



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS A.C SIMÕES
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

Geometria das Superfícies Mergulhadas no $\mathbb{R}^3$

DAVID TAVARES DA SILVA

Maceió - AL

2024

DAVID TAVARES DA SILVA

Geometria das Superfícies Mergulhadas no $\mathbb{R}^3$

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao corpo docente do Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alagoas-UFAL, Campus A.C. Simões, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva

Maceió - AL

2024

**Catálogo na Fonte Universidade
Federal de Alagoas Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

S586g

Silva, David Tavares da.

Geometria das superfícies mergulhadas no $\mathbb{R}^3$ / David Tavares da Silva. -
2024.

[36] f. : il.

Orientador: Márcio Henrique Batista da Silva.

Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura)

i) Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió,
2024.

Bibliografia: f. [36].

CDU: 514.7

DAVID TAVARES DA SILVA

Geometria das Superfícies Mergulhadas no $\mathbb{R}^3$

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao corpo docente do Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alagoas-UFAL, Campus A.C. Simões, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática, aprovado em 2024 pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da
Silva Instituto de Matemática - UFAL
Orientador

Prof. Dr. José Anderson de Lima e Silva
Instituto de Matemática - UFAL
Examinador

Prof. Dr. Matheus Barbosa Martins
Centro de Tecnologia – UFAL
Examinador

DAVID TAVARES DA SILVA

A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo.
(Galileu Galilei)

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus, pois sem a presença de Cristo em minha vida nada disso seria possível acontecer. Ele é meu salvador, é quem me guia e me dá forças para vencer cada obstáculo encontrado nessa longa caminhada chamada vida.

Em seguida, quero agradecer a minha família, especialmente meus pais, Genivaldo Tavares e Nelma Maria, por me dar oportunidade e condições para reconstruir um sonho que em mim estava adormecido. A minha esposa Dianelle Rodrigues e minha filha Isabella Rodrigues que são meus maiores incentivos para que eu nunca pensasse em desistir, sempre busquei nelas, energia para seguir em frente e vencer todos os desafios que encontrei no ambiente acadêmico. Agradeço também ao meu irmão Dhemerson Jason por toda palavra de incentivo e todo apoio moral não só no curso, mas em toda minha vida.

Sou grato a todo corpo docente do Instituto de Matemática, em especial ao professor e orientador Márcio Batista por todo suporte nesse trabalho e nos projetos de iniciação científica que fizemos partes, ao professor Anderson Lima por me dar forças e me ajudar a traçar o melhor caminho dentro da universidade e aos meus colegas de curso que juntos tornamos o caminho um pouco menos árduo e prazeroso.

*E nossa história não estará pelo avesso assim, sem final feliz,
teremos coisas bonitas para contar. E até lá, vamos viver,
temos muito ainda por fazer, não olhe para trás, apenas
começamos, o mundo começa agora, apenas começamos.*

*(Trecho da música “Metal contra as nuvens”
de Renato Russo)*

Resumo

Nesse trabalho iremos fazer um breve estudo sobre curvatura média e superfícies, demonstrando alguns resultados e apresentando alguns exemplos. Além disso, o objetivo desta dissertação é apresentar uma demonstração de R. Reilly para o Teorema de Alexandrov. O teorema estabelece que

As únicas hipersuperfícies compactas, conexas, de curvatura média constante, mergulhadas no espaço Euclidiano são as esferas.

O teorema de Alexandrov foi provado por A. D. Alexandrov no artigo Uniqueness Theorems for Surfaces in the Large V, publicado em 1958 pela Vestnik Leningrad University, volume 13, número 19, páginas 5 a 8. Em sua demonstração, Alexandrov usou o famoso Princípio de Tangência, introduzido por ele no citado artigo.

Palavras-Chave: Curvatura média; Laplaciano; Alexandrov.

Abstract

In this work we will make a brief study about mean curvature and surfaces, demonstrating some results and presenting some examples. In addition, the aim of this dissertation is to present a proof of R. Reilly's Alexandrov Theorem. The theorem states

The only compact, connected, constant mean curvature hypersurfaces immersed in Euclidean space are the spheres.

Alexandrov's theorem was proved by A. D. Alexandrov in the article Uniqueness Theorems for Surfaces in the Large V, published in 1958 by Vestnik Leningrad University, volume 13, number 19, pages 5 to 8. In his demonstration, Alexandrov used the famous Tangency Principle, which he introduced in the above-mentioned article.

Keywords: Mean curvature; Laplacian; Alexandrov.

Sumário

1	PRELIMINARES	13
1.1	Superfícies Regulares	13
1.2	Curvaturas	19
1.3	Derivada Covariante	20
1.4	Equação de Gauss-Codazzi-Mainardi	22
1.5	Gradiente e Hessiano	24
1.6	Divergente e Laplaciano	26
1.7	Fórmula de Minkowski	27
1.8	Desigualdade de Heintze-Karcher-Ros.....	29
2	RESULTADO PRINCIPAL.....	34
2.1	Teorema de Alexandrov	34
	REFERÊNCIAS	36

Introdução

O primeiro a desenvolver um método para determinar a medida de quanto uma superfície se encurva de um dado ponto, foi o matemático suíço Leonard Euler em 1770 e para tal, Euler procedeu da seguinte forma: para cada ponto p em uma superfície S , Euler considerou um vetor normal unitário N em p e um vetor unitário v qualquer tangente a S em p . Olhando para o plano P normal a S que passa por p e contém os vetores N e v , a curva formada pela interseção de P com S foi chamada de seção normal de S em P na direção do vetor unitário v e a curvatura da seção normal foi chamada de curvatura normal da superfície S no ponto p na direção de v . Observando todas as direções determinadas pelos vetores unitários com origem em p de $T_p S$, Euler considerou os valores máximo k_1 e mínimo k_2 das curvas normais de S em p e chamou estas curvatura de curvaturas principais. Ele percebeu que com o conhecimento dessas duas curvaturas era possível determinar a curvatura normal na direção de qualquer vetor unitário v .

Mais tarde em 1827 o matemático alemão Carl Friedrich Gauss, através do estudo da diferencial da chamada aplicação normal de Gauss $N: S \rightarrow \mathbb{S}^2$, cuja diferencial sob certas considerações é um operador auto-adjunto, definiu a curvatura Gaussiana como produto $K = k_1 \cdot k_2$ das curvaturas principais que numa certa base ortogonal, base essa formada pelos respectivos autovalores e as curvaturas principais são autovalores, é simplesmente determinante da matriz de dN no ponto p que é uma invariante dessa aplicação. Um outro invariante, o traço de dN_p dado por $\text{tr}(dN_p) = -(k_1 + k_2)$ surge naturalmente no estudo dessa aplicação e o negativo da metade do traço de dN_p é chamada a curvatura média de S em p que recebeu esse nome devido a matemática francesa Sophie Germain em 1831 ao estudar um problema relacionado com vibrações de uma membrana.

