UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL
CENTRO DE TECNOLOGIA – CTEC
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATERIAIS

JOSÉ ANTÔNIO FRANÇA DE ARAÚJO

ESTUDO SOBRE MODELOS MICROMECÂNICOS DE CAMPOS MÉDIOS PARA HOMOGENEIZAÇÃO DE MATERIAIS COMPÓSITOS E POROSOS ELASTOPLÁSTICOS

Maceió
2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL
CENTRO DE TECNOLOGIA – CTEC
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATERIAIS

JOSÉ ANTÔNIO FRANÇA DE ARAÚJO

ESTUDO SOBRE MODELOS MICROMECÂNICOS DE CAMPOS MÉDIOS PARA HOMOGENEIZAÇÃO DE MATERIAIS COMPÓSITOS E POROSOS ELASTOPLÁSTICOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Materiais da Universidade Federal de Alagoas como requisito para obtenção do título de Doutor em Materiais.

Área de Concentração: Ciência dos Materiais.
Orientador: Severino Pereira Cavalcanti Marques.

Maceió
2023

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Girlaine da Silva Santos – CRB-4 – 1127

A663d Araújo, José Antônio França de
Estudo sobre modelos micromecânicos de campos médios para homogeneização de materiais compósitos e porosos elastoplásticos / José Antônio França de Araújo. – 2023.
237 f. : il. color.

Orientador: Severino Pereira Cavalcanti Marques.
Tese (Doutorado em Materiais) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Materiais. Maceió, 2023.

Bibliografia: f. 144-158.
Apêndices: f. 159-237

1. Micromecânica de campos médios. 2. Materiais porosos. 3. Elastoplasticidade. 4. Materiais compósitos. I. Título.

CDU: 624.044

José Antônio França de Araújo

ESTUDO SOBRE MODELOS MICROMECÂNICOS DE CAMPOS MÉDIOS PARA HOMOGENEIZAÇÃO DE MATERIAIS COMPÓSITOS E POROSOS ELASTOPLÁSTICOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Materiais da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 29 de agosto de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br SEVERINO PEREIRA CAVALCANTI MARQUES
Data: 29/08/2023 20:14:31-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Severino Pereira Cavalcanti Marques (Orientador – PPGMateriais/UFAL)

Documento assinado digitalmente
gov.br MARCIO ANDRE ARAUJO CAVALCANTE
Data: 31/08/2023 02:35:44-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Marcio André Araújo Cavalcante (PPGMateriais/UFAL)

Documento assinado digitalmente
gov.br EDUARDO NOBRE LAGES
Data: 30/08/2023 05:46:43-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages (CTEC/UFAL)

Documento assinado digitalmente
gov.br ADEILDO SOARES RAMOS JUNIOR
Data: 29/08/2023 20:46:31-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Adeildo Soares Ramos Júnior (CTEC/UFAL)

Documento assinado digitalmente
gov.br JOSE JULIO DE CERQUEIRA PITUBA
Data: 31/08/2023 18:48:51-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. José Júlio de Cerqueira Pituba (UFCAT)

Documento assinado digitalmente
gov.br SAMIR MAGHOUS
Data: 01/09/2023 08:07:13-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Samir Maghous (UFRGS)

Dedico este trabalho aos meus filhos Vitor Carvalho França e Pedro Carvalho França e a minha esposa, Ana Patrícia Carvalho França, pela amizade e companheirismo de sempre.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, expresso minha sincera gratidão a Universidade Federal de Alagoas (UFAL), por ter a oportunidade de desenvolver meu conhecimento ao longo desse processo agradável e esclarecedor. Agradeço ao Prof., Dr. Severino Pereira Cavalcanti Marques, pela orientação e excelência acadêmica. Agradeço aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ciência dos Materiais. Agradeço também o apoio efetuado pelos amigos, Marcelo Rodrigues e Raul Pires. Por último, mas não menos importante, agradeço à minha família pela paciência (esposa, Ana Patrícia, e filhos, Vitor e Pedro) e aos meus pais pelo direcionamento e exercício da resiliência. Esta tese é dedicada a eles. Minha mais profunda gratidão a todos que possibilitaram o resultado deste trabalho.

A inspiração surge como um raio
após uma tempestade de dedicação.
(José Antônio França de Araújo)

RESUMO

No presente trabalho, por meio da micromecânica de campos médios, as propriedades elásticas efetivas e o comportamento elastoplástico de materiais bifásicos são investigados. Os materiais apresentam inclusões elásticas perfeitamente aderidas à matriz dúctil ou poros distribuídos aleatoriamente no espaço, podendo ser alinhados ou desalinhados. O comportamento elastoplástico do material efetivo é avaliado na forma de taxa de tensão (ou de deformação) utilizando o método incremental e homogeneizado conforme o esquema de Mori-Tanaka. O escoamento da matriz metálica do material bifásico é governado pelo critério de von Mises, em que são consideradas condições isotérmicas e deformações infinitesimais. Após o escoamento, o tensor constitutivo isotrópico da matriz assume a forma de um tensor constitutivo tangente, anisotrópico, no qual, usando métodos matemáticos de aproximação, pode-se utilizar a parcela isotrópica para a determinação do tensor constitutivo tangente efetivo. Durante o comportamento elastoplástico, a matriz pode apresentar endurecimento isotrópico não linear ou cinemático linear. Para alcançar os objetivos deste trabalho, são desenvolvidos algoritmos que possibilitam investigar as limitações do uso do operador constitutivo tangente da matriz, seja anisotrópico ou obtido por aproximação isotrópica, bem como, a aplicação do tensor de Eshelby tangente ou tensor de Eshelby para o *Meio Elastoplástico* (MEP). Os resultados obtidos indicam que a precisão do comportamento elastoplástico de um material heterogêneo pode ser afetada pela escolha do método e do procedimento de aproximação isotrópica do operador constitutivo da matriz elastoplástica. Observa-se também que, em compósitos que possuem inclusões rígidas com geometria elipsoidal, o tensor de Eshelby para o MEP apresenta limitações, fornecendo resultados satisfatórios apenas para inclusões rígidas que possuem geometria esférica. Por outro lado, não são observadas limitações quanto à geometria do poro, mostrando resultados satisfatórios para qualquer razão de aspecto. Finalizando as contribuições deste trabalho, é apresentada uma abordagem que deduz o tensor de concentração de deformação para matrizes dúcteis que possuem poros esféricos ou esferoidais desalinhados, sendo observada uma boa concordância com resultados semianalíticos e numéricos publicados na literatura.

Palavras-chave: Micromecânica de campos médios. Materiais porosos. Materiais compósitos. Elastoplasticidade de materiais bifásicos. Validação.

ABSTRACT

In the present work, the effective elastic properties and elastoplastic behavior of biphasic materials are investigated through the micromechanics of mean fields. The materials have elastic inclusions perfectly adhered to the matrix or randomly distributed pores in space, which can be aligned or misaligned. The elastoplastic behavior of the effective material is evaluated in the form of stress (or strain) rate using the incremental and homogenized method according to the Mori-Tanaka scheme. The flow of the biphasic metal matrix is governed by the von Mises criterion, in which isotropic conditions and infinitesimal deformations are considered. After the flow, the isotropic constitutive tensor of the matrix takes the form of an anisotropic tangent constitutive tensor, in which, by mathematical approximation methods, the isotropic part can be used to determine the effective tangent constitutive tensor. During the elastoplastic behavior, it is assumed that the matrix has nonlinear isotropic hardening or linear kinematic hardening. To achieve the objectives of this work, algorithms were developed that enable the investigation of the limitations of using the tangent constitutive operator of the matrix, whether anisotropic or obtained by isotropic approximation, as well as the application of the tangent Eshelby tensor or Eshelby tensor for the *Elastoplastic medium* (EPM). The results obtained indicate that the accuracy of the elastoplastic behavior of a heterogeneous material can be affected by the choice of the method and the isotropic approximation procedure of the elastoplastic matrix constitutive operator. It was also observed that in composites that have rigid inclusions with ellipsoidal geometry, the Eshelby tensor for the EPM had limitations, providing satisfactory results only for rigid inclusions with spherical geometry. On the other hand, no limitations were observed regarding the pore geometry, showing satisfactory results for any aspect ratio. Finally, an approach was presented that deduces the strain concentration tensor for ductile matrices that have misaligned spherical or spheroidal pores, with good agreement observed with experimental results and published in the literature.

Keywords: Micromechanics of mean fields. Porous materials. Composites materials. Elastoplasticity of two-phase materials. Validation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação de um EVR ilustrando a transição de escala 43
Figura 2 – Esquema conceitual do método da inclusão equivalente 48
Figura 3 – Heterogeneidade elipsoidal 49
Figura 4 – Inclusão elipsoidal 51
Figura 5 – Conceito gráfico do método esquema diferencial 56
Figura 6 – Elipsoide prolate 59
Figura 7 – Elipsoide oblate 59
Figura 8 – Esfera 59
Figura 9 – Inclusões desalinhadas 60
Figura 10 – Orientação. 61
Figura 11 – Procedimento de decomposição do EVR em um conjunto de grãos 62
Figura 12 – Autoconsistente para inclusões esféricas sólidas: módulo de Young 66
Figura 13 – Autoconsistente para inclusões esféricas sólidas: módulo de bulk 66
Figura 14 – Autoconsistente para inclusões esféricas sólidas: módulo de cisalhamento . 67
Figura 15 – MEV mostrando inclusões esféricas de um concreto leve 68
Figura 16 – Esquema diferencial para poros esféricos: módulo de Young normalizado . . 68
Figura 17 – Mori-Tanaka para esferas sólidas: Módulo de Young normalizado 69
Figura 18 – Módulo de Young normalizado ($\frac{\bar{E}_{11}}{E_m}$) com fibras alinhadas e RA=20 70
Figura 19 – Módulo de Young normalizado com fibras desalinhadas, RA=20 e usando a Equação 2.101 71
Figura 20 – Influência da razão de aspecto com fibras alinhadas 72
Figura 21 – Influência da razão de aspecto com fibras desalinhadas de acordo com a Equação 2.91 72
Figura 22 – Influência da razão de aspecto com fibras desalinhadas de acordo com a Equação 2.101 73
Figura 23 – Endurecimento isotrópico 77
Figura 24 – Representação da superfície de escoamento (regra de fluxo associada) . . . 79
Figura 25 – Representação do endurecimento cinemático 80
Figura 26 – Escoamento do material heterogêneo que apresenta inclusões alinhadas ou esféricas 88
Figura 27 – Escoamento do material heterogêneo que apresenta inclusões desalinhadas . 89
Figura 28 – Comportamento elastoplástico do compósito usando o TET e isotropização espectral 94
Figura 29 – Comportamento elastoplástico do compósito usando o TEEP 95
Figura 30 – Comparativo entre TET com o TEEP com isotropização espectral 96
Figura 31 – Método de isotropização geral usando o TET (inclusões esféricas) 97
Figura 32 – Método de isotropização geral usando o TEEP (inclusões esféricas) 97

Figura 33 – Comparativo entre TET com o TEEP com isotropização geral 98
Figura 34 – Comparação entre métodos de isotropização usando o TET (inclusões esféricas) 99
Figura 35 – Comparação entre métodos de isotropização usando o TEEP (inclusões esféricas) 100
Figura 36 – Comportamento elastoplásticos de compósitos com fibras alinhadas na direção [1,1] (RA=20) 101
Figura 37 – Comportamento elastoplásticos de compósitos com fibras alinhadas na direção [2,2] (RA=20) 102
Figura 38 – Comportamento elastoplásticos de compósitos sob cisalhamento (inclusões esféricas) 103
Figura 39 – Comportamento elastoplásticos de compósitos com fibras curtas desalinhadas (RA=2) 104
Figura 40 – Comportamento elastoplásticos de compósitos com fibras curtas desalinhadas (RA=0.5) 105
Figura 41 – Avaliação do comportamento elastoplásticos de uma matriz metálica porosa (inclusões esféricas) usando TEEP, TET e isotropização espectral 106
Figura 42 – Avaliação do comportamento elastoplásticos de uma matriz metálica porosa (inclusões esféricas) usando TEEP, TET e isotropização geral 107
Figura 43 – Comparação entre métodos de isotopização de uma matriz metálica porosa (inclusões esféricas) 108
Figura 44 – Comportamento elastoplásticos de uma matriz metálica porosa (RA=20) usando TEEP, TET e isotropização espectral. Direção [1,1] 109
Figura 45 – Comportamento elastoplásticos de uma matriz metálica porosa (RA=20) usando TEEP, TET e isotropização espectral. Direção [2,2] 109
Figura 46 – Comportamento elastoplásticos de uma matriz metálica porosa (poros esféricos) submetida a cisalhamento puro 110
Figura 47 – Comportamento elastoplásticos de uma matriz contendo inclusões esféricas e endurecimento cinemático linear: comparação entre os métodos de isotropização geral e espectral usando TET e TEEP 111
Figura 48 – Comportamento elastoplástico de um compósito contendo inclusões esféricas, matriz com endurecimento cinemático linear sob cisalhamento puro 112
Figura 49 – Comportamento elastoplástico de uma matriz contendo poros esféricos e endurecimento cinemático linear 113
Figura 50 – Comparação entre métodos de isotropização: Comportamento elastoplástico de uma matriz contendo poros esféricos e endurecimento cinemático linear . 114
Figura 51 – Método de isotropização geral aplicado para fibras sólidas desalinhadas conforme subseção 4.7.2 115
Figura 52 – Método de isotropização geral aplicado para fibras desalinhadas usando todos os tensores isotrópicos 116

Figura 53 – Método de isotropização geral aplicado para poros desalinhadas conforme subseção 4.7.2 . . . 117
Figura 54 – Comparação entre o método de isotropização geral aplicado para poros desalinhadas conforme subseção 4.7.2 e o *software* Digimat . . . 118
Figura 55 – Método de isotropização geral aplicado para poros desalinhadas usando todos os tensores isotrópicos . . . 119
Figura 56 – Comportamento elastoplásticos de uma matriz que apresenta endurecimento isotrópico contendo poros com RA=1 ou RA=5 desalinhados e randomicamente distribuídoss . . . 128
Figura 57 – Comportamento elastoplásticos de uma matriz que apresenta endurecimento isotrópico contendo poros alinhados longitudinalmente e com RA=5 . . . 129
Figura 58 – Comportamento elastoplásticos de uma matriz que apresenta endurecimento isotrópico contendo poros alinhados transversalmente e com RA=5 . . . 130
Figura 59 – Comportamento elastoplásticos de uma matriz que apresenta endurecimento isotrópico contendo poros esféricos submetido a cisalhamento puro . . . 131
Figura 60 – Medidas do corpo de prova . . . 131
Figura 61 – Ensaio de tração . . . 132
Figura 62 – Imagem do MEV: Poros elipsoidais desalinhados e distribuídos randomicamente 133
Figura 63 – Análise da porosidade: (a) Superfície da amostra após ensaio de tração (Escala 900 um); (b) EVR; (c) Binarização do EVR . . . 134
Figura 64 – Comportamento elastoplásticos de uma matriz de alumínio reciclado que apresenta endurecimento cinemático contendo poros com RA=5 desalinhados e randomicamente distribuídos . . . 135
Figura 65 – Comportamento elastoplásticos de uma matriz que apresenta endurecimento cinemático contendo poros com RA=1 ou RA=5 desalinhados e randomicamente distribuídos . . . 136
Figura 66 – Comportamento elastoplásticos de uma matriz porosa que apresenta endurecimento isotrópico sem o uso de isotropização . . . 137
Figura 67 – Comportamento elastoplásticos de uma matriz porosa que apresenta endurecimento cinemático sem o uso de isotropização . . . 138
Figura 68 – Esquema conceitual do esquema de homogeneização de Mori-Tanaka: condição de carregamento macroscópico em deformação ou tensão . . . 164
Figura 69 – Tensão superficial na inclusão . . . 172
Figura 70 – Fluxograma do comportamento elastoplástico: Isotropização espectral e endurecimento isotrópico . . . 175
Figura 71 – Fluxograma do comportamento elastoplástico: Isotropização espectral e endurecimento cinemático . . . 192
Figura 72 – Fluxograma do comportamento elastoplástico: Isotropização geral e endurecimento isotrópico . . . 201

Figura 73 – Fluxograma do comportamento elastoplástico: Isotropização geral e endurecimento cinemático . . . 211
Figura 74 – Algorítimo computacional usando o tensor de concentração de deformação para o meio elastoplástico que apresenta endurecimento isotrópico e poros desalinhados . . . 220
Figura 75 – Algorítimo computacional usando o tensor de concentração de deformação para o meio elastoplástico que apresenta endurecimento cinemático e poros desalinhados . . . 229

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades do material para o esquema autoconsistente 65
Tabela 2 – Propriedades vidro/epoxi 69
Tabela 3 – Compósito com inclusões elásticas e matriz com endurecimento isotrópico . 94
Tabela 4 – Propriedades da matriz de alumínio porosa que apresenta endurecimento isotrópico 106
Tabela 5 – Propriedades do compósito com matriz que apresenta endurecimento cinemático linear 111
Tabela 6 – Propriedades da matriz de alumínio porosa que apresenta endurecimento cinemático 113
Tabela 7 – Propriedades da matriz metálica de alumínio 130
Tabela 8 – Propriedades da matriz de alumínio reciclada 134

LISTA DE ABREVIATURAS

AC *Autoconsistente*

ED *Esquema Diferencial*

EPM *Elastoplastic medium*

EVR *Elemento de Volume Representativo*

FDO *Função de Distribuição de Orientação*

FVDAM *Finite-Volume Direct Averaging Micromechanics*

MCLH *Material de Comparação Linear Heterogêneo*

MF *Mean Fields*

MEP *Meio Elastoplástico*

MER *Meio Elástico de Referência*

MEF *Método dos Elementos Finitos*

MT *Mori-Tanaka*

RA *Razão de Aspecto*

TEEP *Tensor de Eshelby Elastoplástico*

TET *Tensor de Eshelby Tangente*

TCDEP *Tensor de Concentração de Deformação Elastoplástico*

LISTA DE SÍMBOLOS

$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_i$	Tensor de deformação média na inclusão
$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_i$	Tensor de tensão média na inclusão
$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_m$	Tensor de tensão média na matriz
$\mathbb{B}_i^{dil}$	Tensor de concentração de deformação *dilute*
$\mathbb{L}_m^{alg}$	Tensor constitutivo tangente algorítmico
$\mathbb{P}$	Tensor de polarização de Hill (elástico)
ν_m^t	Coeficiente de Poisson tangente da matriz
$(\dot{\bullet})$	O ponto acima, denota a taxa de uma determinada quantidade
$.$	Produto tensorial contraído em um índice
$:$	Produto tensorial contraído em dois índices
$::$	Invariante escalar para tensores de quarta ordem
$\alpha_{i,j}$	Tensor de tensão de retorno
$\bar{.}$	em que V volume total do material heterogêneo, V_m é o volume da matriz, V_i é o volume da inclusão. Barra acima de um simbolo denota uma quantidade ou variável macroscópica.
$\bar{\mathbb{C}}$	Tensor constitutivo do compósito
$\bar{\mathbb{C}}_\psi$	Tensor constitutivo do material heterogêneo que apresenta fibras desalinhadas
$\bar{\mathbb{D}}$	Tensor de flexibilidade constitutivo efetivo
$\bar{E}$	Módulo de Young efetivo
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor tensão de perturbação
$\boldsymbol{\sigma}^0$	Tensão constante aplicada no contorno do domínio
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Deformação perturbada
$\boldsymbol{\varepsilon}^*$	*Eigenstrain*
$\boldsymbol{\varepsilon}^0$	Deformação uniforme apliado no contorno do domínio
$\boldsymbol{\varepsilon}^t$	Deformação total
$\boldsymbol{P}$	Vetor de orientação

Δ Representa a taxa ou incremento de uma varável

δ_{ij} Delta de Kronecker

$\dot{p}$ Incremento de deformação plástica

$\int$ Integral

λ Parâmetro de carga para escoar a matriz do compósito

$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_m$ Tensor de deformação média na matriz

$\langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle$ Tensor de tensão média macroscópica

$\langle \bar{\varepsilon}_{ij} \rangle$ Tensor de deformação média macroscópica

$\langle \bullet \rangle$ Os colchetes representam o valor médio de alguma variável

$\langle \mathbb{A}_i^{dil} \rangle_\psi$ Tensor de concentração de deformação na inclusão para fibras desalinhadas

$\langle \mathbb{A}_m^{dil} \rangle_\psi$ Tensor de concentração de deformação na na matriz para fibras desalinhadas

$\mathbb{A}_i^{dil}$ Tensor de concentração de deformação na inclusão

$\mathbb{A}_i^{ED}$ Tensor de concentração de deformação esquema diferencial

$\mathbb{A}_i^{MT}$ Tensor de concentração de deformação na inclusão de Mori-Tanaka

$\mathbb{A}_i^{tan}$ Tensor tangente de concentração de deformação da inclusão

$\mathbb{A}_m^{MT}$ Tensor de concentração de deformação na matriz de Mori-Tanaka

$\mathbb{B}_i^{MT}$ Tensor de concentração de tensão na inclusão de Mori-Tanaka

$\mathbb{B}_m^{MT}$ Tensor de concentração de tensão na matriz de Mori-Tanaka

$\mathbb{C}_i$ Tensor constitutivo da inclusão

$\mathbb{C}_m$ Tensor constitutivo da matriz

$\mathbb{I}$ Tensor identidade

$\mathbb{J}$ Tensor de projeção volumétrica

$\mathbb{K}$ Tensor de projeção desviador

$\mathbb{L}^*$ Tensor de restrição de Hill

$\mathbb{L}_m^{ep}$ Tensor constitutivo elastoplástico da matriz

$\mathbb{L}_m^{Iso}$ Tensor constitutivo tangente isotropizado da matriz

$\mathbb{L}_m^{tan}$	Tensor constitutivo tangente da matriz
$\mathbb{P}^{tan}$	Tensor de polarização de Hill (tangente)
$\mathbb{S}$	Tensor de Eshelby para o meio elastoplástico
$\mathbb{S}_t$	Tensor tensor de Eshelby tangente
μ_m^t	Módulo de cisalhamento tangente da matriz
ν_i	Módulo de Poisson da inclusão
ν_m	Módulo de Poisson da matriz
$\otimes$	Produto tensorial
$\overline{\mathbb{L}}$	Tensor constitutivo tangente macroscópico
∂	Derivada parcial
ϕ	Ângulo de Euller
π	Constante matemática pi
$\psi(\theta,\phi)$	Função de distribuição de orientação
σ_{ij}^0	Tensor tensão constante (Macrscópico)
σ_{eq}	Tensão equivalente de von Mises.
σ_{med}	Primeiro invariante de tensão
$\sum$	Somatória
θ	Ângulo de Euller
ε_{ij}^0	Tensor deformação constante
ε_{ij}^e	Deformação elástica
c	Constante de endurecimento cinemático do material
E_i	Módulo de Young da inclusão
E_m	Módulo de Young da matriz
$f(\sigma,R)$	Função de escoamento de von Mises
f_i	Fração volumétrica da inclusão
f_m	Fração volumétrica da matriz

G_m	Módulo de cisalhamento da matriz
J_2	Segundo invariante do tensor de tensão desviadora
k_m	Módulo bulk da matriz
$N = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$	Vetor direção normal à superfície de escoamento
N_j	Componente normal unitário
p	Deformação plástica acumulada
$R'(p)$	Derivada da função de endurecimento
S^{Ω}_{ijkl}	Tensor de Eshelby
s_{ij}	Tensor tensão desviadora
V_m	Volume da matriz
V_i	Volume da inclusão
V	Volume representativo

LISTA DE PUBLICAÇÕES

- Calc-Composite. Linguagem: MATLAB. INSTITUTO NACIONAL DA PROPRIEDADE INDUSTRIAL. DIRETORIA DE PATENTES, PROGRAMAS DE COMPUTADOR E TOPOGRAFIAS DE CIRCUITOS INTEGRADOS. Data de publicação: 01/10/2021. Data de criação: 01/10/2021. Certificado de Registro de Programa de Computador. Número do Processo: BR512021002747-7. Expedido em: 14/12/2021.

- A micromechanical analysis of strain concentration tensor for elastoplastic medium containing aligned and misaligned pores, 2022. Mechanics Research Communications (MRC). ISSN: 0093-6413. doi: https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2022.103989 (ARAÚJO, 2022).

- Multiscale structural analysis of oil rig mast using mean-fields and finite element method, 2023. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. Print ISSN: 1678-5878. doi: https://doi.org/10.1007/s40430-022-03939-4 (ARAÚJO; RODRIGUES; PIRES, 2023).

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **24**
1.1 Estado da arte sobre o desenvolvimento da micromecânica de campos médios: materiais elásticos e elastopásticos **27**
1.2 Objetivos geral e específicos **35**
1.3 Organização do trabalho **36**
2 MICROMECÂNICA DE CAMPOS MÉDIOS **39**
2.1 Introdução **39**
2.2 Notações preliminares **39**
2.3 Definições básicas da micromecânica de campos médios **42**
2.3.1 Elemento de Volume Representativo 42
2.3.2 Relação entre escalas macroscópica e microscópica 43
2.3.3 Condições de carregamento homogênea em deformação e em tensão 45
2.3.4 Condição de Hill-Mandel 45
2.3.5 Tensores de concentração de tensão e deformação 46
2.4 Definição de *eigenstrain*, inclusão e heterogeneidade **46**
2.5 Inclusão equivalente **47**
2.5.1 Inclusão elipsoidal com *eigenstrain* uniforme 48
2.5.2 Dedução do método da inclusão equivalente: tensor de concentração de deformação diluído 49
2.6 Esquemas convencionais de homogeneização **52**
2.6.1 Esquema *dilute suspension* 53
2.6.2 Esquema autoconsistente 53
2.6.3 Esquema de Mori-Tanaka 54
2.6.4 Esquema diferencial 56
2.7 Influência da geometria das inclusões nas propriedades elásticas do material multifásico **58**
2.8 Influência da direção das inclusões nas propriedades elásticas dos materiais bifásicos **60**
2.9 Abordagem computacional com o *software* Digimat **64**
2.10 Exemplos de homogeneização de propriedades elásticas **65**
2.10.1 Exemplos para a validação dos esquemas de homogeneização 65
2.10.2 Investigação das propriedades elásticas de nanocompósitos considerando geometria e direção inclusão 69
2.11 Conclusões do Capítulo 2 . . . . **74**
3 COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO DA MATRIZ DO MATERIAL HETEROGÊNEO **75**
3.1 Introdução **75**

3.2 Equação constitutiva . . . 75
3.3 Tensão equivalente de von Mises . . . 76
3.4 Endurecimento elastoplástico . . . 76
3.4.1 Endurecimento isotrópico . . . 76
3.4.2 Endurecimento cinemático . . . 79
3.5 Tensor constitutivo anisotrópico tangente . . . 81
3.6 Aproximações isotrópicas do tensor constitutivo anisotrópico tangente . . . 83
3.6.1 Método de isotropização espectral . . . 83
3.6.2 Método de isotropização geral . . . 85
3.7 Conclusões do Capítulo 3 . . . 86
4 HOMOGENEIZAÇÃO DE MATERIAIS HETEROGÊNEOS ELASTOPLÁSTICOS . . . 87
4.1 Introdução . . . 87
4.2 Escoamento do material heterogêneo . . . 87
4.3 Formulação incremental de Hill . . . 89
4.4 Esquema de homogeneização de Mori-Tanaka para materiais heterogêneos elastoplásticos . . . 90
4.5 Tensor de Eshelby tangente . . . 92
4.6 Tensor de Eshelby para o meio elastoplástico . . . 93
4.7 Exemplos do comportamento elastoplástico de compósitos que apresentam inclusões elásticas com endurecimento isotrópico . . . 93
4.7.1 Resultados obtidos por meio do método de isotropização espectral variando o uso do tensor de Eshelby (inclusões elásticas e matriz com endurecimento isotrópico). . . . 93
4.7.2 Resultados elastoplásticos obtidos por meio do método de isotropização geral variando o uso do tensor de Eshelby (inclusões elásticas e matriz com endurecimento isotrópico). . . . 96
4.7.3 Comparação entre os métodos de isotropização (inclusões elásticas e matriz com endurecimento isotrópico) . . . 98
4.7.4 Variação das condições de carregamento: compósito contendo inclusões elásticas alongadas ou esféricas e matriz com endurecimento isotrópico . . . 100
4.7.5 Comportamento elastoplástico de compósitos com fibras sólidas curtas e desalinhadas e matriz com endurecimento isotrópico . . . 103
4.8 Exemplos do comportamento elastoplástico de uma matriz de alumínio porosa com endurecimento isotrópico . . . 105
4.8.1 Resultados obtidos por meio do método de isotropização variando o uso do tensor de Eshelby (matriz porosa com endurecimento isotrópico) . . . 105
4.8.2 Comparação entre os métodos de isotropização (poros e matriz com endurecimento isotrópico) . . . 107

4.8.3 Variação da condição de contorno: poros alongados ou esféricos e matriz com endurecimento isotrópico 108
4.9 Exemplos do comportamento elastoplástico de compósitos que apresentam inclusões elásticas com endurecimento cinemático 110
4.9.1 Resultados elastoplásticos obtidos por meio do método de isotropização espectral e geral, variando o uso do tensor de Eshelby (matriz porosa com endurecimento cinemático). 110
4.9.2 Compósito contendo inclusões elásticas esféricas e matriz com endurecimento cinemático submetido a cisalhamento puro 112
4.10 Exemplo do comportamento elastoplástico de uma matriz de alumínio porosa com endurecimento cinemático 112
4.11 Influência da geometria e distribuição de orientação das inclusões no método de isotropização geral 114
4.11.1 Fibras sólidas desalinhadas 115
4.11.2 Poros desalinhados 116
4.12 Conclusões do Capítulo 4 119
5 ESTUDO MICROMECÂNICO DO TENSOR DE CONCENTRAÇÃO DE DEFORMAÇÃO DE MATERIAIS POROSOS EM MEIOS ELASTOPLÁSTICOS 121
5.1 Introdução 121
5.2 Tensor de concentração de deformação para o meio elastoplástico poroso 121
5.3 Comportamento do tensor de Eshelby para inclusões esféricas em um meio elastoplástico 123
5.4 Comportamento do tensor de concentração de deformação para poros esféricos ou esferoidais em um meio elastoplástico 124
5.5 Conclusões do Capítulo 5 126
6 ANÁLISE DE RESULTADOS E DISCUSSÕES: TENSOR DE CONCENTRAÇÃO DE DEFORMAÇÃO PARA MEIOS ELASTOPLÁSTICOS POROSOS 127
6.1 Introdução 127
6.2 Algoritmo computacional 127
6.3 Resultados 127
6.3.1 Resultado semi-analítico e *software* Digimat 127
6.3.2 Resultado semi-analítico e numérico 130
6.3.3 Resultado do ensaio experimental, semi-analítico e *software* Digimat 131
6.3.4 Resultado semi-analítico da matriz que possui endurecimento cinemático . . 135
6.3.5 Resultado semi-analítico sem isotropização 136
6.4 Conclusões do Capítulo 6 138
7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS . . . 140

7.1 Trabalhos futuros 142
REFERÊNCIAS 144

APÊNDICES 159
APÊNDICE A – TEOREMA DE DEFORMAÇÃO MÉDIA 160
APÊNDICE B – TEOREMA DE TENSÃO MÉDIA 162
APÊNDICE C – DETALHAMENTO DA ABORDAGEM DO ESQUEMA DE HOMOGENEIZAÇÃO DE MORI-TANAKA . . . 164
APÊNDICE D – COMPONENTES DO TENSOR DE ESHELBY . . . 167
APÊNDICE E – DEDUÇÃO DO TENSOR DE ESHELBY PARA O MEIO ELASTOPLÁSTICO 171
APÊNDICE F – ALGORITMO: ISOTROPIZAÇÃO ESPECTRAL E ENDURECIMENTO ISOTRÓPICO 174
APÊNDICE G – ALGORITMO: ISOTROPIZAÇÃO ESPECTRAL E ENDURECIMENTO CINEMÁTICO 191
APÊNDICE H – ALGORITMO: ISOTROPIZAÇÃO GERAL E ENDURECIMENTO ISOTRÓPICO 200
APÊNDICE I – ALGORITMO: ISOTROPIZAÇÃO GERAL E ENDURECIMENTO CINEMÁTICO 210
APÊNDICE J – ALGORITMO: POROS DESALINHADOS E ENDURECIMENTO ISOTRÓPICO 219
APÊNDICE K – ALGORITMO: POROS DESALINHADOS E ENDURECIMENTO CINEMÁTICO 229

1 INTRODUÇÃO

Um material compósito pode ser definido como uma mistura ou combinação de dois, ou mais constituintes, insolúveis uns nos outros, que diferem na forma e na composição química. Materiais compósitos podem ser selecionados visando proporcionar combinações de rigidez, resistência mecânica, peso, desempenho em altas temperaturas, resistência a corrosão, dureza ou condutividades térmica e elétrica (BOHM, 1998; SMITH, 1998; ASKELAND, 2008).

Historicamente, o conceito de reforço de material, utilizando a combinação de uma matriz e um material fibroso, é muito antigo. Os primeiros registros de aplicação de materiais compósitos podem ser vistos em Êxodos 5, onde menciona que os antigos israelitas usavam tijolos feitos de barro reforçados com palha. Barras de ferro também foram usadas para reforçar a alvenaria no século XIX, levando ao desenvolvimento de concreto reforçado com aço (DANIEL; ISHAI, 1994; KAW, 2006a; VINSON; SIERAKOWSKI, 2008).

Muitos compósitos usados estão na vanguarda da tecnologia dos materiais, apresentando desempenho e custos adequados para aplicações bastante exigentes. Os materiais compósitos são usados em uma considerável variedade de estruturas de engenharia, incluindo estruturas aeroespaciais, automotivas e subaquáticas, bem como em dispositivos médicos, protéticos, placas de circuito eletrônico e equipamentos esportivos.

Em geral, a fase de um compósito, denominada de matriz, tem a finalidade de proporcionar forma geométrica ao material, unir as inclusões e transferir o esforço sofrido para a fase de reforço. A matriz também isola as inclusões, permitindo-as que possam agir isoladamente, evitando assim, a propagação de trincas. A fase de reforço tem como principal função proporcionar estabilidade térmica e fornecer resistência mecânica ao compósito (CHAWLA, 1998; BURAKOWSKI; REZENDE, 2001; KAW, 2006b; ABOUDI; ARNOLD; BEDNARCYK, 2013b; POLETTO, 2017).

Para entender as características mecânicas e térmicas de um material heterogêneo, composto por constituintes com dimensões que podem variar de nanoescala (nm), microescala (μm) e macroescala (mm, cm ou m), observa-se a necessidade de aplicar teorias que representem o comportamento médio do material quando submetidos as condições de carregamento térmicas ou mecânicas. Por meio da micromecânica de campos médios, o comportamento médio do material pode ser previsto a partir das propriedades dos constituintes e dos seus respectivos tensores de concentração de deformação (HILL, 1963; DANIEL, 2006; HABERMAN, 2007; PINDERA et al., 2009; ABOUDI; ARNOLD; BEDNARCYK, 2013b; ABDIN, 2015; FILHO, 2015; VIEIRA, 2018).

A modelagem dos materiais compósitos via micromecânica de campos médios, baseadas no modelo da inclusão equivalente de Eshelby (1957), oferece a oportunidade de modelar materiais em um nível microestrutural para obter resultados em um nível macroscópico. Para isso é necessário possuir como dados de entrada as propriedades mecânicas elásticas individuais dos constituintes, e, com a devida metodologia de homogeneização, prever as propriedades efetivas do compósito (COLLINI, 2004).

Os esquemas de homogeneização de campos médios são modelos matemáticos que visam descrever a relação entre as propriedades médias do material heterogêneo e suas propriedades microscópicas. A vantagem da homogeneização de campos médios é solucionar problemas de materiais heterogêneos de maneira mais simples e com baixo custo computacional.

As abordagens presentes na micromecânica de campos médios se baseiam na condição em que os constituintes do material heterogêneo apresentam comportamento elástico (ESHELBY, 1957) (PIERARD et al., 2007). Para expandir o método da inclusão equivalente de Eshelby para o estudo do comportamento elastoplástico de materiais heterogêneos, considera o uso de métodos de linearização das relações constitutivas locais, via um operador tangente que muda a cada passo de tensão (DOGHRI, 2000; JIANG, 2009).

Considerando o uso da micromecânica de campos médios, os materiais porosos podem ser vistos como um caso particular de um compósito de duas ou mais fases, cuja segunda fase é substituída por uma distribuição de vazios com geometrias esféricas ou esferoidais (KACHANOV, 1992; YOSHIMURA et al., 2005; GHEZAL; DOGHRI, 2013; MA et al., 2014; LIU et al., 2017). Os materiais porosos atraem uma considerável atenção devido às suas propriedades mecânicas, incluindo absorção de energia e capacidade de absorção de som (GONG; LI; ZHAO, 2011; FRITZEN et al., 2012; MANOYLOV; BORODICH; EVANS, 2013; TIMOTHY; MESCHKE, 2016).

Os materiais porosos são amplamente utilizados na engenharia, medicina e odontologia, tais como: concreto, tijolos, dissipadores de calor, protetores balísticos, próteses ou implantes dentários (LUO; STEVENS, 1999; BANHART, 2001; YOSHIMURA et al., 2007).

No entanto, a porosidade quando surge indesejadamente, pode causar sérios problemas durante a aplicação do material. Como exemplo, observa-se que a presença de poros é considerada a principal causa de rejeição das peças fundidas nas aplicações industriais. Sabe-se que, em peças fundidas de ligas de alumínio, a porosidade é o defeito que ocorre com mais frequência. A presença de poros é acompanhada por um decréscimo nas propriedades mecânicas, onde o seu tamanho e a sua geometria podem intensificar esse problema (CONIGLIO; CROSS, 2009; GAWRONSKA, 2017; GUTERRES; OLIVEIRA; SANTOS, 2019; LI et al., 2020; PLESSIS; YADROITSAVA; YADROITSEV, 2020).

