

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS-UFAL  
CAMPUS A.C.SIMÕES  
INSTITUTO DE FÍSICA**



**UNIVERSIDADE FEDERAL  
DE ALAGOAS**

**CAMINHADAS QUÂNTICAS EM TEMPO DISCRETO SOB INFLUÊNCIA DE RUÍDO  
CORRELACIONADO**

**NICOLAS CEZAR DO AMARAL LIMA TENORIO**

**MACEIÓ-AL  
2023**

Nicolas Cezar do Amaral Lima Tenorio

Caminhadas quânticas em tempo discreto sob influência de ruído correlacionado

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Universidade Federal de Alagoas – UFAL, *Campus*  
de A.C.Simões, como pré-requisito para a obtenção  
do grau de Bacharel em Física

Orientador: Prof. Wandearley da Silva Dias

Coorientador: Prof. Anderson Buarque

Maceió-Al

2023

**Catálogo na Fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

T312c

Tenorio, Nicolas Cezar do Amaral Lima.

Caminhadas quânticas em tempo discreto sob influência de ruído correlacionado / Nicolas Cezar do Amaral Lima Tenorio. – 2023.  
44 f. : il.

Orientador: Wandearley da Silva Dias.

Co-orientador: Anderson Buarque.

Monografia (Trabalho de conclusão de curso em física : bacharelado) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2023.

Bibliografia: f. 42-44.

1. Ruído. 2. Desordem. 3. Correlação (Estatística). 4. Superdifusivo. I.  
Título.

CDU: 531.3-46

*In memoriam Chanel*

## **AGRADECIMENTOS**

Gostaria de agradecer primeiramente a minha mãe Alina, meus avós Dona Georgina e Sr. Bezerra, meu irmão Caio, pelo suporte em toda a minha vida, dentro e fora de casa. Agradeço ao meu pai Cezar, pelos ensinamentos que me foram muito importantes durante a minha caminhada, assim como ao meu irmão Hugo e a minha cunhada Pilar, por estar presente. A minha namorada Dani, muito obrigado pelo apoio, pelo companheirismo e paciência, sua ajuda me foi crucial nesse período final do curso, muito obrigado. Aos meus amigos de infância Flávio, João Lucas, Davi, Paulo, Emídio, Gabriel e Giulia, Vini, obrigado por fazer parte do meu crescimento fora da universidade e por estar comigo em momentos difíceis. Aos meus amigos da UFAL Wandearley(também orientador), Luciano, Denilson, Mari, Fred, Buarque, Matheus, Lavínia, João Simão, Ronald, Jhonatas obrigado por estar presente nessa trajetória árdua, estando presente nos cafezinhos, nos desabafos e nas conquistas que só entende quem cursa física.

## RESUMO

Caminhadas quânticas em uma rede têm sido apontados como uma plataforma poderosa para o desenvolvimento de algoritmos quânticos, oferecendo um quadro versátil e intuitivo para a execução de qualquer cálculo quântico. Além disso, as caminhadas quânticas têm se mostrado testes ideais para investigar e explorar sistemas quânticos. Consequentemente, o design e o controle de processos quânticos para dinâmicas de longo prazo representam um desafio fundamental que exige uma compreensão aprofundada. A presença de ruídos quânticos representa um obstáculo significativo para melhorar o desempenho da computação quântica, pois podem perturbar um elemento crucial: o frágil estado quântico dos qubits. Estudos anteriores demonstraram que o ruído estocástico pode induzir a localização do caminhante ou o comportamento difusivo, dependendo se o ruído é espacial ou temporal por natureza. Aqui, estudamos como as caminhadas quânticas discretas se comportam sob ruídos correlacionados de curto alcance com uma dependência temporal. Ao considerar o ruído como uma fonte de inhomogeneidade nos portões quânticos, introduzimos uma relaxação primitiva na suposição de ruído estocástico não correlacionado: correlações binárias que se manifestam na distribuição aleatória. As propriedades de transporte para regimes de ruído temporal foi examinada, levando em consideração diferentes portões quânticos. Para inhomogeneidades temporais, mostramos que as correlações de ruído levam os passeios quânticos para o regime superdifusivo. Nesse cenário, observa-se um desempenho interessante, no qual o expoente se modifica para o regime difusivo exibido quando o ruído é aleatório e não correlacionado. No entanto, os resultados indicam que alguns portões quânticos são insensíveis às correlações. Os resultados e discussões nos ajudam a compreender o mecanismo subjacente as caminhadas quânticas superdifusivas, incluindo aqueles com inhomogeneidades aperiódicas determinísticas.

**Palavras-chave:** Ruído, desordem, correlação, superdifusividade.

## ABSTRACT

Quantum walks on a lattice have been indicated as a powerful platform for the development of quantum algorithms, offering a versatile and intuitive framework for executing any quantum computations. Furthermore, quantum walks have been shown ideal testbeds for investigating and exploring quantum systems. Consequently, the design and control of quantum processes for long-time dynamics represent a fundamental challenge that demands a thorough comprehension. The presence of quantum noises poses a significant obstacle to enhancing the performance of quantum computing, as they can disrupt a crucial element: the fragile quantum state of qubits. Prior studies have demonstrated that stochastic noise can induce either walker localization or diffusive behavior, depending on whether the noise is spatial or temporal in nature. Here, we study how discrete-time quantum walks behave under short-range correlated noise. By considering noise as a source of inhomogeneity of quantum gates, we introduce a primitive relaxation in the uncorrelated stochastic noise assumption: binary pair correlations manifesting in the random distribution. The transport properties for both spatial and temporal noise regimes were examined, taking into account different quantum gates. For spatial inhomogeneities, we show noise correlations driving quantum walks from the well-known exponentially localized regime (stochastic and uncorrelated noise) to superdiffusive spreading. This scenario displays an interesting performance, in which the superdiffusive exponent is almost invariant to the inhomogeneity degree. Both the time-asymptotic regime and the finite-size scaling unveil an emergent superdiffusive behavior also for quantum walks undergoing temporal noise correlation, replacing the diffusive regime exhibited when noise is random and uncorrelated. However, results report some quantum gates insensitive to correlations, contrasting with the spatial noise scenario. Outcomes and discussions help us understand the underlying mechanism behind superdiffusive quantum walks, including those with deterministic aperiodic inhomogeneities.

**Keywords:** Noise, disorder, correlation, superdiffusivity.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	– Simulação de uma CCA unidimensional . . . . .	16
Figura 2	– Probabilidade $P(n)$ de encontrar o caminhante na posição $n$ após $10^3$ passos com $p = q = 1/2$ . Curva obtida através de uma média de $10^5$ caminhantes. No gráfico pequeno, temos a dispersão em função do tempo. . . . .	18
Figura 3	– Esfera de Bloch . . . . .	20
Figura 4	– Distribuição de probabilidade para uma caminhada quântica em tempo discreto realizada com o operador porta quântica Hadamard para 100 passos com a condição inicial $ \psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 0\rangle + i 1\rangle) \otimes  0\rangle_p$ . No gráfico menor, temos a evolução temporal do desvio padrão. . . . .	22
Figura 5	– Representação da diferença de distribuição de probabilidades para (a) condição inicial simétrica, dada por $ \psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 0\rangle + i 1\rangle) \otimes  0\rangle_p$ e (b) condição inicial assimétrica, dada por $ \psi(0)\rangle =  0\rangle \otimes  0\rangle_p$ . . . . .	23
Figura 6	– Representações experimentais de uma caminhada quântica (a) em um <i>loop</i> fibra óptica e (b) com a emissão de fótons. . . . .	24
Figura 7	– Representação da aplicação de um ruído flutuante na cadeia unidimensional. . . . .	26
Figura 8	– Densidade de probabilidade de uma Caminhada Quântica Discreta (CQD). A figura (a) apresenta o resultado experimental obtido para 11 passos, conforme documentado em (SCHREIBER et al., 2011). Na figura (b), observamos a densidade de probabilidade no gráfico principal, juntamente com a dispersão no gráfico secundário. Essa análise leva em consideração diferentes ângulos, todos iniciando a partir de uma condição inicial simétrica, para $10^4$ passos. . . . .	27
Figura 9	– Representação da aplicação de uma ruído flutuante na cadeia unidimensional. . . . .	28
Figura 10	– Densidade de probabilidade de uma Caminhada Quântica Discreta (CQD). A figura (a) apresenta o resultado experimental obtido para 11 passos, conforme documentado em (SCHREIBER et al., 2011). Na figura (b), observamos a densidade de probabilidade no gráfico principal, juntamente com a dispersão no gráfico secundário. Essa análise leva em consideração diferentes ângulos, todos iniciando a partir de uma condição inicial simétrica, para $10^4$ passos. . . . .	29
Figura 11	– Representação da aplicação de uma ruído flutuante na cadeia unidimensional. . . . .	30
Figura 12	– Gráfico da densidade de probabilidade de uma caminhada quântica discreta, com a adição do ruído flutuante. Foi utilizada a condição inicial simétrica, evoluindo o sistema para $10^4$ passos. Foi fixado o ângulo $\theta_1 = \pi/4$ e plotado com (a) $\theta_2 = \pi/6$ , (b) $\theta_2 = \pi/3$ e (c) $\theta_2 = 4\pi/9$ . . . . .	30
Figura 13	– Representação das sequências abordadas em (GULLO et al., 2017) . . . . .	31
Figura 14	– Gráficos do expoente $\alpha$ da dispersão ( $\sigma \propto t^\alpha$ ) em função da variação do ângulo $\theta_2$ . Foi fixado $\theta_1 = \pi/4$ . A linha tracejada representa a referência para o caso clássico, em que $\alpha = 0.5$ . . . . .	32

Figura 15 – Gráfico do expoente $\alpha$ da dispersão ( $\sigma \propto t^\alpha$ ) em função de $\theta_2$ , com $\theta_1 = \pi/4$ . A linha tracejada representa a referência para o caso clássico, em que $\alpha = 0.5$ .	34
Figura 16 – Representação do ruído (a) dinâmico descorrelacionado e (b) dinâmico com a adição da correlação tipo dímero temporal. . . . .	35
Figura 17 – Gráficos da densidade de probabilidade, comparando o ruído dinâmico sem e com a adição de correlação, sendo as curvas vermelha e laranja, respectivamente. Evolução temporal de 10 amostras com a condição inicial simétrica, para $10^4$ passos. Foi fixado o valor do ângulo $\theta_2 = \pi/4$ e variado o ângulo $\theta_1$ para (a) $\pi/6$ , (b) $4\pi/15$ , (c) $\pi/3$ e (d) $4\pi/9$ . . . . .	37
Figura 18 – Gráfico da dispersão em função do tempo, sendo fixado $\theta_2 = \pi/4$ , para os casos com ruído dinâmico com e sem correlação. Na figura (a) temos $\theta_1 = 4\pi/15$ e (b) com $\theta_1 = \pi/3$ . A curva cinza tracejada serve como referência de um caso balístico. . . . .	38
Figura 19 – Gráfico do expoente $\alpha$ representando a velocidade de crescimento do pacote de onda em função do ângulo $\theta_1$ . Para cada configuração de ângulos, foi gerada uma caminhada de $10^5$ passos, com uma média de 10 amostras. Foram fixados em (a) $\theta_2 = \pi/4$ , em (b) $\theta_2 = 4\pi/15$ e (c) $\theta_2 = \pi/3$ . . . . .	39
Figura 20 – Gráfico do expoente $\alpha$ em função de $\theta_1$ e $\theta_2$ . Neste gráfico, as cores representam os regimes da caminhada quântica. A cor preta representa um regime difusivo, cores intermediárias nos tons de amarelo e laranja representam regimes superdifusivos, e a cor branca representa o regime balístico. . . . .	40

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . . . . .</b>	<b>16</b>
2.1	Caminhada Clássica Aleatória . . . . .	16
2.2	Caminhada quântica em tempo discreto . . . . .	19
2.3	Caminhada quântica desordenada . . . . .	26
2.3.1	Ruído estático . . . . .	26
2.3.2	Ruído dinâmico . . . . .	28
2.3.3	Ruído flutuante . . . . .	30
2.4	Correlações . . . . .	31
2.4.1	Ruído estático correlacionado . . . . .	31
2.4.2	Ruído dinâmico correlacionado . . . . .	33
<b>3</b>	<b>CORRELAÇÃO DO TIPO DÍMERO ALEATÓRIO TEMPORAL . . .</b>	<b>35</b>
3.1	Modelo . . . . .	35
3.1.1	Resultados . . . . .	37
<b>4</b>	<b>CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>41</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>42</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Nos dias de hoje é difícil imaginar um mundo sem a presença onipresente do computador. Desde a revolução tecnológica no século XX, o computador tornou-se um pilar fundamental em praticamente todos os aspectos de nossa vida cotidiana. No entanto, a evolução da computação não se limitou à sua forma clássica. No início da década de 1980, o físico americano Paul Benioff (BENIOFF, 1980; BENIOFF, 1982) propôs a ideia de um "*Quantum mechanical computer*" - um computador que opera respeitando os princípios da mecânica quântica. A partir da sugestão, Richard Feynman em seus trabalhos (FEYNMAN, 1982; FEYNMAN, 1985) disseminou a concepção de computadores quânticos ganhou proeminência global.