Resultados que envolviam classificações sempre foram objetos de estudo e de particular interesse por grande parte dos estudiosos desta área. Um resultado desse tipo foi demonstrado por Liebmann em 1899 em seu artigo intitulado “*Eine neue eigenschaft der kugel*” onde ele demonstrou que as esferas são as únicas superfícies compactas em $\mathbb{R}^3$ que possuem curvatura Gaussiana constante. Mais tarde em 1956, no artigo “*Uniqueness theorem for surfaces in the large*” Alexandrov mostrou que as esferas são as únicas superfícies

compactas, mergulhadas em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante.

Nesse trabalho iremos demonstrar o teorema de Alexandrov seguindo a idéia de R. Reilly e Ros, que faz uso de conhecimentos mais básicos de cálculo diferencial e integral e da teoria de superfícies para sua demonstração.

1 Preliminares

Neste Capítulo vamos revisar alguns conceitos de geometria diferencial, especificamente a ideia de superfícies regulares que serão necessários para um melhor entendimento do capítulo posterior e melhor compreensão do teorema de Alexandrov.

1.1 Superfícies Regulares

A grosso modo, uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$ é obtida tomando-se pedaços do plano, deformando-os e colocando-os entre si de tal modo que a figura resultante não apresente vértices, arestas, ou auto-intersecções, e que tenha sentido falar em plano tangente nos pontos desta figura.

Definição 1.1. *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ um subconjunto de $\mathbb{R}^3$, diz-se que S é uma superfície regular se as três condições a seguir são satisfeitas:*

(i) *Se para todo $p \in S$, existe $V \subseteq \mathbb{R}^3$, vizinhança de p e uma aplicação $X: U \rightarrow V \cap S$ diferenciável, onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto. Ou seja se*

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

então as funções componentes de X , $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ possuem derivadas parciais de todas as ordens em U ;

(ii) *A aplicação X do item (i) é um homeomorfismo entre U e $V \cap S$, ou seja, X possui uma inversa $X^{-1}: V \cap S \rightarrow U$ que é contínua, isto é, existe um aberto $W \subseteq \mathbb{R}^3$ contendo $V \cap S$ e uma função contínua $f: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuja restrição é X^{-1} ;*

(iii) *Para todo $q = (u, v) \in U$, a diferencial $dX_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.*

A aplicação X é chamada uma parametrização ou um sistema de coordenadas (locais) em uma vizinhança de p , e $V \cap S$ é chamada uma vizinhança coordenada de S em p .

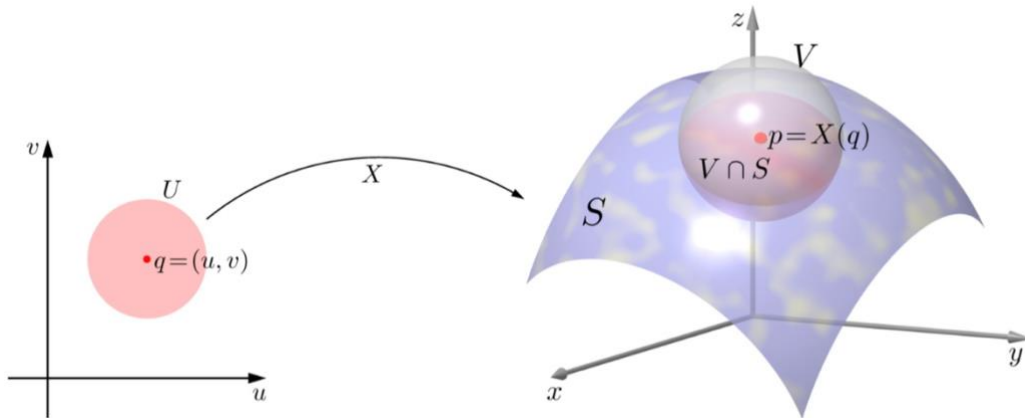


Figura 1

Vamos analisar o que a definição 1.1 nos diz sobre o comportamento de uma superfície regular. A condição de diferenciabilidade em (i) é bastante natural se nossa intenção é tratar de geometria diferencial em S . A condição (ii) impõe que a aplicação X é um homeomorfismo e sua injetividade exclui a possibilidade de auto interseções em superfícies regulares.

Em (iii), temos que $\frac{\partial X}{\partial u}$ e $\frac{\partial X}{\partial v}$ são derivadas parciais das componentes de X calculadas no ponto $q = (u_0, v_0)$, que correspondem às colunas da matriz Jacobiana $JX(u, v)$, que é a matriz da aplicação linear relativa as bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Com o Teorema do Núcleo e Imagem, afirma que X_u e X_v não são paralelos (ou LD).

$$JX(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Por comodidade denotemos $\frac{\partial X}{\partial u}$ por X_u e $\frac{\partial X}{\partial v}$ por X_v .

Agora vejamos um exemplo de uma superfície regular.

Exemplo 1.1. A esfera unitária $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ é uma superfície regular.

Mostraremos que $X_1: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $X_1(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)})$, com $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$, é parametrização de S^2 . Podemos observar que a imagem da parametrização X_1 é a parte aberta de S^2 acima do plano xy .

Podemos observar que as funções componentes de X_1 são diferenciáveis, já que temos que $u^2 + v^2 < 1$, logo a condição (i) da definição de superfície regular é verificada.

Seja um ponto qualquer $(x, y, z) \in X_1(U) \subset S^2$, com $X_1(U) \subset S^2 = \{(x, y, z) \in S^2 : \{x^2 + y^2 < 1 \text{ e } z > 0\}\}$ e fizemos $X_1^{-1}(x, y, z) \rightarrow (x, y)$ temos u e v bem definidos de maneira única por $u = x$ e $v = y$, logo X_1 é bijetiva. E X_1^{-1} é a projeção de $X_1(U) \subseteq S$ em U , que é contínua. Logo a condição (ii) também é verificada.

Para verificar a condição (iii) basta observarmos que a matriz jacobiana

$$J X_1(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{u}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} & -\frac{v}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \end{bmatrix}$$

Tem posto 2.

Vamos cobrir toda esfera utilizando parametrizações similares, como a parametrização

$X_2: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $X_2(u, v) = (u, v, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)})$, $(u, v) \in U$. Podemos observar que $X_1(U) \cup X_2(U)$ cobre a esfera menos o equador $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$. Para cobrir toda a esfera, juntamente com X_1 e X_2 , utilizando os planos xz e zy teremos a seguinte parametrização:

$$X_3(u, v) = (u, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v);$$

$$X_4(u, v) = (u, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v);$$

$$X_5(u, v) = (\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v);$$

$$X_6(u, v) = (-\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v);$$

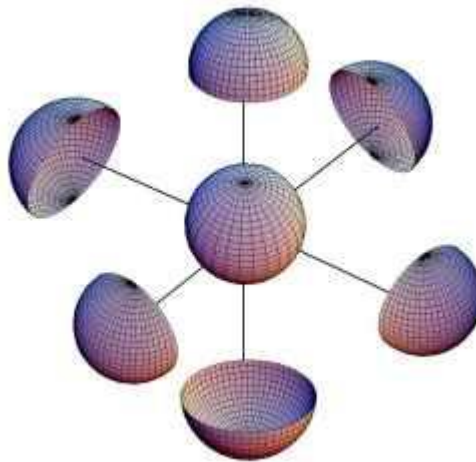


Figura 2 – Parametrização locais da Esfera

Podemos também cobrir a esfera com duas parametrizações usando as coordenadas geográficas de S^2 . De fato, seja uma aplicação $X: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$X(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$, definido no aberto $U = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \theta < \pi \text{ e } 0 < \varphi < 2\pi\}$.