Prever as propriedades efetivas de materiais porosos é crucial para aplicações industriais. Considerar todos os detalhes microestruturais ao longo de uma estrutura real é uma tarefa, na maioria das vezes, impossível. Uma estratégia para contornar esses obstáculos consiste em realizar análises em escala macroscópica, empregando-se as propriedades efetivas do material homogeneizado ao utilizar metodologias da micromecânica de campos médios (CHRISTENSEN;

WAALS, 1972; CHEN et al., 2015; SANTOS et al., 2016; LIU et al., 2017).

A metodologia usada neste trabalho consiste em representar o material heterogêneo como uma mistura homogênea de fases e, então, aplicar uma média estatística para obter as propriedades macroscópicas do material bifásico. No âmbito deste trabalho, o material bifásico é constituído por uma matriz elastoplástica e inclusões elásticas. Para calcular o comportamento elastoplástico do material efetivo, é necessário ter informações sobre as propriedades elásticas das inclusões, como também, das propriedades elastoplásticas e limite de escoamento da matriz que apresenta endurecimento isotrópico ou cinemático. Devido à ductilidade da matriz do material heterogêneo, o critério adotado para prever o seu escoamento é o de von Mises. Com base nessas informações, aplica-se o esquema de homogeneização proposto por Mori e Tanaka (1973) e reformulado por Benveniste (1987) para estimar as propriedades efetivas elastoplásticas do material homogeneizado e, via método de linearização incremental de Hill (1965b), prever o comportamento tensão-deformação do material efetivo. Ao aplicar o modelo elastoplástico para estimar as respostas mecânicas efetivas do material a diferentes condições de carregamento, é necessário usar um operador constitutivo tangente, de forma que o comportamento não linear seja linearizado. Para obter o operador constitutivo isotrópico tangente é necessário aplicar métodos de aproximação isotrópica, uma vez que, esse operador constitutivo se apresenta de forma anisotrópica. É importante destacar que, durante o processo de modelagem elastoplástico, são consideradas a geometria e a distribuição das inclusões. A seguir, pode ser observada a estrutura básica e algumas informações importantes consideradas ao implementar o algoritmo para modelagem elastoplástica de um material bifásico:

- Definir as propriedades elástica e elastoplástica mecânicas das fases do compósito material heterogêneo;
- Escolher um modelo micromecânico e implementá-lo no *software* SciLab;
- Calcular as propriedades efetivas do material a partir das propriedades mecânicas das fases constituintes;
- Aplicar o modelo elastoplástico para estimar as respostas mecânicas efetivas do material a diferentes condições de carregamento;
- Verificar a precisão dos resultados comparando-os com resultados obtidos na literatura ou por meio do *software* Digimat.

Os resultados obtidos mostram que o método de aproximação isotrópica do operador constitutivo da matriz elastoplástica pode influenciar na precisão dos resultados em função da geometria da inclusão, sendo a mesma sólida ou poro. É observado também que, ao considerar uma geometria elipsoidal da inclusão solida, o tensor de Eshelby para o MEP apresenta limitações, fornecendo resultados satisfatórios apenas para inclusões rígidas que apresentam geometria esférica. Por outro lado, ao usar o tensor de Eshelby para o MEP de uma matriz dúctil porosa, não é observado limitações quanto a geometria do poro, mostrando resultados satisfatórios para qualquer razão de aspecto. Finalizando as contribuições deste trabalho e usando o tensor de Eshelby para o meio elastoplástico, é apresentada uma abordagem para o tensor de concentração de deformação para matrizes dúcteis que possuem poros esféricos ou esferoidais, sendo observada uma boa concordância com resultados publicados na literatura.

1.1 Estado da arte sobre o desenvolvimento da micromecânica de campos médios: materiais elásticos e elastopásticos

Vários esquemas de homogeneização baseados na micromecânica foram desenvolvidos por pesquisadores para prever as propriedades efetivas dos materiais heterogêneos. Nas últimas décadas, dentre os avanços mais importantes na micromecânica de campos médios, podem ser citados: Hashin e Shtrickman (1963) que deduziram os limites superior e inferior para as propriedades elásticas efetivas de materiais heterogêneos quase isotrópicos e quase homogêneos por uma abordagem variacional. Usando o método variacional, Hashin e Rosen (1964) estudaram os módulos elásticos efetivos de materiais compósitos reforçados com fibras circulares ocas e alinhadas; Hill (1963) estudou as propriedades elásticas de compósitos bifásicos reforçados com fibras e frações volumétricas arbitrárias; Hill (1965a) apresentou o esquema autoconsistente para estimar os módulos elásticos de compósitos bifásicos; Budiansky (1965) investigou os módulos elásticos efetivos de um material compósito, cujos constituintes foram considerados isotrópicos e elásticos.

Um esquema de homogeneização bastante utilizado foi proposto por Mori e Tanaka (1973). Considerando o efeito da interação entre as inclusões, foi assumido que o campo de deformação média em uma inclusão seria afetado pelo campo de deformação média na matriz infinita circundante devido à presença de outras inclusões.

Com base no esquema autoconsistente, Hill (1965a) e Budiansky (1965) fizeram estimativas analíticas dos módulos elásticos efetivos de um material isotrópico e estatisticamente homogêneo. O material em questão apresentava fissuras planas e distribuídas aleatoriamente, com ou sem fluido em seus interiores. Os cálculos efetuados conforme a abordagem autoconsistente buscaram considerar, embora aproximadamente, a influência da interação entre as fissuras existentes.

McLaughlin (1977) estimou, por meio do esquema diferencial, as propriedades elásticas efetivas de compósitos bifásicos reforçados com fibras longas e esféricas. McLaughlin mostrou que o esquema diferencial fornece resultados consoante os limites de Hashin e Shtrickman.

Em sua pesquisa, Berveiller e Zaoui (1979) apresentaram uma extensão do esquema autoconsistente para uma aproximação elastoplástica aplicada em policristais metálicos. Christensen e Lo (1979) apresentaram soluções para o módulo de cisalhamento efetivo.

Ao estudar um sólido frágil linearmente elástico e fissurado, Hori e Nemat-Nasser (1983) mostraram a importante influência das condições de carregamento na sua resposta global quando ocorre o fechamento da fissura e o seu deslizamento por atrito. Neste trabalho, observa-se que, quando as fissuras estão todas abertas e distribuídas aleatoriamente, a resposta global é isotrópica. Por outro lado, quando algumas fissuras se fecham e sofrem deslizamento por atrito, a resposta global torna-se anisotrópica.

O trabalho desenvolvido por Tandon e Weng (1984), em que combinou as teorias de Eshelby (1957) e Mori e Tanaka (1973), apresentou a influência da razão de aspecto nos módulos elásticos efetivos de um compósito transversalmente isotrópico. As inclusões são consideradas unidirecionalmente alinhadas e esferoidais.

Para melhorar as previsões das propriedades efetivas de materiais heterogêneos com elevada fração volumétrica e elevado contraste, pode ser citado o esquema *multi-site* proposto por Fassi-fehri (1985) e Fassi-Fehri, Hihi e Berveiller (1989), em que consideram um tensor de integração *multi-site*.

Benveniste (1987), ao estudar materiais fissurados, apresentou uma reformulação do esquema de homogeneização proposto por Mori e Tanaka (1973). O principal objetivo desse artigo foi de reformular e reinterpretar o método da inclusão equivalente de Eshelby e o conceito de tensão média na matriz de Mori e Tanaka.

Por meio do esquema diferencial, Weng (1990a) investigou as propriedades elásticas de uma matriz isotrópica com fissuras alinhadas. Tandon e Weng (1986) e Advani e Tucker (1987) estudaram a importância da orientação das inclusões nas propriedades efetivas do compósito. Hori e Nemat-Nasser (1993) desenvolveram o esquema de dupla inclusão. Giordano (2003) apresentou uma forma prática e simples para calcular as propriedades mecânicas elásticas de um material heterogêneo com fibras desalinhadas no espaço, considerando a média sobre todas as possíveis orientações das inclusões elipsoidais.

Conforme observado acima, muitos trabalhos que trataram do comportamento efetivo dos compósitos foram desenvolvidos para obter respostas elásticas. Porém, quando se deseja obter respostas para a descrição de fenômenos mais complexos, tal como a análise de propriedades e do comportamento não linear de uma das fases desses materiais, a aplicação de modelos específicos se torna necessária (HILL, 1963; CHRISTENSEN; WAALS, 1972; CHAPRA; CANELA, 1991; GILAT; SUBRAMANIAM, 2008).

Para materiais heterogêneos compostos por uma matriz que apresenta um comportamento elastoplástico e inclusões elástico-linear, abordagens que estudam a rigidez instantânea para estimar suas propriedades mecânicas efetivas foram desenvolvidas por diversos autores. Uma das primeiras tentativas para homogeneização de compósitos elastoplásticos foi feita por Kröner (1961), que propôs um modelo autoconsistente para policristais e, por considerar que as interações entre as fases seriam apenas elásticas, levou a respostas muito rígidas (PIERARD, 2006).

Um trabalho bastante usado para compósitos não lineares foi proposto por Hill (1965b), apresentando a formulação incremental para policristais. Essa sua formulação foi baseada na linearização das leis constitutivas locais, onde os tensores de concentração de tensão e deformação locais, para cada constituinte, foram calculados pelo método auto-consistente. Em outras palavras, Hill propôs um método para transformar um problema de homogeneização não linear em vários problemas lineares via equações constitutivas incrementais, em que, na tentativa de obter estimativas aprimoradas, incorporando informações microestruturais, introduziu uma extensão incremental do procedimento auto-consistente no contexto da teoria de fluxo plástico, recorrendo a tensores tangentes das fases constituintes.

Seguindo as formulações de Kröner (1961), Budiansky e Wu (1962) e Hill (1965b), uma tentativa de estender o método autoconsistente para compósitos submetidos a deformações elastoplásticas foi desenvolvida por Hutchinson (1970). Nessa proposta, as curvas de tensão-deformação e superfície de escoamento associado são calculadas para metais policristalinos e compósitos.

O modelo autoconsistente para o comportamento elastoplástico foi usado por Berveiller e Zaoui (1979). Os autores demonstraram que as tensões internas presentes em policristais diminuiriam significativamente devido à ocorrência do relaxamento da tensão plástica. Esse trabalho teve como contribuição, a obtenção de resultados da "acomodação" intergranular elastoplástica por meio de uma "função de acomodação" escalar, incorporando no modelo, algumas características estruturais do agregado policristalino, como tamanho de grão. Com a finalidade da simplificação física do modelo, foi considerada a geometria da inclusão como esférica, elástica, homogênea e isotrópica. Para a obtenção dos resultados, foi usado de tensores obtidos via método secante, sendo este método, posteriormente, bastante explorado nas décadas de 1980 e 1990 por Tandon e Weng (1988), Weng (1990b), Qiu e Weng (1991), Qiu, Weng e Castaneda (1992), Qiu e Weng (1995), Buryachenko (1996) e Hu (1996).

Ainda para obter resultados menos rígidos de tensão-deformação, Dvorak e Bahei-El-Din (1979) estudaram o comportamento de compósitos bifásicos com fibras contínuas, onde eles mostraram a sua abrangência e considerável contribuição ao avaliarem cargas mecânicas axissimétricas e mudanças térmicas uniformes, além da extensão para tensões de cisalhamento via um esquema autoconsistente modificado, obtendo tensores de concentração de tensão diferentes do esquema autoconsistente seminal.

No trabalho de Dvorak e Bahei-El-Din (1982) foi apresentado relações constitutivas para o estudo do comportamento elastoplástico de materiais compósitos fibrosos sob pequenas deformações. O compósito, na ocasião, era constituído por filamentos elásticos contínuos, alinhados e inseridos em uma matriz elastoplástica. Devido à suposição na qual as fibras tivessem pequenos diâmetros, se alcançou vantagens que foram essenciais para o desenvolvimento de teorias da plasticidade de materiais fibrosos. A característica-chave foi a existência de campos de deformações uniformes nas fases, no entanto, observou-se em suas conclusões que o modelo superestimava as magnitudes das deformações plásticas.

Para uma inclusão elipsoidal envolvida por uma matriz anisotrópica, o tensor de Eshelby foi analisado numericamente por Gavazzi e Lagoudas (1990) em termos de quadratura gaussiana. No seu estudo, foi considerada a anisotropia induzida pela plasticidade nas propriedades instantâneas do material da matriz elastoplástica. Esse esquema numérico foi desenvolvido para qualquer grau de anisotropia da matriz e para qualquer razão de aspecto do elipsoide. O estudo mostrou que pequenos erros na avaliação do tensor de Eshelby podem ser intensificados no cálculo das propriedades efetivas do material, dependendo do grau de anisotropia que ocorrer durante a deformação plástica.

O uso do método de homogeneização de Mori e Tanaka para a previsão do comportamento de um compósito bifásico, constituído por inclusões elásticas e matriz elastoplástica, foi investigado por Lagoudas, Gavazzi e Nigam (1991). Este trabalho foi estendido para compósitos particulados e compósitos fibrosos unidirecionais sob carregamento combinado e não proporcional. A solução de Eshelby foi usada de forma que as propriedades instantâneas do material da matriz fossem atualizadas no final de cada incremento de carga. O escoamento da matriz foi avaliado segundo o critério de escoamento de von Mises e endurecimento cinemático, conforme a regra de endurecimento de Phillips. O carregamento aplicado foi subdividido em pequenos incrementos, considerado a influência do histórico do carregamento na média dos tensores de concentração de tensão e deformação instantâneos.

Um método foi proposto por Dvorak (1992) para avaliação de campos locais e propriedades globais de materiais compósitos submetidos a cargas termomecânicas incrementais e a deformações de transformação nas fases. Essa abordagem é contrastada com alguns procedimentos aceitos atualmente baseados nas aproximações autoconsistente e de Mori-Tanaka, que violam relações exatas entre deformações inelásticas locais e macroscópicas.

Suquet (1996) trata em das propriedades gerais de compósitos não lineares por meio de uma abordagem secante modificada que utiliza o segundo momento do campo de tensões sobre as fases individuais. Coincide com o procedimento variacional da Ponte Castañeda. Suas previsões são comparadas com as das formulações clássicas secantes e incrementais.

Suquet e Castaneda (1998) trata a previsão teórica das propriedades efetivas de materiais compósitos, com comportamento constitutivo não linear, incluindo plasticidade e fluência, a partir das propriedades de suas fases constituintes e sua distribuição ou microestrutura.

Por meio da expressão exata da função de Green de um material de comparação linear elástico e homogêneo, foi proposto por Moulinec e Suquet (1998) um método alternativo baseado em séries de Fourier. Considerou-se o caso de constituintes elásticos não homogêneos, em que foi usado um procedimento iterativo para resolver a equação de Lippman-Schwinger que surge naturalmente no problema. Em seguida, o método foi estendido para constituintes não lineares por meio de uma integração passo a passo no tempo.

Pettermann et al. (1999) estudaram o comportamento de um compósito consistindo de inclusões termoelásticas alinhadas e inseridas em uma matriz termo-elasto-plástica. O método foi proposto por meio da abordagem de campos médios e procedimento de homogeneização de Mori-Tanaka incremental. Neste trabalho, o comportamento elastoplástico da fase da matriz foi descrito pelo método clássico J_2 de von Mises.

No artigo de González e Llorca (2000), o tensor de rigidez tangente para o material efetivo, bem como os tensores de concentração de deformação para cada fase, são determinados via método incremental autoconsistente. Para contornar o problema existente nesse método, em que fornece uma resposta muito rígida para o material efetivo ao usar a forma anisotrópica do tensor de rigidez tangente elastoplástico para cada fase, os seus comportamentos foram representados por um tensor de rigidez tangente isotrópico, o que levou a uma excelente concordância com os resultados obtidos por outras abordagens. Conforme os autores, o modelo proposto não se restringe a analisar apenas os efeitos de dano, podendo ser usado no estudo do comportamento de qualquer material de bifásico.

Uma formulação chamada de afim, que consiste em um método de linearização incremental das leis constitutivas locais, foi proposta por Zaoui e Masson (2000). Essa formulação visa produzir previsões de tensão e deformação mais suaves e, consequentemente, melhoradas, ao serem comparadas com o método de linearização incremental de Hill para a modelagem de policristais elastoplásticos.

Dai e Huang (2001) apresentaram um esquema micromecânico incremental para o comportamento não linear de compósitos particulados, considerando o efeito do terceiro invariante de tensão no comportamento global do material heterogêneo. O material investigado nesse trabalho foi composto por uma matriz elastoplástica metálica reforçada com partículas sólidas. O esquema desenvolvido envolve os tensores instantâneos anisotrópicos tangente das fases não lineares e o terceiro invariante de tensão no comportamento global de compósitos não lineares.

Em seu artigo, Doghri e Ouaar (2003) estudaram modelos de homogeneização e algoritmos numéricos para compósitos bifásicos que apresentavam um comportamento elastoplástico sob pequenas deformações. A matriz foi considerada elastoplástica e as inclusões como sendo isotrópicas, elásticas e com geometrias podendo ser esféricas ou esferoidais (longas, curtas ou achatadas), apresentando a mesma forma e orientação. Doghri e Ouaar sugeriram que uma melhor avaliação do comportamento elastoplástico de um compósito poderia ser alcançada se o tensor de Eshelby fosse calculado com a parte isotrópica dos módulos da matriz de referência, onde a parte isotrópica do tensor tangente anisotrópico poderia ser obtida por dois métodos: decomposição espectral ou geral. Ainda nesse trabalho, os autores compararam os resultados obtidos por meio dos operadores tangentes: elastoplástico (contínuo) *versus* algorítmico (ou consistente) e anisotrópico *versus* isotrópico. A homogeneização do material implementada via dois esquemas: Mori–Tanaka e o esquema de dupla inclusão proposto por Nemat-Nasser e Hori

(1993). Os modelos de plasticidade usados foram dois: o modelo clássico de plasticidade J_2 e o modelo de Chaboche (1989) com endurecimento cinemático não linear e isotrópico.

Chaboche e Kanouté (2003) sugeriram uma aproximação isotrópica do módulo elasto-plástico tangente anisotrópico. Eles mostraram que o uso do tensor anisotrópico levou a respostas globais de tensão-deformação muito rígidas. Os resultados obtidos foram compatíveis com os resultados de González e Llorca (2000) e Doghri e Ouaar (2003).

Ao considerar o desalinhamento de inclusões elipsoidais, Doghri e Tinel (2005) trataram da homogeneização de campos médios de materiais multifásicos, sendo a matriz elastoplástica e as inclusões elásticas. Para o comportamento não linear, o trabalho de Doghri e Tinel (2005) generalizou o procedimento de homogeneização em duas etapas. Na primeira etapa, um *Elemento de Volume Representativo* (EVR) foi subdividido em "pseudos-grãos", contendo o material da matriz e uma série de inclusões idênticas (material, razão de aspecto e orientação). Cada compósito de pseudo-grão de duas fases foi então homogeneizado por meio do esquema de Mori-Tanaka. Na segunda etapa, todos os "pseudos-grãos" foram homogeneizados usando o esquema Voigt. O modelo foi estruturado para obtenção de resultados via formulação incremental, independente de taxa para qualquer fase, bem como com carregamentos cíclicos ou não proporcionais.

Por meio de um aprimoramento da formulação afim, Pierard e Doghri (2006) estudaram a previsão do comportamento global de materiais representados por uma classe de compósitos elasto-visco-plásticos bifásicos. Pierard e Doghri (2006) também estudaram variantes da formulação incremental para a homogeneização de campos médios de compósitos elastoplásticos bifásicos. Eles tentaram entender por que algumas variantes da formulação incremental fornecem boas previsões e outras não. Os autores estudaram seis operadores instantâneos para uma matriz de referência homogênea fictícia: dois anisotrópicos, dois isotrópicos e dois transversalmente isotrópicos. Para obtenção dos resultados, foi considerado que o comportamento do material obedece à elastoplasticidade clássica J_2 e usado o método de homogeneização de Mori e Tanaka. Teoricamente, foram apresentados resultados matemáticos que provam que algumas estimativas são mais rígidas ou mais suaves do que outras. Numericamente, os autores realizaram uma ampla gama de simulações com diferentes tipos de inclusões sob vários tipos de cargas e observaram que o uso de um tensor isotrópico para o regime elastoplástico ainda necessita de discussões sobre o assunto, pois, algumas questões ainda se encontram em aberto.

Delannay, Doghri e Pierard (2007) apresentaram um modelo micromecânico para metais multifásicos, consistindo em uma matriz dúctil e reforçado por inclusões elásticas e esféricas. Esse modelo pertence a uma classe de teorias de campos médios incremental de primeira ordem, adequado para carregamentos não monotônicos, onde uma extensão do esquema de Mori e Tanaka para o caso de materiais que apresentam um comportamento elastoplásticos não lineares foi aplicado.

Em sua pesquisa, Pierard et al. (2007) apresentaram um estudo sobre o comportamento mecânico efetivo de um compósito constituído por uma matriz elastoplástica reforçada com elipsoides alinhados e distribuídos randomicamente, submetido a condições de carregamento de tensões longitudinal e transversal à inclusão. Para a modelagem do compósito, desde o seu escoamento, foi considerado o modelo elastoplástico J_2. A fim de evitar uma resposta rígida associada aos modelos incrementais, quando a forma anisotrópica do operador tangente fosse usada na análise, o tensor de Eshelby foi calculado com uma parte isotrópica do operador tangente consistente anisotrópico, enquanto a versão anisotrópica foi usada em todas as outras operações. As discrepâncias entre os esquemas de homogeneização e os resultados numéricos foram avaliadas a partir da análise dos micro-campos de tensão e deformação fornecidos pelas simulações numéricas, que demonstraram o efeito dominante da localização da deformação plástica na matriz sobre a precisão dos esquemas de homogeneização.

Maghous, Dormieux e Barthélémy (2009) descreveram uma abordagem baseada na micromecânica de campos médios para calcular as propriedades efetivas de materiais compósitos ou porosos que possuem uma matriz que segue o critério de escoamento de Drucker-Prager e regra de fluxo não associada. Neste trabalho, demonstrou-se que os estados de tensão limite macroscópicos podem ser obtidos a partir da solução de uma sequência de problemas viscoplásticos declarados no EVR. Na ocasião, a estratégia de resolução utilizada implementou uma técnica de homogeneização não linear baseada no método secante modificado.

Brassart, Doghri e Delannay (2010) apresentaram um novo procedimento para avaliar a relevância do conceito de uma única inclusão isolada em um meio infinito, cujas propriedades da matriz se caracterizam como elastoplásticas. Os autores trataram da modelagem micromecânica de compósitos elastoplásticos reforçados com partículas esféricas e esferoidais, considerando o histórico do carregamento não monotônicos. Os modelos de homogeneização, baseados na micromecânica de campos médios, foram acoplados a uma solução de *Método dos Elementos Finitos* (MEF). Consequentemente, o tensor de Eshelby não foi usado e a maioria das aproximações envolvidas nos modelos de campos médios da elasticidade linear para o regime não linear foram evitadas. Para modelos de homogeneização de campos médios baseados na formulação incremental, observou-se que os resultados oferecem uma excelente solução econômica referente a tempo computacional.

No artigo de Doghri et al. (2011), observa-se que a formulação incremental foi aplicada em conjunto com a homogeneização de campos médios para compósitos que apresentam um comportamento elastoplástico. Vários materiais compósitos foram estudados: poliamida reforçada com fibra curta de vidro, com orientações alinhadas, aleatórias no espaço ou no plano; compósitos de matriz metálica com diferentes formas de inclusão e parâmetros de endurecimento da matriz; e por fim, um aço bifásico.

O modelo de dupla inclusão, originalmente desenvolvido por Hori e Nemat-Nasser (1993) para determinar propriedades elásticas lineares efetivas de materiais compósitos, foi usado por Teng (2013) para o estudo da resposta elastoplástica efetiva de materiais compósitos particulados de duas fases. Verificou-se que a formulação de dupla inclusão conseguiu fornecer uma previsão precisa da resposta elastoplástica efetiva de compósitos particulados com frações volumétricas moderadas.

A extensão da abordagem combinada dos modelos de homogeneização autoconsistente e Mori-Tanaka proposta para a avaliação das propriedades elásticas efetivas de compósitos particulados, foi estendida por Peng et al. (2013) para avaliação das propriedades elastoplásticas efetivas. Observou-se que a extensão apresentada nessa abordagem fornecer uma avaliação mais precisa das propriedades efetivas de compósitos particulados e pode avaliar as propriedades elastoplásticas de compósitos com diferentes tamanhos de partículas.

Cavalcante e Pindera (2016) desenvolveram uma versão da teoria *Finite-Volume Direct Averaging Micromechanics* (FVDAM) adequada para a análise de materiais periódicos, com microestruturas complexas, que sofrem deformações elastoplásticas infinitesimais e com base na teoria da plasticidade incremental. Em contraste com o trabalho publicado anteriormente, Cavalcante e Pindera (2013) trataram dos vários estágios de desenvolvimento de FVDAM. No presente trabalho, foi empregado dois mapeamentos de subvolume de referência na discretização de uma célula unitária: linear e quadrática; sendo avaliado o seu efeito sobre a tensão local e os campos de deformação plástica.

No estudo realizado por Peng et al. (2016), foi apresentado uma abordagem para determinar o tensor de Eshelby de um meio elastoplástico usando um meio elástico de referência. Para análise do comportamento elastoplástico, foi utilizado o critério de escoamento de von Mises. Para homogeneização, foi utilizado o método de Mori-Tanaka. A comparação dos resultados obtidos com análises por MEF, mostrou concordância satisfatória, demonstrando a validade da abordagem proposta.

Obtendo resultados satisfatórios, a formulação apresentada por Teng (2013) foi estendida por Teng (2018) para compósitos bifásicos com partículas esferoidais alinhadas. O estudo foi limitado à resposta elastoplástica efetiva sob carregamento uniaxial de compósitos que consistiam em partículas puramente elásticas e matriz elastoplástica, regida pelo critério de escoamento de von Mises e endurecimento isotrópico.

Song et al. (2020) propuseram um novo método para estimar as propriedades mecânicas de compósitos elastoplásticos, usando os conceitos do esquema de Mori-Tanaka e da densidade da taxa de potência de deformação média. Para verificar o esquema proposto, o comportamento elastoplástico de alguns compósitos particulados foram comparados com a abordagem dos elementos finitos, Mori-Tanaka e esquema autoconsistente. Foi mostrado que o esquema proposto pôde replicar satisfatoriamente as respostas elastoplásticas de compósitos reforçados com inclusões de partículas esferoidais com fração volumétrica e razões de aspecto moderadas.

O modelo formulado por Basiri et al. (2022), que tem como base o trabalho de Eshelby (1957), visa reproduzir o comportamento histerético cíclico de nanocompósitos constituído de uma liga de alumínio e possui endurecimento isotrópico/cinemático.

Uma nova estrutura numérica para análise de fadiga de baixo ciclo de materiais reticulados foi apresentada por Molavitabrizi, Ekberg e Mousavi (2022). A estrutura é baseada na homogeneização elastoplástica computacional equipada com a teoria da distância crítica para abordar o fenômeno da fadiga.

Foi apresentado por Yao et al. (2022) um modelo teórico alternativo desenvolvido com base no esquema de homogeneização de Mori e Tanaka (1973) a fim de caracterizar o comportamento mecânico não linear de compósitos de matriz hiperelástica reforçados com fibras.

Yin e Pindera (2022) incorporaram condições de contorno homogêneas de tração e deslocamento em uma teoria de homogeneização híbrida recentemente proposta para compósitos unidirecionais com distribuições aleatórias de fibras, a fim de investigar a convergência de módulos homogeneizados e estatísticas de campo de tensão local com tamanho de elemento de volume representativo. A abordagem híbrida combina elementos de volume finito e abordagens de elasticidade localmente exata na solução para o deslocamento de fibra e matriz e campos de tensão em elementos de volume representativos de multi-inclusão.

Jain et al. (2013) analisaram as capacidades preditivas de tensões em inclusões individuais e matriz, bem como as tensões médias na fase de inclusão para a formulação completa de Mori-Tanaka e pseudo-grão para distribuição planar 2D de orientação de inclusões. As tensões médias nas inclusões e da matriz são comparadas com soluções de modelos de elementos finitos em escala real para uma ampla gama de configurações.

Lages e Marques (2023) desenvolveram um novo procedimento micromecânico para a homogeneização elástica linear de compósitos com microestruturas periódicas. O procedimento foi desenvolvido para compósitos com número arbitrário de fases e formas geométricas das inclusões, em contraste com a maioria das abordagens de homogeneização existentes. O procedimento proposto é baseado na abordagem de inclusão equivalente de Eshelby e estende um modelo originalmente deduzido para avaliar os módulos elásticos efetivos de compósitos bifásicos periódicos. O procedimento representa os campos elásticos flutuantes dentro de cada célula unitária de repetição multifásica usando séries de Fourier, resultando em equações integrais de Lippmann-Schwinger que governam os campos de deformação próprios desconhecidos das inclusões. Ao contrário dos algoritmos iterativos tradicionais usados em abordagens baseadas em *Fast Fourier Transform* (FFT), o procedimento resolve as equações integrais a partir de um esquema de partição do domínio de cada inclusão.

1.2 Objetivos geral e específicos

A realização do presente trabalho confronta e discute os métodos existentes que investigam o comportamento elastoplástico de materiais compósitos e porosos, sob diferentes condições de carregamento, que possuem inclusões elásticas, alinhadas ou desalinhadas, inseridas em uma matriz dúctil elastoplástica que escoa conforme o critério de von Mises e apresenta endurecimento isotrópico ou cinemático por meio do esquema de Mori-Tanaka incremental, considerando o histórico de carregamento e deformações infinitesimais. Via micromecânica de campos médios e usando o tensor de Eshelby elastoplástico, deduzir o tensor de concentração de deformação para o meio elastoplástico que apresenta poros esféricos, elipsoidais alinhados, desalinhados e randomicamente distribuídos no espaço de uma matriz elastoplástica dúctil que apresenta endurecimento isotrópico ou cinemático.

Como objetivos específicos, citam-se:

(i) Investigar as possibilidades do uso do tensor constitutivo tangente, seja anisotrópico ou isotrópico, em conjunto com tensor de Eshelby isotropizado ou com tensor de Eshelby para o meio elastoplástico;

(ii) Investigar a aplicação do tensor de concentração de deformação para o meio elastoplástico de uma matriz dúctil porosa;

(iii) Investigar a influência da geometria da inclusão nos métodos de aproximação isotrópica dos tensores constitutivos tangentes;

(iv) Contribuir para o fortalecimento da linha de pesquisa da micromecânica de campos médios como ferramenta para o desenvolvimento de novos materiais no Programa de Pós-Graduação em Materiais da UFAL por meio do registro de *software* no INPI e de publicação de artigos científicos.

1.3 Organização do trabalho

A tese compreende sete capítulos, onde cada capítulo é tratado de forma independente e composto por introdução, desenvolvimento teórico e conclusões. O Capítulo 1 apresenta o estado da arte com enfoque na apresentação dos assuntos que servirão de base científica para o desenvolvimento deste trabalho. Foi mostrado os avanços da micromecânica de campos médios, desde o trabalho seminal proposto por Eshelby (1957), usado para análise de propriedades elásticas efetivas de materiais heterogêneos, passando pela proposta da formulação incremental de Hill (1965b), que estuda o comportamento elastoplástico de policristais, melhorias de resultados propostos por Doghri e Ouaar (2003), Chaboche, Kanouté e Roos (2005) e, por fim, Peng et al. (2016) apresentou uma nova proposta para o tensor de Eshelby para um meio elastoplástico, sendo também usado em Song et al. (2020).

O Capítulo 2 apresenta os fundamentos da micromecânica de campos médios para o regime elástico. Teoremas importantes como os teoremas da tensão e da deformação média, modelos clássicos de homogeneização, a influência da geometria e disposição espacial das inclusões sob as propriedades mecânicas dos materiais heterogêneos. Ainda são mostrados exemplos obtidos pelo autor e comparados com resultados obtidos na literatura e *software Digimat*, sendo finalizado com conclusões obtidas por meio das análises. Este capítulo foi objeto da elaboração do registro de patente de um *software* com o título *calc-composite*.

O Capítulo 3 apresenta uma introdução à plasticidade de materiais que apresentam endurecimento isotrópico ou cinemático e que escoam segundo o critério de von Mises. Também é mostrado os métodos de isotropização (aproximação isotrópica) dos operadores anisotrópicos que representam a rigidez tangente do material elastoplástico. Para usufruir do baixo custo computacional, comparado ao MEF, e da precisão dos resultados obtidos das propriedades efetivas de materiais compósitos que apresentam fração volumétrica de até 30%, este capítulo, juntamente com o Capítulo 2, foi objeto da publicação apresentada por Araújo, Rodrigues e Pires (2023), onde trata do estudo das propriedades elásticas efetivas e da tensão de escoamento de um mastro de sonda de petróleo fabricado com um compósito de matriz metálica e inclusões esféricas distribuídas aleatoriamente.

No Capítulo 4, seguindo o contexto teórico apresentado no Capítulo 2 e no Capítulo 3, são apresentados exemplos implementados pelo autor e comparados com resultados obtidos na literatura. Uma breve revisão do método incremental de Hill em conjunto com o modelo de Homogeneização proposto por Mori e Tanaka (1973) servirão como alicerceares para a aplicação da análise elastoplástica. Essa análise será implementada sob a ótica do uso de tensores tangentes anisotrópicos e isotrópicos, como também, dos tensores de Eshelby isotropizado e para o tensor de Eshelby para meio elastoplástico. Esse capítulo é finalizado com discussões e conclusões obtidas por meio dos resultados das análises.

O Capítulo 5 foi objeto da publicação de Araújo (2022) e apresenta a formulação que deduz o tensor de concentração de deformação para o meio elastoplástico poroso. Neste capítulo, recorrendo ao tensor de Eshelby para o meio elastoplástico, o método de homogeneização de Mori-Tanaka, formulação incremental e isotropização espectral, será apresentada uma abordagem simples e eficiente para o tensor de concentração de deformação para materiais que apresentam poros com variadas direções e geometrias. Os poros estão inseridos em uma matriz dúctil que apresenta comportamento elastoplástico, endurecimento isotrópico ou cinemático. As condições de carregamento estudadas foram cisalhamento puro, tensão aplicada no sentido longitudinal ou transversal aos poros.

O Capítulo 7 finaliza o trabalho. Conclusões gerais, discussões críticas dos resultados obtidos por meio dos métodos utilizados e perspectivas de trabalhos futuros são os tópicos abordados nesse capítulo.

Nos Apêndices são apresentados formulações que auxiliam a base teórica deste trabalho. São eles: Apêndice A: Teorema da deformação média; Apêndice B: Teorema da tensão média e; Apêndice D: Componentes do tensor de Eshelby. Ainda nos Apêndices, são apresentados fluxogramas que detalham os passos usados para a elaboração dos algoritmos usados neste trabalho.

2 MICROMECÂNICA DE CAMPOS MÉDIOS

2.1 Introdução

O uso da micromecânica de campos médios para a obtenção das estimativas de propriedades elásticas efetivas de materiais heterogêneos pode se mostrar como uma ferramenta extremamente eficiente para projetar e caracterizar o desempenho de materiais. Nesse capítulo, será apresentada, uma breve revisão de conceitos importantes da micromecânica de campos médios, como também os principais métodos de homogeneização e suas aplicações. Ainda neste capítulo, será realizado um estudo sobre variáveis que influenciam nas propriedades elásticas efetivas dos materiais heterogêneos, tais como geometria e direção das inclusões. Diversos exemplos de investigação das propriedades elásticas efetivas de materiais heterogêneos serão analisadas e comparadas com resultados obtidos na literatura, em que evidenciam a eficiência dos modelos analíticos usados, se apresentando como uma alternativa interessante para a redução do custo computacional. Esse capítulo é finalizado com conclusões sobre os resultados obtidos no decorrer de sua elaboração.

2.2 Notações preliminares

O entendimento de algumas notações serão importantes para a obtenção dos resultados que serão obtidos posteriormente.