Atualmente, os computadores quânticos, ainda em seu estágio embrionário, apresentam a perspectiva de realização de tarefas de forma exponencialmente mais rápidas que seus equivalentes clássicos (CHILDS et al., 2003). Assim, eles são vistos com grande potencial para resolução de problemas de alta complexidade, que seriam praticamente impossíveis para um computador clássico. Empresas como Microsoft, IBM, Google, Intel, Amazon Web Services, Alibaba e outras estão investindo significativamente em pesquisas e desenvolvimento de computadores quânticos cada vez mais poderosos.

A computação quântica e as caminhadas quânticas estão intimamente ligadas, explorando princípios da mecânica quântica para realizar tarefas complexas. Em linhas gerais, a computação quântica visa processar informações usando qubits e algoritmos quânticos, enquanto as caminhadas quânticas se concentram na evolução de sistemas quânticos em redes ou grafos. Nesta perspectiva, as caminhadas quânticas podem ser utilizadas na construção de algoritmos de busca, otimização e simulação. Essa conexão entre caminhadas quânticas e computação quântica representa uma área de pesquisa promissora em busca de soluções mais eficazes para uma ampla gama de problemas computacionais.

Em um cenário ideal, o processo de evolução temporal de uma caminhada quântica ocorre de forma ininterrupta, sem impedimentos externos. No entanto, quando nos deparamos com um contexto real ou experimental, uma série de minúcias passam a influenciar a execução da caminhada quântica. Isso se deve à notável sensibilidade dos sistemas quânticos a influências externas de natureza mecânica, elétrica, térmica e diversas outras. Sendo assim, se faz de grande importância a caracterização de uma evolução temporal com a adição de um perturbações ao sistema, simulando uma interferência externa. Essas perturbações podem apresentar uma dependência temporal, também conhecida como um ruído dinâmico, ou uma dependência com

relação aos nós da rede. Este último caso é tratado como ruído estático.

O comportamento dinâmico de caminhadas quânticas na presença de desordem ou ruído tem sido alvo de vários estudos nos últimos tempos. Em linhas gerais, o ruído dinâmico completamente aleatório faz com que as caminhadas quânticas saiam do regime balístico para um regime difusivo. Alguns estudos têm investigado influências de ruídos aperiódicos, mostrando que o regime superdifusivo pode ser alcançado (GULLO et al., 2017). Aqui, relataremos um estudo que aborda um cenário intermediário entre as sequências completamente aleatórias e sequências aperiódicas determinísticas. Consideramos um ruído com correlação de curto alcance influenciando a dinâmica da nossa caminhada quântica. Porém, antes de relatar o nosso modelo e resultados, abordaremos aspectos fundamentais e de revisão bibliográfica sobre caminhadas quânticas. Com esse conteúdo, apresentaremos mais detalhadamente a motivação do nosso trabalho. Estes aspectos se encontram no próximo capítulo. A descrição do nosso estudo, desde o modelo aos resultados, são apresentados no capítulo 3 desta dissertação. No capítulo 4 apresentaremos nossas conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

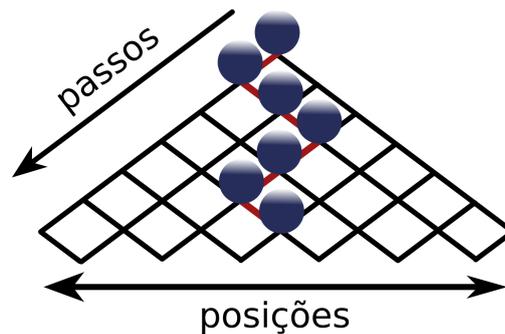
## 2 Fundamentação Teórica

### 2.1 CAMINHADA CLÁSSICA ALEATÓRIA

Em 1905, Rayleigh e Pearson (RAYLEIGH, 1905; PEARSON, 1905) realizaram estudos acerca da estatística e na distribuição de variáveis aleatórias, considerando uma partícula inicialmente em uma determinada posição, e que a mesma pode mover-se aleatoriamente para qualquer um dos lados, a cada passo de tempo, sendo assim dado o nome de *random walk*. Anos mais tarde, o matemático Paul Pierre Lévy (LÉVY, 1954) estudou e formulou uma teoria que envolve processos estocásticos, processos cujo o estado é determinado através de eventos aleatórios e que ao longo dos anos foi visto que tais processos estocásticos aparecem em diversos sistemas físicos, como em no processo de uma difusão gasosa, processos biológicos, entre outros (CHANDRASEKHAR, 1943).

Sendo assim, a caminhada clássica aleatória (CCA), também conhecida como "movimento browniano" ou "caminhar do bêbado" é um modelo estatístico que estuda uma partícula que se move aleatoriamente a cada tempo. No caso unidimensional, representado graficamente na figura 1, podemos imaginar uma partícula estando em uma certa posição inicial, e que vai haver um sorteio para que a partícula se mova para a direita, com probabilidade  $p$ , ou para esquerda com uma probabilidade  $q = 1 - p$ .

Figura 1 – Simulação de uma CCA unidimensional



Fonte: Autor

Essa dinâmica aleatória pode ser interpretada como um lance de uma moeda a cada tempo, de modo que o caminhante se moverá dependendo do resultado da moeda. O passo dado tem um comprimento  $l$  que nesse caso vamos considerar  $l = 1$ . Após  $N$  passos, o caminhante aleatório terá probabilidade de ser encontrado entre as posições  $-N$  e  $+N$ . Por se tratar de um processo aleatório, é interessante obter um comportamento médio da dinâmica da CCA. Sendo assim, conseguimos obter a equação da probabilidade de encontrar o caminhante através do

seguinte raciocínio: se o caminhante possui uma probabilidade  $p$  de ir para a direita e efetuar  $n_1$  passos para a direita, a probabilidade resulta em  $p \cdot p \cdot p \cdots p = p^{n_1}$ . Da mesma forma, se houver  $n_2$  passos para a esquerda, temos  $q \cdot q \cdot q \cdots q = q^{n_2}$ , em que  $q$  é a probabilidade de efetuar um passo para a esquerda. Portanto, se o caminhante efetuar  $n_1$  passos para a direita e  $n_2$  passos para a esquerda, temos que multiplicar as probabilidades  $p^{n_1} \cdot q^{n_2}$  e levar em consideração todas as permutações possíveis. Logo, se multiplica a permutação de  $N$  passos no total, levando em conta  $n_1$  passos para a direita e  $n_2$  passos para a esquerda, e que pode ser representado por  $\frac{N!}{n_1!n_2!}$ . Sendo assim, a probabilidade de um caminhante ser encontrado nas posições pode ser representado pela equação

$$P(n) = \frac{N!}{n_1!n_2!} p^{n_1} \cdot q^{n_2}. \quad (1)$$

Ao considerarmos o tamanho do passo sendo unitário, temos que a posição final do caminhante é dado por

$$n = n_1 - n_2 \quad (2)$$

e que

$$N = n_1 + n_2. \quad (3)$$

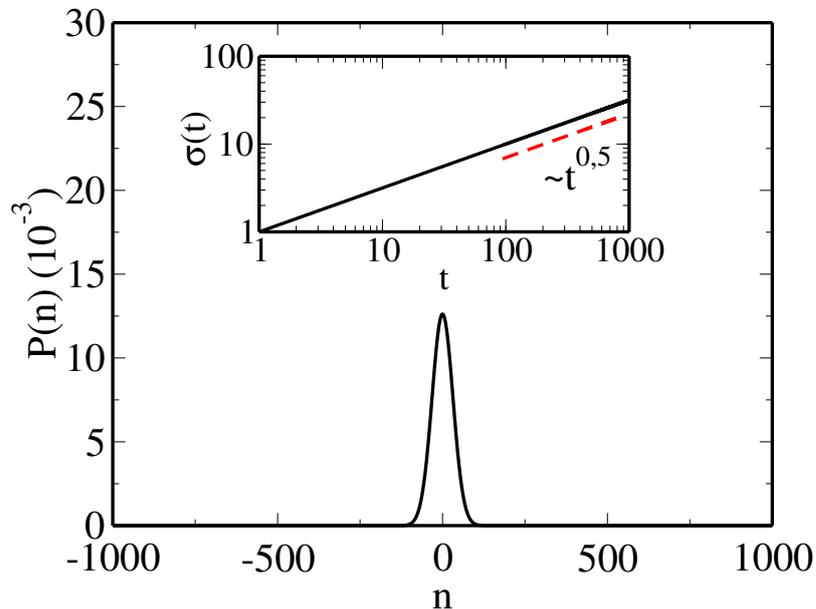
Sendo assim, se somarmos e subtrairmos as equações 2 e 3 obtemos as relações  $n_1 = (N + n)\frac{1}{2}$  e  $n_2 = (N - n)\frac{1}{2}$ . Agora substituindo na equação 1 obtemos

$$P(n) = \frac{N!}{\left[\frac{1}{2}(N + n)\right]! \left[\frac{1}{2}(N - n)\right]!} \left(\frac{1}{2}\right)^N \quad (4)$$

considerando  $p = q = 1/2$ . Esta distribuição é chamada de distribuição binomial, que ao realizar muitas amostras e fazer a média, temos que o padrão mostrado é uma distribuição Gaussiana de probabilidades, em que a maior probabilidade de encontrar o caminhante é nas redondezas da posição inicial (REIF, 1998). Para entendermos melhor a dinâmica da probabilidade no tempo, nós medimos uma grandeza chamada de dispersão, que é calculada através do desvio padrão em que é definido como  $\sigma(t) = \sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}$ , em que a média pode ser calculada como  $\langle n \rangle = \sum_{n=-N}^N nP(n, t)$ . Sendo assim, utilizamos a equação

$$\sigma(t) = \sqrt{\sum_{n=-N}^N n^2 P(n, t) - \left(\sum_{n=-N}^N n P(n, t)\right)^2} \quad (5)$$

Figura 2 – Probabilidade  $P(n)$  de encontrar o caminhante na posição  $n$  após  $10^3$  passos com  $p = q = 1/2$ . Curva obtida através de uma média de  $10^5$  caminhantes. No gráfico pequeno, temos a dispersão em função do tempo.



Fonte: Autor

e conseguimos medir como a dispersão cresce em função do tempo, calculando um parâmetro  $\alpha$ , a partir da relação  $\sigma \propto t^\alpha$ , sendo um parâmetro crucial para compreender como o pacote de ondas se propaga ao longo do tempo.

Tendo em vista as duas grandezas já mencionadas, fizemos os cálculos considerando uma média de  $10^5$  amostras para uma caminhada com  $10^3$  passos, como mostra a figura 2. Observe que a probabilidade de se mover para a esquerda e para a direita é igual, resultando em uma distribuição de probabilidades simétrica em relação à posição inicial. Essa simetria se assemelha a uma distribuição Gaussiana centrada na posição inicial. A medida da dispersão, representada pelo parâmetro  $\sigma$ , varia com o tempo, o que determina como a distribuição de probabilidade se alarga.

Assim, se considerarmos que  $\sigma$  está relacionado ao tempo como  $\sigma \propto t^\alpha$ , podemos caracterizar o regime do transporte na caminhada. Quando  $\alpha = 1$ , estamos no regime balístico. Se  $0.5 < \alpha < 1$ , entramos em um regime superdifusivo. Para  $\alpha = 0.5$ , temos um regime difusivo. Se  $0 < \alpha < 0.5$ , entramos em um regime subdifusivo. Por fim, quando  $\alpha = 0$ , estamos em um regime localizado.

Analisando o gráfico na figura 2, podemos observar que a caminhada clássica aleatória escala de forma difusiva, indicando o comportamento característico do sistema.

Tendo como inspiração a CCA, foi criado um análogo mecânico quântico (AHARONOV

et al., 1993), onde foi mostrado que a interferência quântica causa o aumento quadrático do desvio padrão comparado com a CCA.

