



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS**  
**INSTITUTO DE MATEMÁTICA**  
**CURSO EM MATEMÁTICA LICENCIATURA**  
**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

**RÔMULO FERREIRA CAVALCANTE JÚNIOR**

**SOBRE A HISTÓRIA DA EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER**

**MACEIÓ**

**2023**

RÔMULO FERREIRA CAVALCANTE JÚNIOR

SOBRE A HISTÓRIA DA EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Colegiado do Curso de Graduação em Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa

MACEIÓ

2023

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

C377s Cavalcante Júnior, Rômulo Ferreira.  
Sobre a história da equação de Schrödinger / Rômulo Ferreira  
Cavalcante Júnior. – 2023.  
27 f. : il. color.

Orientador: Isnaldo Issac Barbosa.  
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática :  
Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática.  
Maceió, 2023.

Bibliografia: f. 26-27.

1. Física quântica. 2. Equação de Schrödinger – História. 3. Matemática –  
Estudo e ensino. I. Título.


CDU: 51

## Folha de Aprovação

Rômulo Ferreira Cavalcante Júnior

### **SOBRE A HISTÓRIA DA EQUAÇÃO DE SCHRODINGER**


Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao colegiado do curso de licenciatura em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovado em 27 de outubro de 2023.

Documento assinado digitalmente  
 ISNALDO ISAAC BARBOSA  
Data: 13/12/2023 21:15:16-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---


Prof. Dr. Isnaldo Isaac Barbosa – UFAL (Orientador)

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente  
 RAPHAEL DE OMENA MARINHO  
Data: 13/12/2023 21:43:03-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Raphael de Omena Marinho - UFAL (Examinador Interno)

Documento assinado digitalmente  
 MATHEUS BARBOSA MARTINS  
Data: 13/12/2023 21:33:32-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Matheus Barbosa Martins – UFAL (Examinador Interno)

## **AGRADECIMENTOS**

Em primeiro lugar gostaria de agradecer a Deus, pois sem Ele nada seria possível!

Também gostaria de agradecer as seguintes pessoas: meu pai Rômulo Ferreira Cavalcante e minha mãe Maria Luzia Barboza Cavalcante por todos os ensinamentos, cuidados e principalmente pela oportunidade de estudar; meu filho Rômulo Ferreira Cavalcante Neto que foi o grande motivador para terminar este trabalho; A minha esposa Danielli dos Santos Feitosa por todo apoio; ao meu amigo e orientador Prof. Dr. Isnaldo Barbosa por todo o acompanhamento e paciência desde a graduação até a conclusão deste trabalho; a minha tia Maria de Fátima, que estava sempre atenta no cronograma da UFAL; aos meus amigos e irmãos Laurenio Gomes, Sérgio Lima e Thiago Xavier que sempre diziam para eu terminar logo isso; e a todos os meus familiares e amigos que de alguma forma contribuíram para a minha formação.

Eu sei que é melhor se arrepender do que se fez  
do que não ter tido a coragem de fazer!

(Ultrage a Rigor)

## RESUMO

A Física Quântica ainda é vista por muitos como algo inacessível ou como uma coisa que só pessoas muito inteligentes podem compreender. Neste trabalho vamos desmistificar isso contando um pouco da história da construção dessa teoria e dos principais personagens envolvidos nessa construção. Falaremos também sobre o seu formalismo matemático que é descrito pela equação de Schrödinger.

**Palavras-chave:** Física Quântica; Erwin Schrödinger; Equação de Schrödinger.

## **ABSTRACT**

Quantum Physics is still regarded by many as something inaccessible or as something that only very intelligent individuals can comprehend. In this work, we aim to demystify this perception by delving into the history of the construction of this theory and the key figures involved in its development. We will also discuss its mathematical formalism, as described by the Schrödinger equation.

**Keywords:** Quantum Physics; Erwin Schrödinger; Schrödinger Equation.



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>ANTES DE ERWIN SCHRODINGER</b> . . . . .	<b>10</b>
<b>3</b>	<b>A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>4</b>	<b>APLICAÇÃO E CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>26</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>28</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Nos dias atuais fala-se muito sobre um Novo Ensino Médio no Brasil. Existe uma discussão muito grande sobre a necessidade de uma reformulação de como abordar e quais temas abordar no Ensino Médio. Com essa proposta de mudança ocorrendo no Ensino Médio, com a implantação de Itinerários Formativos, onde os professores acabam tendo contato com outras disciplinas além das que ele ministra, tive que estudar um pouco de Física e Química para trabalhar alguns temas propostos com meus alunos dos segundos anos do ensino médio. E nesses estudos e preparação surgiram diversas situações bem interessantes que iam além da matemática do Ensino Médio. E uma dessas situações falava sobre a Teoria Quântica e Modelos Atômicos. Foi lá onde pude conhecer um pouco mais sobre o grande personagem do trabalho: Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger.

Neste trabalho o nosso objetivo foi o de compartilhar um pouco dos conhecimentos que eu absorvi durante estes anos como professor do Ensino Médio.

Passo agora a discorrer sobre os capítulos que compõe este trabalho.

No capítulo 2 desse trabalho vamos conhecer como surgiu essa teoria e conhecer o papel das grandes mentes por trás da construção dessa teoria incrível e ao mesmo tempo intrigante que é a física quântica. Veremos as motivações da época que levaram até a descoberta do universo quântico.

No capítulo seguinte veremos um pouco da vida de Schrödinger e a história de sua equação, que até hoje é o formalismo da física quântica. Equação essa que foi a motivação desse trabalho, que eu pretendia mostrar a sua dedução. Porém chegamos a conclusão de que ela foi postulada por Schrödinger e não necessariamente deduzida. Veremos que nem tudo na física pode ser exatamente determinista e que existem diversas interpretações para teoria quântica, todas corretas, segundo os princípios da teoria, mas nenhuma absoluta.

