



Universidade Federal de Alagoas - UFAL
Instituto de Matemática - IM

Programa de Pós-Graduação em Matemática
em associação com a Universidade Federal da Bahia



PEDRO HENRIQUE GOMES DE CARVALHO

**SOLITONS TIPO-ESPAÇO DO FLUXO DA CURVATURA MÉDIA COM TERMO DE
FORÇA EM ESPAÇOS LORENTZIANOS**

Orientador: Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva

MACEIÓ
AGOSTO DE 2023

Pedro Henrique Gomes de Carvalho

Solitons tipo-espaço do fluxo da curvatura média com termo de força em espaços Lorentzianos

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em Associação com a Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva

Maceió
Agosto de 2023

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Jorge Raimundo da Silva – CRB-4 - 1528

C331s Carvalho, Pedro Henrique Gomes de.

Solitons tipo-espaço do fluxo da curvatura média com termo de força em espaços Lorentzianos / Pedro Henrique Gomes de Carvalho. – 2023.

68 f.

Orientador: Márcio Henrique Batista da Silva.

Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática, Maceió : UFAL ; Salvador : Universidade Federal da Bahia, 2023.

Bibliografia: f. 67-68.

1. Espaço produto Lorentziano. 2. Translatings Solitons – Termo de força. 3. Trans-lating gráficos tipo-espaço inteiro. 4. Convexidade média.
I. Título.

CDU: 514.764

FOLHA DE APROVAÇÃO

AUTOR: PEDRO HENRIQUE GOMES DE CARVALHO

Solitons tipo-espaço do fluxo da curvatura média com termo de força em espaços Lorentzianos

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Trabalho aprovado, Maceió, 16 de agosto de 2023.

Banca Examinadora

Documento assinado digitalmente

 **MARCIO HENRIQUE BATISTA DA SILVA**
Data: 01/10/2023 06:41:54-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva - UFAL (Orientador)

Documento assinado digitalmente

 **GREGORIO PACELLI FEITOSA BESSA**
Data: 02/10/2023 16:01:49-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa - UFC (Avaliador Externo)

Documento assinado digitalmente

 **WAGNER OLIVEIRA COSTA FILHO**
Data: 01/10/2023 12:06:14-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Wagner Oliveira Costa Filho - UFAL (Avaliador Externo)

Documento assinado digitalmente

 **HILARIO ALENCAR DA SILVA**
Data: 01/10/2023 17:45:54-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva - UFAL (Avaliador Interno)

Documento assinado digitalmente

 **GREGORIO MANOEL DA SILVA NETO**
Data: 01/10/2023 14:31:57-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto - UFAL (Avaliador Interno)

Dedico este trabalho aos meus pais, Paulo e Edízia, ao meu querido irmão e à minha amada esposa Mayara Carvalho, sem vocês eu não conseguiria.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, desejo expressar meus mais profundos agradecimentos a Deus por mais uma conquista alcançada. Reconheço que, mesmo não sendo merecedor de tamanha bondade, Ele continua a estender Sua mão poderosa para me abençoar. Esta conquista é um reflexo da Sua graça e benevolência.

Inúmeras pessoas desempenharam papéis fundamentais na realização deste feito, e gostaria de iniciar meus agradecimentos pela minha família. Eles sempre me proporcionaram apoio emocional e estrutural, permitindo-me persistir nos estudos, e forneceram uma educação de excelência que foi o alicerce dessa jornada. A presença e o apoio de vocês foram essenciais para a conquista deste título. A responsabilidade que eu tinha era simplesmente estudar, mas mais crucial do que isso, vocês persistiram em orações, o que fez toda a diferença.

À minha amada esposa, gostaria de expressar minha sincera gratidão. Ao longo dos últimos anos, ela compartilhou comigo as dificuldades inerentes a um curso de doutorado, suportou meu estresse e dedicou parte dos seus dias para me apoiar emocionalmente. Seu amor e apoio incondicionais foram pilares fundamentais nessa jornada.

Durante essa longa jornada de quase 10 anos na IM-UFAL, tive o privilégio de conhecer muitos amigos que compartilharam o peso dessa carga, tornando os dias mais leves, compartilhando sorrisos e consolando nas lágrimas. Com vocês, aprendi que a verdadeira amizade é baseada no sacrifício, não apenas na torcida. Embora eu saiba que inevitavelmente esquecerei alguns nomes devido à extensão dessa caminhada, quero registrar meus agradecimentos a alguns amigos que estiveram ao meu lado em grande parte desta jornada: Matheus Martins, sua amizade foi vital para a conclusão deste trabalho, e agradeço imensamente pelo teu esforço e sacrifício. A Maria Ranilze, Leon Lima, aos grandes amigos de Arapiraca; Ana e Karen que ouviram muitos desabafos, muitas risadas e muitas conversas. Por fim, a todos que fizeram parte da nossa salinha no mestrado, meu sincero agradecimento. Coleciono, com vocês, belos momentos em minha memória.

Em especial, desejo expressar minha profunda gratidão a todos os meus mentores, os professores que contribuíram significativamente para minha formação ao longo dos anos. Isso inclui aqueles que estiveram comigo desde o ensino médio e competições acadêmicas, bem como aqueles que me orientaram durante o doutorado. Em particular, quero destacar meu agradecimento ao Professor Doutor Márcio Batista por aceitar a responsabilidade de me orientar em meu doutorado. Ele enfrentou comigo todas as dificuldades inerentes à mudança de área e se esforçou não apenas como professor, mas como amigo, para garantir o meu sucesso acadêmico e profissional. Através dele, redescobri o verdadeiro significado da docência, e hoje me espelho em sua carreira como professor. Nossas conversas semanais de longas horas me alegravam bastante.

Não posso deixar de agradecer ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro generosamente concedido ao longo de toda a minha formação acadêmica. Esse suporte financeiro desempenhou um papel vital na minha jornada e

na realização deste feito notável, desde o ensino médio com as bolsas olímpicas até o fim da carreira com a bolsa PICME.

Por fim, queria deixar algumas palavras de incentivo aos amigos que estão iniciando a jornada acadêmica: Persista, no final, sempre valerá a pena. Como disse Agostinho: "as maiores alegrias da vida são precedidas pelas maiores dores".

Pode até chover, e eu não ver o sol, mas além das nuvens eu sei que Ele está.

Salomão

RESUMO

Neste trabalho estudamos translating solitons com termo de força imersos no espaço produto Lorentziano $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{P}^n$. Sob restrições adequadas na curvatura da base \mathbb{P}^n nós deduzimos um tipo de princípio do máximo de Omori-Yau, e como aplicação mostramos um resultado de não existência. Além disso, também provamos que qualquer downward translating gráfico tipo-espaço inteiro que nunca intersecta o infinito nulo é média convexo. Além disso, com hipóteses adequadas na base \mathbb{P}^n provamos a limitação da segunda forma fundamental. No último capítulo, classificamos as hipersuperfícies de translação que são também translating sólitons.

Palavras-chave: Espaço produto Lorentziano. Translatings Solitons com termo de força. Translating gráficos tipo-espaço inteiro. Convexidade média.

ABSTRACT

In this work, we study translating solitons with a forcing term immersed in a Lorentzian product space $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{P}^n$. Under suitable curvature constraints on the curvatures of the Riemannian base \mathbb{P}^n , we deduce an Omori-Yau maximum principle, and as applications, we get a nonexistence result. Besides, we also prove that any entire spacelike downward-translating graph that never intersects null infinity is mean convex. Furthermore, under suitable assumptions on the base \mathbb{P}^n , we prove the boundedness of the second fundamental form of such translating solitons. In the last chapter, we classified as translation hypersurfaces those are also translating solitons.

Keywords: Lorentzian product spaces; Spacelike translating soliton with forcing term; Entire spacelike translating graphs; Mean convexity.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	CONCEITOS PRELIMINARES	14
2.1	Espaços munidos com um produto escalar	14
2.2	Variedades Semi-Riemannianas	16
2.2.1	Métricas semi-Riemannianas e a conexão de Levi-Civita	16
2.3	Hipersuperfícies	19
2.4	Alguns operadores diferenciáveis	20
2.4.1	Geodésicas e a aplicação exponencial	22
3	TRANSLATING SOLITON	24
3.1	Hipersuperfície tipo-espaço em espaço produto Lorentziano	24
3.2	Translating soliton tipo-espaço	25
3.3	Princípio do Máximo de Omori-Yau para Translating Solitons tipo-espaço	27
3.4	Resultado de não existência de translating soliton tipo-espaço completo	31
4	ESPAÇO DE ROBERTSON-WALKER GENERALIZADO	34
4.1	Conceitos	34
4.2	Princípio do Máximo de Omori-Yau para espaço GRW	36
4.3	Resultado de não Existência	40
5	DOWNWARD TRANSLATING GRÁFICO TIPO-ESPAÇO INTEIRO	44
5.1	Convexidade média de um Translating Soliton inteiro	44
6	A SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL DOS TRANSLATINGS	48
6.1	Fórmula do tipo Simons	48
6.2	A limitação da segunda forma fundamental	52
7	TRANSLATING SOLITON DE TRANSLAÇÃO	56
7.1	Histórico e notações	56
7.2	Translating solitons de translação em \mathbb{R}^n	58
7.3	Translating soliton de translação no espaço de Lorentz-Minkowski	63
	REFERÊNCIAS	68

1 INTRODUÇÃO

Seja \mathbb{R}_1^{n+1} um espaço de Minkowski $(\mathbb{R}^{n+1}, \bar{g})$ com a métrica Lorentziana

$$\bar{g} = -dx_1^2 + \sum_{i=2}^{n+1} dx_i^2.$$

Seja $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$ uma imersão isométrica tipo-espaço em um espaço de Minkowski. Relembremos que o fluxo da curvatura média (MCF) com um termo de força \mathcal{H} associado a imersão ψ é uma família de imersões tipo-espaço suaves $\Psi_t = \Psi(t, \cdot) : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$ com imagens $\Sigma_t^n = \Psi_t(\Sigma^n)$ satisfazendo a seguinte equação:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (H - \mathcal{H})\eta, \\ \Psi(0, p) = \Psi(p) \end{cases} \quad (1)$$

em algum intervalo, onde H representa o vetor curvatura média (não normalizado) da subvariedade tipo-espaço Σ_t^n em \mathbb{R}_1^{n+1} e η é o vetor unitário normal ao longo de Σ_0 ; veja mais sobre esse fluxo geométrico em [ECKER; HUISKEN, 1991].

Olhando no sentido de gráficos de funções, isto é, $\Sigma^n = \{(u(p), p) : p \in \Omega\} \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$, dizemos que Σ^n é uma hipersuperfície tipo-espaço se $u \in C^1(\Omega)$ e $|Du| < 1$ em Ω , onde Du é o gradiente de u e $|Du|$ é a norma em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Um caso interessante é o não paramétrico, onde cada Σ_t^n é uma hipersuperfície tipo-espaço, isto é, é o gráfico da função $U(t, \cdot)$ com $DU(t, \cdot) < 1$. Com cálculos simples podemos verificar que a equação (1) é equivalente a equação

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sqrt{1 - |DU(t, \cdot)|^2} \left[\operatorname{div} \left(\frac{DU}{\sqrt{1 - |DU(t, \cdot)|^2}} \right) - \mathcal{H} \right], \quad (2)$$

onde div significa o divergente em \mathbb{R}^n .

Aarons [2006], provou que a solução da equação (2) existe para todo t e assumindo $\mathcal{H} = c > 0$, $\Sigma_0 = \Psi(0, \Sigma)$ com curvatura limitada e nunca interceptando o futuro nulo infinito \mathcal{I}^+ ou o passado nulo infinito \mathcal{I}^- . Podemos, portanto, concluir que $\Sigma_t = \Psi(t, \Sigma)$ converge sob o fluxo para um gráfico convexo satisfazendo

$$H = -a\nu + c, \quad (3)$$

para $a < 0$ e $\nu = \langle \eta, e_{n+1} \rangle$, veja os Teoremas 1 e 3 em [AARONS, 2006], mas observe a diferença de sinal da nossa notação para a notação utilizada por Aarons em seu paper.

Como as soluções da equação (3) modelam o comportamento do MFC com o termo de força $\mathcal{H} = c$ no infinito, tal equação se mostra bastante interessante. Tais soluções são chamadas de "*downward translating soliton*" e no caso não paramétrico são dadas por funções suaves u que solucionam a equação:

$$\operatorname{div} \left(\frac{DU}{\sqrt{1 - |Du|^2}} \right) = c + \frac{a}{\sqrt{1 - |Du|^2}}, \quad (4)$$

para algum $a < 0$.

Vale ressaltar que o fluxo da curvatura média em uma variedade Lorentziana tem sido extensivamente estudado (veja [ECKER; HUISKEN, 1991],[ECKER, 1993],[ECKER, 1997],[ECKER, 2003],[GAO et al., 2014],[HUISKEN; YAU, 1996],[JU et al., 2010],[LI; SALAVESSA, 2011]) e tem possíveis aplicações na Relatividade Geral (para mais detalhes, veja [ECKER, 1997]).

Recentemente, Jian [2006] estudou soluções da equação (3) para o caso $c = 0$ no espaço de Minkowski e, de Lira e Martín [2019] estudaram o caso $c = 0$ no contexto Riemanniano geral e perceberam que tais soluções são soluções auto-similares para o fluxo da curvatura média que são invariante para o fluxo gerado por um campo vetorial paralelo completo em uma variedade Riemanniana. Um caso especial ocorre quando a variedade Riemanniana ambiente é o espaço produto $\mathbb{R} \times \mathbb{P}^n$ e o campo vetorial paralelo completo é somente o campo vetorial ∂_t . Similarmente ao que acontece no caso Euclidiano, eles os chamaram de sólitons de translação do MFC. Quando a métrica da base \mathbb{P}^n é rotacionalmente invariante e a curvatura seccional é não positiva, é possível caracterizar todos os sólitons de translação rotacionalmente invariantes. Além disso, eles usaram essas famílias de novos exemplos como barreiras para deduzir vários resultados de não existência. Também notamos que o caso $c = 0$ para a equação (3) foi extensivamente estudado por Batista e Lima [2022] no contexto Lorentziano, e foi obtido alguns resultados de não existência sob hipóteses adequadas sobre a curvatura da base e também construíram alguns exemplos assumindo que a base \mathbb{P}^n é rotacionalmente invariante e sua curvatura seccional é não positiva.

Motivado por esses resultados descritos acima, estudamos a não existência de sólitons de translação tipo-espaço completo imersos em um espaço produto Lorentziano $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{P}^n$, sob condições adequadas no tensor de curvatura da base Riemanniana \mathbb{P}^n . Em particular, fornecemos uma extensão de algumas ideias de [CHENG; YAU, 1975] e [LIRA; MARTÍN, 2019] para

esta nova configuração. Além do mais, usando ideias similares as de Spruck e Xiao [2016], obtemos convexidade em média para os translating gráficos inteiros sob \mathbb{P}^n e também provamos a limitação da norma da segunda forma fundamental de um translating sólito com termo de força.

Esse trabalho está organizado como segue: No capítulo 2 relembramos alguns conceitos básicos sobre variedades semi-Riemannianas. Vamos iniciar com uma exposição sobre formas bilineares simétricas e produto escalar num espaço vetorial de dimensão finita; posteriormente vamos definir o que é uma variedade Semi-Riemanniana para apresentarmos os conceitos de curvatura e conexão, bem como os conceitos introdutórios de imersões, esse capítulo serve para fixarmos algumas notações que serão utilizadas no trabalho.

No capítulo 3, fazemos uma breve exposição sobre hipersuperfícies tipo-espaço imersas em um espaço produto Lorentziano $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{P}^n$ e introduzimos a noção de translating soliton tipo-espaço. Neste capítulo também provamos uma versão do princípio do máximo de Omori-yau para translating soliton tipo-espaço completo imerso em $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{P}^n$, como também um resultado de não existência desses translatings solitons sob algumas restrições na base Riemanniana \mathbb{P}^n . No capítulo 4 são feitos alguns resultados similares aos do capítulo 3 para espaço de Robertson-Walker generalizado.

Nos capítulos 5 e 6 nos concentraremos em provar dois resultados: Primeiro, que um downward translating gráfico inteiro é média convexo; posteriormente, apresentaremos uma fórmula do tipo Simons para a norma da segunda forma fundamental e usaremos isso para provar que um translating soliton com curvatura média limitada tem segunda forma fundamental limitada.

Por fim, o capítulo 7 é dedicado a estudar hipersuperfícies de translação. Inspirado em Seo [2013], classificamos as hipersuperfícies tipo-espaço de translação com curvatura média dada por $H = D + C\theta$. Provamos que se $M \subset \mathbb{L}^{n+1}$ é tal hipersuperfície, então M é congruente a $\gamma \times \mathbb{R}^{n-1}$, onde γ é a curva solução da EDO (75).

2 CONCEITOS PRELIMINARES

Neste capítulo temos como objetivo estabelecer as notações que serão utilizadas nos demais capítulos dessa tese. Vamos iniciar com uma exposição sobre formas bilineares simétricas e produto escalar num espaço vetorial de dimensão finita; posteriormente vamos definir o que é uma variedade Semi-Riemanniana para apresentarmos os conceitos de curvatura e conexão, bem como os conceitos introdutórios de imersões. Para maiores detalhes, indicamos como referências ([O'NEILL, 1983], [NETO, 2004], [ROCHA et al., 2014]).

2.1 Espaços munidos com um produto escalar

Considere \mathcal{V} um espaço vetorial de dimensão finita. Uma forma bilinear simétrica $b : \langle , \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita

- Positiva definida, se $b(v, v) > 0$ para todo $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$
- Negativa definida, se $b(v, v) < 0$ para todo $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$
- Não-degenerada, se $b(v, v) = 0$ para todo $w \in \mathcal{V}$ implica que $v = 0$.

Se b é uma forma bilinear simétrica sobre \mathcal{V} e \mathcal{W} é um subespaço de \mathcal{V} , então a restrição $b|_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}} : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear simétrica sobre \mathcal{W} . Definimos o *índice* de b como a maior dimensão de um subespaço \mathcal{W} de \mathcal{V} tal que $b|_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}}$ é negativa definida.

Definição 2.1. *Um produto escalar sobre um espaço vetorial real de dimensão finita \mathcal{V} é uma forma bilinear simétrica $b : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ que é não-degenerada. Diremos que \mathcal{V} é um espaço com produto escalar se ele é munido com um produto escalar, e definimos o índice de \mathcal{V} como sendo o índice de seu produto escalar.*

Se \mathcal{V} é um espaço com produto escalar b e \mathcal{W} é um subespaço de \mathcal{V} , dizemos que \mathcal{W} é não-degenerado se a restrição $b|_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}} : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ for não-degenerada. Definimos o complemento ortogonal \mathcal{W}^\perp de \mathcal{W} em \mathcal{V} por

$$\mathcal{W}^\perp = \{v \in \mathcal{V}; b(v, w) = 0 \text{ para todo } w \in \mathcal{W}\}$$

Lema 2.1. *Sejam \mathcal{V} um espaço com produto escalar b e \mathcal{W} um subespaço de \mathcal{V} . Então*

- *b é não-degenerada se, e somente se, sua matriz com respeito a uma (e então a toda) base de \mathcal{V} for invertível*
- *Se \mathcal{W} é não-degenerado então $\dim(\mathcal{W}) + \dim(\mathcal{W}^\perp) = \dim(\mathcal{V})$ e $(\mathcal{W}^\perp)^\perp = \mathcal{W}$;*
- *\mathcal{W} é não-degenerado se, e somente se, $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{W}^\perp$. Em particular, \mathcal{W} é não-degenerado se e só se \mathcal{W}^\perp for não-degenerado.*

No que segue, supomos que \mathcal{V} é um espaço com produto escalar $b = \langle, \rangle$. Em relação a \langle, \rangle , dizemos que $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ é:

- **Tipo-tempo**, quando $\langle v, v \rangle < 0$;
- **Tipo-luz**, quando $\langle v, v \rangle = 0$;
- **Tipo-espaço**, quando $\langle v, v \rangle > 0$.

Da mesma forma, podemos definir o que significa um subespaço não-degenerado \mathcal{W} de \mathcal{V} ser *tipo-tempo*, *tipo-luz* ou *tipo-espaço*. Se $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ não for tipo-luz, define-se o sinal $\epsilon_v \in \{-1, 1\}$ de v por:

$$\epsilon_v = \frac{\langle v, v \rangle}{|\langle v, v \rangle|}.$$

A norma de $v \in \mathcal{V}$ é $|v| = \sqrt{\epsilon_v \langle v, v \rangle}$, e v é unitário se $|v| = 1$. É bem conhecido em Álgebra Linear que todo espaço vetorial real \mathcal{V} munido com um produto escalar \langle, \rangle admite uma base ortonormal. Assim, se $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é uma tal base, teremos que $\langle e_i, e_j \rangle = \epsilon_i \delta_{ij}$, onde ϵ_i denota o sinal de e_i e

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Podemos assim estabelecer o seguinte resultado:

Lema 2.2. *Sejam \mathcal{V} um espaço com produto escalar \langle, \rangle e $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de \mathcal{V} . Então*

- *todo $v \in \mathcal{V}$ admite uma única representação na forma $v = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \langle v, e_i \rangle e_i$;*
- *o número de elementos com sinais negativos em $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ é igual ao índice de \mathcal{V} .*

Seja \mathcal{V} um espaço vetorial no qual uma forma bilinear simétrica e não-degenerada $b = \langle, \rangle$ de índice 1 está definida, e $\mathcal{T} = \{u \in \mathcal{V}; \langle u, u \rangle < 0\}$. Para cada $u \in \mathcal{T}$, definimos o cone tipo-tempo de \mathcal{V} contendo u por $C(u) = \{v \in \mathcal{T}; \langle u, v \rangle < 0\}$.

