



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

JÔNATHAS DOUGLAS SANTOS DE OLIVEIRA

SEMIGRUPOS ANALÍTICOS E DERIVADA FRACIONÁRIA

Maceió

2014

JÔNATHAS DOUGLAS SANTOS DE OLIVEIRA

INTEGRAÇÃO E DERIVAÇÃO FRACIONÁRIA E APLICAÇÕES

Dissertação de mestrado na área de concentração de Análise apresentada ao Programa de Pós- Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Júlio César Souza Almeida

Maceió

2014

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Maria Auxiliadora G. da Cunha

O48s Oliveira, Jônathas Douglas Santos de.
 Semigrupos analíticos e derivada fracionária / Jônathas Douglas Santos
 de Oliveira. – 2014.
 54 f.

Orientador: Júlio César Souza Almeida.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas.
Instituto de Matemática. Maceió, 2014.

Bibliografia: f. 53-54.

1. Cálculo fracionário . 2. Semigrupos analíticos. 3. Equação diferencial de
ordem fracionária. I. Título.

CDU: 514.745.8

AGRADECIMENTOS

Primeiramente quero agradecer a Deus, pois sem ele eu não teria chegado até aqui, ele que tem me sustentado e dado forças para prosseguir nessa caminhada.

Agradecer também a mulher maravilhosa que Deus colocou em minha vida, minha grande incentivadora, companheira, que sempre me apoiou e me incentivou a prosseguir com meus sonhos, por sempre acreditar em mim, pelo apoio, pela amizade pela convivência e pelo amor e carinho que sempre me dedicou, sempre aturou meus choros e stress durante esse período, agradeço a Deus por ter te colocado em minha vida e que quero tê-la para sempre: te amo Elisama Oliveira.

À meus pais pela força e pela criação e educação que me deram, pelo amor incondicional.

À meu professor orientador Dr. Júlio César, que sempre me deu apoio, desde o período da graduação.

À meus amigos de turma, Nayane, Rodrigo, Tiago, Diego, Thiago de Jesus, Vanessa, Alane, Diego Chicuta, Ana Paula, pelas discussões produtivas, amizade, união e companheirismo. A nosso amigo Abraão que sempre esteve nos ajudando nas matérias com sua mente brilhante. Não poderia de citar nosso amigo Joás, esse cara que contribuiu muito para todos nós da turma, Deus sabe o porquê que o colocou em nossa turma.

À um amigo em especial devo um agradecimento que merece destaque, eu sozinho não teria conseguido chegar até aqui, como já citei a minha turma foi muito unida e isso fortalece, mas teve uma pessoa que me ajudou muito e foi minha força aqui no mestrado, meu amigo Tiago Novello, obrigado pela paciência, incentivo, as várias horas de discussões sempre produtivas, seja pelo telefone, pessoalmente, as minhas dúvidas que levastes pra casa, e as várias horas que dispusesses a me ajudar, continue sempre sendo essa pessoa incrível e com esse jeito humilde ajudou a muitos aqui dentro, vou levar isso para o resto de minha vida e boa parte da minha formação eu devo a você, aprendi muita matemática com você.

À todos meus professores pelos ensinamentos.

À todos meus amigos que direta ou indiretamente contribuíram para que eu pudesse chegar aqui.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa de mestrado.

RESUMO

Um Semigrupo Analítico é uma extensão de um Semigrupo Fortemente Contínuo de Operadores Limitados em um setor do plano complexo. Se um operador linear fechado e densamente definido é o gerador de um Grupo Fortemente Contínuo de Operadores Limitados, então o quadrado desse operador é o gerador de um Semigrupo Analítico de ângulo medindo a metade de π . Isso é uma condição suficiente para garantir a equivalência entre uma específica equação diferencial parcial de ordem inteira e uma equação diferencial de ordem fracionária.

Palavras-chave: Cálculo Fracionário, Semigrupos Analítico, Equação Diferencial de Ordem Fracionária.

ABSTRACT

An Analytic Semigroup is an extension of a Strongly Continuous Semigroup of Limited Operators in a sector of the complex plane. If a linear operator closed and densely defined is the generator of a strongly Continuous Group of Operators Limited, then the square of this operator is the generator of an analytical semigroup of angle measuring $\frac{\pi}{2}$. This is sufficient to ensure the equivalence of a specific partial differential equation of integer order and fractional order differential equation condition.

Keywords: Fractional Calculus, Analytic Semigroups, Differential Equation of Fractional Order

Sumário

INTRODUÇÃO	7
1 INTEGRAÇÃO EM ESPAÇOS DE BANACH	9
1.2 A TRANSFORMADA DE LAPLACE	13
2 A DERIVADA E A INTEGRAL DE ORDEM FRACIONÁRIA	14
2.1 MOTIVAÇÃO	15
2.1.1 FUNÇÃO GAMA	17
2.1.2 FUNÇÃO BETA	18
2.2 A INTEGRAL E A DERIVADA DE RIEMMAN-LOUVILLE	18
2.2.1 PROPRIEDADES DA INTEGRAL E DERIVADA FRACIONÁRIA	21
2.3 APLICAÇÃO DE DERIVADA FRACIONÁRIA	24
2.3.1 O PROBLEMA DA TAUTÓCRONA	25
3 TÓPICOS DE ANÁLISE COMPLEXA	27
4 SEMIGRUPOS	30
4.1 SEMIGRUPOS FORTEMENTE CONTÍNUO DE OPERADORES LIMITADOS	31
4.2 SEMIGRUPOS ANALÍTICOS	38
4.3 GRUPOS	45
5 RESULTADOS PRINCIPAIS	46
5.1 EQUIVALÊNCIA	47
5.2 UMA APLICAÇÃO DO CÁLCULO FRACIONÁRIO NA FÍSICA .	50
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	52

INTRODUÇÃO

No estudo da Mecânica dos Flúidos a equação do momento é dada por

$$\frac{\partial F(y, t)}{\partial t} - v \frac{\partial^2 F(y, t)}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Onde $F(y, t)$ é, por exemplo, a velocidade do fluido no caso em que a pressão é desprezada, t é o tempo, v é a viscosidade, e y é a coordenada normal a placa e com origem no plano. Fazendo uma mudança de variáveis adequadas chegaremos que a equação (1) é equivalente a

$$D_C^{\frac{1}{2}} F(y, t) = A_y F(y, t) \quad (2)$$

Onde $A_y^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Durante toda a dissertação desenvolvemos uma Teoria para a demonstração do seguinte resultado: Seja X um espaço de Banach e A um operador linear fechado em X . Suponha que $\Sigma_{\frac{\pi}{2}} \subset \rho(A^2)$. Para $f \in D(A)$, então os dois problemas abaixo são equivalentes

$$\begin{cases} v'(t) = A^2 v(t) + \frac{1}{\sqrt{\pi t}} A f & t > 0 \\ v(0) = f \end{cases} \quad (3)$$

e

$$\begin{cases} D_C^{1/2} u(t) = A u(t) & t > 0 \\ u(0) = f \end{cases} \quad (4)$$

Feito isso encontraremos a solução do problema descrito em 5.30 e com isso teremos uma solução para Equação do Momento.

A dissertação aqui apresentada está estruturada da seguinte maneira. O capítulo 1 é dedicado a definição e algumas propriedades da Integração em espaços de Banach, esse capítulo será utilizado no desenvolvimento da teoria do capítulo 4.

O Capítulo 2 será dedicado a teoria do Cálculo fracionário. O Cálculo Fracionário surgiu com a notação da derivada $\frac{d^n y}{dx^n}$ criada por Leibniz em uma carta do Marquês de L'Hôpital

"Sua notação... caro amigo Leibniz, para derivadas agradou-me muito, porém tenho uma dúvida. Qual é a interpretação matemática quando n for $1/2$, $1/3$, $2/5$, etc."

A resposta de Leibniz a L'Hôpital é a seguinte:

"...Sua pergunta é um paradoxo. No entanto, estou certo de que, mais dias, menos dias, alguém encontrará uma interpretação e consequentemente aplicará às derivadas fracionárias!..."

Brilhantes matemáticos, tais como Euler, Lagrange, Laplace, Fourier, Abel, Heaviside, Liouville, entre outros, estudaram o assunto levando às primeiras definições de derivadas e integrais de ordens não-inteiras e que no final do século XIX, devido as definições propostas por Riemann e Liouville, pareciam estar completas.

Nesse Capítulo, definiremos a Integral e Derivada Fracionária de Riemann-Liouville e da Derivada de Caputo, além disso apresentaremos algumas propriedades dessas.

No Capítulo 3 serão apresentados, sem muitos detalhes, algumas definições e resultados clássicos da Análise Complexa, o desenvolvimento desse Capítulo servirá de base para o estudo de Semigrupos Analíticos .

O Capítulo 4 trata do desenvolvimento de fragmentos da Teoria de Semigrupos. Esse Capítulo é o mais importante do trabalho, pois é a ferramenta mais importante para as demonstrações dos resultados principais. Na primeira parte definiremos o que vem a ser Semigrupos de Operadores Lineares Limitados; na segunda parte, no intuito de estender a noção de Semigrupos para o plano complexo, na verdade para um setor desse plano, definiremos Semigrupos Analíticos e apresentaremos alguns resultados que nós garantirá que se um Operador Linear A gera um Grupo, então A^2 gera um Semigrupo Analítico. Esse resultado é a ferramenta usada para a construção de uma solução do problema 3.

Por fim, no Capítulo 5, mostraremos a equivalência entre os problemas 3 e 4 e construiremos uma solução para (3). Para concluir estudaremos a Equação do Momento descrita em 1, utilizando a teoria de Semigrupos e Derivada Fracionária.

1 INTEGRAÇÃO EM ESPAÇOS DE BANACH

Nesse Capítulo introduziremos o conceito de integração em espaços de Banach, para maiores detalhes sobre os conceitos e resultados ver Capítulo 1 de [1].

Seja X um espaço de Banach e I um intervalo em $\mathbb{R}$. Uma função $f : I \mapsto X$ é dita *simples* se $f(t) = \sum_{r=1}^n x_r X_{\Omega_r}$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$, onde $\Omega_r \subset I$ é mensurável a Lebesgue, com medida finita $m(\Omega)$ e X_Ω denota a função característica de Ω . Note que na representação de f sempre podemos rearranjar os Ω_r de modo que fiquem disjuntos.

Uma função $f : I \mapsto X$ é dita *mensurável* se existe uma sequência de funções simples tais que $g_n(t) \rightarrow f(t)$ q.t.p, $t \in I$.

Para uma função simples $g : I \mapsto X$, $g = \sum_{r=1}^n x_r X_{\Omega_r}$ vamos definir:

$$\int_I g(t) dt := \sum_{i=1}^n x_i m(\Omega_i) \quad (1.5)$$

A definição acima independe da representação de g e a integral assim definida é linear.

Uma função $f : I \mapsto X$ é dita *integrável* a Bochner se existe uma sequência de funções simples $g_n : I \rightarrow X$ tal que $g_n(t) \rightarrow f(t)$ q.t.p e $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \|f(t) - g_n(t)\| dt = 0$. Se f é integrável a Bochner, então a integral de f em I é:

$$\int_I f(t) dt := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I g_n(t) dt. \quad (1.6)$$

Esse limite existe e independe da sequência g_n .

Algumas propriedades que valem para integral no espaço euclidiano valem também para integral de Bochner, provemos alguns desses.

Proposição 1.1.1. *Se $f : I \rightarrow X$ é mensurável, então $\|f\| : I \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável.*

Demonstração. Sendo f mensurável, então existe uma sequência de funções simples $g_n(t) = \sum_{i=1}^{k_n} x_{in} X_{\Omega_{in}}$ (podemos supor $\Omega_{i,n}$ disjuntos) tais que $g_n(t) \rightarrow f(t)$ q.t.p, $t \in I$. Como, para $t \in I$ a sequência $g_n(t)$ converge para $f(t)$ em q.t.p, então $\|g_n(t)\| \rightarrow \|f(t)\|$ q.t.p, pois:

$$|\|g_n(t)\| - \|f(t)\|| \leq \|g_n(t) - f(t)\|$$

Além disso, $\|g_n(t)\|$ é uma função simples, pois:

$$\|g_n(t)\| = \left\| \sum_{i=1}^{k_n} x_{in} X_{\Omega_{in}}(t) \right\| = \|x_{in} X_{\Omega_{in}}(t)\| = \|x_i\| = \sum_{i=1}^{k_n} \|x_{in}\| X_{\Omega_{in}}(t),$$

onde a segunda igualdade segue do fato de que se $x \in \Omega_{kn}$, então $x \notin \Omega_{jn}$, para $k \neq j$, visto que estamos supondo os conjuntos disjuntos.