Então $X: U \rightarrow X(U)$ é uma parametrização de S^2 sobre $X(U) = S^2 \cap (\mathbb{R}^3 - A)$ onde

$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0 \text{ e } y = 0\}$ é fechado em $\mathbb{R}^3$.

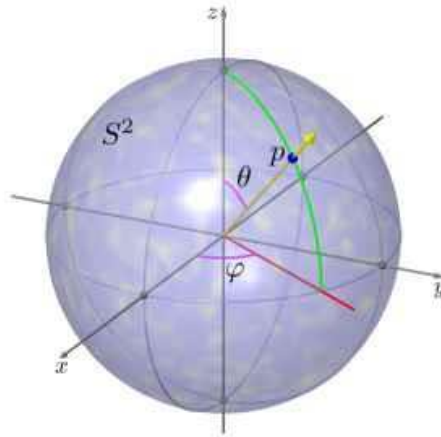


Figura 3 – coordenadas esféricas no ponto $p \in S^2$

Ou seja, $X(U) = \mathbb{R}^3 - C$, onde C é o semi-círculo, $C = \{(x, y, z) \in S^2 | x \geq 0 \text{ e } y = 0\}$.

De fato, X é diferenciável e $dX_{(\theta, \varphi)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora para todo $(\theta, \varphi) \in U$, pois:

$$X_\theta(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta),$$

e

$$X_\varphi(\theta, \varphi) = (-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0),$$

portanto:

$$(X_\theta \wedge X_\varphi)(\theta, \varphi) = (\sin^2 \theta \cos \varphi \sin^2 \theta \sin \varphi, \cos \theta \sin \theta)$$

e

$$\|X_\theta \wedge X_\varphi\|^2(\theta, \varphi) = \sin^4 \theta \cos^2 \varphi + \sin^4 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \theta = \sin^2 \theta \neq 0,$$

já que $\theta \in (0, \pi)$. Logo X satisfaz as condições (1) e (3) da definição 1.1.

Observamos que dado $(x, y, z) \in S^2 - C$, θ fica determinado de maneira única por $\theta = \arccos z$ uma vez que $0 < \theta < \pi$.

Conhecendo o valor de θ , temos que $\cos \varphi = \frac{x}{\sin \theta}$ e $\sin \varphi = \frac{y}{\sin \theta}$, o que determina φ de maneira única, pois $\varphi \in (0, 2\pi)$. Segue-se então que X tem uma inversa X^{-1} .

Como já sabemos que S^2 é uma superfície regular, obteremos, pela proposição 1.1 (que trataremos em breve), que X^{-1} é contínua.

Logo, $X: U \rightarrow S^2 - C$ é uma parametrização de S^2 que cobre toda a esfera menos o semi-círculo C .

Podemos cobrir a esfera toda considerando outra parametrização. De fato, seja $Y: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação

$$Y(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \cos \theta, \sin \theta \sin \phi)$$

onde

$$V = \{(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < \theta < 0 \text{ e } 0 < \phi < 2\pi\}.$$

Então $Y(V) = S^2 - C$, onde C' é o semi-círculo:

$$C' = \{(x, y, z) \in S^2 \mid x \leq 0 \text{ e } z = 0\}.$$

De modo análogo ao feito para X , podemos provar que Y é uma parametrização de S^2 .

Temos também que $X(U) \cup Y(V) = S^2$.

Proposição 1.1. Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $p \in S$. Seja $X: U \rightarrow S$ uma aplicação definida no aberto U de $\mathbb{R}^2$ com $p \in X(U)$, tal que:

- $X: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é diferenciável;
- $dX_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora para todo $q \in U$;
- $X: U \rightarrow X(U)$ é uma bijeção.

Então $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ e $X^{-1}: X(U) \rightarrow U$ é contínua.

Proposição 1.2. (Vetores Tangentes) Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ e $X: U \rightarrow S$ uma parametrização de S em p , com $X(q) = p$, $q \in U$. Então o subespaço vetorial de dimensão 2

$$dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$$

é o conjunto de todos os vetores tangentes a S em p

Demonstração: Sejam v um vetor tangente a S em p e $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ uma curva parametrizada diferenciável em 0 tais que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.

Podemos supor que $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subset X(U)$ e $X^{-1} = F|_{X(U)}$, onde $F: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função diferenciável definida num aberto V de $\mathbb{R}^3$ tal que $X(U) \subset V$.

Logo $\beta = X^{-1} \circ \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$, $\beta(t) = (u(t), v(t))$, é uma curva diferenciável e

$$\alpha(t) = X \circ \beta(t) = X(u(t), v(t))$$

para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Assim, $\beta(0) = q$ e $v = \alpha'(0) = dX_q(\beta'(0)) = u'(0)X_u(q) + v'(0)X_v(q)$.

Seja agora $v = dX_q(w)$, $w \in \mathbb{R}^2$, e considere a curva diferenciável $\beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ dada por $\beta(t) = q + tw$. Então $\beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X(U) \subset S$ é uma curva diferenciável com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = dX_q(\beta'(0)) = dX_q(w) = v$.

■

1.2 Curvaturas

É uma noção intuitiva advinda do Cálculo Diferencial que medir a curvatura de uma superfície S significa medir o quão rápido ela se afasta do plano tangente $T_p S$ em uma vizinhança de $p \in S$. Isto é equivalente a medir a taxa de variação da Aplicação de Gauss de S em p . Ou seja, calcular, em cada ponto $p \in S$, a derivada dN_p na direção $v \in T_p S$:

$$dN_p(v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} N(\alpha(t)).$$

Lembrando que α é qualquer curva tal que $\alpha(0) = 0$ e $\alpha'(0) = c$

Evidentemente, a diferencial $dN_p : T_p S \rightarrow T_{N(p)} S^2$ é uma aplicação linear. Como $T_p S$ e $T_{N(p)} S^2$ são o mesmo espaço vetorial, pois

$$\langle N(p), N(p) \rangle = 1 \Rightarrow \langle dN_p(v), N(p) \rangle = 0, \forall v \in T_p S,$$

então dN_p pode ser visto como um endomorfismo $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$.

Definição 1.2. (Endomorfismo de Weingarten). Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e N sua aplicação de Gauss. A aplicação $A_p : T_p S \rightarrow T_p S$ definida por

$$A_p(v) = -dN_p(v),$$

é denominada endomorfismo de Weingarten.

Definição 1.3. (Curvatura Normal). Dado uma direção $v \in T_p S$ tangente a superfície S em um ponto p , tal que $|v| = 1$, o valor

$$k(v) = \langle A_p(v), v \rangle$$

representa a curvatura normal de S em p na direção v .

As curvaturas principais $k_1(p)$ e $k_2(p)$ são, respectivamente, os valores máximos e mínimos das curvaturas normais e as suas direções principais correspondem as direções de máximo e mínimo da curvatura normal em cada ponto $p \in S$.