## 2.2 CAMINHADA QUÂNTICA EM TEMPO DISCRETO

Na CCA, para se iniciar a caminhada é necessário o conhecimento do seu estado inicial, ou seja, da posição inicial da partícula. Para o caso de uma caminhada quântica (CQ) também se faz necessário o conhecimento do seu estado inicial, mas que agora não depende apenas da sua posição, pois há mais um grau de liberdade intrínseco da partícula quântica. Grau de liberdade esse que pode ser o spin da partícula, quando levado em consideração partículas fundamentais com spin, pode ser a base qubits, comumente utilizado no âmbito computacional, ou até mesmo no contexto óptico onde a base seria a polarização do feixe. Sendo assim, neste trabalho vamos considerar a base computacional de qubits representada por  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  e na sua forma matricial

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

O estado de uma partícula quântica pode ser representado pela junção de dois espaços de Hilbert:

- $\mathcal{H}_c$  referente ao grau de liberdade intrínseco da partícula. Neste trabalho, como a base utilizada é a de qubits, o espaço se trata de um espaço bidimensional e descrito por  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ ;
- $\mathcal{H}_p$  que representa o espaço de Hilbert das posições, sendo ele infinito e contável. No caso unidimensional, o espaço é representado por uma combinação linear unitária dos vetores  $|n_i\rangle_p$ , em que  $n_i \in \mathbb{Z}$ .

E a junção dos dois espaços gera o espaço total, representado pela equação:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_c \otimes \mathcal{H}_p \quad (7)$$

em que  $\otimes$  representa o produto tensorial entre os dois espaços.

Sendo assim, conseguimos representar o estado inicial de uma partícula quântica a partir da equação

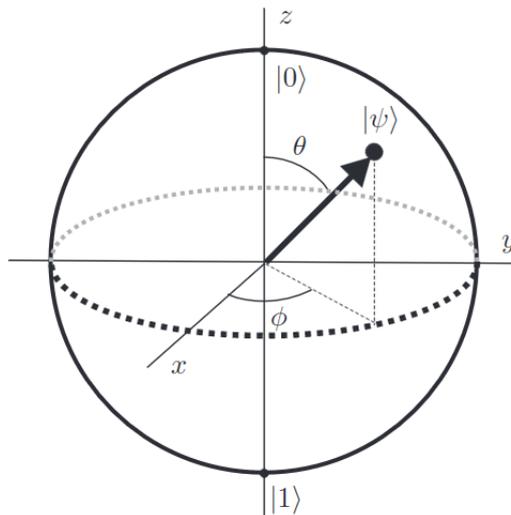
$$|\psi\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes |n\rangle \quad (8)$$

em que  $a, b \in \mathbb{C}$  e que  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Sabendo dessa restrição, um possível estado interno é

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin\frac{\theta}{2} |1\rangle. \quad (9)$$

Se considerarmos os ângulos  $\theta$  e  $\varphi$  como os ângulos azimutal e longitudinal, respectivamente, vemos que esse estado representa uma esfera de raio unitário cujo o nome é esfera de Bloch como na figura 3.

Figura 3 – Esfera de Bloch



Fonte: Retirado de (BARCELOS et al., 2023)

Como os estados da partícula quântica estão na superfície da esfera de Bloch, nós podemos rotacioná-los a partir de operadores unitários, para que não modifique a norma. Sendo assim, o primeiro operador da caminhada quântica é chamado de porta quântica, e é representado por

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{i\phi} \sin\theta \\ e^{-i\phi} \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad (10)$$

pertencente a  $SU(2)$ . Logo após a aplicação do operador porta quântica, aplicamos o operador de translação condicional

$$\hat{S} = \sum_i (|0\rangle \langle 0| \otimes |n_i\rangle \langle n_i + 1| + |1\rangle \langle 1| \otimes |n_i\rangle \langle n_i - 1|). \quad (11)$$

Perceba que, ao aplicarmos o operador  $\hat{C}$  ao estado do caminhante, apenas o estado interno se modifica, alterando a combinação linear entre  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ . Já ao aplicarmos  $\hat{S}$ , apenas é modificado o estado externo da partícula, efetuando a locomoção espacial da mesma. Em outras

palavras, se aplicarmos o operador  $\hat{C}$ , rotacionamos o estado da partícula pela superfície da esfera de Bloch (figura 3), e logo após aplicamos o operador  $\hat{S}$ , locomovendo para a direita (posições positivas) a parte do pacote que possui estado interno  $|0\rangle$  e movendo para esquerda (posições negativas) a parte do pacote que possui estado interno  $|1\rangle$ . Assim é feito o protocolo de aplicação de operadores para a evolução temporal de uma partícula quântica, que pode ser resumido em um único operador

$$\hat{U} = \hat{S} \cdot (\hat{C} \otimes \mathbb{I}_p), \quad (12)$$

em que  $\mathbb{I}$  é a matriz identidade do espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_p$ . Logo, para evoluir uma CQ do estado inicial  $|\psi(0)\rangle$  para um estado  $|\psi(t)\rangle$  podemos representar como

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}^t |\psi(0)\rangle. \quad (13)$$

Agora, após definirmos a evolução temporal de uma CQ, vamos utilizar equações matemáticas para efetuarmos medidas no sistema, e conseguir interpretá-lo melhor. Primeira medida é a probabilidade de encontrar o caminhante em uma determinada posição  $n$ , e é representada matematicamente como

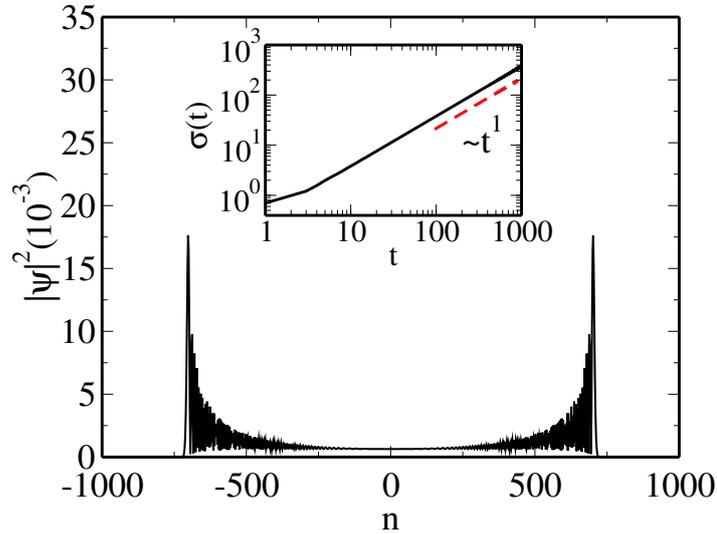
$$P(n) = |\psi_n|^2 = \psi_n \cdot \psi_n^*. \quad (14)$$

Usamos também o cálculo do desvio padrão para medir a dispersão do pacote de onda a partir da equação 5. Com isso, se considerarmos o estado inicial simétrico

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle) \otimes |0\rangle_p, \quad (15)$$

e os ângulos da porta quântica como  $\theta = \frac{\pi}{4}$  e  $\phi = 0$ , também conhecida como porta quântica Hadamard, obtemos a seguinte distribuição de probabilidade e dispersão:

Figura 4 – Distribuição de probabilidade para uma caminhada quântica em tempo discreto realizada com o operador porta quântica Hadamard para 100 passos com a condição inicial  $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle) \otimes |0\rangle_p$ . No gráfico menor, temos a evolução temporal do desvio padrão.



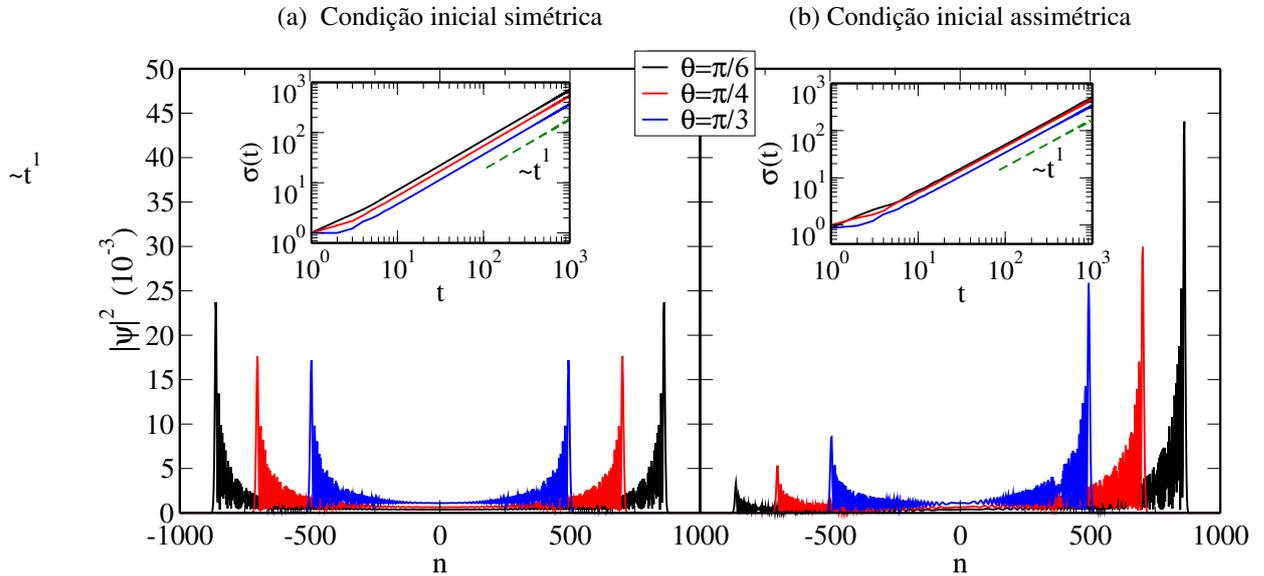
Fonte: Autor

Observando a figura 4 vemos que, enquanto na CCA a maior probabilidade de encontrar o caminhante é na posição inicial, na CQ a maior probabilidade é de encontrar o caminhante afastado da posição inicial. Isso ocorre devido o fenômeno de sobreposição, uma vez que no centro da cadeia há mais sobreposições destrutivas, enquanto que nas bordas há mais sobreposições construtivas. Além disso se analisarmos o gráfico pequeno, vemos que a dispersão está escalando proporcionalmente ao tempo, ou seja,  $\sigma \propto t^1$ . Isso indica que a CQ está escalando de forma balística, diferente da CCA que está escalando de forma subdifusiva ( $\sigma \propto t^{0,5}$ ). Sendo assim, independente do valor do ângulo utilizado<sup>1</sup>, numa CQ ordenada sempre vai escalar balisticamente no tempo.

No estudo da evolução temporal do caminhante quântico, tornou-se evidente que essa evolução está intrinsecamente relacionada ao estado inicial do caminhante e à escolha da porta quântica utilizada. No cenário anteriormente apresentado, conforme ilustrado na figura 4, empregamos a porta quântica Hadamard com um ângulo de rotação de  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , em conjunto com um estado inicial simétrico. A escolha da porta quântica Hadamard justifica-se pela observação da equação 10, onde cada entrada da matriz revela um comportamento periódico no intervalo de  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Assim, no ponto médio desse intervalo, encontramos a configuração da porta quântica Hadamard.

<sup>1</sup> Com exceção da porta quântica  $\pi/2$ , que causa em cada aplicação a mudança do sentido da propagação (CAÇÃO et al., 2021)

Figura 5 – Representação da diferença de distribuição de probabilidades para (a) condição inicial simétrica, dada por  $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle) \otimes |0\rangle_p$  e (b) condição inicial assimétrica, dada por  $|\psi(0)\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle_p$



Fonte: Autor

Por outro lado, ao considerar o estado inicial da partícula, podemos optar por mantê-lo simétrico, como evidenciado na figura 5 (a), ou introduzir um estado inicial assimétrico, conforme ilustrado na figura 5 (b). A figura 5 oferece uma visão da influência da porta quântica, variando os ângulos  $\theta$  em  $\pi/6$ ,  $\pi/4$ , e  $\pi/3$ , para ambas as condições iniciais, simétrica e assimétrica.

