teorema 2.5. *(Gráfico Fechado) Se X e Y são espaços de Banach e $T : X \to Y$ é uma aplicação linear, então T é limitada se, e somente se, $G(T)$ (gráfico de T) é fechado em $X \times Y$. Em outras palavras, T é limitado se, e somente se, sempre que (x_n, Tx_n) convergir para (x,y) em $X \times Y$, tivermos $Tx = y$.*

2.3 Espaços de Hilbert

Veremos exemplos de espaços que são de grande relevância para nosso texo, são os chamados Espaços de Hilbert, como veremos a seguir.

Definição 2.12. Seja X um espaço vetorial sobre o corpo ordenado $\mathbb{F}$. Um produto interno em X é uma função $s : X \times X \to \mathbb{F}$ que atribui a cada par ordenado de vetores x, y em X um escalar $s(x,y)$ em $\mathbb{F}$ de tal forma que para todo x, y, z em X e todos os escalares $c, k \in \mathbb{F}$, tem as seguintes propriedades:
(i) $s(x+y,z) = s(x,z) + s(y,z)$;
(ii) $s(cx,ky) = c\bar{k}s(x,y)$;
(iii) $s(x,y) = \overline{s(y,x)}$, a barra está denotando conjugação complexa;
(iv) $s(x,x) > 0$, se for $x \neq 0$.

Uma notação corriqueira para produto interno é $\langle\ ,\ \rangle$ que substitui a imagem $s(\ )$.

Definição 2.13. Uma norma que provém de um produto interno, ou seja, é gerada por ele, é dita ser induzida pelo produto interno.

No exemplo 2.1, a norma é induzida pelo produto interno $\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, para $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definição 2.14. Um espaço vetorial $\mathscr{H}$, sobre o corpo $\mathbb{F}$, juntamente com um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$, tal que relativo à métrica $d(x,y) = \|x-y\|$ induzida pela norma, $\mathscr{H}$ é um espaço métrico completo, com essas condições, é dito ser de Hilbert (Espaço de Hilbert).

Definição 2.15. Dado um conjunto X, uma família de subconjuntos de X, denotada por $\sigma(X)$ é chamada de σ-álgebra quando:
(i) $\emptyset$, X estão em $\sigma(X)$;
(ii) Se E está em $\sigma(X)$, então E^c também está;
(iii) Se (E_i) é uma sequência de conjuntos em $\sigma(X)$, então a união $\bigcup_{i}^{\infty} E_i$ está em $\sigma(X)$.

Sabendo-se o que é uma sigma-álgebra, podemos definir uma medida, objeto matemático muito utilizado nesse texto.

Definição 2.16. Uma medida, é uma função estendida de valor real $\mu : \sigma(X) \to [0,+\infty]$, definida em uma σ-álgebra $\sigma(X)$ de subconjuntos de X tal que:
(i) $\mu(\emptyset) = 0$;
(ii) $\mu(E) > 0$, para todos $E \in \sigma(X)$;
(iii) μ é contávelmente aditivo no sentido de que se (E_i) é uma sequência disjunta qualquer de conjuntos em $\sigma(X)$, então

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Quando falamos em função estendida de valor real, nos referimos que estamos trabalhando com $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, isto é, o conjunto dos números reais estendidos.

Definição 2.17. Seja $1 \leq p < +\infty$, um conjunto X, uma σ-álgebra $\sigma(X)$ e μ uma medida. O espaço $\mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(X, \sigma(X), \mu)$, consiste em todas as classes de μ-equivalência de funções mensuráveis de valor real f em X para as quais $|f|^p$ tem integral finita em relação à μ sobre X. Duas funções são μ-equivalentes se forem iguais q.t.p. Tem-se a norma,

$$\|f\|_{\mathscr{L}^p} = \|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

Permitindo a possibilidade de que $\|f\|_{\mathscr{L}^p} = +\infty$, e definimos

$$\mathscr{L}^p(X, \sigma(X), \mu) = \mathscr{L}^p(X) = \mathscr{L}^p(\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ é mensurável e } \|f\|_{\mathscr{L}^p} < +\infty\}.$$

Os espaços $\mathscr{L}^p$, são espaços de grande relevância em análise, no capítulo 6, faremos uso disso. No caso em que $p = 2$.

Se $\mathscr{H} = \mathscr{L}^2(\mu)$ e $\langle f, g\rangle = \int f\overline{g}d\mu$, então a norma associada é $\|f\| = (\int |f|^2 d\mu)^{1/2}$. É um resultado importante da teoria da medida que $\mathscr{L}^2(\mu)$ é um espaço Hilbert. Também é fácil ver que $\mathbb{F}^d$ é um espaço de Hilbert.

Observação: Os produtos internos definidos em $\mathscr{L}^2(\mu)$ e $\mathbb{F}^d$ (exemplo 2.1, para o caso de ser um corpo ordenado) são os "usuais". Sempre que esses espaços são discutidos, esses são os produtos internos referidos. O mesmo vale para o próximo espaço.

Exemplo 2.3. Seja I um conjunto qualquer e $l^2(I)$ o conjunto de todas as funções $f : I \to \mathbb{F}$ tal que $f(i) = 0$ para todos, exceto um número contável de i e $\left(\sum_{i\in I} |f(i)|^2\right)^{1/2} < +\infty$. Para f e g em $l^2(I)$ definindo

$$\langle f, g\rangle = \sum_i f(i)\overline{g}(i).$$

Então, $l^2(I)$ é um espaço de Hilbert.

Exemplo 2.4. Se $I = \mathbb{N}$, $l^2(I)$ geralmente é denotado por l^2. Observe que se Ω, sendo o conjunto de todos os subconjuntos de I e para E em Ω, $\mu(E) = \infty$ quando E é infinito e $\mu(E) = \#E$ a cardinalidade de E, se E é finito, então nessas condições, $l^2(I)$ e $\mathscr{L}^2(I, \Omega, \mu)$ são iguais.

Demonstração. De fato, sendo I um conjunto enumerável, (infinito enumerável), e a medida, sendo essa medida de contagem em I,

$$\mu(E) = \#E, \text{ para qualquer subconjunto } E \subset I.$$

Em particular, a σ-álgebra de conjuntos μ-mensuráveis é $\mathscr{P}(I) = \Omega(I)$, conjunto das partes de I, e o único conjunto com medida nula é $\emptyset$.

Assim, para $f : I \to \mathbb{C}$ e $E \subset I$, temos

$$\int_E f d\mu = \sum_{x \in E} f(x),$$

quando a soma existe, e até a identificação de uma função com sua classe de equivalência "módulo q.t.p.", temos então

$$\mathscr{L}^2(I) = \left\{ f \in \mathscr{L}(I, \mathbb{C}) : \left(\int_I |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\mu < +\infty \right\} = \left\{ f \in \mathscr{L}(I, \mathbb{C}) : \left(\sum_{x \in I} |f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\} = l^2(I).$$

Qualquer bijeção entre dois conjuntos infinitos enumeráveis preserva a medida para as medidas de contagem nos respectivos conjuntos, então todos esses espaços são isomórficos ao $l^2(\mathbb{N})$. **Q.E.D.**

Nota: Uma função absolutamente contínua no intervalo unitário $[0,1]$ tem uma derivada q.t.p. em $[0,1]$.

Exemplo 2.5. Seja $\mathscr{H}$ a coleção de todas as funções absolutamente contínuas $f : [0,l] \to \mathbb{F}$ tal que $f(0) = 0$ e $f' \in \mathscr{L}^2(0,1)$. Se $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f'(t)\overline{g'(t)}dt$ para f e g em $\mathscr{H}$, então $\mathscr{H}$ é um espaço de Hilbert.

Proposição 2.1. *Se X é um espaço vetorial e $\langle \ , \ \rangle_X$ é um produto interno em X e se $\mathscr{H}$ é o complemento de X em relação à métrica induzida pela norma em X, então existe um produto interno $\langle \ , \ \rangle_{\mathscr{H}}$ em $\mathscr{H}$ tal que $\langle x, y \rangle_{\mathscr{H}} = \langle x, y \rangle_X$ para x e y em X e a métrica em $\mathscr{H}$ é induzida por este produto interno. Ou seja, o complemento de X é um espaço de Hilbert.*

O resultado anterior diz que um espaço com produto interno incompleto pode ser completado para um espaço de Hilbert. Também é verdade que um espaço de Hilbert sobre o conjunto dos números reais pode ser inserido em um espaço de Hilbert complexo.

Para finalizar esta seção, apresentamos um resultado bastante útil para nosso objetivo final. Mas antes, uma desigualdade importante, da qual, necessitaremos para mostrar tal resultado.

Lema 2.1. *(Desigualda de Hölder): Suponha que* $1 < p,q < +\infty$ *são expoentes conjugados. Se* $f \in \mathscr{L}^p(X,\mu)$ *e* $g \in \mathscr{L}^q(X,\mu)$*, então* $fg \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$ *e*

$$\|fg\|_{\mathscr{L}^1} \leq \|f\|_{\mathscr{L}^p}\|g\|_{\mathscr{L}^q}.$$

Teorema 2.6. *(Representação de Riesz): Sejam* $1 < p,q < +\infty$ *com* $1/p + 1/q = 1$ *e* $\phi \in (\mathscr{L}^p(\Omega,\mu))^*$*. Então, existe* $g \in \mathscr{L}^q(\Omega,\mu)$ *tal que*

$$\phi(f) = \int_\Omega gf\, d\mu, \text{ para qualquer } f \in \mathscr{L}^p(\Omega,\mu).$$

Além disso,

$$\|\phi\|_{(\mathscr{L}^p)^*} = \|g\|_{\mathscr{L}^q}.$$

Demonstração. Consideremos o operador $T_g : \mathscr{L}^q(\Omega,\mu) \to (\mathscr{L}^p(\Omega,\mu))^*$ definido por

$$T_g(f) = \int_\Omega gf d\mu.$$

Pela Desigualdade de Hölder,

$$|T_g(f)| \leq \|g\|_{\mathscr{L}^q}\|f\|_{\mathscr{L}^p},$$

o que nos dá $\|T_g\|_{(\mathscr{L}^p)^*} \leq \|g\|_{\mathscr{L}^q}$. Tomando:

$$f = |g|^{q-2}g \text{ em } \mathscr{L}^p, \text{ vemos que } T_g(f/\|f\|_{\mathscr{L}^p}) = \|g\|_{\mathscr{L}^q}.$$

Portanto, T_g é uma isometria, e assim, $\|T_g\|_{(\mathscr{L}^p)^*} = \|g\|_{\mathscr{L}^q}$. Para verificar que T é sobrejetora, seja $\xi \in (\mathscr{L}^p(\Omega,\mu))^{**}$ tal que $\xi(Tg) = 0$ para todo $g \in \mathscr{L}^q(\Omega,\mu)$. Como $(\mathscr{L}^p(\Omega,\mu))^*$ é reflexivo, isto é, seu dual é isomorfo a $\mathscr{L}^p(\Omega,\mu)$, podemos então assumir que $\xi \in \mathscr{L}^p(\Omega,\mu)$. Em particular, se $g = |\xi|^{p-2}\xi$,

$$0 = \int_\Omega g\xi\, d\mu = \int_\Omega |\xi|^p d\mu,$$

ou seja, $\xi = 0$. Segue que, $T_g(\mathscr{L}^q(\Omega,\mu))$ é denso em $(\mathscr{L}^p(\Omega,\mu))^*$. Como estes espaços são de Banach, a imagem de T_g é fechada. Logo, T_g é sobrejetiva. Portanto, T_g é um isomorfismo. Por fim, basta tomar $\phi = T_g$. **Q.E.D.**

Para mais informações sobre esses temas, consultar [1], [15],[10], [11] [9], [4], e [6].

3 APLICAÇÕES ÀS SÉRIES DE FOURIER

Nosso objetivo nesse capítulo, é de fazer algumas aplicações às séries de Fourier, e observações não tão imediatas. Começamos então, com o seguinte.

Sejam

$$c_0(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{R} \text{ e } \lim x_n = 0\}$$

e

$$c_{00}(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{R},\ x_n = 0\},$$

em c_{00}, $x_n = 0$, exceto para um número finito de valores $n \in \mathbb{N}$.

Seja (a_n) uma sequência de números reais tal que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ é convergente para toda sequência $(b_n) \in c_0$. Vamos monstrar que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$. Para isso, definimos para cada $k \in \mathbb{N}$, o funcional linear

$$T_k : c_0 \to \mathbb{R} \text{ tal que } T_k(b_n) = \sum_{j=1}^{k} a_j b_j.$$

Observemos que cada T_k, é um funcional linear limitado em c_0 com $\|T_k\| \leq \sum_{j=1}^{k} |a_j|$. Mais ainda, se aplicarmos T_k no elemento

$$(a_1/|a_1|, \ldots, a_k/|a_k|, 0, \ldots) \in c_0,$$

(com o ajuste óbvio se algum a_k for zero), então veremos que $\|T_k\| = \sum_{j=1}^{k} |a_j|$. Por hipótese, para cada $(b_n) \in c_0$, temos que $\lim\limits_{k\to\infty} T_k(b_n)$ existe. Em particular, $\sup\limits_k |T_k(b_n)| < +\infty$, para cada $(b_n) \in c_0$. Pelo Teorema de Banach-Steinhaus,

$$\sup_k \|T_k\| < +\infty, \text{ ou seja, } \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| < +\infty.$$

3.1 Divergência da série de Fourier

Uma função contínua no círculo unitário $\mathbb{S}$, pode ser identificada com uma função contínua em $[-\pi, \pi]$ e $f(-\pi) = f(\pi)$. Uma tal função possui série de Fourier $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$, onde

$$a_k = \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt.$$

É conhecido que a série de Fourier de f converge para f na norma de $\mathscr{L}^2(\mathbb{S})$. Assim, a menos de uma subsequência, a convergência é pontual em quase todo ponto de $\mathbb{S}$. Isto na verdade é válido para toda $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{S})$, não somente aquelas que são contínuas. De fato, *Carleson* demonstrou o que era conhecido como *conjectura de Lusin*, que afirmava que a série de Fourier de qualquer função em $\mathscr{L}^2(\mathbb{S})$ converge pontualmente para f em quase todo ponto.