A demonstração do seguinte lema pode ser encontrando em O’neill [1983].

Lema 2.3. *Sejam $v, w \in \mathcal{T}$. Então:*

- *O subespaço $\{v\}^\perp$ é tipo-espaço e $\mathcal{V} = \text{span}\{v\} \oplus \text{span}\{v\}^\perp$. Assim, \mathcal{T} é a união disjunta de $C(v)$ e $C(-v)$.*
- *$|\langle v, w \rangle| \geq |v||w|$, com igualdade se e só se v e w forem colineares.*
- *Se $v \in C(u)$ para algum $u \in \mathcal{T}$, então $w \in C(u) \leftrightarrow \langle v, w \rangle < 0$. Portanto, $w \in C(u) \leftrightarrow v \in C(w) \leftrightarrow C(v) = C(w)$.*
- *Se v e w pertencem ao mesmo cone tipo-tempo de \mathcal{V} , então existe um único número $\theta \geq 0$, chamado ângulo hiperbólico entre v e w , tal que*

$$\langle v, w \rangle = -|v||w|\cosh(\theta)$$

2.2 Variedades Semi-Riemannianas

2.2.1 Métricas semi-Riemannianas e a conexão de Levi-Civita

Definição 2.2. *Seja \overline{M}^{n+1} uma variedade diferenciável. Uma métrica semi-Riemanniana em \overline{M}^{n+1} é uma correspondência que associa, a cada $p \in \overline{M}^{n+1}$, um produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente $T_p\overline{M}$, com índice constante ν (isto é, cada $T_p\overline{M}$ tem índice ν), e que é diferenciável no seguinte sentido: Se x_1, x_2, \dots, x_{n+1} são as funções coordenadas de um sistema de coordenadas de \overline{M}^{n+1} , definido em um aberto \mathcal{U} , então as funções*

$$p \rightarrow \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right\rangle_p$$

são diferenciáveis em \mathcal{U} , para cada $i, j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$. Uma variedade semi-Riemanniana é um par $(\overline{M}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, onde \overline{M}^{n+1} é uma variedade diferenciável e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma métrica semi-Riemanniana em \overline{M}^{n+1} .

No que segue, por simplificação de notação, escreveremos \overline{M}^{n+1} para o par $(\overline{M}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Quando o índice ν de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é zero, \overline{M}^{n+1} é simplesmente uma variedade *Riemanniana*. Por outro lado, quando $\nu = 1$, \overline{M}^{n+1} é denominada uma **Variedade Lorentziana**.

Exemplo 2.1. *Para cada número inteiro $\nu \in \{0, 1, \dots, n+1\}$, seja \mathbb{R}_ν^{n+1} o espaço \mathbb{R}^{n+1} munido com o produto escalar*

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n+1-\nu} v_i w_i - \sum_{i=1-\nu+1}^{n+1} v_i w_i,$$

onde $v = (v_1, v_2, \dots, v_{n+1})$ e $w = (w_1, w_2, \dots, w_{n+1})$. Temos que \langle, \rangle tem índice ν . Neste contexto, \mathbb{R}_ν^{n+1} é chamado espaço semi-Euclidiano de índice ν e de dimensão $(n + 1)$. Quando $\nu = 0$, \mathbb{R}_ν^{n+1} torna-se simplesmente o espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} . Quando $n \geq 1$, \mathbb{R}_1^{n+1} é chamado espaço de Lorentz-Minkowski e é frequentemente denotado por \mathbb{L}^{n+1} .

Denotemos, a partir de agora, por $\mathfrak{X}(\overline{M})$ como sendo o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em \overline{M}^{n+1} e por $C^\infty(\overline{M})$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em \overline{M}^{n+1} .

Assim como ocorre em geometria Riemanniana, o teorema fundamental de Levi-Civita é válido também para variedades semi-Riemannianas. Enunciaremos dois lemas conhecidos e úteis, a demonstração pode ser encontrada em O’neill [1983], teoremas 3.11 e 3.35.

Lema 2.4. *Em uma variedade Semi-Riemanniana \overline{M} , existe uma única conexão $\overline{\nabla}$ tal que*

- $[V, W] = \overline{\nabla}_V W - \overline{\nabla}_W V$
- $X\langle V, W \rangle = \langle \overline{\nabla}_X V, W \rangle + \langle V, \overline{\nabla}_X W \rangle$

para todo $X, V, W \in \mathfrak{X}$. $\overline{\nabla}$ é dita conexão de Levi-Civita de \overline{M} , e é caracterizada pela fórmula de Koszul

$$2\langle \overline{\nabla}_V W, X \rangle = V\langle W, X \rangle + W\langle X, V \rangle - X\langle V, W \rangle - \langle V, [W, X] \rangle + \langle W, [X, V] \rangle + \langle X, [V, W] \rangle.$$

Lema 2.5. *Se \overline{M} é uma variedade semi-Riemanniana com conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$, então a aplicação $\overline{R} : \mathfrak{X}(\overline{M})^3 \rightarrow \mathfrak{X}(\overline{M})$, dada por*

$$\overline{R}(X, Y)Z = \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_{[X, Y]} Z,$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, é $C^\infty(\overline{M})$ -trilinear, sendo denominada o tensor de **curvatura** de \overline{M} .

A **curvatura seccional** é definida apenas para planos não degenerados. Dado um ponto $p \in \overline{M}$ e um plano tangente não degenerado $\pi \subset T_p \overline{M}$, definimos a curvatura seccional $\overline{K}(\pi)$ de π como sendo:

$$\overline{K}(\pi) = \frac{\langle \overline{R}_p(u, v)u, v \rangle}{\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2}$$

onde $\{u, v\}$ é uma base arbitrária de π .

Uma variedade semi-Riemanniana \overline{M} tem curvatura seccional constante em $p \in \overline{M}$ se $\overline{K}(\pi)$ independe do subespaço de dimensão 2 não-degenerado $\pi \subset T_p \overline{M}$. Um resultado

importante para variedades semi-Riemannianas de curvatura seccional constante c é que o tensor curvatura por de ser expresso como

$$\overline{R}(X, Y)Z = c\{\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X\}, \quad (5)$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

Definição 2.3. Se \overline{M} é uma variedade semi-Riemanniana, o tensor de Ricci de \overline{M} é definido por

$$Ric(X, Y) = Tr(Z \rightarrow R(X, Z)Y), X, Y \in \mathfrak{X}(\overline{M}).$$

Em outras palavras, se $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal, então

$$\overline{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \langle \overline{R}(X, e_i)Y, e_i \rangle \quad (6)$$

onde $\epsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle = \pm 1$. Se $p \in \overline{M}$ e $X \in T_p \overline{M}$, $|X| = 1$, o número $Ric(X, X)$ chama-se curvatura de Ricci em p na direção de X .

Uma definição bastante utilizada nessa tese é a seguinte:

Definição 2.4. Diremos que a curvatura de Ricci de uma variedade semi-Riemanniana \overline{M}^{n+1} é limitada inferiormente se existe $\kappa \in \mathbb{R}$ tal que $\overline{Ric}(X, X) \geq \kappa \langle X, X \rangle$ para qualquer $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

Para terminarmos essa seção, falaremos um pouco sobre orientabilidade. Anteriormente, dado \mathcal{V} um espaço vetorial de dimensão finita e $u \in \mathcal{V}$ tal que $\langle u, u \rangle < 0$, definimos o cone tipo-tempo $C(u)$. Em cada espaço tangente $T_p \overline{M}$ de uma variedade Lorentziana \overline{M}^{n+1} existem dois tipos de cones tipo-tempo e não há uma maneira intrínseca de distinguir um do outro. Precisaremos de algumas definições e resultados.

Definição 2.5. Uma variedade de Lorentz \overline{M}^{n+1} é temporalmente orientável se existir uma aplicação τ que associa a cada $p \in \overline{M}^{n+1}$ um cone tipo-tempo τ_p em $T_p \overline{M}$, a qual é suave no seguinte sentido: para $p \in \overline{M}^{n+1}$ existe uma vizinhança aberta U de p e um campo $V \in \mathfrak{X}(U)$ tais que $V(q) \in \tau_q$ para todo $q \in U$.

Proposição 2.1. Uma variedade de Lorentz \overline{M}^{n+1} é temporalmente orientável se, e somente se, existe um campo vetorial tipo-tempo $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$.

Sempre que uma variedade de Lorentz \overline{M}^{n+1} for temporalmente orientável, a escolha de uma aplicação τ como na Definição 2.5, ou de um campo vetorial tipo-tempo $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ a ela correspondente, será denominada uma **orientação temporal** para \overline{M}^{n+1} .

Por fim, seja τ uma orientação temporal para \overline{M} e $Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Se $Y(q) \in \tau_q$ (respectivamente, $-Y(q) \in \tau_q$) para todo $q \in \overline{M}$, dizemos que Y aponta para o futuro (respectivamente, aponta para o passado). Sendo $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ uma orientação temporal para \overline{M} , segue que um campo vetorial tipo-tempo Y sobre \overline{M} aponta para o futuro (respectivamente, para o passado) se, e somente se, $\langle Y, V \rangle < 0$ (respectivamente, $\langle Y, V \rangle > 0$).

2.3 Hipersuperfícies

Sejam (Σ^n, g) e $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ variedades semi-Riemannianas de dimensões n e $n + 1$, respectivamente. Uma imersão isométrica $\psi : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ é uma imersão tal que $\psi^*\overline{g} = g$. Dada $\psi : \Sigma \rightarrow \overline{M}$ imersão isométrica, dizemos que Σ é uma hipersuperfície de \overline{M} . Se \overline{M} é de Lorentz (espaço que mais estudaremos nesse trabalho), uma imersão isométrica $\Sigma : M \rightarrow \overline{M}$ é dita uma **hipersuperfície tipo-espaço** de \overline{M}^{n+1} se a métrica g de Σ for Riemanniana.

Considere \overline{M} uma variedade de Lorentz temporalmente orientada, uma propriedade interessante é que toda hipersuperfície tipo-espaço de \overline{M} admite um campo unitário normal globalmente definido. Segue daí que existe um campo vetorial unitário tipo-tempo T globalmente definido em \overline{M} , que determina a orientação temporal em \overline{M} . Como o hiperplano tangente é tipo-espaço em cada ponto $x \in \Sigma$, existe um único campo vetorial normal unitário tipo-tempo $\eta \in \Sigma$ que tem a mesma orientação temporal de T , assim podemos assumir que Σ é orientada por η . Vamos nos referir a η como a aplicação normal de Gauss de Σ apontando para o futuro. Em particular, cada hipersuperfície tipo-espaço de \overline{M}^{n+1} orientável é também orientável.

Seja ∇ a conexão de Levi-Civita de Σ e $\overline{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de \overline{M} . Então

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^\top$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ (podemos conferir [O'NEILL, 1983], lema 4.3), onde $(\cdot)^\top$ denota a componente tangente a Σ . Assim, podemos escrever

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y),$$

onde $\alpha(X, Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^\perp$ é a componente normal a Σ em \overline{M} . Denotaremos $\alpha : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$ como a **segunda forma fundamental** da imersão ψ . Logo, definindo $A : \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$ como sendo

$$\langle AX, Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \eta \rangle,$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, obtemos um campo de operadores lineares auto-adjuntos $A_p : T_p \Sigma \rightarrow T_p \Sigma$, $p \in \Sigma$, denominado **operador de forma da imersão** ψ . Podemos facilmente verificar que

$$A(X) = -\bar{\nabla}_X \eta \quad \text{e} \quad \alpha(X, Y) = \epsilon_\eta \langle AX, Y \rangle \eta,$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Enunciaremos alguns teoremas que estabelecem algumas relações entre a geometria de Σ e \bar{M} .

Proposição 2.2. *Sejam \bar{M}^{n+1} uma variedade semi-Riemanniana orientada e $\psi : \Sigma^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície (tipo espaço, no caso Lorentziano) orientada pela escolha de um campo normal unitário η , e $A : \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$ o operador de forma correspondente. Para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, temos:*

(a) (Equação de Gauss)

$$R(X, Y)Z = (\bar{R}(X, Y)Z)^\top + \epsilon_\eta (\langle AX, Z \rangle AY - \langle AY, Z \rangle AX). \quad (7)$$

(b) (Equação de Codazzi)

$$(\bar{R}(X, Y)\eta)^\top = (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X. \quad (8)$$

2.4 Alguns operadores diferenciáveis

Vamos entender alguns conceitos que serão utilizados ao longo desse trabalho, como o conceito de gradiente, divergente, Hessiano e Laplaciano.

Definição 2.6. *Para um conjunto aberto U de uma variedade semi-Riemanniana \bar{M}^{n+1} , dizemos que uma coleção de campos vetoriais $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$ em U é chamado um referencial ortonormal em U quando $\langle e_i, e_j \rangle = \epsilon_i \delta_{ij}$ em todo ponto de U e todos os $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$, onde ϵ_i denota o sinal de e_i .*

Se U é o domínio de um sistema de coordenada em \bar{M}^{n+1} , com campos coordenados $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} \right\}$, então é imediato verificar que a aplicação do processo de ortogonalização de Gramm-Schmidt a tais campos nos fornece um referencial ortonormal em U .

Definição 2.7. *O gradiente de uma função $f \in C^\infty(\bar{M})$, o qual denotaremos por $\bar{\nabla}f$, é um campo vetorial metricamente equivalente a df .*

Assim, $\langle \bar{\nabla}f, X \rangle = df(X) = X(f)$ para todo $X \in \mathfrak{X}(\bar{M})$. Em termos de um referencial ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$ temos

$$\bar{\nabla}f = \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i e_i(f) e_i \quad (9)$$

onde $e_i(f) = \langle \bar{\nabla} f, e_i \rangle$.

Definição 2.8. Dado um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ definimos a divergência de X como a função $div X : \bar{M}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$div X = tr\{Y(p) \rightarrow \bar{\nabla}_Y X(p)\}, p \in \bar{M}^{n+1}.$$

Em um referencial ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$ podemos escrever

$$div X = \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i \langle \bar{\nabla}_{e_i} X, e_i \rangle.$$

Definição 2.9. O Hessiano de uma função $f \in C^\infty(\bar{M})$, denotado por $Hess f$, é definido como sendo a aplicação $C^\infty(\bar{M})$ -bilinear $Hess : \mathfrak{X}(\bar{M}) \times \mathfrak{X}(\bar{M}) \rightarrow C^\infty(\bar{M})$ dada por

$$(Hess f)(X, Y) = \langle \bar{\nabla}_X(\bar{\nabla} f), Y \rangle.$$

Abaixo, vamos listar algumas propriedades do Hessiano de uma função.

Proposição 2.3. Para toda $f \in C^\infty(\bar{M})$ e quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ temos

- $(Hess f)(X, Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f$
- $(Hess f)(X, Y) = (Hess f)(Y, X)$.

Definição 2.10. Seja \bar{M}^{n+1} uma variedade semi-Riemanniana. O operador Laplaciano $\Delta : C^\infty(\bar{M}) \rightarrow C^\infty(\bar{M})$ de \bar{M}^{n+1} é definido por $\Delta f = tr(Hess f)$, para toda $f \in C^\infty(\bar{M})$.

Observamos que o Laplaciano também pode ser visto como um divergente, especificamente, com ajuda de um referencial ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$, temos

$$\Delta f = \sum_i^{n+1} \epsilon_i (Hess f)(e_i, e_i) = \sum_i^{n+1} \epsilon_i \langle \bar{\nabla}_{e_i}(\bar{\nabla} f), e_i \rangle = div(\bar{\nabla} f).$$

Proposição 2.4. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(\bar{M})$, $f, g \in C^\infty(\bar{M})$ e $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

Então

- $div(X + Y) = div X + div Y$,
- $div(fX) = f div X + \langle \bar{\nabla} f, X \rangle$,
- $\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \bar{\nabla} f, \bar{\nabla} g \rangle$,
- $\Delta(\phi \circ f) = \phi'(f)\Delta f + \phi''(f)|\bar{\nabla} f|^2$

2.4.1 Geodésicas e a aplicação exponencial

Sejam \overline{M}^{n+1} uma variedade semi-Riemanniana e $\alpha : I \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma curva diferenciável definida em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Dizemos que Z é um campo vetorial ao longo de α se a correspondência $I \ni t \rightarrow Z(t) \in T_{\alpha(t)}\overline{M}$ é diferenciável. O conjunto de todos os campos vetoriais ao longo de α será denotado por $\mathfrak{X}(\alpha)$.

Proposição 2.5. *Se $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$, então existe uma única função $Z \rightarrow Z' \in \mathfrak{X}(\alpha)$ satisfazendo:*

- $(aZ_1 + bZ_2)' = aZ_1' + bZ_2'$ para todos $a, b \in \mathbb{R}$;
- $(hZ)' = \frac{dh}{dt}Z + hZ'$ para qualquer $h \in C^\infty(I)$;
- $(V|_\alpha)'(t) = \overline{\nabla}_{\alpha'(t)}(V)$ para todo $t \in I$ e qualquer $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$;
- $\frac{d}{dt}\langle Z_1, Z_2 \rangle = \langle Z_1', Z_2 \rangle + \langle Z_1, Z_2' \rangle$, para quaisquer $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(\alpha)$.

Definição 2.11. *Uma curva $\alpha : I \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ é dita geodésica se $(\alpha')' = 0$.*

Com alguns cálculos simples podemos perceber que $(\alpha')' = 0$ equivale a

$$\frac{d^2(x_k \circ \alpha)}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n+1} \Gamma_{ij}^k(\alpha) \frac{d(x_i \circ \alpha)}{dt} \frac{d(x_j \circ \alpha)}{dt} = 0, \quad k \in \{1, 2, 3, \dots, n+1\} \quad (10)$$

onde x_1, x_2, \dots, x_{n+1} é um sistema de coordenadas de \overline{M}^{n+1} e Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel associados a conexão $\overline{\nabla}$. Perceba que a equação (10) nos dá justamente um sistema de $n+1$ equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, o que nos fornece alguns resultados de existência e unicidade.

Proposição 2.6. *Se $\alpha, \beta : I \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ são geodésicas tais que $\alpha'(0) = \beta'(a)$, para algum ponto $a \in I$, então $\alpha = \beta$.*

Proposição 2.7. *Dado $v \in T_p\overline{M}$, existe uma única geodésica α_v tal que*

- $\alpha_v'(0) = v$;
- α_v é maximal, isto é, tem domínio maximal.

Definição 2.12. *Seja $v \in U \subset T_p\overline{M}$ tal que a geodésica α_v é definida ao menos em $[0, 1]$. A função*

$$\begin{aligned} \exp_p & : U \rightarrow \overline{M}^{n+1} \\ v & \rightarrow \exp_p(v) = \alpha_v(1) \end{aligned}$$

é chamada aplicação exponencial.

Proposição 2.8. Para cada $p \in \overline{M}^{n+1}$, existe uma vizinhança $U_0 \subset T_p \overline{M}$ na qual \exp_p é um difeomorfismo sobre uma vizinhança V_p em \overline{M}^{n+1} .

O próximo resultado garante localmente a existência de um referencial ortonormal cujas derivadas covariantes num ponto é zero.

Lema 2.6. Sejam \overline{M}^{n+1} uma variedade semi-Riemanniana de dimensão $(n+1)$ e índice ν . Então, para cada $p \in \overline{M}^{n+1}$, existe um referencial ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$ ao redor de uma vizinhança de p satisfazendo $\overline{\nabla}_{e_i} e_j(p) = 0$. Este referencial será dito geodésico.

Demonstração. Seja $B_\delta(0) \subset T_p \overline{M}$ tal que $\exp_p : B_\delta(0) \rightarrow \exp_p(B_\delta(0))$ é um difeomorfismo. Defina $\phi = \exp_p \circ J$, onde $J : B_\delta(0) \subset \mathbb{R}_\nu^{n+1} \rightarrow B_\delta(0) \subset T_p \overline{M}$ é uma isometria. Sejam $v \in T_p \overline{M}$ com $\exp_p(tv) = \alpha_v(t)$ e $v = \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i$, para uma base ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$ de $T_p \overline{M}$. Note que

$$x_i(\alpha_v(t)) = (J^{-1})_i(tv) = t(J^{-1})_i(v) = ta_i$$

onde $J(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i$. Assim, $v = \alpha'_v(0) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0$ e deste modo $e_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_0$, fornecendo-nos que o referencial $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^{n+1}$ é ortonormal em p . Substituindo $x_i(\alpha_v(t)) = ta_i$ em 10 obtemos

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} \Gamma_{ij}^k(\alpha_v(t)) a_i a_j = 0, \quad k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$$

Sendo a_i, a_j arbitrários, $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ e o resultado segue. □

No caso de variedades Riemannianas, temos o seguinte conceito de completude.

Definição 2.13. Uma variedade Riemanniana \overline{M}^{n+1} é (geodesicamente) completa se para todo $p \in \overline{M}^{n+1}$, a aplicação exponencial, \exp_p , está definida para todo $v \in T_p \overline{M}$, isto é, se toda geodésica começando em p está definida para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.