- A convenção de soma de Einstein sobre índices repetidos é usada, a menos que indicado de outra forma:

$$a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj}. \tag{2.1}$$

- Ponto e dois pontos são usados para indicar produtos tensoriais contraídos em um e dois índices, respectivamente:

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = u_i v_i. \quad (\boldsymbol{a}.\boldsymbol{u})_i = a_{ij}u_j. \tag{2.2}$$

$$(\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b})_{ij} = a_{ik}b_{kj}. \quad \boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} = a_{ik}b_{ki}. \tag{2.3}$$

$$(\mathbb{C} : \boldsymbol{a})_{ij} = C_{ijkl}a_{lk}. \quad (\mathbb{C} : \mathbb{D})_{ijkl} = C_{ijmn}D_{nmkl}. \tag{2.4}$$

- Produto tensorial é designado por $\otimes$:

$$(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})_{ij} = u_i v_j. \quad (\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})_{ijkl} = a_{ij} b_{kl}. \tag{2.5}$$

- A magnitude do vetor (norma) pode ser calculado por:

$$||\boldsymbol{v}|| = \sqrt{\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v}}. \tag{2.6}$$

- Tensor de quarta ordem simétrico:

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}^T. \tag{2.7}$$

- Sabe-se que (::) representa o produto para quaisquer dois tensores de quarta ordem, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$ (KANG; KAN, 2017):

$$\mathbb{C} :: \mathbb{D} = C_{ijkl} D_{lkji} = \mathbb{D} :: \mathbb{C}. \tag{2.8}$$

Usando a definição da Equação 2.8, os resultados apresentados na Equação 2.9 podem ser facilmente obtidos via *software* Matlab usando o comando ”$dot(\mathbb{C}, \mathbb{D})$” ou via *software* SciLab, usando o comando $sum(\mathbb{C}.*\mathbb{D})$ conforme apresentado na Equação 2.10 e Equação 2.11, respectivamente:

$$\mathbb{J} :: \mathbb{J} = 1. \quad \mathbb{K} :: \mathbb{K} = 5. \quad \mathbb{J} :: \mathbb{K} = 0. \tag{2.9}$$

Em que $\mathbb{J}$ e $\mathbb{K}$ são os tensores de projeção volumétrico e desviador apresentados no Equação 2.25 e Equação 2.26.

$$\mathbb{J} :: \mathbb{J} = dot(\mathbb{J}, \mathbb{J}) = 1. \quad \mathbb{K} :: \mathbb{K} = dot(\mathbb{K}, \mathbb{K}) = 5. \quad \mathbb{J} :: \mathbb{K} = dot(\mathbb{J}, \mathbb{K}) = 0. \tag{2.10}$$

$$\mathbb{J} :: \mathbb{J} = sum(\mathbb{J}.*\mathbb{J}) = 1, \quad \mathbb{K} :: \mathbb{K} = sum(\mathbb{K}.*\mathbb{K}) = 5, \quad \mathbb{J} :: \mathbb{K} = sum(\mathbb{J}.*\mathbb{K}) = 0. \tag{2.11}$$

- Matriz identidade I_{ijkl} 6x6:

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \tag{2.12}$$

desenvolvendo Equação 2.12, tem-se a matriz identidade $\mathbb{I}$ 6x6:

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

- Delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = 1. \\ 0, & \text{se } i \neq 1. \end{cases} \tag{2.14}$$

isto é:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1. \tag{2.15}$$

$$\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{32} = 0. \tag{2.16}$$

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}, \tag{2.17}$$

substituindo os valores de δ_{ij}, tem-se a matriz identidade 3x3:

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.18}$$

- Derivada de um produto:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(x_i \sigma_{kj}\right) = x_i \frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial x_k} + \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \sigma_{kj} \Rightarrow \tag{2.19}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_k}(x_i \sigma_{kj}) = x_i \frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial x_k} + x_{ik} \sigma_{kj} \Rightarrow \tag{2.20}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \sigma_{kj} = \frac{\partial}{\partial x_k}(x_i \sigma_{kj}) - x_i \frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial x_k} \Rightarrow \tag{2.21}$$

Aplicando a teoria de equilíbrio de um corpo rígido, tem-se:

$$\Rightarrow \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \sigma_{kj} = \frac{\partial}{\partial x_k}(x_i \sigma_{kj}). \tag{2.22}$$

- Tensores de projeção volumétrico e desviador:

  Muitas vezes é útil decompor os tensores de tensão e deformação em suas partes isotrópicas e desviadoras:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + e_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} + s_{ij}, \tag{2.23}$$

  em que a decomposição da Equação 2.23 pode ser reescrita usando matrizes de projeção volumétrica e desviadora $\mathbb{J} = \frac{1}{3}\delta\delta^T$ e $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{3}\delta\delta^T\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{e} = (\mathbb{J}+\mathbb{K})\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3}\delta\delta^T\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{s} = (\mathbb{J}+\mathbb{K})\boldsymbol{\sigma}. \tag{2.24}$$

  As matrizes de projeção volumétrico $\mathbb{J}$ e desviador $\mathbb{K}$ de quarta são (DVORAK, 2012):

$$3\mathbb{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.25}$$

$$3\mathbb{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \tag{2.26}$$

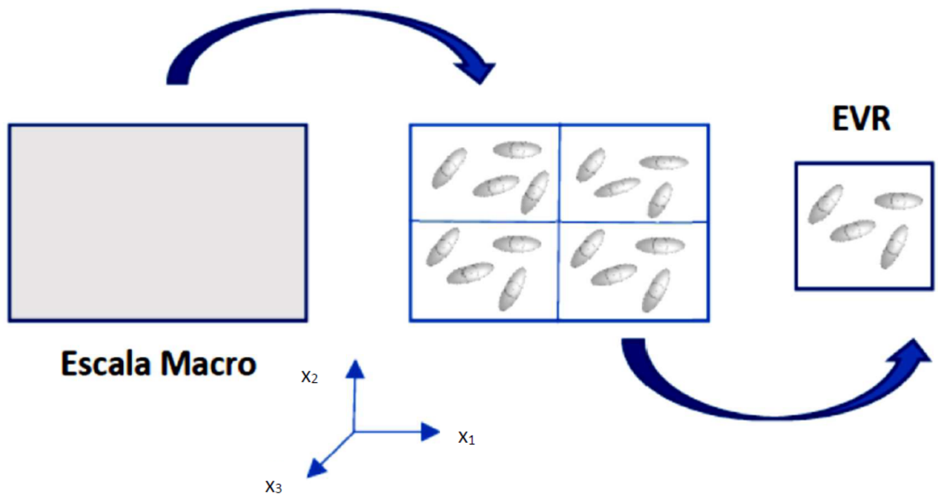
2.3 Definições básicas da micromecânica de campos médios

2.3.1 Elemento de Volume Representativo

As propriedades macroscópicas de um material heterogêneo podem ser determinadas por modelos micromecânicos que consideram um determinado volume do sólido para representar o comportamento efetivo do material. Esse volume é chamado de EVR. Em outras palavras, os procedimentos de homogeneização é geralmente aplicado ao EVR para obter as propriedades elásticas efetivas.

O EVR é definido como o volume da microestrutura que permite obter, com certa precisão, uma propriedade macroscópica de interesse. Esse EVR caracteriza-se como um volume V do material em estudo, que tenha tamanho suficiente para conter todas as informações necessárias que descrevam o seu comportamento termo-mecânico. A Figura 1 ilustra um típico EVR, cuja heterogeneidade é caracterizada pela presença de poros aleatoriamente distribuídos.

Figura 1 – EVR de um material poroso.



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Para entender o comportamento das propriedades efetivas dos materiais heterogêneos é necessário conhecer os conceitos baseados na existência de médias macroscópicas. Isto é, busca-se determinar as propriedades que governam o comportamento macroscópico do material heterogêneo em termos das propriedades mecânicas dos constituintes individuais (matriz e inclusão), distribuição espacial e a natureza geométrica de sua combinação (HILL, 1963).

Considere uma estrutura feita de um material compósito. Ao nível macroscópico desta estrutura, o material é visto como homogêneo. Cargas impostas à estrutura induzem campos de tensão e deformação no material. Em cada ponto macroscópico a relação entre deformação e tensão local depende da microestrutura heterogênea, que pode ser vista apenas em menor escala. Para considerar essa microestrutura heterogênea, um EVR é definido em cada ponto macroscópico. Ao vincular essas escalas (macro e micro), surgem vários problemas como: carregar o EVR a partir da deformação ou tensão macroscópica aplicada no ponto macroscópico correspondente, resolver o problema do valor de contorno no EVR e calcular a resposta macroscópica correspondente (PIERARD, 2006).

Isso é equivalente à exigência de que, quando as fases do material são distribuídas de forma homogênea, estatisticamente falando, esse material heterogêneo pode ser tratado como um material estatisticamente uniforme e a tensão e deformação em um ponto material podem ser avaliadas pelas médias de tensão e deformação em um EVR (HILL, 1963; CHRISTENSEN; WAALS, 1972).

2.3.2 Relação entre escalas macroscópica e microscópica

Pode-se associar a condição de carregamento homogênea de tensão e deformação ao EVR por meio de teoremas da média de tensão (ou deformação). As condições de carregamento homogêneas, com tensões aplicadas na superfície S do EVR, produzem um tensor de tensão pontual $\sigma_{ij}(\boldsymbol{x})$ e tensor de deformação $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x})$. A média desses microcampos é igual ao tensor de tensão macroscópico constante $\langle\bar{\sigma}_{ij}\rangle$ e tensor de deformação macroscópico constante $\langle\bar{\varepsilon}_{ij}\rangle$. Sendo assim, as tensões e deformações macroscópicas são definidas para um ponto de coordenada $\boldsymbol{x}$ como as médias volumétricas em um EVR de volume V conforme Equação 2.27 e Equação 2.28. Portanto, os tensores de tensão e deformação efetivos são deduzidas por meio da média dos tensores de campos de tensão e deformação locais, respectivamente, sobre o volume do EVR,

$$\langle\bar{\sigma}_{ij}\rangle = \frac{1}{V}\int_V \sigma_{ij}(\boldsymbol{x})dV = \frac{1}{V}\left[\int_{V_i} \sigma_{ij}(\boldsymbol{x})dV_i + \int_{V_m} \sigma_{ij}(\boldsymbol{x})dV_m\right], \tag{2.27}$$

$$\langle\bar{\varepsilon}_{ij}\rangle = \frac{1}{V}\int_V \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x})dV = \frac{1}{V}\left[\int_{V_i} \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x})dV_i + \int_{V_m} \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x})dV_m\right]. \tag{2.28}$$

A barra acima de um símbolo $(\bar{\cdot})$ denota uma quantidade ou variável macroscópica. Para um material bifásico, admite-se que o volume representativo seja a soma do volume da matriz com o volume da inclusão:

Ao tomar-se a razão entre o volume da matriz (V_m) e o volume total (V), bem como o volume das inclusões (V_i) e o volume total (V), têm-se as frações volumétricas da matriz f_m e da inclusão f_i.

$$f_m = \frac{V_m}{V}, \tag{2.29}$$

$$f_i = \frac{V_i}{V}. \tag{2.30}$$

Considerando um EVR, os campos de tensões e deformações nas fases do material heterogêneo (local) podem ser representados pelas suas médias $\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_m$, $\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_i$, $\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_m$ e $\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_i$. Usando a equação universal da micromecânica de campos médios, a tensão macroscópica média $\langle\bar{\sigma}_{ij}\rangle$ e a deformação macroscópica média $\langle\bar{\varepsilon}_{ij}\rangle$, são obtidos a partir do tensor tensão e deformação média de cada fase do compósito:

$$\langle\bar{\boldsymbol{\sigma}}\rangle = f_i\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_i + (1-f_i)\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_m, \tag{2.31}$$

$$\langle\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\rangle = f_i\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_i + (1-f_i)\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_m. \tag{2.32}$$

Conforme visto até o momento, pode-se afirmar que a equivalência entre o material heterogêneo real e o material homogêneo fictício é obtido pelas tensões e deformações médias e pelas constantes elásticas efetivas. As relações constitutivas elásticas da matriz, inclusão e do material heterogêneo são dadas, respectivamente, por;

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_m = \mathbb{C}_m : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_m \,, \tag{2.33}$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_i = \mathbb{C}_i : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_i \,, \tag{2.34}$$

$$\langle \bar{\boldsymbol{\sigma}} \rangle = \bar{\mathbb{C}} : \langle \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle \,. \tag{2.35}$$

2.3.3 Condições de carregamento homogênea em deformação e em tensão

Condições de carregamento homogêneas aplicadas na superfície de um corpo homogêneo produzirão um campo de tensão e deformação homogêneo. Tais condições de carregamento são obtidas pela imposição de deslocamentos no contorno S no corpo:

$$u_i = \varepsilon_{ij}^0 x_j, \tag{2.36}$$

em que ε_{ij}^0 são deformações constantes e x_j é a componente do vetor de posição de um ponto macroscópico. Alternativamente, as tensões podem ser impostas na superfície S do corpo:

$$t_i^0 = \sigma_{ij}^0 N_j, \tag{2.37}$$

em que σ_{ij}^0 são tensões constantes macroscópicas e N_j é a componente normal externo a superfície S.

O teorema da deformação média afirma que as deformações médias no compósito $\langle \bar{\varepsilon}_{ij} \rangle$ são idênticas às deformações constantes ε_{ij}^0 aplicadas na superfícei S. Este teorema está detalhado no Apêndice A.

As condições de carregamento homogêneas referentes a tensões aplicadas em S, produzem um campo de tensão no compósito cuja tensão média $\langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle$ é idêntica à tensão constante σ_{ij}^0 aplicada na superfície S. O teorema da tensão média está detalhando no Apêndice B.

2.3.4 Condição de Hill-Mandel

A condição de Hill-Mandel garante a preservação de energia durante a transição de escala, na qual estabelece que a variação local do trabalho macroscópico é igual à média volumétrica da variação do trabalho sobre o EVR, ou seja (HILL, 1963; MANDEL, 1980; PERDAHCIOğLU; GEIJSELAERS, 2011; KARL; BÖHLKE, 2022):

$$\langle \sigma_{ij} : \varepsilon_{ij} \rangle = \langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle : \langle \bar{\varepsilon}_{ij} \rangle. \tag{2.38}$$

O lema assegura a igualdade entre a média do trabalho microscópico $\langle \sigma_{ij} : \varepsilon_{ij} \rangle$ e o trabalho macroscópico $\langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle : \langle \bar{\varepsilon}_{ij} \rangle$.

2.3.5 Tensores de concentração de tensão e deformação

O problema fundamental na micromecânica de materiais heterogêneos é a determinação dos tensores de concentração de deformação $\mathbb{A}_k$, que relaciona as deformações médias na k-ésima fase de um material heterogêneo espacialmente uniforme com a deformação macroscópica, ou seja, $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_k = \mathbb{A}_k : \langle \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle$, $k = i$ (inclusão) ou m (matriz), respectivamente, (HILL, 1963):

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_i = \mathbb{A}_i : \langle \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle, \tag{2.39}$$

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_m = \mathbb{A}_m : \langle \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle, \tag{2.40}$$

em que $\mathbb{A}_i$ e $\mathbb{A}_m$ representam os tensores de concentração de deformação de quarta ordem na inclusão e na matriz, respectivamente. Da mesma forma, as tensões efetivas se relacionam com as tensões médias em cada fase por meio dos tensores de concentração de tensão correspondentes,

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_m = \mathbb{B}_m : \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}} \rangle, \tag{2.41}$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_i = \mathbb{B}_i : \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}} \rangle, \tag{2.42}$$

em que, para materiais heterogêneos bifásicos, as seguintes relações devem ser satisfeitas:

$$(1 - f_i)\mathbb{A}_m + f_i\mathbb{A}_i = \mathbb{I}, \tag{2.43}$$

$$(1 - f_i)\mathbb{B}_m + f_i\mathbb{B}_i = \mathbb{I}. \tag{2.44}$$

Conforme Hill (1963), o tensor constitutivo global de um material heterogêneo pode ser expresso em termos dos tensores de rigidez dos constituintes dos materiais, a fração volumétrica da matriz e inclusão e os tensores de concentração de deformação correspondente (QU; CHERKAOUI, 2006):

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_m + f_i(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m) : \mathbb{A}_i, \tag{2.45}$$

em que $\mathbb{C}_m$ é o tensor de rigidez homogêneo e isotrópico da matriz e $\mathbb{C}_i$ é o tensor de rigidez homogêneo e isotrópico da inclusão.

2.4 Definição de *eigenstrain*, inclusão e heterogeneidade

Para melhor entendimento da seção 2.5, é preciso definir o que é *eigenstrain*, inclusão (inclusão fictícia) e heterogeneidade (inclusão real), usadas para a dedução do tensor de concentração de deformação diluído.

- *Eigenstrain*: *eigenstrains* são deformações inelásticas, tais como deformações térmicas, deformações de transformação de fase e deformações plásticas. Considerando deformações infinitesimais, a ocorrência de uma deformação total, ou deformação perturbada devido à presença do *eigenstrain*, é caracterizada pela soma da deformação elástica ε_{ij}^{e}, e a deformação inelástica ε_{ij}^{*}:

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x}) = \varepsilon_{ij}^{e}(\boldsymbol{x}) + \varepsilon_{ij}^{*}(\boldsymbol{x}). \tag{2.46}$$

  Pode-se afirma ainda que a deformação total ε_{ij} deve ser compatível com $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$, em que $u_{i,j} = du_i/dx_j$ (MA; KORSUNSKY, 2014).

- Inclusão: conforme pode ser observado na Figura 4, uma inclusão é definida como um subdomínio Ω inserido em uma matriz de domínio infinito D, na qual a deformação inelástica *eigenstrain* $\varepsilon_{ij}^{*}(\boldsymbol{x})$ difere de zero em Ω e zero na matriz D. As propriedades do material em Ω e em D são as mesmas. Uma inclusão nada mais é do que uma distribuição de *eigenstrain* em um material homogêneo cuja presença pode causar tensões no material.

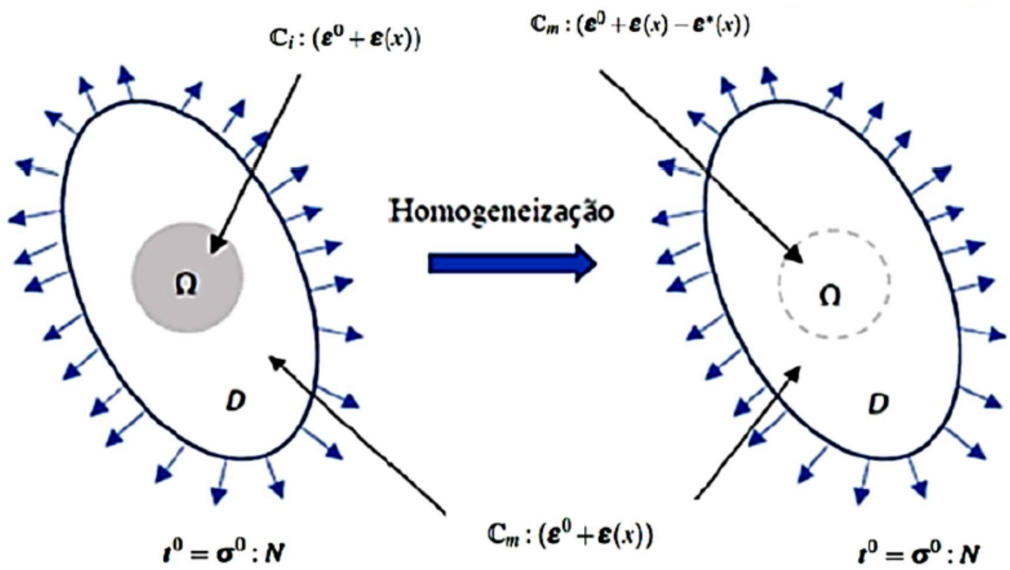
- Heterogeneidade: na Figura 3 observa-se uma heterogeneidade definida como um subdomínio Ω inserido domínio D, onde as propriedades do material em Ω e em $D - \Omega$ são diferentes. O domínio fora de Ω, ou seja, $D - \Omega$, é chamado de matriz.

2.5 Inclusão equivalente

A presença de uma heterogeneidade, cujo tensor constitutivo difere do tensor constitutivo da matriz ao qual está inserida, gera campos de tensão $\boldsymbol{\sigma}$ e deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$ perturbados no EVR. Para solucionar esse problema, Eshelby usou uma estratégia de homogeneização. Essa estratégia envolve a substituição de uma inclusão real, que possui propriedades materiais diferentes da matriz, por uma inclusão fictícia equivalente, que possui o mesmo material da matriz. Sobre essa inclusão fictícia, uma *eigenstrain* atua de modo que os campos de tensão e deformação no material fictício seja mecanicamente equivalente aos do material heterogêneo real.

Considerando condições de carregamento homogênea, o esquema conceitual desta ideia é apresentado na Figura 2, no qual o EVR $\bar{D}$ é submetido a uma tensão constante $\boldsymbol{\sigma}^0 = \bar{\mathbb{C}} : \boldsymbol{\varepsilon}^0$. Ao impor uma *eigenstrain* $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ na inclusão fictícia, tem-se $\boldsymbol{\varepsilon}^* = 0 \; \forall \; \boldsymbol{x} \in D - \Omega$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^* \neq 0 \; \forall \; \boldsymbol{x} \in \Omega$.

Figura 2 – Esquema conceitual do método da inclusão equivalente



Fonte: Adaptado de Li e Wang (2008)

Ao aplicar a lei de Hooke, os campos de tensões totais na **heterogeneidade** e na **inclusão** fictícia são, respectivamente (MURA, 1982),

$$\boldsymbol{\sigma}^t = \boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma} = \begin{cases} \mathbb{C}_i : (\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})), & \forall\, \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ \mathbb{C}_m : (\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{x})), & \forall\, \boldsymbol{x} \in \Omega, \end{cases} \tag{2.47}$$

em que $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{x})$ representa a deformação elástica apresentada na Equação 2.46.

Do ponto de vista mecânico, existe uma equivalência entre o material heterogêneo real e o material homogêneo fictício, então, as tensões totais em Ω devem ser iguais:

$$\mathbb{C}_i : (\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})) = \mathbb{C}_m : (\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{x})). \tag{2.48}$$

Por meio da Equação 2.48, que representa o cumprimento da condição de consistência ou equivalência mecânica, pode-se determinar a *eigenstrain* $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{x})$ necessária para a homogeneização do material heterogêneo. O detalhamento para obtenção de $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{x})$ é demonstrado na subseção 2.5.1 e subseção 2.5.2.

2.5.1 Inclusão elipsoidal com *eigenstrain* uniforme

Na premissa sob a consideração de deformação infinitesimal, a Equação 2.49 relaciona a deformação total (perturbada) na inclusão $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x})$ com a *eigenstrain* $\varepsilon^*_{kl}(\boldsymbol{x})$ por intermédio de um tensor S^{Ω}_{ijkl} de quarta ordem (ESHELBY, 1957; MURA, 1982; NEMAT-NASSER, 1993):

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x}) = S^{\Omega}_{ijkl} : \varepsilon^*_{kl}(\boldsymbol{x}), \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{2.49}$$

nos quais os componentes do tensor de Eshelby S^{Ω}_{ijkl} podem ser calculados via Apêndice D, ou seja, em função do coeficiente de Poisson da matriz e da geometria da inclusão. Sabe-se que S^{Ω}_{ijkl} é simétrico em relação aos dois primeiros índices e aos dois últimos índices $S^{\Omega}_{ijkl} = S^{\Omega}_{jikl} = S^{\Omega}_{ijlk}$, porém, o tensor de Eshelby não possui a simetria diagonal, ou seja, $S^{\Omega}_{ijkl} \neq S^{\Omega}_{klij}$.

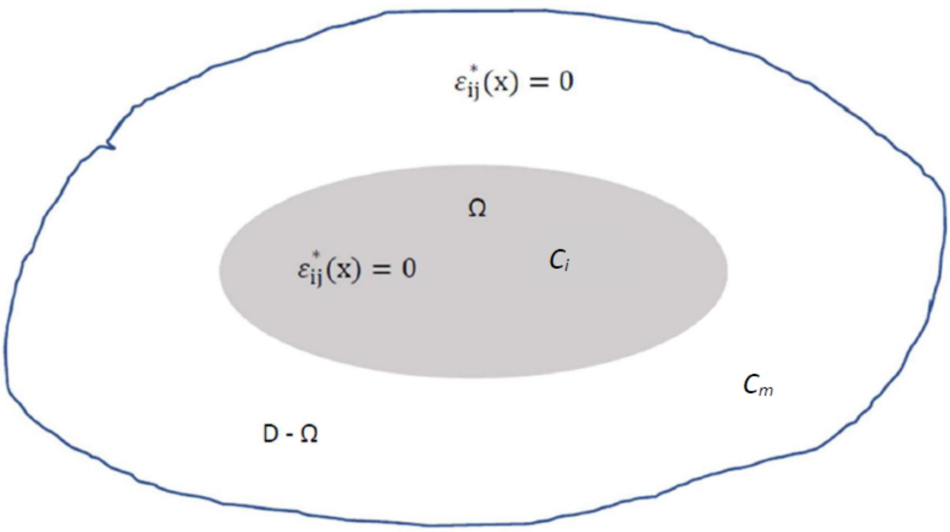
A Equação 2.49 demonstrou que a distribuição de tensão e deformação em uma inclusão elipsoidal, inserida em uma matriz infinita homogênea, é uniforme quando a *eigenstrain* $\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{x})$ é uniforme.

2.5.2 Dedução do método da inclusão equivalente: tensor de concentração de deformação diluído

Conforme visto na seção 2.5, o método da inclusão equivalente de Eshelby é um método de homogeneização que estabelece uma equivalência entre a *eigenstrain* (ou *eigenstress*) e uma heterogeneidade (LI; WANG, 2008).

Considere um corpo elástico D que possui um tensor constitutivo elástico $\mathbb{C}_m$ e uma heterogeneidade elipsoidal Ω com um tensor constitutivo elástico $\mathbb{C}_i$ (ver Figura 3). Seja D submetido a um vetor tensão superficial $\boldsymbol{t}^0 = \boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{N}$ em seu contorno conforme Figura 2.

Figura 3 – Heterogeneidade elipsoidal



Fonte: Adaptado de Qu e Cherkaoui (2006)

Se $\mathbb{C}_m = \mathbb{C}_i$, o material é homogêneo e, consequentemente, o campo de tensão total na inclusão é uniforme em todo o domínio D, dado por:

$$\boldsymbol{\sigma}^t = \boldsymbol{\sigma}^0. \tag{2.50}$$

Por meio do princípio da superposição linear, quando $\mathbb{C}_i$ difere de $\mathbb{C}_m$, o campo de tensão total em D pode ser escrito como:

$$\boldsymbol{\sigma}^t = \boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}, \tag{2.51}$$

em que $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor tensão perturbada devido à presença da heterogeneidade Ω e que satisfaz as equações de equilíbrio e a condição de contorno homogênea em tensão.

Se $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ for usado para denotar o campo de deformação correspondente a $\boldsymbol{\sigma}^0$,

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbb{C}_m : \boldsymbol{\varepsilon}^0. \tag{2.52}$$

A deformação total na inclusão pode ser escrita como,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^t = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{2.53}$$

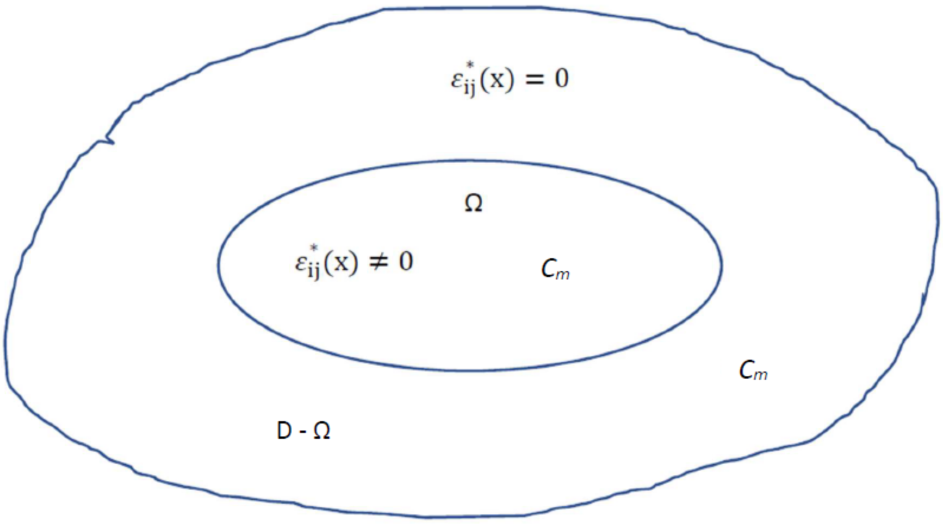
em que $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o campo de deformação perturbado também devido à presença da heterogeneidade. A aplicação da lei de Hooke em Ω e $D-\Omega$ (inclusão e matriz) produz, respectivamente,

$$\boldsymbol{\sigma}^t = \boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_i : (\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\varepsilon}) \quad em \quad \Omega, \tag{2.54}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^t = \boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_m : (\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\varepsilon}) \quad em \quad D-\Omega. \tag{2.55}$$

Considerando agora um material fictício, o tensor de Eshelby é usado para calcular os campos de tensão e deformação em uma inclusão elástica e, sendo assim, deve-se encontrar os campos de deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$ e de tensão pertubados $\boldsymbol{\sigma}$. Para tanto, considera-se um corpo homogêneo D com tensor elástico $\mathbb{C}_m$, contendo uma inclusão Ω submetida a uma *eigenstrain* $\boldsymbol{\varepsilon}^*$, cujo valor deve ser determinado. A representação deste corpo é mostrada na Figura 4.

Figura 4 – Inclusão elipsoidal



Fonte: Adaptado de Qu e Cherkaoui (2006)

Observa-se na Figura 4 a presença de uma *eigenstrain* $\boldsymbol{\varepsilon}^* \neq \mathbf{0}$ para simular a heterogeneidade e criar o problema de inclusão equivalente. Para a análise deste problema, aplica-se a lei de Hooke na inclusão e na matriz, respectivamente:

$$\boldsymbol{\sigma}^t = \boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_m : (\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*) \quad em \quad \Omega, \tag{2.56}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^t = \boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_m : (\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\varepsilon}) \quad em \quad D - \Omega, \tag{2.57}$$

em que $\boldsymbol{\sigma}^0$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ são as ocorrências dos campos de tensão e deformação em D devido à tensão aplicada na superfície ($\boldsymbol{t}^0 = \boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{N}$) quando a inclusão está ausente, $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ são os campos perturbados deformação e de tensão devido a *eigenstrain* $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ na inclusão. Da solução de Eshelby apresentada na Equação 2.49, a Equação 2.56 pode ser reescrita como:

$$\boldsymbol{\sigma}^t = \boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_m : (\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbb{S}^\Omega : \boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{\varepsilon}^*) \quad em \quad \Omega. \tag{2.58}$$

Para solucionar o problema da heterogeneidade inserida na matriz, investiga-se a ocorrência da perturbação devido à presença de Ω inserida na matriz $D - \Omega$. Sendo assim, deve-se determinar a *eigenstrain* $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ de forma que o campo de tensões na inclusão dada por Equação 2.58 seja o mesmo que o campo de tensões na heterogeneidade, dada por Equação 2.54, ou seja,

$$\mathbb{C}_m : (\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbb{S}^\Omega : \boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{\varepsilon}^*) = \mathbb{C}_i : (\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\varepsilon}) \quad em \quad \Omega. \tag{2.59}$$

Novamente usando a Equação 2.49 produz,

$$\mathbb{C}_m : (\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbb{S}^\Omega : \boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{\varepsilon}^*) = \mathbb{C}_i : (\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbb{S}^\Omega : \boldsymbol{\varepsilon}^*) \quad em \quad \Omega. \tag{2.60}$$

A partir da Equação 2.60, a *eigenstrain* $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ necessária para simular a heterogeneidade pode ser encontrada conforme a seguir:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = -[(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m) : \mathbb{S}^\Omega + \mathbb{C}_m]^{-1} : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m) : \boldsymbol{\varepsilon}^0 = -[\mathbb{S}^\Omega + (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m)^{-1} : \mathbb{C}_m]^{-1} : \boldsymbol{\varepsilon}^0. \tag{2.61}$$

Sabendo que a deformação total na inclusão segue a Equação 2.53, tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^t = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbb{S}^\Omega : \boldsymbol{\varepsilon}^* = [\mathbb{S}^\Omega : \mathbb{C}_m^{-1} : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m) + \mathbb{I}]^{-1} : \boldsymbol{\varepsilon}^0 \quad em \quad \Omega. \tag{2.62}$$

A Equação 2.62 relaciona a deformação total na inclusão com a deformação aplicada na superfície do material por meio de um tensor de concentração de deformação $\mathbb{A}_i^{dil}$:

$$\mathbb{A}_i^{dil} = [\mathbb{I} + \mathbb{S}^\Omega : \mathbb{C}_m^{-1} : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m)]^{-1}. \tag{2.63}$$

O tensor de concentração de deformação $\mathbb{A}_i^{dil}$ pode ser aplicado para compósitos no qual a heterogeneidade elipsoidais interagem apenas com a matriz, mas não entre si.

Por meio da Equação 2.62, definindo $\boldsymbol{\varepsilon}^t = \mathbb{C}_i^{-1} : \boldsymbol{\sigma}^t$ e usando a $\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \mathbb{C}_m^{-1} : \boldsymbol{\sigma}^0$ (em que $\mathbb{C}_m = \bar{\mathbb{C}}$ por estar se tratando de uma inclusão fictícia), o tensor de concentração de tensão no método de homogeneização *dilute suspension*, conforme explícito na Equação 2.66, pode relacionar a tensão total na inclusão com a tensão aplicada na superfície do material:

$$\boldsymbol{\sigma}^t = \mathbb{B}_i^{dil} : \boldsymbol{\sigma}^0 \quad em \quad \Omega, \tag{2.64}$$

em que $\mathbb{B}_i^{dil}$ é o tensor de concentração de tensão na inclusão.

2.6 Esquemas convencionais de homogeneização

Os esquemas de homogeneização de campos médios são ferramentas poderosas baseadas na abordagem do método da inclusão equivalente de Eshelby (1957). Esses esquemas foram oram estabelecidos para modelar materiais heterogêneos e prever as propriedades mecânicas e a resposta de um material compósito. Para isto, se usa a média volumétrica das fases constituintes em um EVR, dadas as interações assumidas das fases individuais em termos de deformações infinitesimais e campos de tensão uniformes. Dispõem de baixo custo computacional e têm sido bem sucedidos na descrição da resposta termoelástica de materiais não heterogêneos (BOHM, 1998; ORTOLANO; HERNÁNDEZ; OLIVER, 2013; COSTA, 2017). Considerando a micromecânica dos campos médios, a seguir, são apresentados quatro modelos de homogeneização: (*dilute suspension*), autoconsistente, Mori-Tanaka e esquema diferencial.

2.6.1 Esquema *dilute suspension*

Considera-se um EVR que descreve um compósito bifásico constituído de uma matriz homogênea, na qual, estão inseridas inclusões. Conforme a Equação 2.62 e usando a Equação 2.63, tem-se:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}_i \rangle = \mathbb{A}_i^{dil} : \langle \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle, \tag{2.65}$$

em que $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_i \rangle$ é a deformação média na inclusão e $\langle \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle$ é a deformação média efetiva. Da mesma forma, para relacionar a tensão média na inclusão com a tensão efetiva $\langle \boldsymbol{\sigma}_i \rangle = \mathbb{B}_i^{dil} : \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}} \rangle$ precisa encontrar o tensor de concentração de tensão $\mathbb{B}_i^{dil}$.

$$\mathbb{B}_i^{dil} = [\mathbb{I} + \mathbb{Q} : (\mathbb{C}_i^{-1} - \mathbb{C}_m^{-1})]^{-1}, \tag{2.66}$$

no qual o tensor $\mathbb{Q}$ foi apresentado por Hill (1965a) e pode ser calculado como: $\mathbb{Q} = \mathbb{C}_m : (\mathbb{I} - \mathbb{S}^{\Omega})$.

Bastante utilizado na literatura, o tensor de polarização $\mathbb{P}$ de Hill (1965a) pode ser calculado por $\mathbb{P} = \mathbb{S}^{\Omega} : \mathbb{C}_m^{-1}$. Portanto, a relação entre os tensores $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ deve atender a seguinte condição: $\mathbb{P} : \mathbb{C}_m + \mathbb{C}_m^{-1} : \mathbb{Q} = \mathbb{I}$ (HESSMAN et al., 2021).

Uma vez obtida a expressão para o tensor de concentração de deformação, as propriedades elásticas do material heterogêneo podem ser calculadas. Por meio do método *dilute suspension* e usando a Equação 2.45, o tensor de rigidez efetivo é determinado por:

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_m + f_i (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m) : \mathbb{A}_i^{dil}. \tag{2.67}$$

Esse tensor de rigidez efetivo foi deduzido com base na suposição em que não existe interação entre as inclusões, sendo essa estimativa válida apenas para baixas frações volumétricas.

2.6.2 Esquema autoconsistente

O esquema de homogeneização *Autoconsistente* (AC), proposto inicialmente por Hershey (1954) e Kröner (1958) para aplicação em meios policristalinos monofásicos e posteriormente usado por Hill (1965a), Budiansky (1965) e Christensen e Lo (1979), é semelhante ao esquema de homogeneização *dilute suspension*, em que o material da "matriz" é o meio efetivo homogeneizado $\bar{\mathbb{C}}$. Isso significa que os tensores locais serão baseados nas propriedades do meio efetivo e não mais nas propriedades do material da matriz. Dessa forma é possível modelar a interação local entre as inclusões.

Esse esquema pode ser simplificado matematicamente via uma estratégia iterativa, que pode ser realizada selecionando os seguintes "valores iniciais":

$$\bar{\mathbb{C}}_n = \mathbb{C}_m \tag{2.68}$$

e

$$\bar{\mathbb{S}}_n^{\Omega} = \mathbb{S}^{\Omega}, \tag{2.69}$$

no qual pode observar na Equação 2.68 que $\bar{C}_n$ representa o tensor constitutivo inicial do material heterogêneo e na Equação 2.69, $\bar{S}_n^{\Omega}$ representa o tensor de Eshelby inicial.

Observa-se que nesse método, a cada iteração, o tensor constitutivo da matriz $\mathbb{C}_m$ é substituído pelo tensor constitutivo do material homogeneizado $\bar{\mathbb{C}}_n$, como também, como consequência, ocorre a atualização do tensor de Eshelby S^{Ω} por $\bar{S}_n^{\Omega}$. O tensor de concentração de deformação $\bar{\mathbb{A}}_{i(n+1)}^{AC}$ para o esquema de homogeneização AC é:

$$\bar{\mathbb{A}}_{i(n+1)}^{AC} = \left[\mathbb{I} - \bar{\mathbb{S}}_n^{\Omega} : \bar{\mathbb{C}}_n^{-1} : (\bar{\mathbb{C}}_n - \mathbb{C}_i)\right]^{-1}, \tag{2.70}$$

em que $\bar{\mathbb{A}}_{i(n+1)}^{AC}$ proporciona uma forma implícita de considerar a interação entre as inclusões.

Portanto, via modelo de homogeneização AC e seguindo a Equação 2.45, o tensor constitutivo efetivo é dado por (CHRISTENSEN; LO, 1979),

$$\bar{\mathbb{C}}_{(n+1)} = \mathbb{C}_m + f_i(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m) : \bar{\mathbb{A}}_{i(n+1)}^{AC}. \tag{2.71}$$

Em geral, o modelo AC fornece boas previsões para materiais policristalinos, mas é menos preciso no caso de compósitos de duas fases (PIERARD; FRIEBEL; DOGHRI, 2004). Para compósitos de fibras curtas, verificou-se que as constantes elásticas efetivas, estimadas por esse método, são, geralmente, muito rígidas em comparação com os valores experimentais (TUCKER; LIANG, 1999; MÜLLER et al., 2015).

