UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sistematização para o Estudo das Funções do Primeiro Grau e do Segundo Grau Através do Uso de Ferramentas da Geometria Analítica

Lucas De Stefano Meira Henriques

Maceió, 2013

LUCAS DE STEFANO MEIRA HENRIQUES

Sistematização para o Estudo das Funções do Primeiro Grau e do Segundo Grau Através do Uso de Ferramentas da Geometria Analítica

Dissertação de mestrado apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pelo Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em matemática.

Orientador:
Professor Msc. Gregório Manoel da Silva Neto

Maceió, 2013

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Fabiana Camargo dos Santos

H518s Henriques, Lucas De Stefano Meira.
Sistematização para o estudo das funções do primeiro grau e do segundo grau através do uso de ferramentas da geometria analítica / Lucas De Stefano Meira Henriques. – 2013.
75 f. : il.

Orientador: Gregório Manoel da Silva Neto.
Dissertação (mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2013.

Bibliografia: f. 74.
Índice: f. 75.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Geometria analítica. 3. Funções (matemática). 4. Parábola – Estudo matemático. 5. Retas – Estudo matemático. I. Título.

CDU: 517.5:37.046.14

À minha esposa Lisiane e aos meus filhos Yasmin e Vinícius, por terem feito desta minha jornada uma jornada familiar, sem o apoio e a compreensão deles nada disso seria possível. E aos meus pais Catarina e Severino (in memorian) por serem fonte de inspiração eterna.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Msc. Gregório Manoel da Silva Neto. Em circunstância alguma, sob sua orientação me senti só. Meu eterno agradecimento.

Aos Professores Doutores, mas acima de tudo, MESTRES Fernando Pereira Micena e Marcus Augusto Bronzi, pelo exemplo de profissionalismo, dedicação, caráter e humanismo.

Aos Professores do Programa de Mestrado profissional - PROFMAT, pela competência e dedicação durante as aulas.

Aos todos colegas e amigos do mestrado que compartilharam o cotidiano dessa jornada, pela amizade e trabalho solidário.

À CAPES, pela bolsa de estudos, fruto da cidadania que permitiu uma dedicação mais consequente no programa de pós-graduação.

À direção, coordenação, professores e amigos do Instituto de Matemática e da Universidade Federal de Alagoas, pelo incentivo, confiança e apoio em todos os momentos.

À direção e coordenação do Colegio Santa Madalena Sofia, pelo apoio e compreensão.

À todos da minha família, pelo interesse, apoio e carinho.

Ao meu amigo Felipe Prata, pela paciência e colaboração na diagramação desta dissertação. Sem você amigo, acho que esta dissertação seria feita à mão.

À minha mãe Catarina, que sempre esteve presente nos momentos mais difíceis da minha caminhada estudantil, ensinando-me a valorizar a competência, a paciência e a persistência.

À minha esposa Lisiane, amiga e companheira, pelo amor, paciência e apoio. Meu trabalho se tornou mais leve porque você, nas horas difíceis, me lembrou da melhor direção a ser tomada: seguir em frente!

Muito obrigado!

RESUMO

Este trabalho é uma proposta baseada em uma experiência de ensino da matemática na educação básica, segundo uma abordagem visual. Elaboramos uma sequência de aulas organizadas em 3 sessões, sobre o uso de ferramentas da Geometria Analítica como base para o estudo das funções de primeiro grau e de segundo grau. Escolhemos este tema porque consideramos que o estudo da reta e o estudo da parábola são conteúdos pouco explorados no Ensino Médio, além de acreditarmos que através deste tema podemos capacitar o aluno a entender melhor o mundo em que vive, tornando-o mais crítico e fazendo com que ele seja capaz de realizar análises algébricas ou gráficas, à medida que são apresentadas ferramentas geométricas. Propomos uma abordagem visual para o ensino das funções de primeiro grau e de segundo grau, por acreditarmos que este método dá autonomia ao aluno, possibilitando a diversidade de resolução de um mesmo problema, auxiliando e estimulando-o na criação de sua própria técnica, permitindo que o pensamento aconteça livremente.

Palavras-chave: Plano Cartesiano. Geometria Analítica. Geometria Euclidiana. Reta. Função do Primeiro Grau. Parábola. Função do Segundo Grau.

ABSTRACT

This work is a proposal based on an experience of teaching mathematics in basic education, according to a visual approach. We developed a serie of classes organized in three sections on the use of tools of analytic geometry as a basis for studying the functions of first degree and second degree. We chose this theme because we believe that the study of straight and study of the parabola contents are not well explored in high school, and we believe that through this theme we can enable the student to a better comprehension of the world he lives in, making he more critical and doing with which he is able to perform algebraic or graphic analyzes, are presented as the geometric tools. We propose a visual approach to teaching functions in the first and the second degrees, because we believe that this method gives autonomy to the student, allowing the diversity of solving the same problem, assisting and encouraging students to create their own techniques, allowing thought that occur freely.

Keywords: Cartesian plane. Analytic Geometry. Euclidean geometry. straight line. First Degree Function. Parabola. Second Degree Function.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Por volta de 300 a.C., em Alexandria, viveu um homem chamado Euclides, cuja obra, segundo Leonard Mlodinov *(2010, p.39)*, "teve a influência que rivalizou com a bíblia".

Nada é conhecido sobre a vida de Euclides. Apesar disso, sua abordagem da Matemática grega revolucionou esta ciência e deu origem à *Geometria Euclidiana.* O seu reconhecimento deve-se à sua obra-prima *Os Elementos*, um tratado matemático e geométrico constituido de 13 livros.

Os Elementos realiza uma apresentação lógica da maior parte do conhecimento matemático disponível na época de Euclides. Muito do material não é formado de ideias originais dele, apesar de que muitas das provas o são."O objetivo de Euclides era que seu sistema fosse livre de suposições não reconhecidas baseadas na intuição, em conjecturas e na inexatidão."(Mlodinov, 2010, p.43).

Quase dois mil anos depois de Euclides, mais precisamente em 31 de março de 1596, na França, nascia René Descartes. O pensamento de Descartes era revolucionário para uma sociedade feudalista em que ele nasceu, onde a influência da Igreja ainda era muito forte e quando ainda não existia uma tradição de "produção de conhecimento".

Fazendo uma fusão entre álgebra e geometria, Descartes traduziu o plano em números e usou a sua tradução para escrever a geometria em termos de álgebra, criando assim o *Sistema de Coordenadas Cartesianas* e criando uma nova geometria, a *Geometria Analítica.*

Sua obra-prima, *O Discurso sobre o Método*, era um longo ensaio sobre filosofia e ciência. O terceiro apêndice, entitulado *Geometria* mostrava os resultados que sua abordagem queria atingir.

O ensino-aprendizagem da Geometria Analítica foi escolhido como tema deste trabalho por considerarmos que algumas de suas aplicações não são bem exploradas no ensino médio. Atualmente, o ensino-aprendizagem da Geometria Analítica é visto nos conteúdos programáticos do 3º ano do ensino médio, muito depois de ter sido realizado os estudos sobre funções. O nosso objetivo, ao longo deste trabalho é trazer parte da Geometria Analítica, mais precisamente o estudo da reta e o estudo da parábola para os conteúdos programáticos do 1º ano do ensino médio.

O contato dos alunos com a Geometria Analítica, já no 1º ano do ensino médio, ajudaria a responder várias perguntas que permaneceriam sem reposta. É comum o aluno não entender o motivo pelo qual o coeficiente a, na função do tipo $f(x) = ax + b$, é chamado de coeficiente angular e como o sinal do mesmo determina o crescimento ou decrescimento da função, da mesma forma na função do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$ existe uma dúvida sobre o porque que o sinal do coeficiente a determina a posição da concavidade da parábola. Tais questionamentos, entre outros, são respondidos naturalmente com estudo da reta e da parábola.

Além de esclarecer possíveis dúvidas, o fato de ter acesso a novas equações abre novas possibiladades de resoluções em situações-problemas. Equações que em determinadas situações dariam mais agilidade e reduziriam o tempo de resposta.

A visão geométrica, proposta por Descartes, é uma ferramenta preciosa que se encontra relegada a segundo plano no ensino médio. Após ter sido feito o estudo das funções, é comum o desinteresse pela Geometria Analítica por parte dos discentes, pois alegam que não veem aplicação para o conteúdo em situações do cotidiano.

O estudo da Geometria Analítica pode auxiliar o aluno a entender com muito mais propriedade o estudo das funções de primeiro e segundo graus, tornando-o mais crítico ao realizar análises gráficas, trazendo interpretações visuais e instigando-o a realizar discussões e questionamentos acerca de algumas situações-problema, levando-o a pensar não somente em como calcular, mas, principalmente, como interpretar graficamente os processos algébricos.

Utilizando uma sistematização, este trabalho propõe uma união entre o estudo da reta e a função do primeiro grau, assim com o estudo da parábola e a função do segundo grau, fazendo com que o aluno realize inicialmente uma análise geométrica para, a partir daí, executar um tratamento algébrico.

No capítulo 1, estudaremos alguns conceitos básicos necessários para o estudo das funções de primeiro e segundo graus. Será feita a construção do sistema cartesiano ortogonal e definiremos algumas propriedades sobre o mesmo. Em seguida, introduziremos o conceito de função, fazendo uso de situações-problemas.

No capítulo 2, introduziremos o estudo da reta, através de conceitos primitivos até adentrarmos no seu estudo analítico. Posteriormente, se dará início ao estudo da função do primeiro grau, tendo como base o estudo da reta para compor sua estrutura algébrica. Nos exemplos deste capítulo, teremos comparações entre formas de resoluções algébricas e geométricas, como forma de estimular a senso crítico do aluno.

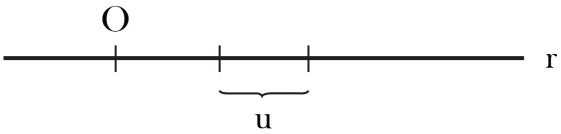
Dedicaremos o capítulo 3 ao estudo da função do segundo grau. Inicialmente, construiremos a parábola, introduziremos sua definição, seus elementos e equações, trabalhando apenas com eixo focal paralelo (ou coincidente) ao eixo das ordenadas. Com a parábola definida, faremos o estudo da função do segundo grau na forma algébrica, observando suas carecterísticas geométricas como auxílio em sua composição.

1 CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

1.1 A reta orientada

Considere uma reta r e uma unidade u de comprimento com a qual mediremos os segmentos contidos em r. Considere também um ponto arbitrário O, o qual chamaremos de origem.

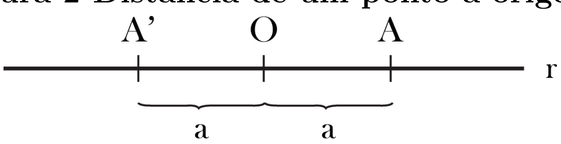
Figura 1-Localização da origem e determinação da unidade na reta.



Fonte: Autor, 2013

Sejam A e A' dois pontos de r tais que os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OA'}$ tenham a mesma medida a, tomada com a unidade u, de modo que A esteja a direita de O e A' à esquerda de O.

Figura 2-Distância de um ponto a origem.

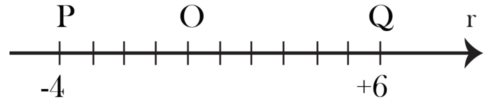


Fonte: Autor, 2013

Se fixarmos o sentido de O para A como o sentido positivo da reta, podemos desta forma dizer que o ponto A está afastado a unidades de O e o ponto A' está afastado $-a$ unidades de O.

De um modo geral, podemos associar a cada ponto de r um único número real que chamamos *abscissa* do ponto, número esse que será positivo para pontos marcados à direita da origem e negativos para pontos marcados à esquerda da origem.

Figura 3-Localização de pontos na reta orientada.



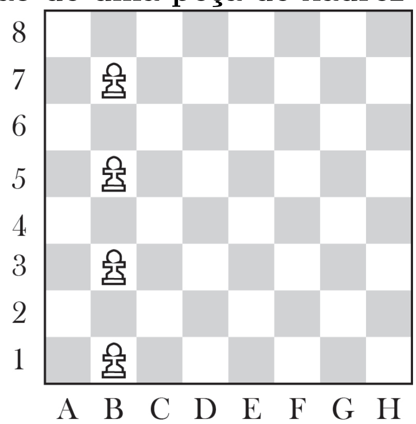
Fonte: Autor, 2013

1.2 O sistema cartesiano ortogonal

Caso tenhamos pontos distribuídos pelo plano, a reta orientada r não se faz mais suficiente, pois podemos ter pontos diferentes com mesma localização, ou seja, mesma abscissa.

Como, por exemplo, em um jogo de xadrez. Caso não houvesse numeração nas colunas do tabuleiro, não seria possível termos uma localização exata de uma determinada peça. Se dissermos que um peão está na posição B, não temos como localizá-lo, pois ele poderia estar em locais distintos do tabuleiro.

Figura 4-Localização de uma peça de xadrez apenas por coluna.



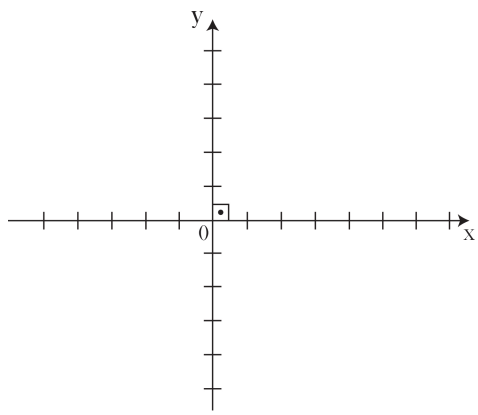
Fonte: Autor, 2013

Vemos então que a reta orientada não é o suficiente para descrever unicamente os pontos de um plano, ou seja, não conseguimos ter para cada ponto do plano uma única representação.

Para que possamos determinar a localização exata do ponto no plano, acrescentamos uma reta perpendicular à reta r e intersectando-a na origem. Este novo eixo terá a mesma unidade de comprimento u, utilizada em r, que será associada a números positivos para pontos marcados acima da origem e negativos para pontos marcados abaixo da origem.

Ao eixo horizontal, a reta orientada que já conhecemos como eixo das abscissas, denominamos eixo *0x* e ao eixo vertical, a reta perpendicular à reta orientada, denominamos eixo *0y* ou *eixo das ordenadas*.

Figura 5-O plano cartesiano ortogonal.



Fonte: Autor, 2013

Estabelecido o sistema, podemos relacionar a todo ponto valores correspondentes ao eixo das abscissas e valores correspondentes ao eixo das ordenadas, através de suas projeções ortogonais.