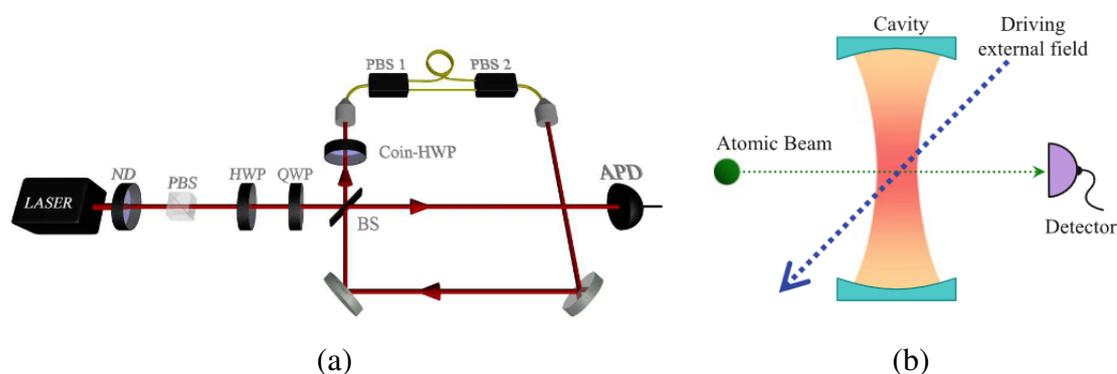
Analisando o comportamento dos gráficos, é importante destacar que, independentemente da escolha da porta quântica ou do estado inicial, o regime balístico continua presente. O gráfico da figura 4 já havia ilustrado esse comportamento no cenário simétrico, enquanto o caso assimétrico, no qual foi empregada a condição inicial

$$|\psi(0)\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle_p, \quad (16)$$

revela uma tendência do pacote de ondas em direção a posições mais positivas. Essas implementações reforçam a relevância da CQ como uma ferramenta poderosa em estudos físicos e científicos. Portanto, ao examinarmos os subgráficos, fica evidente que o regime balístico persiste, independentemente das escolhas relacionadas à porta quântica e ao estado inicial.

É interessante notar que a Caminhada Quântica (CQ) não é apenas uma abstração teórica, mas também uma realidade em diversas implementações físicas. A CQ pode ser realizada em sistemas físicos de diversas formas, tais como: utilizando feixes de luz, como exemplificado em (SCHREIBER et al., 2010; CRESPI et al., 2013), onde uma caminhada de um fóton é realizada;

Figura 6 – Representações experimentais de uma caminhada quântica (a) em um *loop* fibra óptica e (b) com a emissão de fótons.



Fonte: Retirado de (a) (SCHREIBER et al., 2010) e (b) (WANG; MANOUCHEHRI, 2013).

empregando sistemas de dois níveis para simular qubits, como demonstrado em (RYAN et al., 2005); manipulando átomos neutros armadilhados em uma rede óptica, como visto em (KARSKI et al., 2009). Além disso, já é conhecida na literatura a implementação experimental de caminhadas quânticas, podendo ocorrer em anéis ópticos, como em (SCHREIBER et al., 2010; KNIGHT et al., 2003), através do interferômetro de Michelson (PANDEY et al., 2011), através de redes ópticas (ZHAO et al., 2002), refração óptica (FRANCISCO et al., 2006), cavidade óptica (AGARWAL; PATHAK, 2005), entre outros.

Na figura 6, apresentamos dois arranjos experimentais para caminhadas quânticas. Em (a), temos um arranjo semelhante ao demonstrado em (SCHREIBER et al., 2010), onde um feixe de fótons é emitido e, ao passar pelo filtro de densidade neutra "ND", emite fótons individuais para o restante do circuito. Para preparar o estado inicial, utilizam-se o divisor de feixe polarizador (PBS), a placa de meia-onda (HWP) e a placa de quarto de onda (QWP). Após a preparação do estado inicial, o feixe é direcionado para o divisor de feixe (BS), que divide o feixe, permitindo que uma parte siga diretamente e a outra parte passe pelo HWP, que é responsável por rotacionar a polarização do feixe. Essa rotação da polarização é análoga à aplicação do operador de porta quântica em uma caminhada quântica. Em seguida, o feixe atinge o PBS1, dividindo novamente o feixe, com uma parte seguindo um trajeto reto e a outra percorrendo um loop antes de chegar ao PBS2, concluindo a translação do caminhante quântico. Posteriormente, o feixe é refletido pelos espelhos M, retornando ao estado inicial e possibilitando a realização da caminhada quântica neste experimento.

A figura 6(b), originária do estudo de Wang et al. (WANG; MANOUCHEHRI, 2013), apresenta um esquema do diagrama proposto por Agarwal e Pathak (AGARWAL; PATHAK, 2005) para a implementação experimental de uma caminhada quântica por meio de uma cavidade

óptica. Neste experimento, átomos individuais são cuidadosamente encaminhados, um de cada vez, para o interior da cavidade óptica. Uma vez dentro da cavidade, esses átomos interagem com um campo de condução contínua, o qual é gerado por uma fonte externa. Essa interação provoca alterações em seus estados quânticos, e essas mudanças são cuidadosamente detectadas no final do processo experimental. O experimento, portanto, permite a observação das mudanças quânticas nos átomos à medida que atravessam a cavidade. Após a detecção dos sinais resultantes é possível reiniciar o processo, realizando uma caminhada quântica de maneira recursiva.

Com base no formalismo físico e matemático que governa a caminhada quântica (CQ), e considerando a ampla gama de possibilidades de implementação experimental, na próxima seção, abordaremos a importância de investigar a interação externa ao sistema. Isso se torna fundamental, uma vez que a caminhada quântica é altamente sensível a interferências externas.

## 2.3 CAMINHADA QUÂNTICA DESORDENADA

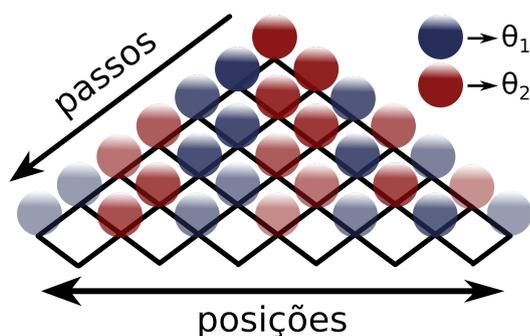
Anteriormente, foi visto como é a formulação de uma caminhada quântica, a dependência com o estado inicial e com a porta quântica, considerando sempre um caso ideal, sem interferências externas ao sistema, e assim foi visto que o regime da CQ sempre é balístico. Mas, se levarmos em consideração um caso real, há a interferência do ambiente externo, seja por uma deformação estrutural na cadeia, variações no potencial do sistema ou um choque mecânico. Sendo assim, se faz de grande importância estudar a caminhada quântica desordenada (CQD) para a formulação de aplicações experimentais que por ser casos reais, há a presença de ruídos no sistema.

No contexto computacional, desordem e ruídos referem-se a perturbações ou interferências que afetam o desempenho e a estabilidade dos qubits, que são a unidade básica de processamento de um computador quântico. Estas perturbações podem se fazer presente de forma flutuante, estática e dinâmica (VIEIRA et al., 2014).

### 2.3.1 Ruído estático

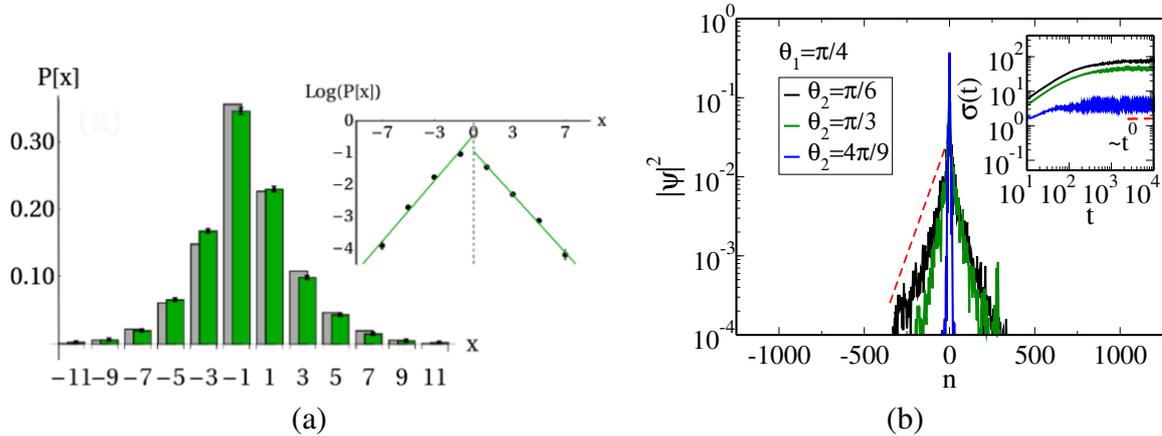
A ruído estático está relacionada com uma perturbação fixa que é incorporada ao sistema e permanece invariável ao longo do tempo. Ela pode ser, por exemplo, um incremento de fases no operador deslocamento (MENDES et al., 2021). O ruído estático pode ser também representada por operações de portas quânticas aplicadas em cada posição do nó da rede (CRESPI et al., 2013). Assim, cada posição é determinada por meio de um sorteio que estabelece qual operação quântica será aplicada, e esse padrão permanece constante com o passar do tempo. Para ilustrar, se considerarmos duas possíveis operações quânticas com ângulos distintos, representadas por  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , a distribuição dessas operações quânticas segue o padrão representado na 7.

Figura 7 – Representação da aplicação de um ruído flutuante na cadeia unidimensional.



Fonte: Autor

Figura 8 – Densidade de probabilidade de uma Caminhada Quântica Discreta (CQD). A figura (a) apresenta o resultado experimental obtido para 11 passos, conforme documentado em (SCHREIBER et al., 2011). Na figura (b), observamos a densidade de probabilidade no gráfico principal, juntamente com a dispersão no gráfico secundário. Essa análise leva em consideração diferentes ângulos, todos iniciando a partir de uma condição inicial simétrica, para  $10^4$  passos.



Fonte: (a) retirado de (SCHREIBER et al., 2011) e (b) autor

Em 2011, Schreiber e colaboradores (SCHREIBER et al., 2011) implementaram um sistema com ruído estático por meio de um experimento fotônico, no qual o grau de liberdade interno era representado pela polarização da luz, que podia ser vertical ou horizontal. Nesse experimento, a dependência espacial do operador da porta quântica foi alcançada ao introduzir uma fase variável na polarização da luz. Essa fase podia variar aleatoriamente dentro de um intervalo de  $[-\pi, \pi]$ , dependendo da posição na cadeia. Como resultado, toda vez que um fóton passava pela mesma posição, adquiria a mesma fase. Sendo assim, foi realizada uma caminhada com 11 passos, obtendo uma distribuição de probabilidade em torno da sua posição inicial, como na CCA.

Na figura 8, apresentamos resultados significativos da evolução temporal mencionada anteriormente. Em (a), podemos observar os efeitos da aplicação de ruído estático, que resultam em uma probabilidade significativamente maior de encontrar a partícula em torno de sua posição inicial. Esse fenômeno é bem estabelecido no caso contínuo quando consideramos a presença de uma ruído estrutural na cadeia, ocasionando a localização exponencial do pacote de onda. Esse fenômeno é conhecido como a localização de Anderson (ANDERSON, 1958; ABRAHAMS et al., 1979).

No entanto, na figura 8(b), examinamos a evolução temporal ao longo de  $10^4$  passos, com um foco especial na densidade de probabilidade. Neste gráfico, reproduzimos uma caminhada quântica com a condição inicial simétrica, podendo ser aplicado duas diferentes portas quânticas

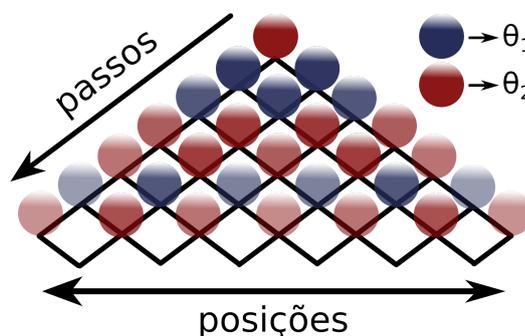
que são distribuídas aleatoriamente ao longo dos sítios da rede. Fixamos  $\theta_1 = \pi/4$  e fizemos três curvas variando o  $\theta_2$  com os valores de  $\pi/6$ ,  $\pi/3$ ,  $4\pi/9$  e observamos a manifestação da localização de Anderson nas três diferentes configurações. No entanto, também notamos um cenário interessante em que o pacote de ondas não está localizado em torno de suas posições iniciais.

Nas três curvas que exibem localização, notamos um comportamento constante da medida de dispersão ao longo do tempo, ou seja,  $\sigma(t) \propto t^0$ . Essa observação é consistente em várias configurações de portas quânticas, demonstrando a robustez desse fenômeno.