2.6.3 Esquema de Mori-Tanaka

Em 1973, *Mori-Tanaka* (MT) propuseram uma abordagem para correlacionar as tensões e deformações médias da inclusão com as da matriz em um compósito. Mais tarde, em 1987, Benveniste reportou que o esquema de homogeneização de MT poderia ser reformulada, recorrendo à ideia de inclusão equivalente, em termos de um tensor mais compactado, conhecido como tensor de concentração de deformação (ou tensão) de Mori e Tanaka. Essa abordagem, detalhada no Apêndice C, permite modelar a interação local entre as inclusões e considera a matriz como um meio perturbado por outras inclusões, disponibilizando, assim, resultados satisfatórios para frações volumétricas moderadas (NOTTA-CUVIER et al., 2013; LIU; HUANG, 2014; MELO, 2015).

As relações entre os campos de deformação locais e globais, por meio dos seus respectivos tensores de concentração de deformação, podem ser vistas a seguir:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_i = \mathbb{A}_i^{MT} : \langle \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle, \qquad \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_m = \mathbb{A}_m^{MT} : \langle \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle, \tag{2.72}$$

em que,

$$\mathbb{A}_m^{MT} = [(1-f_i)\mathbb{I} + f_i \mathbb{A}_i^{dil}]^{-1}, \quad \mathbb{A}_i^{MT} = \mathbb{A}_i^{dil} : [(1-f_i)\mathbb{I} + f_i \mathbb{A}_i^{dil}]^{-1}. \tag{2.73}$$

Conforme mostrado na Figura 68 do Apêndice C, a tensão média nas fases, matriz ou inclusão, pode ser relacionada à tensão efetiva por meio de um tensor de concentração de tensão correspondente

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_i = \mathbb{B}_i^{MT} : \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}} \rangle, \qquad \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_m = \mathbb{B}_m^{MT} : \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}} \rangle, \tag{2.74}$$

em que o tensor de concentração de tensão na inclusão $\mathbb{B}_i^{MT}$ e o de concentração de tensão na matriz $\mathbb{B}_m^{MT}$ são calculados por:

$$\mathbb{B}_m^{MT} = \mathbb{C}_m : \mathbb{A}_m^{MT} : \bar{\mathbb{C}}^{-1}, \quad \mathbb{B}_i^{MT} = \mathbb{C}_i : \mathbb{A}_i^{MT} : \bar{\mathbb{C}}^{-1}, \tag{2.75}$$

sendo $\bar{\mathbb{C}}$ o tensor de rigidez efetivo do material heterogêneo.

Usando a lei de Hooke, a tensão média na matriz e inclusão pode ser encontrada combinando a Equação 2.33 e Equação 2.34 com a Equação 2.72, respectivamente,

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_m = \mathbb{C}_m : \mathbb{A}_m^{MT} : \langle \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle, \quad \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_i = \mathbb{C}_i : \mathbb{A}_i^{MT} : \langle \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle. \tag{2.76}$$

Usando a Equação 2.35, tem-se:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_m = \mathbb{C}_m : \mathbb{A}_m^{MT} : \bar{\mathbb{C}}^{-1} : \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}} \rangle, \quad \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_i = \mathbb{C}_i : \mathbb{A}_i^{MT} : \bar{\mathbb{C}}^{-1} : \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}} \rangle. \tag{2.77}$$

Ao inserir o tensor de concentração de deformação $\mathbb{A}_i^{MT}$ apresentado na Equação 2.73 na Equação 2.45, por exemplo, o tensor constitutivo de rigidez do material homogeneizado pelo esquema de MT e reformulado por Benveniste é calculado por:

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_m + f_i(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m) : \mathbb{A}_i^{MT}. \tag{2.78}$$

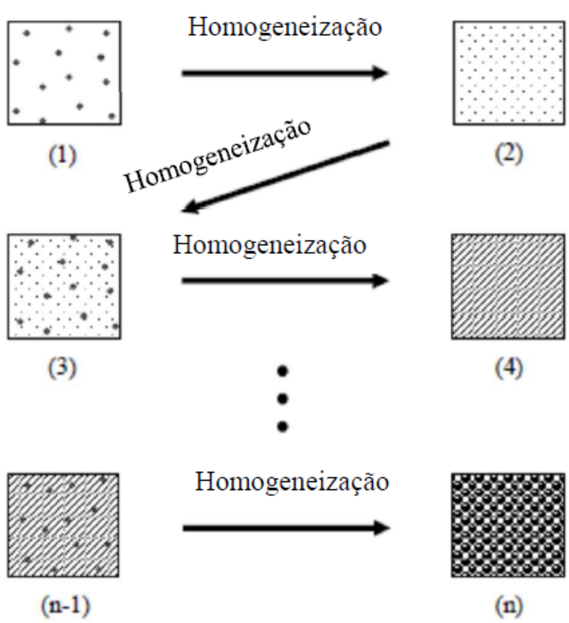
Para aplicações em compósitos que possem fibras curtas, esse esquema de homogeneização mostrou uma boa concordância dos módulos efetivos quando comparado com resultados experimentais para uma ampla gama de materiais heterogêneos (VAUTRIN; SOL, 1991; BIOLZI; CASTELLANI; PITACCO, 1994; ABDIN, 2015). Na maioria dos trabalhos sobre materiais compósitos, ou porosos, usando a abordagem de MT, as inclusões foram assumidas como isotrópicas, alinhadas e/ou dispersas aleatoriamente na matriz, garantindo, assim, a simetria diagonal do tensor de rigidez efetivo $\bar{\mathbb{C}}_{ijkl} = \bar{\mathbb{C}}_{klij}$ (SCHJØDT-THOMSEN; PYRZ, 2001).

No entanto, Benveniste, Dvorak e Chen (1989) reportaram que o tensor de rigidez obtido pelo esquema de homogeneização de MT é simétrico para compósitos bifásicos e para compósitos multifásicos se as inclusões tiverem formato semelhante. Para compósitos contendo alta concentração de inclusões anisotrópicas ou de várias geometrias, por exemplo, o tensor de rigidez obtido pode violar o requisito de simetria diagonal (FERRARI, 1991; CASTANEDA; WILLIS, 1995; PIERARD; FRIEBEL; DOGHRI, 2004; LOMOV; ABDIN; JAIN, 2015).

2.6.4 Esquema diferencial

O *Esquema Diferencial* (ED) é baseado na construção incremental do material heterogêneo pela adição gradual de quantidades infinitesimais de inclusões e depois homogeneizado. Ao incrementar uma pequena fração volumétrica da inclusão, um novo compósito obtido será visto como uma matriz homogênea, e assim, novamente, uma pequena quantidade de inclusão é adicionada para obter o próximo compósito, até que a fração volumétrica desejada seja alcançada. Esse processo repetitivo leva a equações diferenciais para a obtenção das propriedades efetivas em função das frações volumétricas das inclusões. A Figura 5 mostra o esquema conceitual deste método (MCLAUGHLIN, 1977; NORRIS, 1985; HASHIN, 1988; QU; CHERKAOUI, 2006; KIM, 2009; CHEN et al., 2016).

Figura 5 – Conceito gráfico do método esquema diferencial



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Como visto no caso do método AC, o método ED também requer um procedimento iterativo a partir de um valor “inicial” para determinar os módulos efetivos. Portanto, para o início do procedimento, $\bar{\mathbb{C}}_{(f_0)} = \mathbb{C}_m$, ou seja, as propriedades efetivas do compósito sem efeitos de adição de inclusão devem ser as mesmas da fase matriz. Então, se o compósito com tensor de rigidez $\bar{\mathbb{C}}_{(f_i=0)}$ for visto como uma "matriz" homogênea, um novo compósito $\bar{\mathbb{C}}_{(n)}$ pode ser adquirido ao ser adicionando Δf_i a "matriz".

Seja uma fração volumétrica f_i que origina um tensor de rigidez efetivo $\bar{\mathbb{C}}_{(f_i)}$, a fração volumétrica:

$$f_i = \frac{V_i}{V_m + V_i}, \tag{2.79}$$

no qual o compósito com tensor de rigidez $\bar{C}_{(f_i)}$ agora é visto como uma "matriz" homogênea. Um novo compósito pode surgir ao adicionar um ΔV_i para incrementar a fração volumétrica, ou seja, $\frac{\Delta V_i}{V_m+V_i+\Delta V_i}$. Portento, o tensor de rigidez pode ser encontrado:

$$\bar{\mathbb{C}}_{(f_i+\Delta f_i)} = \bar{\mathbb{C}}_{(f_i)} + \frac{\Delta V_i}{V_m + V_i + \Delta V_i}(\mathbb{C}_i - \bar{\mathbb{C}}_{(f_i)}) : \mathbb{A}_{i(f_i)}, \tag{2.80}$$

em que Δf_i é o incremento da fração volumétrica da inclusão devido à adição de ΔV_i. A fração volumétrica total de C_i neste composto recém-construído é:

$$f_i + \Delta f_i = \frac{V_i + \Delta V_i}{V_m + V_i + \Delta V_i}. \tag{2.81}$$

Para encontrar Δf_i da Equação 2.81 e usando a Equação 2.79, tem-se (QU; CHERKAOUI, 2006):

$$\Delta f_i = \frac{V_m \Delta V_i}{(V_m + V_i)(V_m + V_i + \Delta V_i)} = \frac{(V_m + V_i - V_i)\Delta V_i}{(V_m + V_i)(V_m + V_i + \Delta V_i)} = \frac{(1 - f_i)\Delta V_i}{V_m + V_i + \Delta V_i} = \frac{\Delta f_i}{(1 - f_i)}, \tag{2.82}$$

substituindo Equação 2.82 na Equação 2.80, obtém-se:

$$\frac{\bar{\mathbb{C}}_{(f_i+\Delta f_i)} - \bar{\mathbb{C}}_{(fi)}}{\Delta f_i} = \frac{1}{(1 - f_i)}(\mathbb{C}_i - \bar{\mathbb{C}}_{(f_i)}) : \bar{\mathbb{A}}_{i(f_i)}. \tag{2.83}$$

No limite de $f_i \to 0$, tem-se a equação diferencial de primeira ordem:

$$\frac{d\bar{\mathbb{C}}_{(f_i)}}{df_i} = \frac{1}{(1 - f_i)}(\mathbb{C}_i - \bar{\mathbb{C}}_{(f_i)})\bar{\mathbb{A}}_{i(f_i)}, \tag{2.84}$$

usando o método de Eshelby, $\bar{\mathbb{A}}_{i(f_i)}$ pode ser obtido:

$$\bar{\mathbb{A}}_{i(f_i)} = \left[\mathbb{I} - \bar{\mathbb{S}}^{\Omega}_{(f_i)} : \bar{\mathbb{C}}^{-1}_{(f_i)} : \left(\bar{\mathbb{C}}_{(f_i)} - \mathbb{C}_i\right)\right]^{-1}. \tag{2.85}$$

Sendo assim, incrementado pequenas frações volumétricas Δf_i a cada passo, pode-se escrever o tensor de rigidez efetivo por meio do esquema de homogeneização ED de forma explícita como:

$$\bar{\mathbb{C}}_{(n)} = \bar{\mathbb{C}}_{(n-1)} + \frac{1}{(1 - \Delta f_{i(n)})}(\mathbb{C}_i - \bar{\mathbb{C}}_{(n-1)})\bar{\mathbb{A}}_{i(n)}(\Delta f_{i(n)} - \Delta f_{i(n-1)}), \tag{2.86}$$

nas quais os subscritos (n) e $(n-1)$ se referem ao passo atual e passo anterior, respectivamente. O tensor de concentração de deformação $\bar{\mathbb{A}}_{i(n)}$ é calculado por,

$$\bar{\mathbb{A}}_{i(n)} = \left[\mathbb{I} - \bar{\mathbb{S}}^{\Omega}_{(n-1)} : \bar{\mathbb{C}}^{-1}_{(n-1)} : \left(\bar{\mathbb{C}}_{(n-1)} - \mathbb{C}_i\right)\right]^{-1}. \tag{2.87}$$

Conforme Kim (2009) e Chen et al. (2016), o método de homogenização ED apresenta boa precisão nos resultados para compósitos que possuem elevadas concentrações volumétricas de inclusões.

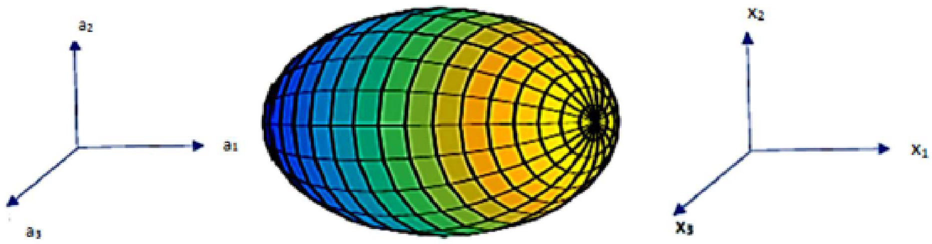
2.7 Influência da geometria das inclusões nas propriedades elásticas do material multifásico

Muitos autores nas últimas décadas, como, por exemplo, Wu (1966), Kuster e Toksoz (1974), Budiansky e O'connell (1976), Mavko e Nur (1978), Walsh e Grosenbaugh (1979), Tandon e Weng (1986) e Advani e Tucker (1987) desenvolveram modelos matemáticos para calcular as propriedades mecânicas do material baseados na geometria e direção da inclusão. Para se obter informações precisas com o intuito da aplicação deses materiais é desejável conhecer as propriedades mecânicas e físicas em função das geometrias das inclusões e do grau de heterogeneidade expresso em fração volumétrica (ZHANG; BENTLEY, 2003; NIELSEN, 2005; CHEN et al., 2015).

Para avaliar como a geometria assumida afeta o resultado das propriedades mecânicas efetivas dos materiais heterogêneos é necessário avaliar as inclusões com diferentes formas geométricas. A escolha da direção do elipsoide em relação à direção da tensão aplicada, também irá impactar nos resultados das propriedades mecânicas efetivas do material heterogêneo (MURA, 1982; GIORDANO, 2003; OUAAR, 2006; DAVID; ZIMMERMAN, 2011; DUTRA, 2012; THORVALDSEN, 2015). Neste trabalho, são consideradas inclusões com as seguintes geometrias:

- A Figura 6 representa a configuração de um elipsoide prolate alinhado (eixo maior) ao longo do eixo x_1, em que $a_2 = a_3 < a_1$:

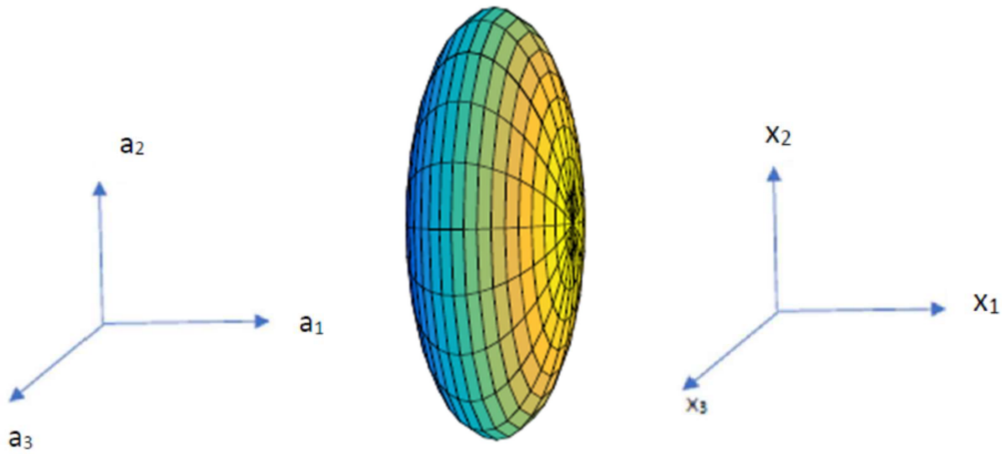
Figura 6 – Elipsoide prolate



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

- Elipsoide achatado: $a_2 = a_3 > a_1$.

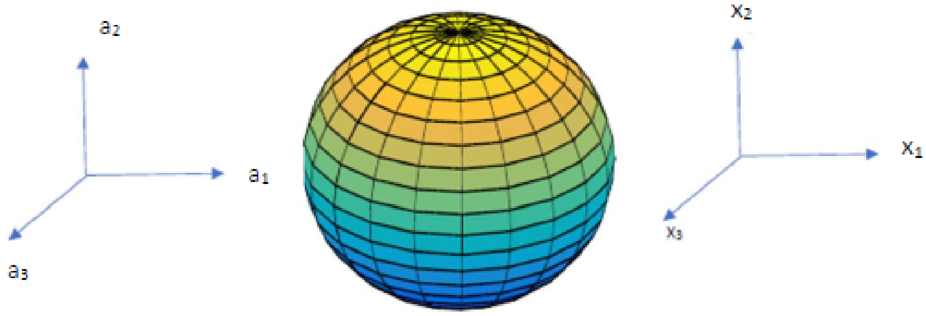
Figura 7 – Elipsoide oblate



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

- Esfera: $a_1 = a_2 = a_3$

Figura 8 – Esfera

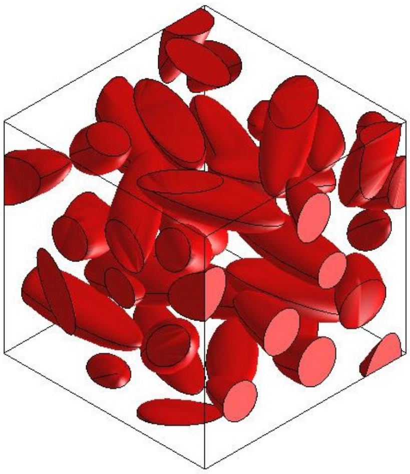


Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

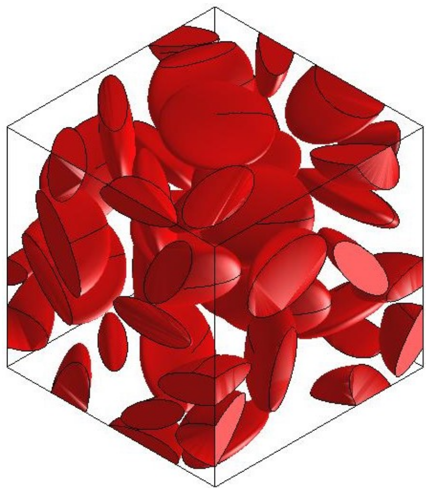
2.8 Influência da direção das inclusões nas propriedades elásticas dos materiais bifásicos

O desempenho das propriedades de materiais heterogêneos, constituídos por inclusões curtas e orientados aleatoriamente, pode ser regido pela influência da geometria e distribuição das mesmas. Materiais heterogêneos, constituídos com inclusões descontinuas, têm atraído atenção considerável por apresentarem uma série de vantagens. Como exemplos de vantagens, sabe-se que os compósitos reforçados com partículas randomicamente distribuídas, são mais baratos de serem produzidos e podem ser moldados por processos metalúrgicos padrão, tais como: forjamento, laminação e extrusão (JU; SUN, 2001). Na Figura 9, observa-se a ilustração de um material que apresenta inclusões espacialmente distribuídas e desalinhadas no espaço 3D.

Figura 9 – Inclusões desalinhadas



(a) Inclusões prolate desalinhadas



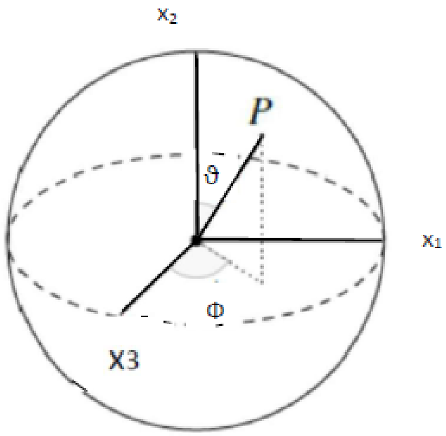
(b) Inclusões oblate desalinhadas

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Para cada inclusão inserida em um EVR, conforme apresentado na Figura 9, um vetor de orientação $\boldsymbol{P}$ que depende de dois ângulos esféricos θ e ϕ, define a orientação de uma única inclusão(NOTTA-CUVIER et al., 2013; TIAN et al., 2016b). Ou seja, para cada fase (i), as inclusões elipsoidais têm a mesma razão de aspecto (l/d), propriedades de material, mas não necessariamente a mesma orientação $\boldsymbol{P}$, representada pela função de distribuição de orientação diferenciável (ODF) $\psi(\boldsymbol{P})$ definida de tal modo que a probabilidade de qualquer fibra esteja entre $\boldsymbol{P}$ e $(\boldsymbol{P}+\mathbf{d}P)$ é $\psi(\boldsymbol{P})d\boldsymbol{P}$.

Portanto, via uma *Função de Distribuição de Orientação* (FDO) $\psi(\theta,\phi)$, pode-se descrever a densidade de probabilidade de orientação no espaço e calcular a probabilidade de encontrar uma inclusão elipsoidal entre os ângulos θ_1 e $(\theta_1+d\theta)$ e ϕ_1 e $(\phi_1+d\phi)$ (ADVANI; TUCKER, 1987; BEDNARCYK; ABOUDI; ARNOLD, 2014; TIAN et al., 2016b; BREUER; STOMMEL; KORTE, 2019; LI; LI, 2019; MOKARIZADEHHAGHIGHISHIRAZI et al., 2022).

Figura 10 – Orientação de uma única fibra definida pelo vetor de orientação em termos θ e ϕ



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

$$\boldsymbol{P}[\theta_1 \leq \theta \leq (\theta_1 + d\theta)],\ \phi_1 + \phi + (\phi_1 + d\phi) = \psi(\theta_1,\ \phi_1) sin\theta_1 d\theta d\phi. \tag{2.88}$$

A função de distribuição de orientação $\psi(\theta, \phi)$ deve satisfazer duas condições físicas. Na primeira condição, a inclusão cuja orientação é definida pelos ângulos esféricos θ e ϕ deve ser determinada pelos ângulos $\pi - \theta$ e $\phi + \pi$, e expressa que as fibras orientadas em $\boldsymbol{P}$ e $-\boldsymbol{P}$ são indistinguíveis:

$$\psi(\theta,\ \phi) = \psi(\pi -\ \theta, \phi + \pi) \quad \equiv \quad \psi(\boldsymbol{P}) = \psi(-\boldsymbol{P}), \tag{2.89}$$

na segunda, satisfazer a condição de normalização, em que a soma da probabilidade de distribuição de orientação de todas as inclusões é 1:

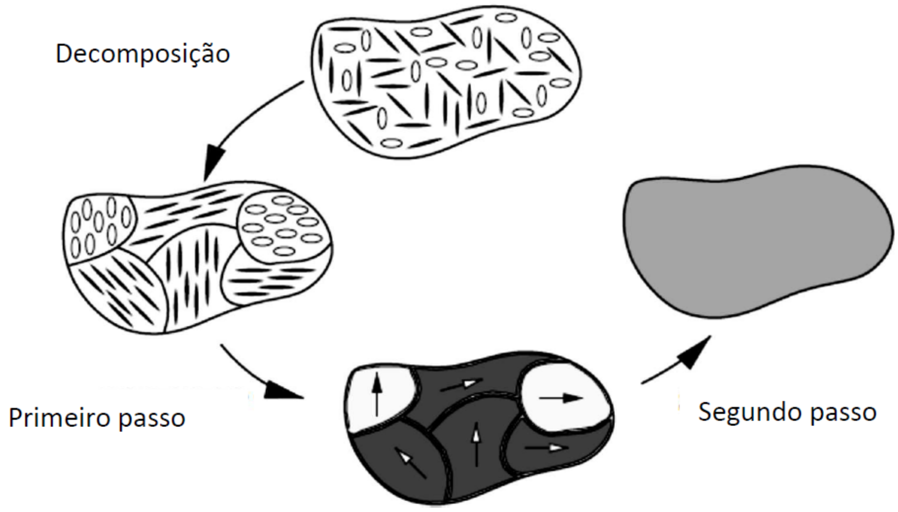
$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \psi(\theta, \phi) sin\theta d\theta d\phi = \oint \psi(\boldsymbol{P}) dP = 1. \tag{2.90}$$

O procedimento de homogeneização de um material heterogêneo que possui inclusões curtas pode ser abordado através da decomposição do EVR em pseudo-grãos, em que, a avaliação do tensor constitutivo elástico do volume representativo é feita em um procedimento de duas etapas de homogeneização:

- na primeira etapa, cada grão é um compósito bifásico que possui um material de matriz e um número de inclusões com a mesma forma, razão de aspecto, rigidez e orientação. Para esta etapa, o esquema de homogeneização de Mori e Tanaka pode ser utilizado;
- na segunda e última etapa, o EVR é visto como um agregado, ou seja, um conjunto de diferentes grãos (Figura 11). Cada grão é caracterizado por sua rigidez e orientação $\boldsymbol{P}$, ambas calculadas na etapa 1. O agregado é, portanto, um compósito multifásico que

pode ser homogeneizado por um dos vários esquemas de homogeneização (PIERARD; FRIEBEL; DOGHRI, 2004).

Figura 11 – Procedimento de decomposição do EVR em um conjunto de grãos



Fonte: Pierard, Friebel e Doghri (2004)

Portanto, considerando o método de homogeneização de duas etapas, reconhecendo a natureza estatística das possíveis orientações das inclusões na matriz, o tensor isotrópico de rigidez efetivo que apresenta inclusões desalinhadas, pode ser obtido por integração e calculado na forma tensorial com as seguintes equações explícitas (DAVID; SMITH, 2008):

$$\langle \bar{\mathbb{C}} \rangle_{\psi} = \begin{bmatrix} \zeta & \beta & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \zeta & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \beta & \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\zeta-\beta}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\zeta-\beta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\zeta-\beta}{2} \end{bmatrix}, \tag{2.91}$$

em que ζ e β dependem apenas dos coeficientes do tensor de rigidez efetivo "original" da inclusão alinhada:

$$\zeta = \frac{1}{15}\left(3\bar{C}_{11} + 4\bar{C}_{12} + 8\bar{C}_{22} + 8\bar{C}_{55}\right), \tag{2.92}$$

$$\beta = \frac{1}{15}\left(\bar{C}_{11} + 8\bar{C}_{12} + \bar{C}_{22} + 5\bar{C}_{23} - 4\bar{C}_{55}\right). \tag{2.93}$$

Ainda considerando uma matriz com inclusões randomicamente distribuídas e desalinhadas, porém agora, usando os ângulos de Euler, será aplicado o tensor de concentração de deformação $\langle \mathbb{A}_i^{dil} \rangle_\psi$ para calcular a média de todas as rotações possíveis da inclusão. O seu valor médio pode ser calculado usando a integração sobre todas as rotações possíveis (GIORDANO, 2003):

$$P_{(\psi,\theta,\varphi)} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.94}$$

$$\langle \mathbb{A}_i^{dil} \rangle_\psi = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \hat{M}(\psi,\theta,\varphi)^{-1} \mathbb{A}_i^{dil} \hat{M}(\psi,\theta,\varphi) \right\} \sin\theta d\theta d\varphi d\psi : \boldsymbol{\varepsilon}_0, \tag{2.95}$$

em que $\hat{M}(\psi,\theta,\phi)$ é uma matriz de rotação 6 x 6, que atua como uma matriz de rotação no tensor de deformação. Sendo assim, de forma explícita, Giordano (2003) calculou o tensor de concentração de deformação para inclusões desalinhadas:

$$\langle \mathbb{A}_i^{dil} \rangle_\psi = \begin{bmatrix} \alpha & \eta & \eta & 0 & 0 & 0 \\ \eta & \alpha & \eta & 0 & 0 & 0 \\ \eta & \eta & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-\eta \end{bmatrix}, \tag{2.96}$$

em que α e β dependem apenas dos coeficientes do tensor de concentração de deformação "original" da inclusão $\mathbb{A}_i^{dil}$, e podem ser calculados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{1}{5}A_{1111} + \frac{1}{5}A_{2222} + \frac{1}{5}A_{3333} + \frac{2}{15}A_{1313} + \frac{2}{15}A_{2323} + \frac{2}{15}A_{1313} \ldots \\ \ldots + \frac{1}{15}A_{1122} + \frac{1}{15}A_{1133} + \frac{1}{15}A_{2211} + \frac{1}{15}A_{2233} + \frac{1}{15}A_{3311} + \frac{1}{15}A_{3322}. \end{aligned} \tag{2.97}$$

$$\begin{aligned} \eta = \frac{1}{15}A_{1111} + \frac{1}{15}A_{2222} + \frac{1}{15}A_{3333} - \frac{1}{15}A_{1313} - \frac{1}{15}A_{2323} - \frac{1}{15}A_{1313} \ldots \\ \ldots + \frac{2}{15}A_{1122} + \frac{2}{15}A_{1133} + \frac{2}{15}A_{2211} + \frac{2}{15}A_{2233} + \frac{2}{15}A_{3311} + \frac{2}{15}A_{3322}. \end{aligned} \tag{2.98}$$

Usando $\langle \mathbb{A}_i^{dil} \rangle_\psi$ para calcular os tensores de concentração de deformação de Mori-Tanaka (matriz e inclusão) para fibras desalinhadas, tem-se,

$$\langle \mathbb{A}_m^{MT} \rangle_\psi = [(1-f_i)\mathbb{I} + f_i \langle \mathbb{A}_i^{dil} \rangle_\psi]^{-1}, \tag{2.99}$$

$$\langle \mathbb{A}_i^{MT} \rangle_\psi = \langle \mathbb{A}_i^{dil} \rangle_\psi : [f_i \langle \mathbb{A}_i^{dil} \rangle_\psi + (1 - f_i)\mathbb{I}]^{-1}. \tag{2.100}$$

Por meio da matriz $\langle \mathbb{A}_i^{dil} \rangle_\psi$ apresentada na Equação 2.96, obtém-se o tensor de rigidez efetivo isotrópico do material heterogêneo que apresenta fibras desalinhadas:

$$\bar{\mathbb{C}}_\psi = \left[(1 - f_i)\mathbb{C}_m + f_i \mathbb{C}_i \langle \mathbb{A}_i^{dil} \rangle_\psi\right] : \left[(1 - f_i)\mathbb{I} + f_i \langle \mathbb{A}_i^{dil} \rangle_\psi\right]^{-1}. \tag{2.101}$$

2.9 Abordagem computacional com o *software* Digimat

O *software* Digimat permite a modelagem de compósitos lineares e não lineares através da micromecânica de campos médios baseada na solução analítica de Eshelby (1957) e algoritmos de discretização de tempo, totalmente implícitos, usando o esquema de Euler *backward*. Para o caso elastoplástico, um operador tangente algorítmico (ou consistente) é então definido relacionando as variações totais de tensão e deformação no final do intervalo de tempo (DOGHRI; TINEL, 2005; DOGHRI; TINEL, 2006; KOUASSI et al., 2023).

O módulo denominado *Mean Fields* (MF), do *software* Digimat, efetua a homogeneização de materiais heterogêneos com base nas propriedades de seus constituintes e na sua microestrutura (geometria e orientação das inclusões) por meio do esquema de Mori e Tanaka (KAMMOUN et al., 2011; MICOTA; ISAINCU; MARSAVINA, 2020; LALA; SADIKBASHA; DEOGHARE, 2020; Hexagon, 2021; RIBEZZO et al., 2023; Digimat Student, 2023).

Para linearização, o *software* Digimat pode usar a formulação incremental de primeira ordem e o modelo "*power-law*" (J_2 plasticidade) para a representação não linear da matriz. A formulação incremental é baseada num operador tangente de comparação que é anisotrópico, e que previsões muito melhores podem ser obtidas se uma parte isotrópica desse operador tangente for usada adequadamente. O método de aproximação empregado no operador anisotrópico é o espectral, usado apenas para o cálculo do tensor de Eshelby (Hexagon, 2021).

No mencionado *software*, ao modelar a distribuição de fibras de materiais reforçados com fibras curtas, é realizada uma decomposição do EVR em pseudogrãos conforme mostrado na Figura 11. Cada grão representa uma classe de inclusões que compartilham a mesma orientação. Em cada grão é realizado um procedimento de homogeneização para obter as propriedades do material efetivo. Na segunda etapa da homogeneização, a média de Voigt é usada sobre todos os pseudogrãos para determinar as propriedades efetivas do material (ADAM; ASSAKER, 2014; TIAN et al., 2016a; RIBEZZO et al., 2023).

2.10 Exemplos de homogeneização de propriedades elásticas

Para validar o código computacional deste trabalho que avalia as propriedades elásticas efetivas, alguns exemplos de outros autores são reproduzidos para confrontar os resultados. Outra proposta desta seção é comparar os resultados obtidos entre os principais métodos de homogeneização aqui utilizados. São apresentados exemplos que investigam as propriedades mecânicas efetiva de materiais heterogêneos, isotrópicos, porosos ou reforçados com inclusões esféricas, ou fibras curtas, randomicamente distribuídas, alinhadas e aleatoriamente distribuídas no espaço, variando a sua razão de aspecto. Todos os exemplos consideram a perfeita junção entre a inclusão e a matriz, desconsiderando, assim, a influência da presença das propriedades de interfase.

2.10.1 Exemplos para a validação dos esquemas de homogeneização

Neste tópico serão verificados os algoritmos que tratam dos modelos de homogeneização autoconsistente, esquema diferencial e Mori-Tanaka, respectivamente.

1. **Exemplos do esquema autoconsistente**

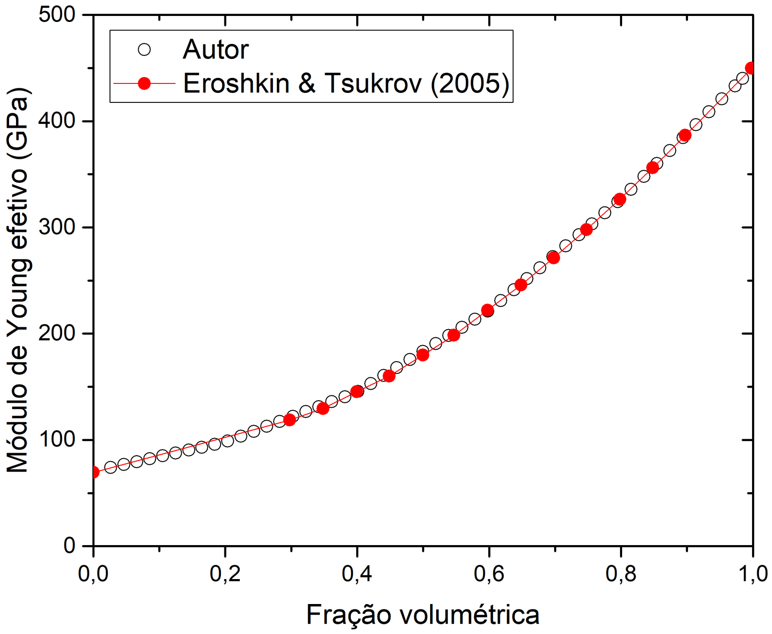
    - Por meio do método de homogeneização autoconsistente, utiliza-se o trabalho de Eroshkin e Tsukrov (2005) para confrontar os resultados obtidos do módulo de Young, módulo de bulk e módulo de cisalhamento do compósito, respectivamente. As propriedades dos constituintes são apresentadas na Tabela 1. Os resultados podem ser conferidos na Figura 12, Figura 13 e Figura 14.