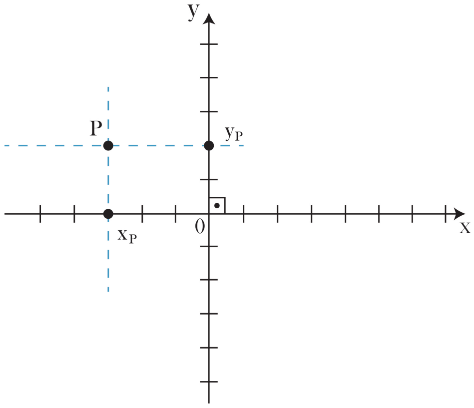
Definição 1.2.1. *Chamamos de projeção ortogonal de um ponto em uma reta r o ponto de intersecção entre a reta r e a reta perpendicular a r traçada partindo do ponto P .*

As projeções x_p e y_p de um ponto P, sobre os eixos Ox e Oy do plano cartesiano, são denominados do ponto P.

Definição 1.2.2. *Chamamos de* par ordenado*, representado por (x_p, y_p), os pares de números reais x_p e y_p que surgem como coordenadas cartesianas de um ponto P no plano.*

Podemos observar agora que os pontos associados anteriormente a um único número real são associados a dois números reais, tornando-se diferentes entre si.

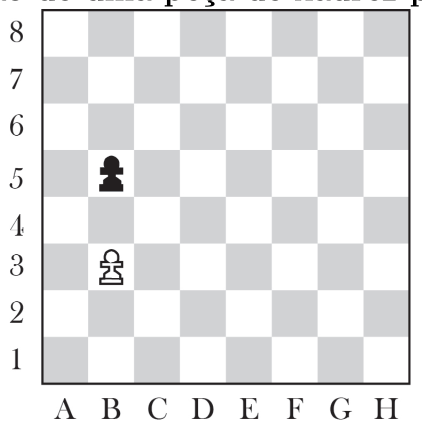
Figura 6-Projeções ortogonais de um ponto no plano cartesiano.



Fonte: Autor, 2013

No jogo de xadrez, acima citado, ao usarmos a coordenada da linha podemos diferenciar as peças no tabuleiro. Se dissermos que um peão está na posição B5 ou na posição B3, para ele só existe uma localização possível.

Figura 7-Localização de uma peça de xadrez por coluna e linha.

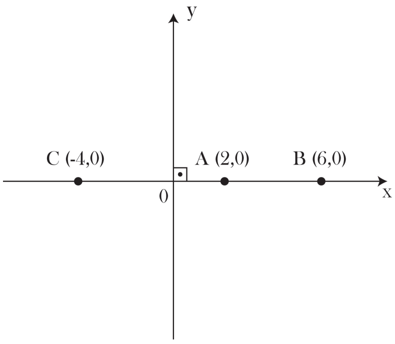


Fonte: Autor, 2013

Caso o ponto P, de coordenadas (x_p,y_p), pertença ao eixo das abscissas ou ao eixo das ordenadas, sua projeção ortogonal em pelo menos um dos eixos coordenados intersectará a origem do sistema de coordenadas cartesianas.

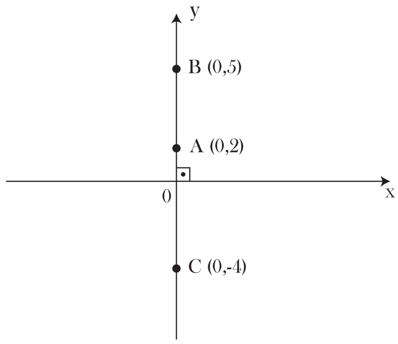
Neste caso, quando o ponto estiver situado sobre o eixo das abscissas, poderemos afirmar que este ponto terá ordenada igual a zero, sendo representado da forma $(x_p,0)$. Analogamente, quando o ponto estiver situado sob o eixo das ordenadas, poderemos afirmar que este ponto terá abscissa igual a zero, sendo representado por $(0,y_p)$.

Figura 8-Ponto localizado sobre o eixo das abscissas.



Fonte: Autor, 2013

Figura 9-Ponto localizado sobre o eixo das ordenadas.

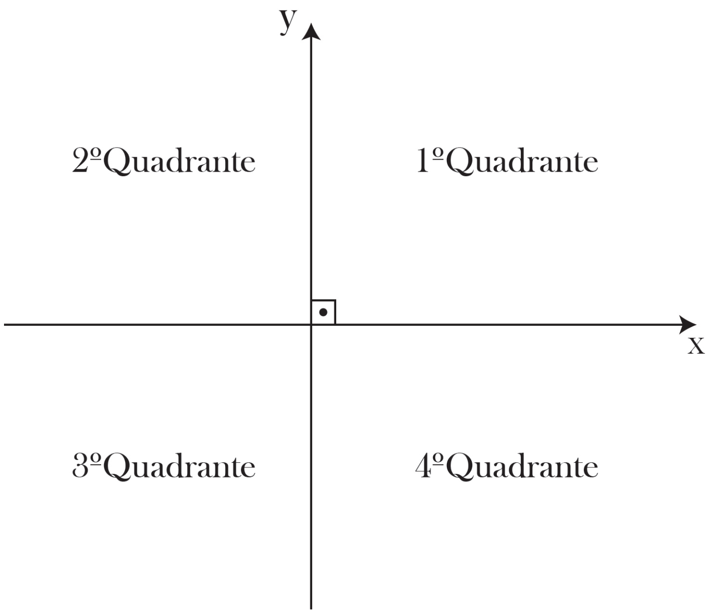


Fonte: Autor, 2013

O plano cartesiano está dividido pelos eixos $0x$ e $0y$ em quatro regiões denominadas *quadrantes.*

Definição 1.2.3. *Chamamos* quadrante *cada uma das quatro regiões do plano determinadas após a intersecção dos eixos coordenados Ox e Oy. Os mesmos são enumerados em sentido anti-horário, como mostra a figura a seguir.*

Figura 10-Posicionamento dos quadrantes no plano cartesiano ortogonal.

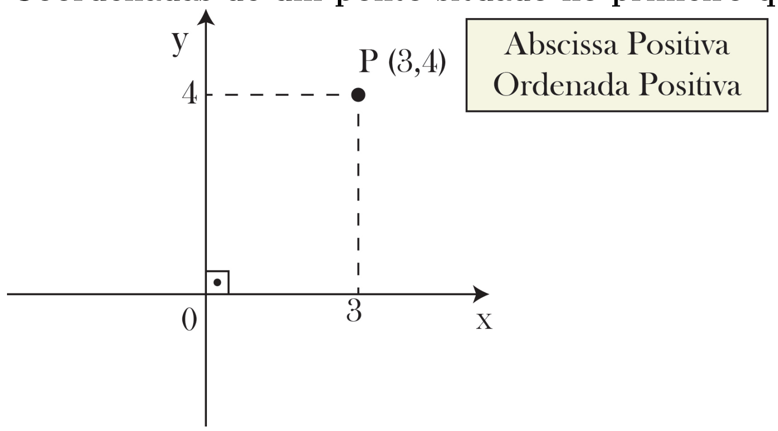


Fonte: Autor, 2013

A determinação dos quadrantes no plano cartesiano pode ser feita através de uma análise dos sinais de suas coordenadas. Esta associação entre as coordenadas de um ponto e o quadrante em que ele está situado é descrita da forma a seguir,

1. Chamamos de *Primeiro Quadrante* a região onde os pares ordenados associados aos pontos têm como abscissa e como ordenada números reais positivos, ou seja, $x > 0$ e $y > 0$.

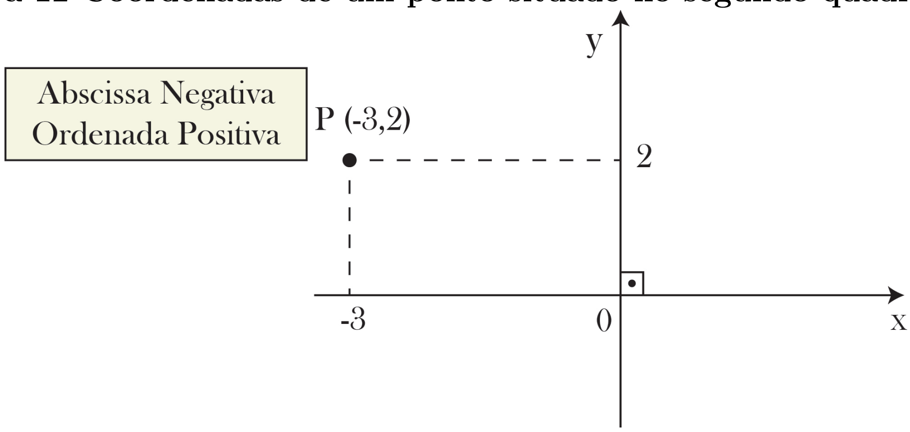
Figura 11-Coordenadas de um ponto situado no primeiro quadrante.



Fonte: Autor, 2013

2. Chamamos de *Segundo Quadrante* a região onde os pares ordenados associados aos pontos têm como abscissa números reais negativos e como ordenada números reais positivos, ou seja, $x < 0$ e $y > 0$.

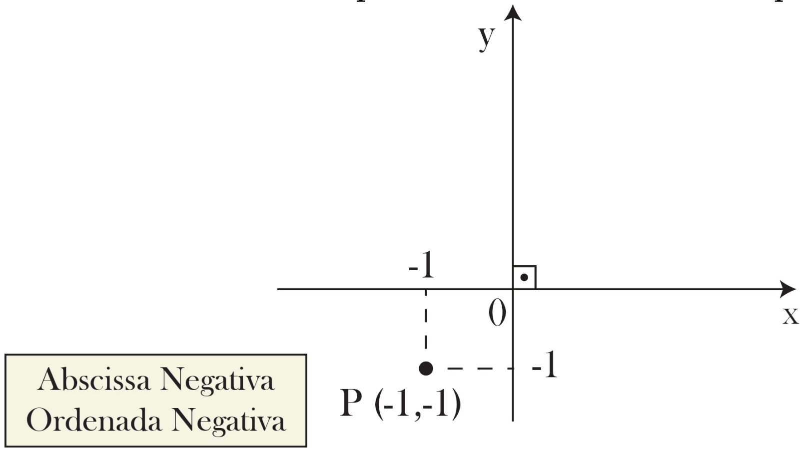
Figura 12-Coordenadas de um ponto situado no segundo quadrante.



Fonte: Autor, 2013

3. Chamamos de *Terceiro Quadrante* a região onde os pares ordenados associados aos pontos têm como abscissa e como ordenada números reais negativos, ou seja, $x < 0$ e $y < 0$.

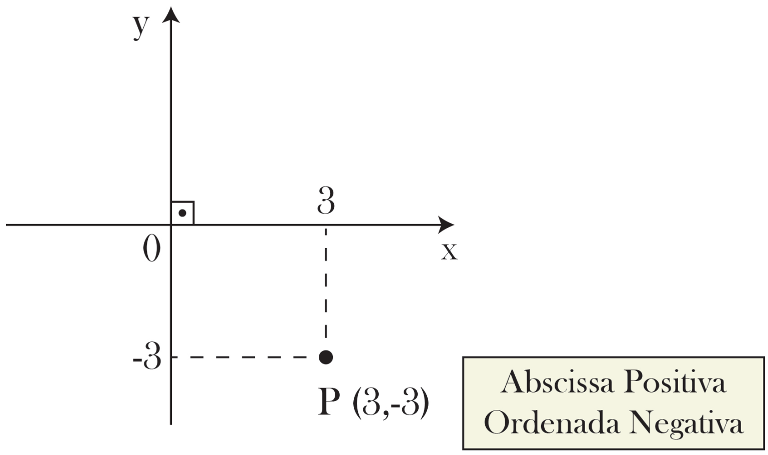
Figura 13-Coordenadas de um ponto situado no terceiro quadrante.



Fonte: Autor, 2013

4. Chamamos de *Quarto Quadrante* a região onde os pares ordenados associados aos pontos têm como abscissa números reais positivos e como ordenada números reais negativos, ou seja, $x > 0$ e $y < 0$.

Figura 14-Coordenadas de um ponto situado no quarto quadrante.



Fonte: Autor, 2013

1.3 Uma noção sobre funções

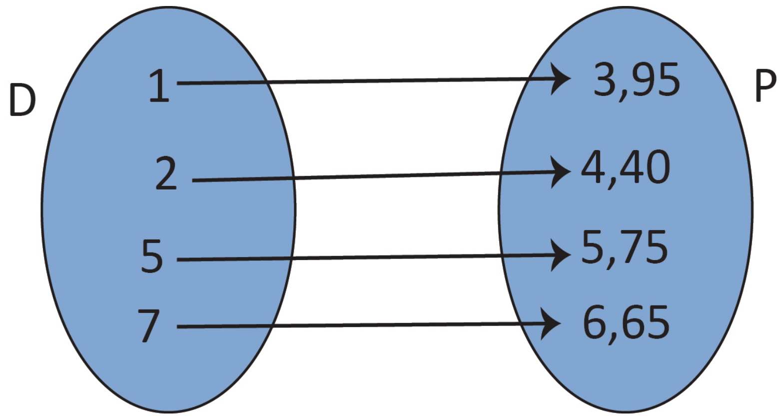
1.3.1 A ideia de função

Em certa cidade, os taxímetros marcam nos percursos sem parada uma quantia inicial de $R\$ \ 3,50$ e mais $R\$ \ 0,45$ por quilômetro rodado conforme tabela a seguir:

Distância percorrida (Km)	Valor à pagar (Reais)
1	3,95
2	4,40
5	5,75
7	6,65

Para representarmos a relação entre os dados da tabela, podemos usar um .

Figura 15-Representação de uma relação no diagrama de flechas.



Fonte: Autor, 2011

Se usarmos símbolos (letras), essa relação pode ser expressa por $p = 0,45 \cdot d + 3,50$, onde d é a distância percorrida (em km) e p o preço a ser pago (em Reais).

Utilizando a relação, podemos ver que para $d = 5\ km$ o preço pago pelo passageiro será de $p = 0,45 \cdot 5 + 3,50 = 5,75\ Reais$, o que condiz exatamente com o indicado pelo diagrama.

Note que para cada valor de d (é razoável dizer que $d > 0$) a equação produz exatamente o valor do preço p a ser pago pelo passageiro, e ainda podemos afirmar que há exatamente um único valor de p associado a d. Então, dizemos que a relação entre as grandezas p e d descreve uma ou, ainda, dizemos que a grandeza p é uma função da grandeza d.

Definição 1.3.1. *Uma função f, de um conjunto A em um conjunto B, simbolicamente*

$$f : A \to B,$$

é uma correspondência que associa a cada elemento do conjunto A um único elemento do conjunto B.

Assim como o preço da corrida de táxi e sua quilometragem, poderíamos estudar diversas relações que têm como característica um valor fixo mais um acréscimo, ou decréscimo, de acordo com a variável em questão. Bons exemplos disso são os salários de alguns vendedores, que, geralmente, são compostos por salário inicial fixo e uma porcentagem em cima da venda. Numericamente, se um vendedor ganhasse salário fixo de $R\$ \ 500,00$ e, além disso, uma comissão de 2% em cima do total de vendas, poderíamos calcular seu salário pela fórmula:

$$S(x) = 500 + 0,02x,$$

sendo x o valor total das vendas e $S(x)$ o salário do vendedor.