3 Translating soliton

3.1 Hipersuperfície tipo-espaço em espaço produto Lorentziano

Neste capítulo, vamos considerar um espaço produto Lorentziano $(n + 1)$ -dimensional \overline{M}^{n+1} da forma $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{P}^n$, onde $(\mathbb{P}^n, g_{\mathbb{P}^n})$ é uma variedade Riemanniana n -dimensional e \overline{M}^{n+1} está dotado com a métrica produto padrão

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = -\pi_{\mathbb{R}}^*(dt^2) + \pi_{\mathbb{P}^n}^*(g_{\mathbb{P}^n}),$$

onde $\pi_{\mathbb{R}}$ e $\pi_{\mathbb{P}^n}$ denotam as projeções canônicas de $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{P}^n$ em cada fator. Para $t_0 \in \mathbb{R}$ fixo, nós dizemos que $\mathbb{P}_{t_0}^n = t_0 \times \mathbb{P}^n$ é um *slice* de \overline{M}^{n+1} . Considere uma variedade conexa n -dimensional Σ , $\psi : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão onde Σ^n é uma hipersuperfície tipo-espaço, com a métrica induzida $\langle \cdot, \cdot \rangle$ via ψ . Sempre assumiremos que a métrica de Σ^n é a métrica induzida por ψ e também denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Assim, como visto anteriormente, segue da conexão de Σ^n que podemos escolher um campo vetorial *tipo – tempo* globalmente definido $\eta \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$, tendo a mesma orientação que ∂_t , isto é, tal que $\langle \eta, \partial_t \rangle \leq -1$. Dizemos que η aponta para o futuro.

Aqui, vamos considerar a segunda forma fundamental $A : \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$, dada por $A(X) = -\overline{\nabla}_X \eta$. Também, vamos considerar a função curvatura média (não normalizada) de Σ^n definida como $H = \text{tr}(A)$. Além do mais, vamos denotar por $\overline{\nabla}$ e ∇ os gradientes com respeito as métricas de \overline{M}^{n+1} e Σ^n , respectivamente. Utilizando (9) vemos que o gradiente de $\pi_{\mathbb{R}}$ em \overline{M}^{n+1} é dado por

$$\overline{\nabla} \pi_{\mathbb{R}} = \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i e_i(\pi_{\mathbb{R}}) e_i = -\langle \overline{\nabla} \pi_{\mathbb{R}}, \partial_t \rangle \partial_t = -\partial_t.$$

Assim, denotando por $(\cdot)^\top$ a componente tangencial do campo vetorial em $\mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1})$ ao longo de Σ^n e considerando $\nu = \langle \eta, \partial_t \rangle$ a função ângulo de Σ^n , podemos concluir que o gradiente da função altura (vertical) $h = (\pi_{\mathbb{R}})|_\Sigma$ é dado por

$$\nabla h = (\overline{\nabla} \pi_{\mathbb{R}})^\top = -\partial_t^\top = -\partial_t - \nu \eta. \quad (11)$$

Portanto, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
 |\nabla h|^2 &= \langle -\partial_t - \nu\eta, -\partial_t - \nu\eta \rangle \\
 &= -1 + \nu^2 + \nu^2 - \nu^2 \\
 &= \nu^2 - 1,
 \end{aligned}$$

onde $|\cdot|$ denota a norma do campo em Σ^n . Além do mais, por (11) podemos deduzir a Hessiana de h , $\nabla^2 h : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow C^\infty(\Sigma)$, que é dada por

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 h(X, X) &= -\langle \nabla_X \partial_t^\top, X \rangle \\
 &= -\langle \bar{\nabla}_X (\partial_t + \nu\eta), X \rangle \\
 &= -\langle \bar{\nabla}_X \partial_t, X \rangle - X(\nu)\langle \eta, X \rangle - \nu\langle \bar{\nabla}_X \eta, X \rangle \\
 &= \nu\langle -\bar{\nabla}_X \eta, X \rangle \\
 &= \langle AX, X \rangle \nu,
 \end{aligned} \tag{12}$$

visto que $\bar{\nabla}_X \partial_t = 0$, confira a proposição 7.35 de O’neill [1983].

Assim, por (12) podemos obter o laplaciano de h como sendo

$$\Delta h = H\nu. \tag{13}$$

3.2 Translating soliton tipo-espaço

O estudo do fluxo da curvatura média se consolidou ao longo dos anos e, atualmente, pode-se encontrar na literatura notáveis trabalhos que tratam a respeito desse tema.

O fluxo da curvatura média, analiticamente, é retratado por um sistema de equações diferenciais que envolvem quantidades associadas a uma hipersuperfície em um determinado espaço (geralmente, \mathbb{R}^{n+1}). As hipersuperfícies se movimentam, em cada ponto, na direção do seu vetor normal com a velocidade dada pela sua curvatura média. Podemos reunir essas ideias na seguinte definição.

Definição 3.1. *Seja $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão. O fluxo da curvatura média é uma família de imersões $\Psi_t : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ com $t \in [0, T)$ tal que $\Psi_t(p) := \Psi(p, t)$ é uma aplicação $\Psi : [0, T) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ satisfazendo $\Psi(0, p) = \psi(p)$ e*

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, p) = H(t, p)\eta(t, p)$$

onde $H(t, p)$ é a curvatura média de $\Psi_t(\Sigma)$ e $\eta(t, p)$ é o vetor normal unitário ao longo de $\Psi_t(\Sigma)$.

Dada uma hipersuperfície inicial $\psi(\Sigma)$, denotaremos por $\Psi_t(\Sigma) = \Sigma_t$ e diremos que Σ evolui pelo fluxo da curvatura média quando Σ satisfaz as condições da definição (3.1) acima. Um questionamento natural ao se definir o fluxo da curvatura média é quando a equação dada na definição (3.1) possui solução.

O que nós iremos estudar nesse trabalho difere um pouco da definição (3.1), estudaremos o que vamos chamar de fluxo da curvatura média com termo de força e o espaço ambiente será uma variedade Lorentziana, podemos definir assim:

Definição 3.2. *O fluxo da curvatura média com um termo de força constante c de uma hipersuperfície tipo-espaço $\psi : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ em uma variedade Lorentziana $(n+1)$ -dimensional \overline{M}^{n+1} é uma aplicação $\Psi : [0, T) \times \Sigma^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ satisfazendo $\Psi(0, \cdot) = \psi(\cdot)$ e*

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = (H - c)\eta_t, \quad (14)$$

onde $H(t, \cdot)$ é o vetor curvatura média (não-normalizada) de $\Sigma_t^n = \Psi(t, \Sigma^n)$, que é uma hipersuperfície tipo-espaço para todo $t \in [0, t)$ e η_t é o normal unitário ao longo de Σ_t .

Se olharmos para a hipersuperfície Σ^n como um gráfico, isto é, $\Sigma^n = \{(u(p), p) : p \in \Omega\} \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$, diremos que Σ^n é uma hipersuperfície tipo-espaço estrita se $u \in C^1(\Omega)$ e $|Du| < 1$ em Ω , onde Du é o gradiente de u e $|DU|$ é a norma em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Um caso interessante acontece quando cada Σ_t^n é uma hipersuperfície tipo-espaço na forma de gráfico, isto é, é o gráfico da função $U(t, \cdot)$ com $|DU(t, \cdot)| < 1$. Com cálculos simples podemos verificar que a equação (14) é equivalente a equação

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sqrt{1 - |DU(t, \cdot)|^2} \left[\text{Div} \left(\frac{DU(t, \cdot)}{\sqrt{1 - |DU(t, \cdot)|^2}} \right) - c \right], \quad (15)$$

onde Div significa o divergente em \mathbb{R}^n .

O interessante, é que Aarons [2006] provou que a solução da equação (15) existe para todo t e, assumindo que $c > 0$, $\Sigma_0 = \Psi(0, \Sigma)$ tem curvatura limitada e nunca intersecta o futuro nulo \mathcal{I}^+ ou o passado nulo \mathcal{I}^- , então $\Sigma_t = \Psi(t, \Sigma)$ converge sob o fluxo da curvatura para um gráfico satisfazendo

$$H = -a\nu + c \quad (16)$$

para $a < 0$ e $\nu = \langle \eta, e_{n+1} \rangle$. Veja os Teoremas 1 e 3 em [AARONS, 2006], mas observe a diferença de sinal da nossa notação para a notação utilizada por Aarons em seu paper.

Como as soluções da equação (16) modelam o comportamento do fluxo da curvatura média com termo de força c , tal equação se mostra bastante interessante. Motivado por isso

e seguindo as mesmas ideias de Lira e Martín [2019], ver definição 02, diremos que uma hipersuperfície tipo-espaço $\psi : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ imersa em um espaço produto Lorentziano $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R}_1 \times \mathbb{P}^n$ é um **translating soliton** tipo-espaço do fluxo de curvatura média com respeito a ∂_t , com termo de força c e com constante sóliton $a \in \mathbb{R}$ se a função curvatura média (não-normalizada) satisfaz a equação (16).

Ao longo desse trabalho, chamaremos a imersão que satisfaz (16) com $a < 0$ de *downward translating soliton tipo-espaço*. Perceba que o campo vetorial unitário é dado por $\eta = \frac{\partial_t + Du}{\sqrt{1 - |Du|^2}}$, onde D denota a derivada em \mathbb{P} . Assim, temos que

$$\operatorname{div}_{\mathbb{P}} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 - |Du|^2}} \right) = \frac{a}{\sqrt{1 - |Du|^2}} + c, \quad (17)$$

e chamamos esses gráficos de u definidos em \mathbb{P} por *translating soliton tipo-espaço inteiro*. Veja que (17) é equivalente a

$$\left(\delta_{ij} + \frac{u_i u_j}{1 - |Du|^2} \right) u_{ij} = a + c\sqrt{1 - |Du|^2}, \quad (18)$$

onde $u_i = e_i(u)$ e $u_{ij} = e_j(e_i(u))$; estamos omitindo, por simplicidade, o somatório no lado esquerdo da igualdade.

3.3 Princípio do Máximo de Omori-Yau para Translating Solitons tipo-espaço

Primeiramente, relembre que o Laplaciano ponderado de uma função C^2 , $u : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$, é dado por

$$\Delta_f u = e^f \operatorname{div}(e^{-f} \nabla u), \quad (19)$$

onde f é uma função suave. Perceba que se f for uma função constante, temos o operador Laplaciano usual.

Assim, de acordo com Alías et al. [2016], podemos definir:

Definição 3.3. *Seja $(\Sigma^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Riemanniana e f uma função suave. Dizemos que o Laplaciano ponderado Δ_f satisfaz o princípio do máximo de Omori-Yau em Σ se, para cada $u \in C^2$ com $u^* = \sup_{\Sigma} u < +\infty$, existe uma sequência $\{x_k\} \subset \Sigma$ tal que*

$$u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}, \quad |\nabla u(x_k)| < \frac{1}{k}, \quad \text{e} \quad \Delta_f u(x_k) < \frac{1}{k},$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

Notamos que tais conceitos aparecem primeiro com Omori [1967] para o hessiano e depois com Yau [1975] para o Laplaciano.

Para o próximo resultado vamos precisar da seguinte definição:

Definição 3.4. *Seja $u : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução de (17). A hipersuperfície tipo espaço definida por u intersecta o infinito nulo \mathcal{I} se $\lim_{p \rightarrow \infty} |\nabla u|(p) = 1$.*

O teorema abaixo nos dá condição suficiente para garantir que o Laplaciano e um Laplaciano ponderado específico em um *translating soliton tipo-espaço* em um espaço produto Lorentziano satisfaz o princípio do Máximo de Omori-Yau.

Teorema 3.1. *Seja $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R}_1 \times \mathbb{P}^n$ um espaço produto Lorentziano, onde a base Riemanniana \mathbb{P}^n é completa com curvatura seccional $K_{\mathbb{P}^n}$ limitada por baixo. Assumindo que $\Psi : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ é um *translating soliton tipo-espaço completo* que nunca intersecta o infinito nulo \mathcal{I} , então o Laplaciano Δ e o Laplaciano ponderado Δ_{-ah} em Σ^n satisfazem o princípio do Máximo de Omori-Yau's.*

Demonstração. Primeiramente, lembre que o tensor curvatura R de uma hipersuperfície tipo-espaço $\Psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}_1 \times \mathbb{P}^n$ pode ser descrito em termos do operador de Weingarten A e do tensor curvatura \overline{R} de $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{P}^n$, através da equação de Gauss. Vamos considerar $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e $\{E_1, \dots, E_n\}$ um referencial local ortonormal. Então, segue da equação de Gauss (7) que

$$\langle R(X, E_i)X, E_i \rangle = \langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i \rangle - \langle AX, X \rangle \langle AE_i, E_i \rangle + \langle AE_i, X \rangle \langle AX, E_i \rangle.$$

Portanto, somando a equação acima em $i = 1, \dots, n$ e lembrando que

$$\overline{\text{Ric}}(X, X) = \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(X, E_i)X, E_i \rangle - \langle \overline{R}(X, \eta)X, \eta \rangle,$$

concluimos que

$$\text{Ric}_{\Sigma}(X, X) = \overline{\text{Ric}}(X, X) + \langle \overline{R}(X, \eta)X, \eta \rangle - H \langle AX, X \rangle + |AX|^2. \quad (20)$$

Além do mais, usando a proposição 42, capítulo 17 de [O'NEILL, 1983] temos que:

$$\begin{aligned} \langle \overline{R}(X, \eta)X, \eta \rangle &= \langle \overline{R}(X^*, \eta^*)X^*, \eta^* \rangle + 2\nu \langle \overline{R}(X^*, \partial_t)X^*, \eta^* \rangle \\ &+ 2 \langle X, \partial_t \rangle \langle \overline{R}(\partial_t, \eta^*)X^*, \eta^* \rangle + \nu \langle X, \partial_t \rangle \langle \overline{R}(X^*, \partial_t)\partial_t, \eta^* \rangle \\ &+ \langle X, \partial_t \rangle^2 \langle \overline{R}(\partial_t, \eta^*)\partial_t, \eta^* \rangle + \nu^2 \langle \overline{R}(X^*, \partial_t)X^*, \partial_t \rangle \\ &= K_{\mathbb{P}^n}(X^*, \eta^*) (\langle X^*, X^* \rangle_{\mathbb{P}^n} \langle \eta^*, \eta^* \rangle_{\mathbb{P}^n} - \langle X^*, \eta^* \rangle_{\mathbb{P}^2}^2), \end{aligned} \quad (21)$$

onde usamos que $X^* = X + \langle X, \partial_t \rangle \partial_t$, $\eta^* = \eta + \nu \partial_t$ e a definição de curvatura seccional. Por outro lado, como $\nabla h = -\partial_t^\top$ e utilizando o fato visto que $|\nabla h|^2 = \nu^2 - 1$, vemos que

$$\begin{aligned} \langle X^*, X^* \rangle_{\mathbb{P}^n} \langle \eta^*, \eta^* \rangle_{\mathbb{P}^n} &= [\langle X + \langle X, \partial_t \rangle \partial_t, X + \langle X, \partial_t \rangle \partial_t \rangle][\langle \eta + \nu \partial_t, \eta + \nu \partial_t \rangle] \\ &= [\langle X, X \rangle + 2\langle X, \partial_t \rangle^2 - \langle X, \partial_t \rangle^2][\langle \eta, \eta \rangle + 2\nu \langle \eta, \partial_t \rangle - \nu^2] \\ &= [|X|^2 + \langle X, \partial_t \rangle^2][-1 + 2\nu^2 - \nu^2] \\ &= [|X|^2 + \langle X, \nabla h \rangle^2][\nu^2 - 1] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle X^*, \eta^* \rangle_{\mathbb{P}^n}^2 &= \langle X + \langle X, \partial_t \rangle \partial_t, \eta + \nu \partial_t \rangle^2 \\ &= [\langle X, \eta \rangle + \langle X, \partial_t \rangle \langle \partial_t, \eta \rangle + \nu \langle X, \partial_t \rangle + \nu \langle X, \partial_t \rangle \langle \partial_t, \partial_t \rangle]^2 \\ &= [\langle X, \eta \rangle + 2\nu \langle X, \partial_t \rangle - \nu \langle X, \partial_t \rangle]^2 \\ &= [\langle X, \eta \rangle + \nu \langle X, \partial_t \rangle]^2 \\ &= [\nu \langle X, \partial_t \rangle]^2 \\ &= \langle X, \nabla h \rangle^2 \nu^2. \end{aligned}$$

Daí, substituindo essas igualdades em (21) verificamos que

$$\langle \bar{R}(X, \eta)X, \eta \rangle = K_{\mathbb{P}^n}(X^*, \eta^*)(\nu^2 |X|^2 - |X|^2 - \langle X, \nabla h \rangle^2). \quad (22)$$

Notamos agora que $\nu^2 |X|^2 - |X|^2 - \langle X, \nabla h \rangle^2 = |\nabla h|^2 |X|^2 - \langle X, \nabla h \rangle^2 \geq 0$. Então, assumindo que $K_{\mathbb{P}^n} \geq -\kappa$ para algum κ positivo, temos que $\text{Ric}_{\mathbb{P}^n} \geq -(n-1)\kappa$, então inserindo (22) em (20) e lembrando que $\bar{\text{Ric}}(X, X) = \text{Ric}_{\mathbb{P}^n}(X^*, X^*)$ (Veja por um instante O'neill [1983], capítulo 7, corolário 43), obtemos:

$$\text{Ric}_\Sigma(X, X) \geq -\kappa(n-1)|X^*|^2 - \kappa(\nu^2 |X|^2 - |X|^2 - \langle X, \nabla h \rangle^2) - H \langle AX, X \rangle + |AX|^2. \quad (23)$$

Usando o fato que $|X^*|^2 \leq \nu^2 |X|^2$, a equação (23) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \text{Ric}_\Sigma(X, X) &\geq -\kappa(n-1)\nu^2 |X|^2 - \kappa(\nu^2 |X|^2 - |X|^2 - \langle X, \nabla h \rangle^2) - H \langle AX, X \rangle + |AX|^2 \\ &\geq -\kappa n \nu^2 |X|^2 - H \langle AX, X \rangle + |AX|^2 \\ &\geq -\kappa n \nu^2 |X|^2 + \left(|AX| - \frac{H}{2} |X| \right)^2 - \frac{H^2}{4} |X|^2 \\ &\geq -\sup_\Sigma \left(n \kappa \nu^2 + \frac{H^2}{4} \right) |X|^2, \end{aligned} \quad (24)$$

e

$$\begin{aligned}
\text{Ric}_{-ah}(X, X) &:= \text{Ric}_\Sigma(X, X) - a\text{Hess}h(X, X) \\
&\geq -\kappa n\nu^2|X|^2 - H\langle AX, X \rangle + |AX|^2 - a\nu\langle AX, X \rangle \\
&\geq -\kappa n\nu^2|X|^2 + |AX|^2 - (H + a\nu)\langle AX, X \rangle \\
&= -\kappa n\nu^2|X|^2 + |AX|^2 - c\langle AX, X \rangle \\
&\geq -\kappa n\nu^2|X|^2 + \left(|AX| - \frac{|c|}{2}|X|\right)^2 - \frac{c^2}{4}|X|^2 \\
&\geq -\sup_\Sigma \left(n\kappa\nu^2 + \frac{c^2}{4}\right) |X|^2. \tag{25}
\end{aligned}$$

Como Σ não intersecta o infinito nulo, então ν e H são limitados, assim, por (16), (24) e (25) temos

$$\text{Ric}_\Sigma(\cdot, \cdot) \geq -(n-1)\Gamma\langle \cdot, \cdot \rangle$$

e

$$\text{Ric}_{-ah}(\cdot, \cdot) \geq -(n-1)\Gamma_0\langle \cdot, \cdot \rangle,$$

para uma constante positiva $\Gamma = \frac{1}{n-1} \sup_\Sigma \left(n\kappa\nu^2 + \frac{H^2}{4}\right)$ e $\Gamma_0 = \frac{1}{n-1} \sup_\Sigma \left(n\kappa\nu^2 + \frac{c^2}{4}\right)$.

Por uma questão de completude, para concluir o resultado nós vamos usar o mesmo argumento utilizado por Yau para o Laplaciano, podemos ver [YAU, 1975]. Não faremos a demonstração para o caso ponderado, mas as ideias seguem exatamente iguais, sem maiores dificuldades, a única mudança ocorre na fórmula de Bochner que pode ser encontrado em [WEI; WYLIE, 2009].

Voltando para a demonstração no caso do laplaciano usual, aplicando a fórmula de Bochner,

$$\Delta|\nabla u|^2 = |\nabla^2 u|^2 + \langle \nabla \Delta u, \nabla u \rangle + \text{Ric}(\nabla u, \nabla u),$$

para a função distância $r(\cdot) = \text{dist}_\Sigma(\cdot, o)$ relacionado a um ponto de referência $o \in \Sigma^n$, temos

$$\Delta r(x) \leq C + (n-1)\Gamma r(x) \text{ em } \Sigma^n \setminus B_{R_0}, \tag{26}$$

para uma raio R_0 suficientemente pequeno (no sentido fraco, se necessário).