Com isso temos que a função $\|g_n(t)\|$ é uma função simples tal que $\|g_n(t)\| \rightarrow \|f(t)\|$ q.t.p, isso nos diz que $\|f\|$ é mensurável. $\square$

Teorema 1.1.1. (Bochner) A função $f : I \rightarrow X$ é integrável a Bochner $\iff f$ é mensurável e $\|f\|$ é integrável. Além disso, se f é integrável então:

$$\left\| \int_I f(t) dt \right\| \leq \int_I \|f(t)\| dt$$

Demonstração. Se f é integrável a Bochner então existe uma sequência de funções simples tal que $g_n \rightarrow f(t)$ q.t.p e $\int_I \|g_n(t) - f(t)\| dt \rightarrow 0$. Pela Proposição 1.1.1 temos que $\|f\|$ é mensurável e que $\|g_n(t)\|$ é uma função simples tal que $\|g_n(t)\| \rightarrow \|f(t)\|$ q.t.p. Note que:

$$\int_I \left| \|g_n(t)\| - \|f(t)\| \right| dt \leq \int_I \|g_n(t) - f(t)\| dt$$

Logo, $\int_I \left| \|g_n(t)\| - \|f(t)\| \right| dt \rightarrow 0$, e com isso, $\|f\|$ é integrável.

Além disso,

$$\left\| \int_I f(t) dt \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_I g_n(t) dt \right\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \|g_n(t)\| dt = \int_I \|f(t)\| dt$$

Por outro lado, suponha que f seja mensurável e $\|f\|$ é integrável. Sendo f mensurável então existe uma sequência de funções simples tal que $h_n(t) \rightarrow f(t)$ pontualmente em $I - \Omega_0$, com $m(\Omega_0) = 0$. Seja $t \in I - \Omega_0$ tal que $f(t) \neq 0$; então $\frac{\|h_n(t) - f(t)\|}{\|f(t)\|} \leq \varepsilon$ para $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$. Com isso,

$$\|h_n(t)\| - \|f(t)\| \leq \varepsilon \|f(t)\|.$$

Defina

$$g_n(t) = \begin{cases} h_n(t) & \text{se } \|h_n(t)\| \leq (1 + \varepsilon) \|f(t)\|. \\ 0 & \text{se } \|h_n(t)\| > (1 + \varepsilon) \|f(t)\|. \end{cases}$$

Se $t \in I - \Omega_0$ e $f(t) \neq 0$, então para $n \geq n_0$

$$\|g_n(t) - f(t)\| = \|h_n(t) - f(t)\|$$

o que nos diz que $\|g_n(t) - f(t)\| \rightarrow 0$ pontualmente em q.t.p .

Por outro lado, $\|g_n(t)\| \leq (1 + \varepsilon)\|f(t)\| \implies$

$$\|g_n(t) - f(t)\| \leq \|g_n(t)\| + \|f(t)\| \leq (2 + \varepsilon)\|f(t)\|$$

O resultado segue do Teorema da Convergência Dominada, usando o fato que $\|f\|$ é integrável. $\square$

Proposição 1.1.2. *Seja $T : X \rightarrow Y$ um operador linear limitado entre espaços de Banach X e Y e $f : I \rightarrow X$ integrável a Bochner. Então $T(f(t))$ é integrável a Bochner e $T\left(\int_I f(t)dt\right) = \int_I T(f(t))dt$*

Demonstração. Sendo f integrável a Bochner, então existe uma sequência de funções simples $g_n \rightarrow f$ q.t.p, $\int_I \|g_n(t) - f(t)\|dt \rightarrow 0$ e $\int_I f(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I g_n(t)dt$. Sendo g_n simples, temos que

$$\int_I g_n(t)dt = \sum_{i=1}^{k_n} x_{in}m(\Omega_{in})$$

Então, usando a continuidade de T

$$\begin{aligned} T\left(\int_I f(t)dt\right) &= T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I g_n(t)dt\right) \\ &= T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} x_{in}m(\Omega_{in})\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} T(x_{in}m(\Omega_{in})) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} T(x_{in})m(\Omega_{in}) \end{aligned}$$

Por outro lado, sendo T limitado, temos que $T(f(t))$ é integrável, pois

$$\int_I \|T(f(t)) - T(g_n(t))\| \leq \|T\| \int_I \|f(t) - g_n(t)\| \rightarrow 0$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_I T(f(t))dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I T(g_n(t)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_n} T(x_{in})m(\Omega_{in}) \end{aligned}$$

$\square$

O próximo resultado é uma generalização da proposição anterior.

Proposição 1.1.3. *Seja A um operador linear fechado em X e $f : I \rightarrow X$ integrável a Bochner. Suponha que $f(t) \in D(A)$ para todo $\forall t \in I$ e $A(f) : I \rightarrow X$ integrável a Bochner. Então $\int_I f(t)dt \in D(A)$ e $A \int_I f(t)dt = \int_I A(f(t))dt$.*

Demonstração. Considere o espaço de Banach $X \times X$ com a norma $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$. Se denotamos por $G(A)$ o gráfico do operador A , temos que $G(A)$ é um subespaço fechado de $X \times X$. Defina $g : I \rightarrow G(A) \subset X \times X$ por $g(t) := (f(t), A(f(t)))$. Portanto, g é mensurável (pois cada uma de suas coordenadas o são) e, como f e $A(f(t))$ são integráveis a Bochner, temos

$$\int_I \|g(t)\|dt = \int_I \|f(t)\|dt + \int_I \|A(f(t))\|dt < \infty$$

Logo g é integrável a Bochner. Considere agora os operadores projeções, que são operadores limitados, $P_i : X \times X \rightarrow X$ definidos por $P_i(x_1, x_2) = x_i$, para $i = 1, 2$. Da Proposição 1.1.2, obtemos

$$\begin{aligned} \int_I g(t)dt &= \left(P_1 \left(\int_I g(t)dt \right), P_2 \left(\int_I g(t)dt \right) \right) \\ &= \left(\int_I P_1(g(t))dt, \int_I P_2(g(t))dt \right) \\ &= \left(\int_I f(t)dt, \int_I A(f(t))dt \right) \end{aligned}$$

Além disso, $\int_I g(t)dt \in G(A)$ pois é limite de pontos de $G(A)$. Portanto, $\int_I f(t)dt \in D(A)$ e $A \int_I f(t)dt = \int_I A(f(t))dt$.

□

1.2 A TRANSFORMADA DE LAPLACE

Nessa seção definiremos a transformada de Laplace e estabeleceremos condições para existência de tal. Para isso, em toda seção considere X um espaço de Banach, $\lambda \in \mathbb{C}$ e

$$f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^+, X) := \{f : \mathbb{R}^+ \rightarrow X : f \text{ é integrável a Bochner em } [0, T] \text{ e } T > 0\}$$

Definição 1.2.1. (*Transformada de Laplace*) Seja $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^+, X)$, então a transformada de Laplace de f é definida por

$$\mathcal{F}(\lambda) = \mathcal{L}\{f\}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt := \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau e^{-\lambda t} f(t)dt \quad (1.7)$$

Definição 1.2.2. (*Função exponencialmente limitada*) Uma função $f : I \rightarrow X$ é dita exponencialmente limitada se existem $M, \omega \geq 0$ tais que

$$\|f(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \in I.$$

A pergunta que surge é: Quando é que a integral de Laplace existe para uma função exponencialmente limitada? Ora, sabemos que f é integrável se, e somente se, $\|f\|$ é integrável, então

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|e^{-\lambda t} f(t)\| dt &\leq \int_0^\infty \|e^{-\lambda t}\| M e^{\omega t} dt = M \int_0^\infty \|e^{(-Re\lambda)t + (-im\lambda)t}\| e^{\omega t} dt \\ &= M \int_0^\infty \|e^{(-Re\lambda)t}\| \|e^{(-im\lambda)t}\| e^{\omega t} dt \\ &= M \int_0^\infty e^{(-Re\lambda)t} e^{\omega t} dt \\ &= M \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau e^{(-Re\lambda + \omega)t} dt \end{aligned}$$

Tal limite existe $\Leftrightarrow -Re\lambda + \omega < 0$, isto é, $Re\lambda > \omega$. Com isso provamos o seguinte resultado:

Proposição 1.2.1. *Se $Re\lambda > \omega$, então a integral de Laplace de uma função exponencialmente limitada existe.*

Em certas condições podemos inverter a transformada de Laplace, para isso, seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$ então definimos

$$abs(f) = \inf\{Re\lambda : \mathcal{L}\{f\}(\lambda) \text{ existe}\}$$

Assim, é possível mostrar o seguinte resultado:

Teorema 1.2.1. *Seja $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$, com $abs(f) < \infty$, $abs(g) < \infty$ e seja $\lambda_0 > \max(abs(f), abs(g))$. Suponha que $\mathcal{L}\{f\}(\lambda) = \mathcal{L}\{g\}(\lambda) \forall \lambda > \lambda_0$. Então $f(t) = g(t) q.t.p$*

Demonstração. Veja a demonstração no Teorema 1.7.3 de [1]

□

2 A DERIVADA E A INTEGRAL DE ORDEM FRACIONÁRIA

Este capítulo apresenta as definições da integral fracionária de Riemann-Louville e da derivada de ordem fracionária de Riemann-Louville e de Caputo, além de mostrar algumas propriedades e resultados importantes relacionados a esses operadores e que serão utilizados posteriormente.

2.1 MOTIVAÇÃO

O principal objetivo do cálculo fracionário é ampliar a idéia de integração e derivação de ordem natural e manter, num sentido mais geral a relação entre os operadores diferencial e operadores integrais dada pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Para tanto, façamos algumas definições e resultados, afim de obter uma motivação para a definição de derivada e integral fracionária.

Definição 2.1.1. Denotemos por D o operador que associa a cada função diferenciável a sua derivada, isto é

$$Df(x) := f'(x).$$

Definição 2.1.2. Denotemos por I_a o operador que corresponde uma função f , assumindo ser integrável á Riemann no intervalo compacto $[a, b]$, a sua primitiva centrada em a , isto é

$$I_a f := \int_a^x f(t)dt,$$

para $a \leq x \leq b$.

Definição 2.1.3. Para $\alpha \in \mathbb{N}$, usaremos o símbolo D^α e I_a^α para denotar a iteração de D e I_a , respectivamente, isto é

$$D^1 := D \quad \text{e} \quad I_a^1 := I_a$$

$$D^\alpha := DD^{\alpha-1} \quad \text{e} \quad I_a^\alpha := I_a I_a^{\alpha-1}, \quad \alpha \geq 2.$$

Portanto, com essas notações, o Teorema Fundamental do Cálculo pode ser reescrito como

$$DI_a f = f,$$

o que implica

$$D^\alpha I_a^\alpha f = f.$$

Logo, D^α é a inversa á esquerda de I_a^α , num espaço adequado de funções. O que queremos agora é estender num certo sentido a definição 2.1.3, para $\alpha \in \mathbb{R}$.

Antes de definirmos os operadores D^α e I_a^α para $\alpha \in \mathbb{R}$, façamos alguns resultados válidos para $\alpha \in \mathbb{N}$.

Lema 2.1.1. *Seja f uma função integrável á Riemann em $[a, b]$. Então para $a \leq x \leq b$ e $\alpha \in \mathbb{N}$, temos*

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt.$$

Demonstração. A prova será feita por indução. Para $\alpha = 1$, obtém-se da própria definição que

$$I_a f(x) = \int_a^x f(t) dt = \frac{1}{0!} \int_a^x (x-t)^{1-1} f(t) dt$$

Desse modo a afirmação válida para $\alpha = 1$, suponhamos que a afirmação seja válida para $\alpha = k \in \mathbb{N}$. Então para $\alpha = k+1$ teremos que:

$$\begin{aligned} I_a^{k+1} f(x) &= I_a I_a^k f(x) \\ &= \int_a^x I_a^k f(t) dt \\ &= \int_a^x \frac{1}{(k-1)!} \int_a^t (t-y)^{k-1} f(y) dy dt \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x f(y) \int_t^x (t-y)^{k-1} dt dy \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x f(y) \frac{(x-y)^k}{k} dy \\ &= \frac{1}{k!} \int_a^x (x-y)^k f(y) dy \end{aligned}$$

Portanto, a afirmação é válida para $\alpha = k+1$. Por indução, a expressão é válida para todo $\alpha \in \mathbb{N}$. □

O Lema a seguir é uma consequência do Teorema Fundamental do Cálculo.

Lema 2.1.2. *Sejam $m, \alpha \in \mathbb{N}$ tais que $m > \alpha$. Seja f uma função contínua com m -ésima derivada no intervalo $[a, b]$. Então,*

$$D^\alpha f = D^m I^{m-\alpha} f.$$

2.1.1 FUNÇÃO GAMA

Existe uma função que generaliza a noção de fatorial para $\alpha \in \mathbb{N}$. A essa generalização, definida a seguir, e é chamada de Função Gama.