Tabela 1 – Propriedades do material para o esquema autoconsistente

Parâmetros do material	**Unidade**	**Valor**
Matriz		
Módulo de Young	GPa	70
Coeficiente de Poisson		0,3
Inclusão		
Módulo de Young	GPa	450
Coeficiente de Poisson		0,17

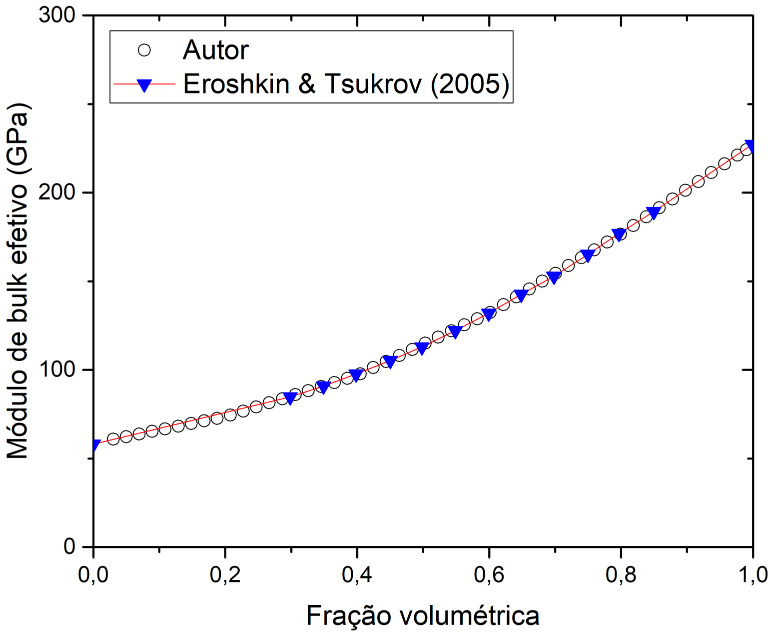
Fonte: Eroshkin e Tsukrov (2005)

Figura 12 – Autoconsistente para inclusões esféricas sólidas: módulo de Young



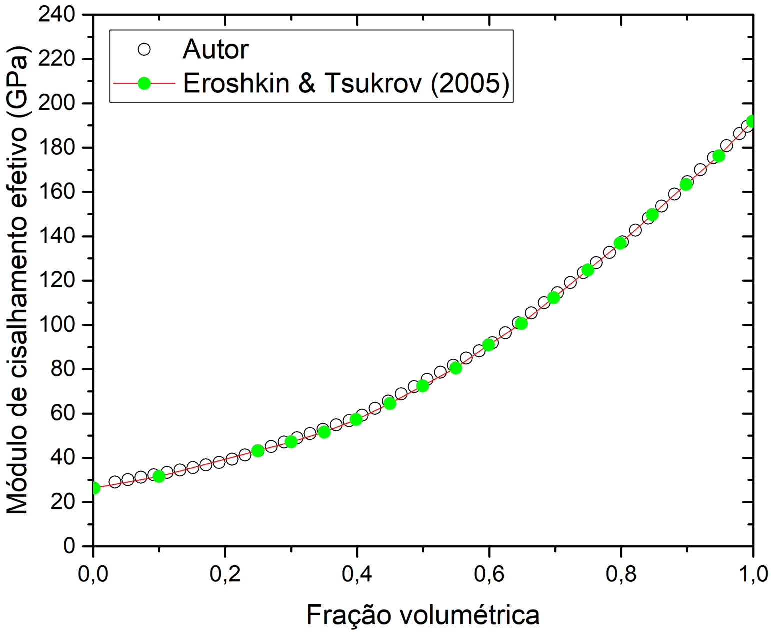
Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Figura 13 – Autoconsistente para inclusões esféricas sólidas: módulo de bulk



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Figura 14 – Autoconsistente para inclusões esféricas sólidas: módulo de cisalhamento

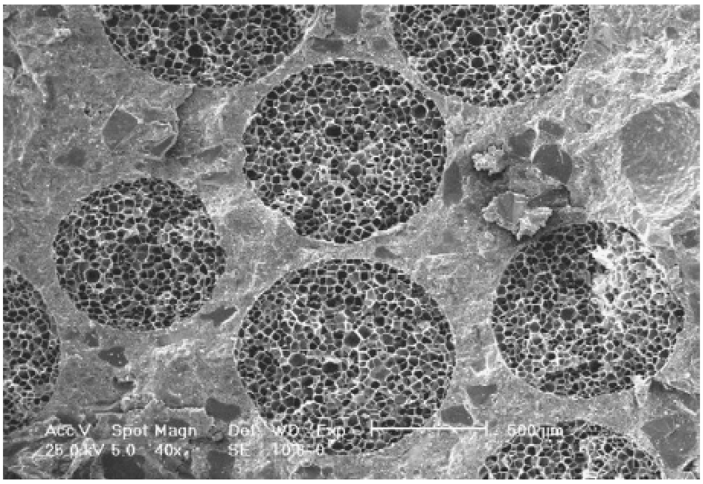


Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

2. **Exemplos do modelo esquema diferencial**

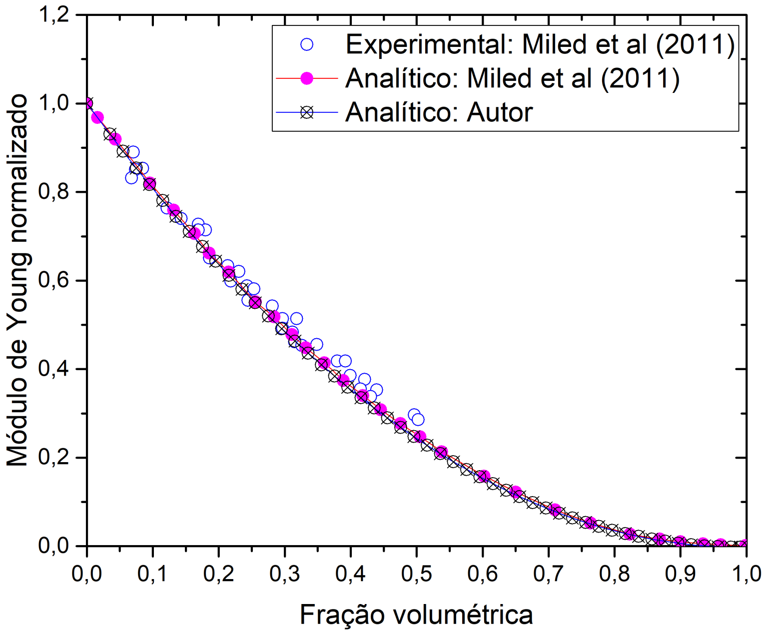
- Miled, Sab e Roy (2011) estudaram a influência da porosidade no módulo Young normalizado, ou seja, $\frac{\bar{E}}{E_m}$. O material estudado é constituído por uma matriz sólida de concreto que apresenta um coeficiente de Poisson $\nu_m = 0,2$. Nessa matriz de concreto, são inseridas esferas de EPS (poliestireno expandido), que possui a finalidade de simular o poro, conforme visto na Figura 15. Os resultados obtidos neste trabalho, via esquema diferencial, são confrontados com resultados analíticos e experimentais desta tese, podendo ser conferidos na Figura 16.

Figura 15 – MEV mostrando inclusões esféricas de um concreto leve



Fonte: Miled, Sab e Roy (2011)

Figura 16 – Esquema diferencial para poros esféricos: módulo de Young normalizado

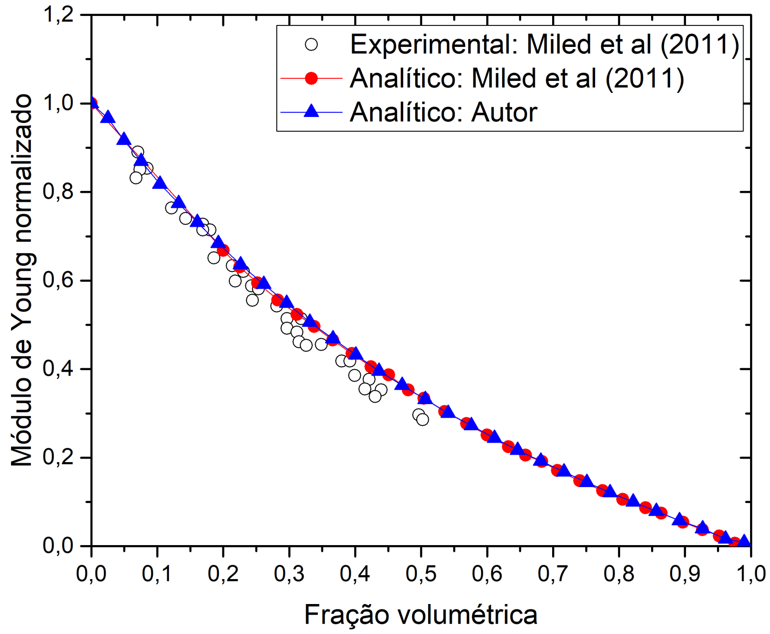


Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

3. **Exemplo do modelo de Mori-Tanaka**:

   - Ainda usando o trabalho de Miled, Sab e Roy (2011), porém, agora por meio do método de Mori-Tanaka, os resultados obtidos e mostrados Figura 17 são confrontados com resultados analíticos e experimentais.

Figura 17 – Mori-Tanaka para esferas sólidas: Módulo de Young normalizado



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

2.10.2 Investigação das propriedades elásticas de nanocompósitos considerando geometria e direção inclusão

São apresentados exemplos com variadas direções e geometrias de inclusões, variando a sua razão de aspecto. Esquemas para considerar o desalinhamento das inclusões são avaliados e comparados entre si.

No trabalho de Thorvaldsen (2015) foi estudado um compósito constituído de vidro/epoxi. A matriz e as inclusões apresentam propriedades elásticas e isotrópicas. As inclusões são randomicamente distribuídas (alinhadas ou desalinhadas) e com geometria esféricas ou esferoidais. As propriedades das fases podem ser vistos na Tabela 2.

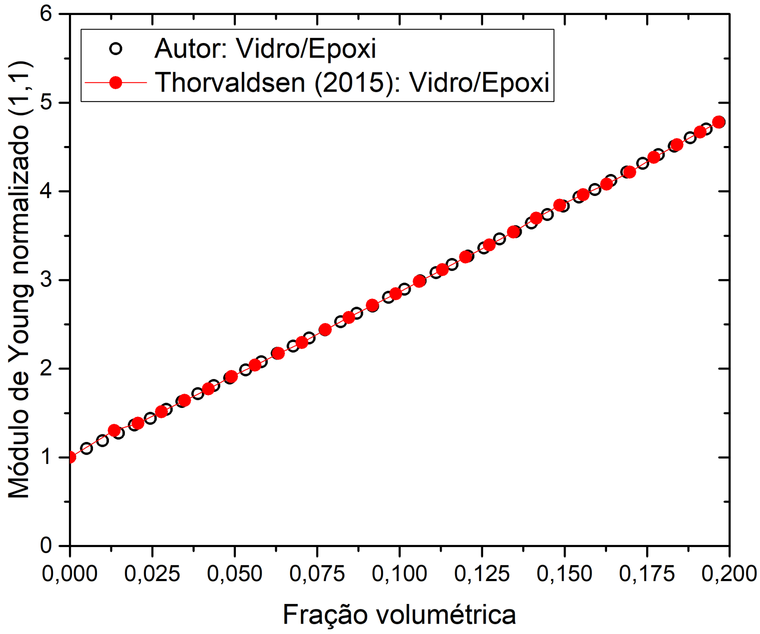
Tabela 2 – Propriedades vidro/epoxi

Parâmetros do material	**Unidade**	**Valor**
Matriz	GPa	2,75
Módulo de Young		0,35
Coeficiente de Poisson		
Inclusão		
Módulo de Young	GPa	72,4
Coeficiente de Poisson		0,2

Fonte: Thorvaldsen (2015)

1. **Fibras alinhadas**: O módulo de Young normalizado, na direção longitudinal da fibra ($\frac{\bar{E}_{11}}{E_m}$) do vidro/epoxi, é investigado a partir do método de homogeneização de Mori-Tanaka. As inclusões esferoidais são distribuídas randomicamente, sendo todas alinhadas e apresentam *Razão de Aspecto* (RA) igual a 20. Os resultados obtidos são comparados com os resultados de Thorvaldsen (2015) e apresentados na Figura 18.

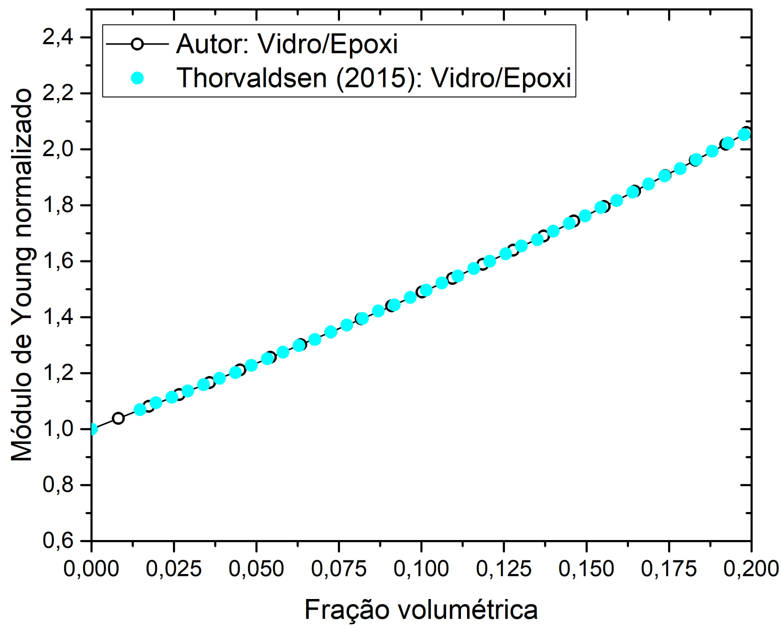
Figura 18 – Módulo de Young normalizado ($\frac{\bar{E}_{11}}{E_m}$) com fibras alinhadas e RA=20



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

2. **Fibras Desalinhadas**: Análise do compósito que contém inclusões esferoidais distribuídas e desalinhadas randomicamente até a uma fração volumétrica de 20%. A inclusão apresenta uma RA=20. O método usado para determinar o tensor de rigidez efetivo está segundo a Equação 2.101.

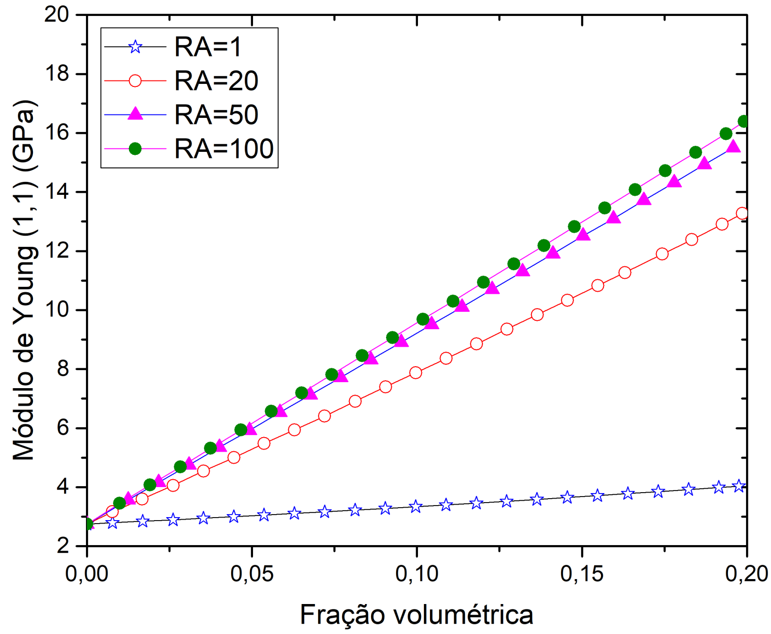
Figura 19 – Módulo de Young normalizado com fibras desalinhadas, RA=20 e usando a Equação 2.101



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

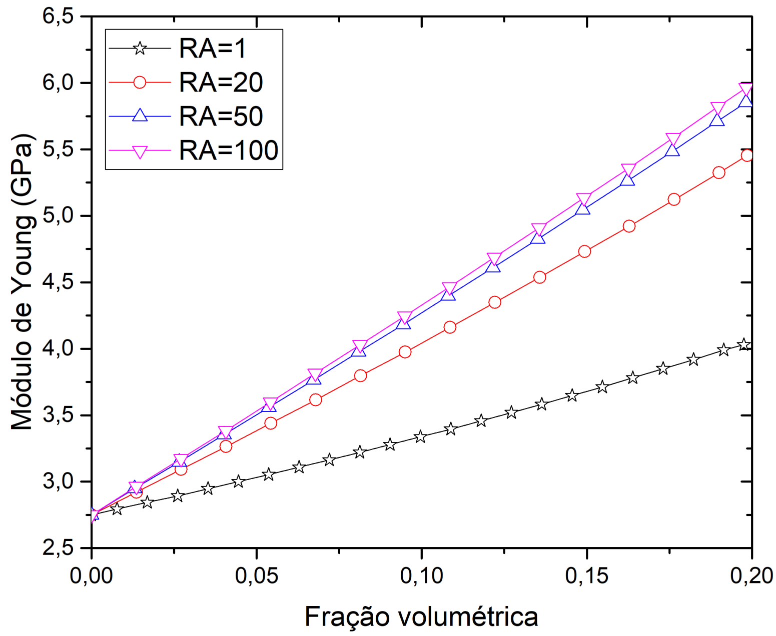
3. **Influência da razão de aspecto**: Em uma inclusão esferoidal, a razão de aspecto é um parâmetro que representa uma grande influência na rigidez do material. Nos exemplos a seguir, será investigada a variação do módulo de Young em função da variação da RA igual a RA=1, RA=20, RA=50 e RA=100, tanto para fibras alinhadas (sentido longitudinal) como para fibras desalinhadas usando a Equação 2.91 e Equação 2.101. As propriedades do material compósito analisado estão presentes na Tabela 2. Os resultados são apresentados na Figura 20, Figura 21 e Figura 22, respectivamente.

Figura 20 – Influência da razão de aspecto com fibras alinhadas



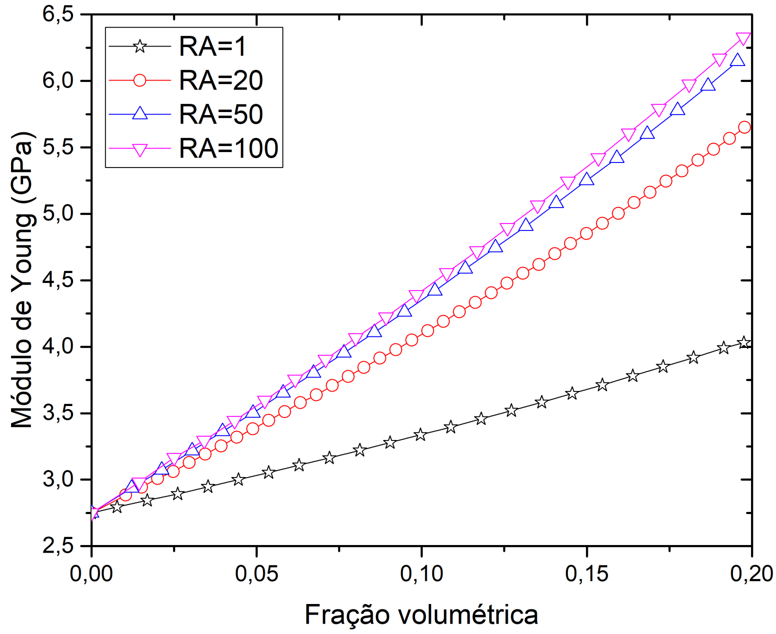
Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Figura 21 – Influência da razão de aspecto com fibras desalinhadas de acordo com a Equação 2.91



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Figura 22 – Influência da razão de aspecto com fibras desalinhadas de acordo com a Equação 2.101



Fonte: Elaborado pelo autor 2022

Observa-se na Figura 20, Figura 21 e Figura 22, que a razão de aspecto influenciou de forma relevante na rigidez do material. O aumento da rigidez foi expressivo entre RA=1 (esfera) e RA=20. Em contrapartida, a razão de aspecto pouco influenciou na rigidez do material entre RA=50 e RA=100. Como era de se esperar, as inclusões alinhadas na direção longitudinal proporcionam maior rigidez comparados com a rigidez do compósito que contém inclusões desalinhadas ou esféricas.

4. **Comparação entre os métodos formulados para inclusões desalinhadas** : A seguir são comparados os métodos apresentados na Equação 2.91 e Equação 2.101. Os constituintes do material estão apresentados na Tabela 2, a fração volumétrica máxima é de 20%, o esquema de homogeneização usado foi o de Mori-Tanaka e RA=50:

- Matriz de rigidez obtida por meio da Equação 2.91 :

$$\bar{\mathbb{C}}_\psi = \begin{bmatrix} 8,1251612 & 3,6290184 & 3,6290184 & 0 & 0 & 0 \\ 3,6290184 & 8,1251612 & 8,0901142 & 0 & 0 & 0 \\ 3,6290184 & 3,6290184 & 8,1251612 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,2480714 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,2480714 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,2480714 \end{bmatrix}.$$

- Matriz de rigidez obtida por meio da Equação 2.101:

$$\bar{\mathbb{C}}_\psi = \begin{bmatrix} 8,5067018 & 3,7374902 & 3,7374902 & 0 & 0 & 0 \\ 3,7374902 & 8,5067018 & 3,7374902 & 0 & 0 & 0 \\ 3,7374902 & 3,7374902 & 8,5067018 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,3846058 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,3846058 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,3846058 \end{bmatrix}.$$

- Matriz de rigidez obtida por meio do *software* Digimat:

$$\bar{\mathbb{C}}_\psi = \begin{bmatrix} 8,1252 & 3,629 & 3,629 & 0 & 0 & 0 \\ 3,629 & 8,1252 & 3,629 & 0 & 0 & 0 \\ 3,629 & 3,629 & 8,1252 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,2481 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,2481 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,2481 \end{bmatrix}.$$

Comparando os resultados apresentados na Figura 21 e Figura 22, o método usado na Equação 2.101 apresentou resultados mais rígidos do que os resultados obtidos na Equação 2.91.

2.11 Conclusões do Capítulo 2

Neste capítulo foi apresentado uma revisão sobre métodos de homogeneização da micromecânica de campos médios para avaliação das propriedades elásticas de materiais heterogêneos bifásicos. Por meio dos métodos apresentados, foram obtidos resultados de propriedades elásticas efetivas de materiais compósitos e materiais porosos com variadas frações volumétricas, geometrias e direção da inclusão no espaço 3D. Para frações volumétricas moderadas, observou-se, inicialmente, que a escolha do método de homogeneização, geometria e distribuição das inclusões representa uma importância na precisão dos resultados das propriedades elásticas efetivas. Por meio da comparação entre os resultados analíticos, numéricos e experimentais obtidos na literatura, os métodos de homogeneização de campos médios se mostraram uma ferramenta poderosa e de baixo custo computacional.

3 COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO DA MATRIZ DO MATERIAL HETEROGÊNEO

3.1 Introdução

Neste capítulo será apresentado um embasamento teórico para a avaliação do comportamento elastoplástico da matriz de um material heterogêneo que apresenta um comportamento elastoplástico e escoa consoante o critério de von Mises quando submetido a carregamentos macroscópicos. A análise do comportamento não linear de materiais heterogêneos, por meio de métodos de homogeneização de campos médios, é baseada em técnicas de linearização (como será explicado na seção 4.3) as quais são adaptadas à estrutura das equações constitutivas locais. O endurecimento pode ser isotrópico, não linear ou cinemático linear. Para a linearização do comportamento não linear do material elastoplástico, será usado um operador tangente anisotrópico, que, posteriormente, para a obtenção de resultados mais suaves, será submetido a um processo de isotropização proposto por Chaboche e Kanouté (2003) ou Bornert, Bretheau e Gilormin (2001). Ainda usando as técnicas de aproximação isotrópica do operador anisotrópico, o tensor de Eshelby tangente, que será abordado no Capítulo 4, será avaliado a cada passo de tensão (ou deformação) durante o comportamento plástico do material por meio do coeficiente de Poisson tangente. Este capítulo será finalizado com conclusões que consolidam os tópicos discutidos e que serão aplicadas para a obtenção de resultados no decorrer dos demais capítulos do presente trabalho.

3.2 Equação constitutiva

Um passo fundamental na análise elastoplástica é separar as deformações elásticas e plásticas da deformação total. Quando a deformação total ε é pequena (deformação infinitesimal), é possível supor que a mesma possa ser decomposta aditivamente em deformações elásticas e plásticas. A decomposição aditiva dos tensores de deformações elásticas ε^e e plásticas ε^p, sugere que o comportamento do material seja elastoplástico em deformações infinitesimais, conforme apresentado na Equação 3.1:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^e_{ij} + \varepsilon^p_{ij}. \tag{3.1}$$

Usando a Equação 3.1, a equação constitutiva pode ser encontrada:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} : \varepsilon^e_{kl} = C_{ijkl} : (\varepsilon_{kl} - \varepsilon^p_{kl}). \tag{3.2}$$

3.3 Tensão equivalente de von Mises

Para materiais dúcteis, o modelo mais comumente usado na prática de engenharia, particularmente para análise computacional, é o modelo de von Mises (1913), que se baseia no conhecimento da tensão equivalente. Na literatura, esse critério de escoamento é conhecido como teoria da máxima energia de distorção. Em seu modelo, von Mises afirma que o material escoará quando o segundo invariante do tensor desviador J_2 atingir um valor crítico (SOUZA_NETO; PERIC; OWEN, 2008), ou seja:

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} : s_{ij}, \tag{3.3}$$

em que s_{ij} é o tensor tensão desviador. A tensão equivalente de von Mises pode ser calculada por:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} : s_{ij}}. \tag{3.4}$$

O tensor tensão desviador s_{ij} é encontrado por:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{hid} \delta_{ij}, \tag{3.5}$$

em que σ_{ij} é o tensor tensão de segunda ordem e σ_{hid} é o tensor tensão hidrostático e que pode ser calculada por:

$$\sigma_{hid} = \frac{1}{3}(\sigma_{kk}). \tag{3.6}$$

3.4 Endurecimento elastoplástico

Para a maioria dos materiais, após o ponto inicial de escoamento ter sido alcançado, a curva tensão-deformação continua a subir até que a ruptura ocorra. Esse efeito do material conseguir suportar uma tensão maior após sofrer deformação plástica é conhecido como endurecimento por deformação ou endurecimento por trabalho.

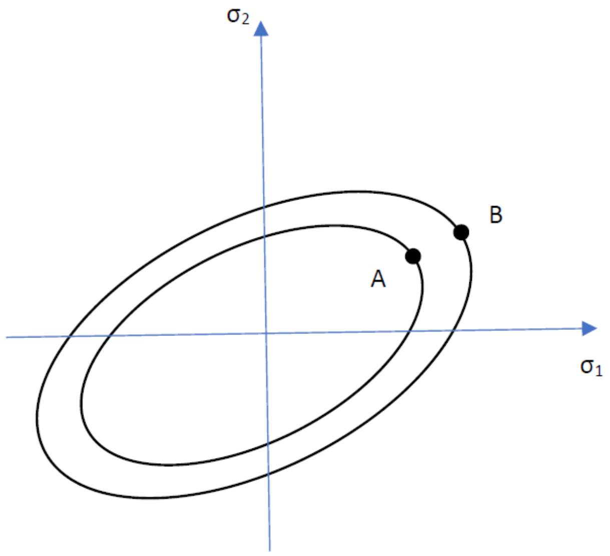
Modelos de endurecimento são estudados por regras que caracterizam a evolução de variáveis de endurecimento durante um processo de deformação plástica. Os principais tipos de endurecimento estudados são o endurecimento isotrópico e o cinemático (CHEN; ZHANG, 1988; KIM, 2015; BESSON et al., 2010).

3.4.1 Endurecimento isotrópico

O endurecimento isotrópico se apresenta quando a superfície de escoamento do material se expande de maneira uniforme, sem distorção e sem translação, durante o escoamento plástico.

No endurecimento isotrópico, o efeito Bauschinger (que será melhor detalhado na subseção 3.4.2) não pode ser representado. Após escoar, o material entra em regime plástico, cuja superfície de plasticidade expande isotropicamente conforme ilustrado na Figura 23 (SOUZA_NETO; PERIC; OWEN, 2008; GRILO, 2011).

Figura 23 – Endurecimento isotrópico



Fonte: Adaptado de Chen e Zhang (1988)

No endurecimento isotrópico, o escoamento subsequente depende da deformação plástica acumulada. Matematicamente, o comportamento que apresenta o endurecimento isotrópico e segue o critério de escoamento de von Mises é expresso como mostrado na Equação 3.7.

A Equação 3.7 representa a função de escoamento do material assumindo que a resposta na compressão é a mesma que na tração e que depende do estado de tensão σ_{ij} e de um conjunto de variáveis internas do material

$$f(\sigma,R) = \sigma_{eq} - R(p) - \sigma_y \leq 0. \tag{3.7}$$

.

Para o caso do material que apresenta um comportamento não linear, a função de endurecimento é calculada por

$$R(p) = H(p)^n, \tag{3.8}$$

em que H representa o módulo e n o expoente de endurecimento; ambos constantes do material. (p) é a deformação plástica equivalente acumulada.

A lei da plasticidade associada considera que os incrementos de deformação plástica $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}$ sejam ortogonais à superfície de escoamento, denominada a lei da normalidade, ou seja, a direção do incremento de deformação plástica coincide com a normal à superfície de escoamento. Portanto, o incremento de deformação plástica é calculado por:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \dot{p}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \qquad \dot{p} \geq 0, \tag{3.9}$$

em que $\dot{p}$ é o multiplicador plástico que determina a magnitude da deformação plástica e $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ representa o vetor normal à superfície de escoamento, dado por:

$$N_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2}\frac{s_{ij}}{\sigma_{eq}}. \tag{3.10}$$

Considerando a Equação 3.1 apresentada na seção 3.2, o incremento de deformação plástica pode ser escrita como

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{e}. \tag{3.11}$$

A deformação plástica equivalente é uma integral de incrementos de deformação plástica acumulada durante o tempo total de deformação plástica que inicia em um determinado estado de referência:

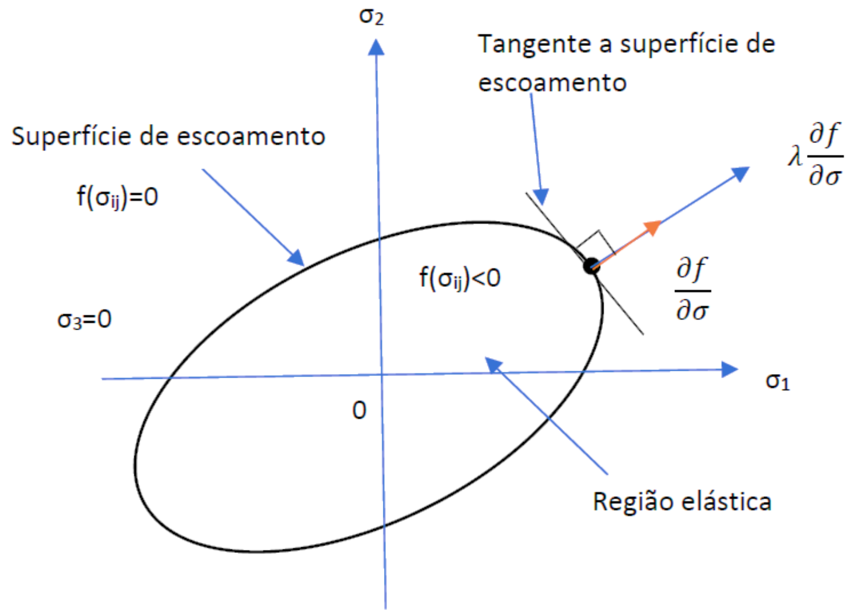
$$p = \int_{t}^{0} \dot{p}(\tau)d\tau, \tag{3.12}$$

em que "ponto" ($\dot{\bullet}$) denota a taxa de uma quantidade de deformação ou incremento de deformação plástica. Então, o incremento da deformação plástica equivalente pode ser encontrada por:

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} : \dot{\varepsilon}_{ij}^{p}}. \tag{3.13}$$

A Figura 24 representa uma superfície de escoamento convexa da função que varia com o estado de tensão, onde o incremento no tensor de deformação plástica está em uma direção, em relação às direções de tensão principais, normal à tangente da superfície de escoamento $f(\sigma_{ij})$ no ponto de aplicação da carga (DUNNE, 2005; SOUZA_NETO; PERIC; OWEN, 2008).

Figura 24 – Representação da superfície de escoamento (regra de fluxo associada)



Fonte: Adaptado de Simo e Hughes (1999)

3.4.2 Endurecimento cinemático

Alguns materiais são submetidos a ensaio de tração simples até ultrapassar o limite de escoamento e, em seguida, retirado a carga de tração e aplicado uma carga de compressão. Neste caso, nota-se que o limite de escoamento em compressão está abaixo do limite de escoamento inicial de tração. Esse fenômeno assimétrico das tensões está associado a anisotropia adquirida e se manifesta sempre que ocorre uma reversão acima do limite de escoamento do material. Esse fenômeno pode ser definido como o efeito Bauschinger (CHEN; ZHANG, 1988; KRABBENHØFT, 2002; REES, 2006; HAUS, 2011; CVITANIĆ; KOVAČIĆ, 2017).

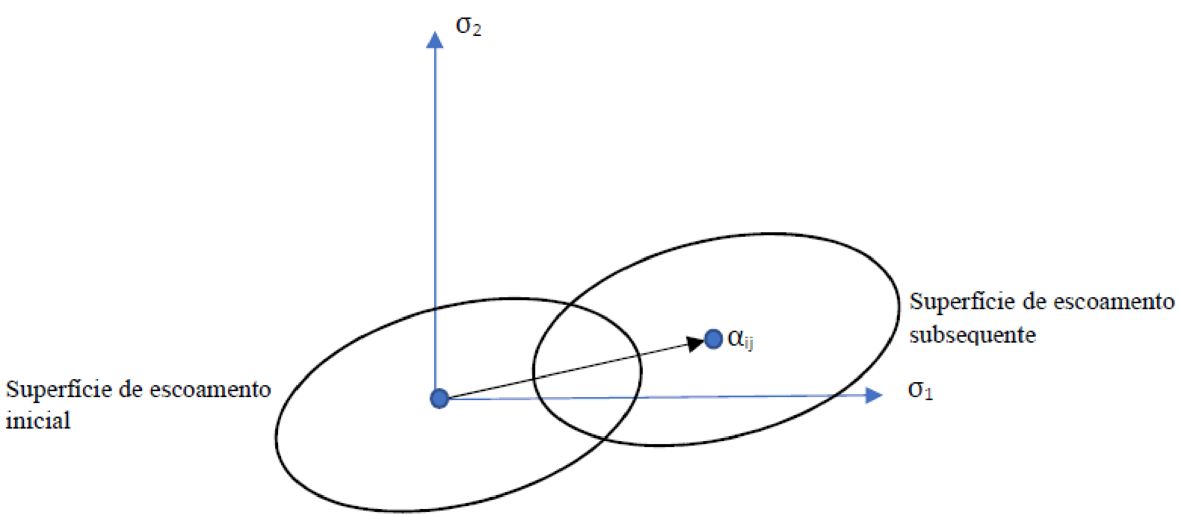
A teoria do endurecimento cinemático é uma forma simplificada para se considerar o efeito Bauschinger. Essa teoria assume que as superfícies de escoamento subsequentes mantêm a mesma forma e tamanho da superfície original, mas se deslocam, sem girar, no espaço de tensões. No endurecimento isotrópico, como foi visto na subseção 3.4.1, o escoamento subsequente depende da deformação plástica acumulada, porém, no endurecimento cinemático, as superfícies de escoamento subsequentes podem ser obtidas a partir daquela usada para a superfície de escoamento inicial, introduzindo um deslocamento de tensão (KIM, 2015). Esse deslocamento de tensão, conforme o modelo de Prager, assume que a sua evolução é proporcional a deformação plástica e a sua função de escoamento pode ser expressa com (BATHE; MONTÁNS, 2004):

$$f(\sigma,\alpha) = \sigma_{eq} - \sigma_y \leq 0, \tag{3.14}$$

em que a tensão equivalente de von Mises σ_{eq} para um material que apresenta endurecimento cinemático é expressa por $\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}(s_{ij} - \alpha_{ij}) : (s_{ij} - \alpha_{ij})}$, α_{ij} é o tensor tensão de retorno (ou "*back stress tensor*") e σ_y é a tensão de escoamento do material.

Esse deslocamento no centro da superfície de escoamento α_{ij} se caracteriza como um parâmetro de endurecimento do material. Se for adotado a regra de fluxo associada, entende-se que o tensor tensão α_{ij} se move na direção paralela a componente normal N_{ij} no estado de tensão atual da superfície de escoamento no espaço de tensão.

Figura 25 – Representação do endurecimento cinemático



Fonte: Adaptado de Kim (2015)

A forma mais simples para determinar o tensor tensão α_{ij} é aplicar a regra de endurecimento linear de Prager (CHEN; ZHANG, 1988):

$$\dot{\alpha}_{ij} = c\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \frac{2}{3}H_p\dot{\varepsilon}^p_{ij}, \tag{3.15}$$

em que c é a constante de endurecimento do material, H_p é o módulo plástico de endurecimento linear e $\dot{\varepsilon}^p_{ij}$ é o incremento de deformação plástica apresentada na Equação 3.11.

O módulo plástico de endurecimento linear que representa a inclinação da curva tensão-deformação instantânea é dada por Chen e Zhang (1988)

$$H_p = \frac{\dot{\sigma}_{eq}}{\dot{p}} = \frac{3}{2}c. \tag{3.16}$$

Considerando a tensão equivalente mostrada na Equação 3.4, o tensor tensão desviadora para o caso do endurecimento cinemático é calculado por:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} - \alpha_{ij}. \tag{3.17}$$

3.5 Tensor constitutivo anisotrópico tangente

Um tensor constitutivo anisotrópico tangente é definido como sendo um tensor de quarta ordem que varia durante o carregamento na região plástica. No caso do comportamento elastoplástico, ao contrário da elasticidade linear, esse tensor constitutivo não é uniforme e depende dos estados de tensão ou deformação. Devido a sua não uniformidade tornar o processo de homogeneização muito complexo, é assumido que cada fase obedece a uma relação constitutiva incremental em termos de taxa, cujos tensores constitutivos assumem características uniformes no espaço. Uma formulação para este problema será visto no Capítulo 4, onde uma formulação alternativa para linearizar incrementalmente o problema de homogeneização não-linear é apresentada na forma de um material de comparação linear.

Para materiais elastoplásticos que segue a teoria J_2, define-se pelo menos três tensores constitutivos anisotrópicos tangentes: um tensor constitutivo anisotrópico contínuo ou elastoplástico $\mathbb{L}_m^{ep}$, definido por Doghri (2000); um tensor constitutivo consistente ou algorítmico $\mathbb{L}_m^{alg}$ e um tensor constitutivo elastoplástico anisotrópico $\mathbb{L}_m^{ani}$, definido por Castañeda (1996). Esses tensores constitutivos anisotrópicos, que representam a anisotropia adquirida durante o processo elastoplástico, podem ter um impacto importante nas previsões dos resultados obtidos, pois, os modelos de homogeneização dependem explicitamente de suas expressões (DOGHRI; OUAAR, 2003; KIM, 2015; SCALET; AURICCHIO, 2018; SEKKATE; ABOUTAJEDDINE; SEDDOUKI, 2020).

O primeiro operador constitutivo anisotrópico tangente $\mathbb{L}_m^{ep}$ segue o modelo clássico da plasticidade J_2, em que pode obtido por:

$$\mathbb{L}_m^{ep} = \mathbb{C}_m - \frac{(2\mu_m)^2}{h}\boldsymbol{N}\otimes\boldsymbol{N}, \tag{3.18}$$

em que $\mathbb{C}_m$ é o tensor constitutivo elástico da matriz, μ_m é o módulo de cisalhamento elástico da matriz. Para o caso de endurecimento isotrópico, o valor de h pode ser encontrado por:

$$h = 3\mu_m + R'(p), \tag{3.19}$$

em que $R'(p)$ é a derivada da função de endurecimento não linear definida por:

$$R'(p) = nH(p)^{(n-1)}. \tag{3.20}$$

Sabendo que p é a deformação plástica acumulada e que pode ser encontrada por meio da soma dos incrementos de deformação $\dot{p}$. Para o caso de endurecimento cinemático linear, o valor de h pode ser encontrado por (CHEN; ZHANG, 1988; DOGHRI, 2000):

$$h = 3\mu_m + \frac{3}{2}c, \tag{3.21}$$

em que c é uma constante do material elastoplástico.