Definição 3.1. Dado um conjunto compacto A em um espaço métrico M, o espaço vetorial das funções contínuas em A com valores em $\mathbb{R}$ é denotado por $C^0(A)$.

Definição 3.2. A soma parcial simétrica à série de Fourier de f é

$$s_N(f,t) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k)e^{ikt}.$$

Utilizaremos o Princípio da Limitação Uniforme (Teorema de Banach-Steinhaus) para demonstrar que existe $f \in C^0(\mathbb{S})$ tal que $s_N(f,0)$ não converge para $f(0)$. Começamos com uma caracterização da soma parcial que será útil. Escrevemos:

$$\begin{aligned} s_N(f,t) &= \sum_{k=-N}^{N} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\, dx \right) e^{ikt} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sum_{k=-N}^{N} e^{ik(t-x)}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_N(t-x)\, dx, \end{aligned}$$

onde $D_N(s) = \sum_{k=-N}^{N} e^{iks}$ é chamado de Núcleo de Dirichlet. Afirmamos agora que

$$D_N(s) = \frac{\operatorname{sen}(N+1/2)s}{\operatorname{sen} s/2},$$

quando $s \neq 0$ e $D_N(0) = 2N+1$. No caso $s = 0$ este fato é claro. Caso contrário, temos que

$$\sum_{k=-N}^{N} e^{iks} = e^{-iNs} \sum_{k=0}^{2N} e^{iks} = e^{-iNs} \frac{1 - e^{i(2N+1)s}}{1 - e^{is}}.$$

Multiplicando e dividindo por $e^{-is/2}$ e, usando a identidade

$$e^{-iy} - e^{iy} = 2i \operatorname{sen} y,$$

obtemos o resultado da afirmação. O núcleo D_N possui dois comportamentos ruins: não é positivo e $\|D_N\|_{\mathscr{L}^1}$ não é limitada em N. Para verificarmos este último fato, vamos estimar esta norma. Assim, temos que:

$$\begin{aligned} \|D_N\|_{\mathscr{L}^1} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\operatorname{sen}(N+1/2)s|}{|\operatorname{sen} s/2|}\, ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{|\operatorname{sen}(N+1/2)s|}{|\operatorname{sen} s/2|}\, ds. \end{aligned}$$

Usando que, $\operatorname{sen} t \in [0,t]$ para $t \in [0,\pi/2]$ e a substituição $u = (N+1/2)s$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\|D_N\|_{\mathscr{L}^1} &\geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\operatorname{sen}(N+1/2)s|}{t}\, ds \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi(N+1/2)} \frac{|\operatorname{sen} u|}{u}\, du \\
&\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\operatorname{sen} u|}{k\pi}\, du \\
&= \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} \geq \frac{4}{\pi^2}\log(N+1).
\end{aligned}$$

Lembremos agora que $C^0(\mathbb{S})$ com a norma do sup é Banach. Definamos o funcional $L_N : C^0(\mathbb{S}) \to \mathbb{C}$ por:

$$L_N(f) = s_N(f,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)D_N(-x)\, dx.$$

Observemos que cada L_N é linear e

$$|L_N(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\cdot|D_N(-x)|dx \leq \|f\|_\infty \cdot \|D_N\|_{\mathscr{L}^1}.$$

Isto implica que $\|L_N\| \leq \|D_N\|_{\mathscr{L}^1}$. Na verdade, $\|L_N\| = \|D_N\|_{\mathscr{L}^1}$. Para verificar este fato, fixamos N e definamos $g(x) = \operatorname{sgn}(D_N(x))$. Então, existe uma sequência de funções contínuas

$$(f_j) \subset C^0(\mathbb{S}) \ \text{ com } -1 \leq f_j(x) \leq 1 \ \text{ e } \ f_j \to g$$

pontualmente em $\mathbb{S} = [-\pi,\pi]$. Pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\lim_{j\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_j(x)D_N(-x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)D_N(-x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|\, dx = \|D_N\|_{\mathscr{L}^1}.$$

Como $\|f_j\| \leq 1$, isto nos mostra que

$$\|D_N\|_{\mathscr{L}^1} \leq \|L_N\|.$$

Finalmente estamos em posição de aplicar o Princípio da Limitação Uniforme. Por este teorema, ou $\|L_N\| \leq M$ para alguma constante $M > 0$ e para todo N, ou existe $f \in C^0(\mathbb{S})$ tal que $\sup_N |L_N(f)| = +\infty$. Como

$$\|L_N\| = \|D_N\|_{\mathscr{L}^1} \longrightarrow +\infty,$$

obtemos então que existe $f \in C^0(\mathbb{S})$ tal que

$$\sup_N |L_N(f)| = \sup_N |s_N(f,0)| = +\infty,$$

e a série de Fourier de f diverge em 0.

3.2 Alguns exemplos de aplicações e contra-exemplos

Nesta seção, daremos alguns exemplos de aplicações dos teoremas dos capítulos anteriores, alguns clássicos da análise funcional que apenas comentamos e alguns contra–exemplos que mostram que as hipóteses não podem ser enfraquecidas.

3.2.1 **Decaimento dos coeficientes da série de Fourier de funções em $\mathscr{L}^1$.**

Dada $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{S})$ podemos definir os coeficientes da série de Fourier de f da mesma forma que fizemos para funções contínuas, isto é, temos associada a f a série $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$, onde

$$a_k = \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\, dt.$$

O *Lema de Riemann-Lebesgue* implica que, se $f \in \mathscr{L}^1([-\pi,\pi])$, então

$$\lim_{|k|\to\infty} |\hat{f}(k)| = 0.$$

Uma questão natural que surge é a seguinte: dada uma sequência de números complexos $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c_0$, (que se anulam no infinito), existe $f \in \mathscr{L}^1([-\pi,\pi])$ tal que $\hat{f}(k) = a_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$?

Definamos

$$T : \mathscr{L}^1([-\pi,\pi]) \to c_0 \ \text{ tal que } \ T(f) = (\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}.$$

A questão acima é então equivalente à pergunta: T é sobrejetora? Observemos que

$$\|Tf\|_\infty = \|(\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}\|_\infty \le \|f\|_{\mathscr{L}^1}.$$

Além disso, se $Tf = 0$, então $\hat{f}(k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, o que implica que $f = 0$ em $\mathscr{L}^1([-\pi,\pi])$. Assim, T é injetiva. Se T fosse sobrejetiva, o Teorema da Aplicação Inversa nos daria a existência de uma constante positiva K tal que

$$K\|f\|_{\mathscr{L}^1} \le \|Tf\|_\infty, \ \text{ para qualquer } \ f \in \mathscr{L}^1([-\pi,\pi]). \tag{2}$$

Tomemos então $f_n = D_N$, o n–ésimo núcleo de Dirichlet, que é dado por

$$D_N = \sum_{k=-N}^{N} \exp(ikx),$$

e lembremos que

$$\|D_N\|_{\mathscr{L}^1} \longrightarrow +\infty \text{ quando, } N \longrightarrow \infty$$

Se (2) fosse verdadeira, teríamos

$$K\|D_N\|_{\mathscr{L}^1} \leq \|TD_N\|_\infty = 1,$$

o que é uma contradição. Concluímos que existem sequências de números complexos que decaem a zero no infinito mas que não são coeficientes de Fourier de nenhuma função em $\mathscr{L}^1([-\pi,\pi])$.

3.2.2 $C^0([0,1])$ com a norma $\| \ \|_{\mathscr{L}^1}$ não é um espaço de Banach.

Como já sabemos, $(C^0([0,1]), \| \ \|_\infty)$ é um espaço de Banach e, além disso, é fácil verificar que

$$\|f\|_{\mathscr{L}^1} \leq \|f\|_\infty, \text{ para qualquer } f \in C^0([0,1]).$$

Se $(C^0([0,1]), \| \ \|_{\mathscr{L}^1})$ fosse um espaço de Banach, existiria uma constante positiva K tal que

$$\|f\|_\infty \leq K\|f\|_{\mathscr{L}^1}, \text{ para qualquer } f \in C^0([0,1]). \tag{3}$$

Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ a função

$$f_n(x) = \begin{cases} n-(n^2/2)x, & \text{se } 0 \leq x \leq 2/n; \\ 0, & \text{se } 2/n < x \leq 1. \end{cases}$$

Então, $\|f_n\|_{\mathscr{L}^1} = 1$ e $\|f_n\|_\infty = n$.

Assim, a sequência (f_n) não satisfaz (3) para qualquer constante $K > 0$ e portanto, $(C^0([0,1]), \| \ \|_{\mathscr{L}^1})$ não é Banach.

3.2.3 Um operador fechado e não limitado

Sejam $Y = C^0([0,1])$ e $X = C^1([0,1])$, ambos equipados com a norma $\| \ \|_\infty$. Observemos que X não é completo já que é um subespaço próprio e denso de Y com a norma $\| \ \|_\infty$. De fato, a primeira afirmação só nos diz que existem funções contínuas que não são de classe C^1 e a segunda afirmação segue do *Teorema de Stone–Weierstrass*.

Seja $T : X \to Y$ o operador derivação, isto é, $Tf = f'$. Então T está bem definido e é linear. *Afirmação:* T é fechado mas não é limitado.

Demonstração. De fato,

T não é limitado, pois, se $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ é definida por $f_n(x) = x^n$, então $f_n'(x) = nx^{n-1}$, o que nos dá

$$\|f_n\|_\infty = 1, \text{ mas } \|Tf_n\|_\infty = \|f_n'\|_\infty = n.$$

T é fechado, pois se $(f_n) \subset C^1([0,1])$ é tal que $f_n \longrightarrow f$ e $Tf_n = f_n' \longrightarrow g$ na norma do sup,

então, o Teorema Fundamental do Cálculo implica que

$$f_n(t) = f_n(0) + \int_0^t f_n'(s)\, ds;$$

tomando o limite em ambos os lados, temos que

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)\, ds;$$

novamente, o Teorema Fundamental do Cálculo implica que $f \in C^1([0,1])$ e $f' = g$. Concluímos que a hipótese do domínio ser completo no Teorema do Gráfico Fechado é essencial para obtermos a continuidade. **Q.E.D.**

Para mais informações sobre esses temas, consultar [15], [10], [11], [2], [3] e [5].

4 ESPAÇOS DAS FUNÇÕES TESTES

A teoria das distribuições, libera as equações diferenciais de certas dificuldades que surgem quando consideramos apenas funções diferenciáveis para as suas soluções. Isso é feito estendendo-a a uma classe de objetos (chamados de distribuições ou funções generalizadas) que contém a classe das funções diferenciáveis, às quais, o cálculo se aplica em sua forma original. Aqui estão alguns recursos que qualquer extensão deve ter para ser útil nesse estudo; nosso ponto de partida são os subconjuntos aberto de $\mathbb{R}^n$.

Definição 4.1. O suporte de uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é o fecho do subconjunto $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ de Ω; denotaremos o suporte de f por $\text{supp}(f)$.

Definição 4.2. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto. Uma função teste em Ω é uma função $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciável e com suporte compacto em Ω. O conjunto de todas as funções teste em Ω é denotado por $C_c^\infty(\Omega)$ ou também por $\mathscr{D}(\Omega)$.

Após definir o que é uma função teste, a pergunta natural a ser feita é sobre a existência dela. O exemplo a seguir, mostra uma com suporte na bola fechada de raio 1 de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 4.1. Seja $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por:

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{(\|x\|^2-1)^{-1}}, & \text{se } \|x\| < 1; \\ 0, & \text{se } \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

A diferenciabilidade de ϕ é garantida pela diferenciabilidade de $f(t) = \exp(1/t)$ quando $t < 0$ e $f(t) = 0$ quando $t \geq 0$. Note que todas as derivadas existem quando $t \neq 0$ e converge a zero quando $t \longrightarrow 0$, ou seja, $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, com $\text{supp}(\phi) = B[0;1]$.

Exemplo 4.2.

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{(x^2-x)^{-1}}, & \text{se } 0 < x < 1; \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1. \end{cases}$$

Com observações análogas a anterior, vemos que essa ϕ também é uma função teste em $\mathbb{R}$.

Observação: Multiplicando a ϕ do Exemplo 4.1 por uma constante adequada, obteremos uma nova $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int \phi(x)dx = 1, \quad \phi \geq 0, \quad \text{supp}(\phi) \subset \{x : \|x\| < 1\}. \tag{4}$$

O próximo teorema, mostrar-nos que toda função contínua com suporte compacto pode ser aproximada uniformemente por funções em $C_c^\infty(\Omega)$. Para isso, definamos uma classe de funções ainda maior que a das funções contíuas, a das funções localmente integráveis.

Definição 4.3. Uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é localmente integável, quando é Lebesgue mensurável e, para todo $K \subset \Omega$ compacto, temos que

$$\int_K |f| < +\infty.$$

Escrevemos $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\Omega)$.