### 2.3.2 Ruído dinâmico

No caso de uma ruído dinâmico, as portas quânticas do sistema são distribuídas ao longo do tempo. Isso significa que a escolha das portas quânticas entre as possíveis é realizada em cada intervalo de tempo, e a porta quântica selecionada é aplicada simultaneamente em todas as posições. Portanto, se considerarmos duas portas quânticas com ângulos distintos, representados por  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , o esquema de aplicação é ilustrado na figura 9.

Figura 9 – Representação da aplicação de uma ruído flutuante na cadeia unidimensional.

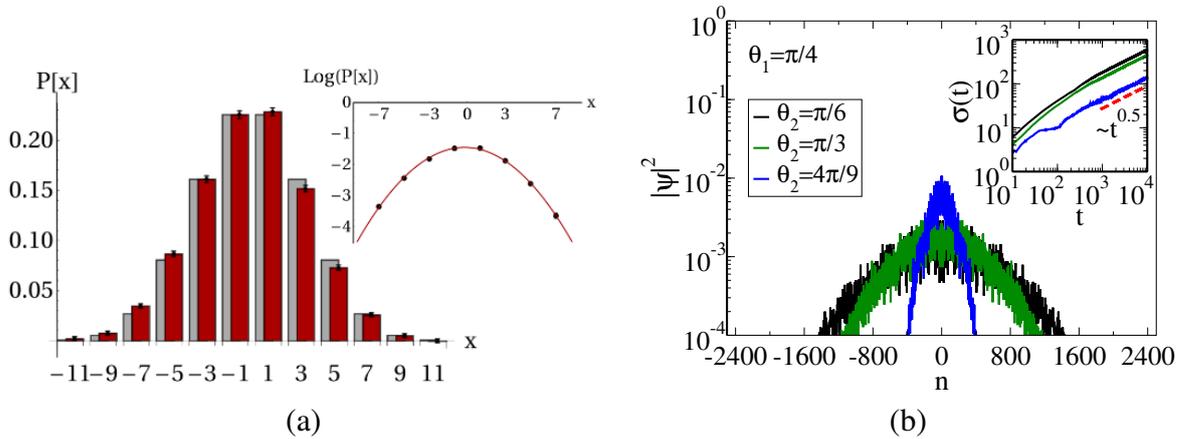


Fonte: Autor

Em 2003, Shapira conduziu um estudo teórico fascinante, conforme detalhado em (SHAPIRA et al., 2003), que explorou uma CQD. No decorrer desse estudo, Shapira observou um notável fenômeno: a transição do regime de comportamento da CQD, que passou de balístico para difusivo à medida que a evolução temporal progredia. Essa descoberta foi um marco importante na compreensão das dinâmicas da caminhada quântica em ambientes com ruídos no tempo.

Além disso, em (SCHREIBER et al., 2011), a análise de um ruído dinâmico foi estendida experimentalmente, quando adicionado uma componente variável no tempo à fase do operador da porta quântica. A figura 10(a) ilustra a distribuição de probabilidades após 11 passos, obtida

Figura 10 – Densidade de probabilidade de uma Caminhada Quântica Discreta (CQD). A figura (a) apresenta o resultado experimental obtido para 11 passos, conforme documentado em (SCHREIBER et al., 2011). Na figura (b), observamos a densidade de probabilidade no gráfico principal, juntamente com a dispersão no gráfico secundário. Essa análise leva em consideração diferentes ângulos, todos iniciando a partir de uma condição inicial simétrica, para  $10^4$  passos.



Fonte: (a) retirado de (SCHREIBER et al., 2011) e (b) autor

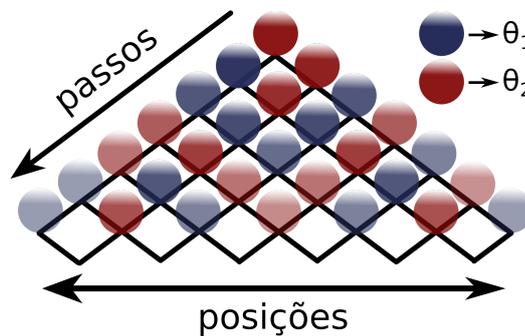
com a aplicação de um ruído dinâmico, em que obtemos um padrão de probabilidade centrada na posição inicial, nos remetendo a caminhada clássica aleatória com seu perfil gaussiano. Já a figura 10(b), temos uma simulação de uma caminhada quântica para  $10^4$  passos e com a condição inicial simétrica, envolvendo duas possíveis portas quânticas envolvidas na evolução temporal, associadas com os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , sendo distribuídos aleatoriamente no tempo para toda a cadeia. No gráfico, fixamos  $\theta_1 = \pi/4$  e plotamos três curvas com diferentes valores de  $\theta_2$ , sendo eles  $\pi/6$ ,  $\pi/3$  e  $4\pi/9$ . Nessa figura, podemos observar que a probabilidade de encontrar o caminhante é mais alta nas proximidades da posição inicial, mas não está rigidamente confinada a essa posição. Esse comportamento é notado na figura secundária de 10(b), onde a medida de dispersão permanece escalada em relação a  $\sigma \propto t^{0.5}$ , indicando um regime difusivo para as curvas representadas. Essa característica nos faz lembrar da Caminhada Clássica Aleatória (CCA), ilustrada na figura 1, na qual o perfil da densidade de probabilidade é semelhante, e ambos os casos evidenciam a difusividade do pacote de probabilidade.

Esses resultados são de extrema relevância para a compreensão das dinâmicas complexas que ocorrem em sistemas de caminhada quântica discreta sujeitos a ruídos dinâmicos, proporcionando *insights* valiosos para o campo da física quântica e fenômenos de transporte.

### 2.3.3 Ruído flutuante

Uma ruído flutuante refere-se a uma CQ em que as portas quânticas não apresentam homogeneidade ao longo dos sítios e ao longo do tempo. Em outras palavras, a cada intervalo de tempo, uma seleção é feita para cada posição  $n$  a fim de determinar qual operação quântica será aplicada. Se considerarmos duas operações quânticas com ângulos diferentes, representados por  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , a distribuição das operações quânticas na cadeia segue a representação mostrada na figura 11.

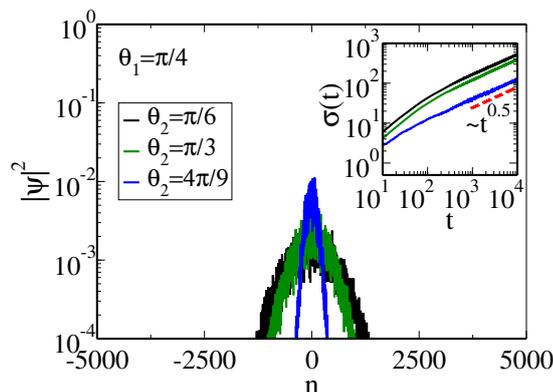
Figura 11 – Representação da aplicação de uma ruído flutuante na cadeia unidimensional.



Fonte: Autor

No artigo (VIEIRA et al., 2014), é estudado as propriedades de emaranhamento e de transporte da CQ com a ruídos estáticos, dinâmica e um outro ruído, com a não homogeneidade temporal e espacial agindo simultaneamente, que neste artigo foi nomeada de ruído flutuante. Nesse artigo foi visto que o ruído flutuante escala de forma difusiva como o caso do ruído dinâmico, como mostra o gráfico a seguir:

Figura 12 – Gráfico da densidade de probabilidade de uma caminhada quântica discreta, com a adição do ruído flutuante. Foi utilizada a condição inicial simétrica, evoluindo o sistema para  $10^4$  passos. Foi fixado o ângulo  $\theta_1 = \pi/4$  e plotado com (a)  $\theta_2 = \pi/6$ , (b)  $\theta_2 = \pi/3$  e (c)  $\theta_2 = 4\pi/9$ .



Fonte: Autor

Na figura 12, temos o gráfico da média de 10 amostras da densidade de probabilidade de um caminhante quântico com a adição da ruído flutuante inicialmente simétrico e evoluído para  $10^4$  passos. Fixamos o valor de  $\theta_1 = \pi/4$  e plotamos três diferentes curvas com os valores de  $\theta_2$  sendo  $\pi/6$ ,  $\pi/3$  e  $4\pi/9$ . Dessa forma, podemos observar que o ruído flutuante exibe uma característica muito semelhante ao ruído dinâmico, apresentando um padrão de probabilidade bastante similar e uma dispersão que segue uma escala difusiva. Podemos afirmar que, nos casos de ruído dinâmico e flutuante, o caminhante ainda se dispersa ao longo do tempo. No entanto, essa dispersão ocorre à custa da "vantagem quântica" da caminhada, uma vez que o seu comportamento se diferencia devido à natureza balística do processo.

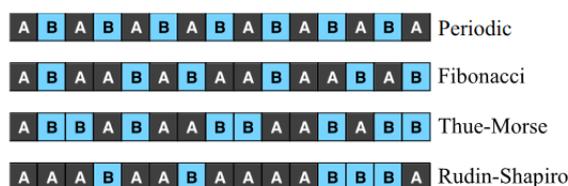
## 2.4 CORRELAÇÕES

### 2.4.1 Ruído estático correlacionado

Há na literatura alguns artigos analisando o ruído estático em uma caminhada quântica discreta, e confirmando os resultados anteriormente vistos (EVANGELOU YIN; KATSANOS, 2008; CRESPI et al., 2013). Há também artigos que adicionam correlações no ruído, como em (BUARQUE; DIAS, 2019), cujo o ângulo do operador porta quântica tem dependência aperiódica com um parâmetro de controle, identificado por  $\nu$ . Sendo assim, quando o valor de  $\nu$  for pequeno, a caminhada se comporta como o caso ordenado. Ao longo do aumento do parâmetro  $\nu$ , o regime da caminhada quântica se modifica chegando a ficar localizado quando  $\nu \geq 1.0$ . Assim, os autores relatam um sistema que pode apresentar diversos regimes de caminhada quântica, como balístico, superdifusivo, difusivo, subdifusivo e localizado.

Já no artigo (GULLO et al., 2017), são realizadas caminhadas utilizando 2 portas quânticas com ângulos diferentes. Fixando um os ângulo como  $\theta_1 = \pi/4$ , são investigados o caso periódico, e 3 diferentes tipos de aperiodicidade, através das sequências de Fibonacci, Rudin-Shapiro e Thue-Morse, como demonstrado na figura 13.

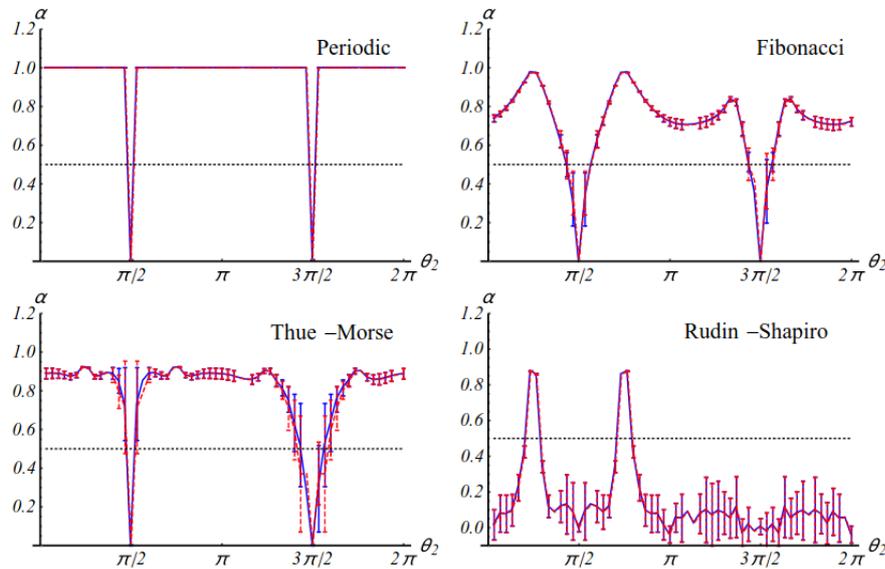
Figura 13 – Representação das sequências abordadas em (GULLO et al., 2017)



Fonte: Figura retirada de (GULLO et al., 2017)

Na figura 13, apresentamos as representações das sequências previamente mencionadas.

Figura 14 – Gráficos do expoente  $\alpha$  da dispersão ( $\sigma \propto t^\alpha$ ) em função da variação do ângulo  $\theta_2$ . Foi fixado  $\theta_1 = \pi/4$ . A linha tracejada representa a referência para o caso clássico, em que  $\alpha = 0.5$ .