Outra situação rotineira é o abastecimento veicular. O total a pagar depende da quantidade de gasolina abastecida. Podemos estabelecer uma relação entre a quantidade de litros de gasolina e o valor a ser pago. Se um litro de gasolina custa $R\$ \ 2,88$ para x litros abastecidos pagaremos uma quantia $V(x)$, que pode ser expressa por:

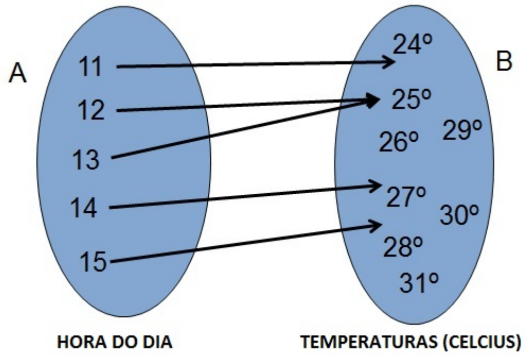
$$V(x) = 2,88x.$$

Existe uma grande variedade de funções no nosso cotidiano. Os valores pagos pelo abastecimento de água e o consumo de energia elétrica, por exemplo, também são funções expressas por fórmulas matemáticas. Mas há, entretanto, outros fenômenos nos quais a correspondência entre as grandezas não é descrita por fórmulas matemáticas. Por exemplo, podemos associar a cada hora do dia a temperatura (em graus Celsius) da água de uma piscina. Não há como prever através de uma fórmula qual a temperetura de uma piscina às 13:00 do dia de amanhã, mas com certeza se introduzirmos um termômetro na piscina às 13:00 do dia de amanhã, este indicará alguma temperatura. Podemos dizer, então, que a temperatura da piscina está em função da hora do dia em que ela foi verificada.

1.3.2 Domínio e contradomínio de uma função

Retomemos o exemplo, citado acima, em que cada hora do dia é associada à temperatura da água da piscina, em determinado período do ano. Representaremos por A o conjunto formado por algumas horas do dia e B o conjunto formado por algumas temperaturas, em graus Celcius. Podemos então, representá-lo através do diagrama

Figura 16-Domínio e Contradomínio da função representada em diagrama.



Fonte: Autor, 2011

Em uma função *f*, de A em B, o conjunto de "partida" A denomina-se *domínio* da função e o conjunto de "chegada" B, *contradomínio* da função.

Note na figura que todo elemento do domínio A tem um correspondente, e um único correspondente, no contradomínio B.

No contradomínio B algumas situações podem ocorrer: 25º é correspondente de mais de um elemento de A; assim como 26º, 29º, 30º e 31º "sobram" em B e não são correspondentes a nenhum elemento de A.

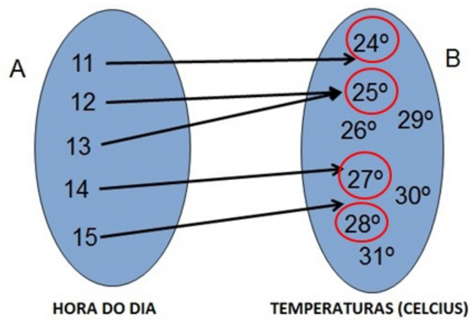
1.3.3 Conjunto imagem de uma função

Definição 1.3.2. *Chamamos de* conjunto-imagem *da função, representado por Im_f, ao subconjunto do contradomínio constituído pelos elementos que possuem correspondentes no domínio da função.*

$$Im_f = \{f(x) \in B \mid x \in A\}$$

Por exemplo:

Figura 17-Imagem da função representada em diagrama.



Fonte: Autor, 2011

Para a função descrita anteriormente temos:

$$Im_f = \{24^o, 25^o, 27^o, 28^o\}$$

1.3.4 A sentença matemática de uma função

Se o domínio e o contradomínio da função são subconjuntos dos números reais, é comum representarmos funções por expressões algébricas envolvendo duas variáveis, também chamadas de "fórmulas". Por exemplo, a equação $y = 1 - x^2$ representa a variável y como função da variável x. Aqui, x é a e y é a .

Na sentença matemática, o domínio da função é o conjunto de todos os valores assumidos pela variável independente x e o conjunto-imagem da função é o conjunto de todos os valores assumidos pela variável dependente y.

Se a fórmula $y = 1 - x^2$ descreve y como função de x, e se a essa função damos o nome f, então usamos a notação:

$$f : x \mapsto f(x) \text{ com } y = 1 - x^2$$

De uma forma genérica podemos representar uma função utilizando o domínio, o contradomínio e a sentença matemática, como vemos abaixo.

$$f : D \mapsto CD \text{ com } y = f(x)$$

O símbolo (desenho) f(x) lê-se como valor de f em x, ou imagem de x por f, ou simplesmente *"f de x"* (éfe de x).

Exemplo 1.3.1. *Determine o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem da função* $f : \{-1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{N}$, *tal que* $f(x) = x^2 - 6x + 10$.

Solução

Domínio: $\{-1, 0, 1, 2\}$

Contradomínio: $\mathbb{N}$

Imagem:

$$f(-1) = (-1)^2 - 6(-1) + 10 = 17$$

$$f(0) = (0)^2 - 6(0) + 10 = 10$$
$$f(1) = (1)^2 - 6(1) + 10 = 5$$
$$f(2) = (2)^2 - 6(2) + 10 = 8$$

Perceba como todas as imagens pertencem ao contradomínio. Se isso não ocorresse, a função não estaria bem definida.

Exemplo 1.3.2 (UFG-GO). *Para uma certa espécie de grilo, o número, N, que representa os cricrilados por minuto, depende da temperatura ambiente T. Uma boa aproximação para esta relação é dada pela lei de Dolbear, expressa na fórmula:* $N = 7T - 30$, *com T em graus Celsius. Um desses grilos fez sua morada no quarto de um vestibulando as vésperas de suas provas. Com o intuito de diminuir o incômodo causado pelo barulho do inseto, o vestibulando ligou o condicionador de ar, baixando a temperatura do quarto para* 15^oC, *o que reduziu pela metade o número de cricrilados por minuto. Assim, a temperatura, em graus Celsius, no momento em que o condicionador de ar foi ligado era, aproximadamente, de:*

a. 75
b. 36
c. 30
d. 26
e. 20

Solução:

$$N = 7T - 30$$

Fazendo $T = 15$, temos:

$$\frac{N}{2} = 7 \cdot 15 - 30$$
$$\frac{N}{2} = 105 - 30$$
$$\frac{N}{2} = 75$$
$$N = 150$$

Fazendo agora $N = 150$, temos:

$$150 = 7T - 30$$

$$150 + 30 = 7T$$

$$T = \frac{180}{7}$$

$$T \cong 26$$

Logo, a resposta correta é $26°C$, que corresponde a letra D.

2 ESTUDO DA FUNÇÃO DO PRIMEIRO GRAU

Ao mergulhar, uma pessoa está sujeita a pressões superiores àquela a que estaria submetida se estivesse na superfície da água. Isso ocorre porque, além do ar, a água exerce pressão sobre ela, portanto, quanto maior a profundidade, maior a pressão. Estudos mostram que a pressão varia proporcionalmente com a profundidade.

Neste capítulo, faremos um estudo diferenciado das funções do primeiro grau, tendo como ponto de partida alguns tópicos relativos ao estudo da reta, componente da Geometria Analítica. Para isso, iremos utilizar ferramentas geométricas para maior compreensão dos métodos algébricos.

2.1 Estudo da reta

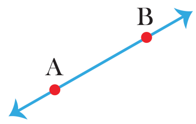
2.1.1 Determinação de uma reta

Os *postulados* ou os *axiomas* são afirmações primitivas assumidas como verdadeiras sem a necessidade de demonstrações. Em *Os Elementos*, Euclides apresenta dois postulados utilizados para .

Postulado I: Pede-se, como coisa possível, que se tire de um ponto qualquer para outro qualquer ponto uma linha reta.

Postulado II: E que uma linha reta determinada se continue indefinidamente até onde seja necessário.

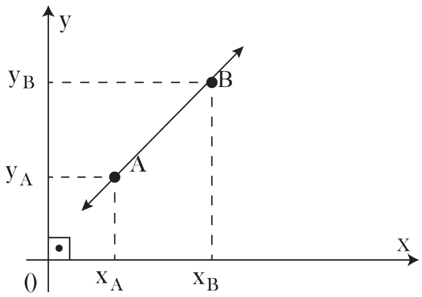
Figura 18-Determinação de uma reta por dois pontos distintos.



Fonte: Autor, 2013

Concluimos, através dos postulados citados, que dados dois pontos distintos podemos determinar uma reta, passando pelos mesmos, e que a mesma é infinita.

Figura 19-Representação de uma reta no plano cartesiano ortogonal.

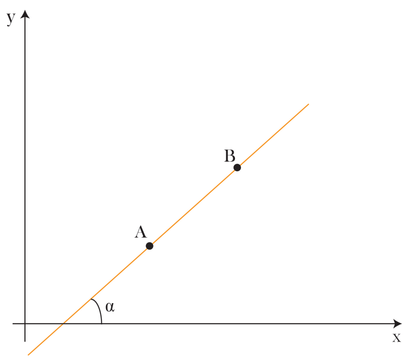


Fonte: Autor, 2013

2.1.2 Inclinação de uma reta

Já sabemos que a determinação de uma reta no plano cartesiano é feita através de dois pontos distintos, e a mesma após ter sido determinada formará com o eixo das abscissas um certo ângulo. Ou seja, dada uma reta **r**, no plano cartesiano, a mesma forma com o eixo Ox um ângulo α.

Figura 20-Ângulo formado entre uma reta e o eixo das abscissas.



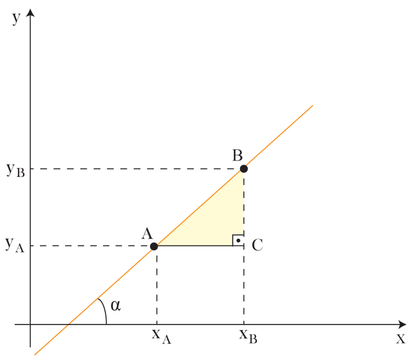
Fonte: Autor, 2013

A medida desse ângulo é feita em sentido anti-horário a partir de um ponto pertencente ao eixo *0x*. Assim, podemos dizer que a reta **r** tem inclinação α, com $0° < \alpha < 180°$.

2.1.3 Coeficiente angular da reta

Considere uma reta r que contém os pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, não coincidentes, e possui α. Passando uma semi-reta pelo ponto A paralela ao eixo Ox, assim como passando uma semi-reta pelo ponto B paralela ao eixo Oy, as mesmas se intersectarão no ponto C, formando um triângulo retângulo, reto em C.

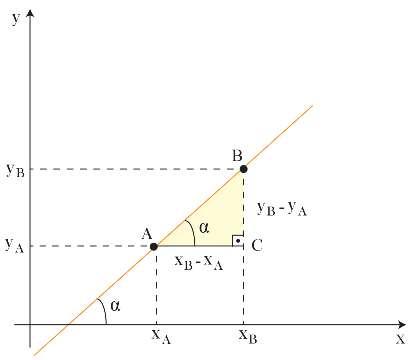
Figura 21-Triângulo retângulo com hipotenusa sobre a reta.



Fonte: Autor, 2013

O ângulo $B\hat{A}C$ do triângulo BCA será igual ao da inclinação da reta, pois, pelo Teorema de Tales, duas retas paralelas cortadas por uma transversal formam ângulos correspondentes iguais. Assim, podemos tomar como referência o triângulo BCA e o coeficiente angular que é a tangente do ângulo de inclinação, α, em BCA.

Figura 22-Triângulo retângulo para cálculo do coeficiente angular.



Fonte: Autor, 2013

Daí temos,

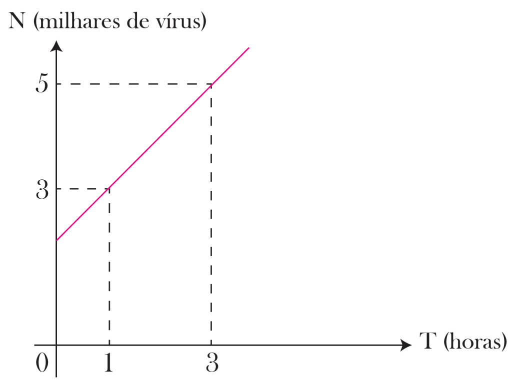
$$tg\alpha = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{BC}{AC}$$
$$tg\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Notamos então que as variações das coordenadas do ponto tem relação com a inclinação da reta, uma vez que a razão das mesmas é igual a $tg\alpha$. E independente dos pontos que tomemos como referência, obtemos sempre o mesmo triângulo retângulo, com o mesmo ângulo α, tendo então uma razão sempre constante. Portanto,

Definição 2.1.1. *O* coeficiente angular *ou* declividade *da reta r, não paralela ao eixo y é o valor m obtido através da razão entre a variação das coordenadas no eixo das ordenadas, eixo $0y$, pela variação das coordenadas no eixo das abscissas, eixo $0x$, referentes a dois pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$. Ou seja,*

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Exemplo 2.1.1 (ENEM). *O período de incubação do cólera pode ser de algumas horas até cinco dias, porém sua disseminação ocorre com mais facilidade onde as condições de higiene são precárias.*
Analisando uma colônia de vírus do cólera, um pesquisador registrou a disseminação do número desses vírus durante algumas horas e verificou um crescimento linear conforme a reta descrita abaixo, o qual apresenta duas dessas observações. Quantos vírus havia nesta colônia no início da observação?



Solução:

Para determinarmos a quantidade de vírus no início da observação, fixaremos um ponto A para representar o início da observação, onde temos $t = 0$. Chamaremos de B o ponto (1,3) e de C o ponto (3,5). Como os pontos A, B e C estão alinhados, ou seja, pertencem a mesma reta, podemos concluir que o coeficiente angular do segmento $\overline{AB}$ é igual ao do segmento $\overline{BC}$. Daí segue,

$$\begin{aligned} m = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ \frac{5-3}{3-1} &= \frac{3 - y_A}{1-0} \\ \frac{2}{2} &= \frac{3-y_A}{1} \\ 1 &= 3 - y_A \\ y_A &= 2. \end{aligned}$$

Então, inicialmente havia 2000 vírus.

Exemplo 2.1.2 (UFPE). *A poluição atmosférica em metrópoles aumenta ao longo do dia. Em certo dia, a concentração de poluentes no ar, às 8h, era de 20 partículas em cada milhão de partículas e, às 12h, era de 80 partículas em cada milhão de partículas. Admitindo que a variação de poluentes no ar durante o dia é uma função do tempo, cujo gráfico é representado por uma reta. Qual o número de partículas poluentes no ar em cada milhão de partículas, às 10h20?*

Solução:

Considerando o tempo como a abscissa e as partículas como a ordenada, obtemos três pontos. São eles: $A = (8, 20)$, $B = (12, 80)$ e $C = (10 + \frac{1}{3}, y)$.