Observação: De agora em diante, até o fim desse capítulo, μ é uma medida de Lebesgue de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Exemplo 4.3. Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \cos \|x\|$. Dado $K \subset \Omega$ compacto, temos que $\int_K |f| \leq \mu(K)$, onde $\mu(K)$ é a medida de K.

Exemplo 4.4. $f(x) = c$ uma constanate, e $K = [a,b]$, temos que f é uma função $\mathscr{L}^1_{loc}$, onde $\int_K |f|$ é igual a área do retnângulo com base comprimento de $K = [a,b]$ e altura c.

Teorema 4.1. *(Aproximação por funções teste): Seja $\phi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ com suporte contido na bola fechada $B[0;1]$ tal que $\phi \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$ com $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Para $\varepsilon > 0$, definimos a função*

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \varepsilon y)\phi(y)dy = \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy.$$

Então:
(a) $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$*;*
(b) *Se $f(x) = 0$ q.t.p. fora do conjunto fechado A, implica* $\operatorname{supp}(f_\varepsilon) \subseteq A + \{x : \|x\| \leq \varepsilon\}$*;*
(c) *Se f é contínua com suporte compacto, então as funções f_ε convergem uniformemente para f quando $\varepsilon \longrightarrow 0$.*

Observção: Observe que a segunda igualdade na definição de f_ε provém de uma mudança de variável.

Demonstração. (a) A segunda maneira de expressar f_ε nos dá:

$$\begin{aligned}
|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x_0)| &= \left| \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy - \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi\left(\frac{x_0-y}{\varepsilon}\right)dy \right| \\
&= \left| \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\left[\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) - \phi\left(\frac{x_0-y}{\varepsilon}\right)\right]dy \right| \\
&\leq \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy \cdot \sup_{\|z-w\| \leq \|x-x_0\|\varepsilon^{-1}} \{|\phi(z) - \phi(w)|\} \\
&= \varepsilon^{-n} \|f\|_{\mathscr{L}^1} \cdot \sup_{\|z-w\| \leq \|x-x_0\|\varepsilon^{-1}} \{|\phi(z) - \phi(w)|\}
\end{aligned}$$

já que ϕ é contínua com suporte compacto, e assim, uniformemente contínua. Como ε é constante, implica que f_ε é contínua. Na primeira expressão, derivamos ϕ sob o sinal da integral, um número arbitrário de vezes, vemos que também são contínuas as suas derivadas e, portanto, tem-se (a).
(b) Agora, pela primeira forma de expressar f_ε, temos que se $f_\varepsilon(x) \neq 0$, implica que deve existir $y \in \operatorname{supp}(\phi) \subseteq B[0;1]$ tal que $x - \varepsilon y \in A$, não se anula numa vizinhança dele, isto é, x está numa vizinhança de A.

(c) Se f é contínua com suporte compacto, então tomando $A = \text{supp}(f)$ em (b), concluímos $f_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e temos que

$$\begin{aligned} |f(x) - f_\varepsilon(x)| &= \left| f(x) - \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon y)\phi(y)\, dy \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} [f(x) - f(x-\varepsilon y)]\phi(y)\, dy \right| \\ &\leq \sup_y |f(x) - f(x-\varepsilon y)|. \end{aligned}$$

O membro do lado direito da última desigualdade, tende a zero com $\varepsilon \longrightarrow 0$, devido à continuidade uniforme de f, o que mostra que (c) vale. **Q.E.D.**

Corolário 4.1.1. Se $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$, então as funções f_ε definidas no Teorema 4.1 são tais que $\|f_\varepsilon\|_{\mathscr{L}^1} \leq \|f\|_{\mathscr{L}^1}$ e $\|f_\varepsilon - f\|_{\mathscr{L}^1}$ tende a 0 quando ε converge para 0.

Demonstração. Como $\phi \geq 0$, pela primeira forma de f_ε, vem

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon\|_{\mathscr{L}^1} \leq \int \left(\int |f(x-\varepsilon y)| \cdot |\phi(y)| dy \right) dx &= \int \phi(y) \left(\int |f(x-\varepsilon y)| dx \right) dy \\ &= \int \phi(y) \|f\|_{\mathscr{L}^1} dy = \|f\|_{\mathscr{L}^1}. \end{aligned}$$

Para provar a convergência em norma, usando o fato de que o espaço $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$, isto é,

$$\forall f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists f_1 \in C_c^0(\mathbb{R}^n) \text{ tal que } \|f - f_1\|_{\mathscr{L}^1} \leq \varepsilon.$$

Dado $\delta > 0$, existe uma função contínua $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ com suporte compacto tal que $\|f - g\|_{\mathscr{L}^1} \leq \delta/3$. Assim,

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon - f\|_{\mathscr{L}^1} &\leq \|f - g\|_{\mathscr{L}^1} + \|g - g_\varepsilon\|_{\mathscr{L}^1} + \|g_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{\mathscr{L}^1} \\ &\leq 2\|f - g\|_{\mathscr{L}^1} + \|g - g_\varepsilon\|_{\mathscr{L}^1} \\ &\leq 2\frac{\delta}{3} + \|g - g_\varepsilon\|_{\mathscr{L}^1}. \end{aligned}$$

Pelos itens (b) e (c) do Teorema 4.1, o suporte de g_ε é compacto e g_ε converge para g uniformemente quando ε tende a 0. Assim, $\|g - g_\varepsilon\| \leq \delta/3$ para ε pequeno e, portanto, $\|f_\varepsilon - f\|_{\mathscr{L}^1} \leq \delta$, para ε suficientimente pequeno. **Q.E.D.**

Corolário 4.1.2. Seja $K \subset \Omega$ compacto. Então, existe $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ com imagem em $[0,1]$ e $\psi \equiv 1$ numa vizinhança de K.

Demonstração. Seja $\delta = d(K, \Omega^c) = \inf\{x \in K, y \in \Omega^c : \ \|x - y\|\}$, que é positivo por ser a distância entre dois conjuntos fechados disjuntos. Consideremos números positivos ε, ε_1 tais que

$$\varepsilon < \varepsilon_1 < \varepsilon_1 + \varepsilon < \delta,$$

e seja f a função:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \ x \in K_1 = K + \{\|x\| \leq \varepsilon_1\}; \\ 0, & \text{se } \ x \notin K_1. \end{cases}$$

Assim, tomemos $\psi = f$. Pelo teorema 4.1, temos que

$$\operatorname{supp}(\psi) \subseteq K_1 + \{\|x\| \leq \varepsilon\} = K + \{\|x\| \leq \varepsilon_1\} + \{\|x\| \leq \varepsilon\} \subseteq K + \{\|x\| \leq \varepsilon + \varepsilon_1\} \subseteq \Omega.$$

Logo, podemos concluir que $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$. Além disso, se

$$\inf_{y \in K} \|x - y\| = d(x, K) < \varepsilon_1 - \varepsilon,$$

temos que para qualquer $y \in \mathbb{R}^n$, com $\|y\| \leq 1$, teremos $x - \varepsilon y \in K_1$, pois

$$\|-\varepsilon y\| = \|\varepsilon y\| \leq \varepsilon,$$

daí

$$\varepsilon \geq \|-\varepsilon y\| = \|x - \varepsilon y - x\| \geq \|x - \varepsilon y\| - \|x\| \Rightarrow \|x - \varepsilon y\| \leq \varepsilon + \|x\| \leq \varepsilon + \varepsilon_1 < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = 2\varepsilon_1.$$

Portanto, temos que

$$\psi = f = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \varepsilon y)\phi(y)dy = \int_{\|y\| \leq 1} f(x - \varepsilon y)\phi(y)dy = \int_{\|y\| \leq 1} 1 \cdot \phi(y)dy = 1.$$

Q.E.D.

Observação: Estamos utilizando a notação A^c para indicar o complementar de A em relação à um conjunto universo dado.

4.1 Convergência em $\mathscr{D}(\Omega)$

Começamos esta seção introduzindo algumas terminologias que serão usadas em nosso trabalho posterior com distribuições. A partir de agora, iremos utilizar a notação $\mathscr{D}(\Omega)$ no lugar de $C_c^\infty(\Omega)$.

Em qualquer discussão sobre funções de n-variáveis, o termo multi-índice denota uma n-upla ordenada

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

de inteiros não negativos α_i. A cada multi-índice α está associado o operador diferencial

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

cuja **ordem** é

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Se $|\alpha| = 0$, $D^\alpha f = f$.

Diz-se que uma função complexa f definida em algum conjunto aberto não vazio Ω pertence a $C^\infty(\Omega)$ se $D^\alpha f \in C^0(\Omega)$ para qualquer multi-índice α.

A definição de distribuição envolve limites e continuidade no espaço das funções teste. Assim, precisamos dotar $\mathscr{D}(\Omega)$ com uma topologia. Para fazer isso, utilizam-se as normas e seminormas abaixo, vejamos como.

4.1.1 Topologia de $\mathscr{D}(\Omega)$

Se K é um conjunto compacto em $\mathbb{R}^n$, então $\mathscr{D}_K$ denota o espaço de todas as $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ cujo suporte reside em K. (A letra $\mathscr{D}$ tem sido usada para esses espaços desde que *Schwartz* publicou seu trabalho sobre distribuições.) Definimos agora uma topologia em $C^\infty(\Omega)$ que transforma $C^\infty(\Omega)$ em um espaço de Fréchet com a propriedade de Heine-Borel, tal que $\mathscr{D}_K$ é um subespaço fechado de $C^\infty(\Omega)$, sempre que $K \subset \Omega$. Para fazer isso, escolhemos conjuntos compactos K_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ tais que K_i esteja no interior de K_{i+1} e $\Omega = \bigcup K_i$. Definimos as seminormas p_N em $C^\infty(\Omega)$, $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$p_N(f) = \max_{x \in K_N, |\alpha| \leq N} |D^\alpha f(x)|.$$

Elas definem uma topologia localmente convexa metrizável em $C^\infty(\Omega)$. Neste caso, para $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, teremos que $p_N(f) = ||\phi||_N$ é norma, onde

$$||\phi||_N = \{|D^\alpha \phi(x)| : \ x \in \Omega, |\alpha| \leq N\}.$$

Definição 4.4. Seja Ω um conjunto aberto não vazio em $\mathbb{R}^n$.
(a) Para cada $K \subset \Omega$ compacto, τ_K denota a topologia do espaço Fréchet de $\mathscr{D}_K$ conforme descrito acima.
(b) $\mathscr{B}$ é a coleção de todos os conjuntos balanceados convexos $W \subset \mathscr{D}(\Omega)$ tais que $\mathscr{D}_K \cap W \in \tau_K$ para todo compacto $K \subset \Omega$.
(c) τ é a coleção de todas as uniões de conjuntos da forma $\phi + W$, com $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ e $W \in \mathscr{B}$.

Essa coleção τ citada no item (c) é a topologia de $\mathscr{D}(\Omega)$, mostrada pelo teorema abaixo.

Teorema 4.2. (a) *τ é uma topologia em $\mathscr{D}(\Omega)$, e $\mathscr{B}$ é uma base local para τ.*
(b) *τ transforma $\mathscr{D}(\Omega)$ em um espaço vetorial topológico localmente convexo.*

Demonstração. Suponha $V_1, V_2 \in \tau$ e $\phi \in V_1 \cap V_2$. Para provar (a), é suficiente mostrar claramente que

$$\phi + W \subset V_1 \cap V_2$$

para alguma $W \subset \mathscr{B}$.

A definição de τ mostra que existem $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ e $W_i \in \mathscr{B}$ tais que

$$\phi \in \phi_i + W_i \subset V_i, \quad (i = 1, 2).$$

Escolha K tal que $\mathscr{D}_K$ contenha ϕ_1, ϕ_2 e ϕ. Como $\mathscr{D}_K \cap W_i$ é aberto em $\mathscr{D}_K$, temos

$$\phi - \phi_i \in (1 - \delta_i) W_i,$$

para algum $\delta_i > 0$. A convexidade de W_i implica, portanto, que

$$\phi - \phi_i + \delta_i W_i \subset (1 - \delta_i) W_i + \delta_i W_i = W_i,$$

de modo que

$$\phi + \delta_i W_i \subset \phi_i + W_i \subset V_i, \quad (i = 1, 2).$$

Portanto, a primeira expressão é válida com $W = (\delta_1 W_1) \cap (\delta_2 W_2)$, e o item (a) está provado.

Suponha a seguir que ϕ_1 e ϕ_2 são elementos distintos de $\mathscr{D}(\Omega)$, e coloque

$$W = \{\phi \in \mathscr{D}(\Omega) : \ \|\phi\|_0 < \|\phi_1 - \phi_2\|_0\},$$

onde $\|\phi\|_0$ é como no inicio da subseção 4.1.1. Então, $W \in \mathscr{B}$ e ϕ_1 não está em $\phi_2 + W$. Segue-se que o conjunto unitário $\{\phi_1\}$ é um conjunto fechado, em relação a τ. A adição é τ-contínua, uma vez que a convexidade de cada $W \in \mathscr{B}$ implica que

$$(\psi_1 + \frac{1}{2} W) + (\psi_2 + \frac{1}{2} W) = (\psi_1 + \psi_2) + W$$

para quaisquer $\psi_1, \psi_2 \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Para lidar com a multiplicação escalar, escolha uma escalar c_0 e um $\phi_0 \in \mathscr{D}(\Omega)$. Então,

$$c\phi - c_0\phi_0 = c(\phi - \phi_0) + (c - c_0)\phi_0.$$

Se $W \in \mathscr{B}$, existe $\delta > 0$ tal que $\delta\phi_0 \in \frac{1}{2} W$. Escolha k de modo que $2k(|c_0| + \delta) = 1$. Como W é convexo e balanceado, segue que

$$c\phi - c_0\phi_0 \in W$$

sempre que $|c - c_0| < \delta$ e $\phi - \phi_0 \in kW$. **Q.E.D.**

Observação: A partir de agora, o símbolo $\mathscr{D}(\Omega)$ denotará o espaço vetorial topológico

$(\mathscr{D}(\Omega),\tau)$ que acaba de ser descrito. Todos os conceitos topológicos relacionados a $\mathscr{D}(\Omega)$ se referirão a esta topologia τ.