Definição 2.1.4. *A função Gama é a função $\Gamma : \mathbb{R} - \{0, -1, -2, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por*

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-s} s^{t-1} ds. \quad (2.8)$$

Note que a Função Gama tem a propriedade de que se $t > 0$, então $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$. De fato, usando integração por partes temos:

$$\begin{aligned} \Gamma(t+1) &= \int_0^\infty e^{-s} s^t ds = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-s} s^t ds \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-s^t e^{-s} \Big|_0^a + t \int_0^a e^{-s} s^{t-1} ds \right) \\ &= t\Gamma(t) \end{aligned}$$

Além disso, note que

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-s} s^0 ds \\ &= \int_0^\infty e^{-s} ds \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-s} ds \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -e^{-s} \Big|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -e^{-s} + e^0 = 1 \end{aligned}$$

Com isso, temos o seguinte resultado

Corolário 2.1.1. $\Gamma(n+1) = n!$

Demonstração. Pelas observações feitas anteriormente

$$\begin{aligned}
 \Gamma(0+1) &= \Gamma(1) = 1 \\
 \Gamma(1+1) &= \Gamma(2) = 1\Gamma(1) \\
 \Gamma(2+1) &= \Gamma(3) = 2\Gamma(2) \\
 \Gamma(3+1) &= \Gamma(4) = 3\Gamma(3) \\
 &\vdots \\
 \Gamma(n+1) &= \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)
 \end{aligned}$$

Multiplicando todos os termos membro a membro

$$\begin{aligned}
 \Gamma(1)\Gamma(2)\Gamma(3)\cdots\Gamma(n+1) &= 1\Gamma(1)2\Gamma(2)3\Gamma(3)\cdots n\Gamma(n) \\
 \Gamma(n+1) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!
 \end{aligned}$$

□

2.1.2 FUNÇÃO BETA

Em certos casos, é mais adequado o uso da função chamada Beta, no lugar de certas combinações de valores da função Gama.

Definição 2.1.5. A função Beta é a função $B : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$B(x, y) = \int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{y-1}ds, \quad x > 0, \quad y > 0. \quad (2.9)$$

Se $x > 0$ e $y > 0$ temos a seguinte relação:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

2.2 A INTEGRAL E A DERIVADA DE RIEMMAN-LOUVILLE

Nessa seção usaremos a notação I^α e D^α para denotar a integral e a derivada fracionária de Riemman-Louville.

Definição 2.2.1. Sejam $f \in L^1[a, b]$. A integral fracionária de ordem α da função f é denotada por I^α e é definida por

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt. \quad (2.10)$$

para α pertencente ao intervalo $(0, \infty)$. Para $\alpha = 0$, definimos $I^0 := I$, onde I representa o operador identidade.

Observemos que a definição acima é uma generalização do Lema 2.1.1, isto é, quando $\alpha \in \mathbb{N}$ a definição acima coincide com a α -ésima integral. Além disso, note que no caso $\alpha \geq 1$ a integral I^α existe para todo $x \in [a, b]$, visto que o integrando é o produto de uma função contínua $(x - t)^{\alpha-1}$ por uma função integrável f . O caso $0 < \alpha < 1$ é justificado do Lema abaixo e segue da Desigualdade de Young para convolução.

Lema 2.2.1. *Sejam $f \in L^1[a, b]$ e $\alpha > 0$. Então, a integral $I^\alpha f(x)$ existe para quase todo ponto $x \in [a, b]$. Além disso, a função I^α pertence a $L^1[a, b]$.*

Demonstração. Note que

$$\int_a^x (x - t)^{\alpha-1} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(x - t) \phi_2(t) dt = (\phi_1 * \phi_2)(x)$$

onde

$$\phi_1(u) = \begin{cases} u^{\alpha-1}, & \text{para } 0 < u \leq b - a \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (2.11)$$

e

$$\phi_2(u) = \begin{cases} f(u), & \text{para } a < u \leq b \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (2.12)$$

observe que, por construção, $\phi_j \in L^1(\mathbb{R})$ para $j \in \{1, 2\}$. Portanto segue da Desigualdade de Young para convolução que $I^\alpha f$ existe em quase todo ponto e $I^\alpha f \in L^1[a, b]$. $\square$

Para ilustrar a definição acima, encontremos a integral fracionária de ordem α da função $f(x) = (x - a)^\mu$, para $\mu > -1$. Usando a definição e fazendo a mudança de variáveis $s = \frac{t-a}{x-a}$, chegmos que:

$$\begin{aligned} I^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} (t - a)^\mu dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [(1 - s)(x - a)]^{\alpha-1} [s(x - a)]^\mu (x - a) ds \\ &= \frac{(x - a)^{\alpha+\mu}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - s)^{\alpha-1} s^\mu ds \\ &= \frac{B(\alpha, \mu + 1)}{\Gamma(\alpha)} (x - a)^{\alpha+\mu} \\ &= \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\alpha + \mu + 1)} (x - a)^{\alpha+\mu} \end{aligned}$$

Definição 2.2.2. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e $[\alpha] = n$ o menor inteiro maior que α . A derivada fracionária do tipo Riemman-Louville e de ordem α da função f é denotada por D^α e é definida por*

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} D^n \int_a^x (x - t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \quad \alpha > 0, \quad (2.13)$$

onde $I^{n-\alpha} f(x) \in C^n[a, b]$ e D^n representa a derivada inteira de ordem n com relação a variável x .

Note que a expressão acima pode ser reescrita como:

$$D^\alpha f(x) = D^n [I^{n-\alpha} f(x)], \quad \alpha > 0. \quad (2.14)$$

Além disso, a derivada fracionária para casos inteiros coincide com a derivada usual ou clássica, pois se $\alpha = n$, então $[n] = n + 1$, com isso:

$$\begin{aligned} D^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n + 1 - n)} D^{n+1} \int_a^x (x - t)^{n+1-n-1} f(t) dt. \\ &= \frac{1}{\Gamma(1)} D^{n+1} \int_a^x f(t) dt. \\ &= D^{n+1} \int_a^x f(t) dt. \\ &= D^n D \left(\int_a^x f(t) dt \right) \\ &= D^n f(t), \end{aligned}$$

Onde a última igualdade decorre do Teorema Fundamental do Cálculo.

Já vimos anteriormente que para $a = 0$, temos que

$$I^\alpha x^\mu = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\alpha + \mu + 1)} x^{\alpha+\mu}$$

Então,

$$\begin{aligned} D^\alpha x^\mu &= D^n I^{n-\alpha} x^\mu \\ &= \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(n - \alpha + \mu + 1)} D^n x^{n-\alpha+\mu} \\ &= \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu - \alpha + 1)} x^{\mu-\alpha} \end{aligned}$$

Com a mesma notação das seções anteriores, definimos a derivada de Caputo, e denotaremos por D_C^α , como:

$$D_C^\alpha = I^{n-\alpha} (D^n f(x)) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{n-\alpha-1} f^n(t) dt. \quad (2.15)$$

com $n - 1 < \alpha < n$ e $f^n(t) \in C^n[a, b]$.

Veremos nos próximos capítulos a relação da derivada de Caputo com a de Riemman-Liouville.

2.2.1 PROPRIEDADES DA INTEGRAL E DERIVADA FRACIONÁRIA

Definição 2.2.3. *Seja X um espaço de Banach e $f, g : [0, \infty] \rightarrow X$. A convolução entre duas funções f, g , as quais são iguais a 0 para $x < 0$, é definida por*

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x - y)g(y)dy = \int_0^x f(y)g(x - y)dx. \quad (2.16)$$

desde que esta expressão faça sentido, por exemplo, se f e g são integráveis.

No restante do texto consideramos funções de forma que a convolução tenha sentido, caso não seja mencionado.

Segue da definição que a convolução é associativa e comutativa.

Proposição 2.2.1. *(Transformada de Laplace da convolução) Sejam $f, g : [0, \infty] \rightarrow X$ funções tais que a transformada de Laplace existe. Então*

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\}$$

Demonstração. Usando a definição de transformada de Laplace, Teorema de Fubini e a mudança de variáveis $x = t - y$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f * g\}(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} f * g(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^\infty f(t - y)g(y) dy dt \\ &= \int_0^\infty g(y) \left(\int_0^\infty f(t - y)e^{-\lambda t} dt \right) dy \\ &= \int_0^\infty g(y) \left(\int_0^\infty f(x)e^{-\lambda(x+y)} dx \right) dy \\ &= \int_0^\infty g(y)e^{-\lambda y} dy \int_0^\infty f(x)e^{-\lambda x} dx \\ &= \mathcal{L}\{f\}(\lambda) \cdot \mathcal{L}\{g\}(\lambda) \end{aligned}$$

□

Consideremos agora, a função $\Phi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ definida para todo $t > 0$. Fazendo a convolução com a função f obtemos :

$$\begin{aligned} (\Phi_\alpha * f)(t) &= \int_0^t \Phi_\alpha(t-s)f(s)ds \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds \\ &= I^\alpha f(t) \end{aligned}$$

Teorema 2.2.1. *Se $\alpha, \beta \geq 0$, temos que $I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta}$. Em particular, vale a propriedade comutativa $I^\alpha I^\beta = I^\beta I^\alpha$.*

Demonstração. Por definição temos

$$\begin{aligned} I^\alpha [I^\beta f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} I^\beta f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \left(\int_a^t (t-u)^{\beta-1} f(u) du \right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t (x-t)^{\alpha-1} (t-u)^{\beta-1} f(u) du dt \end{aligned}$$

usando o Teorema de Fubini e fazendo a mudança de variável $s = \frac{t-u}{x-u}$ chegamos que

$$\begin{aligned} I^\alpha [I^\beta f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_u^x (x-t)^{\alpha-1} (t-u)^{\beta-1} f(u) dt du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) (x-u)^{\alpha+\beta-1} du \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds \\ &= \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) (x-u)^{\alpha+\beta-1} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(u) (x-u)^{\alpha+\beta-1} du \\ &= I^{\alpha+\beta} f(x). \end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.2. $D^\alpha I^\alpha = I$, onde I é o Operador Identidade.

Demonstração. De fato, pois $D^\alpha I^\alpha f(t) = D^n I^{n-\alpha} I^\alpha f(t) = D^n I^n f(t) = f(t)$

A Penúltima igualdade decorre da lei dos expoentes e a última, do Teorema fundamental do cálculo.

Terminamos essa seção apresentando alguns resultados que relacionam derivada e integral fracionária com a transformada de Laplace. $\square$

Lema 2.2.2. *A transformada de Laplace da integral fracionária satisfaz $\mathcal{L}\{I^\alpha f\}(\lambda) = \lambda^{-\alpha} \mathcal{L}\{f\}(\lambda)$.*

Demonstração. Considere a função $\Phi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, definida anteriormente.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\Phi_\alpha\}(\lambda) &= \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\lambda b} e^{-u} \frac{u^{\alpha-1}}{\lambda^{\alpha-1}} \frac{du}{\lambda} \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha) \lambda^\alpha} \int_0^{\lambda b} e^{-u} u^{\alpha-1} du \right) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha) \lambda^\alpha} = \lambda^{-\alpha} \end{aligned}$$

Por outro lado, usando a propriedade da transformada de Laplace do produto convolução

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{I^\alpha(f)\}(\lambda) &= \mathcal{L}\{\Phi_{(\alpha)}\}(\lambda) * f(t) \\ &= \mathcal{L}\{\Phi_{(\alpha)}\}(\lambda) \cdot \mathcal{L}\{f\}(\lambda) \\ &= \lambda^{-\alpha} \mathcal{L}\{f\}(\lambda). \end{aligned}$$

$\square$

Lema 2.2.3. *(Transformada de Laplace da derivada)*

Sejam f e f' integráveis em $[0, b]$, para todo $b > 0$. se f for de ordem exponencial, então existe a transformada de Laplace e vale $\mathcal{L}\{f'\}(\lambda) = \lambda \mathcal{L}\{f\}(\lambda) - f(0)$.

No caso geral se $f, f', \dots, f^m$ são integráveis em $[0, b]$, para todo $b > 0$, e f for de ordem exponencial, então existe $\mathcal{L}\{f^m\}(\lambda) = \lambda^m \mathcal{L}\{f\}(\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) \lambda^{m-1-k}$

Para provar a primeira igualdade usaremos a definição, fazendo uma integração por partes

Demonstração.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'\}(\lambda) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} f'(t) dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\int_0^b e^{-\lambda t} f'(t) dt \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(e^{-\lambda t} f(t) \Big|_0^b + \lambda \int_0^b e^{-\lambda t} f(t) dt \right) \\ &= \lambda \mathcal{L}\{f\}(\lambda) - f(0). \end{aligned}$$

Para provamos o caso geral, usamos indução sobre m , isto é, suponhamos que a afirmação seja válida para $m = n$, e vamos mostrar que a afirmação vale para $m = n + 1$. De fato:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f^{n+1}\}(\lambda) &= \mathcal{L}\{(f^n)'\}(\lambda) = \lambda \mathcal{L}\{f^n\}(\lambda) - f^n(0) \text{ (pelo caso anterior)} \\
&= \lambda \left[\lambda^n \mathcal{L}\{f\}(\lambda) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \lambda^{n-1-k} \right] - f^n(0) \\
&= \lambda^{n+1} \mathcal{L}\{f\}(\lambda) - \lambda \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \lambda^{n-1-k} - f^n(0) \\
&= \lambda^{n+1} \mathcal{L}\{f\}(\lambda) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(0) \lambda^{n-k}
\end{aligned}$$

Com isso, a afirmação é válida para $m = n + 1$ e por indução provamos o desejado. $\square$

Teorema 2.2.3. *A transformada de Laplace da derivada de Caputo de ordem α é dada por:*

$$\mathcal{L}\{D_C^\alpha f\}(\lambda) = \lambda^\alpha \mathcal{L}\{f\}(\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) \lambda^{\alpha-k-1} \quad (2.17)$$

Demonstração. A demonstração segue da definição e dos lemas 2.2.2 e 2.2.3, usados na segunda e terceira igualdade, respectivamente.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{D_C^\alpha f\}(\lambda) &= \mathcal{L}\{I^{m-\alpha} [D^m f]\}(\lambda) = \lambda^{-m+\alpha} \mathcal{L}\{D^m f\}(\lambda) \\
&= \lambda^{-m+\alpha} \left(\lambda^m \mathcal{L}\{f\}(\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) \lambda^{m-1-k} \right) \\
&= \lambda^\alpha \mathcal{L}\{f\}(\lambda) - \left(\lambda^{-m+\alpha} \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) \lambda^{m-1-k} \right) \\
&= \lambda^\alpha \mathcal{L}\{f\}(\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) \lambda^{\alpha-1-k}
\end{aligned}$$

$\square$

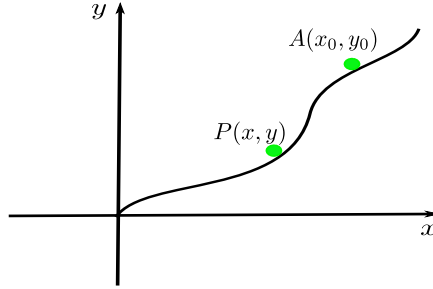
2.3 APLICAÇÃO DE DERIVADA FRACIONÁRIA

O nosso problema é determinar a curva na qual o tempo gasto por um objeto para deslizar, sem atrito, em gravidade uniforme até seu ponto de mínimo é independente de seu ponto de partida. Em outras palavras queremos determinar a forma de uma curva, sem atrito, no plano vertical tal que um objeto posto na curva, escorregue para o ponto mais baixo no mesmo tempo τ , independente de onde o objeto foi colocado inicialmente.