E no último capítulo mostramos uma aplicação da equação, pois, mesmo a física quântica não sendo uma teoria determinista, o formalismo postulado por Schrödinger funciona muito bem nos experimentos até os dias de hoje.

Então, espero que este trabalho sirva de inspiração para o leitor e que com ele possa mostrar e despertar um pouco desse universo incrível que é a Física Quântica. Mas já adianto que é algo um tanto que estranho (e algumas vezes até bizarro).

## 2 ANTES DE ERWIN SCHRODINGER

Tem muita gente por aí fazendo interpretações erradas da física quântica que podem nos levar a interpretações bem diferentes sobre o assunto.

Tem pessoas que falam sobre coach quântico, auto ajuda inspirada na física quântica, gurus querendo vender curas quânticas ou até mesmo pessoas afirmando que a física quântica provou que Deus existe.

Neste capítulo contaremos um pouco da história da física quântica com base nos fatos científicos e sem essas histórias místicas que rodeiam a mesma, e assim veremos que qualquer pessoa é capaz de entender a física quântica.

No final do século XIX os físicos estavam muito empolgados. Parecia que não tinha mais o que se descobrir na Física, pois ela estava bem resolvida. A mecânica estava muito bem consolidada e havia unificado a gravitação (movimento dos planetas) com os movimentos que ocorrem na Terra. A teoria eletromagnética tinha descoberto que a luz é uma onda eletromagnética (e que existiam outras radiações como a luz, porém invisíveis) fazendo assim a unificação da óptica com a eletricidade e o magnetismo e esta teoria eletromagnética também era totalmente concatenada com a mecânica.

O modelo cinético (que descreve a energia interna de um corpo como sendo a agitação das partículas desse corpo), também totalmente baseado na mecânica, explicava o que é o calor. Joule havia descoberto a equivalência entre a energia cinética (movimento) e o calor. Tudo estava indo bem e as teorias se encaixavam e se complementavam.

Porém, em 1901, Lord Kelvin (o mesmo que propôs a escala Kelvin), que tinha um faro bastante aguçado, escreveu:

A beleza e claridade da teoria dinâmica, que coloca calor e luz como modos de movimento, está presentemente obscurecida por duas nuvens.

I. A primeira apareceu com a teoria ondulatória da luz, desenvolvida por Fresnel e o Dr. Thomas Young; envolvendo a questão de como pode a Terra mover-se através de um sólido elástico, como o é essencialmente o éter luminífero?

II. A segunda é a doutrina de Maxwell-Boltzmann sobre a equipartição de energia.

Estes dois problemas se mostravam sem solução para as equações da física de então e foi por causa desses problemas que nasceu uma nova física (ou duas novas físicas).

O primeiro problema deu origem à Relatividade: Uma das grandes questões da ciência no final do século XIX era entender em que meio as ondas eletromagnéticas se propagavam, pois era inconcebível admitir que essas ondas não possuíam um meio de propagação. Por isso, na época, assumia-se que o éter luminífero era o lugar de propagação das ondas eletromagnéticas.

A questão é que esse éter luminífero nunca foi detectado! Isso era um problema sério para a teoria na época. Atualmente nós sabemos que as ondas eletromagnéticas não precisam de um meio para se propagarem, mas foi um longo caminho para chegar nessa compreensão.

Esse problema só foi resolvido com o advento da Teoria da Relatividade de Einstein. Mas não iremos nos aprofundar nesse assunto pois não é o objetivo do nosso trabalho.

Já o segundo problema citado por Kelvin deu origem a física quântica.

Em 1884, Max Planck foi convidado a projetar uma lâmpada que tivesse maior eficiência possível, que fornecesse o máximo de luz com o mínimo consumo de energia elétrica. E ele viu que a resposta para esse trabalho havia sido citado em 1859 por Gustav Kirchhoff quando falou sobre a teoria do Corpo Negro, que seria algo que absorve toda a radiação eletromagnética que incide sobre ele.

Mas como um corpo desses emite radiação? Ele não é capaz de acumulá-la toda, pois parte dessa energia precisa retornar. Como sua intensidade depende da sua frequência e temperatura do corpo?

A termodinâmica falava que o corpo negro poderia ser gerado como uma caixa onde as paredes eram espelhos perfeitos, e a radiação eletromagnética ia “pulando” de um lado para o outro, sendo refletida pelos espelhos. Mas como se distribui a energia dentro da caixa entre as várias frequências quando o sistema atingir um estado de equilíbrio?

Segundo a teoria eletromagnética, cargas elétricas em movimento geram ondas eletromagnéticas. Daí, a agitação térmica dos corpos geram ondas eletromagnéticas, ondas estas que chamamos de Radiação Térmica.

Em temperaturas comuns do nosso dia-a-dia, por volta de 900 K, essa radiação se dá na faixa de frequência do infravermelho.

Se passarmos a aquecer corpos a temperaturas maiores que essa começam a emitir radiação eletromagnética na faixa de frequência da luz visível, ultravioleta, e assim por diante, dependendo de sua temperatura, e até aí a física da época dava conta muito bem.

Em 1876, Boltzmann prova o teorema da equiparação que diz que “a energia se divide de maneira igual para cada componente, independente do movimento”, onde esses componentes são como ondas básicas de um instrumento de corda.

Utilizando o teorema da equiparação os princípios do eletromagnetismo, obtém-se uma equação simples para a energia total média emitida pelas partículas que formam o corpo negro:

$$E = kT,$$

onde  $E$  representa a energia média total,  $k$  é a constante de Boltzmann e  $T$  é a temperatura do corpo.

Aplicando esse princípio para cada intervalo de frequência chegamos à fórmula clássica da radiação de corpo negro (também chamada de fórmula de Rayleigh-Jeans):

$$E(\nu) = \frac{8\pi\nu^2 kT}{c^3}.$$

Mas quando esta radiação era medida em laboratório (detectada e colocada num gráfico), os resultados previstos nesta teoria não batiam com os resultados obtidos nestas medidas.