Considere u uma função suave e limitada em Σ^n . Seja ϵ_j uma sequência positiva convergindo para 0 quando j tende para $+\infty$. Agora, defina

$$u_j(x) = u(x) - \epsilon_j(\log(r(x) + 2)).$$

Note que quando fixamos j , $u_j(x) \rightarrow -\infty$ se $r(x) \rightarrow +\infty$ e então u_j atinge o máximo em algum ponto p_j de Σ . Assim

$$\nabla u_j(p_j) = 0 \text{ e } \Delta u_j(p_j) \leq 0.$$

Agora, podemos analisar a sequência $\{p_j\}$ e obter algumas conclusões. Nós observamos que o caso interessante acontece quando $r(p_j) \rightarrow +\infty$, caso contrário o limite seria um ponto de máximo de u . Também assumimos que p_j não está no lugar dos pontos de mínimo (*cut locus*) de o , caso contrário poderíamos utilizar o método de Calabi's descrito em ([CHENG; YAU, 1975], pág 342). Assim,

$$|\nabla u(p_j)| \leq \frac{\epsilon_j}{r(p_j) + 2} < \epsilon_j,$$

e usando a estimativa por cima (26) do laplaciano ponderado de r , obtemos

$$\Delta u(p_j) \leq \epsilon_j \frac{C + (n-1)\Gamma r(p_j)}{r(p_j) + 2} \leq E\epsilon_j,$$

para alguma constante positiva E .

Por fim, para concluir o resultado, afirmamos que $\lim_{j \rightarrow +\infty} u(p_j) = \sup_{\Sigma} u$. De fato, suponha por absurdo que isso não seja verdade, então existe $q \in \Sigma^n$ tal que

$$u(q) > u(p_j) + \zeta, \tag{27}$$

para $\zeta > 0$ e j suficientemente grande. Observe que

$$u(p_j) = u_j(p_j) + \epsilon_j(\log(r(p_j)) + 2) \geq u_j(q) + \epsilon_j(\log(r(p_j)) + 2) = u(q) + \epsilon_j(\log r(p_j) - \log r(q)),$$

e então

$$u(p_j) > u(p_j) + \zeta + \epsilon_j(\log r(p_j) - \log r(q)),$$

para j suficientemente grande. Como, por hipótese, $r(p_j)$ converge para ∞ , temos uma contradição. Caso contrário, nós teríamos uma subsequência $\{p_{j_k}\}$ convergindo para um ponto \bar{p} . Usando a equação (27) e o fato que p_j é máximo de u_j , temos

$$u(\bar{p}) \geq u(q) \geq u(\bar{p}) + \zeta,$$

que é uma contradição. Assim, concluímos o resultado. \square

3.4 Resultado de não existência de translating soliton tipo-espaço completo

Nesse capítulo, vamos apresentar um teorema de não existência, para obter esse resultado vamos precisar utilizar o princípio do máximo obtido em (3.1).

Primeiro de tudo, vamos enunciar um lema que estabelece uma fórmula para o laplaciano ponderado Δ_{-ah} da função ângulo ν de um translating soliton tipo-espaço $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{P}^n$ com respeito a ∂_t ; a demonstração será omitida, mas ela está completa no lema 4.1 de [BATISTA; LIMA, 2022].

Lema 3.1. *Seja $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}_1 \times \mathbb{P}^n$ um translating soliton tipo-espaço, h a função altura e ν a função ângulo hiperbólico. Então*

$$\Delta_{-ah}\nu = (\text{Ric}_{\mathbb{P}^n}(\eta^*, \eta^*) + |A|^2)\nu,$$

onde A denota o operador forma de Σ^n com respeito a η , onde η aponta para o futuro dirigido. Além do mais, $\text{Ric}_{\mathbb{P}^n}$ representa o tensor de Ricci da base Riemanniana \mathbb{P}^n e $\eta^* = \eta + \nu\partial_t$ é a projeção ortogonal de η em \mathbb{P}^n .

Podemos agora provar o teorema da não existência. Segue abaixo:

Teorema 3.2. *Seja $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R}_1 \times \mathbb{P}^n$ um espaço produto Lorentziano, onde a base Riemanniana \mathbb{P}^n é completa com curvatura seccional limitada por baixo por $-\kappa$, para $\kappa \geq 0$. Então não existe uma translatin soliton tipo-espaço com termo de força c que nunca intersecta o infinito nulo \mathcal{I} em \overline{M}^{n+1} satisfazendo*

$$a^2 \geq \kappa n(n-1), \quad c^2 \geq a^2 - 2\kappa n(n-1) \quad \text{e} \quad ac < 0.$$

Demonstração. Assuma que exista tal translating soliton tipo-espaço. Note que podemos aplicar o Teorema (3.1). Considere uma função limitada e suave $g(p) = -\frac{1}{\sqrt{1+\nu^2}}$, podemos ver que:

$$\begin{aligned} \Delta_{-ah}g &= e^{-ah} \text{div}(e^{ah}\nabla g) \\ &= e^{-ah} \text{div}\left(e^{ah} \frac{\nabla \nu^2}{2(1+\nu^2)^{3/2}}\right) \\ &= \frac{1}{2(1+\nu^2)^{3/2}} e^{-ah} \text{div}(e^{ah}\nabla \nu^2) + e^{-ah} \left\langle \nabla\left(\frac{1}{2(1+\nu^2)^{3/2}}\right), e^{ah}\nabla \nu^2 \right\rangle \\ &= \frac{\Delta_{-ah}\nu^2}{2(1+\nu^2)^{3/2}} - \frac{3|\nabla \nu^2|^2}{4(1+\nu^2)^{5/2}}, \end{aligned} \tag{28}$$

e utilizando o Lema (3.1), temos

$$\begin{aligned} \Delta_{-ah}\nu^2 &= 2\nu\Delta_{-ah}\nu + 2|\nabla \nu|^2 \\ &= 2\nu(\text{Ric}_{\mathbb{P}^n}(\eta^*, \eta^*) + |A|^2)\nu + 2|\nabla \nu|^2 \\ &= 2\nu^2 \text{Ric}_{\mathbb{P}^n}(\eta^*, \eta^*) + 2\nu^2 \frac{(-a\nu + c)^2}{n} + 2|\nabla \nu|^2 \\ &\geq -2\kappa(n-1)\nu^2(-1+\nu^2) + 2\frac{(-a\nu + c)^2}{n}\nu^2 + 2|\nabla \nu|^2, \end{aligned} \tag{29}$$

onde nós usamos que $H^2 = (-a\nu + c)^2 \leq n|A|^2$ juntamente com a limitação da curvatura seccional de \mathbb{P}^n .

Assim, utilizando (38) na igualdade (28), temos que

$$\frac{-\kappa n(n-1)\nu^2(-1+\nu^2) + (-a\nu + c)^2\nu^2}{n(1+\nu^2)^2} \leq \frac{1}{(1+\nu^2)^{1/2}} \Delta_{-ah}g + \frac{3|\nabla \nu^2|^2}{4(1+\nu^2)^3},$$

que pode ser reescrito como

$$-\kappa(n-1)(1-g^2)(1-2g^2) + \frac{1-g^2}{n}(a\sqrt{1-g^2} + cg)^2 \leq -g\Delta_{-ah}g + \frac{3|\nabla\nu^2|^2}{4(1+\nu^2)^3}.$$

Assim, pelo Teorema (3.1), existe uma sequência de pontos $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ tal que $\lim_k g(p_k) = \sup_{\Sigma} g = g^*$, $\lim_k |\nabla g(p_k)| = 0$ e $\limsup_k \Delta_{ch}g(p_k) \leq 0$. Assim, tomando a sequência na desigualdade acima e passando o limite, nós temos

$$-\kappa(n-1)(1-(g^*)^2)(1-2(g^*)^2) + \frac{1-(g^*)^2}{n}(a\sqrt{1-(g^*)^2} + cg^*)^2 \leq 0,$$

e então

$$-\kappa n(n-1)(1-2(g^*)^2) + (a\sqrt{1-(g^*)^2} + cg^*)^2 \leq 0,$$

isto é

$$(2\kappa n(n-1) - a^2 + c^2)(g^*)^2 + 2acg^*\sqrt{1-(g^*)^2} + a^2 - \kappa n(n-1) \leq 0,$$

e usando a hipótese, temos uma contradição. Assim, concluímos o resultado. \square

Observação 3.1. *O caso $c = 0$ foi estudado por Batista e Lima [2022].*

Corolário 3.1. *Seja $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R}_1 \times \mathbb{P}^n$ um espaço produto Lorentziano, com base Riemanniana \mathbb{P}^n completa e curvatura seccional limitada por baixo por uma constante κ não-negativa. Então não existe um translating soliton tipo-espaço completo com termo de força c que nunca intersecta o infinito nulo \mathcal{I} tal que $c^2 \geq a^2$ e $ac < 0$*

Observamos que alguns exemplos são construídos no espaço de Minkowski, veja [JU et al., 2010]. Note que $ac \geq 0$, e além do mais, o exemplo intersecta o futuro nulo \mathcal{I} .

4 Espaço de Robertson-Walker generalizado

Nesse capítulo estaremos olhando para uma hipersuperfície imersa num espaço de Robertson-Walker generalizado, o qual denotaremos daqui em diante por GRW, provaremos um princípio do máximo de Omori-Yau para essas hipersuperfícies sob algumas condições, além do mais, provaremos um teorema de não existência para os solitons nesse espaço, também sob algumas hipóteses.

4.1 Conceitos

Considere \mathbb{P}^n uma variedade Riemanniana n -dimensional, e seja I uma variedade 1-dimensional (um círculo ou um intervalo aberto de \mathbb{R}). Denotaremos por $-I \times_f \mathbb{P}^n$ o produto $(n + 1)$ -dimensional $I \times \mathbb{P}^n$ com a métrica Lorentziana

$$\langle , \rangle = -dt^2 + f^2(t)\langle , \rangle_{\mathbb{P}^n},$$

onde $f > 0$ é uma função suave positiva em I , e $\langle , \rangle_{\mathbb{P}^n}$ é uma métrica Riemanniana em \mathbb{P}^n . Isto é, $-I \times_f \mathbb{P}^n$ nada mais é que o produto warped Lorentziano com a base Lorentziana $(I, -dt^2)$, fibra Riemanniana $(\mathbb{P}^n, \langle , \rangle_{\mathbb{P}^n})$, e a função warping f . Seguindo a terminologia utilizada em Alías e Colares [2007], vamos nos referir a $-I \times_f \mathbb{P}^n$ como um espaço GRW (*generalized Robertson-Walker*). Em particular, quando o fator Riemanniano \mathbb{P}^n tem curvatura seccional constante, então $-I \times_f \mathbb{P}^n$ é dita RW (*Robertson-Walker*).

Considere uma imersão suave $\psi : \Sigma^n \rightarrow -I \times_f \mathbb{P}^n$ de uma variedade conexa n -dimensional Σ num espaço GRW, e assuma que a métrica induzida via ψ é Riemanniana; isto é, Σ é uma hipersuperfície tipo-espaço. Neste caso, como

$$\partial_t = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{(t,x)}, \quad (t, x) \in -I \times_f \mathbb{P}^n$$

é um campo vetorial unitário tipo-tempo definida no ambiente GRW, então existe um unico campo normal unitário η tipo-tempo globalmente definido em Σ que tem a mesma orientação

que ∂_t , isto é

$$\langle \eta, \partial_t \rangle \leq -1 < 0 \text{ em } \Sigma$$

O campo vetorial dado por

$$K(t, x) = f(t)(\partial/\partial t)_{(t,x)}, \quad (t, x) \in -I \times_f \mathbb{P}^n$$

determina um campo conforme fechado que aponta para o futuro não nulo em $-I \times_f \mathbb{P}^n$. De fato

$$\bar{\nabla}_Z K = f'(t)Z$$

para cada campo vetorial Z tangente a $-I \times_f \mathbb{P}^n$ no ponto (t, x) , onde $\bar{\nabla}$ denota a conexão de Levi-Civita em $-I \times_f \mathbb{P}^n$. Seja $\psi : \Sigma^n \rightarrow -I \times_f \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço com mapa de Gauss η . A função altura de Σ , denotada por h , é a restrição da projeção $\pi_I(t, x) = t$ em Σ , isto é, $h : \Sigma \rightarrow I$ é dada por $h = \pi_I \circ \psi$. Perceba que o gradiente de π_I em $-I \times_f \mathbb{P}^n$ é dado por

$$\bar{\nabla}\pi_I = -\langle \bar{\nabla}\pi_I, \partial_t \rangle \partial_t = -\partial_t$$

Assim, o gradiente de h em Σ é dado por

$$\nabla h = (\bar{\nabla}\pi_I)^\top = -\partial_t^\top,$$

onde

$$\partial_t = \partial_t^\top - \langle \eta, \partial_t \rangle \eta$$

e ∂_t^\top denota a componente tangencial de ∂_t .

Para finalizar essa introdução, colocaremos algumas identidades interessantes. Assim como feito no início do capítulo anterior, vamos decompor $X = X^* - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t$, em componentes tangentes a base e a fibra, daí é fácil ver que

- $(\eta^*)^\top = -\langle \eta, \partial_t \rangle \nabla h$,
- $(E_i^*)^\top = E_i + \langle E_i, \nabla h \rangle \nabla h$,
- $(X^*)^\top = X + \langle X, \nabla h \rangle \nabla h$,

e então

- $\langle \eta^*, \eta^* \rangle_{\mathbb{P}^n} = \frac{1}{f^2(h)} \|\nabla h\|^2$,
- $\langle \eta^*, E_i^* \rangle_{\mathbb{P}^n} = -\frac{1}{f^2(h)} \langle \eta, \partial_t \rangle \langle E_i, \nabla h \rangle$
- $\langle \eta^*, X^* \rangle_{\mathbb{P}^n} = -\frac{1}{f^2(h)} \langle \eta, \partial_t \rangle \langle \eta, \nabla h \rangle$

4.2 Princípio do Máximo de Omori-Yau para espaço GRW

Teorema 4.1. *Seja $M^{n+1} = -I \times_f \mathbb{P}^n$ um espaço GRW, cuja base Riemanniana \mathbb{P}^n é completa com curvatura seccional $K_{\mathbb{P}^n}$ limitada por baixo por $-\kappa$, onde κ é uma constante positiva, e a função warped satisfazendo $(\ln f)'' \leq c$, onde c é uma constante não negativa e $f(h) \geq d > 0$. Seja $\psi : \Sigma \rightarrow M^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço tal que a curvatura média H e o ângulo hiperbólico ν são limitados.*

1. *Se $\alpha^* = \sup_{\Sigma} (\ln f)'(h) \in \mathbb{R}$, então o Laplaciano ponderado Δ_{-ah} em Σ satisfaz o princípio do Máximo de Omori-Yau's, para qualquer constante $a \leq 0$.*

2. *Se $\alpha_* = \inf_{\Sigma} (\ln f)'(h) \in \mathbb{R}$ então o Laplaciano ponderado Δ_{-ah} em Σ satisfaz o princípio do Máximo de Omori-Yau's, para qualquer constante $a \geq 0$.*

Demonstração. Primeiramente, lembre que o tensor curvatura R de uma hipersuperfície tipo-espaço $\psi : \Sigma^n \rightarrow -I \times \mathbb{P}^n$ pode ser descrito em termos do operador de Weingarten A e do tensor curvatura \bar{R} de $-I \times \mathbb{P}^n$, através da equação de Gauss. Vamos considerar $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e $\{E_1, \dots, E_n\}$ um referencial local ortonormal. Então, segue da equação de Gauss (7) que

$$\langle R(X, E_i)X, E_i \rangle = \langle \bar{R}(X, E_i)X, E_i \rangle - \langle AX, X \rangle \langle AE_i, E_i \rangle + \langle AE_i, X \rangle \langle AX, E_i \rangle.$$

Portanto, somando a equação acima em $i = 1, \dots, n$ e lembrando que

$$\bar{\text{Ric}}(X, X) = \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(X, E_i)X, E_i \rangle - \langle \bar{R}(X, \eta)X, \eta \rangle,$$

concluimos que

$$\text{Ric}_{\Sigma}(X, X) = \bar{\text{Ric}}(X, X) + \langle \bar{R}(X, \eta)X, \eta \rangle - H \langle AX, X \rangle + |AX|^2. \quad (30)$$

Um cálculo direto, porém pesado, usando a relação geral entre o tensor de curvatura do produto e os tensores de curvatura da base e da fibra, bem como as derivadas da função warped (veja a proposição 42 de [O'NEILL, 1983]) implica que, para nosso ambiente GRW, temos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \bar{R}(U, V)W &= R_{\mathbb{P}^n}(U^*, V^*)W^* + ((\ln f)')^2(\langle U, W \rangle V - \langle V, W \rangle U) \\ &\quad + (\ln f)'' \langle W, \partial_t \rangle (\langle V, \partial_t \rangle U - \langle U, \partial_t \rangle V) \\ &\quad - (\ln f)'' (\langle V, \partial_t \rangle \langle U, W \rangle - \langle U, \partial_t \rangle \langle V, W \rangle) \partial_t, \end{aligned} \quad (31)$$

para campos arbitrários em $-I \times_f \mathbb{P}^n$. Aqui, $R_{\mathbb{P}^n}$ denota o tensor curvatura da variedade Riemanniana \mathbb{P}^n ; Portanto, utilizando (31), obtemos que:

$$\begin{aligned} \overline{R}(X, \eta, X, \eta) &= f^2(h)\overline{R}_{\mathbb{P}^n}(X^*, \eta^*, X^*, \eta^*) + ((\ln f)')^2 (\langle X, X \rangle \langle \eta, \eta \rangle - \langle X, \eta \rangle^2) \\ &\quad + (\ln f)'' (-\langle X, X \rangle \langle \eta, \partial t \rangle^2 + 2\langle X, \eta \rangle \langle X, \partial t \rangle \langle \eta, \partial t \rangle - \langle \eta, \eta \rangle \langle X, \partial t \rangle^2) \\ &= \overline{R}(X^*, \eta^*, X^*, \eta^*) - ((\ln f)')^2 |X|^2 + (\ln f)'' (-|X|^2 \nu^2 + \langle X, \partial t \rangle^2). \end{aligned}$$

Além do mais, denotando por \overline{Ric} o tensor de Ricci de $-I \times_f \mathbb{P}^n$, segundo o corolário 43 de [O'NEILL, 1983], temos que

$$\begin{aligned} \overline{Ric}(X, X) &= Ric_{\mathbb{P}}(X^*, X^*) + (n((\ln f)')^2 + (\ln f)'')|X|^2 \\ &\quad - (n-1)(\ln f)'' \langle X, \partial t \rangle^2. \end{aligned} \quad (32)$$

Assim, juntando (31) e (32) temos que

$$\begin{aligned} \overline{Ric}(X, X) + \overline{R}(X, \eta, X, \eta) &= Ric_{\mathbb{P}}(X^*, X^*) + f^2(h)\overline{R}_{\mathbb{P}^n}(X^*, \eta^*, X^*, \eta^*) \\ &\quad + (n-1)((\ln f)')^2 |X|^2 + (\ln f)''(1-\nu^2)|X|^2 \\ &\quad - (n-2)(\ln f)'' \langle X, \partial t \rangle^2 \\ &\geq Ric_{\mathbb{P}}(X^*, X^*) + f^2(h)\overline{R}_{\mathbb{P}^n}(X^*, \eta^*, X^*, \eta^*) \\ &\quad + c(-\nu^2 + 1)(n-1)|X|^2, \end{aligned} \quad (33)$$

visto que $(\ln f)'' \leq c$ e $\langle X, \partial t \rangle^2 = \langle X, \nabla h \rangle^2 = |X|^2 |\nabla h|^2 \leq |X|^2 (-1 + \nu^2)$.