Teorema 4.3. (a) *Um subconjunto balanceado convexo V de $\mathscr{D}(\Omega)$ é aberto se, e somente se, $V \in \mathscr{B}$.*
(b) *A topologia τ_K de qualquer $\mathscr{D}_K \subset \mathscr{D}(\Omega)$ coincide com a topologia do subespaço que $\mathscr{D}_K$ herda de $\mathscr{D}(\Omega)$.*
(c) *Se E é um subconjunto limitado de $\mathscr{D}(\Omega)$, então $E \subset \mathscr{D}_K$ para algum $K \subset \Omega$, e existem números M e N com $M_N < +\infty$ tais que toda $\phi \in E$ satisfazem as desigualdades*

$$\|\phi\|_N \leq M_N \quad (N = 0, 1, \ldots).$$

(d) *$\mathscr{D}(\Omega)$ tem a propriedade Heine-Borel.*
(e) *Se (ϕ_i) é uma sequência de Cauchy em $\mathscr{D}(\Omega)$, então$(\phi_i) \subset \mathscr{D}_K$ para algum $K \subset \Omega$ compacto, e*

$$\lim_{i,j\to\infty} \|\phi_i - \phi_j\|_N = 0 \quad (N = 0, 1, \ldots).$$

(f) *Se $\phi_i \longrightarrow 0$ na topologia de $\mathscr{D}(\Omega)$, então existe um $K \subset \Omega$ compacto que contém o suporte de toda ϕ_i, e $D^\alpha\phi_i \longrightarrow 0$ uniformemente, quando $i \longrightarrow \infty$, para cada multi-índice α.*
(g) *Em $\mathscr{D}(\Omega)$, toda sequência de Cauchy converge.*

Observação: Em vista de (b), as condições necessárias expressas por (c), (e), e (f) também são suficientes. Por exemplo, se $E \subset \mathscr{D}_K$ e

$$\|\phi_i\|_N \leq M_N < +\infty$$

para cada $\phi \in E$, então E é um subconjunto limitado de $\mathscr{D}_K$, e agora (b) implica que E também é limitado em $\mathscr{D}(\Omega)$.

Demonstração. Suponha primeiro que $V \in \tau$. Tome $\phi \in \mathscr{D}_K \cap V$. Pelo Teorema 4.2, $\phi + W \subset V$, para algum $W \in \mathscr{B}$. Daí,

$$\phi + (\mathscr{D}_K \cap W) \subset \mathscr{D}_K \cap V.$$

Como $\mathscr{D}_K \cap W$ é aberto em $\mathscr{D}_K$, provamos que

$$\mathscr{D}_K \cap V \in \tau_K, \text{ se } V \in \tau \text{ e } K \subset \Omega. \tag{5}$$

A afirmação (a) é uma consequência imediata de (5), pois $\mathscr{B} \subset \tau$.

A metade de (b) é provada por (5). Para a outra metade, suponha $E \in \tau_K$. Temos que mostrar que $E = \mathscr{D}_K \cap V$ para algum $V \in \tau$. A definição de τ_K implica que a toda $\phi \in E$ correspondem N e, δ positivo tal que

$$\{\psi \in \mathscr{D}_K : \|\psi - \phi\|_N < \delta\} \subset E. \tag{6}$$

Coloquemos $W_\phi = \{\psi \in \mathscr{D}(\Omega) : \|\psi\|_N < \delta\}$. Então $W_\phi \in \mathscr{B}$, e

$$\mathscr{D}_K \cap (\phi + W_\phi) = \phi + (\mathscr{D}_K \cap W_\phi) \subset E. \tag{7}$$

Se V é a união desses conjuntos $\phi + W_\phi$, um para cada $\phi \in E$, então V tem a propriedade desejada.

Para (c), considere um conjunto $E \subset \mathscr{D}(\Omega)$ que reside em nenhum $\mathscr{D}_K$. Então existem funções $\phi_m \in E$ e existem pontos distintos $x_m \in \Omega$, sem ponto limite em Ω, tais que $\phi_m(x_m) \neq 0$, com $(m = 1, 2, \ldots)$. Seja W o conjunto de todas as $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ que satisfazem

$$|\phi(x_m)| < m^{-1}|\phi_m(x_m)| \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Como cada K contém apenas um número finito de x_m, e assim, $\mathscr{D}_K \cap W \in \tau_K$. Assim, $W \in \mathscr{B}$. Como $\phi_m \notin mW$, nenhum múltiplo de W contém E. Isso mostra que E não é limitado. Segue-se que todo subconjunto limitado E de $\mathscr{D}(\Omega)$ reside em algum $\mathscr{D}_K$. Por (b), E é então um subconjunto limitada de $\mathscr{D}_K$. Consequentemente,

$$\sup\{\|\phi\|_N : \phi \in E\} < +\infty \quad (N = 0, 1, \ldots). \tag{9}$$

Isso completa a prova de (c). A afirmação (d) decorre de (c), uma vez que $\mathscr{D}_K$ tem a propriedade Heine-Borel.

Como as sequências de Cauchy são limitadas, (c) implica que toda sequência de Cauchy (ϕ_i) em $\mathscr{D}(\Omega)$ está em algum $\mathscr{D}_K$. Por (b), (ϕ_i) também é uma sequência de Cauchy relativa à τ_K. Isso prova (e). A afirmação (f) é apenas uma reformulação de (e). Finalmente, (g) segue de (b), (e) e a completude de $\mathscr{D}_K$. (Lembre-se que $\mathscr{D}_K$ é um espaço de Fréchet.) **Q.E.D.**

Essencialmente, as condições de convergência de sequências em $\mathscr{D}(\Omega)$ são fornecidas pelo item (f).

Vejamos um resultado interessante, do qual, não demonstraremos, mas pode ser encontrada nas referências.

Teorema 4.4. *Suponha que T seja uma transformação linear de $\mathscr{D}(\Omega)$ em um espaço localmente convexo Y. Então cada uma das quatro propriedades a seguir implica as outras:*
(a) *T é contínua.*
(b) *T é limitado.*
(c) *Se $\phi_i \longrightarrow 0$ em $\mathscr{D}(\Omega)$, então $T\phi_i \longrightarrow 0$ em Y.*
(d) *As restrições de T a todo $\mathscr{D}_k \subset \mathscr{D}(\Omega)$ são contínuas.*

Corolário 4.4.1. Todo operador diferencial D^α é uma transformação contínua de $\mathscr{D}(\Omega)$ em $\mathscr{D}(\Omega)$.

Demonstração. Como $\|D^\alpha\phi\|_N \leq \|\phi\|_{N+|\alpha|}$ para $N = 0, 1, \ldots$, D^α é contínua em cada $\mathscr{D}_K$. **Q.E.D.**

Para mais informações sobre esses temas, consultar [1], [13], [14], [15] e [16].

5 DISTRIBUIÇÕES

Definição 5.1. Um funcional linear em $\mathscr{D}(\Omega)$ que é contínuo é chamado de distribuição em Ω.

O espaço de todas as distribuições em Ω é denotado por $\mathscr{D}'(\Omega)$. Observe que o Teorema 4.4 se aplica a funcionais lineares em $\mathscr{D}(\Omega)$. Isso leva à seguinte caracterização útil de distribuições.

Teorema 5.1. *Se T é um funcional linear em $\mathscr{D}(\Omega)$, as duas condições a seguir são equivalentes:*
(a) $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$.
(b) *A todo compacto $K \subset \Omega$ corresponde um inteiro não negativo N e uma constante $C < +\infty$ tal que a desigualdade*

$$|T\phi| \leq C\|\phi\|_N$$

vale para todo $\phi \in \mathscr{D}_K$.

Demonstração. Esta é precisamente a equivalência de (a) e (d) no Teorema 4.4, combinada com a descrição da topologia de $\mathscr{D}_K$ por meio das seminormas $\|\phi\|_N$, mostradas no capítulo anterior. **Q.E.D.**

Nota: Se T é tal que um N serve para todos os K (mas não necessariamente com o mesmo C), então o menor desses N é chamado de **ordem de** T. Se nenhum N serve para todos os K, então diz-se que T tem *ordem infinita*.

Observação: Cada $x \in \Omega$, para Ω contendo a origem ($0 \in \Omega$) determina um funcional linear δ_x em $\mathscr{D}(\Omega)$, pela fórmula

$$\delta_x(\phi) = \phi(x).$$

O Teorema 5.1 mostra que δ_x é uma distribuição, de ordem 0. Se $x = 0$, a origem de $\mathbb{R}^n$, o funcional $\delta = \delta_0$ é freqüentemente chamado de *medida de Dirac* em $\mathbb{R}^n$ ou simplismente δ *de Dirac*. Visto que $\mathscr{D}_K$, para $K \subset \Omega$, é a interseção dos espaços nulos (núcleos) desses δ_x, como x varia sobre o complemento de K, segue-se que cada $\mathscr{D}_K$ é um subespaço fechado de $\mathscr{D}(\Omega)$. Temos que cada $\mathscr{D}_K$ tem interior vazio, relativo à $\mathscr{D}(\Omega)$. Como existe uma coleção enumerável de conjuntos $K_i \subset \Omega$ tais que $\mathscr{D}(\Omega) = \bigcup \mathscr{D}_{K_i}$ é da primeira categoria em si. Como as sequências de Cauchy convergem em $\mathscr{D}(\Omega)$, o Teorema de Baire implica que $\mathscr{D}(\Omega)$ não é metrizável (não é um espaço métrico).

5.1 Cálculo com Distribuições

Notações: Como antes, Ω denotará um conjunto aberto não vazio em $\mathbb{R}^n$. Se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ são multi-indices (ver Seção 4.1), então

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tag{10}$$

$$D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha}, \quad \text{onde } D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{11}$$

$$\beta \leq \alpha \quad \text{que significa } \beta_i \leq \alpha_i \ \text{ para } 1 \leq i \leq n,$$

$$\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \ldots, \alpha_n \pm \beta_n).$$

Se $x, y \in \mathbb{R}^n$, então

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \tag{12}$$

$$|x| = \langle x, x \rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}. \tag{13}$$

O fato de o sinal de valor absoluto ter significados diferentes em (9) e em (6) não deve causar confusão.

Se $x \in \mathbb{R}^n$ e α é um multi-índice , o monômio x^{α} é definido por

$$x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}. \tag{14}$$

5.1.1 Funções e Medidas Como Distribuições

Suponha que f seja uma função complexa localmente integrável em Ω. Isso significa que f é Lebesgue mensurável e $\int_K |f(x)| dx < +\infty$ para todo compacto $K \subset \Omega$; dx denota a medida de Lebesgue. Definimos

$$T_f(\phi) = \int_{\Omega} \phi(x) f(x) \, dx \qquad [\phi \in \mathscr{D}(\Omega)]. \tag{15}$$

Desde que

$$|T_f(\phi)| \leq \left(\int_K |f| \right) \cdot \|\phi\|_0 \quad (\phi \in \mathscr{D}_K). \tag{16}$$

O Teorema 5.1 mostra que $T_f \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Costuma-se identificar a distribuição T_f com a função f e dizer que tais distribuições "são" funções. Enfatizamos que nem toda distribuição pode ser identificada com uma função. Da mesma forma, se μ é uma medida de Borel complexa em Ω, ou se μ é uma medida positiva em Ω, com $\mu(K) < +\infty$ para cada $K \subset \Omega$ compacto, a equação

$$T_{\mu}(\phi) = \int_{\Omega} \phi \, d\mu \qquad [\phi \in \mathscr{D}(\Omega)], \tag{17}$$

define uma distribuição T_{μ} em Ω, que geralmente é identificado com $\mu \cdot$ Novamente, nem toda distribuição pode ser identificada com uma medida com essas condições.

5.1.2 Diferenciação de distribuições

Se α é um multi-índice e $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, a fórmula

$$(D^\alpha T)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi) \qquad [\phi \in \mathscr{D}(\Omega)], \tag{18}$$

(motivada no início do capítulo 4) define um funcional linear $D^\alpha T$ em $\mathscr{D}(\Omega)$. Se

$$|T\phi| \leq C\|\phi\|_N, \tag{19}$$

para todo $\phi \in \mathscr{D}_K$, então

$$|(D^\alpha T)(\phi)| \leq C\|D^\alpha \phi\|_N \leq C\|\phi\|_{N+|\alpha|}. \tag{20}$$

O Teorema 5.1 mostra, portanto, que $D^\alpha T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Note que a fórmula

$$D^\alpha D^\beta T = D^{\alpha+\beta} T = D^\beta D^\alpha T, \tag{21}$$

vale para toda distribuição T e para todos os multi-índices α e β, simplesmente porque os operadores D^α e D^β comutam em $C^\infty(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
(D^\alpha D^\beta T)(\phi) &= (-1)^{|\alpha|}(D^\beta T)(D^\alpha \phi) \\
&= (-1)^{|\alpha|+|\beta|} T(D^\beta D^\alpha \phi) \\
&= (-1)^{|\alpha+\beta|} T(D^{\alpha+\beta}\phi) \\
&= (D^{\alpha+\beta} T)(\phi).
\end{aligned}$$

5.1.3 Derivadas de funções como distribuição

A α-ésima derivada como distribuição de uma função localmente integrável f em Ω é, por definição, a distribuição $D^\alpha T_f$.