O gráfico abaixo apresenta o resultado das previsões da teoria clássica (linha preta) e o resultado das medidas feitas em laboratório (linhas coloridas):

Na teoria clássica (termodinâmica e eletromagnética), os resultados previstos descrevem uma curva exponencial (em preto no gráfico acima), ou seja, quanto maior a frequência da radiação, sua intensidade cresce exponencialmente.

Porém os resultados medidos em laboratório descrevem as curvas coloridas (que crescem até atingir um ponto máximo e depois decrescem).

Neste caso, a teoria não bate com os resultados experimentais, o que era um grande problema da física da época, e que não era possível de ser explicado com as teorias disponíveis até aquele momento.

No gráfico acima percebemos que para grandes comprimentos de onda (baixas frequências), a fórmula de Rayleigh-Jeans (teoria clássica) se encaixa bem. O problema é que para pequenos comprimentos de onda (alta frequência) esse fórmula se distancia muito do que acontece na realidade. Aparece aí a primeira indicação da escala de grandeza da física quântica.

Esse paradoxo ficou conhecido com Catástrofe do Ultravioleta. Chamava-se catástrofe por que realmente era uma catástrofe, e ultravioleta pois era o início do espectro de alta frequência.

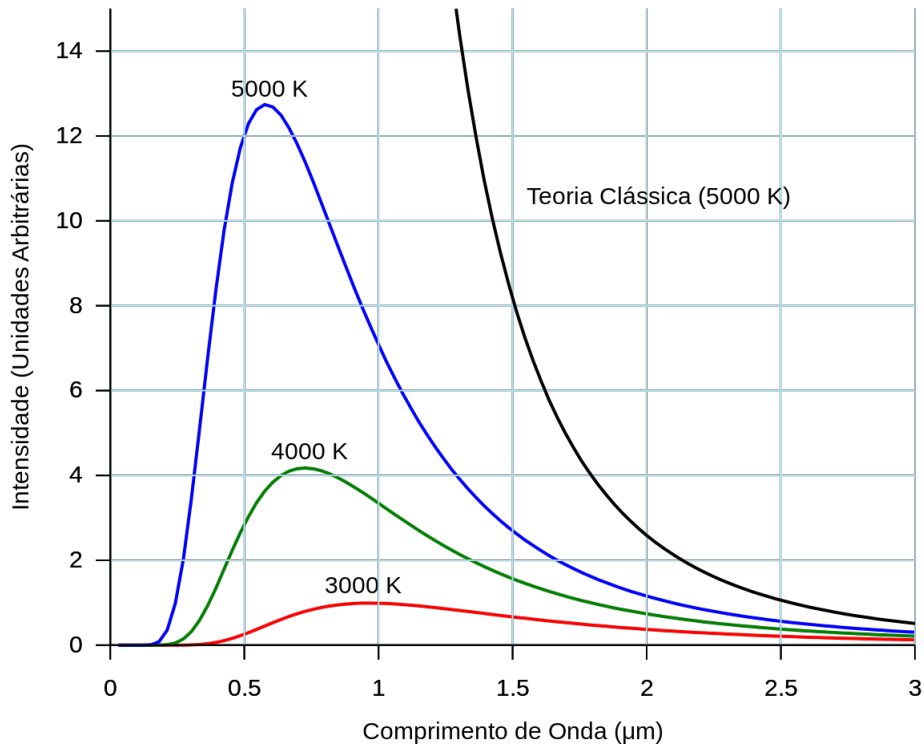


Figura 1 – Espectro de emissão e catástrofe do ultravioleta.

Como a radiação ultravioleta tem alta frequência, e com isso, baixo comprimento de onda, essa diferença fica mais evidente na radiação ultravioleta.

Mesmo Planck sabendo do problema, ele não se incomodou pois ele não acreditava no Teorema da Equiparação.

Mais tarde seu trabalho resolveria o paradoxo e eliminaria a catástrofe ultravioleta. Em 1901, Planck, propôs uma solução matemática para este problema.

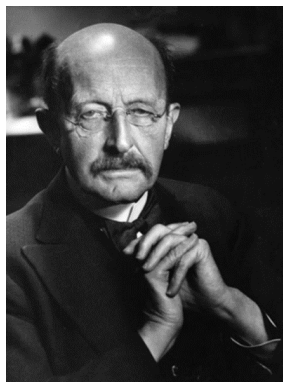


Figura 2 – Max Planck.

Planck decidiu que no corpo negro os modos vibracionais precisavam ser descontínuos,

ou seja, valores discretos, separados em intervalos muito pequenos, número esse que hoje chamamos constante de Planck representando por  $h$ . Ele percebeu que se ele considerasse que a energia  $E$ , ao invés de ser emitida continuamente (como descrito na fórmula  $E = kT$ ) fosse emitida em valores não-contínuos (ou seja, valores discretos), ele obteria a seguinte equação:

$$E = n \cdot h \cdot f,$$

onde:

- $E$  = energia média total;
- $n$  é um número natural (pode assumir somente valores 1, 2, 3, 4, etc... sem poder assumir valores "quebrados")
- $h$  é a constante de proporcionalidade de Planck.
- $f$  é a frequência da oscilação das partículas carregadas que formam o corpo.

Ao substituir a fórmula clássica ( $E = kT$ ) pela fórmula de Planck ( $E = n \cdot h \cdot f$ ), a equação fica assim:

$$\rho_{T,f} = \frac{8\pi f^2}{c^3} \frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1}.$$

A equação acima descreve exatamente os resultados experimentais obtidos em laboratório.

Com isso, ao introduzir uma constante (a constante de Planck  $h$ ) na formulação matemática da equação do corpo negro, Planck considera que:

A energia não é emitida de forma contínua, mas sim em "pacotinhos" de energia descontínuos.