Fonte: Figura retirada de (GULLO et al., 2017)

Aqui, o símbolo "A" representa uma porta quântica com o ângulo  $\theta_1$ , enquanto o símbolo "B" representa uma porta quântica com o ângulo  $\theta_2$ . Nesse contexto, foi realizada uma evolução temporal, mantendo  $\theta_1 = \pi/4$  constante. Durante essa evolução, os autores calcularam a dispersão do pacote de ondas e, por meio de uma análise de regressão levando em consideração que  $\sigma \propto t^\alpha$ , determinamos o valor de  $\alpha$ .

No Gráfico 14, foi explorado o comportamento do expoente  $\alpha$  em relação às variações do ângulo  $\theta_2$  para o cenário periódico e as três sequências estudadas. Foi observado que, no caso periódico e nas sequências Fibonacci e Thue-Morse, o sistema exibe um regime de localização quando  $\theta_2$  assume valores de  $\pi/2$  ou  $3\pi/2$ . Esse fenômeno resulta das ações das portas quânticas associadas a esses ângulos, que alternam o estado interno da partícula: o estado  $|0\rangle$  se transforma em  $|1\rangle$  e vice-versa, alterando constantemente a direção do caminhante.

Por outro lado, no cenário da distribuição periódica, notamos que o sistema, na maioria das configurações dos ângulos, mantém-se no regime balístico, com exceção dos ângulos mencionados anteriormente. Nas sequências Fibonacci e Thue-Morse, a dinâmica do sistema é predominantemente superdifusiva, enquanto, na sequência de Rudin-Shapiro, a maioria dos ângulos resulta em um regime subdifusivo para o caminhante.

Outro exemplo notável de pesquisa que explora a introdução de correlações em um contexto de ruído estático pode ser encontrado em (MENDES et al., 2021). Neste estudo, a

correlação é incorporada por meio da inclusão de uma fase dependente da posição no operador de translação condicional. Essa fase pode assumir tanto uma forma de correlação de curto alcance quanto de longo alcance, variando apenas o parâmetro da fase em questão.

Notavelmente, quando a correlação é de curto alcance, o sistema exibe um regime de localização, enquanto no caso de correlações de longo alcance, o sistema evolui para um regime balístico.

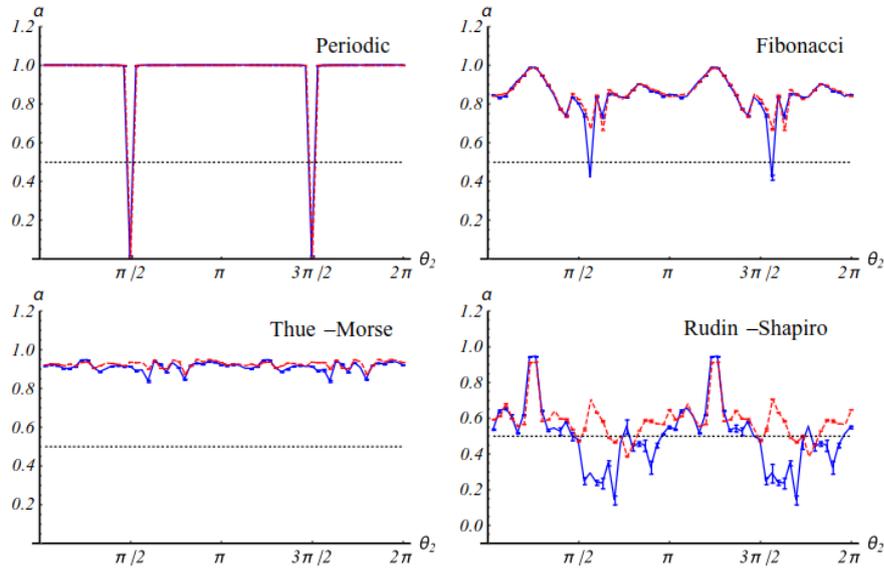
#### 2.4.2 Ruído dinâmico correlacionado

De forma análoga à análise de sistemas com ruído estático, a literatura também oferece estudos que exploram a introdução de correlações em cenários de ruído dinâmico. Um exemplo notável é apresentado em (RIBEIRO et al., 2004), onde se observa uma variação temporal dos ângulos das portas quânticas, podendo assumir valores como  $\theta_1 = \pi/6$  e  $\theta_2 = \pi/3$ . Inicialmente, a dependência temporal ocorre periodicamente, com períodos de 2, 3, 5 e 8 passos, resultando em um regime balístico. Posteriormente, uma distribuição de portas quânticas baseada na sequência de Fibonacci é utilizada, resultando em um regime superdifusivo. Além disso, a mesma sequência de Fibonacci é empregada, mas agora com ambos os ângulos variando em um intervalo de  $[0, \pi/2]$ , resultando em um regime superdifusivo para todas as combinações de ângulos, exceto quando  $\theta_1 = \theta_2$ , o que leva a um regime balístico.

No contexto do estudo anteriormente mencionado (GULLO et al., 2017), a inomogeneidade dinâmica também é investigada. Nesse caso, dois ângulos são considerados, seguindo as sequências representadas na figura 13. Na figura 15, é apresentado o expoente  $\alpha$  em função de  $\theta_2$ , com  $\theta_1 = \pi/4$ . Nota-se que, no caso periódico, o regime não é balístico apenas quando  $\theta_2$  é igual a  $\pi/2$  ou  $3\pi/2$ , conforme discutido anteriormente no contexto do ruído estático correlacionado. Em duas das três sequências analisadas, a maioria das configurações de ângulos resulta em um regime superdifusivo, enquanto no caso da sequência de Rudin-Shapiro, a dinâmica da caminhada varia entre subdifusiva e balística, dependendo da configuração dos ângulos considerados.

Em um estudo recente (BUARQUE et al., 2023), foi investigado a dinâmica de caminhadas quânticas unidimensionais em tempo discreto com correlações de longo alcance no espaço e no tempo, como o ruído flutuante. Os autores construíram operadores quânticos de moeda que incorporaram uma distribuição de inomogeneidade aleatória de correlações de longo alcance podendo ser controlado a partir de um parâmetro  $\nu$ . Sendo assim, foi demonstrado que a aplicação dessa correlação resulta em uma variedade de padrões de dispersão dos estados de qubit, podendo ser estados localizados, subdifusivos, difusivos e superdifusivos e balísticos,

Figura 15 – Gráfico do expoente  $\alpha$  da dispersão ( $\sigma \propto t^\alpha$ ) em função de  $\theta_2$ , com  $\theta_1 = \pi/4$ . A linha tracejada representa a referência para o caso clássico, em que  $\alpha = 0.5$ .



Fonte: Figura retirada de (GULLO et al., 2017).

dependendo do parâmetro de correlação  $\nu$ .

Esses resultados destacam como a presença do ruído em CQ pode alterar drasticamente o perfil de propagação do caminhante. No cenário estático, observamos o surgimento da localização de Anderson, enquanto no cenário dinâmico, o sistema pode evoluir para um regime difusivo, assemelhando-se a uma caminhada clássica. Além disso, a adição de correlações ao sistema tem o potencial de modificar o comportamento previamente determinado pela ruído permitindo que o caminhante altere seu regime apenas por meio da modificação dos ângulos das portas quânticas. No entanto, é relevante notar que a maioria dos estudos existentes na literatura se concentra em distribuições aperiódicas, determinísticas ou com correlações de longo alcance.

Neste trabalho, nossa investigação se concentra no impacto das correlações de curto alcance. Para alcançar esse objetivo, optamos por incorporar correlações do tipo "dímero aleatório" (DUNLAP et al., 1990) à dinâmica de um caminhante quântico sob a influência do ruído dinâmico. No entanto, é importante observar que, para aqueles que desejam aprofundar o estudo sobre essa mesma correlação, porém aplicada em um contexto espacial, uma referência relevante é o trabalho apresentado em (ALMEIDA et al., 2022).

Durante nossa análise, realizaremos comparações com cenários descorrelacionados, buscando evidenciar como as correlações de curto alcance têm o potencial de alterar o regime de transporte do sistema.

### 3 Correlação do tipo dímero aleatório temporal

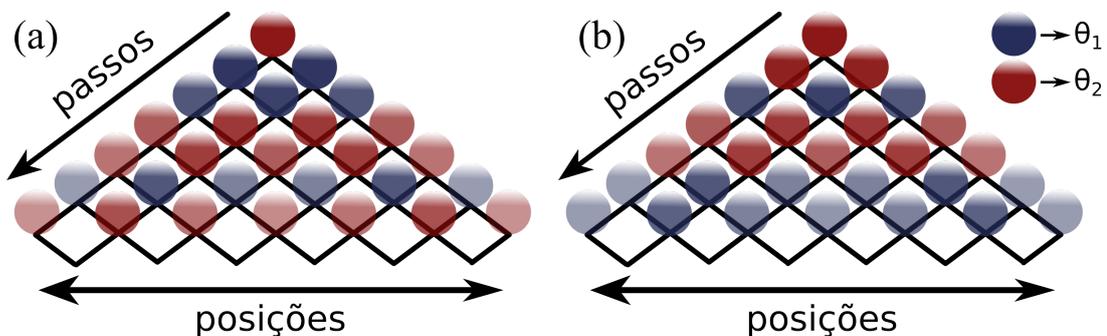
#### 3.1 MODELO

No contexto deste estudo, estamos explorando uma abordagem de caminhada quântica unidimensional em que os sítios estão interligados, e que caminhante é uma partícula de dois níveis de energia, que se assemelha a um qubit. No nosso estudo, utilizamos a equação 10 como nossa operação quântica, a equação 11 para o operador translacional, e as equações 13 e 12 para descrever a evolução do caminhante.

Semelhante ao estudo de referência (GULLO et al., 2017), introduzimos um ruído no operador da porta quântica, onde apenas dois operadores diferentes contribuem para a variação temporal da distribuição. Como já demonstrado em estudos anteriores, como (SHAPIRA et al., 2003; SCHREIBER et al., 2011; EVANGELOU YIN; KATSANOS, 2008), a inclusão desse ruído dinâmico na caminhada quântica leva a um regime de dispersão difusiva.

No entanto, neste trabalho, introduzimos uma correlação no ruído dinâmico. Essa correlação é incorporada em uma das possíveis portas quânticas, especificamente naquela associada ao ângulo  $\theta_2$ , como ilustrado na figura 16. A figura 16(a) mostra a distribuição das portas quânticas na presença de um ruído dinâmico no sistema, em que há a cada tempo um sorteio entre duas possíveis portas quânticas associadas com os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Na figura 16(b), apresentamos a caminhada quântica com a inclusão do ruído dinâmico correlacionado. Embora a escolha entre as duas possíveis portas quânticas ainda seja aleatória, quando a porta quântica com o ângulo  $\theta_2$  é selecionada, ela é aplicada em pares, ou seja, em toda a cadeia, tanto no momento da seleção quanto em um momento posterior. Isso estabelece uma correlação do tipo dímero temporal.

Figura 16 – Representação do ruído (a) dinâmico descorrelacionado e (b) dinâmico com a adição da correlação tipo dímero temporal.



Fonte: Autor

Para nossas análises, adotamos consistentemente uma condição inicial simétrica na qual

a função de onda é localizada na posição inicial  $n = 0$ , conforme exemplificado na equação:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle) \otimes |0\rangle_p. \quad (17)$$

Nossas análises dos resultados se basearam na medição da densidade de probabilidade, conforme expresso na Equação 14. Damos especial atenção à análise da dispersão, conforme representado pela Equação 5, onde investigamos o expoente de crescimento temporal de  $\sigma$  ( $\sigma \propto t^\alpha$ ).

Assim, procedemos ao cálculo computacional da evolução temporal do caminhante quântico por meio de um método recursivo. Utilizamos a linguagem de programação FORTRAN 95 e empregamos um método matricial fundamentado na seguinte abordagem: construímos uma matriz com duas linhas e  $2N + 1$  colunas, onde  $N$  representa duas vezes o intervalo de evolução temporal do caminhante. A primeira linha corresponde à amplitude associada à parte do pacote de onda referente a  $|0\rangle$ , enquanto a segunda linha reflete a amplitude associada à parte do pacote de onda referente a  $|1\rangle$ . As colunas, por sua vez, representam as possíveis posições do caminhante.

Considerando um estado inicial conforme a equação 17, a matriz representativa é expressa como segue:

$$\begin{array}{c} \langle 0| \\ \langle 1| \end{array} \begin{array}{cccccccc} | -N \rangle_p & & | -2 \rangle_p & | -1 \rangle_p & | 0 \rangle_p & | +1 \rangle_p & | +2 \rangle_p & & | N \rangle_p \\ \left( \begin{array}{cccccccc} 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}i & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \end{array} \quad (18)$$

em que essa matriz ilustra o caminhante na posição  $|0\rangle_p$  com um estado interno da partícula representado por  $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}i|1\rangle$ .