O segundo tensor constitutivo, denominado de algorítmico, é resultante de uma discretização no tempo da equação constitutiva do modelo elastoplástico $\mathbb{L}_m^{ep}$ e pode ser definido via etapas de tempo finitas. As equações constitutivas podem ser discretizadas no tempo usando o esquema de Euler totalmente implícito, conhecido como backward. As equações algébricas são linearizadas para que um operador tangente algorítmico seja calculado (DOGHRI, 2000; PIERARD; DOGHRI, 2006; KIM, 2015):

$$\mathbb{L}_m^{alg} = \mathbb{L}_m^{ep} - (\Delta p)\frac{6\mu_m^2}{\sigma_{eq}^{trial}}(\mathbb{K} - \frac{2}{3}\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{N}), \tag{3.22}$$

no qual σ_{eq}^{trial} é a estimativa elástica do tensor tensão equivalente no final do intervalo de ”$tempo$” considerado, $\mathbb{K}$ é o tensor de projeção desviador dado na Equação 2.26.

Na Equação 3.22, observa-se que $\mathbb{L}_m^{alg} \to \mathbb{L}_m^{ep}$ para incrementos de deformação plástica muito pequenos ($\Delta p \to 0$) e que ambos os operadores tangentes são anisotrópicos durante um incremento de deformação no regime plástico. Importante reforçar que, em problemas "quase"estáticos, o incremento de ”$tempo$” deve ser entendido como um incremento de carga (PIERARD; DOGHRI, 2006; PIERARD et al., 2007).

O terceiro tensor constitutivo $\mathbb{L}_m^{ani}$, definido por Castañeda (1996) para o comportamento elastoplástico baseado na teoria da plasticidade clássica J_2, pode ser expresso por

$$\mathbb{L}_m^{ani} = 3k_m\mathbb{J} + 2\mu_m\mathbb{F} + 2\mu_m^t\mathbb{E}, \tag{3.23}$$

em que k_m representa o módulo bulk, μ_m^t o módulo de cisalhamento tangente da matriz e $\mathbb{J}$ é o tensor de projeção volumétrica (ver Equação 2.25). Prosseguindo, $\mathbb{E}$ define a parte plástica e anisotrópica do operador constitutivo tangente, definida por

$$\mathbb{E} = \frac{2}{3}(\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{N}), \tag{3.24}$$

em que $\boldsymbol{N}$ é a componente normal à superfície de escoamento. O tensor $\mathbb{F}$ está associado ao fluxo plástico corrente (atual) da matriz e pode ser calculado por:

$$\mathbb{F} = \mathbb{K} - \mathbb{E}, \tag{3.25}$$

no qual o tensor de projeção desviador $\mathbb{K}$, pode ser encontrado na seção 2.2.

3.6 Aproximações isotrópicas do tensor constitutivo anisotrópico tangente

Para melhorar os resultados das previsões do método incremental desenvolvido por Hill, o método de isotropização foi introduzido com a justificativa de usar aproximações isotrópicas, e assim, resolver o problema da rigidez excessiva proporcionada pela anisotropia induzida por meio da deformação plástica. A distribuição não uniforme das deformações locais nos constituintes do compósito são aproximados por campos uniformes, e isso pode levar a rigidez excessiva encontrada nos resultados.

O método de isotropização consiste em usar a parte isotrópica do operador de rigidez anisotrópico da matriz na determinação do operador tangente macroscópico, e assim, obter a previsão das respostas elastoplásticas globais menos rígidas. A seguir, são apresentados dois métodos de isotropização: um método denominado de espectral e outro denominado de geral (CHABOCHE; KANOUTÉ; ROOS, 2005; JIANG, 2009).

3.6.1 Método de isotropização espectral

O método de isotropização, denominado de espectral, se aplica a operadores tangentes anisotrópicos que são uma combinação linear de $\mathbb{J}$, $\mathbb{K}$ e $(\boldsymbol{N} \otimes \boldsymbol{N})$. Por meio desse método, o operador anisotrópico proposto por Castañeda (1996) na Equação 3.23 pode ser reescrito como Equação 3.26 (DOGHRI; OUAAR, 2003)

$$\mathbb{L}_m^{ani} = 3k_1\mathbb{C}^{(1)} + 2k_2\mathbb{C}^{(2)} + 2k_3\mathbb{C}^{(3)}, \tag{3.26}$$

em que

$$\mathbb{C}^{(1)} = \mathbb{J},\ \ \mathbb{C}^{(3)} = \frac{2}{3}\boldsymbol{N}\otimes\boldsymbol{N},\ \ \mathbb{C}^{(2)} = \mathbb{K} - \mathbb{C}^{(3)}, \tag{3.27}$$

com $N_{ij} = N_{ji}$, $N_{mm} = 0$ e $\boldsymbol{N} : \boldsymbol{N} = \frac{3}{2}$.

O método baseia-se na suposição de que a taxa (incremento) de deformação $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_m$ é colinear com $\boldsymbol{N}$. Portanto, a relação incremental $\Delta\boldsymbol{\sigma}_m = \mathbb{L}_m^{Ani} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_m$ se reduz a $\Delta\boldsymbol{\sigma}_m = \mathbb{L}_m^{IsoSpec} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_m$, em que $\mathbb{L}^{IsoSpec}$ é a parte isotrópica de $\mathbb{L}^{Ani}$.

Para a decomposição espectral que atua em operadores tangentes do tipo apresentado na Equação 3.26, as seguintes condições devem ser satisfeitas (BRASSART et al., 2011):

$$\mathbb{C}^{(1)} + \mathbb{C}^{(2)} + \mathbb{C}^{(3)} = \mathbb{I}, \quad \mathbb{C}^{(i)} : \mathbb{C}^{(j)} = \delta_{ij}\mathbb{C}^{(i)}, \quad (\textit{nenhuma soma sobre } i.) \tag{3.28}$$

na qual a Equação 3.26 é uma decomposição espectral da Equação 3.23. Os coeficientes k_1 e k_3, são calculados a seguir:

$$k_1 = k_m^t, \tag{3.29}$$

$$k_2 = \mu_m \left[1 - 3\mu_m \frac{\Delta p}{\sigma_{eq}^{trial}} \right], \tag{3.30}$$

em que σ^{trial} é uma estimativa de teste (preditor elástico) da tensão equivalente de von Mises e Δp é o incremento de deformação plástica.

Seguindo Brassart et al. (2012), k_3 (ou módulo de cisalhamento tangente da matriz elastoplástica μ_m^t) pode ser calculado por

$$k_3 = \mu_m^t = \mu_m \left[1 - \frac{3\mu_m}{3\mu_m + R'(p)} \right]. \tag{3.31}$$

Para calcular o coeficiente de cisalhamento de um material que apresenta endurecimento cinemático linear tangente, tem-se

$$\mu_m^t = \mu_m \left[1 - \frac{3\mu_m}{h} \right]. \tag{3.32}$$

Conforme Doghri e Ouaar (2003), se k_2 apresentado na Equação 3.30 desaparecer da Equação 3.26 (juntamente com Δp), qualquer vantagem proporcionada pelo tensor tangente algorítmico em relação ao tensor tangente elastoplástico é perdida. Sendo assim, uma aproximação para a obtenção do tensor isotrópico pode ser obtida ao desprezar o termo anisotrópico do operador elastoplástico tangente (CHABOCHE; KANOUTÉ, 2003; CHABOCHE; KANOUTÉ; ROOS, 2005).

Portanto, seguindo o método de isotropização espectral, a parte isotrópica $\mathbb{L}_m^{IsoSpec}$ do operador anisotrópico $\mathbb{L}_m^{ep}$, assumindo que o incremento de deformação seja colinear a N ($dev(\Delta\varepsilon_m)//N$), pode ser calculado por (DOGHRI; OUAAR, 2003)

$$\mathbb{L}_m^{IsoSpec} = 3k_m^t \mathbb{J} + 2\mu_m^t \mathbb{K}, \tag{3.33}$$

no qual o tensor $\mathbb{L}_m^{IsoSpec}$ de quarta ordem se tornou uma aproximação isotrópica do tensor tangente anisotrópico da matriz elastoplástica $\mathbb{L}_m^{ep}$.

Conforme citado em Brassart (2011), diferentes combinações de tensores isotrópicos e anisotrópicos podem ser usados, mas Doghri e Ouaar (2003) e Pierard e Doghri (2006) chegaram a conclusão de que bons resultados são obtidos quando ambos os tensores, de Eshelby e de Hill (1965a), são calculados com o operador de tangente isotropizado segundo o método espectral, ou seja (PIERARD; DOGHRI, 2006; BRASSART, 2011):

$$\mathbb{P}^{tan} = \mathbb{S}_t : (L_m^{isoSpec})^{-1}. \tag{3.34}$$

De acordo com Ouaar (2006) e Brassart (2011), o método de isotropização espectral é inválido quando o comportamento da matriz é elástico-perfeitamente plástico (ou seja, $R(p) = R'(p) = 0$), pois, o módulo de cisalhamento do material de comparação é zero. Nesse caso, a expressão anisotrópica do operador tangente deve ser usada.

3.6.2 Método de isotropização geral

Uma segunda forma de isotropização, conhecida como método de isotropização geral, foi proposta por Bornert, Bretheau e Gilormin (2001). Quando o esquema incremental auto-consistente é aplicado a um compósito com pelo menos uma fase elastoplástica, o operador macroscópico tangente $\bar{\mathbb{L}}$ é geralmente anisotrópico, mesmo que os operadores tangentes de referência das fases sejam todos isotrópicos, e o método de isotropização espectral não pode ser aplicado. Pode-se então usar um método geral de isotropização válido para qualquer tensor anisotrópico de quarta ordem $\mathbb{L}_m^{ep}$, segundo o qual, uma projeção isotrópica pode ser encontrada por (BRASSART, 2011):

$$(\mathbb{L}_m)^{IsoGer} = (\mathbb{J} :: \mathbb{L}_m^{ep})\mathbb{J} + \frac{1}{5}(\mathbb{K} :: \mathbb{L}_m^{ep})\mathbb{K} = 3k_m^t\mathbb{J} + 2\mu_m^t\mathbb{K}, \tag{3.35}$$

sabendo que $(\mathbb{L}_m)^{IsoGer}$ é uma aproximação isotrópica de $\mathbb{L}_m^{ep}$, $\mathbb{J}$ e $\mathbb{K}$ são os tensores de projeção volumétrica e desviador visto na seção 2.2, respectivamente. Os escalares k_m^t e μ_m^t são calculados conforme (JIANG, 2009)

$$3k_m^t = (\mathbb{J} :: \mathbb{L}_m^{ep}), \tag{3.36}$$

$$10\mu_m^t = (\mathbb{K} :: \mathbb{L}_m^{ep}). \tag{3.37}$$

Por meio dos processos de isotropização, em que foram encontrados os escalares μ_m^t e k_m^t, pode-se calcular o módulo de Poisson tangente ν_m^t (CHABOCHE; KANOUTÉ; ROOS, 2005),

$$\nu_m^t = \frac{3k_m^t - 2\mu_m^t}{6k_m^t + 2\mu_m^t}, \tag{3.38}$$

em que, de posse do ν_m^t, pode-se determinar o tensor de Eshelby tangente a cada etapa de carregamento. Para o caso em que a pressão não é considerada, o módulo bulk tangente da matriz k_m^t não sofre modificação durante a deformação plástica, portanto, $k_m^t = k_m$ (DILL, 2007).

No trabalho de Pierard e Doghri (2006) foi observado que o método de isotropização geral para a obtenção da aproximação isotrópica do tensor anisotrópico, apresenta melhores resultados usando apenas para calcular o tensor de Eshelby "isotropizado" via ν_m^t.

3.7 Conclusões do Capítulo 3

O presente capítulo apresentou uma base teórica imprescindível ao desenvolvimento dos próximos capítulos deste trabalho. Foi abordado o estudo do comportamento elastoplástico de materiais compósitos ou porosos que escoam de acordo o critério de von Mises. A matriz homogênea apresenta características elastoplásticas, que por simplificação das análises, pode apresentar endurecimento isotrópico ou cinemático. Considerando as condições de deformações infinitesimais, três operadores anisotrópicos foram apresentados, sendo esses tensores, consequência da anisotropia adquirida devido à ocorrência da plastificação da matriz. Até o momento, sabe-se que previsões muito rígidas são obtidas quando esses operadores anisotrópicos são usados para calcular a média da deformação (ou tensão) da fase elastoplástica. Para melhorar os resultados das previsões, ao se aplicar métodos de linearização para o estudo do comportamento não linear, dois métodos de isotropização (espectral e geral) foram introduzidos com a justificativa de usar aproximações isotrópicas e, assim, resolver o problema da rigidez excessiva proporcionada pela anisotropia induzida devido ao escoamento.

4 HOMOGENEIZAÇÃO DE MATERIAIS HETEROGÊNEOS ELASTOPLÁSTICOS

4.1 Introdução

Para os materiais heterogêneos que apresentam um comportamento não linear, os operadores constitutivos instantâneos das fases não são uniformes e, assumem valores médios. Para lidar com o problema da não linearidade desses operadores constitutivos, pode ser definido um *Material de Comparação Linear Heterogêneo* (MCLH), que se aproxima das respostas do material não linear real para um dado estado. Por conseguinte, o problema não linear é reduzido a uma sequência de resultados lineares obtidos por um determinado método de linearização. Ao adotar MCLH, pode-se usar os resultados de teorias lineares bem estabelecidos, sendo semi-analiticamente acessível e fornece uma aproximação plausível para os problemas não lineares. Desta forma, modelos de homogeneização, válidos em elasticidade linear, podem ser aplicados em problemas não lineares em cada "intervalo de tempo" (BOHM, 1998; HOANG, 2015; ABDIN, 2015; QIU; WENG; CASTANEDA, 1992).

Neste capítulo, serão apresentados os resultados do comportamento elastoplástico de materiais heterogêneos, seja ele compósito ou material poroso. Via um processo de linearização, no qual, recorrendo ao conceito de MCLH, as leis constitutivas são linearizadas por meio de tensor constitutivo tangente. Além disso, serão aplicados métodos de extração de módulos tangentes isotrópicos, como também, o uso do tensor de Eshelby elastoplástico e o método de homogeneização de Mori e Tanaka (1973). Ao investigar as possibilidades do uso do tensor constitutivo tangente, seja anisotrópico ou isotrópico, em conjunto com tensor de Eshelby isotropizado ou com tensor de Eshelby para o meio elastoplástico, poderá ser observada a influência da escolha do método para aquisição dos resultados da rigidez da curva tensão-deformação. A matriz dúctil pode apresentar endurecimento isotrópico ou cinemático, conforme a regra de Prager, considerando o histórico de carregamento e deformações infinitesimais. Os resultados obtidos neste capítulo serão confrontados com resultados obtidos na literatura, validando, assim, o algoritmo usado para o estudo elastoplástico de materiais heterogêneos bifásicos.

4.2 Escoamento do material heterogêneo

Esta seção trata do critério de escoamento em termos de campos locais que ocorrem em virtude a uma tensão macroscópica aplicada no material efetivo. Como as inclusões são elásticas e a matriz é elastoplástica, então, o ponto de escoamento durante a deformação do material heterogêneo ocorre quando a tensão média na matriz atinge sua superfície de escoamento, ou seja, quando a condição de escoamento da matriz é satisfeita (SHEN et al., 2020). Considerando um material bifásico que apresenta inclusões alinhadas ou desalinhadas, a Figura 26 e a Figura 27 mostram, respectivamente, o procedimento para calcular o escoamento de um material heterogêneo por meio do esquema de homogeneização de Mori e Tanaka (1973), seja para inclusões elásticas ou poros submetidos a qualquer condição de carregamento (ARAÚJO; RODRIGUES; PIRES, 2023).

Figura 26 – Escoamento do material heterogêneo que apresenta inclusões alinhadas ou esféricas

Aplicar carregamento macroscópico no material efetivo:
a) Direção x_1: $\langle\bar{\sigma}\rangle = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]'$
b) Direção x_2: $\langle\bar{\sigma}\rangle = [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]'$
c) Cisalhamento: $\langle\bar{\sigma}\rangle = [0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0]'$

↓

Calcular o tensor de concentração de deformação na matriz conforme Equação 2.73: $\mathbb{A}_m^{MT} = [(1 - f_i)\mathbb{I} + f_i\mathbb{A}_i^{dil}]^{-1}$

↓

E por fim, calcular o tensor de concentração de tensão na matriz para inclusões alinhadas ou esféricas conforme Equação 2.75:
$\mathbb{B}_m^{MT} = \mathbb{C}_m : \mathbb{A}_m^{MT} : \bar{\mathbb{C}}^{-1}$

↓

Calcular a tensão média na matriz conforme Equação 2.74:
$\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_m = \mathbb{B}_m^{MT} : \langle\bar{\boldsymbol{\sigma}}\rangle$

↓

Conforme apresentado na seção 3.3, a tensão equivalente (média) de von Mises pode ser calculado por:
$\langle\sigma_{eq}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{(\langle\sigma_x\rangle_m - \langle\sigma_y\rangle_m)^2 + (\langle\sigma_y\rangle_m - \langle\sigma_z\rangle_m)^2 + (\langle\sigma_z\rangle_m - \langle\sigma_x\rangle_m)^2 + 6(\langle\tau_{xy}\rangle_m^2 + \langle\tau_{xz}\rangle_m^2 + \langle\tau_{yz}\rangle_m^2)}\right]$

↓

E por fim, calcular o parâmetro de carga λ para escoar a matriz do material efetivo e o tensor efetivo de escoamento $\langle\bar{\sigma}_y\rangle$:
$\lambda = \frac{\sigma_y}{\langle\sigma_{eq}\rangle}$, em que σ_y é a tensão de escoamento da matriz.
$\langle\bar{\sigma}_y\rangle = \langle\bar{\sigma}\rangle : \lambda$

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 27 – Escoamento do material heterogêneo que apresenta inclusões desalinhadas

Aplicar carregamento macroscópico no material efetivo:
a) Direção x_1: $\langle\bar{\sigma}\rangle = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]'$
b) Direção x_2: $\langle\bar{\sigma}\rangle = [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]'$
c) Cisalhamento: $\langle\bar{\sigma}\rangle = [0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0]'$

↓

Calcular o tensor de concentração de deformação na matriz para inclusões desalinhadas conforme Equação 2.99: $\langle\mathbb{A}_m^{MT}\rangle_\psi = [(1-f_i)\mathbb{I} + f_i\langle\mathbb{A}_i^{dil}\rangle_\psi]^{-1}$

↓

Calcular o tensor de concentração de tensão na matriz para inclusões desalinhadas conforme Equação 2.75:
$\langle\mathbb{B}_m^{MT}\rangle_\psi = \mathbb{C}_m : \langle\mathbb{A}_m^{MT}\rangle_\psi : \bar{\mathbb{C}}^{-1}$

↓

Calcular a tensão média na matriz conforme Equação 2.74:
$\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_m = \langle\mathbb{B}_m^{MT}\rangle_\psi : \langle\bar{\boldsymbol{\sigma}}\rangle$

↓

Conforme apresentado na seção 3.3, a tensão equivalente (média) de von Mises pode ser calculado por:
$\langle\sigma_{eq}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{(\langle\sigma_x\rangle_m - \langle\sigma_y\rangle_m)^2 + (\langle\sigma_y\rangle_m - \langle\sigma_z\rangle_m)^2 + (\langle\sigma_z\rangle_m - \langle\sigma_x\rangle_m)^2 + 6(\langle\tau_{xy}\rangle_m^2 + \langle\tau_{xz}\rangle_m^2 + \langle\tau_{yz}\rangle_m^2)}\right]$

↓

Calcular o parâmetro de carga λ para escoar a matriz do material efetivo e o tensor efetivo de escoamento $\langle\bar{\sigma}_y\rangle$:
$\lambda = \frac{\sigma_y}{\langle\sigma_{eq}\rangle}$, em que σ_y é a tensão de escoamento da matriz.
$\langle\bar{\sigma}_y\rangle = \langle\bar{\sigma}\rangle : \lambda$

Fonte: Elaborado pelo autor

4.3 Formulação incremental de Hill

Para solucionar problemas que envolvem o comportamento elastoplástico, Hill (1965b) propôs resolver uma sucessão de problemas lineares em cada incremento de carga. Isso equivale a dizer que o compósito adquire, em cada intervalo de "tempo" (taxa), características mecânicas lineares.

A abordagem incremental é, particularmente, adequada para simular qualquer condição de carregamento. Além disso, praticamente qualquer modelo constitutivo local pode ser considerado, desde que um operador tangente de referência possa ser definido, cujo comportamento elastoplástico microscópico é representado por um operador de rigidez tangente específico.

Na formulação de Hill, o incremento de tensão (ou deformação), pode ser determinado por uma relação constitutiva semelhante à lei de Hooke da elasticidade linear, porém, com o operador de rigidez tangente instantâneo atualizado a cada passo de tensão (ou deformação), ou seja: (QU; CHERKAOUI, 2006; BRASSART, 2011; BRASSART et al., 2012),

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_{(x)} = \mathbb{L}_{(x)}^{tan(r)} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}(x), \quad \forall \boldsymbol{x} \in r, \tag{4.1}$$

em que r é a fase do constituinte do material heterogêneo e $\mathbb{L}_{(x)}^{tan(r)}$ é o operador local tangente (da fase) que relaciona o incremento de tensão (ou deformação) com o incremento de deformação (ou tensão).

Importante salientar que, ao usar a formulação incremental nos métodos de homogeneização de campos médios, os campos de tensões e deformações são considerados homogêneos por fase, o que permite usar a informação média de cada constituinte. Essa média desempenha um papel significativo nos resultados das propriedades efetivas dos compósitos elastoplásticos, pois não captura a plastificação local da fase, sendo, portanto, desejável desenvolver modelos que proporcionem informações estatísticas mais ricas (CASTAÑEDA, 1991; MOULINEC; SUQUET, 2003; REKIK et al., 2007; DOGHRI et al., 2011).

4.4 Esquema de homogeneização de Mori-Tanaka para materiais heterogêneos elastoplásticos

Conforme foi visto na seção 4.3, na estrutura do método de campos médios, onde a formulação incremental pode ser usada, os incrementos dos campos de tensão e deformação podem ser tratados em analogia com os campos correspondentes para o comportamento linear. De acordo com Pettermann et al. (1999), um ponto importante para o desenvolvimento de um modelo micromecânico que representa um comportamento elastoplástico é a determinação de um tensor de concentração de tensão ou deformação instantâneo. As principais teorias relacionadas ao estudo de compósitos não lineares, consideram duas informações para o estudo do comportamento elastoplástico dos campos de tensão e deformação efetivos: o comportamento individual das fases constituintes e a microestrutura do material.

Uma vez que o comportamento local corresponde a uma relação constitutiva linearizada, os modelos clássicos de homogeneização, baseados no trabalho de Eshelby (1957), apresentados no Capítulo 2, podem ser usados. Assumindo o esquema de homogeneização de Mori e Tanaka (1973) para o estudo do comportamento elastoplástico efetivo, no qual o incremento de deformação na inclusão $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_i$ é relacionado com o incremento de deformações na matriz $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_m$, por meio de um tensor tangente de concentração de deformação da inclusão A_i^{tan} instantâneo, tem-se:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbb{A}_i^{tan} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_m. \tag{4.2}$$

Sabendo que o tensor de concentração tangente da inclusão instantâneo pode ser calculado por

$$\mathbb{A}_i^{tan} = [\mathbb{L}^* + \mathbb{C}_i] : \left[\mathbb{L}^* + \mathbb{L}_m^{tan}\right], \tag{4.3}$$

em que $\mathbb{L}^*$ é tensor de restrição global de Hill (1963), $\mathbb{C}_i$ é o tensor elástico de rigidez da inclusão e $\mathbb{L}_m^{tan}$ é o operador tangente da matriz elastoplástica. O tensor de restrição $\mathbb{L}^*$, em termos de operador tangente do material de referência da matriz, pode ser calculado por (HILL, 1963; HILL, 1965b):

$$\mathbb{L}^* = \mathbb{L}_m^{tan} : \left[(\mathbb{S}_t)^{-1} - \mathbb{I}\right]. \tag{4.4}$$

$$\mathbb{A}_i^{tan} = \left[\mathbb{I} + \mathbb{P}^{tan} : \left(\mathbb{C}_i - \mathbb{L}_m^{tan}\right)\right]^{-1}, \tag{4.5}$$

em que $\mathbb{P}^{tan} = \mathbb{S}_t : (\mathbb{L}_m^{tan})^{-1}$ é o tensor de Hill (1965a) linearizado.

Para análise não linear, o tensor de concentração de deformação pode ser atualizado conforme a atualização da rigidez do constituinte elastoplástico e do tensor de Eshelby. Em casos de materiais heterogêneos que possuem inclusões desalinhadas, deve-se aplicar o método proposto na Equação 2.96 para calcular o tensor de concentração de deformação $\langle \mathbb{A}_i^{dil} \rangle_{\psi}^{tan}$.

Para o caso elastoplástico, o tensor de concentração de deformação torna-se uma função da deformação. A não linearidade surge devido ao fato do tensor de concentração de deformações ser função dos módulos instantâneos das fases elastoplásticas. Tendo o incremento de deformação inicial para cada fase, as tensões são atualizadas e os módulos correspondentes das fases são determinados (PERDAHCIOğLU; GEIJSELAERS, 2011; ABEDINI; CHEN, 2014).

Por meio dos tensores de concentração de deformação instantâneos tangentes da inclusão e matriz, pode-se obter, via método de Mori-Tanaka, os incrementos de deformação na inclusão $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_i$ e na matriz $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_m$, respectivamente:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_i = \left[\mathbb{I} + \mathbb{S}_t : (\mathbb{L}_m^{tan})^{-1}(\mathbb{C}_i - \mathbb{L}_m^{tan})\right]^{-1} : \left[f_m\mathbb{I} + f_i\left[\mathbb{I} + \mathbb{S}_t : (\mathbb{L}_m^{tan})^{-1} : (\mathbb{C}_i - \mathbb{L}_m^{tan})\right]^{-1}\right]^{-1} : \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tag{4.6}$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_m = \left[f_m\mathbb{I} + f_i\left[\mathbb{I} + \mathbb{S}_t : (\mathbb{L}_m^{tan})^{-1} : (\mathbb{C}_i - \mathbb{L}_m^{tan})\right]^{-1}\right]^{-1} : \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \Rightarrow \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbb{A}_m^{tan} : \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tag{4.7}$$

em que $\mathbb{S}_t$ é o tensor de Eshelby tangente.

As relações constitutivas que representam os incrementos de tensão da matriz $\Delta\boldsymbol{\sigma}_m$ e da inclusão $\Delta\boldsymbol{\sigma}_i$ são calculadas como segue, respectivamente:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_m = \mathbb{L}_m^{tan} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_m, \tag{4.8}$$

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_i = \mathbb{C}_i : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbb{C}_i : \mathbb{A}_i^t : (\mathbb{L}_m^{tan})^{-1} : \Delta\boldsymbol{\sigma}_m. \tag{4.9}$$

Os incrementos de deformação na matriz e na inclusão, ficam, respectivamente,

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_m = (\mathbb{L}_m^{tan})^{-1} : \Delta\boldsymbol{\sigma}_m, \tag{4.10}$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_i = (\mathbb{C}_i)^{-1} : \Delta\boldsymbol{\sigma}_i. \tag{4.11}$$

Seguindo Mori e Tanaka (1973), tem-se o operador tangente elastoplástico efetivo $\bar{L}$ do material heterogêneo:

$$\bar{\mathbb{L}} = \mathbb{L}_m^{tan} + f_i(\mathbb{C}_i - \mathbb{L}_m^{tan}) : \mathbb{A}_i^{tan} : \left[(1-f_i)\mathbb{I} + f_i\mathbb{A}_i^{tan}\right]^{-1}. \tag{4.12}$$

Por meio da Lei de Hooke, o problema do material heterogêneo não linear, poderá ser linearizado em cada incremento de deformação:

$$\Delta\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbb{L}} : \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tag{4.13}$$

ou

$$\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\mathbb{L}}^{-1} : \Delta\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \tag{4.14}$$

no qual a Equação 4.13 (condição de contorno em tensão) e a Equação 4.14 (condição de contorno em deformação) representam a forma linearizada incremental da equação constitutiva do material heterogêneo.

4.5 Tensor de Eshelby tangente

Ao lidar com o processo de homogeneização de campos médios incremental (exceto para os modelos de Voigt e Reuss), calcula-se o tensor de Eshelby, que tem uma influência importante na partição de deformação entre as fases do material heterogêneo. A experiência numérica mostrou que boas previsões podem ser obtidas quando o tensor de Eshelby é calculado não com um operador tangente anisotrópico da matriz de referência, mas com módulos isotrópicos, obtendo, assim, o tensor de Eshelby tangente (DOGHRI; OUAAR, 2003; DOGHRI; FRIEBEL, 2005; KAMMOUN, 2011).

Para obter resultados menos rígidos, Brassart, Doghri e Delannay (2010) propuseram que, quando o material heterogêneo fosse submetido a um carregamento proporcional, a matriz poderia ser considerada isotrópica em cada passo de carregamento, sendo possível calcular o tensor de Eshelby tangente S_t por meio da geometria da inclusão e do Poisson tangente ν_m^t, conforme Apêndice D (WANG; HUANG, 2017).

4.6 Tensor de Eshelby para o meio elastoplástico

Conforme visto na seção 3.6, os esquemas da micromecânica de campos médios baseados na solução convencional de Eshelby, podem superestimar a tensão em compósitos que consistem em matriz elastoplástica e inclusões elásticas, ambos isotrópicos. Para resolver este problema, uma abordagem nova é apresentada por Peng et al. (2016) para determinar o tensor de Eshelby para o meio elastoplástico. O tensor de Eshelby para $\mathbb{S}$ para materiais elastoplásticos, deduzido no Apêndice E, pode ser obtido via Equação 4.15:

$$\mathbb{S} = \left[\mathbb{C}_m^{-1} : \mathbb{L}_m^{Iso}\right]^{-1} : \mathbb{S}^{\Omega} : \left[\mathbb{C}_m^{-1} : \mathbb{L}_m^{Iso}\right], \tag{4.15}$$

em que $\mathbb{S}^{\Omega}$ é o tensor de Eshelby elástico e $\mathbb{L}_m^{Iso}$ é o operador tangente isotropizado por meio do método espectral ou geral.

4.7 Exemplos do comportamento elastoplástico de compósitos que apresentam inclusões elásticas com endurecimento isotrópico

Seguindo o embasamento teórico visto neste capítulo e nos capítulos anteriores, a seguir, apresentam-se exemplos que estudam o comportamento elastoplástico de compósitos, que a matriz apresenta endurecimento isotrópico e inclusões elásticas. Para o melhor entendimento da metodologia usada, podem ser encontradas nos Apêndices a Figura 70, a Figura 71, a Figura 72 e a Figura 73. Essas figuras apresentam fluxogramas evidenciando, de forma explícita, as etapas sequenciais que modelam o comportamento elastoplástico dos materiais heterogêneos. Os resultados obtidos neste trabalho são comparados com resultados obtidos via *software* Digimat e literatura.

4.7.1 Resultados obtidos por meio do método de isotropização espectral variando o uso do tensor de Eshelby (inclusões elásticas e matriz com endurecimento isotrópico).

Para obtenção dos resultados, utiliza-se a linearização incremental, o método de homogeneização de Mori-Tanaka e o operador tangente isotrópico calculado por meio do método de isotropização espectral. Nessa metodologia, são aplicados o *Tensor de Eshelby Tangente* (TET) e o *Tensor de Eshelby Elastoplástico* (TEEP). Todos os exemplos, considerando deformações infinitesimais, seguem a lei de plasticidade J_2, *Power-law* e endurecimento isotrópico, obedecendo às leis da termodinâmica. Para todos os exemplos deste capítulo, o material heterogêneo é representado por inclusões homogêneas, elásticas e lineares, inseridas em uma matriz elastoplástica e igualmente homogênea.

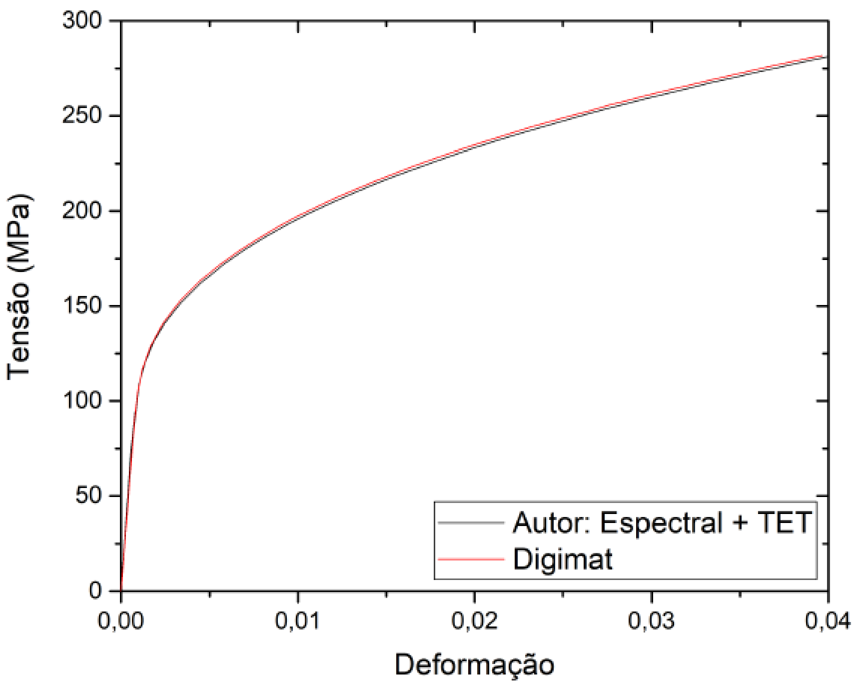
Na Figura 28 é possível observar a comparação entre os resultados do comportamento elastoplástico de uma matriz metálica e inclusões esféricas com 30% de fração volumétrica. Os resultados obtidos por meio do *software* Digimat são comparados com os resultados obtidos neste trabalho, que usa a isotropização espectral e o TET obtido conforme Apêndice D. As propriedades da matriz elastoplástica e das inclusões elásticas encontram-se na Tabela 3.

Tabela 3 – Compósito com inclusões elásticas e matriz com endurecimento isotrópico

Parâmetros do material	**Unidade**	**Valor**
Matriz		
Módulo de Young	(GPa)	75
Coeficiente de Poisson		0,3
Tensão de escoamento	(MPa)	75
Módulo de endurecimento	(MPa)	416
Expoente de endurecimento		0,3895
Inclusão		
Módulo de Young	(GPa)	400
Coeficiente de Poisson		0,2

Fonte: Peng et al. (2016)

Figura 28 – Comportamento elastoplástico do compósito usando o TET e isotropização espectral

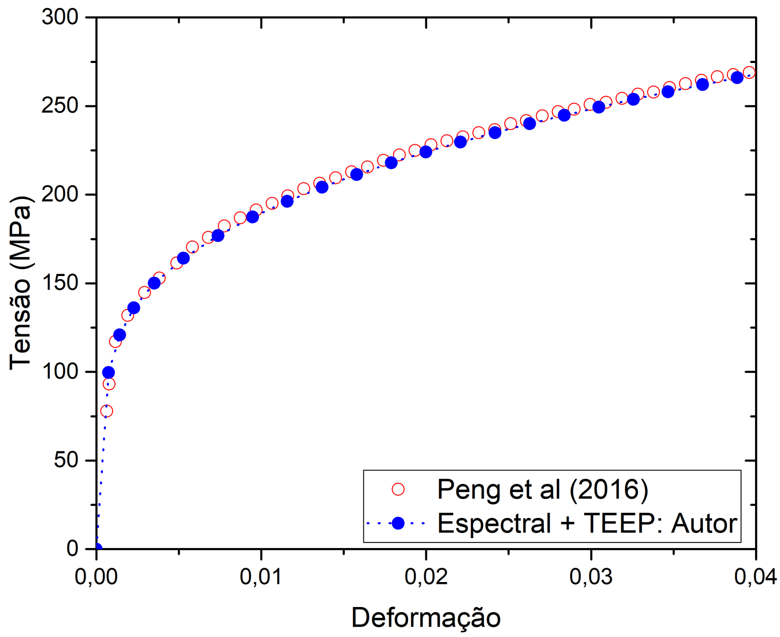


Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Para os resultados apresentados na Figura 29, utiliza-se o método de isotropização espectral, conforme Equação 3.33, função de endurecimento, apresentada na Equação 3.20 e o

TEEP, apresentado na Equação 4.15. Os resultados foram comparados com os resultados obtidos por Peng et al. (2016), que em seu trabalho, para representação do endurecimento do material, foi usado o módulo plástico instantâneo $h^{mp} = \frac{\dot{\sigma}}{\dot{p}}$. O compósito estudado apresenta uma fração volumétrica das inclusões esféricas de 30%. Suas propriedades são apresentadas na Tabela 3.