Logo, substituindo (33) em (32) temos que:

$$\begin{aligned} Ric_{\Sigma}(X, X) &\geq Ric_{\mathbb{P}}(X^*, X^*) + f^2(h)\overline{R}_{\mathbb{P}^n}(X^*, \eta^*, X^*, \eta^*) \\ &\quad + c(-\nu^2 + 1)(n-1)|X|^2 - H\langle AX, X \rangle + |AX|^2 \\ &\geq -\kappa(n-1)|X^*|^2 - \kappa f^2(h)\{\langle X^*, X^* \rangle \langle \eta^*, \eta^* \rangle - \langle X^*, \eta^* \rangle^2\} \\ &\quad + c(-\nu^2 + 1)(n-1)|X|^2 - H\langle AX, X \rangle + |AX|^2 \\ &\geq -\kappa(n-1)\frac{1}{f^2(h)}\nu^2 |X|^2 - \kappa\frac{1}{f^2(h)}\{\nu^2 |X|^2 - |X|^2 - \langle X, \nabla h \rangle^2\} \\ &\quad + c(-\nu^2 + 1)(n-1)|X|^2 - H\langle AX, X \rangle + |AX|^2 \\ &\geq -\kappa\frac{1}{f^2(h)}n\nu^2 |X|^2 + c(-\nu^2 + 1)(n-1)|X|^2 - H\langle AX, X \rangle + |AX|^2 \\ &\geq (-\kappa\frac{1}{f^2(h)}n\nu^2 + c(-\nu^2 + 1)(n-1))|X|^2 + \left(|AX| - \frac{H}{2}|X|\right)^2 - \frac{H^2}{4}|X|^2 \\ &\geq -\sup_{\Sigma} \left(\kappa\frac{1}{f^2(h)}n\nu^2 + c(1-\nu^2)(n-1)\right) |X|^2 \end{aligned} \quad (34)$$

Agora, defina

$$\lambda := \inf_{\Sigma} (a(\ln f)') \text{ e tome } \bar{\lambda} := \min\{0, \lambda\}$$

Assim, como

$$|X|^2 + \langle X, \nabla h \rangle^2 \leq |X|^2(1 + |\nabla h|^2) = |X|^2\nu^2,$$

e

$$\begin{aligned} -a \nabla^2 h(X, X) &= -a \langle \nabla_X \nabla h, X \rangle = a \langle \nabla_X \partial_t^\top, X \rangle = a \langle \bar{\nabla}_X (\partial_t + \nu \eta), X \rangle \\ &= a (\ln f)' (|X|^2 + \langle X, \nabla h \rangle^2) - a \langle AX, X \rangle \nu \\ &\geq \lambda (|X|^2 + \langle X, \nabla h \rangle^2) - a \langle AX, X \rangle \nu \\ &\geq \bar{\lambda} |X|^2 \nu^2 - a \langle AX, X \rangle \nu \end{aligned}$$

podemos finalmente concluir que

$$\begin{aligned} Ric_{-ah}(X, X) &= Ric_{\Sigma}(X, X) - a \nabla^2 h(X, X) \\ &\geq -\kappa \frac{1}{f^2(h)} n \nu^2 |X|^2 + c(-\nu^2 + 1)(n-1)|X|^2 - H \langle AX, X \rangle + |AX|^2 \\ &\quad + \bar{\lambda} |X|^2 \nu^2 - a \langle AX, X \rangle \nu \\ &\geq -\left(\kappa \frac{1}{f^2(h)} n \nu^2 - c(-\nu^2 + 1)(n-1) - \bar{\lambda} \nu^2 \right) |X|^2 - \frac{(H + a\nu)^2}{4} |X|^2 \\ &\geq -\sup_{\Sigma} \left(\kappa \frac{1}{f^2(h)} n \nu^2 - c(-\nu^2 + 1)(n-1) - \bar{\lambda} \nu^2 + \frac{(H + a\nu)^2}{4} |X|^2 \right) |X|^2 \end{aligned}$$

Portanto, como $n, \kappa, \bar{\lambda}, c$ são constantes, ν e H são limitados e $\frac{1}{f^2(h)} < \infty$ concluímos que existe uma constante positiva Γ tal que

$$Ric_{-ah}(\cdot, \cdot) \geq -(n-1)\Gamma \langle \cdot, \cdot \rangle$$

Assim, podemos utilizar o mesmo raciocínio utilizado em (3.1) e concluir o resultado. \square

Agora, vamos dar um conceito de sóliton baseado no artigo de Alias et al. [2020], começaremos introduzindo da seguinte maneira.

Seja M^m e \bar{M}^{n+1} variedades Riemannianas. Dado $\omega_* < 0 < \omega^*$, vamos considerar a aplicação diferenciável

$$\Psi : (\omega_*, \omega^*) \times M \rightarrow \bar{M}$$

tal que $\Psi_\tau = \Psi(\tau, \cdot)$ é uma imersão, para cada $\tau \in (\omega_*, \omega^*)$. Vamos denotar por $\psi = \Psi_0$. As subvariedades $\Psi_\tau(M)$ evoluem através do seu vetor curvatura média se

$$\frac{d\Psi}{d\tau} = \Psi_* \frac{\partial}{\partial \tau} = H, \quad (35)$$

onde H é o vetor curvatura média (não normalizado) de Ψ_τ .

Dado um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, definimos $\Phi : (\Omega_*, \Omega^*) \times \overline{M} \rightarrow \overline{M}$ para denotar o fluxo gerado por X definido no intervalo maximal (Ω_*, Ω^*) . Seja s o parâmetro do fluxo em Φ e defina

$$\overline{\Psi}_\tau(x) = \overline{\Psi}(\tau, x) = \Phi^{-1}(\sigma(\tau), \Psi_\tau(x)), \quad x \in M,$$

onde $\sigma : (\omega_*, \omega^*) \rightarrow (\Omega_*, \Omega^*)$ é a reparametrização das linhas do fluxo X da forma

$$s = \sigma(\tau).$$

Equivalentemente, podemos escrever

$$\Psi(\tau, x) = \Phi(\sigma(\tau), \overline{\Psi}(\tau, x)), \quad (\tau, x) \in (\omega_*, \omega^*) \times M.$$

Definição 4.1. *Seja \overline{M}^{n+1} uma variedade Riemanniana com um campo vetorial $X \in \Gamma(T\overline{M})$. Dada uma variedade m -dimensional M^m , nós dizemos que o fluxo da curvatura média $\Psi : (\omega_*, \omega^*) \times M \rightarrow \overline{M}$ é auto-similar se existe uma imersão isométrica $\psi : M \rightarrow \overline{M}$ e uma reparametrização $\sigma : (\omega_*, \omega^*) \rightarrow (\Omega_*, \Omega^*)$ das linhas de fluxo tais que*

$$\Psi_\tau(M) = \Phi_{\sigma(\tau)}(\psi(M)),$$

para todo $\tau \in (\omega_*, \omega^*)$, onde $\Phi : (\Omega_*, \Omega^*) \times \overline{M} \rightarrow \overline{M}$ é o fluxo gerado por X . Em outros termos, $\overline{\Phi}_\tau(M) = \psi(M)$, para todo $\tau \in (\omega_*, \omega^*)$.

Motivado por isso, podemos definir uma noção geral de soliton para o fluxo da curvatura média com respeito a um campo vetorial $X \in \Gamma(T\overline{M})$ da seguinte maneira.

Definição 4.2. *Uma imersão isométrica $\psi : M^m \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ é um soliton para o fluxo da curvatura média com respeito ao campo $X \in \Gamma(T\overline{M})$ se*

$$aX^\perp = H$$

ao longo de ψ para alguma constante $a \in \mathbb{R}$.

Com abuso de notação, também definimos que a subvariedade $\psi(M)$ é um soliton para o fluxo da curvatura média (com respeito ao campo X). Se $m = n$, isto é, para codimensão 1, a condição significa

$$H = a\langle X, N \rangle.$$

Assim, motivados por todas as definições acima, podemos definir o que será utilizado no trabalho.

Definição 4.3. Dizemos que uma hipersuperfície tipo-espaço $\psi : \Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$ imersa em um espaço GRW $M^{n+1} = -I \times_f \mathbb{P}^n$ é dita soliton tipo-espaço do fluxo da curvatura média com respeito a ∂_t , com termo de força c e constante soliton $a \in \mathbb{R}$ se a função curvatura média (não normalizada) é dada por:

$$H = a\nu + c$$

Para melhorar a notação e evitar repetições, diremos que um soliton tipo-espaço com constante soliton positiva (respectivamente negativa) satisfaz a condição (\star) quando α_* (respectivamente α^*) existe.

Corolário 4.1. Seja $M^{n+1} = -I \times_f \mathbb{P}^n$ um espaço GRW, com base Riemanniana \mathbb{P}^n completa com curvatura seccional $K_{\mathbb{P}^n}$ limitada por baixo por $-\kappa$, onde κ é uma constante positiva, e com a função warped satisfazendo $(\ln f)'' \leq 0$. Seja $\psi : \Sigma \rightarrow M^{n+1}$ um soliton tipo-espaço completo satisfazendo a condição (\star) . Se a curvatura média H é limitada, então o Laplaciano ponderado Δ_{-ah} em Σ satisfaz o princípio do máximo de Omori-Yau.

4.3 Resultado de não Existência

Nessa seção mostraremos alguns resultados de não existência. Para provar o primeiro resultado, vamos precisar utilizar o princípio do máximo de Omori-Yau e uma lema auxiliar que estabelece uma fórmula para o Laplaciano ponderado Δ_{-ah} da função ângulo hiperbólico ν de um soliton tipo-espaço $\psi : \Sigma^n \rightarrow -I \times \mathbb{P}^n$ com respeito a ∂_t . Segue abaixo o lemma:

Lema 4.1. Seja $\psi : \Sigma^n \rightarrow -I \times_f \mathbb{P}^n$ um soliton tipo-espaço tendo a função altura h e ângulo hiperbólico ν . Então

$$\Delta_{-ah}\nu = \left(Ric_{\mathbb{P}^n}(\eta^*, \eta^*) + |A|^2 + a f'(h) - (n-1)(\ln f)''(h)|\nabla h|^2 \right) \nu + c f'(h).$$

Aqui, A denota a segunda forma fundamental de Σ^n com respeito a direção futura η , $Ric_{\mathbb{P}^n}$ denota o tensor de Ricci da base Riemanniana \mathbb{P}^n e $\eta^* = \eta + \nu \partial_t$ projeção ortogonal de η em \mathbb{P}^n .

Demonstração. Utilizando o Corolário 8.2 de [ALÍAS; COLARES, 2007], nós temos que

$$\begin{aligned}\Delta\nu &= \langle \nabla H, \partial_t \rangle + f'(h)H + \nu|A|^2 \\ &\quad + \nu(\text{Ric}_{\mathbb{P}^n}(\eta^*, \eta^*) - (n-1)(\ln f)''(h)|\nabla h|^2)\end{aligned}$$

Como $H = a\nu + c$, temos que

$$\langle \nabla H, \partial_t \rangle = a\langle \nabla \Theta, \partial_t \rangle = \langle \nabla \Theta, \nabla(-ah) \rangle.$$

Portanto, como

$$\Delta_{-ah}\Theta = \text{div}_{-ah}(\nabla\nu) - \langle \nabla\nu, \nabla(-ah) \rangle,$$

o resultado segue. \square

Uma definição bastante usual é a de *condição de convergência nula*, diremos que o GRW $-I \times_f \mathbb{P}^n$ obedece a condição de convergência nula se

$$\text{Ric}_{\mathbb{P}}\langle \cdot, \cdot \rangle \geq (n-1) \sup_I (ff'' - f'^2)\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{P}}.$$

Reescrevendo, temos que o GRW obedece a condição de convergência nula se

$$\text{Ric}_{\mathbb{P}} \geq (n-1) \sup_I (f^2 (\ln f)'') \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{P}}.$$

Essa condição é interessante, pois se um GRW satisfaz essa condição, então podemos concluir que

$$\begin{aligned}\text{Ric}_{\mathbb{P}^n}(\eta^*, \eta^*) &\geq (n-1)f^2(h) (\ln f)''(h) |\eta^*|_{\mathbb{P}}^2 \\ &= (n-1)f^2(h) (\ln f)''(h) \frac{1}{f^2(h)} (\nu^2 - 1) \\ &= (n-1) (\ln f)''(h) |\nabla h|^2.\end{aligned}\tag{36}$$

Assim, conseguimos demonstrar dois teoremas de não existência.

Teorema 4.2. *Seja $M^{n+1} = -I \times_f \mathbb{P}^n$ um espaço GRW, cuja base Riemanniana \mathbb{P}^n tem curvatura seccional limitada por baixo por $-\kappa$, onde κ é uma constante positiva, e com a função warped monótona tal que $(\ln f)''$ é limitada superiormente e $f(h) \geq d > 0$. Então não existe um soliton tipo-espaço completo com termo de força, satisfazendo a condição (\star) , que não intersecta o infinito nulo, $c f'(h) \leq 0$, $a f'(h) \geq 0$ e $a^2 \geq -n(n-1) \inf_{\Sigma} \left(\frac{-\kappa}{f^2(h)} - (\ln f)''(h) \right)$, desde que $\inf_{\Sigma} \left(\frac{-\kappa}{f^2(h)} - (\ln f)''(h) \right)$ exista.*

Demonstração. A demonstração desse teorema será parecida com o teorema (3.2). Deixaremos a prova completa para que o trabalho fique completo.

Assuma que exista tal soliton tipo-espaço. Note que podemos aplicar o princípio do máximo de Omori-Yau. Considere uma função limitada e suave $g(p) = -\frac{1}{\sqrt{1+\nu^2}}$, podemos ver que:

$$\begin{aligned}
\Delta_{-ah}g &= e^{-ah} \operatorname{div}(e^{ah} \nabla g) \\
&= e^{-ah} \operatorname{div}\left(e^{ah} \frac{\nabla \nu^2}{2(1+\nu^2)^{3/2}}\right) \\
&= \frac{1}{2(1+\nu^2)^{3/2}} e^{-ah} \operatorname{div}(e^{ah} \nabla \nu^2) + e^{-ah} \left\langle \nabla\left(\frac{1}{2(1+\nu^2)^{3/2}}\right), e^{ah} \nabla \nu^2 \right\rangle \\
&= \frac{\Delta_{-ah} \nu^2}{2(1+\nu^2)^{3/2}} - \frac{3|\nabla \nu^2|^2}{4(1+\nu^2)^{5/2}}, \tag{37}
\end{aligned}$$

e utilizando o Lema (4.1), o fato que $cf'(h) \leq 0$, $af'(h) \geq 0$ e $\frac{H^2}{n} \leq |A|^2$ podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\Delta_{-ah} \nu^2 &= 2\nu \Delta_{-ah} \nu + 2|\nabla \nu|^2 \\
&= 2[\operatorname{Ric}_{\mathbb{P}}(\eta^*, \eta^*) + |A|^2 + af'(h) - (n-1)(\ln f)''(h)|\nabla h|^2] \nu^2 + 2cf'(h)\nu + 2|\nabla \nu|^2 \\
&\geq 2(\operatorname{Ric}_{\mathbb{P}}(\eta^*, \eta^*) - (n-1)(\ln f)''(h)|\nabla h|^2) \nu^2 + 2|A|^2 \nu^2 \\
&\geq 2(-\kappa|\eta^*|^2 - (n-1)(\ln f)''(h)|\nabla h|^2) \nu^2 + 2|A|^2 \nu^2 \\
&\geq 2\left(-\kappa \frac{|\nabla h|^2}{f^2(h)} - (n-1)(\ln f)''(h)|\nabla h|^2\right) \nu^2 + 2\frac{(a\nu+c)^2}{n} \nu^2 \\
&\geq 2\bar{\delta}(n-1)\nu^2(\nu^2-1) + 2\frac{(a\nu+c)^2}{n} \nu^2 \\
&\geq 2\left(\bar{\delta}(n-1) + \frac{a^2}{n}\right) \nu^4. \tag{38}
\end{aligned}$$

onde definimos

$$\delta = \inf_{\Sigma} \left(\frac{-\kappa}{f^2(h)} - (\ln f)''(h) \right) \quad \text{and} \quad \bar{\delta} = \min\{0, \delta\}.$$

Assim, utilizando a desigualdade acima em 37, temos que

$$\frac{2\left(\bar{\delta}(n-1) + \frac{a^2}{n}\right) \nu^4}{n(1+\nu^2)^2} \leq \frac{1}{(1+\nu^2)^{1/2}} \Delta_{-ah}g + \frac{3|\nabla \nu^2|^2}{4(1+\nu^2)^3}$$

Assim, pelo Teorema (4.1), existe uma sequência de pontos $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ tal que $\lim_k g(p_k) = \sup_{\Sigma} g = g^*$, $\lim \inf_k |\nabla g(p_k)| = 0$ e $\lim \inf_k \Delta_{-ah}g(p_k) \leq 0$. Assim, tomando a sequência na desigualdade acima e passando o limite, nós temos que

$$\frac{2\left(\bar{\delta}(n-1) + \frac{a^2}{n}\right) \nu^4}{n(1+\nu^2)^2} \leq 0$$

O que é um absurdo, visto que $a^2 \geq -n(n-1) \inf_{\Sigma} \left(\frac{-\kappa}{f^2(h)} - (\ln f)''(h) \right)$.

□

Teorema 4.3. *Seja $M^{n+1} = -I \times_f \mathbb{P}^n$ um espaço GRW satisfazendo a condição de convergência nula, cuja base Riemanniana \mathbb{P}^n é completa com curvatura seccional limitada por baixo, função warped monótona tal que $(\ln f)''$ é limitada superiormente e $f(h) \geq d > 0$. Então não existe um soliton tipo-espaço completo com termo de força c que nunca intersecta o infinito nulo satisfazendo a condição (\star) , a $f'(h) > 0$ e $c f'(h) < 0$.*

Demonstração. Perceba que se a hipersuperfície satisfaz a condição de convergência nula, então através da equação (36) temos que:

$$\begin{aligned}
\Delta_{-ah}\nu^2 &= 2\nu\Delta_{-ah}\nu + 2|\nabla\nu|^2 \\
&= 2[\text{Ric}_{\mathbb{P}}(\eta^*, \eta^*) + |A|^2 + a f'(h) - (n-1)(\ln f)''(h)|\nabla h|^2]\nu^2 + 2c f'(h)\nu + 2|\nabla\nu|^2 \\
&\geq 2|A|^2\nu^2 \\
&\geq \frac{2}{n}(a\nu + c)^2\nu^2 \\
&\geq \frac{2}{n}a^2\nu^4
\end{aligned}$$

Repetindo o mesmo processo anterior, utilizando o princípio do máximo de Omori-Yau concluímos que

$$\frac{\frac{2}{n}a^2\Theta^4}{n(1+\nu^2)^2} \leq 0$$

O que é um absurdo, visto que $a \neq 0$. □

Observação 4.1. *Quando a função warped não é monótona em I , nós podemos aplicar o teorema em slabs da forma $-J \times_f \mathbb{P}$, onde f é monótona no intervalo $J \subset I$.*

5 Downward Translating gráfico tipo-espaço inteiro

5.1 Convexidade média de um Translating Soliton inteiro

Antes de provarmos a convevidade média, vamos relembrar o princípio do máximo de Omori [OMORI, 1967].

Proposição 5.1. *Seja Σ uma variedade Riemanniana completa e conexa com curvatura seccional limitada por baixo. Se u é uma função suave tal que $u^* = \sup_{\Sigma} u < \infty$, então existe uma sequência $\{p_n\}$ de pontos em Σ satisfazendo:*

1. $u(p_n) \rightarrow u^*$;
2. $|\nabla u|(p_n) \rightarrow 0$;
3. $(\text{Hess}u)(p_n)(X, X) < \frac{1}{n}|X|^2$.

Usando essa proposição, podemos deduzir o seguinte:

Teorema 5.1. *A curvatura média de um translating soliton tipo-espaço inteiro em $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{P}^n$ que nunca intersecta o infinito nulo \mathcal{I} nunca muda de sinal, desde que \mathbb{P} seja completo e tenha curvatura seccional limitada por baixo com curvatura de Ricci não negativa.*

Demonstração. Considere uma função suave u solução de (18). Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ uma referencial ortonormal geodésico no ponto $p \in \mathbb{P}$. Denotemos por $a^{ij} = \delta_{ij} + \frac{u_i u_j}{w^2}$ e $w = (1 - |Du|^2)^{\frac{1}{2}}$, e daí perceba que podemos escrever (18) como

$$a^{ij} u_{ij} = cw + a.$$

Derivando a equação acima na direção de e_k , temos que

$$a_k^{ij} u_{ij} + a^{ij} u_{ijk} = cw_k. \quad (39)$$

Primeiro, vamos expandir alguns desses elementos. Observe que

$$\begin{aligned}
a_k^{ij} u_{ij} &= \left(\frac{u_{ik} u_j}{w^2} + \frac{u_i u_{jk}}{w^2} - 2 \frac{u_i u_j u_k}{w^3} \right) u_{ij} \\
&= \left(\frac{u_{ik} u_j}{w^2} + \frac{u_i u_{jk}}{w^2} + 2 \frac{u_i u_j u_l u_{lk}}{w^4} \right) u_{ij} \\
&= \frac{2}{w} \left(\frac{u_{ik} u_j}{w} + \frac{u_i u_j u_l u_{lk}}{w^3} \right) u_{ij} \\
&= \frac{2}{w} \left(-w_i u_{ik} - \frac{u_i u_j u_{jk}}{w^2} w_i \right) \\
&= \frac{-2}{w} \left(\delta_{ij} + \frac{u_i u_j}{w^2} \right) w_i u_{jk} \\
&= \frac{-2}{w} a^{ij} w_i u_{jk},
\end{aligned} \tag{40}$$

onde usamos que $w_i = -\frac{u_k u_{ik}}{w}$.

Veja que se derivarmos w_i na direção e_j vamos obter:

$$\begin{aligned}
w_{ij} &= -\frac{u_{kj} u_{ki}}{w} - \frac{u_k u_{kij}}{w} + \frac{u_k u_{ki} w_j}{w^2} \\
&= -\frac{u_k u_{kij}}{w} - \left(\frac{u_{kj} u_{ki}}{w} + \frac{u_k u_{ki} u_l u_{lj}}{w^3} \right) \\
&= -\frac{u_k u_{kij}}{w} - \frac{1}{w} \left(\delta_{kl} u_{ki} u_{lj} + \frac{u_k u_{ki} u_l u_{lj}}{w^2} \right) \\
&= -\frac{u_k u_{kij}}{w} - \frac{1}{w} a^{kl} u_{ki} u_{lj}.
\end{aligned}$$

Queremos agora uma forma de trocar a ordem das derivadas u_{ijk} , para isso vamos utilizar o lema da identidade de Ricci, que pode ser encontrado em [SPIVAK, 1979], segue abaixo:

Lema 5.1. *Dada $f \in C^3(M)$, para quaisquer $1 \leq i, j, k \leq n$, vale a igualdade*

$$f_{ijk} = f_{ikj} + \sum_s R_{kjis} f_s$$

onde R_{jksi} são os coeficientes de Ricci.