Nessa seção obteremos uma descrição de tal curva (curva tautócrona) usando técnicas provenientes do cálculo fracionário..

2.3.1 O PROBLEMA DA TAUTÓCRONA

Para determinar a curva tautócrona, suponhamos que uma conta está vinculada a mover-se num fio sem atrito que jaz num plano vertical, conforme a figura abaixo.



Para isso, suponhamos que a partícula de massa m parte do repouso num ponto qualquer $A(x_0, y_0)$ do fio e cai sob influência da gravidade e $P(x, y)$ é um ponto intermediário no movimento e, para facilitar os cálculos, suponhamos que o ponto mais baixo do fio seja a origem O , então sendo s o comprimento do arco OP , pelo *princípio da conservação de energia* temos que:

$$\begin{aligned}
 mgy_0 + 0 &= mgy + \frac{1}{2}mv^2 \\
 mgy_0 + 0 &= mgy + \frac{1}{2}m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \\
 \frac{1}{2}m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 &= mg(y_0 - y) \\
 \frac{ds}{dt} &= \mp \sqrt{2g(y_0 - y)} \\
 dt &= \mp \frac{ds}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} \\
 dt &= \mp \frac{1}{\sqrt{2g}} (y_0 - y)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{ds}{dy} \right) dy
 \end{aligned}$$

Onde $s(y)$ é a distância remanescente na curva em termos da altura. Como a distância e altura diminuem a medida em que o tempo passa, devemos tomar apenas o sinal negativo.

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{2g}} (y_0 - y)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{ds}{dy} \right) dy$$

Integrando ambos os lados de y_0 a zero temos :

$$\begin{aligned}
 \tau &= -\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{y_0}^0 (y_0 - y)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{ds}{dy} \right) dy \\
 \tau &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{y_0} (y_0 - y)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{ds}{dy} \right) dy
 \end{aligned}$$

Onde τ é o tempo de descida.

Observe que a integral acima, a menos de um fator multiplicativo $\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}$ (Comprovar o cálculo na página 29) é exatamente a definição de integral fracionária de ordem $\frac{1}{2}$ de $\frac{ds}{dy}$.

Lembremos que pelo Teorema 2.2.2 a derivada fracionária de Riemman-Liouville é o operador inverso a esquerda da integral fracionária. Então aplicando a derivada fracionária de ordem $\frac{1}{2}$ em ambos os lados e usando o fato que $D^{\frac{1}{2}}(1) = (\sqrt{\pi y})^{-\frac{1}{2}}$, temos:

$$\begin{aligned}\frac{\tau}{\sqrt{\pi y}} &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2g}} \left(\frac{ds}{dy} \right) \\ \frac{ds}{dy} &= \frac{\tau \sqrt{2g}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{y}} \\ ds &= \frac{\tau \sqrt{2g}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y}} dy \\ \int ds &= \frac{\tau \sqrt{2g}}{\pi} \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy \\ s(y) &= \frac{2\tau \sqrt{2g}}{\pi} y^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Além disso, sabemos que o comprimento do arco de uma curva regular plana com parametrização $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ é dada por

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(t)| dt = \int_0^t \sqrt{x'(t)^2 + t'(t)^2} dt.$$

Como a curva em questão tem parametrização $\alpha(y) = (x(y), y)$, temos

$$s(y) = \int_0^y \sqrt{(x'(t))^2 + 1} dt = cy^{\frac{1}{2}},$$

onde $c = \frac{2\tau\sqrt{2g}}{\pi}$. Derivando ambos os lados da equação com relação a y e depois elevando ao quadrado, obteremos que:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x'(y))^2 + 1} &= \frac{c}{2} y^{-\frac{1}{2}} \\ (x'(y))^2 + 1 &= \left(\frac{c}{2}\right)^2 y^{-1} \\ (x'(y))^2 + 1 &= ky^{-1} \\ (x'(y))^2 &= \frac{k-y}{y} \\ x'(y) &= \sqrt{\frac{k-y}{y}} \\ \frac{dx}{dy} &= \sqrt{\frac{k-y}{y}} \\ x(y) &= \int \sqrt{\frac{k-y}{y}} dy + C\end{aligned}$$

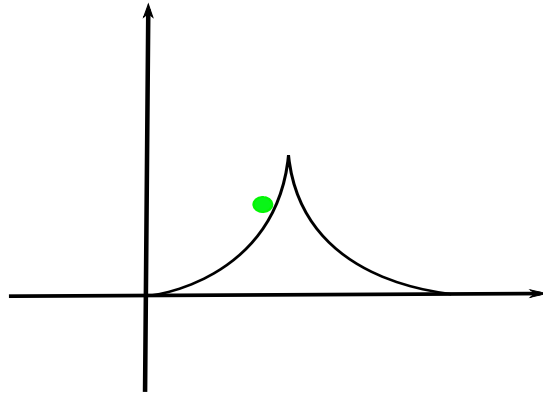


Figura 2.1: Esboço da ciclóide.

Fazendo a substituição $y = k \sin^2 \theta \implies dy = 2k \sin \theta \cos \theta d\theta$, teremos:

$$x(y) = \int \sqrt{\frac{k - k \sin^2 \theta}{k \sin^2 \theta}} 2k \sin \theta \cos \theta d\theta + C$$

$$x(y) = 2k \int \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta}} \sin \theta \cos \theta d\theta + C$$

$$x(y) = 2k \int \cos^2 \theta d\theta + C$$

$$x(y) = 2k \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta + C$$

$$x(y) = k \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) + C$$

Usando o fato da curva passar pelo ponto $(0, 0)$, obtemos que $C = 0$. Com isso a curva pedida tem parametrização

$$\begin{cases} x(\theta) = \frac{g\tau^2}{\pi^2} [2\theta + \sin 2\theta] \\ y(\theta) = \frac{g\tau^2}{\pi^2} [1 - \cos 2\theta] \end{cases}$$

que são as equações paramétricas da ciclóide.

3 TÓPICOS DE ANÁLISE COMPLEXA

Nesse capítulo nosso principal objetivo é encontrar a transformada de Laplace da Função $\phi_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$, para isso faremos alguns resultados e algumas definições referentes a análise complexa, resultados esses que nos auxiliarão, também no desenvolvimento da teoria de semigrupos. Para maiores detalhes sobre as definições e resultados desse capítulo ver [10].

Definição 3.1.1. Sejam $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ uma curva suave e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. A integral de linha de f sobre a curva γ é definida por:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Definição 3.1.2. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é um caminho formado pela justaposição de curvas suaves $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função contínua, definimos

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z) dz.$$

Teorema 3.1.1. (*Teorema de Cauchy*) Se f é uma função analítica numa região simplesmente conexa D então, para cada curva de Jordan γ contida em D é válido que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Teorema 3.1.2. (*Fórmula integral de Cauchy*) Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um domínio simplesmente conexo, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica em D e γ uma curva de Jordan orientada positivamente em D . Se z_0 é um ponto qualquer no interior de γ então

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Lema 3.1.1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (3.18)$$

Demonstração. Veja que

$$\begin{aligned}
 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dy dx \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dy dx
 \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares temos:

$$\begin{aligned}
 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} dr d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-1}{2} e^{-r^2} \right)_0^{+\infty} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{-1}{2} (0 - 1) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \\
 &= \frac{2\pi}{2} = \pi.
 \end{aligned}$$

□

Sendo a Gaussiana uma função par, então como consequência do que foi provado temos que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Teorema 3.1.3. *Seja $\phi_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$, então $\mathcal{L}\{\phi_{\frac{1}{2}}\}(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}$.*

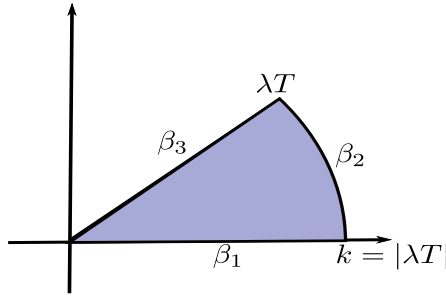
Demonstração. Primeiro note que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, onde γ é a função gama definida no capítulo anterior. De fato,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{\frac{-1}{2}} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} r^{-1} e^{-r^2} 2r dr = 2 \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Onde na segunda igualdade foi usada a mudança de variável $t = r^2$ e na quarta igualdade foi usado o lema anterior.

Agora, considere a região fechada delimitada pelas curvas complexas :

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= \{(t, 0), 0 \leq t \leq K = |\lambda T|\} \\
 \beta_2 &= \{K e^{ti}, 0 \leq t \leq \arg \lambda\} \\
 \beta_3 &= \{t\lambda, 0 \leq t \leq T\}
 \end{aligned}$$



Observe que, por definição

$$\int_{\beta_2} r^{-\frac{1}{2}} e^{-r} dr = \int_0^{arg \lambda} (K e^{it})^{-\frac{1}{2}} e^{-K e^{it}} i K e^{it} dt$$

Donde segue

$$\left| \int_{\beta_2} r^{-\frac{1}{2}} e^{-r} dr \right| \leq \int_0^{|arg \lambda|} K^{-\frac{1}{2}} e^{-K} K dr = \frac{2}{3} K^{\frac{3}{2}} e^{-K} |arg \lambda|$$

que converge para zero quando $K \rightarrow \infty$. Logo, pelo teorema de Cauchy,

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\beta_1 \cup \beta_2 \cup (-\beta_3)} r^{-\frac{1}{2}} e^{-r} dr &= \int_{\beta_1} r^{-\frac{1}{2}} e^{-r} dr + \int_{\beta_2} r^{-\frac{1}{2}} e^{-r} dr - \int_{\beta_3} r^{-\frac{1}{2}} e^{-r} dr \\ &= \int_0^K t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt + \int_{\beta_2} r^{-\frac{1}{2}} e^{-r} dr - \int_0^T (t\lambda)^{-\frac{1}{2}} e^{-t\lambda} \lambda dt \end{aligned}$$

Com isso quando $T, K \rightarrow \infty$, temos que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \lambda^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-\lambda t} dt.$$

Logo,

$$\mathcal{L}\{\Phi_{\frac{1}{2}}\} = \int_0^\infty \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}$$

□

4 SEMIGRUPOS

Nesse capítulo introduziremos o conceito de semigrupos e apresentaremos algumas propriedades e resultados que serão necessários nos capítulos seguintes.

4.1 SEMIGRUPOS FORTEMENTE CONTÍNUO DE OPERADORES LIMITADOS

Definição 4.1.1. Seja X um espaço de Banach. Uma família a um parâmetro t com $\{T(t); t \geq 0\}$ de operadores limitados de X em X é dita *semigrupo* se:

i) $T(0) = I$ (Onde I é o operador identidade em X).

ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$, $\forall t, s \geq 0$.

Definição 4.1.2. Um semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ de operadores lineares é chamado *fortemente contínuo* ou C_0 -semigrupo se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)(x) - x\|_X = 0, \quad \forall x \in X.$$

Teorema 4.1.1. Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ um C_0 -semigrupo em X . Então existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que:

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \text{para } 0 \leq t \leq \infty.$$

Demonstração. Primeiro vejamos que existe um $\delta > 0$ tal que $\|T(t)\|$ é limitado em $[0, \delta]$. Para isso, suponhamos por contradição que não existe tal δ , então existe uma sequência (t_n) , $t_n \rightarrow 0^+$ tal que

$$\|T(t_n)\| \geq n. \tag{4.19}$$

Sendo $T(t)$ um C_0 -semigrupo, para cada x , temos que $T(t_n)x \rightarrow x$, logo $\|T(t_n)x\| \leq C_x$. Do Teorema da Limitação Uniforme $\|T(t_n)\|$ é limitado, contradizendo (4.19).