Esses pacotinhos agora são chamados de **quanta**.

Com isso, Planck resolveu o problema matematicamente. Mas qual o significado disso fisicamente?

Planck resolve um problema mas cria outro, pois se a energia é emitida em forma de ondas eletromagnéticas, como seus valores podem ser emitidos em pacotinhos?

Antes de continuarmos quero chamar a atenção para o valor da constante de Planck:

$$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

Esse é um número minúsculo. Uma potência de 10 elevado a potência de -34. Mas a energia total se revela finita quando o conjunto de níveis de energia para uma determinada

frequência for discreto. Logo, a natureza, em escalas muito pequenas deve ser discreta, visto que a catástrofe ultravioleta era um sinal de que a natureza não podia ser retratada com um modelo contínuo. Planck não pensou isso no início. Ele não estava certo se a introdução da sua constante  $h$  tinha alguma implicação física ou se era apenas um artifício numérico/matemático.

Em 1877, Boltzmann teve uma ideia parecida, mas não conseguiu chegar a lugar algum.

Em 1902, Philipp Lenard notou que quando a luz tinha uma frequência mais alta, os elétrons tinham energias mais elevadas. Mas segundo as afirmações de Maxwell, na teoria ondulatória da luz, a energia dos elétrons depende da intensidade da luz e não da frequência.

A situação muda em 1905 quando Einstein, cheio de criatividade, coloca a física num novo lugar ao estudar o efeito fotoelétrico, onde a luz emite elétrons ao atingir um metal apropriado.

Einstein percebeu que a resposta para essa discrepância estava nos quanta de Planck, e sugeriu que a luz era composta de minúsculas partículas, e não por ondas. Essas pequenas partículas agora se chamavam de fótons.

Em uma dada frequência, a energia de um fóton isolado deveria ser a frequência multiplicada pela constante de Planck, ou seja, um dos quanta de Planck. O fóton era um quantum de luz.

Existia um problema com a teoria de Einstein. Enquanto ele assumia que a luz era uma partícula, não faltavam evidências que a luz era uma onda., porém, o efeito fotoelétrico não funcionava com a luz como sendo uma onda.

Daí surgia a seguinte pergunta: A luz é uma onda ou uma partícula?

A resposta para essa pergunta era: Sim, as duas.

Na verdade, possuíam características das duas. Ora se comportavam como onda, ora como partículas. A medida em que começavam a trabalhar com escalas muito pequenas do universo, concluía que toda matéria tinha essa natureza dual, ora partícula, ora onda. Isso foi chamado de Dualidade Onda-Partícula.

Em 1922, Compton comprova a existência do fóton e a característica corpuscular da luz, com o teste do raio-x no grafite. Ele relaciona as equações de Einstein para mostrar uma fórmula para a massa relativista do fóton.



$$E = m \cdot c^2 \quad e \quad E = h \cdot f$$

$$m \cdot c^2 = h \cdot f$$

$$m = \frac{h \cdot f}{c^2}$$

Em 1927, Bohr cria o Princípio da Complementaridade, onde ele diz que “onda e partícula não são entidades que se excluem, mas sim que se complementam. A sua manifestação depende do arranjo experimental. Nunca se manifesta nas duas formas.”

“A lição de Bohr não é que a realidade seja subjetiva, mas sim que nós, sujeitos observadores, fazemos parte da realidade que observamos.” (SLAVO)

Em 1924, Louis De Broglie, que teve sua primeira formação como historiador, mas largou para estudar física (talvez encorajado por seu irmão Maurice De Broglie, que era físico) propôs em sua tese de doutorado que: “se a luz é dual, será que a matéria também não é?”, usando aí uma ideia epistemológica de simetria. E propõe uma fórmula para o comprimento de onda da matéria em relação a quantidade de movimento da matéria utilizando as equações de Compton e de Einstein:

$Q \rightarrow$  Quantidade de movimento

$$Q = m \cdot v \quad E = m \cdot c^2 \quad E = Q \cdot c \quad E = h \cdot f$$

Para o fóton:  $v = c$  Logo:

$$f = \frac{Q \cdot c}{h}$$

$\lambda \rightarrow$  Comprimento de onda

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

Daí:

$$\lambda = \frac{h}{Q}$$

Isso tudo chamou a atenção de Einstein, que nessa época já era um físico renomado.

Porém era muito complicado fazer as medições já que os comprimentos de onda eram muito pequenos, até mesmo para coisas pequenas, como uma bola de tênis por exemplo. Por isso só é possível num mundo microscópico, pois quanto menor a partícula, maior será o comprimento de onda. Daí utilizaram o elétron para verificar a hipótese de De Broglie, já que era a menor partícula que eles conseguiam trabalhar.

Em 1926, Velacer propõe aplicar a mesma técnica que ele utilizava com raio-x utilizando cristais. E começou uma corrida para conseguir a melhor medição desse experimento, onde, em 1927, Thomson consegue fazer a melhor medição, comprovando assim a hipótese de De Broglie. E com isso, De Broglie ganha o Nobel em 1929. Mas a hipótese de De Broglie só é válida para uma onda com velocidade constante, e isso era um problema pois precisávamos de um formalismo matemático mais completo que descrevesse uma partícula que tinha comportamento de onda.

É aí que entra **Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger**.



Figura 3 – Erwin Schrödinger.

### 3 A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

A equação de Schrödinger é o formalismo básico da física quântica. Ela é usada até hoje como a base matemática formal para se trabalhar com física quântica. Logo é muito importante e fundamental a gente entender essa equação para que possamos entender um pouco melhor esse universo chamado física quântica. Porém a equação de Schrödinger envolve uma matemática bastante complexa, mas, nesse capítulo, iremos facilitar essa matemática. Iremos simplificar bastante os cálculos, mas mostraremos a equação de Schrödinger de uma maneira cientificamente correta, de forma que seja possível entender essa equação tão importante e o que ela significa.