Antes de continuarmos com a demonstração do teorema, lembre que temos no gráfico da função u em $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{P}$:

$$\begin{aligned}
g_{ij} &= \delta_{ij} - u_i u_j \text{ (métrica)} \\
g^{ij} &= \delta_{ij} + \frac{1}{w^2} u_i u_j \text{ (inversa da métrica)} \\
h_{ij} &= \frac{u_{ij}}{w} \text{ (coeficientes da segunda forma fundamental)} \\
e |A|^2 &= \text{traço}((g^{-1})A^2) = \frac{1}{w^2} g^{ij} g^{kl} u_{ki} u_{lj}
\end{aligned}$$

Assim, substituindo (40) em (39) e fazendo alguns cálculos, temos que

$$\begin{aligned}
cw_k &= a_k^{ij} u_{ij} + a^{ij} u_{ijk} \\
cw_k &= -\frac{2}{w} a^{ij} w_i u_{jk} + a^{ij} u_{ijk} \\
c \frac{u_k w_k}{w} &= -\frac{2}{w} a^{ij} w_i u_{jk} + a^{ij} \frac{u_k u_{ijk}}{w} \\
cw_k \frac{u_k}{w} &= -\frac{2}{w} a^{ij} w_i u_{jk} \frac{u_k}{w} + a^{ij} (u_{kij} + \sum_k R_{kjis} u_s) \frac{u_k}{w} \\
cw_k \frac{u_k}{w} &= -\frac{2}{w} a^{ij} w_i u_{jk} \frac{u_k}{w} + a^{ij} u_{kij} \frac{u_k}{w} + a^{ij} R_{kjis} u_s \frac{u_k}{w} \\
cw_k \frac{u_k}{w} &= -\frac{2}{w} a^{ij} w_i u_{jk} \frac{u_k}{w} + a^{ij} (-w_{ij} - \frac{1}{w} a^{kl} u_{ki} u_{lj}) + a^{ij} R_{kjis} u_s \frac{u_k}{w} \\
cw_k \frac{u_k}{w} &= -\frac{2}{w} a^{ij} w_i u_{kj} \frac{u_k}{w} + a^{ij} (-w_{ij} - \frac{1}{w} a^{kl} u_{ki} u_{lj}) + a^{ij} R_{kjis} u_s \frac{u_k}{w} \\
cw_k \frac{u_k}{w^3} &= \frac{2}{w^3} a^{ij} w_i w_j + \frac{a^{ij}}{w^2} (-w_{ij} - \frac{1}{w} a^{kl} u_{ki} u_{lj}) + a^{ij} R_{kjis} u_s \frac{u_k}{w^3} \\
-c \frac{u_k}{w} \left(\frac{1}{w}\right)_k &= a^{ij} \left(\frac{1}{w}\right)_{ij} - \frac{1}{w} |A|^2 + a^{ij} R_{kjis} u_s \frac{u_k}{w^3}
\end{aligned} \tag{41}$$

Agora, perceba que

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,k,s} a^{ij} R_{kjis} \frac{u_s u_k}{w^3} &= g^{ij} R_{kjis} \frac{u_s u_k}{w^3} \\
&= \left(\delta_{ij} + \frac{u_i u_j}{w^2}\right) R_{kjis} \frac{u_s u_k}{w^3} \\
&= R_{kjj s} \frac{u_s u_k}{w^3} + R_{kjis} \frac{u_i u_j u_s u_k}{w^5} \\
&= -R_{jkjs} \frac{u_s u_k}{w^3} + R_{kjis} \frac{u_i u_j u_s u_k}{w^5} \\
&= -\frac{1}{w^3} \text{Ric}_{\mathbb{P}^n}(\nabla u, \nabla u) + \frac{1}{w^5} R(\nabla u, \nabla u, \nabla u, \nabla u) \\
&= -\frac{1}{w^3} \text{Ric}_{\mathbb{P}^n}(\nabla u, \nabla u).
\end{aligned}$$

Logo, substituindo em (41) temos que

$$\begin{aligned}
0 &= c \frac{u_k}{w} \left(\frac{1}{w}\right)_k + a^{ij} \left(\frac{1}{w}\right)_{ij} - \frac{1}{w} |A|^2 - \frac{1}{w^3} \text{Ric}_{\mathbb{P}^n}(\nabla u, \nabla u) \\
&= cw u_k \left(\frac{1}{w}\right)_k + w^2 a^{ij} \left(\frac{1}{w}\right)_{ij} - w |A|^2 - \frac{1}{w} \text{Ric}_{\mathbb{P}^n}(\nabla u, \nabla u).
\end{aligned}$$

Assim, multiplicando a expressão acima por $\frac{1}{w^2}$ ficamos com

$$\frac{|A|^2}{w} = \mathcal{L} \left(\frac{1}{w}\right) + c \frac{1}{w} \left\langle Du, D \left(\frac{1}{w}\right) \right\rangle - \frac{1}{w^3} \text{Ric}_{\mathbb{P}}(Du, Du), \tag{42}$$

para $\mathcal{L}v = a^{ij} v_{ij}$, que é um operador elíptico em \mathbb{P} .

Como a curvatura de Ricci da base é não negativa, temos a seguinte desigualdade:

$$\frac{|A|^2}{w} \leq \mathcal{L} \left(\frac{1}{w}\right) + c \frac{1}{w} \left\langle Du, D \left(\frac{1}{w}\right) \right\rangle. \tag{43}$$

Assim, utilizando o fato que $a^{ij} = \delta_{ij} + \frac{u_i u_j}{w^2}$ é limitado por cima (lembre-se que $|Du|^2 \leq c < 1$) e que a curvatura seccional é limitada por baixo, podemos aplicar o princípio do máximo de Omori (5.1) com a função $\frac{1}{w}$ na equação (43). Daí, existe uma sequência $\{p_k\}$ tal que $\limsup_k |A|^2(p_k) = 0$, logo

$$\frac{1}{n} \limsup_k H^2(p_k) \leq \limsup_k |A|^2 = 0. \quad (44)$$

Em particular,

$$\sup_{\mathbb{P}}(-\nu) = \sup_{\mathbb{P}} \left(\frac{1}{w} \right) = -\frac{c}{a}.$$

Finalmente, podemos concluir que

$$H = \begin{cases} -a\nu + c \geq 0, & \text{se } a < 0 \\ -a\nu + c \leq 0, & \text{se } a > 0 \end{cases},$$

como queríamos. □

Uma consequência interessante é a seguinte:

Corolário 5.1. *Todo downward translating soliton tipo espaço inteiro em $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{P}^n$ que nunca intersecta o infinito nulo \mathcal{I} é média convexo, desde que \mathbb{P}^n seja completo e tenha curvatura seccional não negativa.*

6 A segunda forma fundamental dos Translatings

Neste capítulo, vamos estabelecer a formula do tipo Simons para translatings do fluxo da curvatura média e usaremos isso para deduzir a limitação da segunda forma fundamental de um translating inteiro em nossa configuração.

6.1 Fórmula do tipo Simons

Primeiro de tudo, vamos fixar algumas notações que serão utilizadas no decorrer desse capítulo. Seja Σ uma hipersuperfície tipo-espaço em $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{M}^n(\kappa)$. Para $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, denotemos por $X^* := X + \langle X, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \frac{\partial}{\partial t}$. Considere um referencial geodésico ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de Σ . Também vamos escrever $X_i = \langle X, e_i \rangle$, $T_i = \langle \frac{\partial}{\partial t}, e_i \rangle$ e $a_{ij} = \langle Ae_i, e_j \rangle$, onde $T = \frac{\partial}{\partial t} + \nu\eta$, assim temos que:

$$\begin{aligned}
 \langle e_i^*, \eta^* \rangle &= \langle e_i + \langle e_i, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \frac{\partial}{\partial t}, \eta + \langle \eta, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \frac{\partial}{\partial t} \rangle \\
 &= \langle e_i, \eta \rangle + \langle e_i, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \langle \eta, \frac{\partial}{\partial t} \rangle + \langle e_i, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \langle \frac{\partial}{\partial t}, \eta \rangle + \langle e_i, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \langle \eta, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \\
 &= 2 \langle e_i, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \langle \eta, \frac{\partial}{\partial t} \rangle - \langle e_i, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \langle \eta, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \\
 &= \langle e_i, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \langle \eta, \frac{\partial}{\partial t} \rangle = \langle e_i, T \rangle \nu \\
 &= T_i \nu
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \langle e_i^*, e_j^* \rangle &= \langle e_i + \langle e_i, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \frac{\partial}{\partial t}, e_j + \langle e_j, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \frac{\partial}{\partial t} \rangle \\
 &= \langle e_i, e_j \rangle + \langle e_i, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \langle e_j, \frac{\partial}{\partial t} \rangle + \langle e_i, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \langle \frac{\partial}{\partial t}, e_j \rangle + \langle e_i, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \langle e_j, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \\
 &= \langle e_i, e_j \rangle + \langle e_i, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \langle e_j, \frac{\partial}{\partial t} \rangle + \langle e_i, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \langle \frac{\partial}{\partial t}, e_j \rangle - \langle e_i, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \langle e_j, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \\
 &= \langle e_i, e_j \rangle + \langle e_i, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \langle e_j, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \\
 &= \delta_{ij} + T_i T_j.
 \end{aligned}$$

O nosso objetivo neste começo é calcular a norma ao quadrado da segunda forma fundamental. Sabemos que a equação de Codazzi (8) é dada por

$$\langle \bar{R}(X, Y)\eta, Z \rangle = \langle \nabla_X AY, Z \rangle - \langle \nabla_Y AX, Z \rangle, \quad (45)$$

então podemos concluir que

$$\langle \bar{R}(e_k, e_j)\eta, e_i \rangle = \langle \nabla_{e_k} Ae_j, e_i \rangle - \langle \nabla_{e_j} Ae_k, e_i \rangle = a_{jik} - a_{kij} = a_{ijk} - a_{ikj}. \quad (46)$$

Assim, utilizando a equação de Gauss para espaços de curvatura seccional constante (5) e (46), temos

$$\begin{aligned} a_{ijkk} - a_{ikjk} &= e_k(a_{ijk} - a_{ikj}) \\ &= e_k(\bar{R}(e_k, e_j)\eta, e_i) \\ &= e_k(\kappa\{\langle e_k^*, \eta^* \rangle \langle e_j^*, e_i^* \rangle - \langle e_k^*, e_i^* \rangle \langle e_j^*, \eta^* \rangle\}) \\ &= \kappa e_k(T_k \nu \delta_{ij} - \nu T_j \delta_{ki}) \\ &= \kappa(\nu_k T_k \delta_{ij} + \nu \langle e_k, \nabla_{e_k} T \rangle \delta_{ij} - \nu_k T_j \delta_{ki} - \nu \langle e_j, \nabla_{e_k} T \rangle \delta_{ki}). \end{aligned}$$

Agora, se somarmos a expressão acima em k , ficaremos com

$$\begin{aligned} \sum_k (a_{ijkk} - a_{ikjk}) &= \sum_k [\kappa(\nu_k T_k \delta_{ij} + \nu \langle e_k, \nabla_{e_k} T \rangle \delta_{ij} - \nu_k T_j \delta_{ki} - \nu \langle e_j, \nabla_{e_k} T \rangle \delta_{ki})] \\ &= \kappa[\langle \nabla \nu, T \rangle \delta_{ij} + \nu \text{Div}(T) \delta_{ij} - \langle e_j, T \rangle \langle \nabla \nu, e_i \rangle - \nu \langle e_j, \nabla_{e_i} T \rangle] \\ &= \kappa[\langle \nabla \nu, T \rangle \delta_{ij} + \nu(-\nu H) \delta_{ij} - T_j \langle \nabla \nu, e_i \rangle - \nu \text{Hess}h(e_i, e_j)] \\ &= \kappa \langle \nabla \nu, T \rangle \delta_{ij} - \kappa \nu^2 H \delta_{ij} - \kappa T_j \langle \nabla \nu, e_i \rangle - \kappa \nu \text{Hess}h(e_i, e_j), \end{aligned}$$

onde h é a função altura e por (13) temos que $\text{Div}(T) = -\Delta h = -\nu H$.

Agora, vamos encontrar uma expressão para $a_{ikjk} - a_{kkij}$, usando a identidade de Ricci, temos que

$$a_{ikjk} - a_{kkij} = - \sum_m a_{mk} R_{mikj} - \sum_m a_{im} R_{mkkj}.$$

Por fim, vamos calcular $\sum_k (a_{ikjk} - a_{kkij})$. Veja que temos

$$\begin{aligned}
\sum_k (a_{ikkj} - a_{kkij}) &= \sum_k (a_{kikj} - a_{kkij}) \\
&= \sum_k e_j (a_{kik} - a_{kkj}) \\
&= \sum_k e_j (\langle \bar{R}(e_k, e_i)\eta, e_k \rangle) \\
&= \sum_k \kappa e_j (\{ \langle e_i^*, e_k^* \rangle \langle e_k^*, \eta^* \rangle - \langle e_k^*, e_k^* \rangle \langle e_i^*, \eta^* \rangle \}) \\
&= \kappa \sum_k e_j (T_k \nu \delta_{ik} - T_i \nu \delta_{kk}) \\
&= \kappa \sum_k (\nu_j T_k \delta_{ik} + \nu \langle e_k, \nabla_{e_j} T \rangle \delta_{ik} - \nu_j T_i \delta_{kk} - \langle e_i, \nabla_{e_j} T \rangle \nu \delta_{kk}) \\
&= \kappa (\nu_j T_i + \nu \langle e_i, \nabla_{e_j} T \rangle - n \nu_j T_i - n \langle e_i, \nabla_{e_j} T \rangle \nu) \\
&= (1 - n) \kappa \nu_j T_i + (1 - n) \kappa \nu \langle e_i, \nabla_{e_j} T \rangle.
\end{aligned}$$

Finalmente, podemos calcular o Laplaciano,

$$\begin{aligned}
\Delta a_{ij} &= \sum_k a_{ijkk} \\
&= \sum_k (a_{ijkk} - a_{ikjk}) + \sum_k (a_{ikjk} - a_{ikkj}) + \sum_k (a_{ikkj} - a_{kkij}) + \sum_k (a_{kk})_{ij} \\
&= \kappa \langle \nabla \nu, T \rangle \delta_{ij} - \kappa \nu^2 H \delta_{ij} - \kappa T_j \nu_i - \kappa \nu \text{Hess}h(e_i, e_j) - \sum_m a_{mk} R_{mikj} - \sum_m a_{im} R_{mkkj} \\
&\quad + (1 - n) \kappa \nu_j T_i + (1 - n) \kappa \nu \langle e_i, \nabla_{e_j} T \rangle + \sum_k (a_{kk})_{ij}.
\end{aligned}$$

Agora, como $|A|^2 = \sum_{ij} a_{ij}^2$ e $H = \text{Traço}(A) = \sum_i a_{ii}$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \Delta |A|^2 &= \frac{1}{2} \Delta (\sum a_{ij}^2) = \sum_{ij} a_{ij} \Delta a_{ij} + \sum_{i,j} |\nabla a_{ij}|^2 \\
&= \sum_{i,j,k} a_{ijk}^2 + \sum_{i,j} a_{ij} H_{ij} - \sum_{i,j,m,k} a_{ij} a_{mk} R_{mikj} - \sum a_{ij} a_{im} R_{mkkj} \\
&\quad + \sum_{i,j} a_{ij} (\kappa \langle \nabla \nu, T \rangle \delta_{ij} - \kappa \nu^2 H \delta_{ij} - \kappa T_j \nu_i \\
&\quad - \kappa \nu \text{Hess}h(e_i, e_j) + (1 - n) \kappa \nu_j T_i + (1 - n) \kappa \nu \langle e_i, \nabla_{e_j} T \rangle). \tag{47}
\end{aligned}$$

Assim, podemos finalmente enunciar o seguinte resultado:

Teorema 6.1 (Fórmula do tipo Simons). *Seja Σ uma hipersuperfície tipo-espaço de $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{M}^n(\kappa)$.*

Então,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|A|^2 &= |\nabla A|^2 + \text{traço}(A \circ \text{Hess}H) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} R_{ijij}(k_i - k_j)^2 - \kappa H \langle AT, T \rangle \\ &\quad + n\kappa|AT|^2 + n\kappa\nu^2 \left(|A|^2 - \frac{H^2}{n} \right), \end{aligned}$$

onde k_i são as curvaturas principais de Σ .

Demonstração. Apesar das contas serem simples, farei a demonstração para uma melhor familiarização com os termos. Primeiramente, como calculado em (12) e (11), temos que

$$\nabla h = -T \quad \text{e} \quad \text{Hess}h(e_i, e_j) = \nu \langle Ae_i, e_j \rangle$$

e daí,

$$\text{div}(T) = \text{div}(-\nabla h) = -\Delta h = -\nu H.$$

Por outro lado, perceba que

$$e_i(\nu) = e_i \langle \eta, \partial_t \rangle = \langle \nabla_{e_i} \eta, \partial_t \rangle = -\langle A(e_i), T \rangle,$$

assim:

$$\nabla \nu = \sum e_i(\nu) e_i = -\langle A(T), e_i \rangle e_i = -A(T).$$

Por fim,

$$\nabla_{e_j} T = -\nabla_{e_j}(\nabla h) = -(\nabla_{e_j}(\partial_t + \nu\eta))^\top = -\nu \nabla_{e_j} \eta = \nu A(e_j).$$

Agora, vamos calcular cada termo da equação (47), veja que:

- $\sum_{i,j,k} a_{ijk}^2 = |\nabla A|^2$
- $\sum_{ij} a_{ij} H_{ij} = \text{traço}(A \circ \text{Hess}H)$
- $-\sum a_{ij} a_{mk} R_{mikj} - \sum a_{ij} a_{im} R_{mkkj} = \sum_{i,j} \frac{1}{2} R_{ijij}(k_i - k_j)^2$
- $\sum \kappa \langle \nabla \nu, T \rangle \delta_{ij} a_{ij} = \sum_{ij} -\kappa \langle A(T), T \rangle a_{ij} \delta_{ij} = -\kappa H \langle A(T), T \rangle$
- $-\sum_{ij} \kappa \nu^2 H \delta_{ij} a_{ij} = -\kappa \nu^2 H^2$
- $\sum_{ij} -\kappa T_j \nu_i a_{ij} + \sum_{ij} (1-n) \kappa \nu_j T_i a_{ij} = \sum_{ij} -n \kappa \nu_j T_i a_{ij} =$
 $= \sum_{ij} -n \kappa \langle -A(e_j), T \rangle \langle T, e_i \rangle \langle A(e_i), e_j \rangle = \sum_{ij} n \kappa \langle A(T), e_j \rangle \langle A(e_i), e_j \rangle \langle T, e_i \rangle = n \kappa |AT|^2$

$$\begin{aligned}
& \bullet \sum_{ij} -\kappa\nu \text{Hess}h(e_i, e_j)a_{ij} + \sum_{ij}(1-n)\kappa\nu \langle e_i, \nabla_{e_j} T \rangle a_{ij} = \\
& = \sum_{ij} -\kappa\nu \text{Hess}h(e_i, e_j)a_{ij} + \sum_{ij}(n-1)\kappa\nu \langle e_i, \nabla_{e_j} \nabla h \rangle a_{ij} = \\
& = \sum_{ij} n\kappa\nu \text{Hess}h(e_i, e_j)a_{ij} = \sum_{ij} n\kappa\nu^2 \langle A(e_i), e_j \rangle \langle A(e_i), e_j \rangle = \\
& = n\kappa\nu^2 |A|^2
\end{aligned}$$

Portanto, basta substituir cada elemento de (47) para concluirmos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|A|^2 &= |\nabla A|^2 + \text{traço}(A \circ \text{Hess}H) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} R_{ijij}(k_i - k_j)^2 - \kappa H \langle AT, T \rangle \\
&\quad + n\kappa |AT|^2 + n\kappa\nu^2 \left(|A|^2 - \frac{H^2}{n} \right),
\end{aligned}$$

como queríamos provar. □

6.2 A limitação da segunda forma fundamental

Aqui, vamos demonstrar que a norma da segunda forma fundamental de um translating soliton em um espaço produto Lorentziano é limitada por cima.