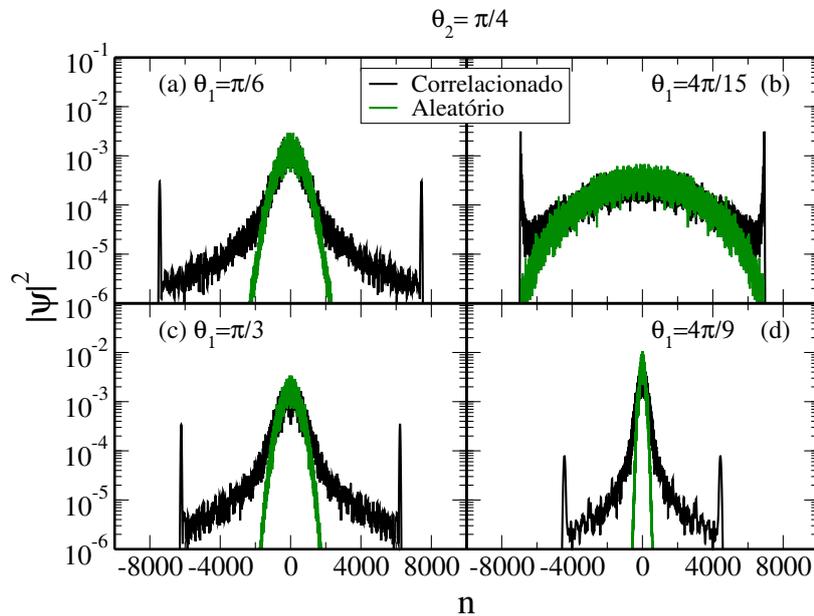
Com a condição inicial estabelecida, procedemos à evolução temporal do estado multiplicando o operador de porta quântica (equação 10) à esquerda do estado inicial (equação 18). Em seguida, aplicamos o operador de translação (equação 11), que modifica as posições da primeira linha da matriz do estado para a coluna da direita e a segunda linha para a coluna da esquerda esquerda. Dessa forma, realizamos a evolução temporal discreta da partícula quântica e durante a evolução temporal, calculamos as medidas de probabilidade (equação 14), dispersão (equação 5), e após calcular a dispersão, calculamos a regra da potência da dispersão para acharmos o valor de  $\alpha$ . Para incorporar nosso modelo, realizamos um sorteio entre as duas portas quânticas possíveis

em cada intervalo de tempo. Ao sortear a porta quântica com o ângulo  $\theta_1$ , nós a utilizamos em todas as posições nesse tempo e efetuamos o sorteio no tempo posterior. Já quando sorteamos a porta quântica associada com o ângulo  $\theta_2$ , aplicamos a mesma no tempo do sorteio e no tempo subsequente, para posteriormente efetuarmos novamente o sorteio.

### 3.1.1 Resultados

Inicialmente, conduzimos uma análise da densidade de probabilidade, comparando dois cenários: o primeiro envolve o ruído aleatório, enquanto o segundo adiciona a influência da correlação, conforme ilustrado na figura 17. Ao examinarmos a figura, notamos que a inclusão do ruído aleatório (representada pelas curvas verdes) está em consonância com os achados documentados na literatura (SCHREIBER et al., 2011; RIBEIRO et al., 2004), nos mostrando um perfil semelhante ao gaussiano.

Figura 17 – Gráficos da densidade de probabilidade, comparando o ruído dinâmico sem e com a adição de correlação, sendo as curvas vermelha e laranja, respectivamente. Evolução temporal de 10 amostras com a condição inicial simétrica, para  $10^4$  passos. Foi fixado o valor do ângulo  $\theta_2 = \pi/4$  e variado o ângulo  $\theta_1$  para (a)  $\pi/6$ , (b)  $4\pi/15$ , (c)  $\pi/3$  e (d)  $4\pi/9$ .



Fonte: Autor

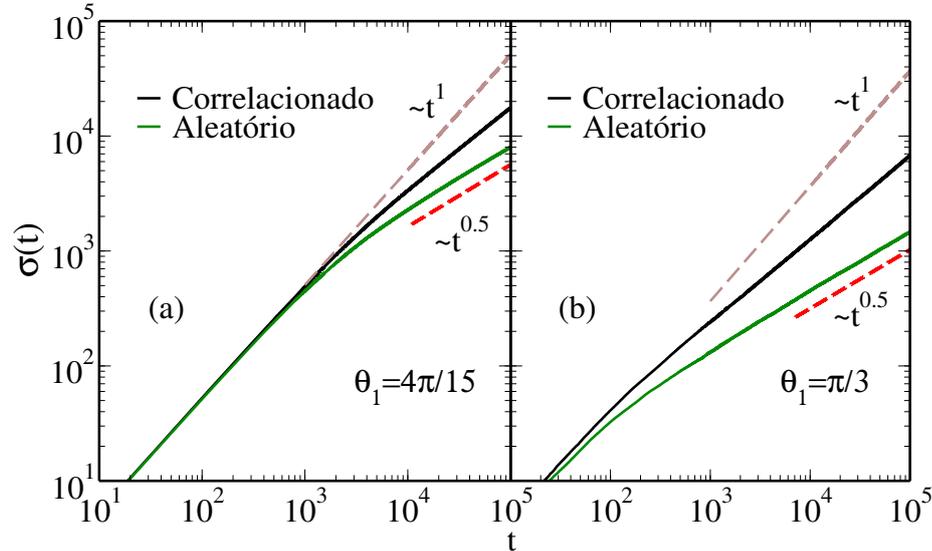
Entretanto, na presença da correlação no ruído dinâmico (curvas pretas), identificamos um padrão de probabilidade que evoca duas situações distintas: o cenário com ruído dinâmico, no qual a maior probabilidade se concentra em torno da posição inicial, e o cenário sem ruído, no qual a maior probabilidade se encontra nas extremidades do pacote de ondas. Isso sugere que

a correlação de tipo "dímero temporal" facilita o espalhamento da função de onda, modificando o perfil de espalhamento para um formato com quantidades de probabilidades significativas nas bordas.

Ao examinar a figura 17(b), observamos que a largura dos pacotes de onda é uniforme, enquanto, em todos os outros casos, percebemos variações nas larguras das probabilidades. Portanto, podemos concluir que, quando os ângulos estão próximos, as larguras dos pacotes de ondas são semelhantes tanto para os casos com quanto sem correlação, enquanto, quando os ângulos estão mais distantes, as larguras apresentam variações distintas.

Em seguida, conduzimos uma análise da dispersão do pacote de ondas, com um total de  $10^5$  passos, conforme ilustrado na figura 18, mantendo o valor de  $\theta_2$  fixo em  $\pi/4$ . Nessa figura, apresentamos a média de 10 realizações, com ângulos  $\theta_1$  fixados em  $\pi/3$  e  $4\pi/15$ . Como referência, incluímos a curva de uma caminhada quântica ordenada, que exibe um crescimento balístico (curva tracejada cinza) com um parâmetro  $\alpha = 1$ .

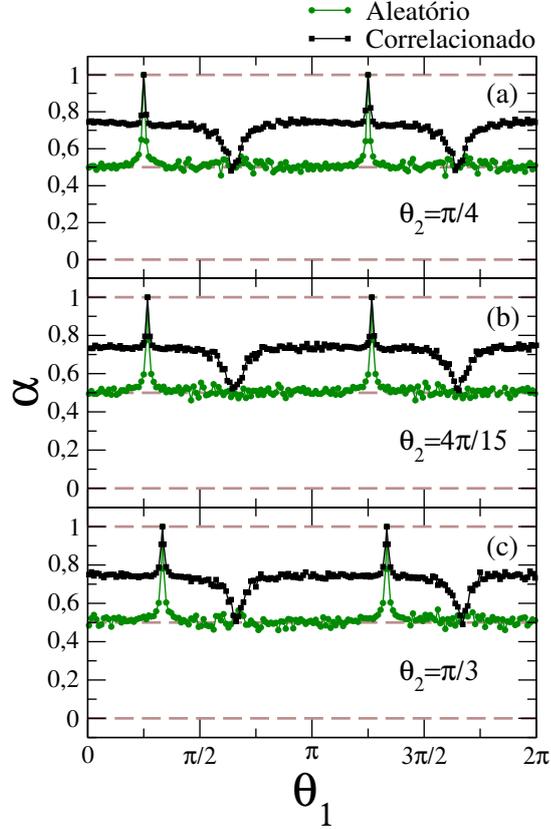
Figura 18 – Gráfico da dispersão em função do tempo, sendo fixado  $\theta_2 = \pi/4$ , para os casos com ruído dinâmico com e sem correlação. Na figura (a) temos  $\theta_1 = 4\pi/15$  e (b) com  $\theta_1 = \pi/3$ . A curva cinza tracejada serve como referência de um caso balístico.



Fonte: Autor

Conforme documentado na literatura, quando há o ruído dinâmico, o caminhante apresenta um crescimento proporcional a  $t^{0.5}$  (SCHREIBER et al., 2011). No entanto, em ambos os gráficos, notamos que a presença de correlação no sistema resulta em um regime intermediário, situado entre o crescimento balístico (representado pela curva tracejada em cinza) e o crescimento difusivo (representado pela curva tracejada em vermelho), exibindo um comportamento superdifusivo. Importante notar que esse comportamento parece não depender da diferença entre

Figura 19 – Gráfico do expoente  $\alpha$  representando a velocidade de crescimento do pacote de onda em função do ângulo  $\theta_1$ . Para cada configuração de ângulos, foi gerada uma caminhada de  $10^5$  passos, com uma média de 10 amostras. Foram fixados em (a)  $\theta_2 = \pi/4$ , em (b)  $\theta_2 = 4\pi/15$  e (c)  $\theta_2 = \pi/3$ .



Fonte: Autor

os ângulos, uma vez que  $\theta_1 - \theta_2 = \pi/12$  e  $\theta_1 - \theta_2 = \pi/60$  resultam nas mesmas características, com ambas as curvas seguindo uma tendência de crescimento proporcional a  $t^{0.75}$ . Entretanto, é evidente que quanto menor o valor de  $|\theta_1 - \theta_2|$ , maior é o tempo transiente. Em outras palavras, leva mais tempo para o caminhante atingir o seu regime assintótico, conforme observado ao comparar os tempos de início dos regimes assintóticos na figura 18.

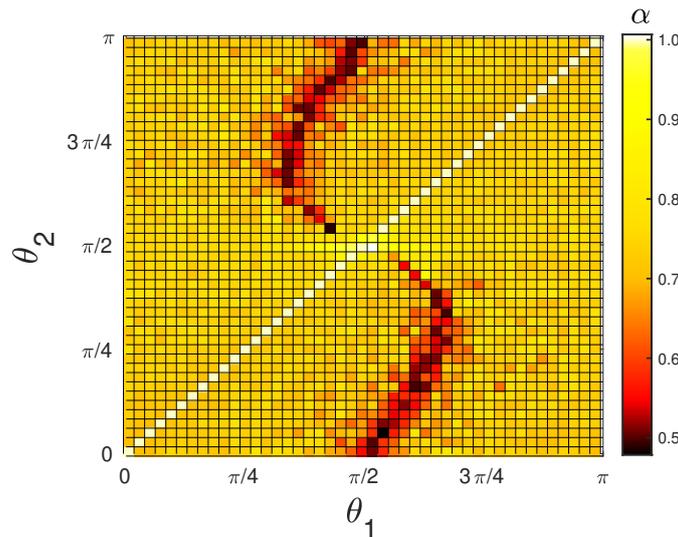
Para investigar se o comportamento superdifusivo se estende a outras portas quânticas, exploramos a lei de potência  $\alpha$  ( $\sigma(t) \propto t^\alpha$ ). Mantendo o valor de  $\theta_1$  constante e variando os valores de  $\theta_2$  examinamos o comportamento das curvas, como ilustrado na figura 19. Nas três figuras, a curva verde, que corresponde ao caso com ruído aleatória, é predominante em torno de  $\alpha = 0.5$ , indicando um comportamento difusivo, com exceção do cenário em que os ângulos são iguais, levando à caminhada quântica para um regime balístico.

Por outro lado, as curvas pretas, que representam o ruído dinâmico com a adição da correlação, mantêm-se principalmente em torno de  $\alpha \approx 0.75$  para a maioria dos casos. Entretanto,

quando os ângulos são idênticos, a caminhada retorna ao regime balístico. É notável que, para os três parâmetros, o cenário correlacionado exibe duas transições para o regime difusivo. Essas transições parecem ocorrer sempre para valores de  $\theta_1$  próximos a  $2\pi/3$ .