No capítulo anterior, vimos que De Broglie criou uma hipótese que a matéria tinha um comportamento dual, ou seja, a matéria que é partícula também se comporta como onda. Ele chegou até a calcular o comprimento de onda associado a matéria. E, alguns anos depois, a hipótese de De Broglie foi comprovada experimentalmente.

O problema da hipótese de De Broglie era que ela era muito limitada, já que ela só funcionava quando a onda tinha uma quantidade de movimento constante, ou seja, uma velocidade constante. Logo, a hipótese de De Broglie não era algo universal, que valesse para qualquer partícula e em qualquer condição. Com isso era necessário desenvolver uma equação geral. A hipótese de De Broglie descreve o seguinte comportamento da partícula:

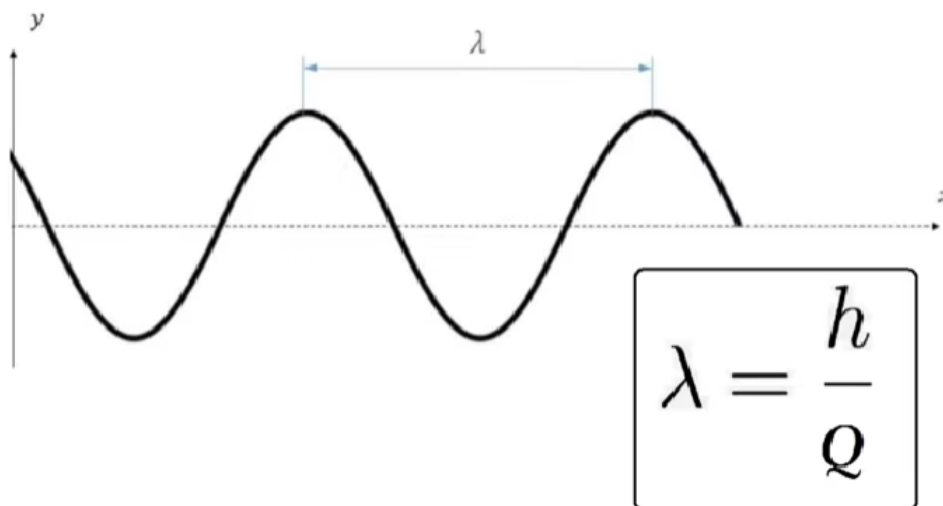


Figura 4 – Comportamento da partícula descrito pela hipótese de De Broglie.

Nesse movimento a onda tem velocidade constante. Mas se pensarmos numa partícula que está sobre ação de forças, a mesma não terá velocidade constante, muito pelo contrário, ela

terá a sua velocidade variando o tempo todo.

Então, a onda que melhor descrevia esse movimento seria algo assim:

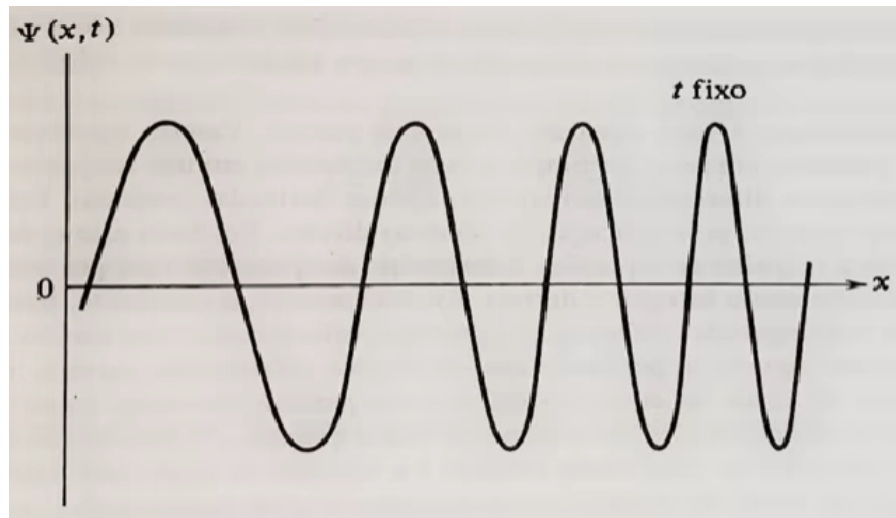


Figura 5 – Comportamento da partícula sob a ação de forças.

Perceba que é algo bem mais complexo. Por isso precisamos de um formalismo matemático mais complexo que o proposto por De Broglie, e é sobre esse formalismo que iremos falar neste capítulo.

Pela hipótese de De Broglie, podemos associar qualquer partícula a uma função de onda. Chamaremos essa função de onda pela letra grega  $\psi$ . Em física temos várias formas de associar uma onda a alguma coisa. Uma onda é algo que oscila. Em matemática, para associarmos uma função de onda a alguma coisa, precisamos de uma função que oscile. Temos várias funções que fazem isso. Temos a função seno, a função cosseno, dentre outras. Mas De Broglie só nos dá o comprimento de onda. Ele não nos dá a função de onda que devemos usar. Daí podemos usar qualquer função oscilante a essa onda, mas isso não quer dizer que essa associação estará correta. Era preciso ter uma equação mais generalizada para testar qual função será mais adequada para associar a uma partícula.

Tudo isso parece muito abstrato (e é mesmo!), mas o que nós queremos fazer é associar uma função matemática para descrever uma partícula que tem comportamento de onda, como propôs De Broglie.

Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger nasceu em Viena em 12 de agosto de 1887. Graduou-se em 1910 pela Universidade de Viena e lá trabalhou até 1920. Seus pais Rudolf Schrödinger (sendo um produtor de mortaldas e botânico) e Georgine Emilia Brenda (filha de Alexander Bauer, professor de Química na Universidade de Tecnologia de Viena) possuíam

origens distintas e crenças distintas, o que possibilitou a Erwin desenvolver certo conhecimento em filosofia e em línguas, onde aprendeu inglês e alemão simultaneamente.