Lema 6.1. *Seja Σ um translating soliton tipo-espaço em $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{M}^n(\kappa)$. Então,*

$$\text{Hess}\nu(X, Y) = -\kappa\nu(\langle T, X \rangle \langle T, Y \rangle - |T|^2 \langle X, Y \rangle) - \langle \nabla_T A \rangle X, Y + \nu \langle AX, AY \rangle.$$

Demonstração. Considere um referencial ortonormal geodésico $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ e a equação de Codazzi já mencionada em (45), temos então que

$$\begin{aligned}
\text{Hess}\nu(e_i, e_j) &= e_j(e_i(\nu)) - (\nabla_{e_i} e_j)\nu \\
&= e_j(e_i(\nu)) \\
&= e_j \langle -Ae_i, T \rangle = -\langle \nabla_{e_j} Ae_i, T \rangle - \langle Ae_i, \nabla_{e_j} T \rangle \\
&= -\langle (\nabla_{e_j} A)e_i, T \rangle + \nu \langle A^2 e_i, e_j \rangle \\
&= -\langle (\nabla_{e_j} A)T, e_i \rangle + \nu \langle A^2 e_i, e_j \rangle \\
&= -\kappa\nu \{ \langle e_i, T \rangle \langle e_j, T \rangle - |T|^2 \delta_{ij} \} - \langle (\nabla_T A)e_j, e_i \rangle + \nu \langle A^2 e_i, e_j \rangle.
\end{aligned}$$

Daí, o resultado segue trivialmente por lineariedade. □

Lema 6.2. *Seja Σ uma hipersuperfície tipo-espaço em $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{M}^n(\kappa)$. Então*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{i,j} R_{ijij}(k_i - k_j)^2 &= \kappa n |A|^2 + \kappa n |AT|^2 + \kappa |T|^2 |A|^2 - H \text{Traço}(A^3) - \kappa H^2 \\
&\quad - 2\kappa H \langle AT, T \rangle + |A|^4
\end{aligned}$$

Demonstração. Considere uma base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de $T_p\Sigma$ tal que $a_{ij} = k_i\delta_{ij}$. Usando a equação de Gauss, temos

$$\begin{aligned}
\langle R(e_i, e_j)e_i, e_j \rangle &= \langle \bar{R}(e_i, e_j)e_i, e_j \rangle - \langle Ae_j, e_j \rangle \langle Ae_i, e_i \rangle + \langle Ae_i, e_j \rangle \langle Ae_j, e_i \rangle \\
&= \kappa \{ \langle e_i^*, e_i^* \rangle \langle e_j^*, e_j^* \rangle - \langle e_i^*, e_j^* \rangle \langle e_j^*, e_i^* \rangle \} - a_{jj}a_{ii} + a_{ij}a_{ji} \\
&= \kappa \{ (\delta_{ii} + T_i T_i)(\delta_{jj} + T_j T_j) - (\delta_{ij} + T_i T_j)(\delta_{ji} + T_j T_i) \} \\
&\quad - a_{jj}a_{ii} + a_{ij}a_{ji} \\
&= \kappa \{ (1 + T_i^2)(1 + T_j^2) - T_i^2 T_j^2 \} - k_j k_i \\
&= \kappa (1 + T_i^2 + T_j^2 + T_i^2 T_j^2 - T_i^2 T_j^2) - k_i k_j \\
&= \kappa (1 + T_i^2 + T_j^2) - k_i k_j.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{i,j} R_{ijij} (k_i - k_j)^2 &= \sum_{i,j} \{ \kappa (1 + T_i^2 + T_j^2) k_i^2 - k_i^3 k_j \} - \sum_{i,j} \{ \kappa (1 + T_i^2 + T_j^2) k_i k_j - k_i^2 k_j^2 \} \\
&= \kappa (n|A|^2 + n|AT|^2 + |T|^2|A|^2) - H\text{traço}(A^3) \\
&\quad - (\kappa H^2 + 2\kappa H \langle AT, T \rangle - |A|^4),
\end{aligned}$$

e assim concluímos o resultado desejado. \square

Agora, podemos enunciar e demonstrar o resultado principal desse capítulo.

Teorema 6.2. *Seja Σ um translating soliton tipo-espaço em $\mathbb{R} \times \mathbb{M}^n(\kappa)$ com termo de força c e curvatura média limitada. Então, a norma da segunda forma fundamental é limitada.*

Demonstração. Usando o teorema (6.1) e o (lema 6.1), temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \Delta |A|^2 &= |\nabla A|^2 + (a\kappa\nu \langle AT, T \rangle - a\kappa\nu H|T|^2 + a \langle \nabla_T A, A \rangle - a\nu \text{Traço}(A^3)) \\
&\quad + (\kappa n|A|^2 + \kappa n|AT|^2 + \kappa|T|^2|A|^2 - H\text{Traço}(A^3)) \\
&\quad - \kappa H^2 - 2\kappa H \langle AT, T \rangle + |A|^4 - \kappa H \langle AT, T \rangle - \kappa\nu^2 H^2 + n\kappa|AT|^2 + n\kappa\nu^2|A|^2 \\
&= |\nabla A|^2 + \frac{a}{2} T(|A|^2) + \kappa(a\nu - 3H) \langle AT, T \rangle - (a\nu + H) \text{Traço}(A^3) - \kappa(1 + \nu^2) H^2 \\
&\quad + \kappa(n + |T|^2 + n\nu^2)|A|^2 + 2\kappa n|AT|^2 - a\kappa\nu H|T|^2 + |A|^4.
\end{aligned}$$

Nas próximas linhas vamos obter algumas estimativas. Primeiro, observe que

$$\begin{aligned}
|\kappa(a\nu - 3H) \langle AT, T \rangle| &\leq |\kappa| |a\nu - 3H| |AT| |T| \\
&\leq |\kappa| |a\nu - 3H| |A| |T|^2 \\
&\leq |\kappa| |a\nu - 3H| (-1 + \nu) |A|
\end{aligned}$$

e como ν é limitado, temos que:

$$\begin{aligned}
\kappa(a\nu - 3H)\langle AT, T \rangle &\geq -|\kappa||a\nu - 3H| - 1 + \nu^2|A| \\
&\geq -K_1|A| \geq -\frac{K_1^2}{2} - \frac{|A|^2}{2} \\
&\geq -\frac{K_1^2}{2} - \epsilon'|A|^4 - \frac{(1/2)^2}{4\epsilon'} \\
&\geq -K_2 - \epsilon'|A|^4.
\end{aligned}$$

A segunda desigualdade é a seguinte:

$$\begin{aligned}
\kappa(|T|^2 + n + n\nu^2)|A|^2 &= \kappa(n - 1 + \nu^2 + n\nu^2)|A|^2 \\
&\geq -K_2|A|^2 \geq -\frac{K_2^2}{4\epsilon''} - \epsilon''|A|^4,
\end{aligned}$$

onde usamos novamente a limitação de ν . A próxima é:

$$2n\kappa|AT|^2 \geq -\frac{\kappa}{4\epsilon'''} - \epsilon'''|A|^4,$$

e

$$-\kappa\nu H|T|^2 = -\kappa\nu(-a\nu + c)(-1 + \nu^2) \geq -K_3.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}T(|A|^2) &= \sum_{i,j,k} a_{ij}a_{ijk}T_k \geq -\epsilon \sum_{i,j,k} a_{ijk}^2 - \frac{1}{4\epsilon} \sum_{i,j,k} a_{ij}^2 T_k^2 \\
&= -\frac{1}{2}|\nabla A|^2 - \frac{1}{2}|A|^2|T|^2 \\
&\geq -\frac{1}{2}|\nabla A|^2 - \epsilon''''|A|^4 - K_4.
\end{aligned}$$

Assim, escolhendo $\epsilon', \dots, \epsilon''''$ pequeno suficiente, obtemos:

$$\frac{1}{2}\Delta|A|^2 \geq \frac{1}{2}|A|^4 - C. \quad (48)$$

Defina $f = |A|^2$ e considere $\zeta(x) = a^2 - r^2$ e $g = \zeta^2 f$. Então, aplicando (48) em $B_\Sigma(p, a)$, temos

$$\frac{g^2}{\zeta^4} \leq C_1 + \Delta(\zeta^{-2}g) = C_1 + \zeta^{-2}\Delta g - 2\zeta^{-3}\langle \nabla \zeta, \nabla g \rangle + g\Delta(\zeta^{-2}).$$

Seja \bar{x} um ponto de máximo de g em tal bola, então nós temos que $\nabla g(\bar{x}) = 0$ e $\Delta g(\bar{x}) \leq 0$.

Assim, usando o traço da equação de Gauss e a limitação de ν , obtemos que $\text{Ric}(\nu, \nu) \geq -\frac{\alpha^2}{4}$, onde α é uma constante e então por (26) nós temos que $\Delta r^2 \leq C_3(1 + r^2)$. Assim, em \bar{x} , temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}g^2 &\leq C_1\zeta^4 + g\zeta^4\Delta(\zeta^{-2}) = C_1\zeta^4 - 2g\zeta\Delta\zeta + 6g|\nabla\zeta|^2 \\
&\leq C_2(a^8 + 2g(a^2\Delta r^2 + 12r^2)) \\
&\leq C_4(a^8 + a^4g),
\end{aligned}$$

para a suficientemente grande. Portanto, $g(\bar{x}) \leq C_5 a^4$ e fazendo $a \rightarrow \infty$, concluímos que $|A|^2 \leq C_5$, daí finalizamos a demonstração. \square

Corolário 6.1. *Qualquer translating soliton inteiro com termo de força c em $\mathbb{R}_1 \times \mathbb{M}(\kappa)$ que nunca intersecta o infinito nulo tem segunda forma fundamental limitada. Em particular, se u é uma solução suave de (17) com $|Du| \leq c_0 \leq 1$, então a Hesse é limitada.*

7 Translating soliton de translação

7.1 Histórico e notações

Em \mathbb{R}^3 , uma superfície é dita uma superfície de translação se é dada por uma imersão

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \rightarrow (x, y, f(x) + g(y))$$

onde $z = f(x) + g(y)$ e f e g são funções suaves. Um famoso exemplo de superfície mínima em \mathbb{R}^3 é a superfície mínima de translação conhecida como superfície de Scherk's. De fato, Scherk [1835] mostrou em 1835 que excetuando os planos, as únicas superfícies mínimas de translação são as superfícies dadas por

$$z = \frac{1}{c} \log \left| \frac{\cos(cy)}{\cos(cx)} \right|,$$

onde c é uma constante diferente de zero. Em 1991, Dillen et al. [1991] generalizou esse resultado para dimensões mais altas no espaço Euclidiano. Primeiramente, a definição generalizada é:

Definição 7.1. *Uma hipersuperfície $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é dita uma hipersuperfície de translação se M é o gráfico de uma função*

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n), \quad (49)$$

onde f_i são funções suaves de uma variável real para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

A partir disso, ele mostrou que:

Teorema 7.1. *Seja M uma hipersuperfície mínima de translação em \mathbb{R}^{n+1} . Então M é um hiperplano ou $M = \Sigma \times \mathbb{R}^{n-2}$, onde Σ é uma superfície mínima de translação de Scherk's em \mathbb{R}^3 .*

Seguindo uma linha parecida, Liu [1999] investigou superfícies de translação com curvatura média constante tanto no espaço tridimensional euclidiano quanto no espaço de Minkowski. Em particular, ele descobriu que necessariamente tais superfícies têm curvatura de Gauss constante igual a zero. No caso de uma superfície de translação no espaço euclidiano com curvatura de Gauss constante, ele também provou que necessariamente tal constante deve ser zero.

O que nós vamos estudar nesse capítulo é o que acontece com os translating sólitons que são também hipersuperfícies de translação.

Nessa pequena introdução, vamos considerar um translating sólito em \mathbb{R}^3 com respeito a e_3 satisfazendo

$$H = D + C\theta$$

onde $\theta = \langle N, e_3 \rangle$ é dito ângulo, N é o vetor unitário normal, C e D são constantes com $C \neq 0$.

Observação 7.1. *Perceba que aqui a gente fez uma mudança nas constantes da definição de translating solitons apresentada no começo dessa tese, a mudança foi proposital, apenas para que a gente fique livre das condições dadas em capítulos anteriores e perceba apenas que C e D são constantes quaisquer com $C \neq 0$, assim como o ângulo.*

Agora, como M é também uma superfície de translação em \mathbb{R}^3 , facilmente vemos que o vetor unitário normal N e a curvatura média H são dadas por

$$N = \frac{(-f', -g', 1)}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}}$$

e

$$H = \frac{f'' + g'^2 f'' + g'' + f'^2 g''}{2(1 + f'^2 + g'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (50)$$

respectivamente, com $f(x)$ e $g(y)$ funções suaves. Como M é um translating soliton, temos que:

$$D + C\theta = \frac{f'' + g'^2 f'' + g'' + f'^2 g''}{2(1 + f'^2 + g'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (51)$$

e como $\theta = \langle N, e_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}}$, temos que:

$$2D(1 + f'^2 + g'^2)^{\frac{3}{2}} + 2C(1 + f'^2 + g'^2) = f'' + f'' g'^2 + g'' + g'' f'^2. \quad (52)$$

Diferenciando a equação (52) com respeito a x , obtemos:

$$6D(1 + f'^2 + g'^2)^{\frac{1}{2}} f' f'' + 4C f' f'' = (1 + g'^2) f''' + 2f' f'' g''. \quad (53)$$

Fazendo mais uma vez a derivada da equação acima com relação a y , vemos que:

$$3D f' f'' g' g'' (1 + f'^2 + g'^2)^{-\frac{1}{2}} = g' g'' f''' + f' f'' g'''. \quad (54)$$

Suponha que $f' f'' g' g'' \neq 0$. Então a equação (54) se transforma em

$$3D(1 + f'^2 + g'^2)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{f'''}{f' f''} + \frac{g'''}{g' g''} \right). \quad (55)$$

Finalmente, diferenciando mais uma vez com respeito a x , concluímos que

$$3D(1 + f'^2 + g'^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{f'f''} \left(\frac{f'''}{f'f''} \right)'. \quad (56)$$

Observe que isto é um absurdo, pois a equação (56) implica que g' é constante, contrariando o fato que $g'g'' \neq 0$.

Portanto, concluímos que

$$g(y) = ay + b,$$

isto é, g é uma função linear. Sabendo disso, nós temos que f é solução da EDO

$$2D(1 + a^2 + f'^2)^{\frac{3}{2}} + 2C(1 + a^2 + f'^2) = f'' + a^2 f''.$$

7.2 Translating solitons de translação em \mathbb{R}^n

Podemos generalizar as definições e equações vistas anteriormente e analisar os translating solitons de translação em dimensões mais altas. Para isso, vamos considerar uma hipersuperfície como na definição 7.1. No mesmo caminho, vamos assumir que essa hipersuperfície tem curvatura média dada por $H = D + C\theta$. Nós podemos então enunciar o seguinte teorema:

Teorema 7.2. *Seja M uma hipersuperfície translating soliton de translação em \mathbb{R}^{n+1} . Então M é isométrico ao cilindro $\gamma \times \mathbb{R}^{n-1}$, onde γ é a curva solução da EDO (60).*

Demonstração: Seja M uma hipersuperfície translating soliton, primeiro vamos considerar o caso onde $D \neq 0$. É fácil ver que o vetor normal e a curvatura média H são dadas por:

$$N = \frac{(-f'_1, \dots, -f'_n, 1)}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n f_i'^2}}$$

e

$$H = \frac{\sum_{i=1}^n (1 + \sum_{j \neq i}^n f_j'^2) f_i''}{n(1 + \sum_{i=1}^n f_i'^2)^{3/2}} \quad (57)$$

Juntando (57) com o fato que $H = D + C\theta$, temos que

$$Dn(1 + \sum_{i=1}^n f_i'^2)^{3/2} + nc(1 + \sum_{i=1}^n f_i'^2) = \sum_i (1 + \sum_{j \neq i}^n f_j'^2) f_i'', \quad (58)$$

(lembre-se que $\theta = \langle N, e_{n+1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n f_i'^2}}$). Agora, diferenciando a equação (58) com respeito a coordenada x_1 , vemos que

$$\frac{3}{2}nDf'_1f''_1f'_2f''_2 = (f_1'''f_2f_2'' + f_2'''f_1f_1'') \left(1 + \sum_{i=1}^n f_i'^2 \right)^{1/2}.$$

Agora, suponha que $f_1' f_1''$ seja diferente de zero e que $f_2' f_2'' \neq 0$, então a equação acima pode ser reescrita como

$$\frac{3}{2}nD = \left(\frac{f_1'''}{f_1' f_1''} + \frac{f_2'''}{f_2' f_2''} \right) \left(1 + \sum_{i=1}^n f_i'^2 \right)^{1/2}. \quad (59)$$

Isso nos faz perceber que f_i' é constante para $i = 3, 4, \dots, n$. Ou seja, podemos escrever a função f como

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n) \\ &= f_1(x_1) + f_2(x_2) + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n, \end{aligned}$$

onde cada $a_i \in \mathbb{R}$ é constante para $i = 3, 4, \dots, n$.

Por outro lado, podemos escrever a equação (59) como

$$\frac{3}{2}nD \left(1 + \sum_{i=1}^n f_i'^2 \right)^{-1/2} = \left(\frac{f_1'''}{f_1' f_1''} + \frac{f_2'''}{f_2' f_2''} \right)$$

e diferenciando mais uma vez com respeito a coordenada x_1 , temos

$$-\frac{3}{2}nD \left(1 + \sum_{i=1}^n f_i'^2 \right)^{-3/2} = \frac{1}{f_1' f_1''} \left(\frac{f_1'''}{f_1' f_1''} \right)'$$

Absurdo, pois se fixarmos x_1 , o lado direito da igualdade permanece fixo enquanto o lado esquerdo varia quando x_2 varia (estamos assumindo que $f_2' f_2'' \neq 0$). Portanto, concluímos que f_2 é linear.

Assim, analisando a equação (58), concluímos que M é isométrico a $\gamma \times \mathbb{R}^{n-1}$, onde γ é a curva solução da EDO

$$Dn(k + f_1'^2)^{3/2} + nc(k + f_1'^2) = k f_1'', \quad (60)$$

e $k = (1 + f_2'^2 + f_3'^2 + \dots + f_n'^2)$ constante.

Agora vamos analisar de forma mais cuidadosa o que acontece quando $D = 0$. Note que se temos $H = C\theta$, a equação (58) pode ser reescrita como

$$nc \left(1 + \sum_{i=1}^n f_i'^2 \right) = \sum_{i=1}^n \left(1 + \sum_{j \neq i}^n f_j'^2 \right) f_i'' \quad (61)$$

Vamos dividir a nossa demonstração em 4 casos:

- **(Caso 01)** - $f_i' f_i'' f_j' f_j'' \neq 0$ para todo $i \neq j$.

Diferenciando a equação (61) com respeito a coordenada x_i e depois com respeito a x_j , temos

$$0 = \left[\frac{f_i'''}{f_i' f_i''} + \frac{f_j'''}{f_j' f_j''} \right] \left(1 + \sum_{k=1}^n f_k'^2 \right),$$

e como $(1 + \sum_{k=1}^n f_k'^2) \neq 0$, temos que

$$0 = \left[\frac{f_i'''}{f_i' f_i''} + \frac{f_j'''}{f_j' f_j''} \right]$$

para cada $i, j = 1, 2, \dots, n$, com $j \neq i$. Portanto, nós concluímos que

$$\frac{f_i'''}{f_i' f_i''} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Isso nos mostra que $f_i''' = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Agora, diferenciando a equação (61) com respeito a x_i , nós vemos que

$$2nc f_i' f_i'' = 2f_i' f_i'' (f_1'' + f_2'' + \dots + f_{i-1}' + f_{i+1}'' + \dots + f_n'')$$

e como $f_i' f_i'' \neq 0$,

$$nc = (f_1'' + f_2'' + \dots + f_{i-1}' + f_{i+1}'' + \dots + f_n'').$$

Porém, isso é um absurdo, pois se rearranjarmos os termos da equação (61), vemos que

$$\begin{aligned} & (nc - f_1'' - \dots - f_{n-1}'') - f_n'' + \\ & + (nc - f_2'' - \dots - f_n'') f_1'^2 \\ & + (nc - f_1'' - f_3'' - \dots - f_n'') f_2'^2 + \\ & + \dots \\ & + (nc - f_1'' - \dots - f_{n-1}'') f_n'^2 = 0, \end{aligned} \tag{62}$$

que nos mostra que $f_n'' = 0$, o que é um absurdo. Portanto, não podemos ter funções do tipo (Caso 01).

- **(Caso 02)** $f_1' f_i'' f_j' f_j'' \neq 0$ para todo $i, j = 1, 2, \dots, k$ com $k \geq 3$.

Pelo mesmo motivo visto no Caso 01, nós temos que $f_i''' = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$, enquanto f_j é linear para todo $j > k$. Assim, a equação (61) se transforma em

$$\begin{aligned} nc(1 + f_1'^2 + \dots + f_n'^2) &= (1 + f_2'^2 + f_3'^2 + \dots + f_n'^2) f_1'' \\ &+ (1 + f_1'^2 + f_3'^2 + \dots + f_n'^2) f_2'' + \dots \\ &+ (1 + f_1'^2 + f_2'^2 + \dots + f_{k-1}'^2 + f'^2 + k + 1 + \dots + f_n'^2) f_k''. \end{aligned}$$

Procedendo da mesma forma que no Caso 01, vemos que

$$(f_1'' + f_2'' + \dots + f_{i-1}'' + f_{i+1}'' + \dots + f_k'') = nc$$

para todo $i = 1, 2, \dots, k$ e rearranjando a equação (61) obtemos

$$\begin{aligned}
& (nc - f_1'' - \dots - f_{k-1}'') - f_k'' \\
& + (nc - f_2'' - \dots - f_k'') f_1'^2 \\
& + (nc - f_1'' - f_3'' - \dots - f_k'') f_k'^2 \\
& + \dots \\
& + (nc - f_1'' - f_2'' - \dots - f_{k-1}'') f_k'^2 \\
& + (nc - f_1'' - \dots - f_k'') f_{k+1}'^2 + \dots + (nc - f_1'' - \dots - f_k'') f_n'^2 = 0
\end{aligned}$$

Concluimos assim que

$$-f_k''(1 + f_{k+1}'^2 + \dots + f_n'^2) = 0,$$

que é um absurdo, visto que $f_k'' \neq 0$ e $(1 + f_{k+1}'^2 + \dots + f_n'^2) > 0$. Portanto, concluimos que as funções não podem ser do tipo (Caso 02).