Para analisar o enfraquecimento das correlações em configurações específicas de ângulos, construímos um gráfico que investiga o impacto da variação dos ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  no expoente  $\alpha$ , como ilustrado na figura 20. Cada ponto na figura representa o expoente  $\alpha$  para uma média da dispersão ao longo de 5 realizações, considerando um total de  $8 \cdot 10^4$  passos, enquanto varremos as configurações de ângulos dentro do intervalo de  $0 \leq \theta_{1,2} \leq \pi$ . Sendo assim, mapeamos os regimes nos quais o caminhante se encontra em relação à adição de correlação.

Figura 20 – Gráfico do expoente  $\alpha$  em função de  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Neste gráfico, as cores representam os regimes da caminhada quântica. A cor preta representa um regime difusivo, cores intermediárias nos tons de amarelo e laranja representam regimes superdifusivos, e a cor branca representa o regime balístico.



Fonte: Autor

Observando a figura 20, notamos que para cada configuração de ângulos, existe uma região em que a caminhada ocorre em um regime difusivo. Além disso, percebemos que essa região é dependente das configurações angulares, não sendo sempre centrada em torno de  $2\pi/3$ , o que contraria a suspeita inicial. Outra observação importante é que prevalece um cenário em que o caminhante permanece predominantemente em um regime superdifusivo, exceto quando os ângulos são idênticos, nesse caso, o regime retorna ao comportamento balístico, assemelhando-se ao cenário de uma caminhada quântica ordenada.

## 4 Conclusões

Neste estudo, exploramos o cenário de caminhadas quânticas discretas unidimensionais em ambientes ruidosos. O ruído, nesse contexto, pode assumir várias formas, como o ruído espacial, que resulta na concentração do pacote de ondas próximo à posição inicial; o ruído temporal, que leva a um comportamento similar ao de uma caminhada clássica aleatória, onde o pacote de ondas se difunde; e o ruído flutuante, que não apresenta homogeneidade temporal nem espacial, resultando em uma propagação do caminhante em um regime difusivo. Conforme já documentado na literatura, a introdução de correlações, em grande parte de longo alcance, aperiódicas ou determinísticas, pode influenciar significativamente o comportamento das caminhadas quânticas (GULLO et al., 2017; SHAPIRA et al., 2003; MENDES et al., 2021). Neste contexto, nossa contribuição consistiu em introduzir uma correlação de curto alcance, denominada correlação do tipo "dímero aleatório temporal."

Nossos resultados evidenciam que esse tipo específico de correlação transforma o regime de caminhada de difusivo, para o caso com o ruído aleatório, para superdifusivo na maioria dos valores de  $\theta_1$ . No entanto, notamos que existem configurações de ângulos que levam à reversão para um regime difusivo, o que pode ser de grande relevância para estudos envolvendo filtros de correlação em sistemas quânticos (CERFONTAINE et al., 2021). Nossos resultados introduzem novos aspectos das caminhadas quânticas superdifusivas em ambientes caracterizados por heterogeneidades aperiódicas, uma vez que pares binários podem surgir espontaneamente em sequências tradicionais, como a sequência de Fibonacci.

Considerando o impacto notável da correlação de dímero aleatório temporal sobre o comportamento das caminhadas na presença de ruído, planejamos investigar futuramente outras características. Isso inclui avaliar seu efeito não apenas na dinâmica de transporte, mas também em relação ao emaranhamento do sistema, a interferência da não linearidade e o comportamento de propagação do pacote de ondas em sistemas bidimensionais. Vale ressaltar que propostas recentes de implementação, como um sistema de multiplexação de tempo baseado em um interferômetro Mach-Zehnder desequilibrado com um ciclo de feedback (GERALDI et al., 2021), indicam que o esquema proposto aqui pode ser viável para implementação imediata. Essa configuração já demonstrou sua capacidade de controlar portas quânticas no espaço e no tempo.

Por fim, caso o leitor tenha interesse, este trabalho também foi desenvolvido levando em conta o caso estático, e está disponível em (ALMEIDA et al., 2023).

## REFERÊNCIAS

- ABRAHAMS, E.; ANDERSON, P.; LICCIARDELLO, D.; RAMAKRISHNAN, T. Scaling theory of localization: Absence of quantum diffusion in two dimensions. **Physical Review Letters**, APS, v. 42, n. 10, p. 673, 1979.
- AGARWAL, G. S.; PATHAK, P. K. Quantum random walk of the field in an externally driven cavity. **Physical Review A**, APS, v. 72, n. 3, p. 033815, 2005.
- AHARONOV, Y.; DAVIDOVICH, L.; ZAGURY, N. Quantum random walks. **Physical Review A**, APS, v. 48, n. 2, p. 1687, 1993.
- ALMEIDA, G. R. M. d. et al. Correlações do tipo dímero aleatório em caminhadas quânticas em tempo discreto desordenadas. 2022.
- ALMEIDA, G. R. M. de; AMARAL, N.; BUARQUE, A. R. C.; DIAS, W. S. **Noise correlations behind superdiffusive quantum walks**. 2023.
- ANDERSON, P. W. Random-phase approximation in the theory of superconductivity. **Physical Review**, APS, v. 112, n. 6, p. 1900, 1958.
- BARCELOS, C.; ANDRADE, E.; BOAVENTURA, M. Notas em matemática aplicada. 10 2023.
- BENIOFF, P. The computer as a physical system: A microscopic quantum mechanical hamiltonian model of computers as represented by turing machines. **Journal of statistical physics**, Springer, v. 22, p. 563–591, 1980.
- BENIOFF, P. Quantum mechanical hamiltonian models of turing machines. **Journal of Statistical Physics**, Springer, v. 29, p. 515–546, 1982.
- BUARQUE, A.; DIAS, W. d. S. Aperiodic space-inhomogeneous quantum walks: Localization properties, energy spectra, and enhancement of entanglement. **Physical Review E**, APS, v. 100, n. 3, p. 032106, 2019.
- BUARQUE, A.; PASSOS, F.; DIAS, W.; RAPOSO, E. Discrete-time quantum walk dispersion control through long-range correlations. **arXiv preprint arXiv:2303.01608**, 2023.
- CAÇÃO, R.; CORTEZ, L.; FARIAS, I. D.; KOZYREFF, E.; MOQADAM, J. K.; PORTUGAL, R. Quantum walk on the generalized birkhoff polytope graph. **Entropy**, MDPI, v. 23, n. 10, p. 1239, 2021.
- CERFONTAINE, P.; HANGLEITER, T.; BLUHM, H. Filter functions for quantum processes under correlated noise. **Physical Review Letters**, APS, v. 127, n. 17, p. 170403, 2021.
- CHANDRASEKHAR, S. Stochastic problems in physics and astronomy. **Reviews of modern physics**, APS, v. 15, n. 1, p. 1, 1943.
- CHILDS, A. M.; CLEVE, R.; DEOTTO, E.; FARHI, E.; GUTMANN, S.; SPIELMAN, D. A. Exponential algorithmic speedup by a quantum walk. In: **Proceedings of the thirty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing**. ACM, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145%2F780542.780552>>.

CRESPI, A.; OSELLAME, R.; RAMPONI, R.; GIOVANNETTI, V.; FAZIO, R.; SANSONI, L.; NICOLA, F. D.; SCIARRINO, F.; MATALONI, P. Anderson localization of entangled photons in an integrated quantum walk. **Nature Photonics**, Nature Publishing Group UK London, v. 7, n. 4, p. 322–328, 2013.

DUNLAP, D. H.; WU, H.; PHILLIPS, P. W. Absence of localization in a random-dimer model. **Physical Review Letters**, APS, v. 65, n. 1, p. 88, 1990.

EVANGELOU YIN, Y.; KATSANOS. Quantum walks on a random environment. **Physical Review A**, APS, v. 77, n. 2, p. 022302, 2008.

FEYNMAN, R. P. Simulating physics with computers. **International journal of theoretical physics**, World Scientific, v. 21, n. 6/7, p. 467–488, 1982.

FEYNMAN, R. P. Quantum mechanical computers. **Optics news**, Optica Publishing Group, v. 11, n. 2, p. 11–20, 1985.

FRANCISCO, D.; IEMMI, C.; PAZ, J.; LEDESMA, S. Simulating a quantum walk with classical optics. **Physical Review A**, APS, v. 74, n. 5, p. 052327, 2006.

GERALDI, A.; DE, S.; LANEVE, A.; BARKHOFEN, S.; SPERLING, J.; MATALONI, P.; SILBERHORN, C. Transient subdiffusion via disordered quantum walks. **Physical Review Research**, APS, v. 3, n. 2, p. 023052, 2021.

GULLO, N. L.; AMBARISH, C.; BUSCH, T.; DELL'ANNA, L.; CHANDRASHEKAR, C. M. Dynamics and energy spectra of aperiodic discrete-time quantum walks. **Physical Review E**, APS, v. 96, n. 1, p. 012111, 2017.

KARSKI, M.; FÖRSTER, L.; CHOI, J.-M.; STEFFEN, A.; ALT, W.; MESCHÉDE, D.; WIDERA, A. Quantum walk in position space with single optically trapped atoms. **Science**, American Association for the Advancement of Science (AAAS), v. 325, n. 5937, p. 174–177, jul 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1126%2Fscience.1174436>>.

KNIGHT, P. L.; ROLDÁN, E.; SIPE, J. Optical cavity implementations of the quantum walk. **Optics Communications**, Elsevier BV, v. 227, n. 1-3, p. 147–157, nov 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016%2Fj.optcom.2003.09.024>>.

LÉVY, P. **Theorie de L'addition Des Variables Aleatoires**. Gauthier-Villars, 1954. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=yrlCnQAACAAJ>>.

MENDES, C.; ALMEIDA, G.; LYRA, M.; MOURA, F. de. Localization properties of a discrete-time 1d quantum walk with generalized exponential correlated disorder. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 394, p. 127196, 2021.

PANDEY, D.; SATAPATHY, N.; MEENA, M.; RAMACHANDRAN, H. Quantum walk of light in frequency space and its controlled dephasing. **Physical Review A**, APS, v. 84, n. 4, p. 042322, 2011.

PEARSON, K. The problem of the random walk. **Nature**, Nature Publishing Group UK London, v. 72, n. 1865, p. 294–294, 1905.

RAYLEIGH. The problem of the random walk. **Nature**, Nature Publishing Group UK London, v. 72, n. 1866, p. 318–318, 1905.

REIF, F. **Fundamentals of statistical and thermal physics**. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1998.

RIBEIRO, P.; MILMAN, P.; MOSSERI, R. Aperiodic quantum random walks. **Physical review letters**, APS, v. 93, n. 19, p. 190503, 2004.

RYAN, C. A.; LAFOREST, M.; BOILEAU, J.-C.; LAFLAMME, R. Experimental implementation of a discrete-time quantum random walk on an nmr quantum-information processor. **Physical Review A**, APS, v. 72, n. 6, p. 062317, 2005.

SCHREIBER, A.; CASSEMIRO, K. N.; POTOČEK, V.; GÁBRIS, A.; JEX, I.; SILBERHORN, C. Decoherence and disorder in quantum walks: From ballistic spread to localization. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 106, p. 180403, May 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.180403>>.

SCHREIBER, A.; CASSEMIRO, K. N.; POTOČEK, V.; GÁBRIS, A.; MOSLEY, P. J.; ANDERSSON, E.; JEX, I.; SILBERHORN, C. Photons walking the line: a quantum walk with adjustable coin operations. **Physical review letters**, APS, v. 104, n. 5, p. 050502, 2010.

SHAPIRA, D.; BIHAM, O.; BRACKEN, A.; HACKETT, M. One-dimensional quantum walk with unitary noise. **Physical Review A**, APS, v. 68, n. 6, p. 062315, 2003.

VIEIRA, R.; AMORIM, E. P. M.; RIGOLIN, G. Entangling power of disordered quantum walks. **Physical Review A**, American Physical Society (APS), v. 89, n. 4, apr 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.89.042307>>.

WANG, J.; MANOUCHEHRI, K. Physical implementation of quantum walks. **Heidelberg, Springer Berlin**, Springer, v. 10, p. 978–3, 2013.

ZHAO, Z.; DU, J.; LI, H.; YANG, T.; CHEN, Z.-B.; PAN, J.-W. **Implement Quantum Random Walks with Linear Optics Elements**. 2002.