Na Primeira Guerra Mundial Schrödinger serviu como oficial de artilharia em Stuttgart, Breslau (atual Wrocław localizado na Polônia) e Zurique a partir de 1920. Zurique, na Suíça, representaria ainda um importante período produtivo para o físico.

Em 1927, Schrödinger aceitou um convite para suceder a Max Planck, autor da teoria quântica, na Universidade de Berlim. Lá ele se torna amigo de Einstein. Permaneceu no posto até 1933, mas deixou a Alemanha por repudiar a perseguição aos judeus. Einstein, que era judeu, numa viagem aos Estados Unidos, tem sua casa invadida pelo governo Alemão e resolve não voltar mais para a Alemanha e pede asilo ao governo estadunidense, e depois viria a se tornar cidadão Estadunidense.

Schrödinger viveu então na Áustria, Bélgica, Itália e finalmente, em 1940, instalou-se na Irlanda, onde dirigiu por 15 anos o Instituto de Estudos Avançados de Dublin. Nesse período dedicou-se à pesquisas físicas, filosóficas e sobre a história da ciência. Em 1961, Schrödinger morre por causa de uma tuberculose.

Voltando a equação: o que é essa equação? Schrödinger pega a hipótese de De Broglie, que associa o comprimento de onda a uma partícula (que só era válida para o movimento de uma partícula com velocidade constante) e vai desenvolver uma equação geral para uma partícula sobre uma ação de forças, ou seja, cuja a velocidade está se alterando. E com isso, Schrödinger faz a mesma coisa que Newton fez para criar a sua Segunda Lei:

$$F = m \cdot a.$$

Claro que essa fórmula era é bem mais complexa. Newton precisou desenvolver toda a teoria de Cálculo Diferencial. Newton partiu da equação do movimento de uma partícula no espaço a uma velocidade constante e desenvolveu uma equação para uma partícula sobre a ação de forças.

O Schrödinger fez o mesmo! Só que ele não pensou na equação da partícula como uma partícula e sim como uma função de onda, pois De Broglie tinha acabado de provar que uma partícula também se comportava como onda.

Só o que Schrödinger queria fazer é bem mais complicado que o que Newton fez (que já foi algo grandioso!), pois ele vai usar, no lugar de uma equação de partícula uma equação de

função de onda e observar o seu comportamento enquanto ela sofre ação das forças.

E para isso, Schrödinger vai se basear em duas coisas: na hipótese de De Broglie e no postulado de Einstein, que ele propôs ao resolver o problema do fotoelétrico:

$$E = h \cdot f.$$

E Schrödinger, partindo dessas duas equações, usa o princípio da conservação de energia que diz que a energia total é igual a soma da energia cinética com a energia potencial.

É aí onde entram as forças, pois como tem energia potencial na equação então tem força.

Com isso Schrödinger desenvolve essa equação, que é algo bem complexo, pois ele precisa propor diversas hipóteses. Não entraremos nesse mérito, pois não é o objetivo deste trabalho.

Então Schrödinger chega na seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 \psi^2}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V) \psi = 0 \quad (3.1)$$

E com isso Schrödinger conseguiu chegar onde ele queria, conseguindo fazer o equivalente ao que Newton fez. Ele conseguiu desenvolver uma equação geral para uma função de onda que está sujeita a ação de forças.

A equação de Schrödinger é utilizada até hoje como sendo o formalismo da física quântica.

Foi realmente algo brilhante, mas quando tentamos entender o que ela significa nós encontramos um problema muito sério.

As funções de onda que são soluções da equação de Schrödinger são do tipo:

$$\Psi(x, t) = \cos(kx - \omega t) + i \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad (3.2)$$

E o problema está justamente na unidade imaginária que aparece, pois ela não pode ser associada a uma grandeza física que possa ser medida, já que se trata de um número imaginário. E isso deixou o próprio Schrödinger pensativo.

Em 1926, Max Born começou a trabalhar a equação de Schrödinger utilizando métodos estatísticos matemáticos, e assim ele chega a uma interpretação física real. Ele percebeu que ao elevar essa função de onda ao quadrado ele transforma a unidade imaginária em um número

real, obtendo assim uma grandeza possível de medição. Essa grandeza seria a densidade de probabilidade de encontrar a partícula associada a essa função de onda em algum lugar no espaço.

Então esse é o significado da equação de Schrödinger. Ela nos dá a probabilidade de encontrar uma partícula quântica em algum lugar no espaço.

A equação de Schrödinger não nos dá resultados deterministas e sim resultados probabilísticos. Ela nos dá a probabilidade de alguma coisa acontecer no mundo quântico. E com isso podemos concluir que a física quântica não é uma ciência com resultados deterministas, e sim uma ciência probabilística. Então, em níveis quânticos, a natureza é probabilística, e isso incomodou muitos físicos da época, incluindo o próprio Schrödinger, que desenvolveu a equação, e seu amigo Einstein que não acreditavam que a natureza era probabilística. Eles falavam que esse formalismo ainda estava incompleto. Por outro lado tinha o pessoal de Copenhague: Heisenberg, Pauling e Born, que acreditavam que a equação de Schrödinger estava certa sim e que a natureza era indeterminista.

A concordância entre o formalismo da física quântica e seus resultados experimentais é fantástico. Sua teoria é sem dúvidas umas das mais, se não a, teoria bem mais sucedida da ciência, bem mais sucedida até do que a física clássica. Porém o que diz a teoria quântica é pouquíssimo entendido até hoje. O que nós temos são interpretações, mas todas essas interpretações tem problemas filosóficos, tendo em vista que uma interpretação não se trata de uma nova teoria e sim de uma tentativa filosófica de explicar o que quer dizer aquela teoria, até mesmo por que quando um físico está desenvolvendo a teoria ele não está muito preocupado com a sua interpretação e sim em provar aquela teoria e verificar experimentos em laboratórios.