Logo, existem $\delta > 0$ e M tais que para todo $t \in [0, \delta]$:

$$\|T(t)\| \leq M$$

Note que $M \geq \|T(0)\| = \|I\| = 1$. Por outro lado, para $t \geq 0$ escrevamos $t = n\delta + r$, $n \in \mathbb{Z}^+$ e $r \in [0, \delta]$; logo $n\delta \leq t$.

$$\|T(t)\| = \|T(n\delta + r)\| = \|T(n\delta)\| \|T(r)\| = \|T(\delta)\|^n \|T(r)\| \leq M^{\frac{t}{\delta}} M.$$

O resultado segue chamando $M^{\frac{t}{\delta}} = e^{\omega t} \Rightarrow \omega = \ln \left(\frac{M}{\delta} \right)$. □

Corolário 4.1.1. *Se $\{T(t); t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo, então, para cada x fixado em X , $f : t \mapsto T(t)x$ é uma função contínua de $\mathbb{R}^+$ em X .*

Demonstração. Sejam $t, h \geq 0$, então:

$$\begin{aligned} \|T(t+h)x - T(t)x\| &= \|T(t)T(h)x - T(t)x\| \\ &= \|T(t)(T(h)x - x)\| \\ &\leq \|T(t)\| \|T(h)x - x\| \\ &\leq M e^{\omega t} \|T(h)x - x\|. \end{aligned}$$

Onde as desigualdades anteriores seguem do fato de os operadores $T(t)$ serem limitados e do Teorema anterior. Com isso, pelo fato de $T(h)x \rightarrow x$ (pela definição de C_0 -semigrupo), temos que $\lim_{h \rightarrow 0^+} T(t+h)x = T(t)x$. Logo, $\|f(t+h) - f(t)\| \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0^+$.

Por outro lado, sendo $0 < h \leq t$

$$\begin{aligned} \|f(t) - f(t-h)\| &= \|T(t)x - T(t-h)x\| \\ &= \|T(t+h-h)x - T(t-h)x\| \\ &= \|T(h)T(t-h)x - T(t-h)x\| \\ &\leq \|T(t-h)\| \|T(h)x - x\| \\ &\leq M e^{\beta(t-h)} \|T(h)x - x\| \\ &\leq M e^{\beta t} \|T(h)x - x\|. \end{aligned}$$

Pela mesma justificativa dada anteriormente, $\|f(s) - f(t-h)\| \rightarrow 0$, quando $h \rightarrow 0^+$. Com isso, mostramos que f é contínua a direita e a esquerda, logo f é contínua. □

Definição 4.1.3. Seja $\{T(t); \}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo em X . Seu gerador infinitesimal do semigrupo é o operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, definido por

$$D(A) = \{u \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)u - u}{t} \text{ existe}\} \quad (4.20)$$

$$Au = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)u - u}{t}, \quad u \in D(A). \quad (4.21)$$

Para ilustrar, mostremos um exemplo de C_0 -semigrupo e encontremos seu gerador infinitesimal.

Exemplo 4.1.1. Consideremos o espaço

$$X = C_l([0, \infty)) = \{f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é contínua em } [0, \infty) \text{ e } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \text{ existe}\}.$$

munido da norma $\|f\|_\infty = \sup_{[0, \infty)} |f(x)|$. Então X com essa norma é um espaço de Banach.

Para cada $t \in [0, \infty)$, definamos o operador $T(t)$ por

$$\begin{aligned} T(t) &: X \rightarrow X \\ f &\mapsto T(t)f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C} \\ (T(t)f)(x) &\rightarrow f(x+t) \end{aligned}$$

Então mostremos que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo e encontremos seu gerador infinitesimal.

Demonstração. Mostremos primeiro que $T(t)_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo.

1. A família $\{T(t), t \geq 0\}$ é um semigrupo

Dados $f \in X$ e $x \geq 0$

i) $[T(0)f](x) = f(x+0) = f(x) \quad \forall x \geq 0$; logo $T(0)f = f \quad \forall f \in X$ e $T(0) = I$.

ii) Dados $t_1, t_2 \in [0, \infty]$, temos

$$[T(t_1+t_2)f](x) = f(x+(t_1+t_2)) = f((x+t_1)+t_2) = (T(t_2)f)(x+t_1) = T(t_1)(T(t_2)f)(x)$$

Logo, a família $T(t), t \geq 0$ é um semigrupo.

2. A família $\{T(t), t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo

Mostremos que $\|T(t)f - f\|_\infty \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$.

De fato, $\|T(t)f - f\|_\infty = \sup_{x \in [0, \infty)} |(T(t)f - f)(x)|$. Como $f \in X$, segue $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha \in \mathbb{C}$.

Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $M(\varepsilon)$ tal que $\forall x > M$, tem-se:

$$|f(x) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Em particular, se $x > M, t > 0$, então $x + t > M$ e consequentemente

$$|f(x + t) - f(t)| \leq |f(x + t) - \alpha| + |f(x) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Com isso, $\sup_{x \in [A, \infty)} |f(x + t) - f(x)| \leq \varepsilon, \forall t \geq 0$.

A função $f|_{[0, M+1]} : [0, M+1] \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua, portanto uniformemente contínua, assim $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(M(\varepsilon))$ com $0 < \delta < 1$ tal que:

$$|f(x + t) - f(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in [0, M].$$

Com isso, juntando as informações anteriores, temos

$$\sup_{x \in [0, \infty)} |f(x + t) - f(x)| \leq \sup_{x \in [0, M]} |f(x + t) - f(x)| + \sup_{x \in [M, \infty)} |f(x + t) - f(x)| \leq 2\varepsilon$$

Logo, quando $t \rightarrow 0^+$ temos que $\|T(t)f - f\|_\infty \rightarrow 0$.

Sendo um C_0 -semigrupo, encontremos seu gerador infinitesimal. Para todo $s \geq 0$, temos:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)f(s) - f(s)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t + s) - f(s)}{t} = D^+f(s)$$

Onde D^+ é a derivada á direita de f , quando tal limite existe. Logo, para que $f \in D(A)$, teremos que ter que $D^+f \in X$, pois $A : D(A) \subset X \rightarrow X$. Observamos ainda que:

$$f(x + t) - f(x) = D^+f(x)t - r(t) \text{ com } \frac{r(t)}{t} \rightarrow 0, t \rightarrow 0^+$$

Chamando $x = s - t$ e usando a continuidade de D^+f , temos

$$D^-f(s) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(s) - f(s - t)}{t} = D^+f(s)$$

O que nos diz que a derivada á esquerda $D^-f(s)$ existe em todo ponto e $D^+f = D^-f$, logo f é derivável em todo ponto. Assim:

$$D(A) = \{f \in X, f' \text{ existe em todo ponto e } f' \in X\} \text{ e } Af = f'.$$

□

No restante desta seção apresentamos alguns resultados clássicos que relacionam um C_0 -semigrupo e seu gerador infinitesimal.

Teorema 4.1.2. *Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$. Então*

a) Para $u \in X$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)u ds = T(t)u.$$

b) Para $u \in X$ temos que $\int_0^t T(s)u ds \in D(A)$ e $A \left(\int_0^t T(s)u ds \right) = T(t)u - u$

c) Para $u \in D(A)$ temos que $T(t)u \in D(A)$ e

$$\frac{d}{dt} T(t)u = AT(t)u = T(t)Au.$$

d) Para $u \in D(A)$

$$T(t)u - T(s)u = \int_s^t T(\tau)A u d\tau = \int_s^t AT(\tau)u d\tau.$$

Demonstração. a) Pelo Corolário 4.1.1, temos que $\lim_{s \rightarrow t} T(s)u = T(t)u$ para todo $u \in X$ e $t > 0$. Isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para

$$|t - s| < \delta \implies \|T(s)u - T(t)u\| < \varepsilon.$$

Consequentemente, para $u \in X$ e $0 < |h| < \delta$

$$\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)u - T(t)u ds \right\| \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|T(s)u - T(t)u\| ds < \varepsilon.$$

b) Note que para $u \in X$

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} \left(\int_0^t T(s)u ds \right) &= \frac{1}{h} \int_0^t (T(h)T(s)u - T(s)u) ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^t (T(h+s)u - T(s)u) ds \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)u ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)u ds \end{aligned}$$

Pelo item a) temos que $\frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)u ds \rightarrow T(t)u$ e $\frac{1}{h} \int_0^h T(s)u ds \rightarrow u$ quando $h \rightarrow 0^+$, logo o lado direito da expressão acima tende a $T(t)u - u$ quando $h \rightarrow 0^+$ e o lado esquerdo tende ao operador A , portanto

$$A \left(\int_0^t T(s)u ds \right) = T(t)u - u.$$

c) Seja $u \in D(A)$ e $h > 0$. Então:

$$\begin{aligned} \frac{T(h)u - u}{h} T(t)u &= \frac{T(h)T(t)u - T(0)T(t)u}{h} \\ &= T(t) \left(\frac{T(h) - T(0)}{h} \right) u \rightarrow T(t)Au \text{ quando } h \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

Logo, $T(t)u \in D(A)$ e $D^+T(t) = AT(t)u = T(t)Au$.

Para concluir a prova desse item basta provarmos que para $t > 0$ a derivada a esquerda de $T(t)u$ existe e é igual a $T(t)Au$.

De fato, pois:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{T(t)u - T(t-h)u}{h} - T(t)Au \right] = \lim_{h \rightarrow 0} T(t-h) \left[\frac{T(h)u - u}{h} - Au \right] + \lim_{h \rightarrow 0} (T(t-h)Au - T(t)Au)$$

Note que os termos do lado direito se anulam, pois no primeiro termo $u \in D(A)$ e $\|T(t-h)\|$ é limitado em $0 \leq h \leq t$ e no segundo, segue do fato que o semigrupo é fortemente contínuo.

Com isso temos que

$$\frac{d^+}{dt}T(t)x = \frac{d^-}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax = \frac{d}{dt}T(t)x$$

O que conclui a prova do item c.

d) A prova desse item segue do Teorema Fundamental do Cálculo (Ver versão para espaços de Banach na Proposição 1.2.3 em [1]), integrando a expressão obtida em c). $\square$

Proposição 4.1.1. *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ em X , então A é fechado e densamente definido.*

Demonstração. **1. Densamente definido**

Para cada $u \in X$, defina $u_t = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)u ds$. Pelo item b) da proposição anterior $u_t \in D(A)$ para $t > 0$, e pelo item a) da mesma proposição,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^{0+t} T(s)u ds = T(0)u = u.$$

Portanto, $u_t \rightarrow u$ quando $t \rightarrow 0$, e com isso $\overline{D(A)} = X$, isto é, $D(A)$ é denso.

2. A é um operador linear fechado

Tome $u_n \in D(A)$ tal que $u_n \rightarrow u$ e $Au_n \rightarrow y$

Pela parte b) da proposição anterior

$$T(t)u_n - u_n = \left(\int_0^t T(\tau)Au_n d\tau \right) \quad t \geq 0$$

A continuidade da aplicação $u \rightarrow T(\tau)u$ nos diz que $T(\tau)Au_n \rightarrow T(\tau)y$ quando $n \rightarrow \infty$. Com isso, fazendo $n \rightarrow \infty$ na expressão acima, temos que

$$T(t)u - u = \int_0^t T(\tau)y d\tau$$

Pelo item a) da mesma proposição

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)u - u}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(\tau)y d\tau = T(0)y = y$$

Com isso $u \in D(A)$ e $A(u) = y$. Portanto, A é fechado. $\square$

Teorema 4.1.3. *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo fortemente contínuo num espaço de Banach X e sejam constantes $\omega \in \mathbb{R}$ e $M \geq 1$ tais que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad t \geq 0.$$

O gerador $(A, D(A))$ de $(T(t))_{t \geq 0}$ satisfaz as seguintes propriedades:

i) Se $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x ds$ existe $\forall x \in X$, então $\lambda \in \rho(A)$ e $R(\lambda, A) = R(\lambda)$.

ii) Se $\operatorname{Re} \lambda > \omega$, então $\lambda \in \rho(A)$, e o resolvente é dado pela integral da expressão (i).

iii) $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re} \lambda - \omega}$, para $\operatorname{Re} \lambda > \omega$.