Vemos também que A_p ser um operador auto-adjunto implica na existência de uma base ortonormal de $T_p S$ formada por autovetores de A_p (esses autovetores são as direções principais). Desse modo, a matriz de A_p nessa base é diagonal. A diagonal principal é formada pelas curvaturas principais (que são os autovalores associados aos autovetores da base). Assim fica natural conectar o determinante e o traço com as curvaturas principais, para mais detalhes, ver [1].

Associados ao endomorfismo de Weingarten, temos dois invariantes algébricos — seu traço e seu determinante:

$$\text{tr}(A_p) = k_1(p) + k_2(p) \quad e \quad \det(A_p) = k_1(p)k_2(p),$$

que motivam a seguinte definição:

Definição 1.4. (*Curvaturas Média e Gaussiana*). Dado uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ e $A_p : T_p S \rightarrow T_p S$ o seu endomorfismo de Weingarten no ponto $p \in S$. Definimos, respectivamente, como *Curvatura Média* e *Curvatura Gaussiana* os valores:

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{tr}(A_p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2} \quad e \quad K(p) = \det(A_p) = k_1(p)k_2(p).$$

1.3 Derivada Covariante

Iniciaremos essa seção falando um pouco de Derivada Covariante que é uma generalização do conceito de derivada parcial que permite estender o cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$, com coordenadas cartesianas, para o caso de coordenadas curvilíneas em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.5. (*Derivada Covariante*). Dado o campo tangente $X \in X(S)$. Definimos a *Derivada Covariante* de X na direção $v \in T_p S$ como sendo a aplicação:

$$\nabla_v X = dX_p(v) - \langle dX_p(v), N(p) \rangle N(p). \quad (1.1)$$

Proposição 1.3. Dados $X, Y \in X(S)$ e $f \in C^\infty(S)$, para todo $v, w \in T_p S$, temos

$$i) \nabla_v(X + Y) = \nabla_v X + \nabla_v Y;$$

$$ii) \nabla_v(fX) = v(f)X + f\nabla_v X;$$

$$iii) \nabla_{v+w}X = \nabla_v X + \nabla_w X.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} i) \nabla_v(X + Y) &= d(X + Y)_p(v) - \langle d(X + Y)_p, N \rangle N \\ &= d(X)_p(v) + d(Y)_p(v) - \langle d(X)_p(v) + d(Y)_p(v), N \rangle N \\ &= d(X)_p(v) - \langle d(X)_p(v), N \rangle N + d(Y)_p(v) - \langle d(Y)_p(v), N \rangle N \\ &= \nabla_v X + \nabla_v Y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii) \nabla_v(fX) &= d(fX)_p(v) - \langle d(fX)_p, N \rangle N \\ &= v(f)X + fdX_p(v) - \langle v(f)X + fdX_p(v), N \rangle N \\ &= v(f)X + fdX_p(v) - \langle fdX_p(v), N \rangle N \\ &= v(f)X + f(dX_p(v) - \langle dX_p(v), N \rangle N) \\ &= v(f)X + f\nabla_v X. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iii) \nabla_{v+w}X &= d(X)_p(v + w) - \langle d(X)_p(v + w), N \rangle N \\ &= d(X)_p(v) + d(X)_p(w) - \langle d(X)_p(v) + d(X)_p(w), N \rangle N \\ &= d(X)_p(v) - \langle d(X)_p(v), N \rangle N + d(X)_p(w) - \langle d(X)_p(w), N \rangle N \\ &= \nabla_v X + \nabla_w X. \end{aligned}$$

■

Usando o fato de $X \in X(S)$ implicar em $\langle X, N \rangle \equiv 0$, temos que

$$v \langle X, N \rangle = \langle dX_p(v), N \rangle + \langle X, dN_p(v) \rangle = 0$$

e, portanto,

$$\langle dX_p(v), N \rangle = -\langle X, dN_p(v) \rangle$$

para todo $v \in T_p S$. Assim, partindo da expressão (1.1), podemos escrever a derivada de X

na direção v como:

$$dX_p(v) = \nabla_v X + \langle A_p(v), X \rangle N. \quad (1.2)$$

Esse resultado é conhecido por *Fórmula de Gauss a Superfície*, consequentemente, podemos estender a fórmula para:

$$(\nabla_X Y)(p) = (\nabla_X Y)(p) + \langle A_p(X(p)), Y(p) \rangle N(p). \quad (1.3)$$

Ainda há outra propriedade essencial da derivação covariante de campos de vetores tangentes, e isso tem a ver com o fato de que a referida derivação é simétrica. Observe que se X e Y são campos de vetores tangentes a Σ , então em cada ponto p se tem que

$$\langle dY_p(X(p)), N(p) \rangle = \langle A_p(X(p)), Y(p) \rangle = \langle X(p), A_p(Y(p)) \rangle = \langle dX_p(Y(p)), N(p) \rangle.$$

Quer dizer, os vetores $dX_p(Y(p))$ e $dY_p(X(p))$ tem ambos a mesma parte normal, e a diferença

$$dY_p(X(p)) - dX_p(Y(p))$$

é um vetor tangente a Σ em um ponto p . O campo $[X, Y] \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ dado por

$$[X, Y](p) = dY_p(X(p)) - dX_p(Y(p))$$

se chama o *colchete de Lie* dos campos X e Y , e verifica

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

para toda função $f \in C^\infty(\Sigma)$. Evidentemente, $[X, Y]$ também é dado em termo da derivada covariante pela fórmula

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X.$$

1.4 Equação de Gauss-Codazzi-Mainardi

Nesta seção trataremos das equações de Gauss–Codazzi–Mainardi. Na geometria diferencial clássica de superfícies essas equações são geralmente expressas pelos Símbolos de Christoffel. No entanto, para nós, será mais útil representarmos essas equações em termos da derivada covariante.

Lema 1.1. *Dados os campos diferenciais $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(S)$, temos*

$$\bar{\nabla}_X(\bar{\nabla}_Y Z) - \bar{\nabla}_Y(\bar{\nabla}_X Z) - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z = 0.$$

Demonstração. De fato, por um lado

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X(\bar{\nabla}_Y Z) - \bar{\nabla}_Y(\bar{\nabla}_X Z) &= \bar{\nabla}_X(Y(Z_1), Y(Z_2), Y(Z_3)) - \bar{\nabla}_Y(X(Z_1), X(Z_2), X(Z_3)) \\ &= (X(Y(Z_1)), X(Y(Z_2)), X(Y(Z_3))) - (Y(X(Z_1)), Y(X(Z_2)), Y(X(Z_3))) .\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{[X,Y]} Z &= ([X, Y](Z_1), [X, Y](Z_2), [X, Y](Z_3)) \\ &= (X(Y(Z_1)) - Y(X(Z_1)), X(Y(Z_2)) - Y(X(Z_2)), X(Y(Z_3)) - Y(X(Z_3))) \\ &= (X(Y(Z_1)), X(Y(Z_2)), X(Y(Z_3))) - (Y(X(Z_1)), Y(X(Z_2)), Y(X(Z_3)))\end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos que

$$\bar{\nabla}_X(\bar{\nabla}_Y Z) - \bar{\nabla}_Y(\bar{\nabla}_X Z) = \bar{\nabla}_{[X,Y]} Z.$$

■

O que conclui a demonstração.