Se formos listar todas as interpretações da física quântica registradas por filósofos que se dedicaram a esse fim são mais de cinquenta interpretações, todas condizentes com o formalismo da teoria. E se considerarmos pequenas nuances dessas teorias aí esse número vai pra mais de cem interpretações.

Vimos que a equação de Schrödinger não nos dá resultados determinísticos, mas sim resultados probabilísticos, e que juntamente com o princípio da incerteza, nós só conseguiremos ter algum resultado determinado quando medirmos, e quando fazemos isso todas as outras probabilidades desaparecem. Isso é o que chamamos de colapso da função de onda. Para que possamos medir alguma coisa, precisamos interagir com essa coisa, e é exatamente isso que fará essa coisa colapsar, ou não, dependendo da interpretação. Para obter os resultados dessas medições existem processos de medidas. Precisamos de um aparato experimental, de algum tipo

de detector que de alguma forma nos devolva a informação daquela medida, do processamento da medida e também ter a consciência da medida. E a grande questão aqui é saber em que processo da medida acontece esse colapso de onda, ou não.

A interpretação de Copenhague desenvolvida pelos físicos Niels Bohr e Werner Heisenberg que trabalhavam juntos em Copenhague em 1927 é a interpretação mais aceita pelos físicos, mas mesmo assim ela é cheia de problemas, como todas as outras interpretações.



Figura 6 – Foto rara de Neils Bohr e Wermer Heisenberg 1935 ou 1936.

A interpretação de Copenhague pode ser resumida em três teses:

1. As previsões probabilísticas feitas pela mecânica quântica são irreduzíveis no sentido em que não são um mero reflexo da falta de conhecimento de hipotéticas variáveis escondidas. No lançamento de dados, usamos probabilidades para prever o resultado porque não possuímos informação suficiente apesar de acreditarmos que o processo é determinístico. As probabilidades são utilizadas para completar o nosso conhecimento. A interpretação de Copenhague defende que em Mecânica Quântica, os resultados são indeterminísticos.

2. A Física é a ciência dos resultados de processos de medida. Não faz sentido especular para além daquilo que pode ser medido. A interpretação de Copenhague considera sem sentido perguntas como "onde estava a partícula antes de a sua posição ter sido medida?".

3. O ato de observar provoca o "colapso da função de onda", o que significa que, embora antes da medição o estado do sistema permitisse muitas possibilidades, apenas uma



delas foi escolhida aleatoriamente pelo processo de medição, e a função de onda modifica-se instantaneamente para refletir essa escolha.

Desde que a interpretação de Copenhague foi proposta que muitos físicos e filósofos a criticam ou pelo fato de não ser determinista ou por propor que a realidade é criada por um processo não físico. O próprio Einstein criticou essa interpretação com as frases “Deus não joga dados” ou “Pensas mesmo que a Lua não está lá quando não estás a olhar para ela?”. A alternativa principal à Interpretação de Copenhague é a Interpretação de Everett dos mundos paralelos.

Outro que criticou bastante a interpretação de Copenhague foi o próprio Schrödinger com seu experimento com o gato.

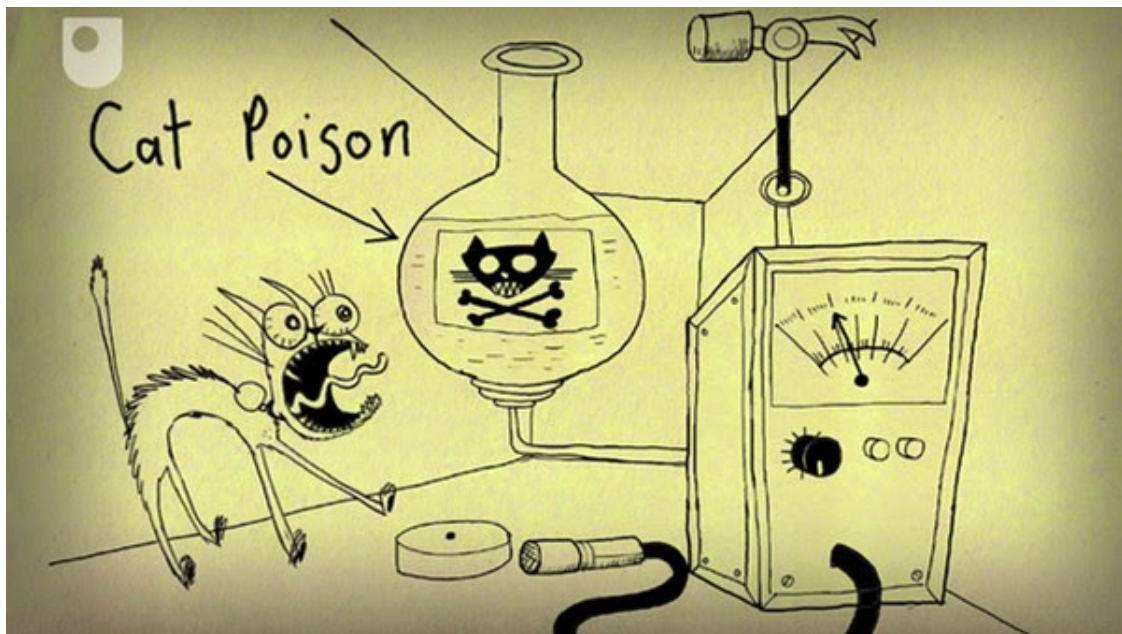


Figura 7 – Paradóxo do gato de Schrödinger.

Em 1935, Schrödinger apresenta um experimento mental que ficou muito conhecido como o gato de Schrödinger, experimento esse que viria a se tornar a experiência mais bizarra e surrealista da história da física.