Demonstração. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x ds$ existe $\forall x \in X$ então, para $x \in X$ e $h > 0$

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} R(\lambda)x &= \frac{T(h) - I}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda s} (T(s+h)x - T(s)x) ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s+h)x ds - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x ds \\ &= \frac{1}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda(t-h)} T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x ds \\ &= \frac{1}{h} e^{\lambda h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x ds - \frac{1}{h} e^{\lambda h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x ds \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt - \frac{1}{h} e^{\lambda h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} R(\lambda)x - \frac{1}{h} e^{\lambda h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x dt. \end{aligned}$$

Donde na terceira igualdade fizemos a mudança de variável $t = s + h$. Quando $h \rightarrow 0$ o lado direito da expressão converge para $\lambda R(\lambda)x - x$ (no segundo termo do lado direito usamos o Teorema 4.1.2, item a). Com isso, para todo $x \in X$ temos que $R(\lambda)x \in D(A)$ e

$$AR(\lambda) = \lambda R(\lambda) - I$$

ou seja,

$$(\lambda I - A)R(\lambda) = I \tag{4.22}$$

Por outro lado, para todo $x \in D(A)$ temos

$$\begin{aligned} R(\lambda)Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)Ax ds = \int_0^\infty e^{-\lambda s} AT(s)x ds \\ &= A \left(\int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x ds \right) = AR(\lambda)x \end{aligned}$$

Com isso, temos que :

$$R(\lambda)Ax = AR(\lambda)x \quad (4.23)$$

Onde usamos 4.1.2 (c) e, fato de A ser um operador fechado e a Proposição 1.1.3 . Então de (4.22) e (4.23)

$$R(\lambda)(\lambda I - A)x = x \text{ para } x \in D(A). \quad (4.24)$$

Logo, $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda, A)$

ii) Se $\operatorname{Re}(\lambda) > \omega$, então $R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x ds$ existe $\forall x$, pois é a integral de Laplace de uma função exponencialmente limitada, logo resultado segue do item (i)

iii) Como $\operatorname{Re} \lambda > \omega$, então vale que $R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)x ds$, por ii). Daí:

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)x ds \right\| &\leq M \int_0^t |e^{-\lambda s} e^{\omega s}| ds \|x\| \\ &\leq M \int_0^t e^{(\omega - \operatorname{Re}(\lambda))s} ds. \end{aligned}$$

Quando $t \rightarrow \infty$ o lado direito converge para $\frac{M}{\operatorname{Re}(\lambda) - \omega}$, com isso obtemos a desigualdade desejada.

□

4.2 SEMIGRUPOS ANALÍTICOS

A nossa intenção agora é considerar semigrupos cujo domínio do parâmetro t pode ser estendido ao plano complexo.

O conceito de semigrupo analítico envolve o conceito de função analítica, então lembremos a seguinte definição.

Definição 4.2.1. Seja X um espaço de Banach, Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ e $g : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow X$. Dizemos que g é uma função analítica se existir, para todo $z \in \Omega$, o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h}$$

Onde $h \rightarrow 0$ denota o limite em $\mathbb{C}$ quando h tende a origem, ou seja, pode ser interpretado como $|h| \rightarrow 0$.

Feito isso, estamos prontos para introduzir os conceitos que nos levarão a definir semigrupos analíticos.

Definição 4.2.2. Um operador linear fechado com domínio denso $D(A)$ em um espaço de Banach X é chamado *setorial* (de ângulo δ) se existe $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ tal que o setor

$$\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\delta} := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\} - \{0\}$$

está contido no conjunto resolvente $\rho(A)$ e, se para cada $\varepsilon \in (0, \delta)$, existe $M_\varepsilon \geq 0$ tal que

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|} \text{ para todo } 0 \neq \lambda \in \overline{\Sigma}_{\frac{\pi}{2}+\delta-\varepsilon} \quad (4.25)$$

Definição 4.2.3. Seja $(A, D(A))$ um operador setorial de ângulo δ . Defina $T(0) := I$ e o operador $T(z)$, para $z \in \Sigma_\delta$ por

$$T(z) := \frac{1}{2\pi} \int_\gamma e^{\mu z} R(\mu, A) d\mu, \quad (4.26)$$

onde γ é qualquer curva suave por partes em $\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\delta}$ indo desde $\infty e^{-i(\frac{\pi}{2}+\delta')}$ até $\infty e^{i(\frac{\pi}{2}+\delta')}$, para algum $\delta' \in (|\arg z|, \delta)$.

Proposição 4.2.1. *Seja $(A, D(A))$ um operador setorial de ângulo δ . Então para todo $z \in \Sigma_\delta$, as funções $T(z)$ são operadores lineares em X satisfazendo as seguintes propriedades*

i) $\|T(z)\|$ é uniformemente limitada para $z \in \Sigma_{\delta'}$, se $0 < \delta' < \delta$.

ii) A função $z \mapsto T(z)$ é analítica em Σ_δ .

iii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, para $z_1, z_2 \in \Sigma_\delta$.

iv) A função $z \mapsto T(z)$ é fortemente contínua em $\Sigma_{\delta'} \cup 0$, se $0 < \delta' < \delta$.

Demonstração. Vamos primeiro verificar que para $z \in \Sigma_{\delta'}$, com $\delta' \in (0, \delta)$ fixado, a integral em (4.26) converge uniformemente no espaço das transformações lineares de X em X com respeito a norma operador. Sendo o integrando uma função analítica em $\mu \in \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\delta'}$, a integral, se existir, pelo Teorema de Cauchy em 3.1.1, é independente da curva γ .

Dessa forma podemos escolher $\gamma = \gamma_r$ da seguinte forma.

$$\begin{aligned} \gamma_{r,1} : &= \{-\rho e^{-i(\frac{\pi}{2}+\delta-\varepsilon)} : -\infty \leq \rho \leq -r\} \\ \gamma_{r,2} : &= \{r e^{i\alpha} : -\left(\frac{\pi}{2} + \delta - \varepsilon\right) \leq \alpha \leq \left(\frac{\pi}{2} + \delta - \varepsilon\right)\} \\ \gamma_{r,3} : &= \{\rho e^{i(\frac{\pi}{2}+\delta-\varepsilon)} : r \leq \rho \leq \infty\} \end{aligned}$$

onde $\varepsilon := \frac{\delta-\delta'}{2} < \frac{\pi}{2}$ e $r = \frac{1}{|z|}$.

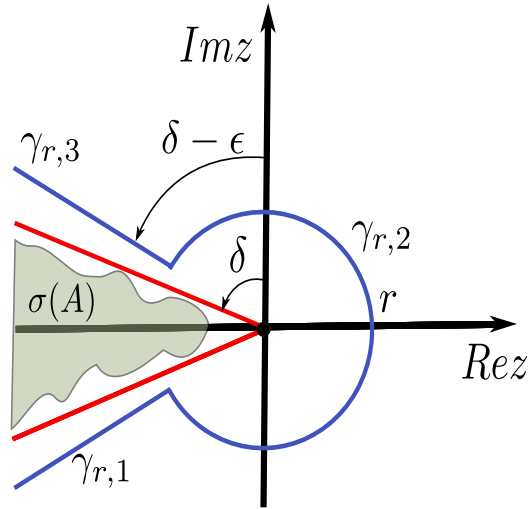


Figura 4.2: Traço de $\gamma = \gamma_r$, para $r = 1$

Então, para $\mu \in \gamma_{r,3}$ e $z \in \Sigma_{\delta'}$ temos que

$$\mu z = |\mu||z| [\cos(\arg\mu + \arg z) + i \sin(\arg\mu + \arg z)]$$

Note que, se $\mu \in \gamma_{r,3}$ então, $\arg\mu = \frac{\pi}{2} + \delta - \varepsilon$ e, como $z \in \Sigma_{\delta'}$, segue que $-\delta' < \arg z < \delta'$, donde

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - \varepsilon + \delta - \delta' &\leq \arg\mu + \arg z \leq \frac{\pi}{2} + \delta - \varepsilon + \delta' \\ \frac{\pi}{2} - \varepsilon + 2\varepsilon &\leq \arg\mu + \arg z \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon + \delta + \delta' \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} + \varepsilon &\leq \arg\mu + \arg z \leq +\frac{3\pi}{2} - \varepsilon \end{aligned}$$

Com isso, $\cos(\arg\mu + \arg z) \leq \cos(\frac{\pi}{2} + \varepsilon) = -\sin \varepsilon$. Assim, chamando $\theta = \arg\mu + \arg z$

$$\begin{aligned} |e^{\mu z}| &= |e^{|\mu||z| \cos(\arg\mu + \arg z) + i \sin(\arg\mu + \arg z)}| \\ &= |e^{|\mu||z| \cos \theta}| |e^{i|\mu||z| \sin \theta}| \\ &= e^{|\mu z| \cos \theta} \leq e^{-|\mu z| \sin \varepsilon}. \end{aligned}$$

A mesma afirmação vale para $\mu \in \gamma_{r,3}$ e $z \in \Sigma_{\delta'}$.

Logo, para todo $z \in \Sigma_{\delta'}$ e $\mu \in \gamma_{r,1} \cup \gamma_{r,3}$, sendo A um operador setorial,

$$\|e^{\mu z} R(\mu, A)\| \leq e^{-|\mu z| \sin \varepsilon} \frac{M_\varepsilon}{|\mu|} \quad (4.27)$$

Logo, para $z_1, z_2 \in \Sigma_{\delta'}$

$$\begin{aligned}
T(z_1)T(z_2) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma} \int_{\gamma'} e^{\mu z_1} e^{\lambda z_2} R(\mu, A) R(\lambda, A) d\lambda d\mu \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma} \int_{\gamma'} \frac{e^{\mu z_1} e^{\lambda z_2}}{\mu - \lambda} [R(\mu, A) - R(\lambda, A)] d\lambda d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \int_{\gamma'} \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{\mu z_1} e^{\lambda z_2}}{\mu - \lambda} R(\mu, A) d\lambda d\mu - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \int_{\gamma'} \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{\mu z_1} e^{\lambda z_2}}{\mu - \lambda} R(\lambda, A) d\lambda d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma} e^{\mu z_1} R(\mu, A) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{e^{\lambda z_2}}{\mu - \lambda} d\lambda \right) d\mu - \int_{\gamma'} e^{\lambda z_2} R(\lambda, A) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{\mu z_1}}{\mu - \lambda} d\mu \right) d\lambda \right)
\end{aligned}$$

Analise as integrais abaixo

$$a) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{e^{\lambda z_2}}{\mu - \lambda} d\lambda$$

e

$$b) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{\mu z_1}}{\mu - \lambda} d\mu$$

Para isso vamos fechar as curvas λ, λ' com círculos de raio crescente.

No entanto, antes de analisarmos isoladamente cada integral, mostremos que quando $R \rightarrow \infty$, temos que $\int_{\Gamma} \frac{e^{\mu z}}{\lambda - \mu} d\mu \rightarrow 0$. Aqui $z \in \Sigma_{\delta'}$ e Γ é parametrizada da seguinte forma:

$$\Gamma = \{Re^{i\varphi} : \frac{\pi}{2} + \delta \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} - \delta\}$$

De fato, sendo $z \in \Sigma_{\delta'}$ temos que $-\delta < -\delta' < \arg z = \theta < \delta' < \delta$.

Assim, se $\mu \in \Gamma$ e $z \in \Sigma_{\delta'}$, então $\mu z = |z||\mu|e^{i(\varphi+\theta)} = |z|Re^{i(\varphi+\theta)}$ e

$$|e^{\mu z}| = |e^{z[R[\cos(\varphi+\theta)+i\sin(\varphi+\theta)]}| = e^{R|z|\cos(\varphi+\theta)}$$

Como $\frac{\pi}{2} < \varphi + \theta < \frac{3\pi}{2}$, então $\cos(\varphi + \theta) < 0$. Por outro lado, note que quando $R \rightarrow \infty$ temos que $|\lambda - Re^{i\varphi}| \rightarrow \infty$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu z}}{\lambda - \mu} d\mu \right| &= \left| \int_{\frac{\pi}{2}+\delta}^{\frac{3\pi}{2}+\delta} \frac{e^{R|z|\cos(\varphi+\theta)}}{\lambda - Re^{i\varphi}} Ri^{i\varphi} d\varphi \right| \\
&\leq \int_{\frac{\pi}{2}+\delta}^{\frac{3\pi}{2}+\delta} \frac{e^{R|z|\cos(\varphi+\theta)}}{|\lambda - Re^{i\varphi}|} R d\varphi \\
&\leq \int_{\frac{\pi}{2}+\delta}^{\frac{3\pi}{2}+\delta} \frac{1}{|\lambda - Re^{i\varphi}|} \frac{R}{e^{-R|z|\cos(\varphi+\theta)}} d\varphi
\end{aligned}$$

que converge para 0 quando $R \rightarrow \infty$.

Analise a integral descrita em b). Note que a função $\mu \rightarrow \frac{e^{\mu z_1}}{\lambda - \mu}$ é analítica em γ , visto que $\mu \in \gamma$ e $\lambda \in \gamma'$, logo $\lambda - \mu \neq 0$.

Considerando a curva fechada $\Lambda = \gamma \cup \Gamma$, o Teorema de Cauchy nos diz que

$$0 = \int_{\Lambda} \frac{e^{\mu z_1}}{\lambda - \mu} d\mu = \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu z_1}}{\lambda - \mu} d\mu + \int_{\gamma} \frac{e^{\mu z_1}}{\lambda - \mu} d\mu$$

Logo,

$$\int_{\gamma} \frac{e^{\mu z_1}}{\lambda - \mu} d\mu = 0$$

Já na expressão (a), usando o fato de que γ está à esquerda de γ' e que então μ é um ponto interior à curva $\Lambda = \gamma' \cup \Gamma$, pelo Teorema 3.1.2

$$e^{\mu z_2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda} \frac{e^{\mu z_2}}{\lambda - \mu} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mu z_2}}{\lambda - \mu} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{e^{\mu z_2}}{\lambda - \mu} d\lambda$$

Logo,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{e^{\mu z_2}}{\lambda - \mu} d\lambda = e^{\mu z_2}$$

Com isso, temos que

$$T(z_1)T(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{\mu(z_1+z_2)} R(\mu, A) d\mu = T(z_1 + z_2)$$

para todo $z_1, z_2 \in \Sigma_{\delta'}$, o que prova iii).