Teorema 1.1. . (Equação de Gauss–Codazzi–Mainardi). Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e $A : X(S) \rightarrow X(S)$ o tensor definido pelo Endomorfismo de Weingarten. Então, para todo $X, Y \in X(S)$, temos:

$$\nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) = \nabla_{[X,Y]} Z - \langle AY, Z \rangle AX + \langle AX, Z \rangle AY \quad (1.4)$$

e

$$\nabla_X(AY) - \nabla_Y(AX) - A[X, Y] = 0. \quad (1.5)$$

Demonstração. Aplicando o lema anterior com a Fórmula de Gauss (1.3), obtemos

$$0 = \bar{\nabla}_X \nabla_Y Z - \langle AY, Z \rangle N - \bar{\nabla}_Y \nabla_X Z - \langle AX, Z \rangle N - \nabla_{[X,Y]} Z - \langle A[X, Y], Z \rangle N .$$

Novamente, usando a fórmula de Gauss (1.3)

$$\begin{aligned}0 &= \nabla_X(\nabla_Y Z) - \langle AX, \nabla_Y Z \rangle N - \langle \nabla_X AY, Z \rangle N - \langle AY, \nabla_X Z \rangle N - \langle AY, Z \rangle AX \\ &\quad - \nabla_Y(\nabla_X Z) + \langle AY, \nabla_X Z \rangle N + \langle \nabla_Y AX, Z \rangle N + \langle AX, \nabla_Y Z \rangle N + \langle AX, Z \rangle AY \\ &\quad - \nabla_{[X,Y]} Z + \langle A[X, Y], Z \rangle N.\end{aligned}$$

Eliminando os termos que se anulam e reorganizando os termos restantes, temos

$$\begin{aligned}0 &= \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]} Z - \langle AY, Z \rangle AX + \langle AX, Z \rangle AY \\ &\quad + \langle \nabla_X(AY) - \nabla_Y(AX) - A[X, Y], Z \rangle N.\end{aligned}$$

Ou seja, tanto a parte tangente, quanto a parte normal desse campo se anulam. Portanto,

$$\nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) = \nabla_{[X,Y]} Z - \langle AY, Z \rangle AX + \langle AX, Z \rangle AY.$$

Assim obtemos a Equação de Gauss de curvatura. Por outro lado, temos também que

$$\langle \nabla_X(AY) - \nabla_Y(AX) - A[X, Y], Z \rangle = 0,$$

para todo Z . Logo,

$$\nabla_X(AY) - \nabla_Y(AX) - A[X, Y] = 0.$$

Que resulta na Equação de Codazzi–Mainardi. ■

As equações (1.4) e (1.5) são, respectivamente, conhecidas por Equação de Gauss de curvatura e Equação de Codazzi–Mainardi.

1.5 Gradiente e Hessiano

Seja $F : W \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida em um aberto $W \subset \mathbb{R}^3$. O Gradiente Euclidiano de F no ponto $a \in W$ é definido como sendo o vetor $\text{Grad } F(a)$ tal que

$$\langle \text{Grad } F(a), v \rangle = v(F), \quad \forall v \in \mathbb{R}^3.$$

Em particular, tomando a base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ temos que $\langle \text{Grad } F(a), e_1 \rangle = \frac{\partial F(a)}{\partial x}$, $\langle \text{Grad } F(a), e_2 \rangle = \frac{\partial F(a)}{\partial y}$ e $\langle \text{Grad } F(a), e_3 \rangle = \frac{\partial F(a)}{\partial z}$.

Logo,

$$\text{Grad } F(a) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(a), \frac{\partial F}{\partial y}(a), \frac{\partial F}{\partial z}(a) \right) \quad (1.6)$$

Usando a expressão (1.6) com as propriedades das derivadas parciais obtemos as seguintes propriedades:

- i) $\text{Grad } (F + G) = \text{Grad } F + \text{Grad } G$;
- ii) $\text{Grad } (FG) = G \text{ Grad } F + F \text{ Grad } G$;
- iii) $\text{Grad } (\varphi \circ F) = \varphi'(F) \text{ Grad } F$.

Demonstração. Veja seção 1.3 no capítulo 1 de [1].

Onde $F, G : W \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis definidas sobre um aberto $W \subset \mathbb{R}^3$ e $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Em particular, para superfícies, definimos:

Definição 1.6. (Gradiente). Dado uma função $f \in C^\infty(S)$. Usaremos o termo gradiente de f para nos referirmos ao campo de vetores tangentes à S determinado pela aplicação $\nabla f : S \rightarrow X(S)$ definida por:

$$\begin{cases} \langle \nabla f(p), v \rangle = v(f), v \in T_p S, \\ \langle \nabla f(p), N(p) \rangle = 0, \forall p \in S. \end{cases}$$

Dado $F : W \rightarrow \mathbb{R}$ uma extensão para $f \in C^\infty(S)$, isto é $f = F|_S$, então o gradiente de f é a parte tangente do gradiente euclidiano de F , isto é,

$$\nabla f(p) = \text{Grad } F(p) - \langle \text{Grad } F(p), N(p) \rangle N(p).$$

Definição 1.7. (Hessiano). Dado $f \in C^\infty(S)$. Para cada ponto $p \in S$, definimos o operador hessiano de f como sendo a função

$$\nabla^2 f_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$\nabla^2 f_p(v, w) = \langle \nabla_v \nabla f, w \rangle.$$

Usando a *Fórmula de Gauss de superfície* (1.2) com $X = \nabla f$, obtemos:

$$\nabla_v \nabla f = d(\nabla f)_p(v) - \langle A_p(v), \nabla f(p) \rangle N(p).$$

De modo que podemos calcular o hessiano $\nabla^2 f_p(v, w)$ por meio da derivada usual, isto é,

$$\nabla^2 f_p(v, w) = \langle d(\nabla f)_p(v), w \rangle.$$

De maneira geral, dado uma função $F : W \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável no aberto $W \subset \mathbb{R}^3$. O hessiano Euclidiano de F no ponto $a \in W$ é definido como sendo a função dada por

$$\text{Hess } F_a(v, w) = \langle d(\text{Grad } F)_a(v), w \rangle,$$

para todo par de vetores $v, w \in \mathbb{R}^3$.

1.6 Divergente e Laplaciano

Seja Z um campo de vetores diferenciável definido sobre um aberto $W \subset \mathbb{R}^3$. Define-se o Divergente Euclidiano do campo Z em um ponto $a \in W$ como sendo o traço da aplicação linear $dZ_a: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Escrevemos

$$\text{Div } Z(a) = \text{tr}(v \mapsto dZ_a(v)) = \sum_{i=1}^3 \langle dZ_a(e_i), e_i \rangle,$$

onde $\{e_1, e_2, e_3\}$ é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$. Em particular, se $\{e_1, e_2, e_3\}$ for a base canônica, temos

$$\text{Div } Z(a) = \frac{\partial Z_1}{\partial x}(a) + \frac{\partial Z_2}{\partial y}(a) + \frac{\partial Z_3}{\partial z}(a). \quad (1.7)$$

Pela expressão (1.7), decorre diretamente das propriedades da derivada parcial que

- i) $\text{Div } (Z + Z') = \text{Div } Z + \text{Div } Z'$;
- ii) $\text{Div } (FZ) = \langle \text{Grad } F, Z \rangle + F \text{Div } Z$.