Como os pontos estão em uma mesma reta, temos

$$m_{AB} = m_{AC}$$

Daí,

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$$

$$\frac{80-20}{12-8} = \frac{y-20}{\frac{31}{3}-8}$$

$$\frac{60}{4} = \frac{y-20}{\frac{7}{3}}$$

$$15 \cdot \frac{7}{3} = y - 20$$

$$35 = y - 20$$

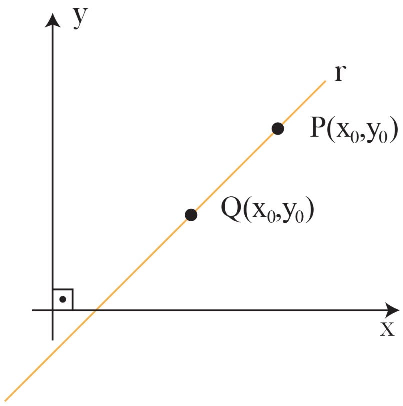
$$y = 55$$

Teremos então, as 10h20, uma concentração de 55 partículas em cada milhão.

2.1.4 Equação fundamental da reta

Considere uma reta não vertical, ou seja, que não é paralela ao eixo das ordenadas. Daí então, teremos uma reta r, um ponto $P = (x, y)$ pertencente à reta, seu coeficiente angular m e outro ponto genérico $Q = (x_0, y_0)$ diferente de P, mas também pertencente a r.

Figura 23-Ponto fixo e ponto genérico pertencentes a uma reta.



Fonte: Autor, 2013

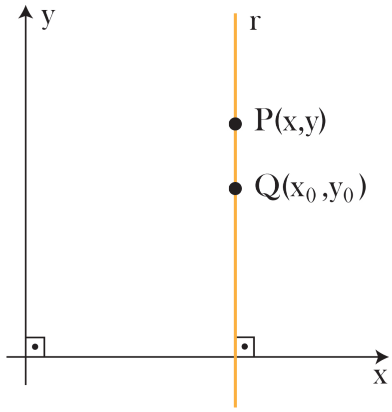
Como

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)\,. \tag{2.1}$$

A equação (2.1) acima é conhecida como *Equação fundamental* da reta. No caso que a reta r é paralela ao eixo das ordenadas temos que $x = x_0$.

Figura 24-Reta paralela ao eixo das ordenadas.



Fonte: Autor, 2013

2.1.5 Variações de equações da reta

Embora a equação fundamental seja suficiente para representarmos qualquer reta do plano cartesiano, é útil conhecermos outras formas de representação destas equações, pois cada uma tem uma utilidade específica.

Equação geral

Se desenvolvermos a equação fundamental já encontrada, podemos chegar a uma equação em um formato diferente. Vejamos,

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

$$y - y_0 = m \cdot x - m \cdot x_0$$

$$m \cdot x - y - m \cdot x_0 + \ y_0 = 0$$

Como m é constante, podemos sem perda de generalidade, representá-lo por um quociente do tipo $-\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Teremos,

$$-\frac{a}{b} \cdot x - y + \frac{a}{b} \cdot x_0 + \ y_0 = 0$$

$$-a \cdot x - b \cdot y + a \cdot x_0 + \ b \cdot y_0 = 0$$

$$a \cdot x + b \cdot y - a \cdot x_0 - \ b \cdot y_0 = 0$$

Como $(-a \cdot x_0 - \ b \cdot y_0)$ é uma constante, podemos sem perda de generalidade, chama-la de c, com $c \in \mathbb{R}$, e daí segue que a equação geral e dada por:

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \tag{2.2}$$

Exemplo 2.1.3. *Dados os pontos $A = (1, 3)$ e $B = (5, 7)$, determine a equação geral da reta r que passa por A e B.*

Solução:
vamos, inicialmente, encontrar o coeficiente angular da reta.

$$m = \frac{7-3}{5-1}$$
$$m = \frac{4}{4}$$
$$m = 1$$

Agora escolhemos qualquer um dos dois pontos e, junto com o coeficiente angular encontrado, aplicamos na equação fundamental.

$$y - 3 = 1 \cdot (x - 1)$$
$$y - 3 = x - 1$$

Por fim, organizamos na forma da equação geral.

$$x - y + 2 = 0$$

Exemplo 2.1.4 (UEPA). *O comandante de um barco resolveu acompanhar a procissão fluvial do Círio, fazendo o percurso em linha reta. Para tanto, fez uso do sistema de eixos cartesianos para melhor orientação. O barco seguiu a direção que forma 45° com o sentido positivo do eixo x, passando pelo ponto de coordenadas (3,5). Qual a equação que define este trajeto?*

Solução:
Com os dados acima citados, podemos aplicá-los na equação fundamental e manipularmos até obtermos a equação geral da reta. Assim, como $tg45° = 1$, temos

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

$$y - 5 = 1 \cdot (x - 3)$$

$$y - 5 - x + 3 = 0$$

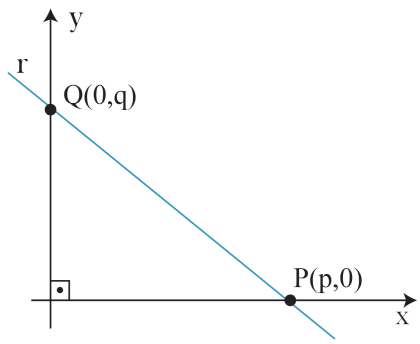
$$x - y + 2 = 0$$

Daí podemos encontrar qualquer outro ponto pelo qual o barco passou, ou irá passar se mantiver a mesma trajetória.

Equação segmentária

Se considerarmos que uma determinada reta r intersecta o eixo das abscissas no ponto P de coordenadas *(p,0)* e o eixo das ordenadas no ponto Q de coordenadas *(0,q)*, podemos definir uma equação através apenas destes pontos.

Figura 25-Intersecção da reta com o eixo das abscissas e das ordenadas.



Fonte: Autor, 2013

Calculando o coeficiente angular, temos,

$$m = \frac{0 - q}{p - 0} = -\frac{q}{p}.$$

Substituindo na equação fundamental o coeficiente angular encontrado e qualquer um dos dois pontos, neste caso utilizaremos P, temos,

$$y - 0 = -\frac{q}{p} \cdot (x - p)$$

$$p \cdot y = -q \cdot x + p \cdot q$$

$$q \cdot x + p \cdot y = p \cdot q$$

Podemos então dividir toda equação por $p \cdot q$,

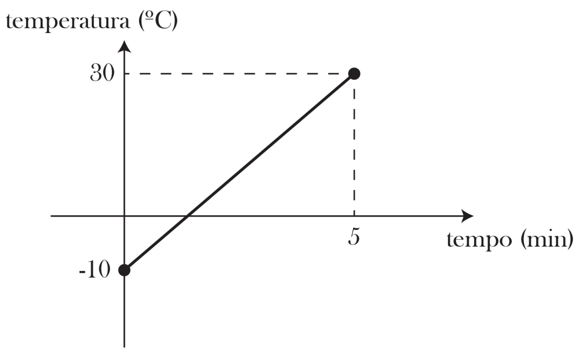
$$\frac{q \cdot x}{p \cdot q} + \frac{p \cdot y}{p \cdot q} = \frac{p \cdot q}{p \cdot q}$$

daí encontramos,

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \tag{2.3}$$

A equação (2.3) é chamada *equação segmentária* da reta.

Exemplo 2.1.5 (CESGRANRIO). *Uma barra de ferro com temperatura inicial de -10 °C foi aquecida até 30 °C, em 5 minutos. O gráfico abaixo representa a variação da temperatura da barra com relação ao tempo gasto nessa experiência. Calcule em quanto tempo, após o início da experiência, a temperatura da barra atingiu 0° C.*



Solução:

Para encontrarmos o tempo que levou para que a barra atingisse a temperatura de 0°C, basta utilizarmos a equação segmentária da reta, pois temos como dados o ponto $Q = (0, -10)$ e um ponto qualquer da reta $(x, y) = (5, 30)$. Então,

$$\frac{5}{p} + \frac{30}{-10} = 1$$

$$5 - 3p = p$$

$$4p = 5$$

$$p = 1,25$$

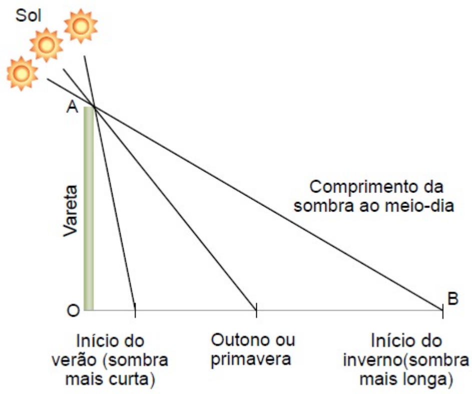
Logo, a barra atinge 0°C em 1,25 minutos, ou seja, 1 minuto e 15 segundos.

Exemplo 2.1.6 (UERJ). *Sabedoria egípcia*

Há mais de 5.000 anos os egípcios observaram que a sombra no chão provocada pela incidência dos raios solares de um gnômon (um tipo de vareta) variava de tamanho *e de direção. Com medidas feitas sempre ao meio-dia, notaram que a sombra, com o passar dos dias, aumentava de tamanho. Depois de chegar a um comprimento máximo, ela recuava até perto da vareta. As sombras mais longas coincidiam com dias frios. E as mais curtas, com dias quentes.*

Adaptado da revista Galileu, janeiro de 2001.

Um estudante fez uma experiência semelhante à descrita no texto, utilizando uma vareta de 2 metros de comprimento. No início do inverno, mediu o comprimento da sombra, encontrando 8 metros. Utilizou, para representar sua experiência, um sistema de coordenadas cartesianas, no qual o eixo das ordenadas (y) e o eixo das abscissas (x) continham, respectivamente, os segmentos de reta que representavam a vareta e a sombra que ela determinava no chão. Esse estudante pôde, assim, escrever a seguinte equação da reta que contém o segmento AB:



a. $y = 8 - 4x$

b. $x = 6 - 3y$

c. $x = 8 - 4y$

d. $y = 6 - 3x$

Solução:

Tendo a vareta como eixo das ordenadas e o solo como eixo das abscissas, na equação segmentária temos $p = 8$ e $q = 2$. Daí,

$$\frac{x}{8} + \frac{y}{2} = 1$$
$$\frac{x + 4y}{8} = 1$$

$$x + 4y = 8$$

Concluindo, assim, que a alternativa correta é letra C.

Equação reduzida

Se utilizarmos agora na equação fundamental, o ponto de intersecção com eixo das ordenadas, que chamamos de Q, representado pelo par *(0,q)* e o coeficiente angular da reta m, teremos

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

$$y - q = m \cdot (x - 0)$$

E daí, podemos obter a seguinte equação:

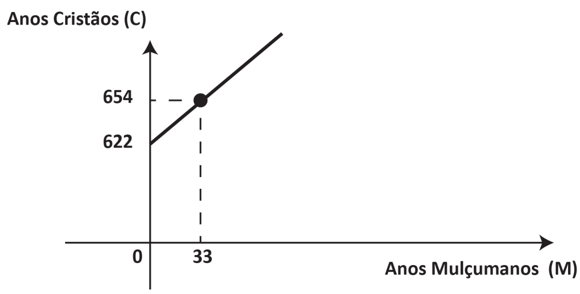
$$y = m \cdot x + q, \tag{2.4}$$

conhecida como *equação geral* da reta.

Exemplo 2.1.7 (ENEM). *Considerando que o calendário muçulmano teve início em 622 da Era Cristã e que cada 33 anos muçulmanos correspondem a 32 anos cristãos, é possível estabelecer uma correspondência aproximada de anos entre os dois calendários, considerando C = anos cristãos e M = anos muçulmanos. Determine esta relação.*

Solução:

Façamos inicialmente um esboço da reta, considerando C o eixo das ordenadas e M o eixo das abscissas.



Daí vemos claramente que na reta $y = m \cdot x + q$, temos $q = 622$. Para encontrarmos m, segue,

$$m = \frac{654 - 622}{33 - 0}$$
$$m = \frac{32}{33}$$

Ou seja, se C representa o eixo das ordenadas e M o eixo das abscissas, temos a seguinte equação da reta: C= $\frac{32}{33} \cdot M + 622$.

2.2 A função do primeiro grau

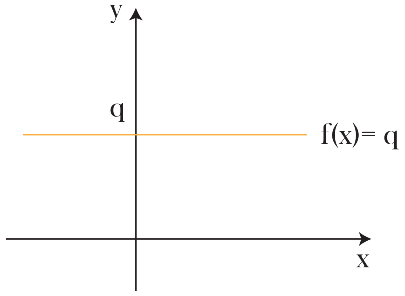
Ao observarmos atentamente a equação reduzida da reta, como m e q são constantes, para $m \neq 0$ os valores de y dependem exclusivamente dos valores de x, ou seja, estamos associando a cada x real uma única imagem y, o que nos remete à ideia de função. E já que a variável x está elevada a primeira potência, iremos chamar esta função de *função do 1º grau.*

Definição 2.2.1. *Chamamos de função do 1º grau, toda função* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *na forma* $y = m \cdot x + q$ *ou* $f(x) = m \cdot x + q$, *com* $m, q \in \mathbb{R}$ *e* $m \neq 0$, *cuja representação gráfica é uma reta .*

Daí, conclui-se que, toda reta oblíqua aos eixos Ox e Oy, tem como forma algébrica uma função do 1º grau.

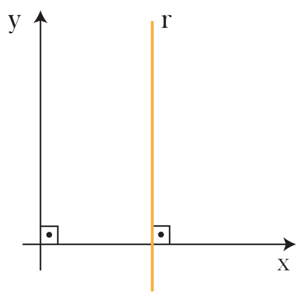
Caso a reta seja paralela ao eixo *0x*, teremos uma função constante, uma vez que $m = 0$ nos dará $y = q$ e caso a reta seja paralela ao eixo *0y* não teremos função, uma vez que um único valor de x teria infinitos valores de y, se contrapondo a definição de função vista anteriormente.

Figura 26-Reta horizontal determinando uma função constante.



Fonte: Autor, 2013

Figura 27-Reta vertical não representando uma função.



Fonte: Autor, 2013

2.2.1 Termo independente da função do primeiro grau

*Independente: in.de.pen.den.te, adj (in+dependente)***,** *Que não é dependente, que não depende de ninguém ou de nada; autônomo, livre.*

Dicionário Michaelis

1998-2009 Editora Melhoramentos Ltda.

O termo q da função do 1º grau $f(x) = m \cdot x + q$ é chamado de *termo independente* da função do 1º grau.

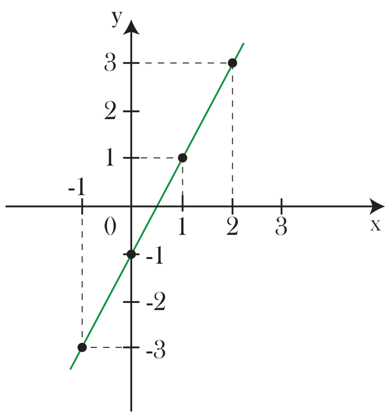
Podemos ver na função do 1º grau, que para $x = 0$, teremos:

$$f(0) = m \cdot 0 + q$$

$$f(0) = q.$$

Ou seja, quando $x = 0$, sua imagem será o próprio termo independente. Assim, o termo independente q da função do 1º grau é a ordenada do ponto em que a reta intersecta o eixo das ordenadas, representado por $Q = (0, q)$.