A prova do item iv) encontra-se na página 98 de [2]. □

Note que se fizermos a restrição da aplicação definida em (4.2.3) a $t \in [0, \infty)$ temos, pela Proposição (4.2.1) que a aplicação $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ assim definida é um semigrupo fortemente contínuo. Para essa restrição temos o seguinte resultado.

Proposição 4.2.2. *O gerador infinitesimal do semigrupo fortemente contínuo definido em (4.26) é o operador setorial $(A, D(A))$.*

Demonstração. Seja $(B, D(B))$ o gerador de $(T(t))_{t \geq 0}$. É suficiente mostrar que

$$R(\lambda, A) = R(\lambda, B), \text{ para algum } \lambda.$$

Defina

$$\omega_0 := \omega_0(T) = \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \text{existe } M_{\omega} \geq 1 \text{ tal que } \|T(t)\| \leq M_{\omega} e^{\omega t} \text{ para todo } t \geq 0\}.$$

Em particular podemos tomar $\lambda = |\omega_0| + 2$. Pelo Teorema 4.2.3

$$R(\lambda, B)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \quad \forall x \in X.$$

Tomando $t_0 > 0$, escolhendo $\gamma = \gamma_1$ como na prova da Proposição 4.2.1 e usando o Teorema de Fubini teremos:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_0} e^{-\lambda t} T(t)x dt &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{t_0} e^{-\lambda t} \left(\int_\gamma e^{\mu t} R(\mu, A)x d\mu \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\int_0^{t_0} e^{(\mu-\lambda)t} dt \right) R(\mu, A)x d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{(\mu-\lambda)t_0} - 1}{\mu - \lambda} R(\mu, A)x d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{(\mu-\lambda)t_0}}{\mu - \lambda} R(\mu, A)x d\mu - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{R(\mu, A)x}{\mu - \lambda} d\mu \\ &= R(\lambda, A)x + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{e^{(\mu-\lambda)t_0}}{\mu - \lambda} R(\mu, A)x d\mu \end{aligned}$$

Onde foi usado a fórmula $\int_\gamma \frac{R(\mu, A)}{\mu - \lambda} x d\mu = -2\pi i R(\lambda, A)x$, que pode ser obtida usando a fórmula de Cauchy fechando γ com círculos de diâmetro convergindo para o infinito.

Como $\mu \in \gamma$ então $Re\mu \leq 1$. Com isso $Re(\mu - \lambda) = Re\mu - |\omega_0| - 2 \leq 1 - |\omega_0| - 2 \leq -1$ e $\varepsilon = \frac{\delta + \delta'}{2}$. Além disso, sendo A um operador setorial, então $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M_\varepsilon}{|\mu|}$, e com isso, obtemos que:

$$\left\| \int_\gamma \frac{e^{(\mu-\lambda)t_0}}{\mu - \lambda} R(\mu, A)x d\mu \right\| \leq e^{-t_0} \|x\| \int_\gamma \frac{M_\varepsilon}{|\mu - \lambda||\mu|}.$$

Portanto, quando $t_0 \rightarrow \infty$ a expressão acima vai a 0 e com isso chegamos que, para $\lambda = |\omega_0| + 2$,

$$R(\lambda, A) = R(\lambda, B)$$

□

Definição 4.2.4. Uma família de operadores $(T(z))_{z \in \Sigma_\delta \cup \{0\}}$ limitados é chamado de *semigrupo analítico* (de ângulo $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$), se

i) $T(0) = I$ e $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, para todo $z_1, z_2 \in \Sigma_\delta$.

ii) A função $z \rightarrow T(z)$ é analítica em Σ_δ .

iii) $\lim_{z \rightarrow 0} T(z)x = x$ para todo $x \in X$, $z \in \Sigma_{\delta'}$ e $0 < \delta' < \delta$.

Se além disso ocorre

iv) $\|T(z)\|$ é limitado em $\Sigma_{\delta'}$, para todo $0 < \delta' < \delta$, dizemos que $(T(z))_{z \in \Sigma_\delta \cup \{0\}}$ é um *semigrupo analítico limitado*.

Como consequência da Proposição anterior temos o seguinte resultado

Corolário 4.2.1. *Se $(A, D(A))$ é um operador setorial, então A é gera um semigrupo analítico, a saber, o semigrupo definido em 4.2.3.*

4.3 GRUPOS

Nessa seção apresentamos a noções C_0 -grupo sem muitos detalhes.

Definição 4.3.1. Uma família $(T(t))_{-\infty < t < \infty}$, de operadores lineares limitados em um espaço de Banach X é um C_0 -grupo de operadores limitados se satisfaz:

i) $T(0) = I$ (Onde I é o operador identidade em X).

ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall -\infty < t, s < \infty$.

iii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)(x) - x\|_X = 0 \quad \forall x \in X$.

Definição 4.3.2. O gerador infinitesimal A de um grupo $T(t)$ é definido por

$$D(A) = \{u \in X : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)u - u}{t} \text{ existe}\} \quad (4.28)$$

$$Au = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)u - u}{t}, \quad u \in D(A). \quad (4.29)$$

Note que, sendo $T(t)$ um C_0 -grupo de operadores limitados, segue da definição que para $t \geq 0$, $T(t)$ é um C_0 -semigrupo de operadores limitados com gerador infinitesimal A . Além disso, para $t \leq 0$, $S(t) = T(-t)$ é também um C_0 -semigrupo de operadores limitados com gerador $-A$. Assim, se $T(t)$ é um C_0 -grupo de operadores lineares em X , então A e $-A$ são geradores de C_0 -semigrupos que são denotados por $T_+(t)$ e $T_-(t)$, respectivamente. Reciprocamente, se A e $-A$ são geradores infinitesimais dos C_0 -semigrupos $T_+(t)$ e $T_-(t)$, então A é gerador infinitesimal de um C_0 -grupo $T(t)$ definido por:

$$T(t) = \begin{cases} T_+(t), & \text{se } t \geq 0 \\ T_-(t), & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

O Teorema abaixo pode ser encontrado em [2].

Teorema 4.3.1. *(Geração de semigrupos) Seja $(A, D(A))$ um operador linear em um espaço de Banach X e sejam $\omega \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$ constantes. Então as seguintes propriedades são equivalentes.*

a) $(A, D(A))$ gera um semigrupo fortemente contínuo satisfazendo

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad t \geq 0.$$

b) $(A, D(A))$ é fechado, densamente definido, e, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, com $\operatorname{Re} \lambda > \omega$, então $\lambda \in \rho(A)$ e

$$\|R(\lambda, A)^n\| < \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

O próximo resultado será de fundamental importância no próximo capítulo.

Corolário 4.3.1. *Seja A um gerador de um grupo fortemente contínuo. Então A^2 gera um semigrupo analítico de ângulo $\frac{\pi}{2}$.*

Demonstração. Vamos considerar o caso em que A gera um grupo limitado, isto é $\|T(t)\| \leq \overline{M}$.

Pela Proposição 4.2.2 basta mostrar que A^2 é um operador setorial de ângulo $\frac{\pi}{2}$.

Sendo A um gerador de um grupo limitado, então A e $-A$ são geradores de semigrupos fortemente contínuos limitados.

Seja $0 < \delta' < \frac{\pi}{2}$ e $\lambda \in \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\delta'}$, então existe uma raiz quadrada $re^{i\alpha}$ de λ com $r > 0$ e $|\alpha| < \frac{\frac{\pi}{2}+\delta'}{2} < \frac{\pi}{2}$

Como acontece a condição a) do Teorema 4.3.1 e $r > 0$, então vale a condição b) do mesmo, isto é, $re^{i\alpha} \in \rho(A)$ e $re^{i\alpha} \in \rho(-A)$. Com isso, temos $(\lambda - A^2) = (re^{i\alpha} - A)(re^{i\alpha} + A)$. Logo $\lambda \in \rho(A^2)$ e

$$R(\lambda, A^2) = R(re^{i\alpha}, A)R(re^{i\alpha}, -A).$$

Além disso, sendo A um gerador de um grupo limitado, pelo Teorema 4.2.3., existe $\overline{M} \geq 1$ tal que

$$\|R(\lambda, \pm A)\| \leq \frac{\overline{M}}{\operatorname{Re} \lambda}, \text{ para todo } \lambda \in \Sigma_{\frac{\pi}{2}}$$

e conseqüentemente

$$\|R(\lambda, A^2)\| \leq \frac{\overline{M}^2}{(r \cos \alpha)^2} \leq \frac{1}{r^2} \left(\frac{\overline{M}}{\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\delta'}{2}\right)} \right)^2 \leq \frac{M}{|\lambda|}.$$

para todo $\lambda \in \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\delta'}$, onde $M = \left(\frac{\overline{M}}{\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\delta'}{2}\right)} \right)^2$. Logo A^2 é um operador setorial. $\square$

5 RESULTADOS PRINCIPAIS

5.1 EQUIVALÊNCIA

Teorema 5.1.1. *Seja X um espaço de Banach e A um operador linear fechado em X . Suponha que $\Sigma_{\frac{\pi}{2}} \subset \rho(A^2)$. Para $f \in D(A)$, considere os dois problemas:*

$$\begin{cases} v'(t) = A^2v(t) + \frac{1}{\sqrt{\pi t}}Af & t > 0 \\ v(0) = f \end{cases} \quad (5.30)$$

e

$$\begin{cases} D_C^{1/2}u(t) = Au(t) & t > 0 \\ u(0) = f \end{cases} \quad (5.31)$$

Se $v(\cdot)$ é uma solução exponencialmente limitada de (5.30), então é também solução de (5.31). Reciprocamente, uma solução exponencialmente limitada $u(\cdot)$ de (5.31) é também solução de (5.30).

Demonstração. Seja u solução exponencialmente limitada de (5.31), digamos $\|u(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$, $\omega \geq 0$, então a transformada de Laplace de $u(t)$ existe para todo $\operatorname{Re} \lambda > \omega$.

Aplicando a transformada de Laplace na equação do problema (5.31), usando o Teorema 2.2.3 e a Proposição 1.1.3, temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{D_C^{\frac{1}{2}}u\}(\lambda) &= \mathcal{L}\{Au\}(\lambda) \\ \lambda^{\frac{1}{2}}\mathcal{L}\{u\}(\lambda) - u(0)\lambda^{-\frac{1}{2}} &= A\mathcal{L}\{u\}(\lambda) \\ \lambda^{\frac{1}{2}}\mathcal{L}\{u\}(\lambda) - f\lambda^{-\frac{1}{2}} &= A\mathcal{L}\{u\}(\lambda) \\ \left(\lambda^{\frac{1}{2}} - A\right)\mathcal{L}\{u\}(\lambda) &= \lambda^{-\frac{1}{2}}f \end{aligned}$$

Então, aplicando em ambos os lados o operador $\left(\lambda^{\frac{1}{2}} + A\right)$,

$$\begin{aligned} \left(\lambda^{\frac{1}{2}} + A\right)\left(\lambda^{\frac{1}{2}} - A\right)\mathcal{L}\{u\}(\lambda) &= \left(\lambda^{\frac{1}{2}} + A\right)\lambda^{-\frac{1}{2}}f \\ \lambda\mathcal{L}\{u\}(\lambda) - A^2\mathcal{L}\{u\}(\lambda) &= f + \lambda^{-\frac{1}{2}}Af \end{aligned}$$