- **(Caso 03)** $f_1' f_1'' f_2' f_2'' \neq 0$ e f_j é uma função linear para todo $j \geq 3$

Podemos ver que diferenciando a equação (61) com respeito a x_1 e depois com respeito a x_2 , obtemos a expressão

$$0 = \left[\frac{f_1'''}{f_1' f_1''} + \frac{f_2'''}{f_2' f_2''} \right] \left(1 + \sum_{k=1}^n f_k'^2 \right),$$

que indica que

$$0 = \left[\frac{f_1'''}{f_1' f_1''} + \frac{f_2'''}{f_2' f_2''} \right].$$

Agora, percebemos o seguinte: como $f_1(x_1)$ é constante com relação a variável x_2 , nós temos que existe um $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$f_1'''(x_1) = \alpha f_1'(x_1) f_1''(x_1) \quad (63)$$

e

$$f_2''' = -\alpha f_2'(x_2) f_2''(x_2) \quad (64)$$

Integrando (63) com respeito a x_1 e (64) com respeito a x_2 , nós temos que existem duas constantes σ e $\bar{\sigma}$ tais que

$$f_1'' = \frac{\alpha}{2} f_1'^2 + \sigma \quad (65)$$

e

$$f_2'' = -\frac{\alpha}{2} f_2'^2 + \bar{\sigma} \quad (66)$$

Por fim, substituindo as equações (65) e (66) na equação (61) obtemos:

$$(nck - k\sigma - k\bar{\sigma}) + (nc - \bar{\sigma} - \frac{k\alpha}{2})f_1'^2 + (nc - \sigma + \frac{k\alpha}{2})f_2'^2 = 0 \quad (67)$$

para todo x_1 e x_2 , onde $k = f_3'^2 + f_4'^2 + \dots + f_n'^2$. Como $f_1'(x_1)$ e $f_2'(x_2)$ são funções não constantes por hipótese, nós temos que

$$nc = \sigma + \bar{\sigma}, \quad nc = \bar{\sigma} + \frac{k\alpha}{2}, \quad nc = \sigma - \frac{k\alpha}{2},$$

o que é um absurdo, pois nesse caso teríamos que

$$\begin{aligned} nc &= \sigma + \bar{\sigma} \\ &= nc + \frac{k\alpha}{2} + nc - \frac{k\alpha}{2} \\ &= 2nc, \end{aligned}$$

implicando $c = 0$. Portanto, concluímos que as funções não podem ser do tipo (Caso 03).

- **(Caso 04)** - $f_1'f_1'' \neq 0$ e f_j é uma função linear para todo $j \geq 2$.

Neste caso a equação (61) pode ser reescrita como

$$nc(1 + f_1'^2 + f_2'^2 + \dots + f_n'^2) = (1 + f_2'^2 + f_3'^2 + \dots + f_n'^2)f_1'',$$

o que implica que f_1 é solução da EDO

$$nc(k + f_1'^2) = kf_1''$$

onde $k = (1 + f_2'^2 + \dots + f_n'^2)$.

Portanto, podemos concluir que se M é um translating soliton de translação em \mathbb{R}^{n+1} com $H = D + C\theta$, então M é isométrico a um cilindro $\gamma \times \mathbb{R}^{n-1}$, onde γ é a curva solução da EDO

$$Dn(k + f_1'^2)^{3/2} + nc(k + f_1'^2) = kf_1'', \quad (68)$$

e $k = (1 + f_2'^2 + \dots + f_n'^2)$.

Exemplo 7.1. Considere a superfície $M \subset \mathbb{R}^3$ dada pelo gráfico da função

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow f(x, y) = y - \ln(|\cos(\sqrt{2}x)|),$$

isto é, olhando para a definição 7.1, temos que $f(x) = -\ln(|\cos(\sqrt{2}x)|)$, $g(y) = y$ e $z = y - \ln(|\cos(\sqrt{2}x)|)$.

Perceba que

- $f'(x) = \sqrt{2}tg(\sqrt{2}x)$,
- $f''(x) = 2sec^2(\sqrt{2}x)$,
- $g'(y) = 1$,
- $g''(y) = 0$,

portanto, podemos ver que o vetor normal e a curvatura média (50) são dadas por

$$N = \frac{(-\sqrt{2}tg(\sqrt{2}x), -1, 1)}{\sqrt{2}sec(\sqrt{2}x)}$$

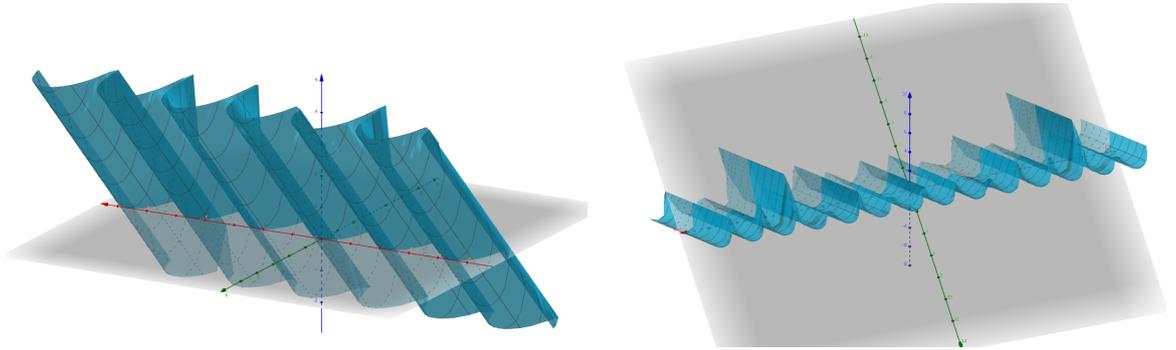
e

$$H = \frac{f'' + g'^2 f'' + g'' + f'^2 g''}{2(1 + f'^2 + g'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4sec^2(\sqrt{2}x)}{4\sqrt{2}sec^3(\sqrt{2}x)} = \frac{1}{\sqrt{2}sec(\sqrt{2}x)}.$$

Assim, como

$$\langle N, e_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}sec(\sqrt{2}x)},$$

podemos concluir que $H = \langle N, e_3 \rangle = \theta$ e portanto, M é um translating soliton de translação com $D = 0$ e $C = 1$.



7.3 Translating soliton de translação no espaço de Lorentz-Minkowski

Seja \mathbb{R}^{n+1} o espaço de Minkowski com a métrica de Lorentz

$$\bar{g} = \sum_{i=1}^n dx_i^2 - dx_{n+1}^2.$$

Nós definimos hipersuperfície tipo-espaço de translação $M \subset \mathbb{L}^{n+1}$ da seguinte forma:

Definição 7.2. Uma hipersuperfície tipo-espaço $M \subset \mathbb{L}^{n+1}$ é dita hipersuperfície tipo-espaço de translação se é dada uma imersão

$$X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{L}^{n+1} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

onde $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n)$ e cada f_i é uma função suave para todo $i = 1, 2, \dots, n$, além do mais, f deve satisfazer a condição que $|\nabla f| < 1$

Teorema 7.3. *Seja $M \subset \mathbb{L}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço de translação com curvatura média $H = D + C\theta$, isto é, M também é um translating soliton. Então M é congruente a $\gamma \times \mathbb{R}^{n-1}$, onde γ é a curva solução da EDO (75).*

Demonstração: Os argumentos utilizados aqui são similares aos usados na seção anterior. Seja M uma hipersuperfície translating soliton de translação em um espaço \mathbb{L}^{n+1} de Lorentz-Minkowski. Podemos ver facilmente que o vetor unitário normal N e a curvatura média H são dadas por

$$N = \frac{(-f'_1, \dots, -f'_n, 1)}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n f_i'^2}}$$

e

$$H = \frac{\sum_{i=1}^n (1 - \sum_{j \neq i}^n f_j'^2) f_i''}{n(1 - \sum_{i=1}^n f_i'^2)^{3/2}}. \quad (69)$$

Sabendo que $\theta = \langle N, e_{n+1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n f_i'^2}}$ e que $H = D + C\theta$, a equação (69) pode ser reescrita como

$$Dn(1 - \sum_{i=1}^n f_i'^2)^{3/2} + nc(1 - \sum_{i=1}^n f_i'^2) = \sum_{i=1}^n (1 - \sum_{j \neq i}^n f_j'^2) f_i''. \quad (70)$$

Agora, como feito anteriormente, vamos diferenciar a equação (70) com respeito a x_1 e depois com respeito a x_2 , obtendo assim a equação

$$\frac{3}{2}nDf_1'f_1''f_2'f_2'' = -(f_1'''f_2'f_2'' + f_2'''f_1'f_1'') \left(1 - \sum_{i=1}^n f_i'^2\right)^{1/2}. \quad (71)$$

Agora, suponha que $f_1'f_1''$ seja diferente de zero e suponha também que $f_2'f_2'' \neq 0$, então a equação acima pode ser reescrita como

$$\frac{3}{2}nD = -\left(\frac{f_1'''}{f_1'f_1''} + \frac{f_2'''}{f_2'f_2''}\right) \left(1 - \sum_{i=1}^n f_i'^2\right)^{1/2} \quad (72)$$

Logo, podemos concluir que f_i' é constante para $i = 3, 4, \dots, n$. Isto é,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n) \\ &= f_1(x_1) + f_2(x_2) + a_3x_3 + a_4x_4 + \dots + a_nx_n \end{aligned} \quad (73)$$

onde cada $a_i \in \mathbb{R}$ é constante para $i = 3, 4, \dots, n$. Dito isso, podemos reescrever a equação (71) como

$$\frac{3}{2}nD(1 - \sum_{i=1}^n f_i'^2)^{-1/2} = -\left(\frac{f_1'''}{f_1'f_1''} + \frac{f_2'''}{f_2'f_2''}\right) \quad (74)$$

e diferenciando com respeito a x_1 , temos

$$\frac{3}{2}nD(1 - \sum_{i=1}^n f_i'^2)^{-3/2} = -\frac{1}{f_1'f_1''} \left(\frac{f_1'''}{f_1'f_1''}\right)'$$

Absurdo, pois se fixarmos x_1 , o lado direito da equação permanece inalterado, enquanto o lado esquerdo da equação varia sempre que x_2 varia (lembre-se que assumimos $f_2' f_2'' \neq 0$). Portanto, podemos concluir que f_2 é uma função linear.

Assim, analisando a equação (70), concluímos que M é isométrico ao cilindro $\gamma \times \mathbb{R}^{n-1}$, onde γ é solução da EDO

$$nD(k - f_1'^2)^{3/2} + nC(k - f_1'^2) = kf_1'', \quad (75)$$

e $k = (1 - \sum_{i=2}^n f_i'^2)$.

Vamos analisar com cuidado o que acontece quando $D = 0$. Perceba que nesse caso, a equação (70) se transforma em

$$nc(1 - \sum_{i=1}^n f_i'^2) = \sum_{i=1}^n (1 - \sum_{j \neq i}^n f_j'^2) f_i'' \quad (76)$$

Vamos dividir a nossa demonstração em 4 casos:

- **(Caso 01)** - $f_i' f_i'' f_j' f_j'' \neq 0$ para todo $i \neq j$.

Perceba que se derivarmos a equação (76) com relação a x_i e depois com relação a x_j , teremos que

$$0 = -2f_i' f_i'' f_j''' - 2f_i''' f_j' f_j''$$

que simplificando fica equivalente a

$$0 = \left[\frac{f_i'''}{f_i' f_i''} + \frac{f_j'''}{f_j' f_j''} \right]$$

para qualquer $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$, com $i \neq j$. Logo, concluímos que

$$\frac{f_i'''}{f_i' f_i''} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

(Basta resolver um sistema de equações, onde o sistema é formada por todas as equações com i e j variando). Isto no mostra que $f_i(x_i) = a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Por (76) temos que

$$\begin{aligned} -nc(1 - f_1'^2 - \dots - f_n'^2) &= (-1 + f_2'^2 + f_3'^2 + \dots + f_n'^2) f_1'' \\ &+ (-1 + f_1'^2 + f_3'^2 + \dots + f_n'^2) f_2'' + \dots \\ &+ (-1 + f_1'^2 + f_2'^2 + \dots + f_{n-1}'^2) f_n'' \end{aligned}$$

Derivando a equação acima com relação a x_i e lembrando que $f_i''' = 0$ temos que

$$2ncf_i'f_i'' = 2f_i'f_i''(f_1'' + f_2'' + \cdots + f_{i-1}'' + f_{i+1}'' + \cdots + f_n'')$$

e como $f_i'f_i'' \neq 0$, temos que

$$nc = (f_1'' + f_2'' + \cdots + f_{i-1}'' + f_{i+1}'' + \cdots + f_n'')$$

Ora, mais isto é um absurdo, pois organizando a equação (76) temos

$$\begin{aligned} & (-nc + f_1'' + \cdots + f_{n-1}'') + f_n'' + \\ & + (nc - f_2'' - \cdots - f_n'')f_1'^2 \\ & + (nc - f_1'' - f_3'' - \cdots - f_n'')f_2'^2 + \\ & \cdots \\ & + (nc - f_1'' - \cdots - f_{n-1}'')f_n'^2 = 0, \end{aligned}$$

Daí, teríamos que $f_n'' = 0$, o que é um absurdo. Logo não poderemos ter funções do tipo (Caso 01).

- **(Caso 02)** - $f_i'f_i''f_j'f_j'' \neq 0$ para todo $i, j = 1, 2, \dots, k$ com $k \geq 3$.

Pelo mesmo raciocínio do Caso 01, teremos que $f_i''' = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$, enquanto que f_j é linear para todo $j > k$. Portanto a equação (76) se transforma em

$$\begin{aligned} -nc(1 - f_1'^2 - \cdots - f_n'^2) &= (-1 + f_2'^2 + f_3'^2 + \cdots + f_n'^2)f_1'' \\ &+ (-1 + f_1'^2 + f_3'^2 + \cdots + f_n'^2)f_2'' + \cdots \\ &+ (-1 + f_1'^2 + f_2'^2 + \cdots + f_{k-1}'^2 + f_{k+1}'^2 \cdots + f_n'^2)f_k'' \end{aligned}$$

Derivando a equação com relação a x_i ($i \leq k$) e fazendo o mesmo procedimento que no caso 01, notamos que

$$(f_1'' + f_2'' + \cdots + f_{i-1}'' + f_{i+1}'' + \cdots + f_k'') = nc,$$

para todo $i = 1, 2, \dots, k$. Rearranjando mais uma vez a equação (76) obtemos

$$\begin{aligned} & (-nc + f_1'' + \cdots + f_{k-1}'') + f_k'' + \\ & + (nc - f_2'' - \cdots - f_k'')f_1'^2 \\ & + (nc - f_1'' - f_3'' - \cdots - f_k'')f_2'^2 + \\ & \cdots \\ & + (nc - f_1'' - \cdots - f_{k-1}'')f_k'^2 + \\ & + (nc - f_1'' - \cdots - f_k'')f_{k+1}'^2 + \cdots + (nc - f_1'' - \cdots - f_k'')f_n'^2 = 0, \end{aligned}$$

Daí, concluímos que

$$f_k''(1 - f_{k+1}'^2 - \dots - f_n'^2) = 0,$$

o que é um absurdo, pois como $|Du| < 1$, temos que $(1 - f_{k+1}'^2 - \dots - f_n'^2) \neq 0$, o que implicaria $f_k'' = 0$. Logo, não podemos ter funções do tipo o caso 2.

- **(Caso 03)** - $f_1' f_1'' f_2' f_2'' \neq 0$ e f_j função linear para todo $j \geq 3$.

A demonstração segue igual ao caso 03 do caso Riemanniano.

- **(Caso 04)** - $f_1' f_1'' \neq 0$ e f_j função linear para todo $j \geq 2$

Neste caso, a equação (76) se resume a

$$-nc(1 - f_1'^2 - \dots - f_n'^2) = (-1 + f_2'^2 + f_3'^2 + \dots + f_n'^2)f_1''$$

O que implica que f_1 é solução da EDO

$$-ncK + nc f_1'^2 + K f_1'' = 0 \tag{77}$$

onde $K = (1 - f_2'^2 - \dots - f_n'^2)$.

Assim, podemos concluir que M é isométrico a $\gamma \times \mathbb{R}^{n-1}$, onde γ é a curva solução da equação (75).

REFERÊNCIAS

- AARONS, M. A. Mean curvature flow with a forcing term in minkowski space. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, Springer, v. 25, n. 2, p. 205–246, 2006.
- ALÍAS, L. J.; COLARES, A. G. Uniqueness of spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in generalized robertson–walker spacetimes. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**. [S.l.], 2007. v. 143, n. 3, p. 703–729.
- ALIAS, L. J.; LIRA, J. H. de; RIGOLI, M. Mean curvature flow solitons in the presence of conformal vector fields. **The Journal of Geometric Analysis**, Springer, v. 30, p. 1466–1529, 2020.
- ALÍAS, L. J.; MASTROLIA, P.; RIGOLI, M. et al. **Maximum principles and geometric applications**. [S.l.]: Springer, 2016. v. 700.
- BATISTA, M.; LIMA, H. F. de. Spacelike translating solitons in lorentzian product spaces: Nonexistence, calabi–bernstein type results and examples. **Communications in Contemporary Mathematics**, World Scientific, v. 24, n. 08, p. 2150034, 2022.
- CHENG, S. Y.; YAU, S.-T. Differential equations on riemannian manifolds and their geometric applications. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, Wiley Online Library, v. 28, n. 3, p. 333–354, 1975.
- DILLEN, F.; VERSTRAELEN, L.; ZAFINDRATAFA, G. A generalization of the translation surfaces of scherk. **Diff. Geom. in honor of Radu Rosca (KUL)**, p. 107–109, 1991.
- ECKER, K. On mean curvature flow of spacelike hypersurfaces in asymptotically flat spacetimes. **Journal of the Australian Mathematical Society**, Cambridge University Press, v. 55, n. 1, p. 41–59, 1993.
- ECKER, K. Interior estimates and longtime solutions for mean curvature flow of noncompact spacelike hypersurfaces in minkowski space. **Journal of Differential Geometry**, Lehigh University, v. 46, n. 3, p. 481–498, 1997.
- ECKER, K. Mean curvature flow of spacelike hypersurfaces near null initial data. **Communications in Analysis and Geometry**, International Press of Boston, v. 11, n. 2, p. 181–205, 2003.
- ECKER, K.; HUISKEN, G. Parabolic methods for the construction of spacelike slices of prescribed mean curvature in cosmological spacetimes. **Communications in mathematical physics**, Springer, v. 135, p. 595–613, 1991.
- GAO, S.; LI, G.; WU, C. Translating spacelike graphs by mean curvature flow with prescribed contact angle. **Archiv der Mathematik**, Springer, v. 103, p. 499–508, 2014.

- HUISKEN, G.; YAU, S.-T. Definition of center of mass for isolated physical systems and unique foliations by stable spheres with constant mean curvature. **Inventiones mathematicae**, v. 124, n. 1-3, p. 281–311, 1996.
- JIAN, H.-Y. Translating solitons of mean curvature flow of noncompact spacelike hypersurfaces in minkowski space. **Journal of Differential Equations**, Elsevier, v. 220, n. 1, p. 147–162, 2006.
- JU, H.; LU, J.; JIAN, H. Translating solutions to mean curvature flow with a forcing term in minkowski space. **Commun. Pure Appl. Anal**, v. 9, n. 4, p. 963–973, 2010.
- LI, G.; SALAVESSA, I. M. Mean curvature flow of spacelike graphs. **Mathematische Zeitschrift**, Springer, v. 269, p. 697–719, 2011.
- LIRA, J. H. de; MARTÍN, F. Translating solitons in riemannian products. **Journal of Differential Equations**, Elsevier, v. 266, n. 12, p. 7780–7812, 2019.
- LIU, H. Translation surfaces with constant mean curvature in 3-dimensional spaces. **Journal of Geometry**, Springer, v. 64, p. 141–149, 1999.
- NETO, A. C. M. Sobre hipersuperfícies em espaços de curvatura seccional constante. 2004.
- OMORI, H. Isometric immersions of riemannian manifolds. **Journal of the Mathematical Society of Japan**, The Mathematical Society of Japan, v. 19, n. 2, p. 205–214, 1967.
- O'NEILL, B. **Semi-Riemannian geometry with applications to relativity**. [S.l.]: Academic press, 1983.
- ROCHA, J. L. et al. Teoremas de rigidez no espaço hiperbólico. Universidade Federal de Campina Grande, 2014.
- SCHERK, H. F. Bemerkungen über die kleinste fläche innerhalb gegebener grenzen. Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, 1835.
- SEO, K. Translation hypersurfaces with constant curvature in space forms. 2013.
- SPIVAK, M. A comprehensive introduction to differential geometry, publish or perish. **Inc., Berkeley**, v. 2, 1979.
- SPRUCK, J.; XIAO, L. Entire downward translating solitons to the mean curvature flow in minkowski space. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 144, n. 8, p. 3517–3526, 2016.
- WEI, G.; WYLIE, W. Comparison geometry for the bakry-emery ricci tensor. **Journal of differential geometry**, Lehigh University, v. 83, n. 2, p. 337–405, 2009.
- YAU, S.-T. Harmonic functions on complete riemannian manifolds. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, Wiley Online Library, v. 28, n. 2, p. 201–228, 1975.