Exemplo 2.2.1. *Qual função representa a reta descrita abaixo?*



Solução:

No gráfico acima, podemos ver que a reta intersecta o eixo das ordenadas no ponto $(0, -1)$. Logo, temos que $q = -1$.

Daí, escolhemos um dos demais pontos da reta, como o ponto $(2, 3)$, e efetuamos uma substituição, com a finalidade de encontrarmos o coeficiente angular, m. Segue que,

$$y = m \cdot x - 1$$

$$3 = m \cdot 2 - 1$$

$$2 \cdot m = 4$$

$$m = 2$$

Representamos então a reta dada pela função $f(x) = 2 \cdot x - 1$.

2.2.2 Raiz ou zero da função do primeiro grau

Definição 2.2.2. *Chamamos* raiz(es) *ou* zero(s) *da função os elementos do domínio que anulam a função. Ou seja, os valores de x para os quais teremos $y = 0$.*

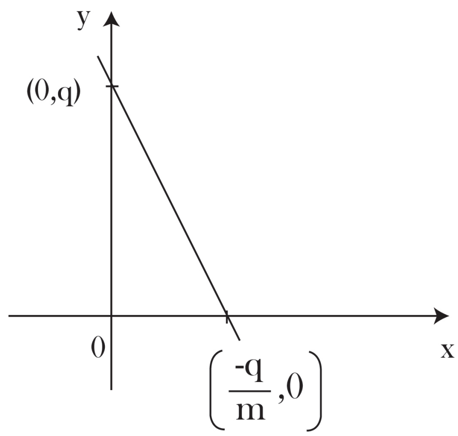
Neste caso, aplicando a definição na função do 1º grau, teremos:

$$y = m \cdot x + q$$

$$0 = m \cdot x + q$$

$$x = -\frac{q}{m}$$

Figura 28-Representação gráfica da raiz da função do primeiro grau.



Fonte: Autor, 2013

Se representarmos a função do 1º grau como equação segmentária da reta, podemos ver claramente a raiz da função, uma vez que se $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ temos $P = (p, 0)$, ou seja, p equivale à raiz da função do 1º grau.

Caso a raiz da função seja igual à zero, temos:

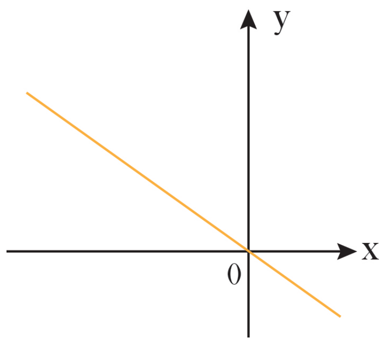
$$x = -\frac{q}{m}$$

$$\frac{q}{m} = 0$$

$$q = 0$$

Ou seja, para que a raiz da função seja zero o termo independente também deverá ser zero, e a função intersectará a origem do plano cartesiano e neste caso temos $y = m \cdot x$, e a denominamos .

Figura 29-Representação da função do primeiro grau com raiz nula.



Fonte: Autor, 2013

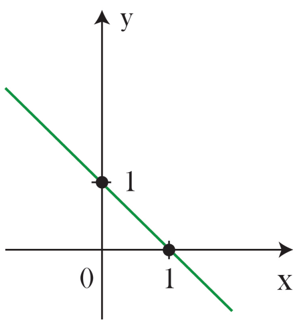
2.2.3 Construção do gráfico da função do primeiro grau

Já sabemos que para determinarmos uma reta é suficiente termos dois pontos, e neste caso particular, para a função do 1º grau basta encontrarmos a raiz e o termo independente, que poderemos traçar o gráfico da função.

Exemplo 2.2.2. *Esboçe o gráfico da função* $f(x) = -x + 1$.

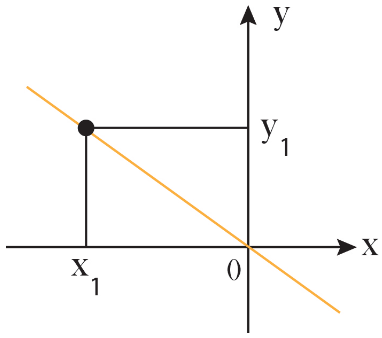
Solução:

Na função temos como termo independente 1, ou seja, $q = 1$ e fazendo $f(x) = 0$ temos $x = 1$. Representando graficamente teriamos,



Caso a função intersecte a origem, ou seja, for linear, basta atribuirmos um valor para $x = x_1$, encontrando assim sua imagem em $y = y_1$ e teremos o ponto (x_1, y_1), que ao junto com a origem determinará a reta que representa a função dada.

Figura 30-Construção do gráfico de uma função linear.



Fonte: Autor, 2013

2.2.4 Crescimento e decrescimento da função do 1º grau

Nosso objetivo nesta secção é mostrar que o crescimento e decrescimento da função do 1º grau depende exclusivamente do sinal do coeficiente angular. Para isso, veremos dois casos:

Primeiro, vamos supor que uma empresa que trabalha com vendas, paga às suas atendentes um salário que depende do valor da venda total efetuada pela funcionária durante o mês. Vemos, então, que quanto mais as funcionárias vendem, maiores serão os seus salários, ou seja, um aumento no valor das vendas significa um aumento no valor dos salários. A relação observada entre o valor das vendas e o valor dos salários caracterizam uma função crescente. Sendo assim,

Definição 2.2.3. *Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é* estritamente crescente, *quando para quaisquer valores x_1 e x_2, se tivermos $x_1 > x_2$, então teremos $y_1 > y_2$.*

Então, se a função for crescente, temos

$$x_1 > x_2 \Longrightarrow x_1 - x_2 > 0$$

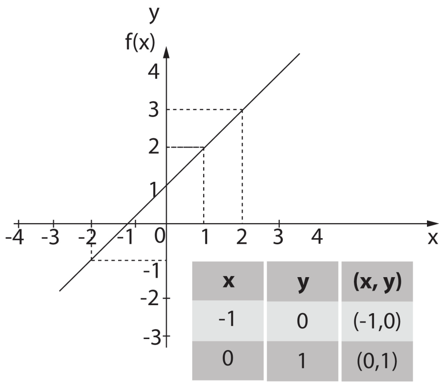
$$y_1 > y_2 \Longrightarrow y_1 - y_2 > 0$$

Daí,

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} > 0.$$

1. A função do primeiro grau será *crescente* sempre que o coeficiente angular for positivo, ou seja, $m > 0$.

Figura 31-Gráfico de uma função do 1 º grau crescente.

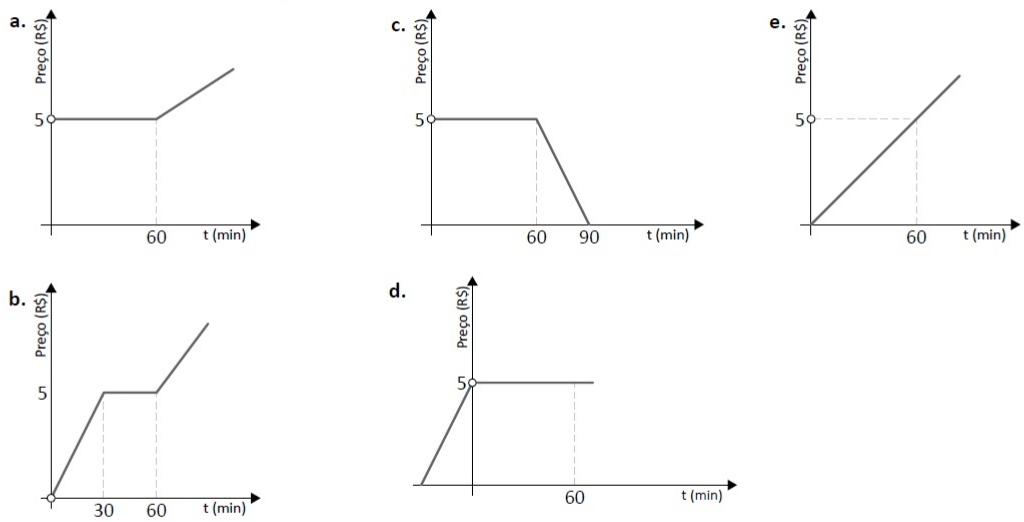


x	y	(x, y)
-1	0	(-1,0)
0	1	(0,1)

Fonte: Autor, 2013

Vemos no gráfico acima um exemplo de uma função do 1º grau crescente, uma vez que o aumento no valor das abscissas significa aumento no valor das ordenadas.

Exemplo 2.2.3. *Com a crescente concentração de veículos nas regiões centrais das grandes cidades, é cada vez mais comum a utilização de estacionamentos privados. Então, se um deles cobra R\$ 5,00 pela primeira hora e R\$ 0,05 para cada minuto excedente. Determine o gráfico que pode descrever o preço a ser pago.*



Solução:

Podemos ver que temos uma função definida por duas sentenças. A primeira é constante entre 0 e 60 minutos, onde o preço pago é de R$ 5,00. A segunda é encontrada da seguinte forma:

Sendo **t** o tempo total e **e** o tempo excedente, temos que $e = t - 60$.

Daí, para t maior que 60 minutos, temos:

$$f(t) = 0,05 \cdot e + 5$$

$$f(t) = 0,05 \cdot (t - 60) + 5$$

$$f(t) = 0,05 \cdot t - 3 + 5$$

$$f(t) = 0,05 \cdot t + 2$$

Como *f(t)* é crescente, pois $m >$ *0*, temos com alternativa correta letra A. de 0 a 60 minutos a função é constante e a partir de 60 minutos é crescente.

Ao contrário da função crescente, se desligarmos um forno após o mesmo ter atingido uma certa temperatura, vemos que sua temperatura diminuirá com o passar do tempo, até atingir a temperatura ambiente. O que significa que o aumento do tempo resultará em uma diminuição da temperatura do forno. Esta relação entre o tempo decorrido e a temperatura do forno é caracteristica de uma função decrescente. Sendo assim,

Definição 2.2.4. *Uma função* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é* estritamente decrescente*, quando para quaisquer valores* x_1 *e* x_2*, se tivermos* $x_1 > x_2$*, então teremos* $y_1 < y_2$*.*

Logo, se a função for decrescente, temos

$$x_1 > x_2 \Longrightarrow x_1 - x_2 > 0$$

$$y_1 < y_2 \Longrightarrow y_1 - y_2 < 0$$

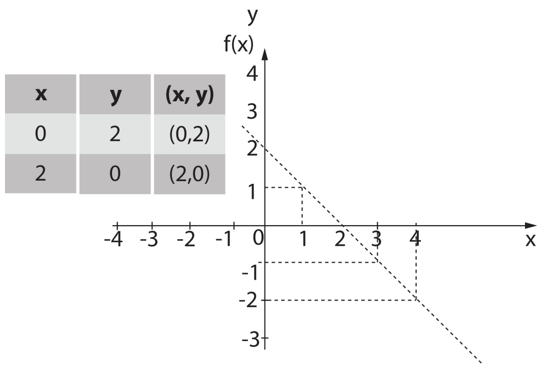
Daí,

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} < 0.$$

2. A função do primeiro grau será *decrescente* sempre que o coeficiente angular for negativo, ou seja, $m < 0$.

Vemos no gráfico abaixo um exemplo de função do 1º grau decrescente, uma vez que o aumento no valor das abscissas significa a diminuição no valor das ordenadas.

Figura 32-Gráfico de uma função do 1 º grau decrescente.



Fonte: Autor, 2013

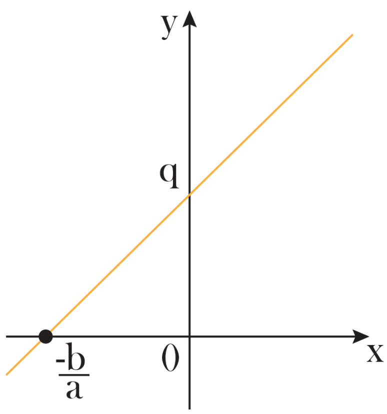
2.2.5 Estudo do sinal da função do primeiro grau

Quando fazemos o esboço do gráfico de uma função do primeiro grau, percebemos que, para certos valores do domínio, obtemos imagens negativas e, para outros, obtemos imagens positivas. Para um único valor, obtemos uma imagem zero, na *raiz da função*.

Estudar o sinal da função é analisarmos quais valores do domínio as imagens são negativas e para que valores do domínio as imagens são positivas.

Inicialmente, consideremos o caso de uma função do primeiro grau crescente, com m e q positivos.

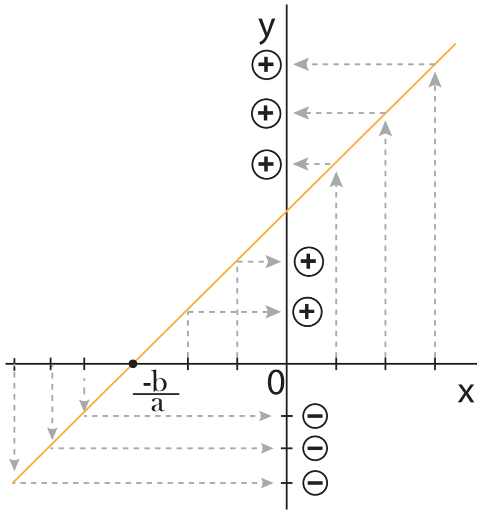
Figura 33-Reta com coeficiente angular e termo independente positivos.



Fonte: Autor, 2013

Vemos que se escolhemos um valor maior que a raiz, temos imagens positivas, ao mesmo tempo em que se escolhemos um valor menor que a raiz, temos imagens negativas.

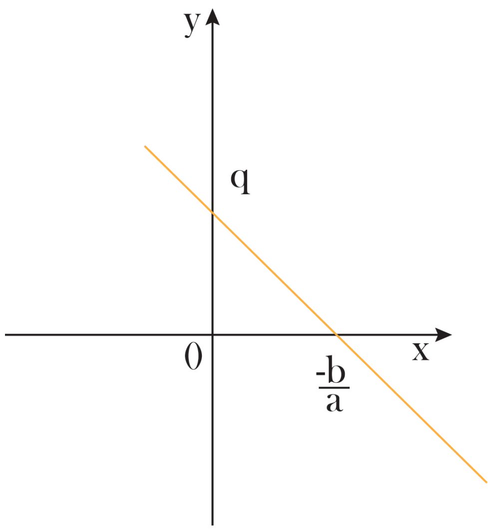
Figura 34-Relação entre valores da abscissa e o sinal da imagem da função do primeiro grau.



Fonte: Autor, 2013

Agora, consideremos o caso de uma função do 1º grau decrescente, com, por exemplo, m negativo e q positivo.

Figura 35-Reta com coeficiente angular negativo e termo independente positivo.