Se $D^\alpha f$ também existe no sentido clássico e é localmente integrável, então $D^\alpha f$ também é uma distribuição no sentido da Seção 5.1.1. O problema de consistência óbvio é se a equação

$$D^\alpha T_f = T_{D^\alpha f} \tag{22}$$

sempre se mantém nestas condições. Mais explicitamente, a questão é se

$$(-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x)(D^\alpha \phi)(x)\, dx = \int_\Omega (D^\alpha f)(x)\phi(x)\, dx, \tag{23}$$

para toda $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Se f tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens até N, as integrações por parte dão (23) sem dificuldade, quando $|\alpha| \leq N$. Em geral, (22) pode ser falso, o exemplo a seguir, ilustra isso no caso $n = 1$.

Exemplo 5.1. Suponha que Ω seja um segmento em $\mathbb{R}$, e f é uma função contínua à esquerda, de variação limitada em Ω. Se $D = d/dx$, é sabido que $(Df)(x)$ existe q.t.p. e que $Df \in \mathscr{L}^1$. Afirmamos que

$$DT_f = T_\mu, \tag{24}$$

onde μ é a medida definida em Ω por

$$\mu([a,b)) = f(a) - f(b). \tag{25}$$

Assim, $DT_f = T_{Df}$ se, e somente se, for absolutamente contínua.

Para provar (24), temos que mostrar que

$$(T_\mu)(\phi) = (DT_f)(\phi) = -T_f(D\phi)$$

para toda $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, isto é, que

$$\int_\Omega \phi \; d\mu = -\int_\Omega \phi'(x) f(x) \; dx. \tag{26}$$

Mas (26) é uma simples consequência do Teorema de Fubini, pois cada lado de da equação acima é igual à integral de $\phi'(x)$ sobre o conjunto

$$\{(x,y) \in \Omega^2 : \; x < y\} \tag{27}$$

em relação à medida do produto de dx e $d\mu$. O fato de ϕ ter suporte compacto em Ω é usado neste cálculo.

5.1.4 Multiplicação por funções

Suponha $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e $f \in C^\infty(\Omega)$. O lado direito da equação

$$(fT)(\phi) = T(f\phi) \quad [\phi \in \mathscr{D}(\Omega)] \tag{28}$$

faz sentido porque $f\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, quando $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Assim, (28) define um funcional linear fT em $\mathscr{D}(\Omega)$. Veremos que fT é, de fato, uma distribuição em Ω. Observe que a notação deve ser tratada com cuidado: Se $f \in \mathscr{D}(\Omega)$, então Tf é um número, enquanto fT é uma distribuição.

A prova de que $fT \in \mathscr{D}'(\Omega)$, segue da aplicação da fórmula de Leibniz

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} (D^{\alpha-\beta} f)(D^\beta g), \tag{29}$$

válida para todo f e g em $C^\infty(\Omega)$ e todos os multi-índices α, que é obtida por iteração da fórmula familiar

$$(uv)' = u'v + uv'. \tag{30}$$

Os números $c_{\alpha\beta}$ são inteiros positivos cujo valor exato pode ser calculado, mas é irrelevante para nossas necessidades atuais.

A cada compacto $K \subset \Omega$, correspondem números C e N tais que $|T\phi| \le C\|\phi\|_N$ para todo $\phi \in \mathscr{D}_K$. Por (29), existe uma constante C', dependendo de f, K e N, tal que $\|f\phi\|_N \le C'\|\phi\|_N$ para $\phi \in \mathscr{D}_K$. Daí,

$$|(fT)(\phi)| \le CC'\|\phi\|_N \quad (\phi \in \mathscr{D}_K). \tag{31}$$

Pelo Teorema 5.1, tem-se $fT \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

Agora, queremos mostrar que a fórmula de Leibniz (29) vale com T no lugar de g, de modo que

$$D^\alpha(fT) = \sum_{\beta\le\alpha} c_{\alpha\beta}(D^{\alpha-\beta}f)(D^\beta T). \tag{32}$$

A prova é um cálculo puramente formal. Associar a cada $u \in \mathbb{R}^n$ a função h_u, definido por

$$h_u(x) = \exp\langle u, x\rangle.$$

Então, $D^\alpha h_u = u^\alpha h_u$. Se (29) for aplicado a h_u e h_v no lugar de f e g, a identidade

$$(u+v)^\alpha = \sum_{\beta\le\alpha} c_{\alpha\beta}u^{\alpha-\beta}v^\beta \quad (u, v \in \mathbb{R}^n) \tag{33}$$

é obtida. Em particular,

$$\begin{aligned} u^\alpha &= [v + (-v+u)]^\alpha \\ &= \sum_{\beta\le\alpha} c_{\alpha\beta}v^{\alpha-\beta}\sum_{\gamma\le\beta} c_{\beta\gamma}(-1)^{|\beta-\gamma|}v^{\beta-\gamma}u^\gamma \\ &= \sum_{\gamma\le\alpha}(-1)^{|\gamma|}v^{\alpha-\gamma}u^\gamma \sum_{\gamma\le\beta\le\alpha}(-1)^{|\beta|}c_{\alpha\beta}c_{\beta\gamma}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{\gamma\le\beta\le\alpha}(-1)^{|\beta|}c_{\alpha\beta}c_{\beta\gamma} = \begin{cases} (-1)^{|\alpha|}, & \text{se } \gamma = \alpha; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Aplicando (29) a $D^\beta(\phi D^{\alpha-\beta}f)$, e usando a equação acima, para obtermos a identidade

$$\sum_{\beta\le\alpha}(-1)^{|\beta|}c_{\alpha\beta}D^\beta(\phi D^{\alpha-\beta}f) = (-1)^{|\alpha|}fD^\alpha\phi. \tag{34}$$

O ponto de tudo isso é que (34) dá (32). Pois se $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, então

$$\begin{aligned} D^{\alpha}(fT)(\phi) &= (-1)^{|\alpha|}(fT)(D^{\alpha}\phi) = (-1)^{|\alpha|}T(fD^{\alpha}\phi) \\ &= \sum_{\beta\leq\alpha}(-1)^{|\beta|}c_{\alpha\beta}T(D^{\beta}(\phi D^{\alpha-\beta}f)) \\ &= \sum_{\beta\leq\alpha}c_{\alpha\beta}(D^{\beta}T)(\phi D^{\alpha-\beta}f) \\ &= \sum_{\beta\leq\alpha}c_{\alpha\beta}[(D^{\beta-\alpha}f)(D^{\beta}T)](\phi). \end{aligned}$$

5.1.5 Sequências de distribuições

A topologia em um espaço normado induzida pela norma é "muito forte", no sentido de que possui muitos conjuntos abertos. Por um lado, uma função definida neste espaço tem mais chances de ser contínua, por outro, subconjuntos deste espaço têm menos chances de serem compactos.

Veremos que topologias "mais fracas" que a topologia induzida pela norma em espaços normados. Estas topologias possuirão menos abertos que a topologia forte (da norma) mas serão fortes o suficiente para ainda obtermos propriedades bastante úteis, para o nosso texto.

Definição 5.2. (Topologia Fraca Induzida Por Funções): Sejam X um conjunto, $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma família de espaços topológicos e $f_\alpha : X \to X_\alpha$, com $\alpha \in A$ (uma família de índices), uma família de funções. A **topologia fraca** em X induzida pela coleção de funções $\{f_\alpha : \forall\alpha \in A\}$ é a menor topologia em X que faz com que cada f_α seja contínua, para todo $\alpha \in A$.

Tendo feito esta breve introdução sobre topologias induzidas por uma família de funções, podemos definir a primeira das duas topologias que serão os objetos centrais nesta seção. Seja X um espaço normado (sobre $\mathbb{R}$) e consideremos, para cada $f \in X^*$, a aplicação $\phi_f : X \to \mathbb{R}$ definida por $\phi_f(x) = f(x)$. Quando f percorre X^* obtemos uma família de aplicações $\{\phi_f : X \to \mathbb{R};\ f \in X^*\}$.

Definição 5.3. A **topologia fraca** em X, designado por $\sigma(X,X^*)$, é a topologia fraca induzida pela família $\{\phi_f : X \to \mathbb{R};\ f \in X^*\}$. Assim,a topologia fraca $\sigma(X,X^*)$ é a topologia menos fina (menor) sobre X que torna contínua qualquer aplicação ϕ_f.

Sejam X um espaço normado, X^* seu dual e X^{**} seu bidual. Temos em princípio, duas topologias em X^*: a topologia forte, gerada pela norma, e a topologia fraca $\sigma(X^*,X^{**})$. Por outro lado, podemos considerar a imersão isométrica $J : X \to X^{**}$ dada por $Jx = x^{**}$, onde $x^{**}(f) = f(x)$. Lembremos que $J(X) \subset X^{**}$, e que nem sempre esta aplicação é sobrejetora.

Para cada $x \in X$, definamos a aplicação $\phi_x : X^* \to \mathbb{R}$ tal que $\phi_x(f) = f(x)$. Quando x percorre X obtemos uma família de aplicações $\{\phi_x\}_{x\in X}$ de X^* em $\mathbb{R}$.

Definição 5.4. A **topologia fraca*** em X^*, designada também por $\sigma(X^*, X)$, é a topologia menos fina que torna contínua cada uma das aplicações ϕ_x, com x em X.

Observemos que, como $X \subset X^{**}$, a topologia $\sigma(X^*, X)$ é menos fina que a topologia $\sigma(X^*, X^{**})$, isto é, $\sigma(X^*, X)$ possui menos abertos que $\sigma(X^*, X^{**})$.

Como $\mathscr{D}'(\Omega)$ é o espaço de todas as funções lineares contínuas em $\mathscr{D}(\Omega)$, as considerações gerais feitas sobre *a topologia fraca* de um espaço dual*, fornecem para $\mathscr{D}'(\Omega)$ sua topologia fraca* induzida por $\mathscr{D}(\Omega)$ que torna $\mathscr{D}'(\Omega)$ um espaço localmente convexo. Se (T_i) é uma sequência de distribuições em Ω, a aplicação

$$T_i \longrightarrow T \quad \text{em} \quad \mathscr{D}'(\Omega) \tag{35}$$

refere-se a essa topologia fraca* e significa, explicitamente, que

$$\lim_{i\to\infty} T_i\phi = T\phi \qquad [\phi \in \mathscr{D}(\Omega)]. \tag{36}$$

Em particular, se (f_i) é uma sequência de funções localmente integráveis em Ω, as declarações "$f_i \longrightarrow T$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$" ou "(f_i) convergem para T no sentido de distribuição" significam que

$$\lim_{i\to\infty} \int_\Omega \phi(x) f_i(x)\, dx = T\phi \tag{37}$$

para toda $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Como na subseseção 5.1.1.

A simplicidade do próximo teorema, referente à diferenciação termo a termo de uma sequência, é bastante impressionante.

Teorema 5.2. *Suponha $T_i \in \mathscr{D}'(\Omega)$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$, e*

$$T\phi = \lim_{i\to\infty} T_i\phi \tag{38}$$

existe (como um número complexo) para toda $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Então $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, e

$$D^\alpha T_i \longrightarrow D^\alpha T \quad \text{em} \quad \mathscr{D}'(\Omega), \tag{39}$$

para todo multi-índice α.

Demonstração. Seja K um subconjunto compacto arbitrário de Ω. Como (38) vale para todo $\phi \in \mathscr{D}_K$, e como $\mathscr{D}_K$ é um espaço de Fréchet, o Teorema de Banach-Steinhaus (Teorema 2.3) implica que a restrição de T a $\mathscr{D}_K$ é contínua. Segue do Teorema 4.4 que T é contínua em

$\mathscr{D}(\Omega)$; em outras palavras, $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Consequentemente (38) implica que

$$\begin{aligned}(D^\alpha T)(\phi) &= (-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha\phi)\\ &= (-1)^{|\alpha|}\lim_{i\to\infty} T_i(D^\alpha\phi)\\ &= \lim_{i\to\infty}(D^\alpha T_i)(\phi).\end{aligned}$$

Q.E.D.

Lema 5.1. *Suponha que $G : X \times Y \to Z$ é bilinear e separadamente contínuo, X é um F-espaço e Y e Z são espaços vetoriais topológicos. Então,*

$$G(x_n, y_n) \longrightarrow G(x_0, y_0) \quad \text{em } Z,$$

sempre que $x_n \longrightarrow x_0$ em X e $y_n \longrightarrow y_0$ em Y. Se Y é métrico, segue-se que G é contínuo.

Teorema 5.3. *Se $T_i \longrightarrow T$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$ e $g_i \longrightarrow g$ em $C^\infty(\Omega)$, então $g_iT_i \longrightarrow gT$ em $\mathscr{D}'(\Omega)$.*

Nota: A declaração "$g_i \longrightarrow g$ em $C^\infty(\Omega)$"refere-se à topologia do espaço de Fréchet $C^\infty(\Omega)$.