Em seu experimento teórico, Schrödinger colocou um gato em uma caixa, junto com um pouco de material radioativo e um contador Geiger - dispositivo para detectar radiação. O contador Geiger foi montado de maneira que quando percebesse o decaimento do material radioativo, acionaria um martelo posicionado para quebrar um frasco contendo ácido cianídrico que, quando liberado, mataria o gato. O experimento deveria acontecer num tempo nem tão curto e nem tão longo. Longo o suficiente para que o material radioativo decaísse e curto o suficiente

para que nada pudesse acontecer.

Durante o experimento de Schrödinger, o gato estaria trancado na caixa, e durante esse tempo ele estaria em um estado desconhecido, e com isso não poderíamos dizer se ele estava vivo ou morto. Na verdade, ele estaria num estado de vida e morte, ou seja, enquanto a gente não fosse abrir a caixa e observar o real estado do gato ele estaria vivo e morto.

Se usarmos a teoria quântica para tentar descrever o que aconteceu com o gato no interior da caixa chegaremos a uma conclusão bem esquisita, pois o gato, sendo descrito como uma função de onda bastante complexa, teria 50% de chance de estar vivo e 50% de chance de estar morto.

O experimento do gato de Schrödinger, mesmo parecendo algo estranho, é a melhor forma para explicarmos o conceito da dualidade de onda partícula e a função de onda, que sem dúvidas são conceitos bem complexos na teoria quântica.

## 4 APLICAÇÃO E CONCLUSÃO

Este capítulo tem como base o trabalho de Romis Attux, Cristiano C. Cruz, Diogo C. Soriano FEEC/UNICAMP, segundo semestre de 2012, onde temos uma aplicação bem interessante da equação de Schrödinger.

### A Partícula Livre

Primeiro devemos obter uma  $\Psi(x)$  para uma “partícula livre”, que é uma partícula que não existam forças externas agindo sobre elas  $F = 0$ . Em uma dimensão temos:

$$F = \frac{-dV(x)}{dt}.$$

E devemos ter  $V(x)$  constante. Daí, podemos considerar:  $V(x) = 0$ .

Então, partindo da equação:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

temos que

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x) \Rightarrow \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k^2\psi(x),$$

onde  $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ .

A solução geral para essa equação é uma onda senoidal pura do tipo:

$$\psi(x) = A \cdot \text{sen}(kx) + B \cdot \text{cos}(kx).$$

A energia é dada por

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

Como não existe restrições para o valor de  $k$ , não podemos quantizar a energia, e como  $V(x) = 0$ ,  $E$  é a energia cinética.

Podemos relacionar a energia cinética e o momento linear da seguinte forma:

$$E_c = \frac{p^2}{2m},$$

o que nos permite concluir que o momento linear da partícula é:

$$p = \hbar k = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda}$$

E era justamente isso que esperávamos encontrar diante da hipótese De Broglie. Mas encontramos o problema de como aplicar a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

para funções do tipo:

$$\psi(x) = A \cdot \text{sen}(kx) + B \cdot \text{cos}(kx).$$

Como a integral não pode ser determinada se perde o sentido referente a ideia de normalização. Quando supomos que a partícula é livre chegamos a uma solução com momento bem determinado porém posição incerta, sem restrição de potenciais. No entanto esse problema desaparece quando supomos a superposição de várias frequências, que produziria um pacote de onda com o seguinte formato:

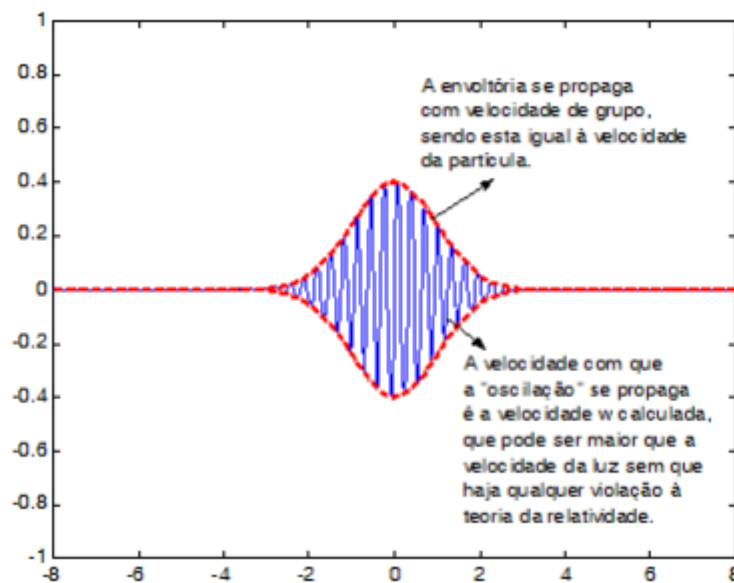


Figura 8 – Pacote de onda produzido pela superposição de várias frequências.

Para entender melhor esta noção se faz necessário um estudo sobre **Séries de Fourier**.

## REFERÊNCIAS

- [1] STEWART, IAN, - *17 equações que mudaram o mundo*. Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2013.
- [2] DRIGO FILHO, ELSO, - *Supersimetria aplicada à mecânica quântica: estudo da equação de Schrödinger*. Editora Unesp, 2009.
- [3] CUSTODIO, R., POLITI, J.R, SEGALA, M. - *Quatro alternativas para resolver a equação de Schrödinger para o átomo de hidrogênio*. Editora Unesp, 2009.
- [4] <https://jornal.usp.br/atualidades/vencedor-do-nobel-robert-millikan-questionava-teoria-de-einstein-sobre-fotons>, acessado em 12 de agosto de 2023.
- [5] <https://www.ifi.unicamp.br/fauth/1OrigensMecanicaQuantica/1Oquantumdeluz/Oquantumdeluz.html>  
: :text=Com%20o%20efeito%20fotoel%C3%A9trico%2C%20Millikan,descoberta%20da%20exist%C3%Aancia%20dos%20f%C3%B3tons.,  
acessado em 12 de agosto de 2023.