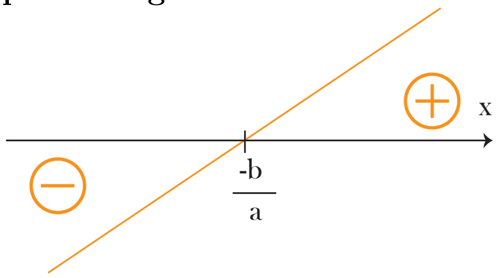


Fonte: Autor, 2013

Notamos que novamente o sinal da imagem depende apenas da posição da abscissa escolhida em relação à raiz da função.

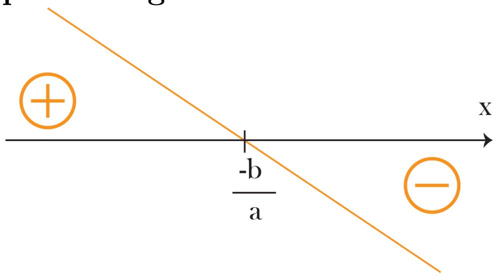
Concluímos, então, que o estudo do sinal da função do primeiro grau pode ser realizado tomando como base apenas o eixo das abscissas, analisando a posição da raiz e o crescimento ou decrescimento da função, como vemos nas situações abaixo.

Figura 36-Estudo do sinal da função do primeiro grau crescente.



Fonte: Autor, 2013

Figura 37-Estudo do sinal da função do primeiro grau decrescente.



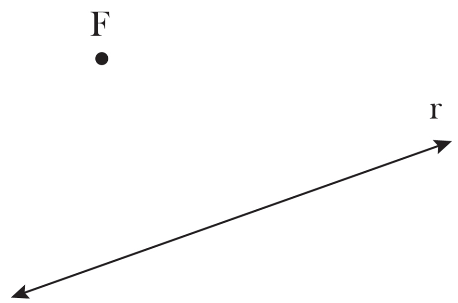
Fonte: Autor, 2013

3 ESTUDO DA FUNÇÃO DO SEGUNDO GRAU

3.1 A parábola

No plano, considere uma reta r e ponto F fora dela, ou seja, $F \notin r$.

Figura 38-Reta no plano e um ponto fora dela.

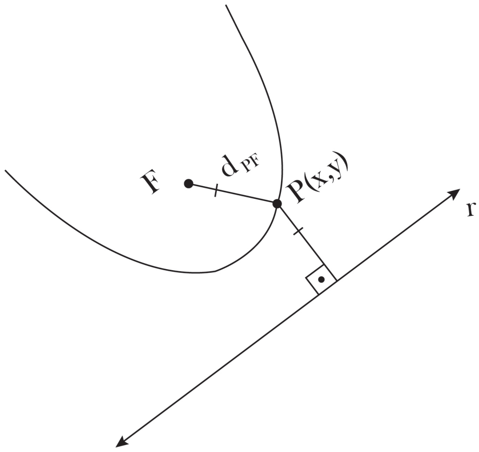


Fonte: Autor, 2013

Definição 3.1.1. *Ao conjunto dos pontos $P = (x, y)$ equidistantes de F e r dá-se o nome de parábola. O ponto F e a reta r denomina-se de Foco e diretriz da parábola, respectivamente.*

Ou seja, sendo $d_{P,F}$ a distância do ponto F a qualquer ponto $P(x, y)$ e $d_{P,r}$ a distância de qualquer ponto P a reta r. O ponto P pertence a parábola sempre que $d_{P,F} = d_{P,r}$.

Figura 39-Determinação de uma parábola.



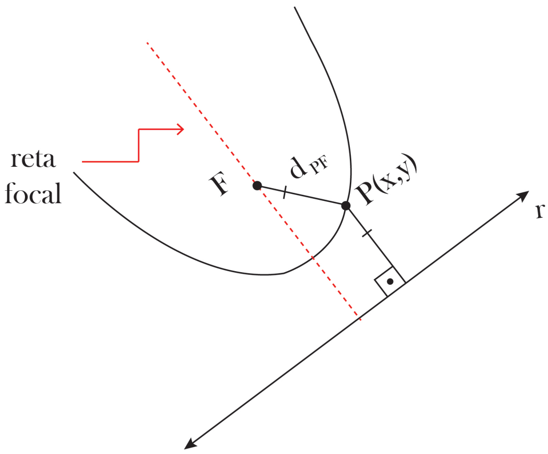
Fonte: Autor, 2013

3.1.1 Elementos da parábola

Além do *Foco* e da *Reta Diretriz*, temos outros elementos que também compõem uma parábola, são eles:

Definição 3.1.2. *A* Reta Focal *(l) é a reta que contem o foco e intersecta a reta diretriz perpendicularmente.*

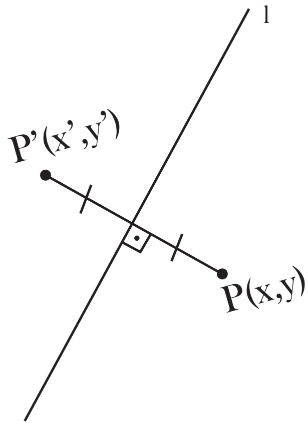
Figura 40-Reta focal de uma parábola.



Fonte: Autor, 2013

A reta focal também é conhecida como *eixo de simetria* da parábola, pois dado qualquer ponto *P=(x,y)* pertencente à parábola, todo ponto *P' =(x',y')* simétrico de *P* com relação a (l) também pertencerá a parábola.

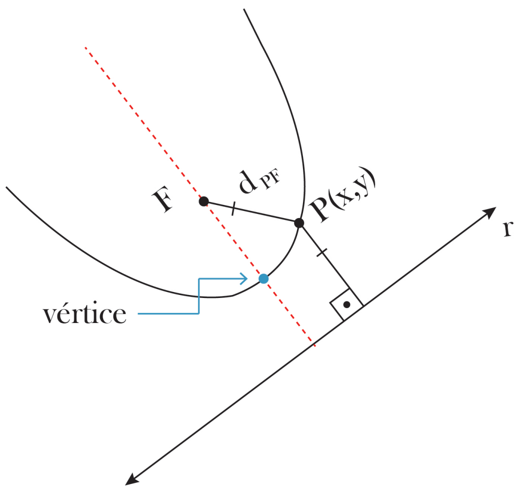
Figura 41-Simetria com relação ao eixo focal.



Fonte: Autor, 2013

Definição 3.1.3. *Chamamos* Vértice *da parábola (V) o ponto de intersecção entre a reta focal e a parábola.*

Figura 42-Vértice de uma parábola.

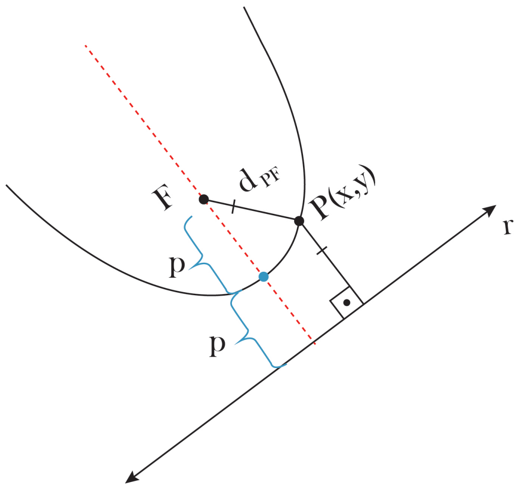


Fonte: Autor, 2013

Note que como V é um ponto da parábola, então $d_{F,V} = d_{r,V}$. Ou seja, o vértice é o ponto médio entre a reta diretriz e o foco da parábola. Como as distâncias são iguais, a mesma é representada por uma constante denominada *da parábola*, simbolizada pela letra p. Daí,

$$d_{F,V} = d_{r,V} = p \text{ e } d_{F,r} = 2p.$$

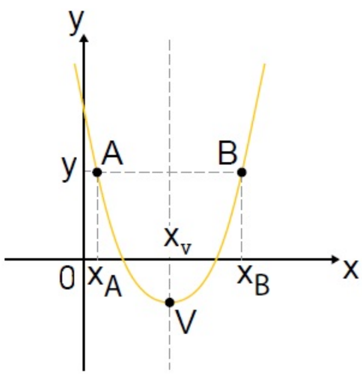
Figura 43-Representação gráfica do parâmetro da parábola.



Fonte: Autor, 2013

Como sabemos que todo ponto pertencente à parábola tem seu simétrico em relação à reta focal também pertencente à parábola, podemos observar que uma vez que o vértice é o único ponto da parábola que pertence a reta focal, as abscissas dos pontos simetricos a reta focal serão simetricas a abscissa do vértice (x_v). Assim, dados dois pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ com abscissas equidistantes da abscissa do vértice (x_v), ou seja, $d_{x_A,x_v} = d_{x_B,x_v}$, os pontos A e B terão mesma ordenada $y_A = y_B = y$.

Figura 44-Relação entre pontos com abscissas equidistantes da abscissa do vértice.

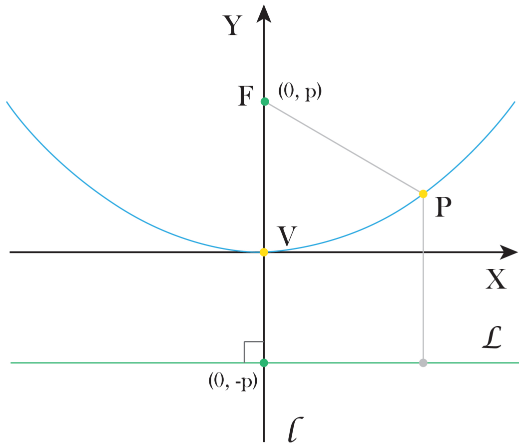


Fonte: Autor, 2013

3.1.2 Equação da parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo das ordenadas .

Inicialmente vamos supor o foco acima da origem.

Figura 45-Parábola com foco acima da origem e vértice na origem.



Fonte: PROFMAT, 2012

Neste caso, o foco tem coordenadas $(0,\ p)$ e a reta r terá equação $y = -p$. Seja P (x, y) é um ponto genérico pertencente à parábola. Daí segue,

$$d_{F,P} = d_{r,P}$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = y + p$$

$$(x-0)^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$x^2 = 4py,$$

ou seja,

$$y = \frac{1}{4p}x^2.$$

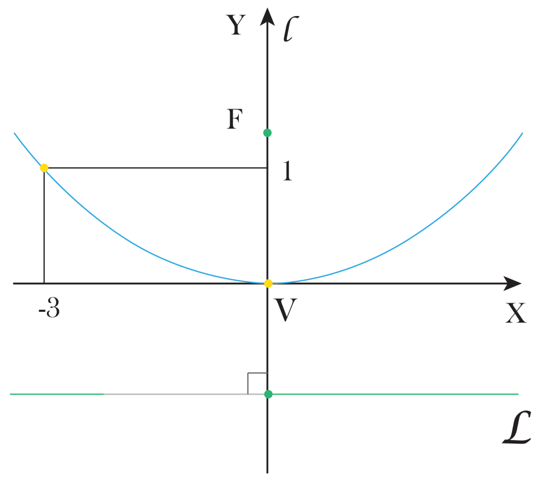
Exemplo 3.1.1. *Uma parábola passa pelo ponto $(-3, 1)$, tem vértice V na origem e o eixo $0Y$ como reta focal. Encontre sua equação, seu foco e a equação da sua diretriz.*

Solução:

Quando fazemos o esboço do gráfico, vemos que se o vértice está localizado na origem e a parábola passa pelo ponto $(-3, 1)$, seu foco estará acima da origem.

Daí temos que a mesma será representada pela equação

$$y = \frac{1}{4p}x^2.$$



Como sabemos que a parábola passa pelo ponto $(-3, 1)$, temos que

$$1 = \frac{1}{4p}(-3)^2$$

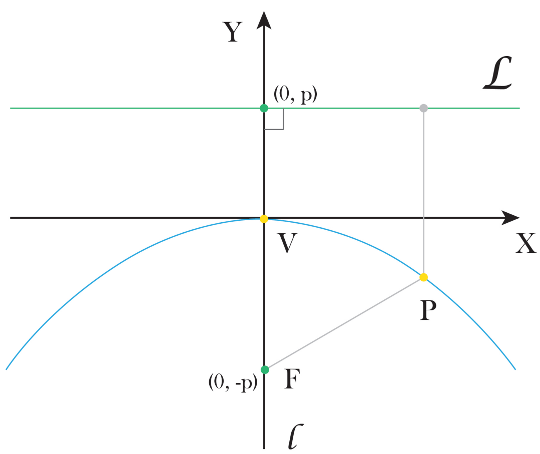
$$1 = \frac{9}{4p}$$

$$p = \frac{9}{4}$$

Logo, a parábola tem equação $y = \frac{1}{9}x^2$, seu foco é $\left(0, \frac{9}{4}\right)$ e a diretriz é a reta de equação $y = -\frac{9}{4}$.

Vamos considerar o caso em que o foco está abaixo da origem.

Figura 46-Parábola com foco abaixo da origem e vértice na origem.



Fonte: PROFMAT, 2012

Neste caso o foco tem coordenadas $(0, \ -p)$ e a reta r terá equação $y = p$. Seja P (x, y) é um ponto genérico pertencente a parábola. Então,

$$d_{F,P} = d_{r,P}$$
$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+p)^2} = y - p$$
$$(x-0)^2 + (y+p)^2 = (y-p)^2$$
$$x^2 + y^2 + 2py + p^2 = y^2 - 2py + p^2$$
$$x^2 = -4py,$$

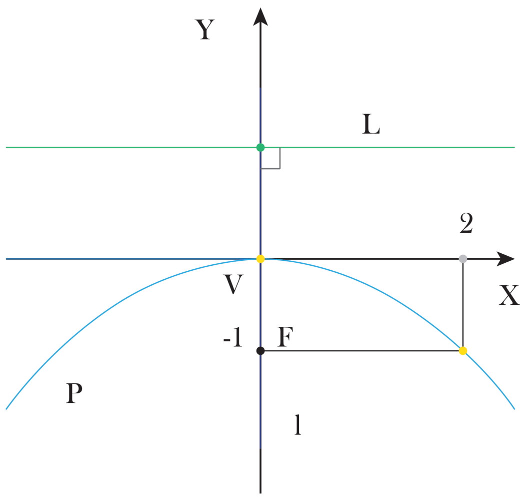
ou seja,

$$y = -\frac{1}{4p}x^2.$$

Exemplo 3.1.2. *Uma parábola passa pelo ponto* $(2, -1)$*, tem vértice* V *na origem e o eixo* $0Y$ *como reta focal. Encontre sua equação, seu foco e a equação da sua diretriz.*

Solução:

Inicialmente, vemos que se o vértice está localizado na origem e a parábola passa pelo ponto $(2, -1)$, então seu foco está abaixo da origem.



Daí temos que a mesma será representada pela equação

$$y = -\frac{1}{4p}x^2.$$

Como sabemos que a parábola passa pelo ponto $(2, -1)$, temos que

$$-1 = -\frac{1}{4p}(2)^2$$

$$-1 = -\frac{1}{p}$$
$$p = 1$$

Logo, a parábola tem equação $y = -\frac{1}{4}x^2$, seu foco é $(0, -1)$ e a diretriz é a reta de equação $y = 1$.