Demonstração. Fixe $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Defina um funcional bilinear G em $C^\infty(\Omega) \times \mathscr{D}'(\Omega)$ por

$$G(g, T) = (gT)(\phi) = T(g\phi).$$

Então G é separadamente contínuo, e o Lema 5.1 implica que

$$G(g_i, T_i) \longrightarrow G(g, T), \text{ quando } i \longrightarrow \infty.$$

Portanto,

$$(g_iT_i)(\phi) \longrightarrow (gT)(\phi).$$

Q.E.D.

5.2 Suportes de Distribuições

Antes de passarmos para suporte de uma distribuição, vejamos o que é uma partição da unidade.

Definição 5.5. (Partição da Unidade): Uma partição da unidade em um espaço topológico X, é uma família de funções contínuas $\{\rho_i\}_{i\in L} : X \to [0,1]$ de forma que, para cada ponto $x \in X$:
(a) existe uma vizinhança de x em que todas, exceto uma quantidade finita, das funções são identicamente zero.

(b) a soma das funções em x é igual a 1, ou seja,

$$\sum_{i\in L} \rho_i(x) = 1.$$

Definição 5.6. (Partição da Unidade Subordinada): Dada uma cobertura do espaço topológico X por abertos $\bigcup_{i\in I} A_i \supseteq X$, uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{A_i\}$ é uma partição da unidade $\{\rho_i\}_{i\in I} : X \to [0,1]$ em que para todo x existe um i tal que o suporte da função ρ está contido no aberto A_i.

Definição 5.7. (Suporte de uma Distribuição): Suponha que $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Se ω é um subconjunto aberto de Ω e se $T\phi = 0$ para cada $\phi \in \mathscr{D}(\omega)$, dizemos que T se anula (absorvido) em ω. Seja W a união de todos os abertos $\omega \in \Omega$ nos quais T é absorvido. O complemento de W (relativo a Ω) é o suporte de T. Em notação,

$$W^c = \text{supp}(T).$$

Lema 5.2. *Se Γ é uma coleção de conjuntos abertos em $\mathbb{R}^n$, cuja união é Ω, então existe uma sequência $(\psi_i) \subset \Omega$, com $\psi_i \geq 0$, tal que*
(a) *cada ψ_i tem seu suporte em algum membro de Γ,*
(b) $\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i = 1$ *para todo $x \in \Omega$,*
(c) *a todo compacto $K \subset \Omega$ corresponde um inteiro m e um conjunto aberto $W \supset K$ tal que*

$$\psi_1(x) + \cdots + \psi_m(x) = 1$$

para todo $x \in W$.

Tal coleção $\{\psi_i\}$ é chamada de partição da unidade localmente finita em Ω, subordinada à cobertura aberta Γ de Ω. Observe que segue de (b) e (c) que todo ponto de Ω tem uma vizinhança que intercepta os suportes de apenas um número finito de ψ_i. Esta é a razão para chamar $\{\psi_i\}$ localmente finito.

Teorema 5.4. *Se W é como na definição 5.7, então T se anula em W.*

Demonstração. W é a união de conjuntos abertos ω em que T se anula. Seja Γ a coleção desses ω, e seja $\{\psi_i\}$ uma partição localmente finita da unidade em W, subordinada à Γ. Se $\phi \in \mathscr{D}(W)$, então $\phi = \sum \psi_i\phi$. Apenas um número finito de termos dessa soma é diferente de 0. Portanto,

$$T\phi = \sum T(\psi_i\phi) = 0$$

uma vez que cada ψ_i tem seu suporte em algum $\omega \in \Gamma$. **Q.E.D.**

Teorema 5.5. *Suponha que $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$.*
(a) *Se o suporte de algum $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ não intercepta* supp(T), *então $T\phi = 0$.*

(b) *Se* $\mathrm{supp}(T)$ *é vázio, então* $T \equiv 0$.

(c) *Se* $\psi \in C^\infty(\Omega)$ *e* $\psi = 1$ *em algum conjunto aberto* V *contendo* $\mathrm{supp}(T)$ *, então* $\psi T = T$.

(d) *Se* $\mathrm{supp}(T)$ *é um subconjunto compacto de* Ω*, então* T *tem ordem finita; de fato, existe uma constante* $C < +\infty$ *e um inteiro não negativo* N *tal que*

$$|T\phi| \leq C\|\phi\|_N$$

para todo $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$*. Além disso,* T *estende-se de forma única para um funcional linear contínuo em* $C^\infty(\Omega)$.

Demonstração. As partes (a) e (b) são imediatas. Se ψ for como em (c) e se $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, então o suporte de $\phi - \psi\phi$ não intercepta $\mathrm{supp}(T)$. Assim, $T\phi = T(\psi\phi) = (\psi T)(\phi)$, por (a).

Se $\mathrm{supp}(T)$ é compacto, segue do Lema 5.2 que existe $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$ que satisfaz (c). Fixe uma tal ψ; chame seu suporte de K. Pelo Teorema 5.1, existem c_1 e N tais que $|T\phi| \leq c_1\|\ \phi\|_N$ para toda $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$. A fórmula de Leibniz mostra que existe uma constante c_2 tal que $\|\psi\phi\|_N \leq c_2\|\phi\|_N$ para cada $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Daí,

$$|T\phi| = |T(\psi\phi)| \leq c_1\|\psi\phi\|_N \leq c_1c_2\|\phi\|_N$$

para cada $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Como $T\phi = T(\psi\phi)$ para toda $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, a fórmula

$$T_f = T(\psi f) \qquad [f \in C^\infty(\Omega)]$$

define uma extensão de T. Esta extensão é contínua, pois se $f_i \longrightarrow 0$ em $C^\infty(\Omega)$, então cada derivada de f_i tende a 0, uniformemente em subconjuntos compactos de Ω; a fórmula de Leibniz mostra, portanto, que $\psi f_i \longrightarrow 0$ em $\mathscr{D}(\Omega)$; uma vez que $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, segue-se que $Tf_i \longrightarrow 0$.

Se $f \in C^\infty(\Omega)$ e se K_0 é qualquer subconjunto compacto de Ω, existe $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ tal que $\phi = f$ em K_0. Segue que $\mathscr{D}(\Omega)$ é denso em $C^\infty(\Omega)$. Cada $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ tem, portanto, no máximo uma extensão contínua para $C^\infty(\Omega)$. **Q.E.D.**

Nota: Em (a) assume-se que ϕ se anula em algum conjunto aberto contendo $\mathrm{supp}(T)$, não apenas que ϕ se anula em $\mathrm{supp}(T)$. Tendo em vista (b), o próximo caso mais simples é aquele em que $\mathrm{supp}(T)$ consiste em um único ponto. Estas distribuições serão agora completamente descritas.

Lema 5.3. *Suponha que* $T_1, \ldots, T_n$ *e* T *são funcionais lineares em um espaço vetorial* X*. Seja*

$$N = \{x :\ T_1x = \cdots = T_nx = 0\}.$$

As três propriedades a seguir, são então equivalentes:

(a) *Existem escalares* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *tais que* $T = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_i$.

(b) *Existe* $\gamma < +\infty$ *tal que*

$$|Tx| \leq \gamma \max_{1 \leq i \leq n} |T_i x| \quad (x \in X).$$

(c) $Tx = 0$ *para cada* $x \in N$.

Teorema 5.6. *Suponha que* $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $p \in \Omega$, $\{p\}$ *é o suporte de* T, *e* T *tem ordem* N. *Então existem constantes* c_α *tais que*

$$T = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha D^\alpha \delta_p, \tag{40}$$

onde δ_p *é o funcional (de Dirac) de avaliação definido por*

$$\delta_p(\phi) = \phi(p). \tag{41}$$

Inversamente, toda distribuição da forma (40) tem $\{p\}$ *como suporte (a menos que* $c_\alpha = 0$ *para todo* α*).*

Demonstração. Supondo que (40) é válida, se

$$0 = D^\alpha \delta_p(\phi) = D^\alpha \phi(p),$$

para toda $\phi \in \mathscr{D}(\omega_\lambda)$, com $\omega_\lambda \subset \Omega$, então, como ϕ está variando e $p \in \Omega$ está fixo, tem-se que

$$\bigcup \omega_\lambda = \Omega - \{p\} \Rightarrow \operatorname{supp}(T) = \left(\bigcup \omega_\lambda\right)^c = \{p\}.$$

Portanto, $\operatorname{supp}(T) = \{p\}$, para todo multi-índice α. Isso prova a volta do teorema.

Agora, para a ida, suponha que $p = 0$ (a origem de $\mathbb{R}^n$) e considere um $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ que satisfaça

$$(D^\alpha \phi)(0) = 0 \quad \text{para todo } \alpha \text{ com } |\alpha| \leq N. \tag{42}$$

Nosso primeiro objetivo é provar que (42) implica $T\phi = 0$.

Se $\eta > 0$, existe uma bola compacta $K \subset \Omega$, com centro em 0, tal que

$$|D^\alpha \phi| \leq \eta \quad \text{em} \quad K, \quad \text{se} \quad |\alpha| = N. \tag{43}$$

Afirmamos que

$$|D^\alpha \phi(x)| \leq \eta \cdot n^{N-|\alpha|} |x|^{N-|\alpha|} \quad (x \in K, \ |\alpha| \leq N). \tag{44}$$

Quando $|\alpha| = N$, isto é (43). Suponha que $1 \leq i \leq N$, e que (44) seja provado para todo α com $|\alpha| = i$, e suponha que $|\beta| = i - 1$. O gradiente de $D^\beta \phi$ é o vetor

$$\nabla D^\beta \phi = (D_1 D^\beta \phi, \ldots, D_n D^\beta \phi). \tag{45}$$

Nossa hipótese de indução implica que

$$|(\nabla D^{\beta}\phi)(x)| \leq n \cdot \eta \cdot n^{N-i}|x|^{N-i} \quad (x \in K), \tag{46}$$

e como $(D^{\beta}\phi)(0) = 0$, o Teorema do Valor Médio agora mostra que (44) vale com β no lugar de α. Assim (44) está provado.

Escolhendo uma função auxiliar $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, que é 1 em alguma vizinhança de 0 e cujo suporte está na bola unitária B de $\mathbb{R}^n$. Definimos

$$\psi_r(x) = \psi\left(\frac{x}{r}\right) \qquad (r > 0,\ x \in \mathbb{R}^n). \tag{47}$$

Se r é pequeno o suficiente, o suporte de ψ_r está em $rB \subset K$. Pela fórmula de Leibniz,

$$D^{\alpha}(\psi_r\phi)(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta}(D^{\alpha-\beta}\psi)\left(\frac{x}{r}\right)(D^{\beta}\phi)(x)r^{|\beta|-|\alpha|}. \tag{48}$$

Segue-se agora de (44) que

$$\|\psi_r\phi\|_N \leq \eta \cdot C\|\psi\|_N, \tag{49}$$

quando r for pequeno o suficiente; aqui C depende de n e N.

Como T tem ordem N, existe uma constante C_1 tal que $|T\psi| \leq C_1\|\psi\|_N$ para todo $\psi \in \mathscr{D}_K$. Como $\psi = 1$ em uma vizinhança do suporte de T, segue agora de (49) e (c) do Teorema 5.5 que

$$|T\phi| = |T(\psi_r\phi)| \leq C_1\|\psi_r\phi\|_N \leq \eta \cdot C \cdot C_1\|\psi\|_N.$$

Como η era arbitrário, provamos que $T\phi = 0$ sempre que (48) vale. Em outras palavras, T se anula na interseção dos núcleos dos funcionais $D^{\alpha}\delta_0$ ($|\alpha| \leq N$), pois

$$(D^{\alpha}\delta_0)\phi = (-1)^{|\alpha|}\delta_0(D^{\alpha}\phi) = (-1)^{|\alpha|}(D^{\alpha}\phi)(0). \tag{50}$$

A representação (40) segue agora do Lema 5.3. **Q.E.D.**

5.3 Distribuições como derivadas

Foi apontado na introdução deste capítulo que um dos objetivos da teoria das distribuições é ampliar o conceito de função de tal forma que as diferenciações parciais possam ser realizadas sem restrições. As distribuições satisfazem este requisito. Analogamente, como veremos agora, toda distribuição é (pelo menos localmente) $D^{\alpha}f$ para alguma função contínua f e algum multi-índice α. Se toda função contínua deve ter derivadas parciais de todas as ordens, nenhuma subclasse apropriada das distribuições pode, portanto, ser adequada. Nesse sentido, a extensão de distribuição do conceito de função é tão econômica quanto possível.

Teorema 5.7. *Suponha que $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, e K é um subconjunto compacto de Ω. Então existe* *uma função contínua f em Ω e existe um multi-índice α tal que*

$$T\phi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x)(D^{\alpha}\phi)(x)\, dx \tag{51}$$

para cada $\phi \in \mathscr{D}_K$.