Onde Z, Z' são campos de vetores diferenciáveis sobre o aberto $W \subset \mathbb{R}^3$ e $F \in C^\infty(W)$.

Teorema 1.2. (Teorema da Divergência). *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, orientada e compacta e seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio determinado por S ($S = \partial\Omega$). Se $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um campo de vetores diferenciável sobre Ω . Então*

$$\int_{\Omega} \text{Div } Z(a) \, da = - \int_S \langle Z(p), N(p) \rangle \, dp$$

onde da é o elemento de volume da região Ω e dp é o elemento de área da superfície S .

Demonstração. Veja Teorema 5.31 no Capítulo 5 de [10].

1.7 Fórmulas de Minkowski

As fórmulas de Minkowski são duas fórmulas integrais clássicas para superfícies regulares, compactas e orientadas. Essas fórmulas são obtidas como uma aplicação do Teorema da Divergência.

Teorema 1.3. *Seja $\Sigma \subset R^3$ uma superfície regular, compacta e orientada, com aplicação de Gauss N . Para cada ponto fixado $c \in R^3$ se tem:*

$$\int_{\Sigma} (1 + H(p)(p - c)) \, dp = 0, \quad (1.8)$$

$$\int_{\Sigma} (H(p) + H(p))(p - c, N(p)) \, dp = 0, \quad (1.9)$$

onde, como é habitual, H é a curvatura média.

Nos referimos a (1.8) e (1.9) como a primeira e segunda fórmula de Minkowski, respectivamente.

Demonstração . Fixado o ponto c em R^3 , consideremos a função sobre Σ definida por $f(p) = \frac{1}{2} |p - c|^2$. Sabemos então que seu hessiano em um ponto $p \in \Sigma$ está dado por

$$\nabla^2 f_p(v + v) = 1 + k(v) \langle p - c, N(p) \rangle$$

para toda direção $v \in T_p \Sigma$. A partir daqui, tomando $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ a base de direção principal de Σ em p se tem que

$$\begin{aligned} \nabla f(p) &= (1 + k_1(p) \langle p - c, N(p) \rangle) \vec{e}_1 + (1 + k_2(p) \langle p - c, N(p) \rangle) \vec{e}_2 \\ \nabla^2 f(p) &= 2 + 2H(p) \langle p - c, N(p) \rangle = 2(1 + H(p) \langle p - c, N(p) \rangle) \end{aligned}$$

Isto é

$$\Delta f(p) = 2(1 + K(p)\langle p - c, N(p) \rangle). \quad (1.10)$$

A fórmula (1.8) é obtida pelo teorema da divergência, simplesmente integrando esta desigualdade.

Para demonstrarmos a segunda fórmula de Minkowski, necessitamos calcular o laplaciano da função $g \in C^\infty(\Sigma)$ definida por $g(p) = \langle p - c, N(p) \rangle$. Para cada $p \in \Sigma$ e $v \in T_p \Sigma$ teremos

$$v(g) = \langle v, N(p) \rangle + \langle p - c, N(p) \rangle$$

$$v(g) = -\langle (p - c)^T, A_p(v) \rangle = -\langle A_p((p - c)^T), v \rangle,$$

de maneira que o gradiente de g vem dado por

$$\nabla g(p) = -A_p((p - c)^T) = -A_p(\nabla f(p))$$

para cada ponto p de Σ . Portanto para cada $\vec{v} \in T_p \Sigma$ teremos

$$\nabla_v \nabla_g = -\nabla_{\vec{v}}(A(\nabla f)) = -(\nabla_v A)(\nabla f(p)) - A_p(\nabla_v \nabla f),$$

onde $\nabla_v A$ denota a derivada covariante de A com respeito a v . Pela equação de Codazzi-Mainardi podemos cumutar os vetores v e $\nabla f(p)$ na derivada covariante de A e escrever

$$(\nabla_v A)(\nabla f(p)) = (\nabla_{\nabla f(p)} A)(v).$$

Desta maneira, o hessiano de g é dado por

$$\begin{aligned} \nabla^2 g_p(v, v) &= -\langle \nabla_{\nabla f(p)} A(v), v \rangle - \langle A_p(\nabla_v \nabla f), v \rangle \\ &= -\langle \nabla_{\nabla f(p)} A(v), v \rangle - \langle (\nabla_v \nabla f), A_p(v) \rangle \\ &= -\langle \nabla_{\nabla f(p)} A(v), v \rangle - \nabla^2 f_p(v, A_p(v)) \\ &= -\langle \nabla_{\nabla f(p)} A(v), v \rangle - \langle A_p(v), v \rangle - \langle A_p(v), A_p(v) \rangle g(p). \end{aligned}$$

Quer dizer

$$\nabla^2 g_p(v, v) = -\langle (\nabla_{\nabla f(p)} A)(v), v \rangle - k(v) - |A_p(v)|^2 g(p)$$

para toda direção $v \in T_p \Sigma$. Se tomamos agora $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ a base formada pelas direções principais de Σ em p , se tem

$$\nabla^2 g_p(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = -\langle (\nabla_{\nabla f(p)} A)(\vec{e}_i), \vec{e}_i \rangle - k_i(p) - k_i^2(p)g(p).$$

Então obtemos

$$\Delta g(p) = \nabla^2 g_p(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + \nabla^2 g_p(\vec{e}_2, \vec{e}_2)$$

$$\Delta g(p) = -\text{tr}(\nabla_{\nabla f(p)} A) - (k_1(p) + k_2(p)) - (k_1^2(p) + k_2^2(p))g(p)$$

$$\Delta g(p) = -2\langle \nabla f(p), \nabla H(p) \rangle - 2H(p) - 2(2H^2(p) - K(p))g(p),$$

já que

$$k_1^2(p) + k_2^2(p) = (k_1(p) + k_2(p))^2 - 2k_1(p)k_2(p) = 4H^2(p) - 2K(p).$$

Em definitivo, para cada $p \in \Sigma$ teremos

$$\Delta g(p) = -2\langle \nabla f(p), \nabla H(p) \rangle - 2H(p) - (2H^2(p) - K(p))g(p).$$

Por outra parte, por (1.10) segue também que

$$2\operatorname{div}(H\nabla f)(p) = 2\langle \nabla f(p), \nabla H(p) \rangle + 2H(p)\Delta f(p)$$

$$2\operatorname{div}(H\nabla f)(p) = 2\langle \nabla f(p), \nabla H(p) \rangle + 4H(p)(1 + H(p)g(p)),$$

de maneira que

$$2\operatorname{div}(H\nabla f)(p) + \Delta g(p) = 2(H(p) + K(p)g(p)).$$

Então, a fórmula (1.9) se obtém pelo teorema da divergência, integrando esta igualdade. ■

Lema 1.2. *Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e compacta e denotemos por $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ o domínio regular compacto fechado por Σ , de modo que $\Sigma = \partial\Omega$. Então, para qualquer ponto fixado $c \in \mathbb{R}^3$, temos que*

$$\operatorname{vol}(\Omega) = -\frac{1}{3} \int_{\Sigma} \langle p - c, N(p) \rangle dp, \quad (1.11)$$

sendo N o campo normal unitário de Σ apontando para o interior.