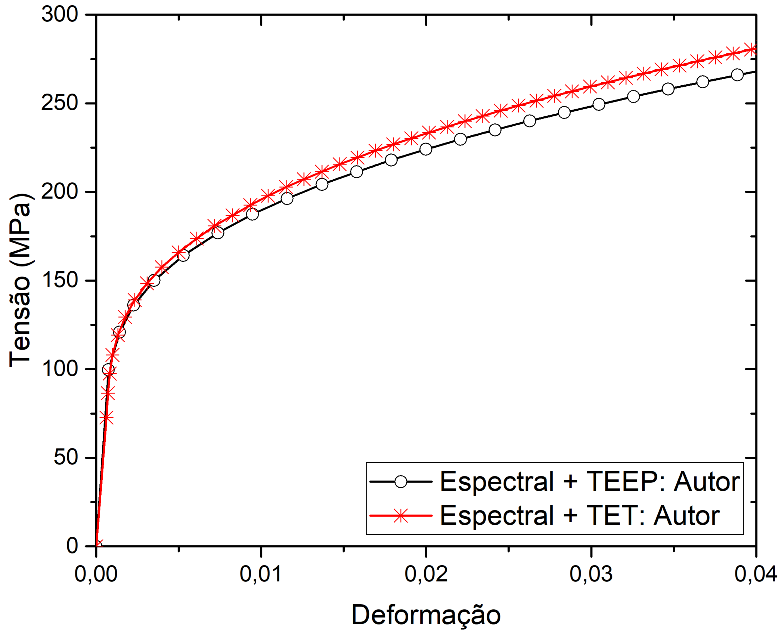
Figura 29 – Comportamento elastoplástico do compósito usando o TEEP



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

A Figura 30, ainda usando as propriedades apresentadas na Tabela 3 e fração volumétrica das inclusões esféricas de 30%, apresenta a comparação entre os resultados obtidos por meio dos métodos que usam as formas do tensor de Eshelby, seja o TET ou o TEEP. O método de isotropização usado foi o espectral.

Figura 30 – Comparativo entre TET com o TEEP com isotropização espectral



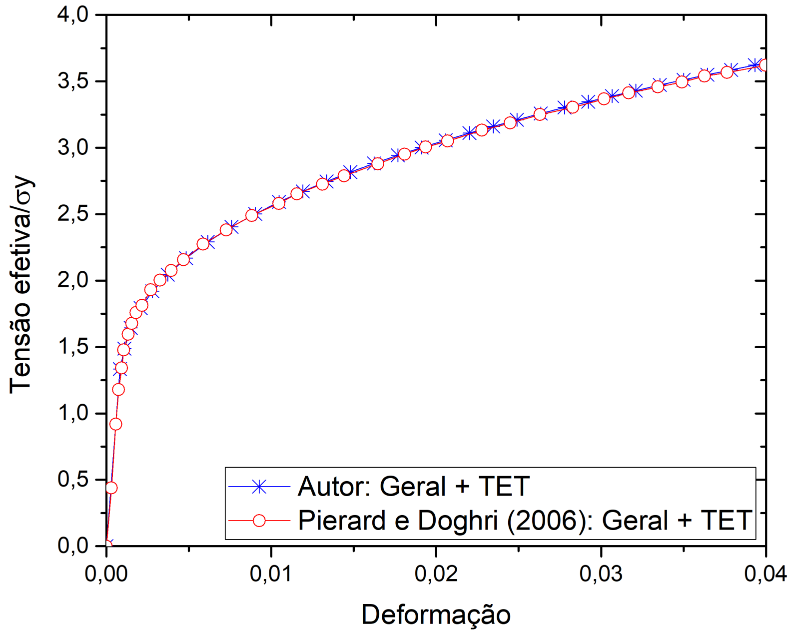
Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

4.7.2 Resultados elastoplásticos obtidos por meio do método de isotropização geral variando o uso do tensor de Eshelby (inclusões elásticas e matriz com endurecimento isotrópico).

O método de isotropização geral foi aplicado para calcular o TET, onde, nessa metodologia, os demais cálculos foram obtidos via operadores anisotrópicos apresentados pela Equação 3.18. As propriedades da matriz elastoplástica e das inclusões encontram-se na Tabela 3. Vale salientar que o método de isotropização geral deve ser usado apenas para o cálculo do tensor de Eshelby, seja tangente ou elastoplástico, cujos demais cálculos devem ser efetuados utilizando o operador anisotrópico (PIERARD; DOGHRI, 2006).

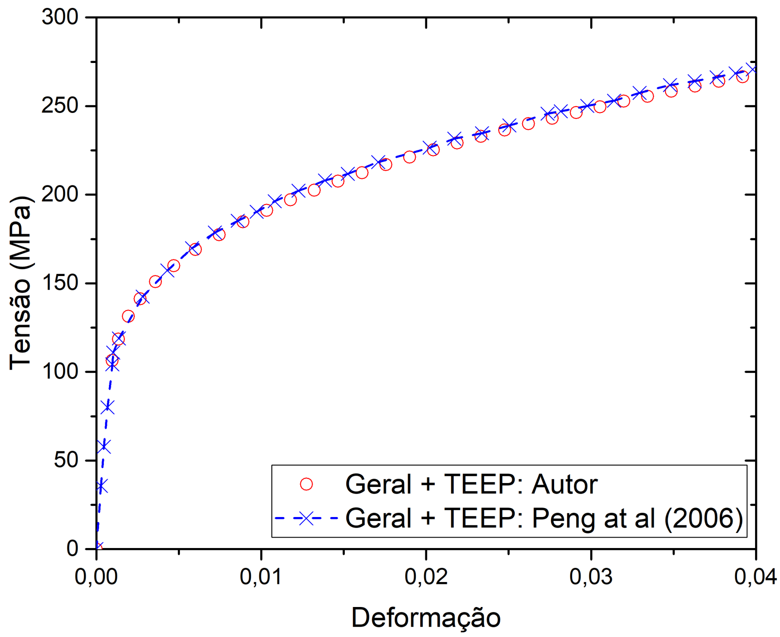
Na Figura 31, seguem os resultados obtidos por meio do método de isotropização geral (Equação 3.35), em conjunto com o TET (Apêndice D) e a derivada da função de endurecimento apresentada na Equação 3.20. Os resultados obtidos são confrontados com os resultados obtidos por Pierard e Doghri (2006), que utiliza a mesma metodologia deste trabalho. As propriedades dos constituintes do compósito são apresentadas na Tabela 3, as inclusões são esféricas e fração volumétrica de 30%. A Figura 31 mostra uma perfeita concordância entre os resultados confrontados e por meio da figura Figura 32, percebe-se uma pequena diferença com os resultados obtidos por Peng et al. (2016), onde usou o módulo plástico instantâneo calculado por $h^{mp} = \frac{\dot{\sigma}}{\dot{p}}$.

Figura 31 – Método de isotropização geral usando o TET (inclusões esféricas)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

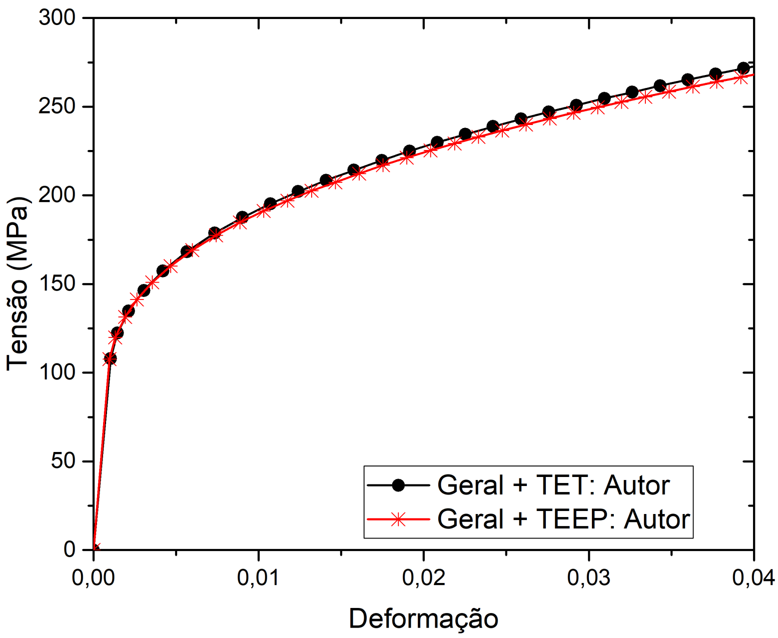
Figura 32 – Método de isotropização geral usando o TEEP (inclusões esféricas)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

A Figura 33, ainda usando as propriedades apresentadas na Tabela 3 e fração volumétrica das inclusões esféricas de 30%, apresenta a comparação entre os resultados obtidos por meio dos métodos que usam as formas do tensor de Eshelby, seja o TET ou o TEEP. O método de isotropização usado foi o geral.

Figura 33 – Comparativo entre TET com o TEEP com isotropização geral



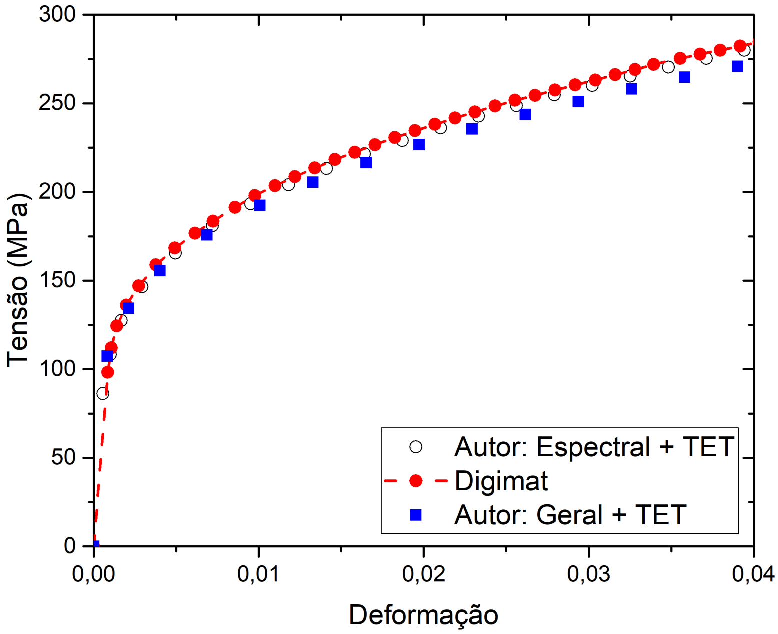
Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Analisando a Figura 30 e Figura 33, o método de isotropização geral se apresentou menos sensível do que o método de isotropização espectral no que se refere a variação do TET ou TEEP. Isso quer dizer que os resultados obtidos por meio do método de isotropização geral usando o TET ou TEEP são mais próximos entre si do que os resultados obtidos por meio do método de isotropização espectral. Nos dois casos mostrados na Figura 30 e Figura 33, o estudo do comportamento elastoplástico usando TEEP se apresentou menos rígido.

4.7.3 Comparação entre os métodos de isotropização (inclusões elásticas e matriz com endurecimento isotrópico)

Na Figura 34, observa-se a comparação entre os métodos de isotropização usando o TET. Na Figura 35, os métodos de isotropização são comparados usando o TEEP. As propriedades dos constituintes são apresentadas na Tabela 3, as inclusões são esféricas e a fração volumétrica de 30%.

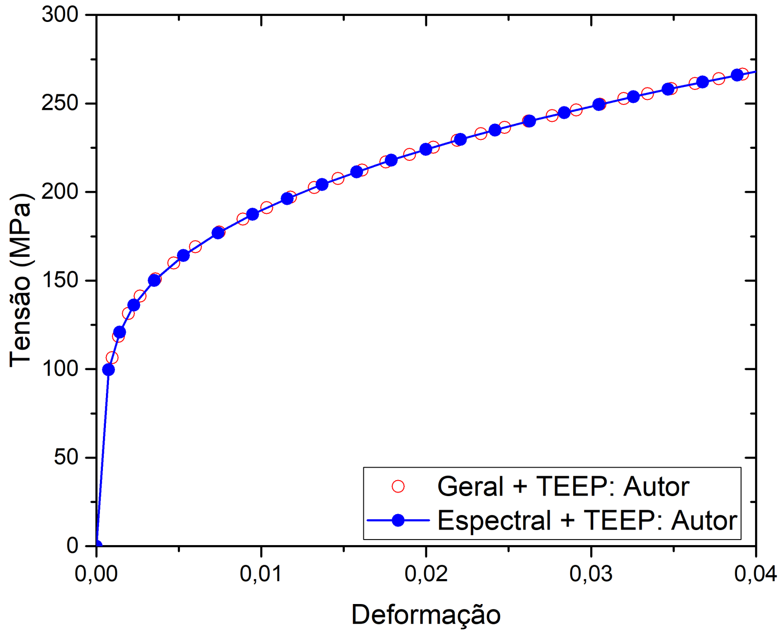
Figura 34 – Comparação entre métodos de isotropização usando o TET (inclusões esféricas)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Observando os resultados apresentados na Figura 34, ao usar o TET, em conjunto com o método de isotropização geral, obteve-se resultados menos rígidos do que o método de isotropização espectral usando TET.

Figura 35 – Comparação entre métodos de isotropização usando o TEEP (inclusões esféricas)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Conforme observado na Figura 35, o método de isotropização geral e espectral acoplados com o TEEP fornecem, basicamente, o mesmo resultado.

4.7.4 Variação das condições de carregamento: compósito contendo inclusões elásticas alongadas ou esféricas e matriz com endurecimento isotrópico

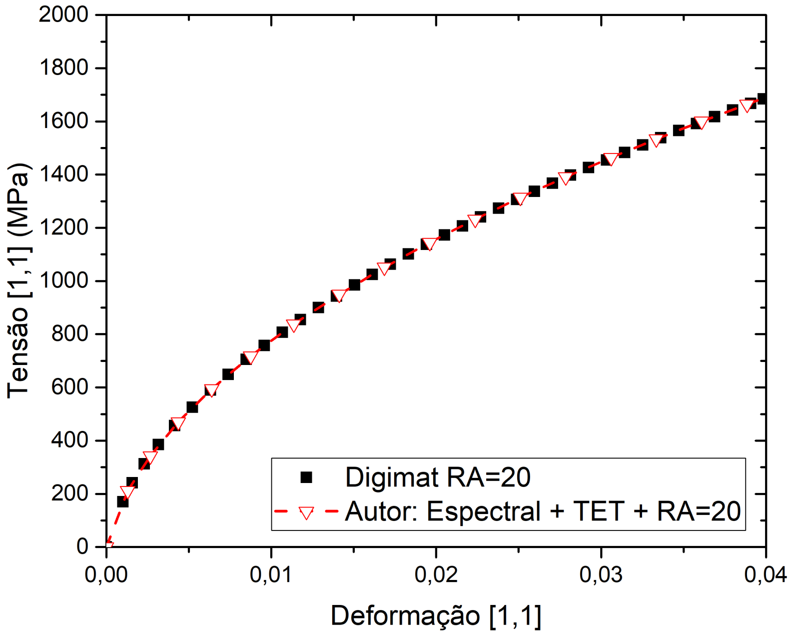
Na Figura 36 e na Figura 37 é possível verificar os resultados de um compósito constituído conforme apresentado na Tabela 3. Esse compósito apresenta inclusões alinhadas com RA igual a 20, fração volumétrica de 30% e condição de contorno em tensão aplicado no sentido longitudinal e no sentido transversal a fibra, respectivamente. A matriz de flexibilidade do compósito transversalmente isotrópico é apresentada na Equação 4.16 (DVORAK, 2012). O método de isotropização foi o espectral (Equação 3.33) acoplado com o TET (Apêndice D).

$$\bar{\mathbb{D}} = \begin{bmatrix} 1/\bar{E}_{11} & -\bar{\nu}_{21}/\bar{E}_{22} & -\bar{\nu}_{21}/\bar{E}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{\nu}_{12}/\bar{E}_{11} & 1/\bar{E}_{22} & -\bar{\nu}_{32}/\bar{E}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{\nu}_{12}/\bar{E}_{11} & -\bar{\nu}_{23}/\bar{E}_{22} & 1/\bar{E}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\bar{G}_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\bar{G}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\bar{G}_{12} \end{bmatrix}, \tag{4.16}$$

em que $\frac{\bar{\nu}_{21}}{\bar{E}_{22}} = \frac{\bar{\nu}_{12}}{\bar{E}_{11}}$ e $\bar{\nu}_{23} = \bar{\nu}_{32}$, onde $\bar{G}_{23}$ depende do coeficiente de Poisson $\bar{\nu}_{23}$:

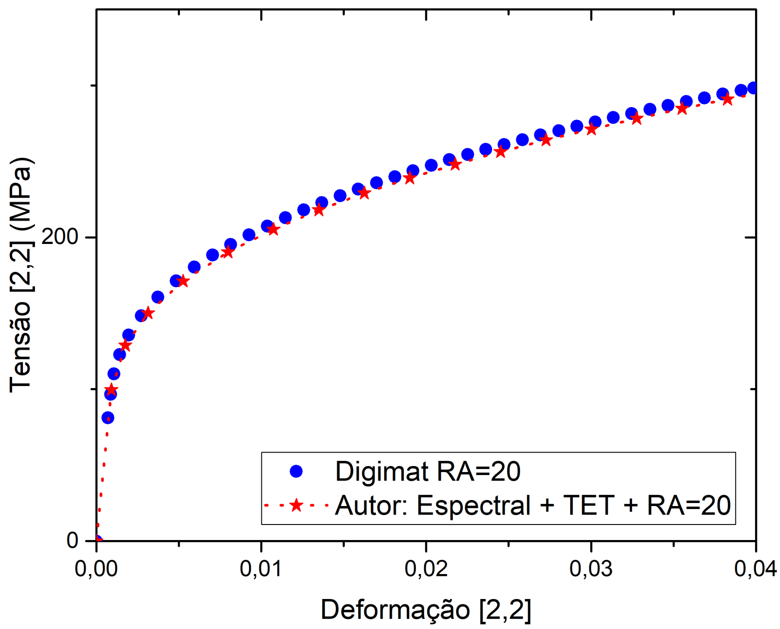
$$\bar{G}_{23} = \frac{\bar{E}_{22}}{2(1+\bar{\nu}_{23})}. \tag{4.17}$$

Figura 36 – Comportamento elastoplásticos de compósitos com fibras alinhadas na direção [1,1] (RA=20)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

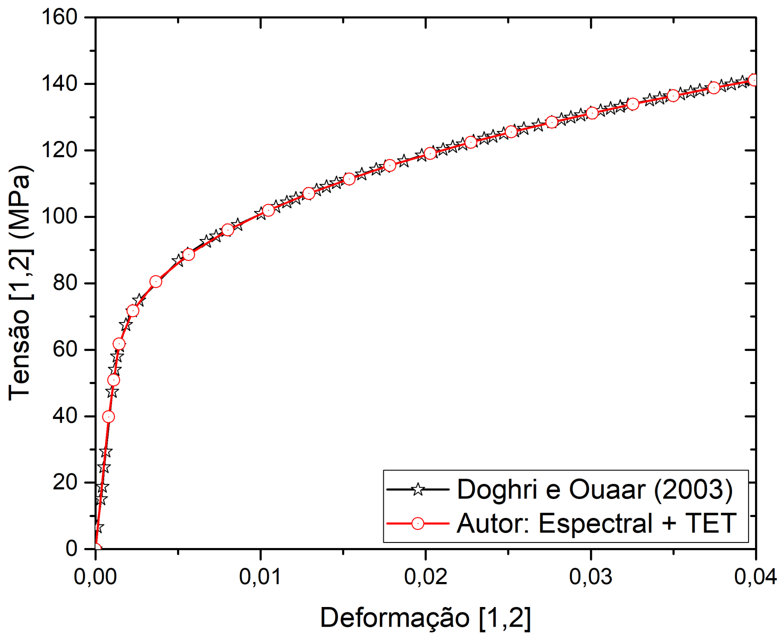
Figura 37 – Comportamento elastoplásticos de compósitos com fibras alinhadas na direção [2,2] (RA=20)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

A Figura 38 mostra o comportamento elastoplástico do compósito apresentado na Tabela 3, fração volumétrica de 30% e inclusões esféricas. Esse compósito é submetido a condição de contorno de cisalhamento puro. Os resultados obtidos nesse trabalho são comparados com os resultados obtidos no trabalho de Doghri e Ouaar (2003).

Figura 38 – Comportamento elastoplásticos de compósitos sob cisalhamento (inclusões esféricas)

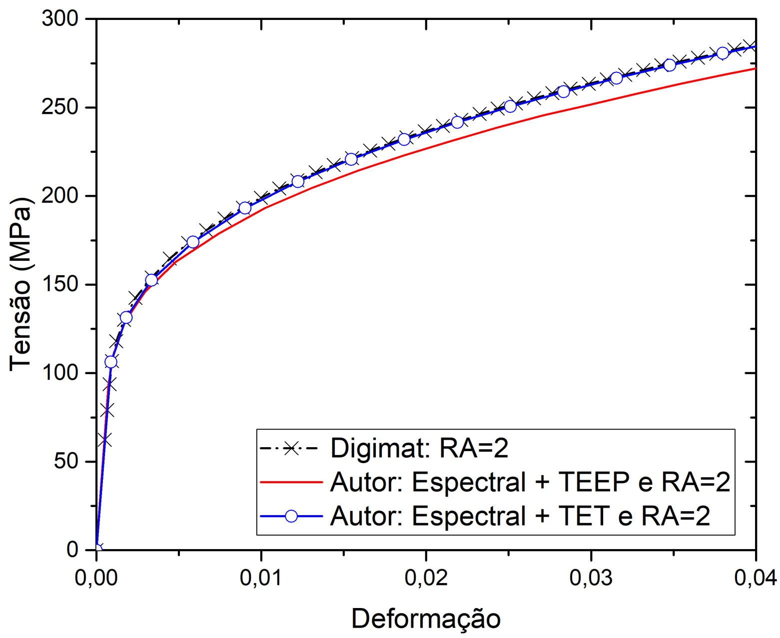


Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

4.7.5 Comportamento elastoplástico de compósitos com fibras sólidas curtas e desalinhadas e matriz com endurecimento isotrópico

O comportamento elastoplástico de um compósito constituído por fibras sólidas e inseridas em uma matriz com endurecimento isotrópico é mostrado na Figura 39. Os resultados apresentados são obtidos por meio *software* Digimat e comparados com os resultados obtidos neste trabalho. O comportamento plástico é avaliado via TEEP (Equação 4.15) ou TET (Apêndice D) e método de isotropização espectral (Equação 3.33). Esse compósito apresenta fibras curtas desalinhadas, razão de aspecto igual a 2 e 30% de fração volumétrica. As propriedades dos constituintes são apresentadas na Tabela 3. Observa-se na Figura 39 que os resultados, usando TEEP, se apresentaram menos rígidos.

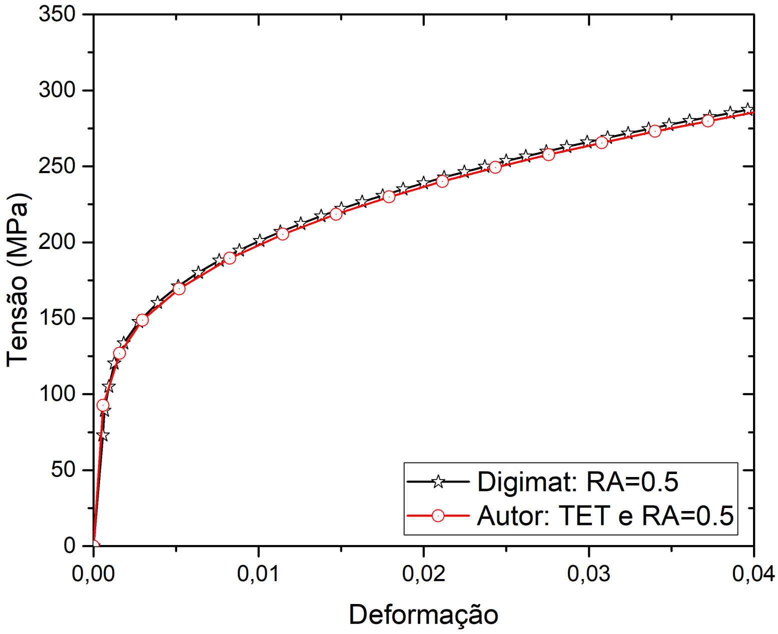
Figura 39 – Comportamento elastoplásticos de compósitos com fibras curtas desalinhadas (RA=2)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

A Figura 40 apresenta os resultados de um compósito constituído com as propriedades apresentadas na Tabela 3, fração volumétrica de 30% e fibras curtas com RA igual a 0,5. Os resultados obtidos neste trabalho, usando o método de isotropização espectral e TET, são comparados com os resultados obtidos por meio do *software* Digimat.

Figura 40 – Comportamento elastoplásticos de compósitos com fibras curtas desalinhadas (RA=0.5)



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

4.8 Exemplos do comportamento elastoplástico de uma matriz de alumínio porosa com endurecimento isotrópico

Seguindo o embasamento teórico visto neste capítulo e nos capítulos anteriores, a seguir, serão apresentados exemplos que estudam o comportamento elastoplástico de uma matriz metálica dúctil porosa e endurecimento isotrópico. Os resultados obtidos neste trabalho serão comparados com resultados obtidos por meio do *software* Digimat e literatura.

4.8.1 Resultados obtidos por meio do método de isotropização variando o uso do tensor de Eshelby (matriz porosa com endurecimento isotrópico)

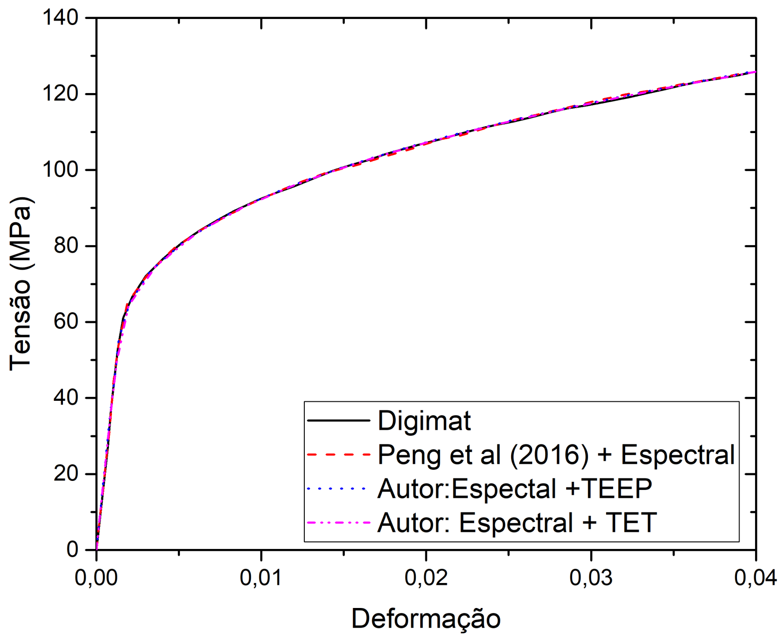
A seguir, avalia-se o comportamento de uma matriz dúctil porosa, endurecimento isotrópico, fração volumétrica de 30% e geometria esférica do poro. As propriedades da matriz elastoplástica são mostradas na Tabela 4. Na Figura 41 observa-se os resultados obtidos por meio da isotropização espectral e método de aquisição do tensor de Eshelby via TET e TEEP. Na Figura 42 observa-se os resultados obtidos via isotropização geral e método de aquisição do tensor de Eshelby através do TET e TEEP e *software* Digimat. Verifica-se que os resultados fornecem, independentemente do método de isotropização ou aquisição do tensor de Eshelby, praticamente os mesmos resultados.

Tabela 4 – Propriedades da matriz de alumínio porosa que apresenta endurecimento isotrópico

Parâmetros do material	**Unidade**	**Valor**
Matriz		
Módulo de Young	(GPa)	75
Coeficiente de Poisson		0,3
Tensão de escoamento	(MPa)	75
Módulo de endurecimento	(MPa)	416
Expoente de endurecimento		0,3895

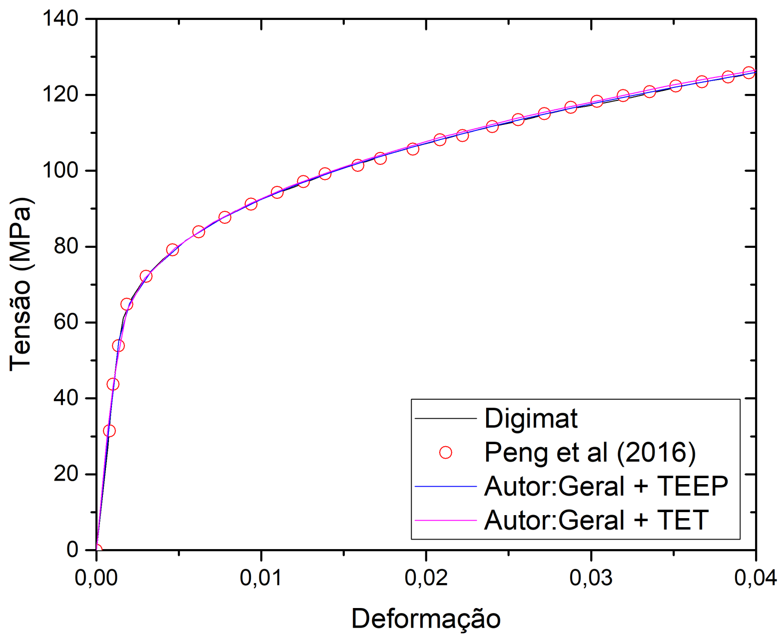
Fonte: Peng et al. (2016)

Figura 41 – Avaliação do comportamento elastoplásticos de uma matriz metálica porosa (inclusões esféricas) usando TEEP, TET e isotropização espectral



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Figura 42 – Avaliação do comportamento elastoplásticos de uma matriz metálica porosa (inclusões esféricas) usando TEEP, TET e isotropização geral

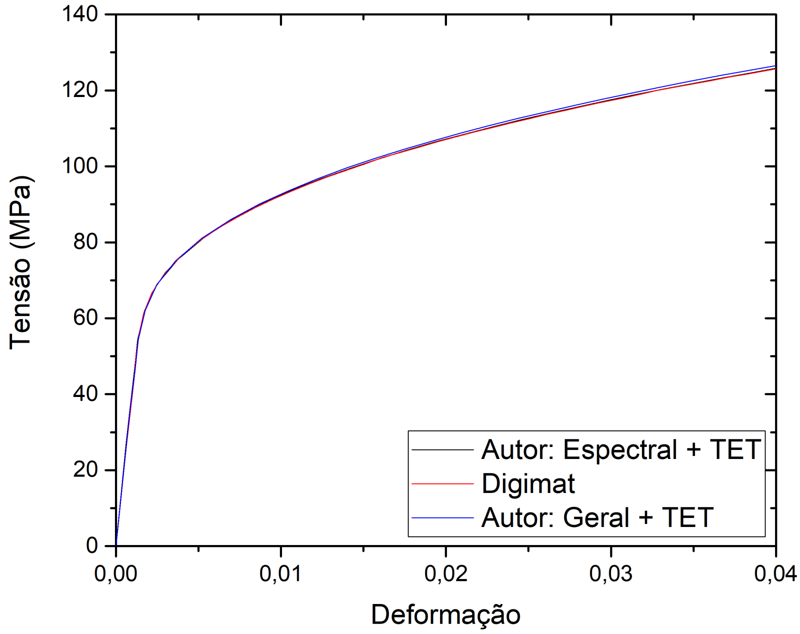


Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

4.8.2 Comparação entre os métodos de isotropização (poros e matriz com endurecimento isotrópico)

Na Figura 43, observa-se a comparação entre os métodos de isotropização da matriz de alumínio com 30% de poros esféricos e o *software* Digimat. O tensor de Eshelby utilizado foi obtido através do TET. As propriedades da matriz elastoplástica são apresentados na Tabela 4.

Figura 43 – Comparação entre métodos de isotopização de uma matriz metálica porosa (inclusões esféricas)

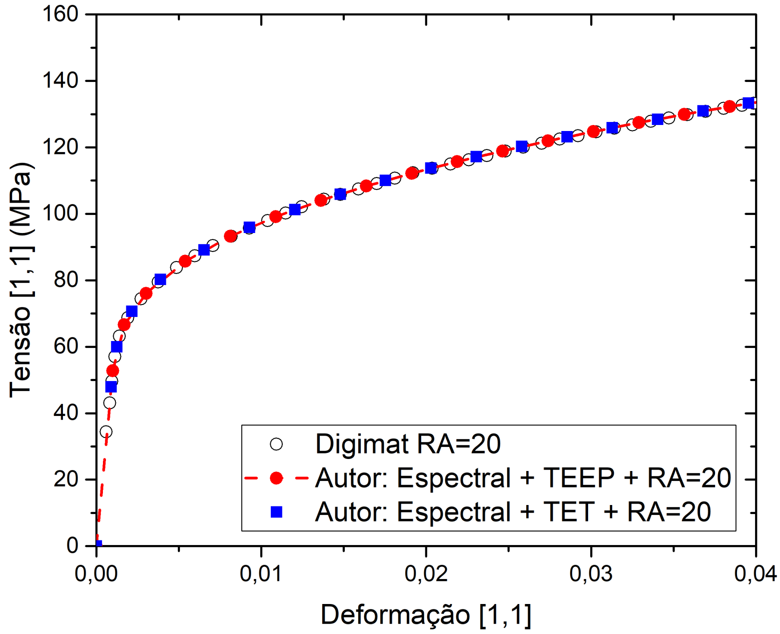


Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

4.8.3 Variação da condição de contorno: poros alongados ou esféricos e matriz com endurecimento isotrópico

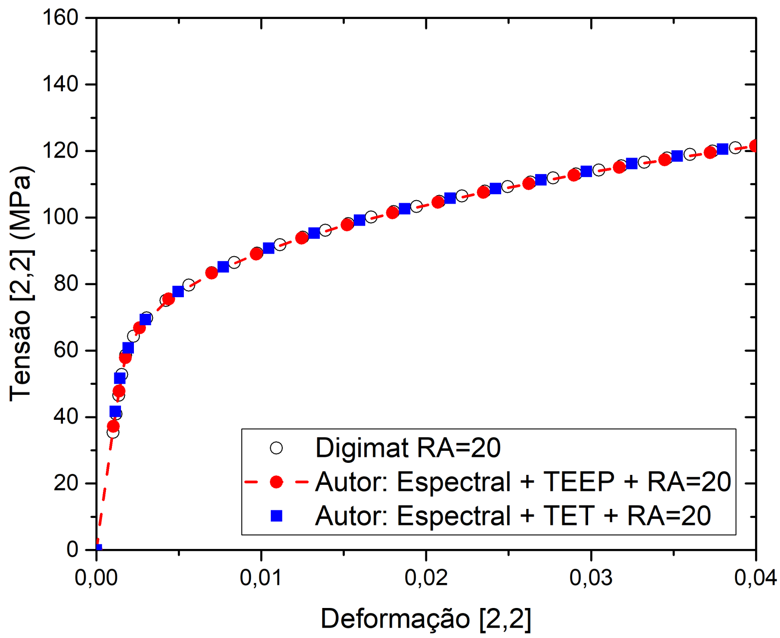
A seguir, será mostrado o comportamento elastoplástico da matriz metálica porosa cujas propriedades são apresentadas na Tabela 4. A geometria dos poros possui uma RA=20 e fração volumétrica de 30%. As condições de carregamento macroscópico impostas neste material são tensões aplicadas nos sentidos longitudinal e transversal ao poro, respectivamente. Os resultados obtidos via isotropização espectral e variação do tensor de Eshelby (TET ou TEEP) são comparados com os resultados obtidos por meio do *software* Digimat, conforme pode ser visto na Figura 44 e Figura 45.

Figura 44 – Comportamento elastoplásticos de uma matriz metálica porosa (RA=20) usando TEEP, TET e isotropização espectral. Direção [1,1]



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Figura 45 – Comportamento elastoplásticos de uma matriz metálica porosa (RA=20) usando TEEP, TET e isotropização espectral. Direção [2,2]

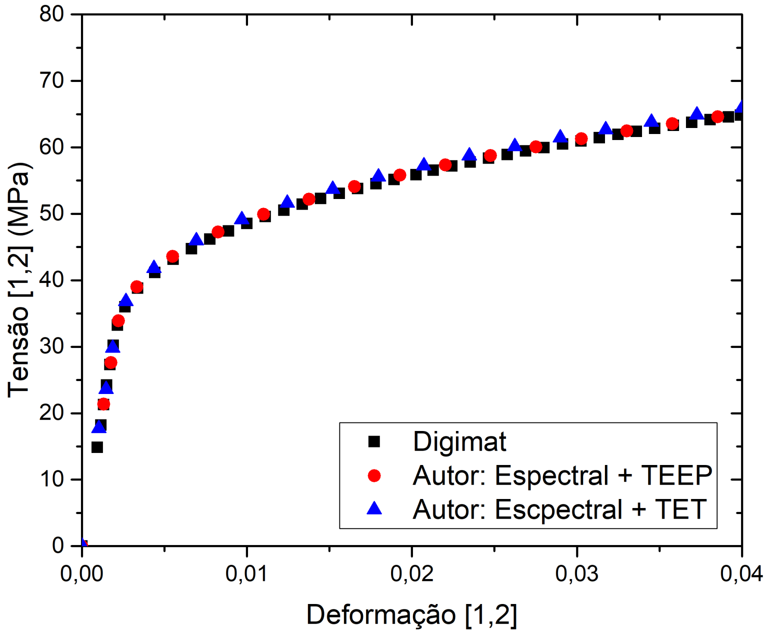


Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Conforme se observa na Figura 44 e Figura 45, onde a tensão é aplicada longitudinal ou transversalmente ao poro, independente do tensor de Eshelby, seja com o TET ou com o TEEP, o método de isotropização espectral apresentou praticamente os mesmos resultados comparados com os resultados obtidos por meio do *software* Digimat.

Observa-se na Figura 46 a matriz de alumínio com 30% de poros esféricos submetida a cisalhamento puro, onde suas propriedades são apresentadas na Tabela 4. A análise foi efetuada via método de isotropização espectral, TET e TEEP.

Figura 46 – Comportamento elastoplásticos de uma matriz metálica porosa (poros esféricos) submetida a cisalhamento puro



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

4.9 Exemplos do comportamento elastoplástico de compósitos que apresentam inclusões elásticas com endurecimento cinemático

4.9.1 Resultados elastoplásticos obtidos por meio do método de isotropização espectral e geral, variando o uso do tensor de Eshelby (matriz porosa com endurecimento cinemático).