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que $K \subset Q$, onde Q é o cubo unitário em $\mathbb{R}^n$, consistindo de todo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ com $0 \leq x_i \leq 1$ para $i = 1, \ldots, n$. O Teorema do Valor Médio mostra que

$$|\psi| \leq \max_{x \in Q} |(D_i\psi)(x)| \qquad (\psi \in \mathscr{D}_Q) \tag{52}$$

para $i = 1, \ldots, n$. Coloquemos $G = D_1 D_2 \cdots D_n$. Para $y \in Q$, seja $Q(y)$ denotemos o subconjunto de Q em que $x_i \leq y_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Então,

$$\psi(y) = \int_{Q(y)} (G\psi)(x)\, dx \qquad (\psi \in \mathscr{D}_Q). \tag{53}$$

Se N for um inteiro não negativo e se (52) for aplicado a derivadas sucessivas de ψ, (53) leva à desigualdade

$$\|\psi\|_N \leq \max_{x \in Q} |(G^N\psi)(x)| \leq \int_Q |(G^{N+1}\psi)(x)|\, dx, \tag{54}$$

para cada $\psi \in \mathscr{D}_Q$. Como $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, existem N e C tais que

$$|T\phi| \leq C\|\phi\|_N \qquad (\phi \in \mathscr{D}_K).$$

Portanto, (54) mostra que

$$|T\phi| \leq \int_K |(G^{N+1}\phi)(x)|\, dx \qquad (\phi \in \mathscr{D}_K). \tag{55}$$

Por (53), G é injetora em $\mathscr{D}_Q$, logo em $\mathscr{D}_K$. Consequentemente, $G^{N+1} : \mathscr{D}_K \to \mathscr{D}_K$ é injetora. Um funcional T_1 pode, portanto, ser definido na faixa Y de G^{N+1} por

$$T_1 G^{N+1}\phi = T\phi \qquad (\phi \in \mathscr{D}_K), \tag{56}$$

e (55) mostra que

$$|T_1\psi| \leq C \int_K |\psi(x)|\, dx \qquad (\psi \in Y). \tag{57}$$

O Teorema de Hahn-Banach (Teorema 2.2), portanto, estende T_1 a um funcional linear limitado em $\mathscr{L}^1(K)$. Em outras palavras, existe uma função limitada de Borel g em K tal que

$$T\phi = T_1 G^{N+1}\phi = \int_K g(x)(T^{N+1}\phi)(x)\, dx \qquad (\phi \in \mathscr{D}_K). \tag{58}$$

Definimos $g(x) = 0$ fora de K e coloque

$$f(y) = \int_{-\infty}^{y_1} \cdots \int_{-\infty}^{y_n} g(x)\, dx_n \cdots dx_1 \qquad (y \in \mathbb{R}^n).$$

Então f é contínua, e as n integrações por partes mostram que (58) dá

$$T\phi = (-1)^n \int_\Omega f(x)(G^{N+2}\phi)(x)\, dx \qquad (\phi \in \mathscr{D}_K).$$

Isto é (51), com $\alpha = (N+2, \ldots, N+2)$, exceto para uma possível mudança de sinal. **Q.E.D.**

Quando T tem suporte compacto, o resultado local que acabamos de provar pode ser transformado em global.

Teorema 5.8. *Suponha que K seja compacto, V e Ω sejam abertos em $\mathbb{R}^n$ e $K \subset V \subset \Omega$. Suponha também que $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, que K é o suporte de T, e que T tem ordem N. Então existem finitas funções contínuas f_β em Ω (uma para cada multi-índice β com $\beta_i \leq N+2$ para $i = 1, \ldots, n$) com suportes em V, tal que*

$$T = \sum_\beta D^\beta f_\beta \tag{59}$$

Essas derivadas devem, é claro, ser entendidas no sentido de distribuição: (59) significa que

$$T\phi = \sum_\beta (-1)^{|\beta|} \int_\Omega f_\beta(x)(D^\beta \phi)(x)\, dx \qquad [\phi \in \mathscr{D}(\Omega)]. \tag{60}$$

Demonstração. Escolha um conjunto aberto W com fecho compacto $\overline{W}$, tal que $K \subset W$ e $\overline{W} \subset V$. Aplicando o Teorema 5.7 com $\overline{W}$ no lugar de K. Tomemos $\alpha = (N+2, \ldots, N+2)$. A demonstração do Teorema 5.7 mostra que existe uma função contínua f em Ω tal que

$$T\phi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x)(D^\alpha \phi)(x)\, dx \qquad [\phi \in \mathscr{D}(W)]. \tag{61}$$

Podemos multiplicar f por uma função contínua que é 1 em $\overline{W}$ e cujo suporte está em V, sem ferir (61). Fixe $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, com suporte em W, tal que $\psi = 1$ em algum conjunto aberto contendo K. Então (61) implica, para cada $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, que

$$\begin{aligned} T\phi &= T(\psi\phi) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f \cdot D^\alpha(\psi\phi) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f \cdot \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} D^{\alpha-\beta}\psi D^\beta \phi. \end{aligned}$$

Isto é (60), com

$$f_\beta = (-1)^{|\alpha-\beta|} c_{\alpha\beta} f \cdot D^{\alpha-\beta}\psi \qquad (\beta \leq \alpha).$$

Q.E.D.

Nosso próximo teorema descreve a estrutura global das distribuições.

Teorema 5.9. *Suponha $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Existem funções contínuas g_α em Ω, uma para cada multi-índice α, tal que*
(a) cada compacto $K \subset \Omega$ intercepta os suportes de apenas um número finito de g_α , e
(b) $T = \sum_\alpha D^\alpha g_\alpha$.

Se T tem ordem finita, então as funções g_α podem ser escolhidas de modo que apenas um número finito seja diferente de 0.

Demonstração. Existem cubos compactos Q_i e conjuntos abertos V_i $(i = 1, 2, \ldots)$ tal que $Q_i \subset V_i \subset \Omega$, Ω é a união dos Q_i's e, nenhum subconjunto compacto de Ω intercepta infinitamente muitos V_i. Existem $\phi_i \in \mathscr{D}(V_i)$ tal que $\phi_i = 1$ em Q_i. Usando esta sequência (ϕ_i) para construir uma partição da unidade $\{\psi_i\}$, como no Lema 5.2 ; cada ψ_i tem seu suporte em V_i. O Teorema 5.8 se aplica a cada $\psi_i T$. Isso mostra que há um número finito de funções contínuas $f_{i,\alpha}$ com suportes em V_i, tal que

$$\psi_i T = \sum_\alpha D^\alpha f_{i,\alpha}. \tag{62}$$

Definindo

$$g_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} f_{i,\alpha}. \tag{63}$$

Essas somas são localmente finitas, no sentido de que cada compacto $K \subset \Omega$ intercepta os suportes de apenas um número finito de $f_{i,\alpha}$. Segue que cada g_α é contínuo em Ω e que (a) vale.

Como $\phi = \sum \psi_i \phi$, para cada $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, temos $T = \sum \psi_i T$, e portanto (62) e (63) dão (b). A afirmação final segue do Teorema 5.8. **Q.E.D.**

Com essa teoria, agora bem estabelecida, façamos uso para algumas aplicações.

Para mais informações sobre esses temas, consultar [1], [3], [13], [14], [15], [16] e [12].

6 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS E EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES EM $\mathscr{L}^2$

Neste capítulo, apresentaremos algumas aplicações das distribuições vistas anteriomente, em equações diferenciais. Comecemos com o seguinte.

Definição 6.1. Uma **solução fundamental** de um operador P em $\mathscr{D}(\Omega)$ é uma distribuição u tal que

$$Pu = \delta \tag{64}$$

onde $\delta = \delta_0$ é a Distribuição de Dirac no caso particular em que $x = 0$, dada por:

$$\delta(\phi) = \phi(0). \tag{65}$$

O significado de (64) é no sentido das distribuições, ou seja, dada $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, e mult-índice α, tem-se

$$\langle Pu, \phi \rangle = \left\langle u, \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} c_\alpha D^\alpha \phi \right\rangle = \phi(0).$$

O operador $\sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} c_\alpha D^\alpha \phi$ é chamado de **transposto** de P.

Definição 6.2. Chamaremos de **operador diferencial com coeficientes constantes** a um operador $P : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathscr{D}(\Omega)$ da forma

$$P = \sum_{\alpha} c_\alpha \partial^\alpha$$

com o multi-índice $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ e $c_\alpha \in \mathbb{C}$.

Exemplo 6.1. Operador de Cauchy-Riemann: $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, tem como solução fundamental a função $u(z) = 1/\pi z$, holomorfa em $\mathbb{C} - \{0\}$ e com polo simples na origem.

Definição 6.3. (Operador Hipoelítico): Seja $P = \sum_{\alpha} c_\alpha(x) D^\alpha$ um operador diferencial com coeficiente $c_\alpha \in C^\infty(\Omega)$. P é dito hipoelítico em Ω, quando, dado um subconjunto aberto $U \subset \Omega$ e uma distribuição $L \in \mathscr{D}'(U)$, a condição $PL \in C^\infty(U)$ implicar $L \in C^\infty(U)$.

Teorema 6.1. *Seja P um operador diferencial com coeficientes constantes. Se P é hipoelítico, toda solução fundamental é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Reciprocamente, se existir uma solução fundamental que seja uma função de classe C^∞ em $\mathbb{R}^n - \{0\}$, o operador P é hipoelítico.*

Na demonstração desse teorema, apenas um lado é de forma simples, a outra, requer de muitos resultados sobre equações diferenciais e sobre convolução. Para não sobrecarregar o texto, omitiremos a prova. Mas pode ser encontrada em [17].

Teorema 6.2. *Todo operador diferencial P com coeficientes constantes possui pelo menos uma solução fundamental.*

Demonstração. Para isso, primeiro verifiquemos que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que; $\left(1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^j$ tem solução fundamental em $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Apliquemos a transformada de Fourier em $(1-\Delta)^j f = \delta$, onde Δ é o operador laplaciano. Ela transforma a n-ésima derivação de f em produto de $(i|\xi|)^n$ pela transformada de f (que denotamos por $\hat{f}$) e também leva a Distribuição de Dirac na Distribuição da função constante igual a 1, portanto

$$[1-(i|\xi|)^2]^j \hat{f}(\xi) = 1 \Longleftrightarrow \hat{f}(\xi) = (1+|\xi|^2)^{-j},$$

a qual está em $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n)$ para certo $j \in \mathbb{N}$ e, portanto, inversível pela transformada de Fourier ser um isomorfismo nesse espaço.

Agora, podemos provar o teorema usando a existência de $u \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n)$ que satisfaz $Pu = f$, concluímos a prova observando apenas que $(1-\Delta)^j u$ é solução fundamental de P. **Q.E.D.**

6.1 Aplicação para o operador derivação

Seja $P = \frac{d}{dx}$ o operador derivação atuando em $\mathscr{D}(\Omega)$, com $\Omega = \mathbb{R}$. Encontremos sua solução fundamental. Isto é, queremos encontrar $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ que satisfaça

$$Pu(\phi) = u'(\phi) = -u(\phi') = \delta(\phi) = \phi(0) \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

isto é, basta satisfazer

$$-u(\phi') = \phi(0) \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Demonstração. Afirmamos que é solução fundamental do operador P, a distribuição associada à função H, definida por

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0; \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Apesar de ser simples, sendo descontínua apenas na origem, essa função é muito importante e é chamada função de Heaviside. Provemos a afirmação. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
-H(\phi') &= -\int_{\mathbb{R}} H(x)\phi'(x)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{0} H(x)\phi'(x)dx - \int_{0}^{\infty} H(x)\phi'(x)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{0} 0 \cdot \phi'(x)dx - \int_{0}^{\infty} 1 \cdot \phi'(x)dx \\
&= -\int_{0}^{\infty} \phi'(x)dx \\
&= -\left[\lim_{x\to\infty} \phi(x) - \phi(0)\right] \\
&= \phi(0),
\end{aligned}$$

para toda $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. A identidade $\lim_{x\to\infty} \phi(x) = 0$ é válida porque ϕ possui suporte compacto.
Q.E.D.

Encontramos outras soluções também por adicionar constantes (translações); isto é, da forma $H(x)+a$, com $a \in \mathbb{R}$.

6.2 Operadoes Diferenciáveis em $\mathscr{L}^2$

Nosso interesse agora, é estudar os operadores diferenciáveis no espaço $\mathscr{L}^2(\Omega)$, das funções quadrado integráveis, isto é, das $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisfazem

$$\left(\int_\Omega |f|^2\, dx\right)^{1/2} < +\infty.$$

Um dos nossos objetivos é mostrar que todo operador diferencial com coeficientes constantes admite solução em $\mathscr{L}^2(\Omega)$ no sentido das distribuições, isto é, dados $f \in \mathscr{L}^2(\Omega)$ e P um operador diferencial com coeficientes constantes, existe $u \in \mathscr{L}^2(\Omega)$ tal que

$$Pu = f. \tag{66}$$

Para isso, vamos mostrar que, para um operador qualquer, (66) possui solução no sentido das distribuições em $\mathscr{L}^2(\Omega)$ se, e somente se, a desigualdade (70) for satisfeita. E a sobrejetividade dos operadores diferenciais com coeficientes constantes será consequência da *Desigualdade de Hörmander*. Antes disso, apresentamos o que é o transposto de um operador.

6.3 Transposto de um operador

Seja Ω aberto de $\mathbb{R}^n$ e seja $P(x,D)$ um operador diferencial com coeficientes em $C^\infty(\Omega)$.

Definição 6.4. O transposto $P^t = P^t(x,D)$ é dado pela relação

$$\langle P\phi, \psi\rangle = \langle \phi, P^t\psi\rangle, \qquad \phi, \psi \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{67}$$

Como

$$\begin{aligned}\langle P\phi, \psi\rangle &= \sum_\alpha \int_\Omega c_\alpha(x) D^\alpha \phi(x)\psi(x)\, dx \\ &= \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \phi(x) D^\alpha(c_\alpha(x)\psi(x))\, dx.\end{aligned}$$

Tem-se que

$$P^t(x,D)\psi = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(c_\alpha(x)\psi(x)). \tag{68}$$

Quando os coeficiente são constantes, o transposto de P é igual a

$$P^t = \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} c_\alpha D^\alpha.$$

Queremos obter uma condição necessária e suficiente para que a equação (66) com $f \in \mathscr{L}^2(\Omega)$, tenha uma solução $u \in \mathscr{L}^2(\Omega)$. Quando isso ocorre, temos que, $P[\mathscr{L}^2(\Omega)] \supset \mathscr{L}^2(\Omega)$, isto é, P é sobrejetiva.