De posse destas duas equações já podemos analisar duas características importantes da parábola.

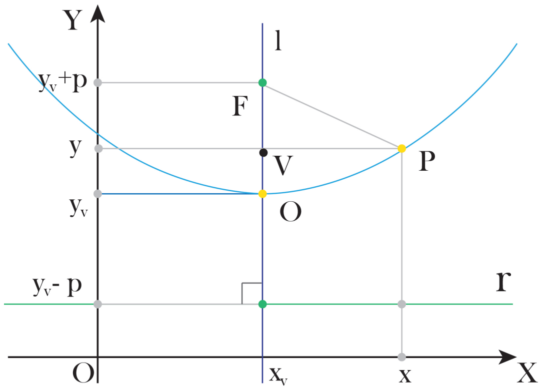
A primeira diz respeito à abertura da parábola, a qual chamamos de *concavidade*. Vemos que quando o coeficiente de do termo x^2 é positivo, a concavidade encontra-se voltada para cima e quando o mesmo é negativo, a concavidade encontra-se voltada para baixo.

A segunda diz respeito ao vértice da parábola. Quando a concavidade está voltada para cima, o vértice é o ponto de ordenada mínima da parábola e quando a concavidade está voltada para baixo, o vértice é o ponto de ordenada máxima da parábola.

3.1.3 Equação geral da parábola com reta focal paralela ao eixo das ordenadas

Novamente vamos por partes. Inicialmente veremos a equação geral para parábola com a concavidade para cima e vértice de coordenadas (x_v, y_v).

Figura 47-Parábola com concavidade para cima e vértice fora da origem.



Fonte: PROFMAT, 2012

Observando a figura, vemos que o foco F tem coordenadas $(x_v, y_v + p)$, a diretriz r tem equação $y = y_v - p$ e a reta focal l tem equação $x = x_v$. Daí segue,

$$d_{F,P} = d_{r,P}$$

$$\sqrt{(x - x_v)^2 + [y - (y_v + p)]^2} = y - (y_v - p)$$

$$(x - x_v)^2 + [y - (y_v + p)]^2 = [y - (y_v - p)]^2$$

$$(x - x_v)^2 + y^2 - 2y\,(y_v + p) + (y_v + p)^2 = y^2 - 2y\,(y_v - p) + (y_v - p)^2$$

$$(x - x_v)^2 - 2yp + 2y_v p = 2yp - 2y_v p$$

$$(x - x_v)^2 = 4yp - 4y_v p$$

$$(x - x_v)^2 = 4p\,(y - y_v)$$

Exemplo 3.1.3. *Determinar a equação da parábola de vértice* $V = (3, 2)$ *e foco* $F = (3, 4)$*. Encontre também a equação de sua diretriz.*

Solução:

Como o vértice é $(3, 2)$ e o foco é $(3, 4)$, vemos que a concavidade da parábola está para cima. Daí a equação utilizada será $(x - x_v)^2 = 4p\,(y - y_v)$.

Como $p = d_{F,V}$, então $p = 2$. Segue que,

$$(x - 3)^2 = 4 \cdot 2 \cdot (y - 2)$$

$$x^2 - 6x + 9 = 8y - 16$$

$$8y = x^2 - 6x + 25$$

$$y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{25}{8}.$$

Sua diretriz é dada pela relação $y = y_v - p$. Daí,

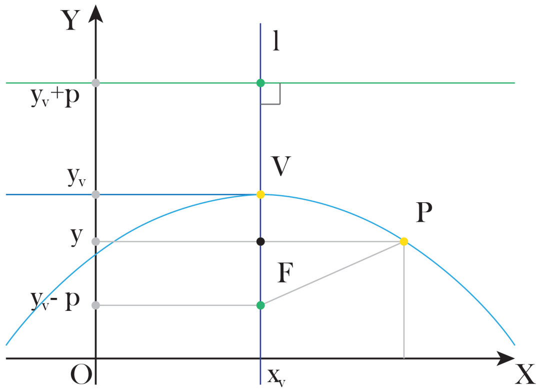
$$y = 2 - 2$$

$$y = 0.$$

Logo a parábola terá equação $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{25}{8}$e sua diretriz é $y = 0$.

De modo análogo, temos a equação geral para parábola com a concavidade para baixo e vértice de coordenadas (x_v, y_v).

Figura 48-Parábola com concavidade para baixo e vértice fora da origem.



Fonte: PROFMAT, 2012

Observando a figura, vemos agora que o foco F tem coordenadas $(x_v, y_v - p)$, a diretriz r tem equação $y = y_v + p$ e a reta focal l tem equação $x = x_v$. Daí segue,

$$d_{F,P} = d_{r,P}$$

$$\sqrt{(x - x_v)^2 + [y - (y_v - p)]^2} = y - (y_v + p)$$

$$(x - x_v)^2 + [y - (y_v - p)]^2 = [y - (y_v + p)]^2$$

$$(x - x_v)^2 + y^2 - 2y\,(y_v - p) + (y_v - p)^2 = y^2 - 2y\,(y_v + p) + (y_v + p)^2$$

$$(x - x_v)^2 + 2yp - 2y_v p = -2yp + 2y_v p$$

$$(x - x_v)^2 = -4yp + 4y_v p$$

$$(x - x_v)^2 = -4p\,(y - y_v)$$

Exemplo 3.1.4. *Determine a equação da parábola de vértice $V = (3, 4)$ e foco $F = (3, 2)$. Encontre também a equação de sua diretriz.*

Solução:

Como o vértice é $(3, 4)$ e o foco é $(3, 2)$, vemos que a concavidade da parábola está para baixo.

Como $p = d_{F,V}$, então $p = 2$. Temos,

$$(x - 3)^2 = -4 \cdot 2 \cdot (y - 4)$$

$$x^2 - 6x + 9 = -8y + 32$$

$$8y = -x^2 + 6x + 23$$
$$y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{23}{8}.$$

Sua diretriz é dada pela relação $y = y_v + p$. Daí,

$$y = 4 + 2$$

$$y = 6.$$

Logo a parábola terá equação $y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{23}{8}$e sua diretriz é $y = 6$.

Exemplo 3.1.5 (Ufpel-RS). *A água jogada por meio de duas bombas em uma fonte descrevem uma trajetória parabólica.*

Considere que as bombas e os pontos de alcance atingidos pela água sejam colineares, que a primeira esteja localizada na origem de um sistema cartesiano e que o ponto mais alto da curva formada pelo jato dessa bomba tenha coordenadas (1,2).

Com base no texto e em seus conhecimentos, é correto afirmar que a função que determina a parábola representada pelo jato de água e o ponto no qual esse jato chega ao solo são, respectivamente:

$a.f(x) = 2x^2 - 4x; P(2, 0)$

$b.f(x) = -2x^2 - 4x; P(2, 0)$

$c.f(x) = 2x^2 + 4x; P(-2, 0)$

$d.f(x) = -2x^2 - 4x; P(-2, 0)$

$e.f(x) = -2x^2 + 4x; P(2, 0)$

Solução:

Vemos que a parábola terá concavidade para baixo e $(1, 2)$ são as coordenadas de seu vértice. Além disso, tem como ponto de seu gráfico a origem $(0, 0)$.
Utilizando os dois pontos, encontraremos o parâmetro da parábola.

$$(x - x_v)^2 = -4p\,(y - y_v)$$
$$(0 - 1)^2 = -4p\,(0 - 2)$$
$$1 = 8p$$
$$p = \frac{1}{8}$$

De posse do parâmetro, utilizaremos o vértice novamente para encontrarmos a equação da parábola.

$$(x - x_v)^2 = -4p\,(y - y_v)$$
$$(x - 1)^2 = -4p\cdot\frac{1}{8}\cdot(y - 2)$$
$$x^2 - 2x + 1 = \frac{-y + 2}{2}$$
$$2x^2 - 4x + 2 = -y + 2$$
$$y = -2x^2 + 4x$$

Com a equação, já temos o suficiente para encontrarmos a letra E como alternativa correta.

Analogamente aos casos citados, caso a reta focal seja paralela ou coincidente com o eixo das abscissas teremos uma inversão direta das coordenadas x e y nas equações encontradas. Com relação à concavidade, caso esteja voltada para direita, o coeficiente do termo em y^2 será positivo e caso a parábola esteja com concavidade para esquerda, o coeficiente do termo em y^2 será negativo.

3.2 A função do segundo grau

Se observarmos a equação da parábola com eixo focal paralelo ao eixo $0y$, podemos notar que estamos trabalhando com uma função. Vejamos:

$$(x - x_v)^2 = 4p\,(y - y_v)$$

$$x^2 - 2 \cdot x_v \cdot x + x_v^2 = 4p \cdot y - 4p \cdot y_v$$

$$x^2 - 2 \cdot x_v \cdot x + x_v^2 + 4p \cdot y_v = 4p \cdot y$$

$$y = \frac{1}{4p}\left(x^2 - 2 \cdot x_v \cdot x + x_v^2 + 4p \cdot y_v\right)$$

$$y = \frac{1}{4p}x^2 - \frac{1}{2p} \cdot x_v \cdot x + \frac{1}{4p}\left(x_v^2 + 4p \cdot y_v\right) \tag{3.1}$$

Denotando por $a = \frac{1}{4p}$, $b = -\frac{1}{2p} \cdot x_v$ e $c = \frac{1}{4p}\left(x_v^2 + 4p \cdot y_v\right)$, podemos escrever a expressão (3.1) da forma

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{3.2}$$

Definição 3.2.1. *Denominamos função do 2º grau, toda função f:$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.*

3.2.1 As raízes ou zeros da função do segundo grau

As raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x que satisfazem a equação de 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Ou seja, são os valores da variável x para os quais a variável y assume valor igual a zero. Ainda podemos definir a raiz como sendo o ponto de interseção da parábola com o eixo das abscissas.

O cálculo das raízes de uma equação do segundo grau já era conhecido dos babilônios no século 2000 a.c., mas a formalização do método foi concebida pelo matemático persa (ver[8]).

A fórmula utiliza um método inteligente, uma fatoração de polinômio com objetivo é obter na incógnita x um termo de primeiro grau. Para isso, vamos inserir termos em ambos os membros da equação de forma que possamos obter um trinômio quadrado perfeito no primeiro membro.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 4a \cdot 0$$

$$(2ax)^2 + 4abx = -4ac$$

$$(2ax)^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

Uma vez obtido o trinômio, com o uso de um produto notável, podemos encontrar um quadrado da soma.

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Agora, basta manipularmos a equação para isolarmos a variável x, e assim encontrar um valor definitivo para a variável x:

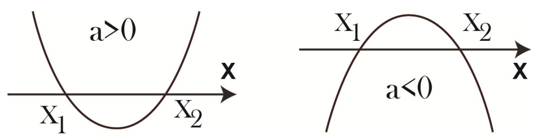
$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A expressão $b^2 - 4ac$ é chamada de e é representada pela letra grega delta (Δ). Através de uma analise do discriminante, temos três casos a considerar:

(i) $\Delta > 0$, A função possui duas raízes reais e distintas, isto é, diferentes:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Figura 49-Função do segundo grau com raízes reais e distintas.

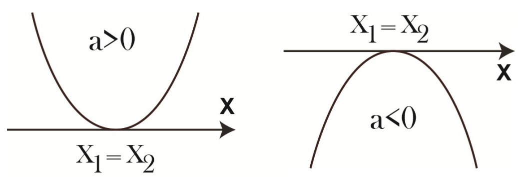


Fonte: Autor, 2013

(ii) $\Delta = 0$, A função possui raízes reais e iguais. Nesse caso, também dizemos que a função possui uma raiz dupla:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

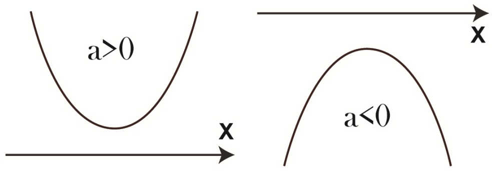
Figura 50-Função do segundo grau com raízes reais e iguais.



Fonte: Autor, 2013

(iii) $\Delta < 0$, A função não possui raízes reais.

Figura 51-Função do segundo grau sem raízes reais.



Fonte: Autor, 2013

Exemplo 3.2.1. *Determine o valor de m de modo que o gráfico da função $f(x) = x^2 + mx + 8 - m$ seja tangente ao eixo x.*

Solução:

Ser tangente ao eixo x significa que o gráfico intersecta o eixo x em um único ponto. Logo, teremos o discriminante igual a zero. Daí,

$$\triangle = b^2 - 4ac$$

$$\triangle = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot (8 - m)$$

$$\triangle = m^2 - 32 + 4m$$

$$m^2 + 4m - 32 = 0.$$

Resolvendo a equação do 2º grau na incógnita m, temos

$$\triangle = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$\triangle = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32)$$

$$\triangle = 16 + 128$$

$$\triangle = 144$$

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{\triangle}}{2a}$$

$$m = \frac{-4 \pm 12}{2}.$$

Logo, a função intersecta o eixo x em um único ponto para $m = -8$ ou $m = 4$.

Exemplo 3.2.2 (UFF). *O lucro mensal L de uma certa empresa é dado por:* $L(x) = -x^2 + 18x - 32$*, sendo x medido em milhares de peças vendidas e L, em milhões de reais. Determine para quais quantidades de peças a empresa não tem lucro nem tem prejuízo.*

Para a empresa não ter lucro nem prejuízo, devemos ter L(x) = 0. Daí,

$$-x^2 + 18x - 32 = 0$$

$$\triangle = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$\triangle = 18^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-32)$$

$$\triangle = 18^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-32)$$

$$\triangle = 324 - 128$$

$$\triangle = 196.$$

Encontrando agora os valores de x, temos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\triangle}}{2a}$$
$$x = \frac{-18 \pm 14}{-2}$$
$$x = \frac{18 \pm 14}{2}$$
$$x = \frac{18+14}{2} = 16 \text{ e } x = \frac{18-14}{2} = 2.$$

Logo, a empresa nem tem lucro nem prejuízo quando vende duas mil ou dezesseis mil peças.

3.2.2 Relação entre coeficientes e raízes

De posse das fórmulas para obtenção das raízes da função do 2º grau, o matemático francês formalizou as relações entre suas raízes e seus coeficientes (Ver [8]). Vejamos,

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a}$$
$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\triangle} - b - \sqrt{\triangle}}{2a}$$
$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a}$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= \frac{-b}{a} \\
x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a}\right) \\
x_1 \cdot x_2 &= \frac{b^2 + b\sqrt{\triangle} - b\sqrt{\triangle} - \triangle}{4a^2} \\
x_1 \cdot x_2 &= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} \\
x_1 \cdot x_2 &= \frac{4ac}{4a^2} \\
x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a}.
\end{aligned}
$$

Na prática as relações de Viète agilizam a resolução de algumas equações de 2º grau, uma vez que de posse da soma e do produto das raízes podemos intuir seus valores.