Usando mais uma vez a Proposição 1.1.3 e o Lema 2.2.3, temos

$$\begin{aligned}
\lambda \mathcal{L}\{u\}(\lambda) - f &= \lambda^{-\frac{1}{2}} Af + A^2 \mathcal{L}\{u\}(\lambda) \\
\mathcal{L}\{u'\}(\lambda) &= \lambda^{-\frac{1}{2}} Af + A^2 \mathcal{L}\{u\}(\lambda) \\
\mathcal{L}\{u'\}(\lambda) &= \mathcal{L}\{A^2 u\}(\lambda) + \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right\}(\lambda) Af \\
\mathcal{L}\{u'\}(\lambda) &= \mathcal{L}\left\{A^2 u + \frac{1}{\sqrt{\pi}} Af\right\}(\lambda)
\end{aligned}$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa teremos que:

$$u'(\lambda) = A^2 u(\lambda) + \frac{1}{\sqrt{\pi t}} Af$$

Por outro lado, seja $v(t)$ solução exponencialmente limitada de (5.30). Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados e usando fato de que $\Sigma_{\frac{\pi}{2}} \subset \rho(A^2)$, temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{v'\}(\lambda) &= A^2 \mathcal{L}\{v\}(\lambda) + \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}} Af\right\}(\lambda) \\
\lambda \mathcal{L}\{v\}(\lambda) - f &= A^2 \mathcal{L}\{v\}(\lambda) + \lambda^{-\frac{1}{2}} Af \\
(\lambda - A^2) \mathcal{L}\{v\}(\lambda) &= f + \lambda^{-\frac{1}{2}} Af \\
\mathcal{L}\{v\}(\lambda) &= (\lambda - A^2)^{-1} (I + \lambda^{-\frac{1}{2}} A) f \\
(\lambda^{\frac{1}{2}} - A) \mathcal{L}\{v\}(\lambda) &= (\lambda^{\frac{1}{2}} - A) (\lambda - A^2)^{-1} (I + \lambda^{-\frac{1}{2}} A) f \\
(\lambda^{\frac{1}{2}} - A) \mathcal{L}\{v\}(\lambda) &= \lambda^{\frac{1}{2}} (\lambda - A^2)^{-1} f + \lambda^{\frac{1}{2}} (\lambda - A^2)^{-1} \lambda^{-\frac{1}{2}} Af - A (\lambda - A^2)^{-1} f - A (\lambda - A^2)^{-1} \lambda^{-\frac{1}{2}} A f \\
(\lambda^{\frac{1}{2}} - A) \mathcal{L}\{v\}(\lambda) &= \lambda^{\frac{1}{2}} (\lambda - A^2)^{-1} f - \lambda^{-\frac{1}{2}} A^2 (\lambda - A^2)^{-1} f \\
(\lambda^{\frac{1}{2}} - A) \mathcal{L}\{v\}(\lambda) &= \lambda^{-\frac{1}{2}} (\lambda - A^2)^{-1} (\lambda - A^2) f \\
(\lambda^{\frac{1}{2}} - A) \mathcal{L}\{v\}(\lambda) &= \lambda^{-\frac{1}{2}} f \\
\lambda^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}\{v\}(\lambda) - \lambda^{-\frac{1}{2}} f &= A \mathcal{L}\{v\}(\lambda)
\end{aligned}$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa e usando o Teorema 2.2.3, chegamos que

$$D_C^{\frac{1}{2}} v(t) = Av(t)$$

Note que usamos o fato de que os operadores A e $(\lambda - A^2)^{-1}$ comutam em $D(A)$. De fato, chamando $A(\lambda - A^2)^{-1} = T$, temos

$$\begin{aligned}
(\lambda - A^2)T &= (\lambda - A^2)A(\lambda - A^2)^{-1} \\
&= A(\lambda - A^2)(\lambda - A^2)^{-1} \\
&= A \\
&= A(\lambda - A^2)^{-1}(\lambda - A^2) \\
&= T(\lambda - A^2)
\end{aligned}$$

Logo, o operador T comuta com o operador $(\lambda - A^2)$, usando esse fato temos

$$\begin{aligned}
A(\lambda - A^2)^{-1} &= T \\
A &= T(\lambda - A^2) \\
A &= (\lambda - A^2)T \\
(\lambda - A^2)^{-1}A &= T
\end{aligned}$$

Isto é, os operadores A e $(\lambda - A^2)^{-1}$ Comutam em $D(A)$.

□

Agora, suponha que A gera um grupo fortemente contínuo $(U(t))$ em X , então pelo Corolário 4.3.1, $B = A^2$ gera um semigrupo analítico fortemente contínuo $(T(t))$. Baseado nessas considerações temos o seguinte resultado.

Teorema 5.1.2. *A equação*

$$v(t) = T(t)f + \int_0^t T(t-s)Af \frac{ds}{\sqrt{\pi s}} \quad t > 0 \quad (5.32)$$

é solução de (5.30)

Demonstração. Primeiro verifiquemos que $v(t)$ é exponencialmente limitada. Com efeito, do Teorema 4.1.1 temos que $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, onde $M > 0$ e $\omega \geq 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|v(t)\| &\leq M\|f\|e^{\omega t} + \int_0^t \|T(t-s)\| \|Af\| \frac{ds}{\sqrt{\pi s}} \\
&\leq M\|f\|e^{\omega t} + \int_0^t Me^{\omega(t-s)} \|Af\| \frac{ds}{\sqrt{\pi s}} \\
&\leq M\|f\|e^{\omega t} + Me^{\omega t} \|Af\| \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{\pi s}} \\
&\leq M\|f\|e^{\omega t} + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} Me^{\omega t} \|Af\| \\
&\leq \overline{M}e^{\bar{\omega}t}
\end{aligned}$$

Observe que,

$$v(t) = T(t)f + \left(T * \frac{1}{\sqrt{\pi t}}Af\right)(t)$$

Aplicando a transformada de Laplace, e considerando

$$S(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) dt, \quad \operatorname{Re} \lambda > \omega,$$

temos

$$\mathcal{L}\{v\}(\lambda) = S(\lambda)f + S(\lambda)\lambda^{-\frac{1}{2}}Af \quad (5.33)$$

Mas, pelo Teorema 4.23

$$S(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) dt = (\lambda - A^2)^{-1} \quad (5.34)$$

Logo, de 5.33 e 5.34, segue

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{v\}(\lambda) &= (\lambda - A^2)^{-1}f + (\lambda - A^2)^{-1}\lambda^{-\frac{1}{2}}Af \\ (\lambda - A^2)\mathcal{L}\{v\}(\lambda) &= f + \lambda^{-\frac{1}{2}}Af \\ \lambda\mathcal{L}\{v\}(\lambda) - f &= A^2\mathcal{L}\{v\}(\lambda) + \lambda^{-\frac{1}{2}}Af \end{aligned}$$

Tomando a transformada de Laplace inversa,

$$v'(t) = A^2v(t) + \frac{1}{\sqrt{\pi t}}Af$$

□

5.2 UMA APLICAÇÃO DO CÁLCULO FRACIONÁRIO NA FÍSICA

Consideremos o problema de difusão viscosa unidimensional, dependente do tempo, de um fluido semifinito delimitado por uma placa plana. Assumindo constante e uniforme a viscosidade e desprezando os efeitos da inércia, a equação do momento é dada por

$$\frac{\partial F(y, t)}{\partial t} - v \frac{\partial^2 F(y, t)}{\partial y^2} = 0 \quad (5.35)$$

Onde $F(y, t)$ é, por exemplo, a velocidade do fluido no caso em que a pressão é desprezada, t é o tempo, v é a viscosidade, e y é a coordenada normal a placa e com origem no plano.

Assuma que o fluido esteja inicialmente no estado de equilíbrio, de modo que $F(y, t < 0) = F_0$, onde F_0 é uma constante. Além disso, a condição longe da placa permanece $F(\infty, t) = F_0$. A fronteira do fluido de interface com o plano é exposta a uma excitação dependente do tempo $F(0, t) = F^+(t)$, causado pelo movimento da placa. Fazendo a mudança de variáveis $\xi = yv^{-\frac{1}{2}}$ e $G(\xi, t) = F(y, t) - F_0$, a equação (5.35) se transforma em

$$\frac{\partial G(\xi, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 G(\xi, t)}{\partial \xi^2} = 0 \quad (5.36)$$

Assim, as condições de fronteiras agora são: $G(\xi, 0) = 0$, $G(\infty, t) = 0$ e $G(0, t) = F^+(t) - F_0 = G^+(t)$. Tomando a transformada de Laplace em (5.36) com relação á variável t , chegamos

$$\frac{\partial^2 G^*(\xi, s)}{\partial \xi^2} - sG^*(\xi, s) = 0 \quad (5.37)$$

Onde $\mathcal{L}\{G\}(s) = G^*(\xi, s)$. Além disso, como $G(\infty, t) = 0$, temos $G^*(\infty, s) = 0$. A solução da equação (5.37) é dada por

$$G^*(\xi, s) = C_1(s)e^{\xi s^{\frac{1}{2}}} + C_2(s)e^{-\xi s^{\frac{1}{2}}} \quad (5.38)$$

Onde C_1 e C_2 são funções arbitrárias de s . Como $G^*(\infty, s) = 0$, segue que $C_1(s) = 0$ e a equação (5.38) se transforma em

$$G^*(\xi, s) = C_2(s)e^{-\xi s^{\frac{1}{2}}} \quad (5.39)$$

Diferenciando (5.39) temos que

$$\frac{\partial G^*(\xi, s)}{\partial \xi} = \sqrt{s}C_2(s)e^{-\xi \sqrt{s}} \quad (5.40)$$

Juntando (5.39) e (5.40) temos

$$\frac{\partial G^*(\xi, s)}{\partial \xi} = \sqrt{s}G^*(\xi, s) \quad (5.41)$$

Usando o fato de que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\partial G^*(\xi, s)}{\partial \xi}\right\} = \frac{\partial}{\partial \xi}\mathcal{L}^{-1}\{G^*(\xi, s)\}$$

e o Lema 2.2.2, concluímos

$$\mathcal{L}\{D^{\frac{1}{2}}G\}(\xi, s) = s^{-\frac{1}{2}}\mathcal{L}\{G\}(\xi, s) = s^{-\frac{1}{2}}G^*(\xi, s), \quad (5.42)$$

válida pois $G(\xi, 0) = 0$. Assim

$$\frac{\partial G(\xi, t)}{\partial \xi} = -D^{\frac{1}{2}}G(\xi, t) \quad (5.43)$$

Voltando a váriável original, chegamos que

$$\sqrt{v} \frac{\partial}{\partial y} F(y, t) = -D^{\frac{1}{2}} [F(y, t) - F_0]$$

reescrevendo

$$\frac{\partial}{\partial y} F(y, t) = -v^{-\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} F(y, t) - (\pi t v)^{-\frac{1}{2}} F_0 \quad (5.44)$$

Observe que (5.35) e (5.44) podem ser escritos como

$$\frac{\partial}{\partial y} F(y, t) = A_y^2 F(y, t) \quad (5.45)$$

$$D^{\frac{1}{2}} F(y, t) = (\pi t)^{\frac{1}{2}} F_0 + A_y F(y, t) \quad (5.46)$$

respectivamente, onde $A_y := -\sqrt{v} \frac{\partial}{\partial y}$ é o gerador do grupo de translação abordado no exemplo (4.1.1). Observe ainda que $D^{\frac{1}{2}} [g(t) - g(0)] = D_C^{\frac{1}{2}} g(t)$ e que, além disso, $D^{\frac{1}{2}}(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$. Portanto

$$D^{\frac{1}{2}} F(y, t) - \frac{1}{\sqrt{\pi t}} F(y, 0) = D_C^{\frac{1}{2}} F(y, t) \quad (5.47)$$

Onde $F(y, 0) = F_0$.

Como $A_y F_0 = 0$, a equação (5.46) se transforma em

$$D_C^{\frac{1}{2}} F(y, t) = A_y F(y, t) \quad (5.48)$$

Pelo Corolário 4.3.1, $A_y^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ gera um semigrupo analítico $T(t)$ de ângulo $\frac{\pi}{2}$ e, pelo Teorema 5.1.2, a equação

$$v(t) = T(t) F_0 + \int_0^t T(t-s) A_y F_0 \frac{ds}{\sqrt{\pi t}} \quad (5.49)$$

é uma solução exponencialmente limitada de (5.36). Observe que o mesmo resultado foi estudado na dissertação [6] para o caso em que $\frac{\partial^2}{\partial y^2} \in L^2(\mathbb{R})$.

Referências Bibliográficas

- [1] ARENDT, W. et al. *Vector-Valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*. 2.ed. Berlin: Springer Basel AG, 2011.
- [2] ENGEL, K.; NAGEL, R. *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*. New York: Springer-Verlag, 2000.
- [3] FOLLAND, G. *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications*. 2.ed. John Wiley e Sons, Canada, 1999.
- [4] ÍÓRIO, R.; ÍÓRIO, V. *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*. Coleção Projeto Euclides, 1988.
- [5] KEYANTUO, V.; LIZAMA, C. *On a connection between powers of operators and fractional Cauchy problems*. J. Evol. Equ. Appl. 12 (2012), 245–265.
- [6] SOUZA, D, A. *Equações Integro-Diferenciais de Ordem Fracionária*. 2013. 74f. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Instituto de Matemática, UFAL, Maceió, AL, 2013.
- [7] CAMARGO, R, F. *Cálculo Fracionário e Aplicações*. 2009. 141f. Tese(Doutorado em Matemática)- Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Campinas, SP, 2009.
- [8] KULISH, V,V; LAGE. *Application of fractional calculus to fluid mechanics*. Jornal of fluids Engineering. 124(2002), 803-808.
- [9] GONDAR, J, L. CIPOLATTI, ROLCI. *Iniciação a física-matemática: Modelagem de processos e métodos de solução*. Rio de Janeiro: IMPA, 2a. edição (Coleção Matemática e Aplicações).
- [10] VIEIRA, E. *Funções Holomorfas de uma variável*. SBM, 2011.

- [11] PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [12] SILVA, F. J. *Aplicações de semigrupos em sistemas de reação-difusão e a existência de ondas viajantes*. 2010. 117f. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Instituto de Matemática, e Estatística, USP, São Paulo, 2010.
- [13] Rodriguez, J. P. A *Existência e Unicidade das Equações Diferenciais Fracionárias*. 2013. 101f. Dissertação (Mestrado em Matemática)-Instituto de Matemática, e Estatística, UFG, Goiania, 2013.