6.4 Soluções dos operadores em $\mathscr{L}^2$

Voltemos ao problema de solução de operadores, que consiste em, sendo P em $\mathscr{D}(\Omega)$ um operador qualquer e dado $f \in \mathscr{L}^2(\Omega)$, encontrar $u \in \mathscr{L}^2(\Omega)$ que resolve a equação (66). Anunciamos o seguinte teorema, que nos fornece a condição para isso.

Teorema 6.3. *Uma condição necessária e suficiente afim de que, dada $f \in \mathscr{L}^2(\Omega)$, exista uma solução para*

$$Pu = f \tag{69}$$

em $\mathscr{L}^2(\Omega)$ é que, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\phi\|_{\mathscr{L}^2} \leq C \|P^t \phi\|_{\mathscr{L}^2}, \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{70}$$

Demonstração. Suponhamos que a condição (70) esteja satisfeita e considere o subespaço vetorial

$$P^t[\mathscr{D}(\Omega)] = \{P^t \phi : \ \phi \in \mathscr{D}(\Omega)\}$$

de $\mathscr{L}^2(\Omega)$. Em virtude da desigualdade (70), temos que $P^t \phi = 0$, implica $\phi = 0$. Logo, P^t é injetivo e

$$\begin{aligned} T : P^t[\mathscr{D}(\Omega)] &\longrightarrow \mathscr{D}(\Omega) \\ P^t \phi &\mapsto \phi \end{aligned}$$

está bem definida. Ela é contínua na topologia induzida de $\mathscr{L}^2(\Omega)$ porque é limitada pela desigualdade (70). O domínio $P^t[\mathscr{D}(\Omega)]$ dessa aplicação é um espaço de Hilbert (subespaço de $\mathscr{L}^2(\Omega)$).

Assim, tomando a extensão contínua que se anula em $(P^t[\mathscr{D}(\Omega)])^\perp$, o operador T pode ser extendido e ser em $\mathscr{L}^2(\Omega)$ com norma no máximo C. Logo,

$$TP^t \phi = \phi, \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Dada $f \in \mathscr{L}^2(\Omega)$, tem-se

$$\begin{aligned}\langle f,\phi\rangle &= \langle f, TP^t\phi\rangle \\ &= \langle f,(PT^t)^t\phi\rangle \\ &= \langle PT^t f,\phi\rangle, \qquad \forall\phi\in\mathscr{D}(\Omega).\end{aligned}$$

Pondo $u = T^t f$, temos então que $Pu = f$, no sentido das distribuições, ou seja, $u = T^t f$ é uma solução em $\mathscr{L}^2(\Omega)$ para (69), com $f \in \mathscr{L}^2(\Omega)$.

Reciprocamente, suponhamos que $P[\mathscr{L}^2(\Omega)] \supset \mathscr{L}^2(\Omega)$. Seja

$$B = \{\phi\in\mathscr{D}(\Omega):\ \|P^t\phi\|_{\mathscr{L}^2}\leq 1\}.$$

Por hipótese, dada $f \in \mathscr{L}^2(\Omega)$, existe $u \in \mathscr{L}^2(\Omega)$ tal que $Pu = f$, obtemos

$$\begin{aligned}\sup_{\phi\in B}|\langle f,\phi\rangle| &= \sup_{\phi\in B}|\langle Pu,\phi\rangle| \\ &= \sup_{\phi\in B}|\langle u,P^t\phi\rangle| \\ &\leq \sup_{\phi\in B}\|u\|_{\mathscr{L}^2}\cdot\sup_{\phi\in B}\|P^t\phi\|_{\mathscr{L}^2} \\ &\leq \|u\|_{\mathscr{L}^2}.\end{aligned}$$

O que mostra que B é fracamente limitado em $\mathscr{L}^2(\Omega)$, logo, pelo Teorema de Banach-Steinhaus é fortemente limitado em $\mathscr{L}^2(\Omega)$. Assim, existe uma constante $C > 0$ tal que $\|\phi\|_{\mathscr{L}^2} \leq C$, para toda $\phi \in B$.

Tomemos $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ e suponhamos que $P^t\phi \neq 0$. Logo, $\phi/\|P^t\phi\|_{\mathscr{L}^2} \in B$, como é para toda $\phi \in B$, em particular

$$\left\|\frac{\phi}{\|P^t\phi\|_{\mathscr{L}^2}}\right\|_{\mathscr{L}^2} \leq C \Leftrightarrow \|\phi\|_{\mathscr{L}^2} \leq C\|P^t\phi\|_{\mathscr{L}^2},$$

o que prova a desigualdade (70), para toda $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ tal que $P^t\phi \neq 0$. Agora, se $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ é tal que $P^t\phi = 0$, então $\phi = 0$. De fato, por hipótese, dada $f \in \mathscr{L}^2(\Omega)$,

$$\langle f,\phi\rangle = \langle Pu,\phi\rangle = \langle u,P^t\phi\rangle = \langle u,0\rangle = 0.$$

Como é para toda $f \in \mathscr{L}^2(\Omega)$, implica que $\phi = 0$. Portanto, (70) é válida para qualquer caso.

Q.E.D.

O motivo de utilizar $\mathscr{L}^2$ é justamente porque ele é um Espaço de Hilbert, logo tem seu espaço dual identificado como ele mesmo.

Para mais informações sobre esses temas, consultar [17], [13], [14], [15], [1] e [16].

A Desigualdade de Hörmander

Nesta seção, apresentaremos a Desigualdade de Hörmander, uma desigualdade muito interessante e importante na teoria das distribuições, em relação à soluções de equações diferenciais. O opolinômio característico de um operador diferencial $P = \sum_\alpha a_\alpha \partial^\alpha$ é o polinômio

$$p(\xi) = \sum_\alpha c_\alpha \cdot \xi^\alpha,$$

com o multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Denotemos as derivadas de $p(\xi)$ de multi-índice α por

$$p^\alpha(\xi) = \partial^\alpha[p(\xi)]$$

e por P^α o operador cujo polinômio característico seja $p^\alpha(\xi)$ da forma que está definido acima.

Teorema A.1. *(Desigualdade de Hörmande): Seja Ω aberto e subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e P um operador diferencial parcial com coeficientes constantes. Então, para cada multi-índice α, existe $C_\alpha \geq 0$ tal que*

$$\|P^\alpha \phi\|_{\mathscr{L}^2} \leq C_\alpha \|P\phi\|_{\mathscr{L}^2}, \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{71}$$

Demonstração. Indiquemos o operador P^* como a adjunta de P, definida pela relação

$$\langle P\phi, \psi \rangle_{\mathscr{L}^2} = \langle \phi, P^*\psi \rangle_{\mathscr{L}^2}, \qquad \forall \phi, \psi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Como P tem coeficientes constantes, não há perda de generalidade em supor que $0 \in \Omega$. Ponhamos

$$P_j = P^\alpha, \text{ se } \alpha = (0, \ldots, \frac{1}{j}, \ldots, 0), \text{ com } 1 \leq j \leq n.$$

e

$$P_{jj} = P^\alpha, \text{ se } \alpha = (0, \ldots, \frac{2}{j}, \ldots, 0), \text{ com } 1 \leq j \leq n.$$

Pela fórmula de Leibniz, vem:

$$P(x_j\phi) = x_j P\phi - iP_j\phi.$$

O produto interno desta últma relação com $P_j\phi$, nos fornece

$$\langle P(x_j\phi), P_j\phi \rangle = \langle x_j P\phi, P_j\phi \rangle - i\|P_j\phi\|^2. \tag{72}$$

Se, no primeiro membro da relação (72), transpusermos os operadores P e P_j, obtermos, observando que estes operadores comutam pois tem coeficientes constantes, assim

$$\langle P^*(x_j\phi), P^*\phi \rangle = \langle x_j P\phi, P_j\phi \rangle - i\|P_j\phi\|^2. \tag{73}$$

Por outro lado, aplicamos a fórmula de Leibniz novamente, o primeiro membro de (73) se escreve como

$$\langle P_j^*(x_j\phi), P^*\phi\rangle = \langle x_j P_j^*\phi, P^*\phi\rangle - i\langle P_{jj}^*\phi, P^*\phi\rangle. \tag{74}$$

Combinando (73) e (74), vem:

$$i\|P_j\phi\|^2 = \langle x_j P\phi, P_j\phi\rangle - \langle x_j P_j^*\phi, P^*\phi\rangle + i\langle P_{jj}^*\phi, P^*\phi\rangle.$$

Pondo $\delta_j = \sup_{1\leq j\leq n} |x_j|$, obtemos a desigualdade

$$\|P_j\phi\|^2 \leq 2\delta_j\|P\phi\|\cdot\|P_j\phi\| + \|P_{jj}^*\phi\|\cdot\|P^*\phi\|,$$

levando em conta que $\|P\phi\| = \|P^*\phi\|$ (auto-adjunto), pois P tem coeficientes constantes. Logo, teremos que

$$\|P_j\phi\| \leq 2\delta_j\|P\phi\| + \frac{\|P_{jj}^*\phi\|}{\|P_j\phi\|}\|P\phi\|, \;\; \text{com } 1\leq j\leq n. \tag{75}$$

Daqui por diante, raciocinaremos por indução com respeito ao grau de P. Suponhamos que P seja um operador de grau 1. Teremos $P_{jj} = 0$ e a desigualdade (75) se transforma em

$$\|P_j\phi\| \leq 2\delta_j\|P\phi\|,$$

e, portanto, a desigualdade (71) fica, neste caso, demonstrada. Suponhamos, por indução, que (71) seja verdadeira para operadoradores diferenciais parciais de grau menor ou igual a $m-1$, segue-se de (71) que

$$\|P_{jj}\phi\| \leq C\|P_j\phi\|,$$

onde C é uma constante conveniente. Substituindo-se esta última desigualdade na (75), vem:

$$\|P_j\phi\| \leq (2\delta_j + C)\|P\phi\|, \;\; \text{com } 1\leq j\leq n.$$

Logo, (71) está verificada, para todo operador P de gráu m e todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, com $|\alpha| = 1$. Supondo que $|\alpha| > 1$, podemos escrever $P^\alpha = P_j^\beta$, para algum j, com $j = 1,\ldots,n$. Portanto, temos então

$$\|P^\alpha\phi\| = \|P_j^\beta\phi\| \leq C_\beta\|P_j\phi\| \leq C_\beta(2\delta_j + C)\|P\phi\|.$$

Q.E.D.

Obeservação: Dado um monômio $p(\xi)$, podemos encontrar um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $p^\alpha(\xi)$ é uma constante. Assim, como o transposto de todo operador diferencial com coeficientes constantes é também um operador diferencial com coeficientes constantes, temos o seguinte corolário desse teorema.

Corolário A.1.1. Seja P um operador diferencial parcial com coeficientes constantes. Então, existe $C \geq 0$ tal que

$$\|\phi\|_{\mathscr{L}_2} < C\|P^t\phi\|_{\mathscr{L}^2} \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Ou seja, extamente o Teorema 6.3, como consequência.

REFERÊNCIAS

[1] Walter Rudin. **Functional Analysis**. 2.ed. McGraw-Hill, 1991.

[2] Walter Rudin. **Principles of Mathematical Analysis**. 3.ed. McGraw-Hill, 1976.

[3] Walter Rudin. **Real and Complex Analysis**. 3.ed. McGraw-Hill, 1987.

[4] John B. Conway. **A Course in Functional Analysis**. 2.ed. Springer New York, 1990.

[5] John B. Conway. **Functions of One Complex Variable Vol. I**. 2.ed. Springer, 1978.

[6] Paul R. Halmos. **A Hilbert Space, Problem Book**. 2.ed. Springer, 1982.

[7] Paul R. Halmos. **Finite-Dimensional Vector Spaces**. Springer, 1987.

[8] Kenneth Hoffman and Ray Kunze. **Linear Algebra**. 2.ed. Prentice-Hall, Inc., 1971.

[9] Erwin Kreyszig. **Introductory Functional Analysis With Applications**. John Wiley & Sons. Inc., 1978.

[10] Robert G. Bartle. **A Modern Theory of Integration**. Graduate Studies in Mathematics: AMS, 2001.

[11] Gerald B. Folland. **Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications**. 2.ed. John Wiley & Sons, Inc., 1999.

[12] James R. Munkres. **Topology**. 2.ed. Prentice-Hall, Inc., 2000.

[13] Jorge Hounie. **Teoria Elementar das Distribuições**. 12° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1979.

[14] Thiago Henrique. **Teoria das Distribuições e seus Espaços Topológicos**. Trabalho de Conclusão de Curso, UFSCar, 2010.

[15] Olivaine S. Queiroz. **Notas de Aula de Análise Funcional**. 2013.

[16] François Treves. **Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels**. Academic Press. 1967.

[17] J. Neto Barros. **Uma Introdução às Equações Diferenciais Parciais com Coeficientes Constantes**. Notas de Curos. Departamento de Matemática - UFPE. 1976.