Demonstração. Consideramos Z o campo de vetores sobre Ω dado por

$$Z(x) = x - c,$$

cujas divergência é trivialmente $\operatorname{Div} Z(x) = 3$ para todo $x \in \Omega$.

Então,

$$\int_{\Omega} \operatorname{Div} Z(a) da = 3\operatorname{vol}(\Omega) = -\int_{\Sigma} \langle p - c, N(p) \rangle dp$$

■

1.8 Desigualdade de Heintze-Karcher-Ros

Iniciaremos esta seção falando um pouco da desigualdade de Heintze-Karcher-Ros, que mais adiante tornará uma ferramenta importante para demonstração do teorema de Alexandrov, mas antes, veremos um teorema e um lema que servirão como base para demonstrarmos a desigualdade à cima citada.

Teorema 1.4. *Toda superfície, regular, orientada e compacta $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ tem ao menos*

um ponto elíptico.

Demonstração. Geometricamente, a ideia da prova consiste em inserir a superfície compacta Σ dentro de uma esfera suficientemente grande e, a continuação, ir diminuindo o raio da esfera até que toque pela primeira vez na superfície Σ em um ponto. Nesse ponto de contato a superfície será tangente a esfera e as curvaturas normais de Σ estarão limitadas pela curva normal (positiva) da esfera. Para fazer isso analiticamente consideremos a função $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(p) = \frac{1}{2} |p|^2, p \in \Sigma.$$

Como Σ é compacto, existe um ponto $p_0 \in \Sigma$ onde f alcança seu máximo (global), $f(p) \leq f(p_0)$ para todo $p \in \Sigma$, de maneira que $\nabla f(p_0) = 0$ e $\nabla^2 f_{p_0}(v, v) \leq 0$ para todo $v \in T_{p_0}\Sigma$. De $\nabla f(p_0) = 0$ e se tem que $p_0 = \langle p_0, N(p_0) \rangle N(p_0)$, quer dizer

$$N(p_0) = \pm \frac{p_0}{|p_0|} = \varepsilon \frac{p_0}{|p_0|}, \quad \text{com } \varepsilon = \pm 1$$

com $|p_0|^2 = 2f(p_0) > 0$, no qual indica que a superfície Σ é tangente a esfera de raio $|p_0| > 0$ em um ponto p_0 . Por outra parte o fato de que $\nabla^2 f_{p_0}$ é semidefinido negativo, implica que

$$\nabla^2 f_{p_0}(v, v) = 1 + k(v) \langle p_0, N(p_0) \rangle = 1 + \varepsilon k(v) |p_0| \leq 0$$

para toda direção $v \in T_{p_0}\Sigma$. Assim, se $\varepsilon = +1$ concluímos que

$$k(v) \leq -\frac{1}{|p_0|} < 0$$

para toda direção $v \in T_{p_0}\Sigma$. Em particular, $k_1(p_0)$ e $k_2(p_0)$ são ambas negativas e $K(p_0) > 0$.

Analogamente, se $\varepsilon = -1$ se tem que

$$k(v) \geq \frac{1}{|p_0|} > 0$$

para toda direção e, em particular, $k_1(p_0)$ e $k_2(p_0)$ são ambas positivas e $K(p_0) > 0$

■

Lema 1.3. Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular compacta e Ω o domínio compacto delimitado por Σ . Então, existe uma (única) função diferenciável $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que é solução do seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \bar{\Delta} F = 1 & \text{em } \Omega \\ f = F|_{\Sigma} = 0 & \text{em } \Sigma = \partial\Omega. \end{cases}$$

Teorema 1.5. (Desigualdade de Heintze-Karcher-Ros) Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície

regular compacta e Ω o domínio compacto e Ω o domínio compacto delimitado por Σ . Consideremos sobre Σ a orientação dada pelo campo normal unitário N . Se a curvatura média H é diferente de zero em todo o ponto, então

$$\text{vol}(\Omega) \leq \frac{1}{3} \int_{\Sigma} \frac{1}{H(p)} dp, \quad (1.12)$$

tendo em vista que a igualdade é válida se, e somente se, Σ for uma esfera.

Demonstração. Em primeiro lugar, observe que a curvatura média é necessariamente positiva, já que H não se anula e, pelo lema 1.3 sabemos que H é positiva em algum ponto de Σ . Seja $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a solução do problema de Dirichlet dada no lema 1.3. Como $f = F|_{\Sigma}$ é constante sobre Σ , então $\nabla f(p) = 0$ e $\Delta f(p) = 0$ em todo ponto $p \in \Sigma$, e a fórmula de Reilly é reduzido à igualdade

$$\int_{\Sigma} (1 - |\text{Hess } F|^2(x)) dx = 2 \int_{\Sigma} H(p) \left(\frac{\partial F}{\partial N}(p) \right)^2 dp \quad (1.13)$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz nos diz que

$$(\text{tr}(A))^2 \leq 3 \text{tr}(A^2)$$

para toda aplicação linear diagonalizável $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde a igualdade ocorre se, e só se, a aplicação A é um múltiplo da identidade. Se aplicarmos isto a aplicação linear $d(\text{Grad } F)_x: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, que é simétrica e, em particular, diagonalizável, teremos que

$$1 = (\bar{\Delta} F(x))^2 = (\text{tr}(d(\text{Grad } F)_x))^2 \leq 3 |\text{Hess } F|^2(x)$$

para todo $x \in \Omega$ dizemos

$$|\text{Hess } F|^2(x) \geq \frac{1}{3} \quad (1.14)$$

para todo $x \in \Omega$. Além do mais, a igualdade ocorre em algum ponto $x \in \Omega$ se, e só se, existe um escalar $\lambda(x) \in \mathbb{R}$ tal que

$$d(\text{Grad } F)_x(\vec{v}) = \lambda(x) \vec{v}$$

para todo $v \in \mathbb{R}^3$, isto equivale a dizer que

$$\text{Hess } F(x)(\cdot, \cdot) = \lambda(x) \langle \cdot, \cdot \rangle.$$

Porém, em tal caso, o escalar $\lambda(x)$ está determinado de maneira única já que, como

$\bar{\Delta}F(x) = \text{tr}(\text{Grad } F)_x = 1$ deve ser necessariamente $\lambda(x) = \frac{1}{3}$.