Exemplo 3.2.3. *Na função $f(x) = x^2 - 5x + 6$ sabemos através das relações de Viète que $x_1 + x_2 = 5$ e $x_1 \cdot x_2 = 6$. Daí, podemos afirmar com segurança que $x_1 = 3$ e $x_2 = 2$ uma vez que os naturais 2 e 3 satisfazem as relações.*

3.2.3 Ponto de máximo ou de mínimo da função do segundo grau

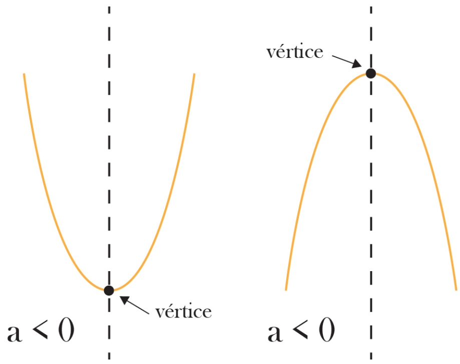
De um modo geral temos que,

Definição 3.2.2. *Uma função f tem em c se $f(c) > f(x)$ para todo x em D, onde D é o domínio de f. O número f(c) é chamado de valor máximo de f em D. Analogamente, f tem um em c se $f(c) < f(x)$ para todo x em D, e o número f(c) é chamado de valor mínimo de f em D.*

Ao realizarmos o estudo da parábola, um dos elementos visto foi o seu vértice. Observamos que o mesmo é ponto em que a parábola intersecta a reta focal e é considerado o ponto de ordenada máxima ou mínima da parábola, a depender de sua concavidade.

Como já vimos na secção 3.1.2, na equação da parábola a concavidade é determinada pelo sinal do coeficiente do termo x^2, o qual na função do 2º grau é representado por a. Daí, dependendo do sinal do coeficiente a, a parábola pode ter sua concavidade voltada para cima quando $a > 0$ ou voltada para baixo quando $a < 0$.

Figura 52-Máximo ou mínimo da função do segundo grau.



Fonte: Autor, 2013

Definição 3.2.3. *Denotamos por valor máximo ou valor mínimo da função do 2º grau, a ordenada do vértice da função* (y_v)*. Tal que, para valores de* $a < 0$ *a função terá ordenada máxima e para valores de* $a > 0$ *a função terá ordenada mínima.*

Para determinarmos as coordenadas do vértice da parábola, usamos o fato de que, sendo o gráfico simétrico em relação à reta focal, os valores $(x_v - k)$ e $(x_v + k)$, representam a mesma imagem para todo $k \in \mathbb{R}$. Sendo assim, $f\,(x_v - k) = f(x_v + k)$. Daí, segue

$$f\,(x_v - k) = f(x_v + k)$$

$$a(x_v - k)^2 + b\,(x_v - k) + c = a(x_v + k)^2 + b(x_v + k) + c$$

$$a{x_v}^2 - 2ax_vk + ak^2 + bx_v - bk + c = a{x_v}^2 + 2ax_vk + ak^2 + bx_v + bk + c$$

$$-2ax_vk - bk = 2ax_vk + bk$$

$$-4ax_vk = 2bk$$

$$x_v = -\frac{b}{2a}.$$

Substituindo o x_v na função temos que:

$$y_v = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$y_v = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y_v = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

$$y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$
$$y_v = \frac{-\triangle}{4a}.$$

Então, podemos afirma que o vértice tem coordenadas $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\triangle}{4a}\right)$.

Exemplo 3.2.4. *O lucro de uma empresa pela venda diária de x peças, é dado pela função:* $L(x) = -x^2 + 14x - 40$. *Quantas peças devem ser vendidas diariamente para que o lucro seja máximo?*

Solução:

O valor de y de uma função do segundo grau (quadrática) $y = ax^2 + bx + c$ é máximo (ou mínimo) quando x é igual a média aritmética das raízes, ou seja , quando $x = \frac{-b}{2 \cdot a}$. Então, L(x) tem valor máximo quando $x = -14/2(-1) = 14/2 = 7$. Assim, devem ser vendidas 7 peças para que o lucro seja máximo.

Exemplo 3.2.5. *Uma bala é atirada de um canhão. A trajetória da bala descreve uma parábola de equação:* $y = -x^2 + 5x$ *(onde x e y são medidos em hectômetros). Determine, em metros, a altura máxima atingida pela bala e o alcance do disparo.*

Solução:

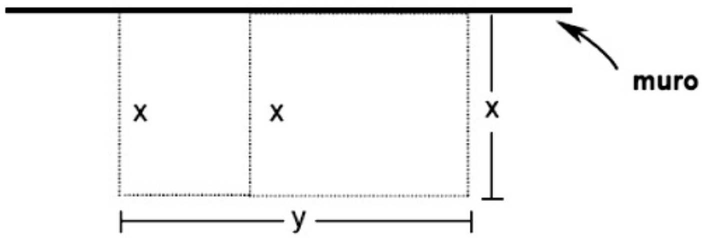
Seja a função do segundo grau $y = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são números reais e $a \neq 0$. O valor máximo (ou mínimo) desta função é $y = \frac{-\triangle}{4 \cdot a}$, onde $\triangle = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$. Então, a altura máxima da bala é:

$$y = \frac{-\left[5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0\right]}{4 \cdot (-1)}$$
$$y = \frac{-25}{-4}$$
$$y = \frac{25}{4}$$
$$y = 6,25\ hm$$
$$y = 625\ m$$

O alcance do disparo é a diferença entre as raízes da equação $-x^2 + 5x = 0$

Vem que: $-x^2 + 5x = x(-x + 5) = 0$. Então, $x = 0$, ou , $-x + 5 = 0$. Logo as raízes são: $x = 0$, ou , $x = 5$. Assim, o alcance do disparo é de $5 - 0 = 5hm = 500m$.

Exemplo 3.2.6 (UFRN). *O Sr. José dispõe de 180 metros de tela, para fazer um cercado retangular, aproveitando, como um dos lados, parte de um extenso muro reto. O cercado compõe-se de uma parte paralela ao muro e três outras perpendiculares a ele (ver figura). Para cercar a maior área possível, com a tela disponível, os valores de x e y são, respectivamente:*



a. $45m$ *e* $45m$

b. $30m$ *e* $90m$

c. $36m$ *e* $72m$

d. $40m$ *e* $60m$

Solução:

vamos obter duas igualdades, utilizando a área do retângulo e a soma dos segmentos a serem cercados.

$$3x + y = 180 \ (1)$$

$$A = x \cdot y \ (2)$$

Substituindo (1) em (2), temos

$$A = x \cdot (180 - 3x)$$

$$A = -3x^2 + 180x$$

Como queremos encontrar os comprimentos do muro para que a área seja máxima, teremos que encontar o x_v. Segue que

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$x = \frac{-180}{-6}$$

$$x = 30$$

Substituindo em (1).

$$y = 180 - 3x$$

$$y = 90$$

Logo, as comprimentos dos muros são 90 metros e 30 metros.

3.2.4 Conjunto imagem da função do segundo grau

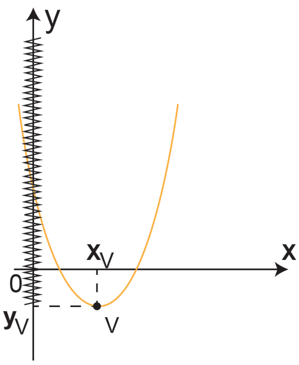
Como vimos em 1.3.3, os valores das ordenadas determinam a imagem da função, assim sendo, podemos fazer a análise de dois casos.
Se $a > 0$, a parábola tem:

- Concavidade para cima;
- Vértice com ordenada mínima;
- $Im = \{y \in \mathbb{R}/y \geq y_v\}$.

Se $a < 0$, a parábola tem:

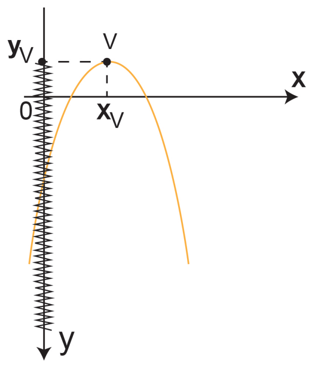
- Concavidade para baixo;
- Vértice com ordenada máxima;
- $Im = \{y \in \mathbb{R}/y \leq y_v\}$.

Figura 53-Imagem da função do segundo grau com concavidade para cima.



Fonte: Autor, 2013

Figura 54-Imagem da função do segundo grau com concavidade para baixo



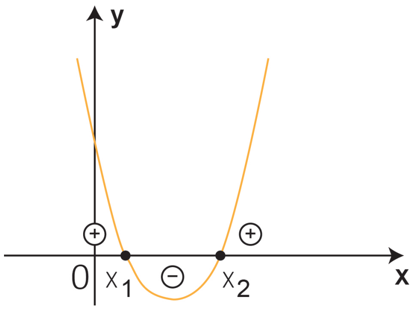
Fonte: Autor, 2013

3.2.5 Estudo do sinal da função do segundo grau

De modo geral, a discussão da variação de sinal de uma função do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$ é feita ao analisarmos a concavidade da parábola e suas intersecções com o eixo da abscissas. Qualquer que sejam as situações, o estudo do sinal recairá sempre em um dos 6 casos a seguir.

1. Se $a > 0$ e $\triangle > 0$, então $\begin{cases} y < 0, & x_1 < x < x_2; \\ y = 0, & x = x_1 \; ou \; x = x_2; \\ y > 0, & x < x_1 \; ou \; x > x_2. \end{cases}$

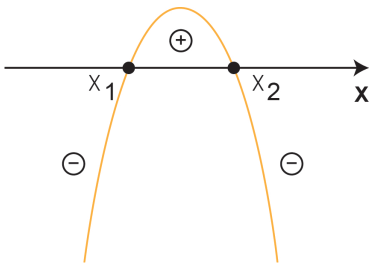
Figura 55-Sinal da imagem da função do segundo grau com $a > 0$ e $\triangle > 0$.



Fonte: Autor, 2013

2. Se $a < 0$ e $\triangle > 0$, então $\begin{cases} y < 0, & x < x_1 \; ou \; x > x_2; \\ y = 0, & x = x_1 \; ou \; x = x_2; \\ y > 0, & x_1 < x < x_2. \end{cases}$

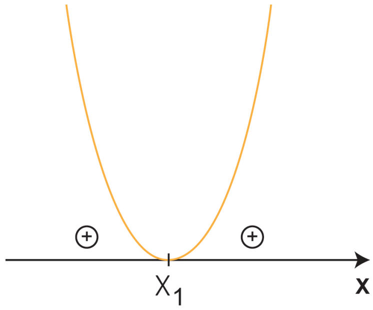
Figura 56-Sinal da imagem da função do segundo grau com $a < 0$ e $\triangle > 0$.



Fonte: Autor, 2013

3. Se $a > 0$ e $\triangle = 0$, então $\begin{cases} y > 0, & x \neq x_1 = x_2; \\ y = 0, & x = x_1 = x_2. \end{cases}$

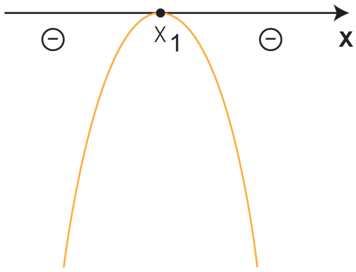
Figura 57-Sinal da imagem da função do segundo grau com $a > 0$ e $\triangle \ = 0$.



Fonte: Autor, 2013

4. Se $a < 0$ e $\triangle \ = 0$, então $\begin{cases} y > 0, & x \neq x_1 = x_2; \\ y = 0, & x = x_1 = x_2. \end{cases}$

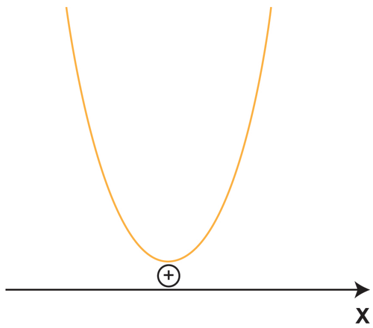
Figura 58-Sinal da imagem da função do segundo grau com $a < 0$ e $\triangle \ = 0$.



Fonte: Autor, 2013

5. Se $a > 0$ e $\triangle \ < 0$, então $y > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

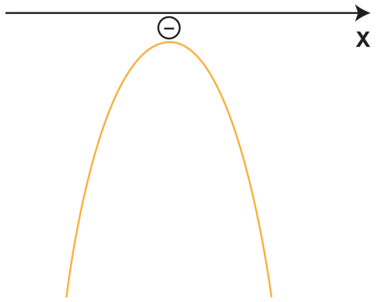
Figura 59-Sinal da imagem da função do segundo grau com $a > 0$ e $\triangle \ < 0$.



Fonte: Autor, 2013

6. Se $a < 0$ e $\triangle < 0$, então $y < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Figura 60-Sinal da imagem da função do segundo grau com $a < 0$ e $\triangle < 0$.



Fonte: Autor, 2013

Exemplo 3.2.7. *A receita mensal (em reais) de uma empresa é dada por $R(x) = 20000p - 2000p^2$, em que p é o preço de venda de cada unidade, com $0 \leq p \leq 10$. Vamos determinar para quais valores de p a receita é inferior a R$ 37500,00.*

Solução:

Se a receita é inferior, logo é menor. Daí

$$20000p - 2000p^2 < 37500$$

$$-2000p^2 + 20000p - 37500 < 0$$

Se dividirmos por 500. Temos

$$-4p^2 + 40p - 75 < 0$$

$$\triangle = 40^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-75)$$

$$\triangle = 400$$

Daí,

$$p = \frac{-40 \pm 20}{-8}$$

$p = 7,5$ ou $p = 2,5$

Logo, temos a receita será inferior a R$ 37500,00, se $0 \leq p < 2,5$ ou $7,5 < p \leq 10$.

REFERÊNCIAS

[1] Lima, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cézar Pinto; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio, Volume 1*, 9ª ed., Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[2] Lima, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cézar Pinto; Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio, Volume 3*, 6ª ed., Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[3] Iezzi, Gelson; Murakami, Carlos. *Fundamentos de matemática elementar, Volume 1*, 8ª ed., São Paulo: Atual, 2004.

[4] Iezzi, Gelson; Hazzan, Samuel. *Fundamentos de matemática elementar, Volume 7*, 5ª ed., São Paulo: Atual, 2005.

[5] Mlodinov, Leonard. *A Janela de Euclides - A história da geometria das linhas paralelas ao hiperespaço*, 2ª Ed., São Paulo: Geração Editorial, 2004.

[6] Paiva, Manoel Rodrigues. *Matemática, Volume 1*, 2ª ed., São Paulo: Moderna, 2010.

[7] Paiva, Manoel Rodrigues. *Matemática, Volume 3*, 2ª ed., São Paulo: Moderna, 2010.

[8] Pitombeira, João Bosco; Roque, Tatiana Marins. *Tópicos de História da Matemática - Coleção PROFMAT*, 1º ed., Rio de Janeiro: SBM, 2013.

ÍNDICE REMISSIVO