Utilizando (1.13) e (1.14), tem que

$$2 \int_{\Sigma} H(p) \left(\frac{\partial F}{\partial N}(p) \right)^2 dp = \int_{\Omega} 1 - |\text{Hess } F|^2(x) dx \leq \frac{2}{3} \int_{\Omega} dx,$$

daí

$$\int_{\Sigma} H(p) \left(\frac{\partial F}{\partial N}(p) \right)^2 dp \leq \frac{1}{3} \text{vol}(\Omega). \quad (1.15)$$

Por outra parte, aplicando o teorema da divergência no domínio de Ω ao campo $Z = \text{Grad } F$ teremos também

$$\text{vol}(\Omega) = \int_{\Omega} \bar{\Delta}F(x) dx = - \int_{\Sigma} \frac{\partial F}{\partial N}(p) dp.$$

A partir daqui, utilizamos a igualdade de Cauchy-Schwarz para as integrais e a expressão (1.14) segue da seguinte forma

$$\begin{aligned} (\text{vol}(\Omega))^2 &= \left(\int_{\Sigma} \frac{\partial F}{\partial N}(p) \right)^2 = \left(\int_{\Sigma} \left(\sqrt{H(p)} \frac{\partial F}{\partial N}(p) \right) \frac{1}{\sqrt{H(p)}} dp \right)^2 \\ &\leq \int_{\Sigma} H(p) \left(\frac{\partial F}{\partial N}(p) \right)^2 dp \int_{\Sigma} \frac{1}{H(p)} dp \leq \frac{1}{3} \text{vol}(\Omega) \int_{\Sigma} \frac{1}{H(p)} dp, \end{aligned}$$

no qual se prova a desigualdade (1.14).

Além disso, (1.14) é uma igualdade se, e somente se, (1.13) é uma igualdade para todo ponto $x \in \Omega$, quer dizer, se, e só se, a função F satisfaz a seguinte condição

$$\text{Hess } F(x)(\cdot, \cdot) = \frac{1}{3} \langle \cdot, \cdot \rangle$$

para todo $x \in \Omega$. Quer dizer, se, e só se, F é solução do seguinte sistema de equação de derivadas parciais

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \text{ se } i \neq j, \text{ e } \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = \frac{1}{3} \quad (1.16)$$

para $i, j = 1, 2, 3$. Por integração direta (1.15), vemos que F tem que ser da forma

$$F(x) = \frac{1}{6}|x|^2 + \langle \vec{a}, x \rangle + b,$$

com $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ e $b \in \mathbb{R}$. Completando quadrado, podemos escrever F como

$$F(x) = \frac{1}{6}|x + 3\vec{a}|^2 + b - \frac{3}{2}|\vec{a}|^2.$$

Como $\Sigma = F^{-1}(0) \neq \emptyset$, necessariamente $b - \frac{3}{2}|\vec{a}|^2 < 0$ e Σ é então uma esfera centrada em $-3\vec{a}$ de raio $r = \sqrt{9|\vec{a}|^2 - 6b}$. Aqui termina a prova do teorema.

■

Agora sim, teremos todas ferramentas necessárias para demonstração do Teorema de Alexandrov no capítulo seguinte.

2 Resultado Principal

O teorema de Alexandrov garante que as únicas hipersuperfícies compactas, conexas, curvatura média constante, mergulhadas no espaço Euclidiano são as esferas. O teorema de Alexandrov é um resultado clássico em Geometria Diferencial e foi provado por A. Alexandrov em [Uniqueness theorem for surfaces in the large V. Vestnik Leningrad Universiy. v. 13, n. 19(1958) 5-8] usando o Princípio de Tangência.

Teorema 2.1 (Teorema de Alexandrov) *Se uma superfície regular e compacta $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ tem curvatura média H constante, então esta deve ser uma esfera de raio $r = \frac{1}{H}$.*

Demonstração. *Tomamos sobre Σ a orientação dada pelo campo normal unitário apontando para o interior N , a constante H deve ser uma constante positiva. Nesse caso, a desigualdade de Heintz-Karcher-Ros, nos diz que o volume do domínio delimitado por Σ verifica a seguinte desigualdade*

$$vol(\Omega) \leq \frac{1}{3H} \int_{\Sigma} dp$$

donde,

$$vol(\Omega) \leq \frac{\text{Área}(\Sigma)}{3H}$$

equivalentemente,

$$\text{Área}(\Sigma) \geq 3H vol(\Omega). \quad (2.1)$$

Ocorrendo a igualdade se, e só se, Σ é uma esfera ($r = \frac{1}{H}$ necessariamente).

Por outra parte, a primeira fórmula de Minkowski (com $c = 0$) nos diz que

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} 1 + H(p) \langle p, N(p) \rangle dp &= 0 \\ \int_{\Sigma} dp + \int_{\Sigma} (H(p) \langle p, N(p) \rangle) dp &= 0 \\ \text{Área}(\Sigma) + H \int_{\Sigma} \langle p, N(p) \rangle dp &= 0 \end{aligned}$$

daí,

$$\text{Área}(\Sigma) = -H \int_{\Sigma} \langle p, N(p) \rangle dp.$$

Veja que se pegarmos a igualdade (1.11) do lema 1.2 e multiplicarmos toda ela por $3H$ teremos

$$3H \text{vol}(\Omega) = -H \int_{\Sigma} \langle p, N(p) \rangle dp,$$

mas,

$$\text{Área}(\Sigma) = -H \int_{\Sigma} \langle p, N(p) \rangle = 3H \text{vol}(\Omega).$$

Portanto,

$$\text{Área}(\Sigma) = 3H \text{vol}(\Omega)$$

ou

$$\text{vol}(\Omega) = \frac{1}{3} \int_{\Sigma} \frac{1}{H(p)} dp,$$

onde temos utilizado a expressão para o volume de Ω dada no lema 1.2 (com $c = 0$). Em definitivo, teremos a igualdade em (2.1), com isso concluímos a prova do teorema.

■

Referências

- [1] ALÍAS, L. J. *Análisis Geométrico y Geometria Global de Superficies: Una Introducción Elemental*. Brasil, Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- [2] AXLER, S.; BOURDON, P.; WADE, R. *Harmonic function theory*. USA, New York: Springer Science & Business Media, 2013. v. 137.
- [3] BÉRARD, P. *Lectures on spectral geometry*. Brasil, Rio de Janeiro: IMPA, 1986.
- [4] BERGER, M.; GAUDUCHON, P.; MAZET, E. *Le Spectre d'une Variété Riemannienne*. USA, New York: Springer, 1971.
- [5] DESHMUKH, S. Compact Hypersurfaces in a Euclidean Space. *The Quarterly Journal of Mathematics*, v. 49, n. 1, p. 35–41, 1998.
- [6] DO CARMO, M. P. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Brasil, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.
- [7] HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. d. S. *Introdução algebra linear - coleção profmat*. SBM: Brasil, Rio de Janeiro, 2013.
- [8] HICKS, N. J. *Notes on differential geometry*. USA, New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1965.
- [9] KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. USA, New York: John Wiley & Sons, 1991. v. 17.
- [10] MONTIEL, S.; ROS, A. *Curves and surfaces*. Spain, Madrid: American Mathematical Soc. and Real Sociedad Matemática Española, 2009. v. 69.
- [11] REILLY, R. C. On the first eigenvalue of the laplacian for compact submanifolds of euclidean space. *Commentarii Mathematici Helvetici*, Springer, v. 52, n. 1, p. 525–533, 1977.