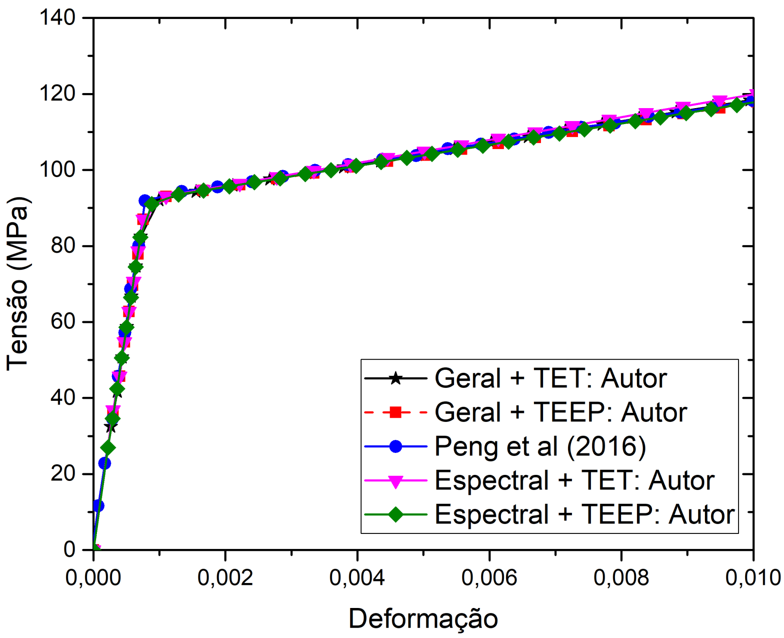
Utilizando o método de isotropização geral e espectral, os resultados do comportamento elastoplástico do compósito constituído pelas propriedades apresentadas na Tabela 5, inclusões esféricas randomicamente distribuídas e 30% de fração volumétrica são avaliados. Esse compósito apresenta endurecimento cinemático linear. Os resultados obtidos nesse trabalho foram comparados com os resultados obtidos no trabalho de Peng et al. (2016), conforme observado na Figura 47.

Tabela 5 – Propriedades do compósito com matriz que apresenta endurecimento cinemático linear

Parâmetros do material	**Unidade**	**Valor**
Matriz		
Módulo de Young	(GPa)	75
Coeficiente de Poisson		0,3
Tensão de escoamento	(MPa)	75
Módulo de endurecimento	(MPa)	1000
Inclusão		
Módulo de Young	(GPa)	400
Poisson		0,2

Fonte: Peng et al. (2016)

Figura 47 – Comportamento elastoplásticos de uma matriz contendo inclusões esféricas e endurecimento cinemático linear: comparação entre os métodos de isotropização geral e espectral usando TET e TEEP

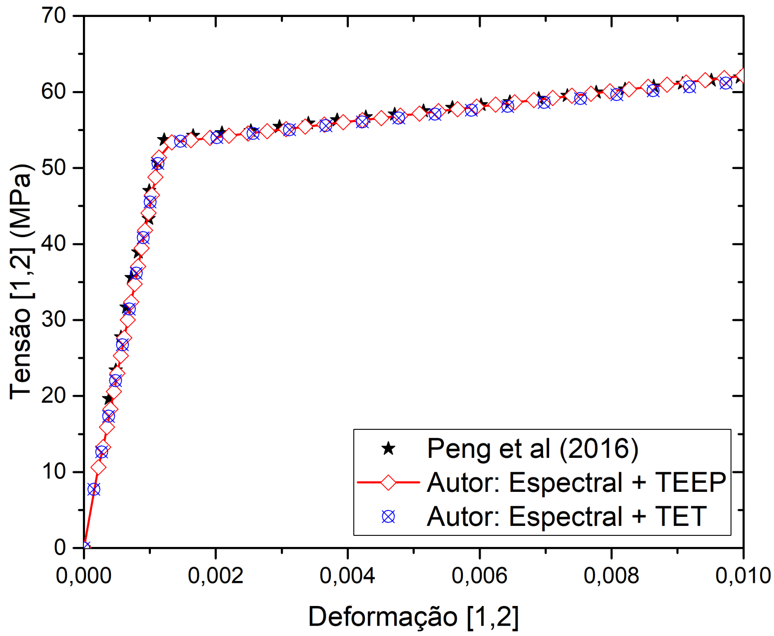


Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

4.9.2 Compósito contendo inclusões elásticas esféricas e matriz com endurecimento cinemático submetido a cisalhamento puro

Submetido à deformação por cisalhamento puro, a Figura 48 apresenta os resultados do compósito constituído por uma matriz que possui endurecimento cinemático linear e esferas sólidas randomicamente distribuídas. Os valores dos constituintes são apresentados na Tabela 5. A fração volumétrica das inclusões esféricas é de 30%. O método de isotropização usado foi o espectral em conjunto com o TET ou TEEP. Os resultados obtidos são comparados com os resultados obtidos por Peng et al. (2016).

Figura 48 – Comportamento elastoplástico de um compósito contendo inclusões esféricas, matriz com endurecimento cinemático linear sob cisalhamento puro



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

4.10 Exemplo do comportamento elastoplástico de uma matriz de alumínio porosa com endurecimento cinemático

A seguir, observa-se os resultados do comportamento elastoplástico de uma matriz porosa que apresenta endurecimento cinemático obtidos por meio do método de isotropização espectral e geral, variando o uso do tensor de Eshelby.

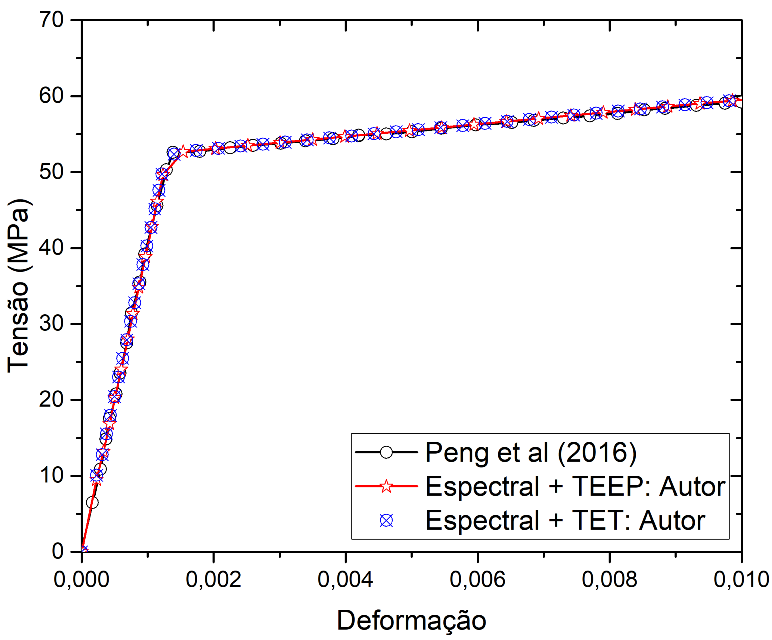
A Figura 49 e a Figura 50 mostram o comportamento de uma matriz porosa que apresenta endurecimento cinemático, fração volumétrica de 30% e geometria da inclusão esférica. As propriedades da matriz elastoplástica são apresentadas na Tabela 6. Para obtenção dos resultados, foi usado o método de isotropização espectral ou geral. No regime plástico, a avaliação do tensor de Eshelby foi por TET ou TEEP. Os resultados obtidos neste trabalho foram comparados com os resultados obtidos por Peng et al. (2016). Através dos resultados apresentados na Figura 49 e na Figura 50, observa-se convergência entre os três métodos usados.

Tabela 6 – Propriedades da matriz de alumínio porosa que apresenta endurecimento cinemático

Parâmetros do material	**Unidade**	**Valor**
Matriz		
Módulo de Young	(GPa)	75
Coeficiente de Poisson		0,3
Tensão de escoamento	(MPa)	75
Módulo de endurecimento	(MPa)	1000

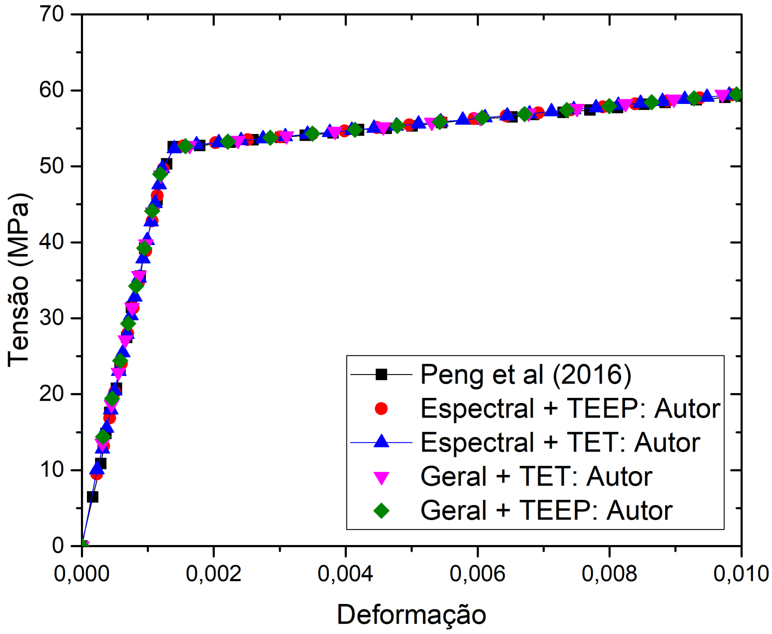
Fonte: Peng et al. (2016)

Figura 49 – Comportamento elastoplástico de uma matriz contendo poros esféricos e endurecimento cinemático linear



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Figura 50 – Comparação entre métodos de isotropização: Comportamento elastoplástico de uma matriz contendo poros esféricos e endurecimento cinemático linear



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

4.11 Influência da geometria e distribuição de orientação das inclusões no método de isotropização geral

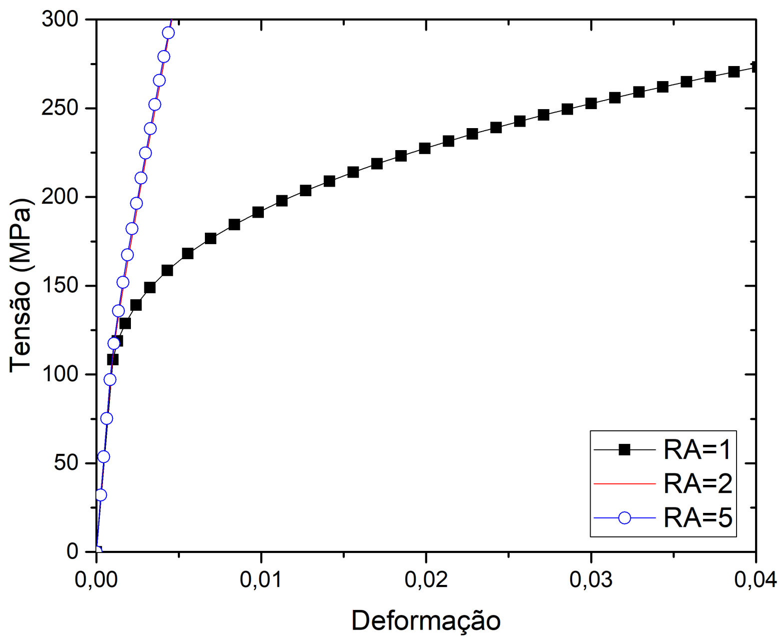
Sabe-se que a microestrutura dos materiais porosos ou compósitos reforçados com fibras, afeta significativamente as suas propriedades mecânicas efetivas. Duas variáveis locais da microestrutura usadas para prever as propriedades efetivas são: a fração volumétrica e a distribuição de orientação da inclusão. A distribuição de orientação da inclusão, conforme visto no seção 2.8, defini-se por uma FDO. Essa FDO tem a finalidade de transformar um tensor constitutivo global originalmente transversal isotrópico em um tensor constitutivo global isotrópico.

Conforme observado na subseção 4.7.2 e nos Apêndices deste trabalho, o método de isotropização geral aplicado para a obtenção do tensor constitutivo isotropizado da matriz elastoplástica é usado apenas para a avaliação do tensor de Eshelby, onde os demais cálculos foram efetuados usando o tensor constitutivo tangente, anisotrópico. Essa observação também pode ser vista em Pierard e Doghri (2006). Os estudos efetuados até o momento, considerando o método de isotropização geral, foram aplicados em materiais que apresentaram inclusões esféricas ou fibras alinhadas. Para entender o comportamento elastoplástico de materiais que apresentam inclusões (sólidas ou poros) desalinhadas, esse método de isotropização será aplicado conforme descrito na subseção 4.7.2, e assim, observar a sua eficácia. A seguir, os exemplos a serem analisados:

4.11.1 Fibras sólidas desalinhadas

O material a ser avaliado apresenta as propriedades de seus constituintes conforme a Tabela 3. As fibras sólidas desalinhadas possuem RA=1, RA=2 ou RA=5 e fração volumétrica de 30%. O método de isotropização geral será aplicado conforme descrito na subseção 4.7.2, ou seja, o TET foi calculado com a parte isotrópica do tensor constitutivo da matriz e os demais cálculos efetuados com os tensores anisotrópicos. Seguindo a metodologia apresentada na subseção 4.7.2, os resultados apresentados na Figura 51 mostram uma limitação do método de isotropização geral para fibras rígidas randomicamente distribuídas e desalinhadas no espaço.

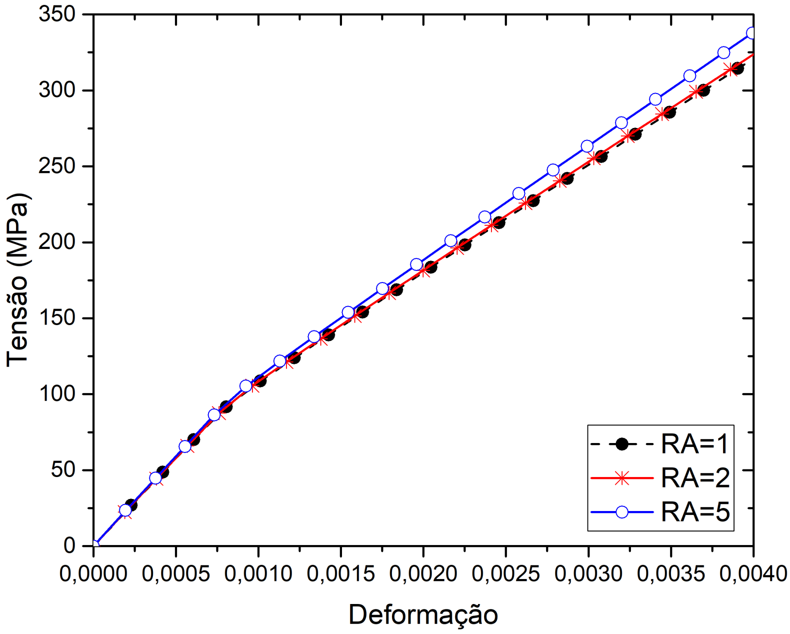
Figura 51 – Método de isotropização geral aplicado para fibras sólidas desalinhadas conforme subseção 4.7.2



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

O material a ser avaliado apresenta as propriedades de seus constituintes segundo a Tabela 3. As fibras sólidas desalinhadas possuem RA=1, RA=2 ou RA=5 e fração volumétrica de 30%. O método de isotropização geral será aplicado utilizando todos os tensores isotrópicos em conjunto com TET. Os resultados são apresentados na Figura 52.

Figura 52 – Método de isotropização geral aplicado para fibras desalinhadas usando todos os tensores isotrópicos



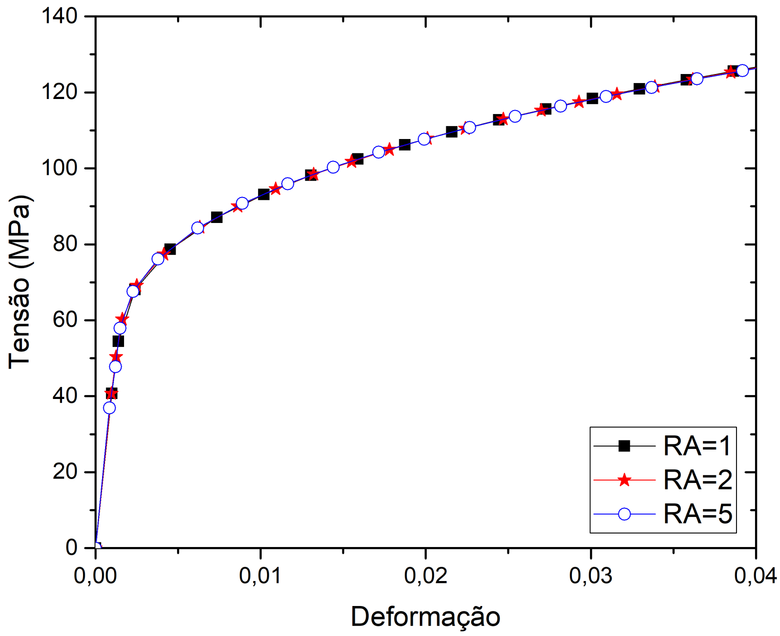
Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

4.11.2 Poros desalinhados

Nesta subseção, o método de isotropização geral será avaliado em situações em que material apresenta poros esféricos ou elipsoidais randomicamente distribuídos.

O material a ser avaliado apresenta as propriedades de seus constituintes consoante a Tabela 4. Os poros desalinhados possuem RA=1, RA=2 ou RA=5 e fração volumétrica de 30%. O método de isotropização geral será aplicado conforme descrito na subseção 4.7.2, ou seja, o TET foi calculado com a parte isotrópica do tensor constitutivo da matriz e os demais cálculos efetuados com os tensores anisotrópicos. Para considerar o desalinhamento das inclusões, após o escoamento, foi usada a metodologia representada pela Equação 2.96. Os resultados são apresentados na Figura 53.

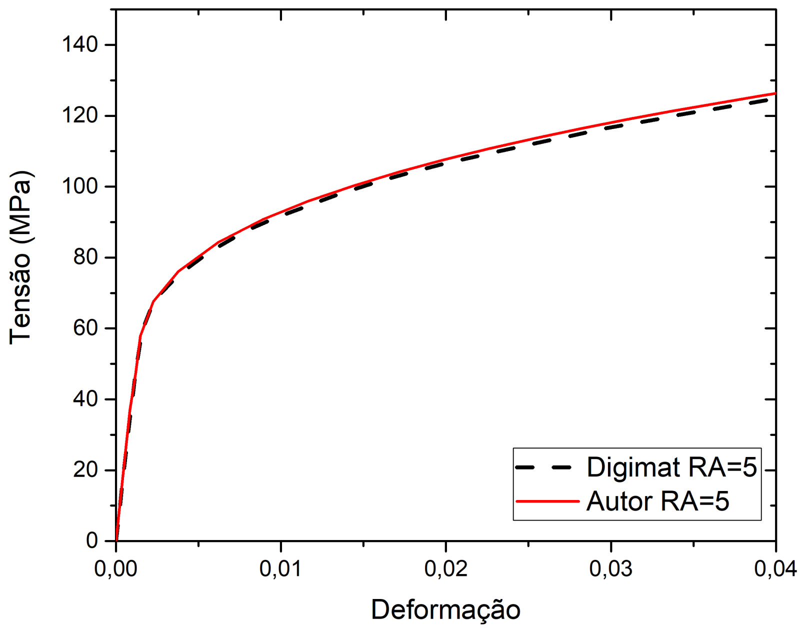
Figura 53 – Método de isotropização geral aplicado para poros desalinhadas conforme subseção 4.7.2



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Conforme pode ser observado na Figura 54, os resultados obtidos na Figura 53, em que a matriz metálica apresenta poros randomicamente distribuídos, desalinhados, fração volumétrica é de 30% e RA=5, são comparados com os resultados obtidos através do *software* Digimat.

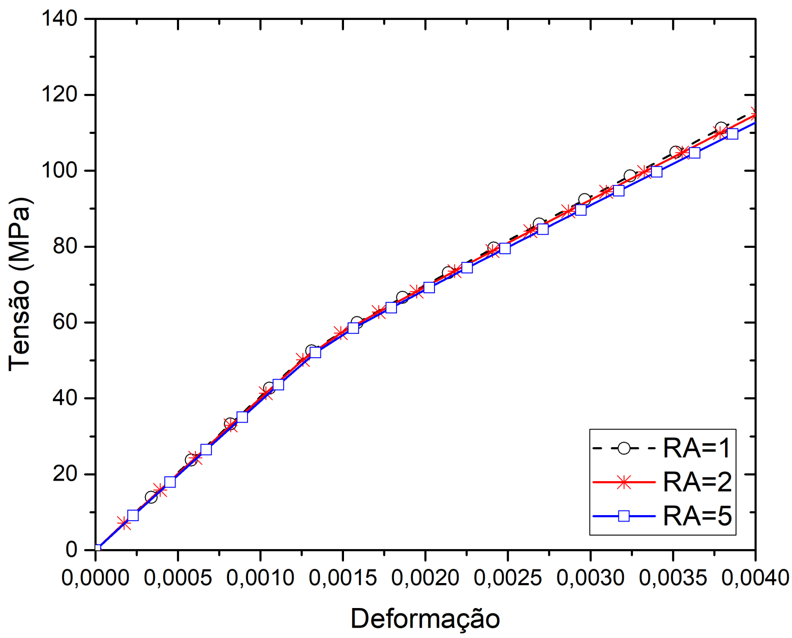
Figura 54 – Comparação entre o método de isotropização geral aplicado para poros desalinhadas conforme subseção 4.7.2 e o *software* Digimat



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

O material a ser avaliado apresenta as propriedades de seus constituintes conforme a Tabela 4. Os poros desalinhados possuem RA=1, RA=2 ou RA=5 e fração volumétrica de 30%. O método de isotropização geral será aplicado utilizando todos os tensores isotrópicos em conjunto com TET. Os resultados são apresentados na Figura 55.

Figura 55 – Método de isotropização geral aplicado para poros desalinhadas usando todos os tensores isotrópicos



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Para o material que apresenta uma matriz dúctil elastoplástica e inclusões elipsoidais, os resultados apresentados na Figura 51, Figura 52 e Figura 55 mostraram que o método de isotropização geral forneceu resultados bastante rígidos, mostrando-se limitado para esses materiais. Portanto, para o caso cujos resultados são apresentados na Figura 53, o método se apresentou eficaz. Em situações em que a matriz dúctil possui inclusões esféricas ou poros elipsoidais randomicamente distribuídos e desalinhados, o método de isotropização geral se mostrou bastante preciso, desde que o TET seja calculado com a parte isotrópica do tensor constitutivo da matriz, e, os demais cálculos, efetuados por meio do tensor constitutivo anisotrópico da matriz.

4.12 Conclusões do Capítulo 4

Usando o método de homogeneização de Mori-Tanaka e o método de linearização incremental, foram apresentados neste capítulo, as possibilidades existentes para aproximações isotrópicas dos operadores anisotrópicos tangentes, como também, os tensores de Eshelby tangente (TET) e o tensor de Eshelby para o meio elastoplástico (TEEP). Foram consideradas inclusões esféricas, inclusões curtas, longas, alinhadas e desalinhadas. Considerando as condições de carregamento macroscópico, foram avaliadas inclusões longas e curtas, submetidas a tensões monotônicas axiais, transversais e cisalhamento puro, tanto para materiais heterogêneos que apresentam inclusões elásticas como para poros. Para simplificar as análises, foi assumido que a matriz do material heterogêneo apresenta endurecimento isotrópico ou cinemático linear. Por se tratar de matriz dúctil, o critério de escoamento usado foi proposto por von Mises.

Os resultados obtidos via aproximações isotrópicas se apresentam fisicamente aceitáveis ao serem comparados com métodos numéricos ou ensaios experimentais. Os resultados mostraram que, combinado com um procedimento de isotropização adequado e o método para o cálculo do tensor de Eshelby no regime plástico, fornecem previsões eficientes de respostas macroscópicas de materiais heterogêneos não lineares. Além disso, é importante considerar que a precisão dos resultados pode ser influenciada pelo tipo de inclusão (elástica ou porosa) e sua geometria.

Dentre os materiais que apresentam fibras sólidas com RA$>$ 1, o uso do TET apresentou melhores resultados comparados com aqueles obtidos por meio do TEEP por apresentar comportamento bem menos rígidos. Conforme pode ser visto na Figura 39, observou-se resultados menos rígidos usando o TEEP em relação ao método utilizando o TET, podendo assim mostrar limitações para fibras sólidas com RA se distanciando cada vez mais de 1.

Para o caso de materiais porosos, onde o tensor de rigidez da inclusão é nulo, tanto o TET quanto o TEEP apresentaram resultados similares e satisfatórios ao serem comparados com predições encontradas na literatura.

Verifica-se na seção 4.11 que o método de isotropização geral forneceu resultados bastante rígidos em situações envolvendo inclusões sólidas, de formato elipsoidal, inseridas em uma matriz elastoplástica. Na situação em que a inclusão apresenta uma geometria esférica, esse método de isotropização se mostrou bastante eficaz, desde que o TET seja calculado com a parte isotrópica do tensor constitutivo da matriz e os demais cálculos efetuados com os tensores constitutivos anisotrópicos da mesma.

5 ESTUDO MICROMECÂNICO DO TENSOR DE CONCENTRAÇÃO DE DEFORMAÇÃO DE MATERIAIS POROSOS EM MEIOS ELASTOPLÁSTICOS

5.1 Introdução

Os materiais porosos são amplamente utilizados na engenharia em virtude das suas características específicas que reduzem peso estrutural, isolamento térmico e absorção energia mecânica. Os materiais porosos também são utilizados em próteses, ao possuírem vantagens de promover a capacidade de se integrar ao tecido do corpo humano, durabilidade e resistência, comparado com o osso humano. Por outro lado, os materiais porosos também podem reduzir as propriedades mecânicas efetivas do material, prejudicando, por exemplo, a sua resistência ao escoamento.

Considerando as características específicas de materiais porosos, faz-se necessário conhecer suas propriedades efetivas e entender os seus comportamentos elastoplásticos sob variadas condições de carregamento macroscópico que, anteceda, a sua aplicação. Um aspecto bastante relevante e pouco comentado é o uso do tensor de concentração de deformação tangente para inclusões que apresentam rigidez igual a zero no estudo do comportamento elastoplástico, considerando a morfologia e a direção do poro. Neste capítulo, recorrendo ao tensor de Eshelby para o meio elastoplástico e o método de homogeneização de Mori-Tanaka, apresenta-se uma abordagem para o tensor de concentração de deformação para materiais que apresentam poros esféricos ou esferoidais. Os poros, randomicamente distribuídos, estão inseridos em uma matriz homogênea que apresenta comportamento elastoplástico e escoa conforme o critério de von Mises. Essa matriz elastoplástica pode possuir endurecimento isotrópico ou cinemático. As propriedades efetivas do material em cada etapa incremental são obtidas por meio do modelo micromecânico de Mori-Tanaka.

5.2 Tensor de concentração de deformação para o meio elastoplástico poroso

Considerando o problema da inclusão equivalente, caracterizado por inclusões de rigidez zero ($\mathbb{C}_i = 0$) em uma matriz sólida elástica infinita, a expressão que define o tensor de concentração de deformação, proveniente da Equação 2.63, é dada por:

$$\mathbb{A}_i^{dil} = (\mathbb{I} - \mathbb{S}^{\Omega})^{-1}. \tag{5.1}$$

Usando a Equação 5.1, pode-se obter o tensor de Eshelby para o meio elástico $\mathbb{S}^{\Omega}$ na forma

$$\mathbb{S}^{\Omega} = \mathbb{I} - (\mathbb{A}_i^{dil})^{-1}. \tag{5.2}$$

Da mesma forma, considerando o meio elastoplástico, tem-se

$$\mathbb{A}_i^{tan} = (\mathbb{I} - \mathbb{S})^{-1}. \tag{5.3}$$

Por meio da Equação 5.3, pode-se obter o tensor de Eshelby $\mathbb{S}$ para o meio elastoplástico,

$$\mathbb{S} = \mathbb{I} - (\mathbb{A}_i^{tan})^{-1}. \tag{5.4}$$

Seguindo o desenvolvimento do trabalho de Peng et al. (2016) (ver Apêndice E) via Equação 4.15 e usando a Equação 5.4 obtém-se:

$$\left[\mathbb{I} - (\mathbb{A}_i^{tan})^{-1}\right] = \left[(\mathbb{C}_m)^{-1} : \mathbb{L}_m^{iso}\right]^{-1} : \left[\mathbb{I} - (\mathbb{A}_i^{dil})^{-1}\right] : \left[(\mathbb{C}_m)^{-1} : \mathbb{L}_m^{iso}\right], \tag{5.5}$$

então,

$$(\mathbb{A}_i^{tan})^{-1} = \mathbb{I} - \left[(\mathbb{C}_m)^{-1} : \mathbb{L}_m^{iso}\right]^{-1} : \left[\mathbb{I} - (\mathbb{A}_i^{dil})^{-1}\right] : \left[(\mathbb{C}_m)^{-1} : \mathbb{L}_m^{iso}\right]. \tag{5.6}$$

O tensor de concentração de deformação da inclusão para o meio elastoplástico poroso que apresenta inclusões esféricas ou esferoidais alinhadas, tendo:

$$\mathbb{A}_i^{tan} = \left[(\mathbb{C}_m)^{-1} : \mathbb{L}_m^{iso}\right]^{-1} : \mathbb{A}_i^{dil} : \left[(\mathbb{C}_m)^{-1} : \mathbb{L}_m^{iso}\right]. \tag{5.7}$$

Para poros desalinhados, tem-se:

$$\langle \mathbb{A}_i^{tan} \rangle_{\psi} = \left[(\mathbb{C}_m)^{-1} : \mathbb{L}_m^{iso}\right]^{-1} : \langle \mathbb{A}_i^{dil} \rangle_{\psi} : \left[(\mathbb{C}_m)^{-1} : \mathbb{L}_m^{iso}\right]. \tag{5.8}$$

Aplicando o método de homogeneização proposto por (MORI; TANAKA, 1973), o tensor de concentração de deformação na matriz e inclusão para poros esféricos ou esferoidais alinhados, pode ser calculado por:

$$(\mathbb{A}_m^{MT})^{tan} = [(1-f_i)\mathbb{I} + f_i \mathbb{A}_i^{tan}]^{-1}, \quad (\mathbb{A}_i^{MT})^{tan} = \mathbb{A}_i^{tan} : [(1-f_i)\mathbb{I} + f_i \mathbb{A}_i^{tan}]^{-1}, \tag{5.9}$$

considerando o desalinhamento dos poros, os tensores de concentração de deformação (matriz e inclusão) são representados conforme a seguir:

$$\langle \mathbb{A}_m^{MT} \rangle_{\psi}^{tan} = \left[(1-f_i)\mathbb{I} + f_i \langle \mathbb{A}_i^{tan} \rangle_{\psi}\right]^{-1}, \quad \langle \mathbb{A}_i^{MT} \rangle_{\psi}^{tan} = \langle \mathbb{A}_i^{tan} \rangle_{\psi} : \left[(1-f_i)\mathbb{I} + f_i \langle \mathbb{A}_i^{tan} \rangle_{\psi}\right]^{-1}. \tag{5.10}$$

Portanto, por meio do método da inclusão equivalente de Eshelby (1957) e do tensor de Eshelby para o meio elastoplástico desenvolvido por Peng et al. (2016), pode-se obter o tensor de concentração de deformação para poros esféricos e esferoidais alinhados ou desalinhados, conforme apresentado na Equação 5.7 e na Equação 5.8, respectivamente. Ao aplicar o método de homogeneização proposto por Mori e Tanaka (1973), os tensores de concentração de deformação da inclusão e da matriz, para poros alinhados, são apresentados na Equação 5.9. Considerando poros desalinhados, os tensores de concentração de deformação na inclusão e na matriz assumem a forma apresentada na Equação 5.10.

5.3 Comportamento do tensor de Eshelby para inclusões esféricas em um meio elastoplástico

Durante o estudo do comportamento elastoplástico, foi identificado que o tensor de Eshelby para o meio elastoplástico, quando as inclusões apresentam uma geometria esférica, é igual ao tensor de Eshelby para o meio elástico, ou seja, $S^{\Omega} = S$.

Sabendo que os tensores $\mathbb{C}_m$, $\mathbb{L}_m^{Iso}$ e $\mathbb{S}^{\Omega}$ simétricos, portanto, assumindo um tensor $\mathbb{T}$ simétrico como sendo:

$$\mathbb{T} = \left[(\mathbb{C}_m)^{-1} : \mathbb{L}_m^{Iso}\right], \tag{5.11}$$

a equação Equação 4.15 fica:

$$\mathbb{S} = \mathbb{T}^{-1} : \mathbb{S}^{\Omega} : \mathbb{T}, \tag{5.12}$$

nas quais os tensores $\mathbb{S}$, $\mathbb{T}$ e $\mathbb{S}^{\Omega}$ são simétricos para o caso de inclusões esféricas, ou seja, $(\mathbb{T})^{Transp}$=$\mathbb{T}$; $(\mathbb{S}^{\Omega})^{Transp}$=$\mathbb{S}^{\Omega}$ e $(\mathbb{S})^{Transp}$=$\mathbb{S}$. Multiplicando Equação 5.12 por $\mathbb{T}$, tem-se:

$$\mathbb{T} : \mathbb{S} = \mathbb{I} : \mathbb{S}^{\Omega} : \mathbb{T} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{T} : \mathbb{S} = \mathbb{S}^{\Omega} : \mathbb{T}. \tag{5.13}$$

Como $\mathbb{T}$ e $\mathbb{S}$ são simétricos, tem-se $(\mathbb{T} : \mathbb{S})^{Transp}$=$\mathbb{S}^{Transp}$:$\mathbb{T}^{Transp}$=$\mathbb{S} : \mathbb{T}$. Logo, $\mathbb{T} : \mathbb{S}$=$\mathbb{S} : \mathbb{T}$. Portanto:

$$\mathbb{S} : \mathbb{T} = \mathbb{S}^{\Omega} : \mathbb{T} \quad \therefore \quad (\mathbb{S} : \mathbb{T} - \mathbb{S}^{\Omega} : \mathbb{T}) = 0, \tag{5.14}$$

então:

$$(\mathbb{S} - \mathbb{S}^{\Omega}) : \mathbb{T} = 0 \Rightarrow \mathbb{S} = \mathbb{S}^{\Omega}. \tag{5.15}$$

A Equação 5.15 é verdadeira para apenas inclusões esféricas.

Considerando poros esféricos inseridos em uma matriz dúctil que possui as suas propriedades apresentadas na Tabela 4, a seguir, pode-se observar a igualdade dos resultados dos tensores de Eshelby para os meios elástico e elastoplástico:

- Resultado numérico do tensor de Eshelby para inclusões esféricas inseridas e uma matriz elástica:

$$\mathbb{S}^{\Omega} = \begin{bmatrix} 0,5238 & 0,0476 & 0,0476 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0476 & 0,5238 & 0,0476 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0476 & 0,0476 & 0,5238 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4762 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4762 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4762 \end{bmatrix}.$$

- Resultado numérico do tensor de Eshelby para inclusões esféricas inseridas e uma matriz elastoplástica independente do passo de deformação incremental:

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} 0,5238 & 0,0476 & 0,0476 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0476 & 0,5238 & 0,0476 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0476 & 0,0476 & 0,5238 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4762 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4762 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4762 \end{bmatrix}.$$

5.4 Comportamento do tensor de concentração de deformação para poros esféricos ou esferoidais em um meio elastoplástico

Da mesma forma que ocorre com o tensor de Eshelby, em que $\mathbb{S}^{\Omega} = \mathbb{S}$, foi identificado que o tensor de concentração de deformação na inclusão para o meio elástico poroso é igual ao tensor de concentração de inclusão para o meio elastoplástico poroso, ou seja, $\mathbb{A}_i^{dil} = \mathbb{A}_i^{tan}$. Devido à natureza simétrica dos tensores de concentração de deformação, essa igualdade também ocorre quando os poros estão desalinhados e distribuídos aleatoriamente. Para que essa igualdade possa ocorrer, A_i^{tan} ou $\langle \mathbb{A}_i^{tan} \rangle_{\psi}$ deve ser rotação de $\mathbb{A}_i^{dil}$ (Equação 2.63) ou $\langle \mathbb{A}_i^{dil} \rangle_{\psi}$ (Equação 2.96), respectivamente.

Ao analisar o material constituído, segundo a Tabela 4, em que apresenta inclusões esféricas ou esferoidais com RA=2 desalinhadas e fração volumétrica de 30%, obtêm-se os tensores $\mathbb{A}_i^{tan}$ e $\langle \mathbb{A}_i^{tan} \rangle_{\psi}$, conforme Equação 5.7 e Equação 5.8, respectivamente.

- Resultado numérico do tensor $\mathbb{A}_i^{dil}$ para inclusões esféricas inseridas e uma matriz elástica:

$$\mathbb{A}^{dil} = \begin{bmatrix} 2,1477 & 0,2386 & 0,2386 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2386 & 2,1477 & 0,2386 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2386 & 0,2386 & 2,1477 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,909 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,909 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,909 \end{bmatrix}.$$

- Resultado numérico do tensor $\mathbb{A}_i^{c}$ para inclusões esféricas inseridas e uma matriz elastoplástica independente do passo de deformação incremental:

$$\mathbb{A}_i^{tan} = \begin{bmatrix} 2,1477 & 0,2386 & 0,2386 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2386 & 2,1477 & 0,2386 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2386 & 0,2386 & 2,1477 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,909 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,909 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,909 \end{bmatrix}.$$

- Resultado numérico do tensor $\langle \mathbb{A}_i^{dil} \rangle_\psi$ para inclusões desalinhadas inseridas e uma matriz elástica:

$$\langle \mathbb{A}_i^{dil} \rangle_\psi = \begin{bmatrix} 2,2408 & 0,2675 & 0,2675 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2675 & 2,2408 & 0,2675 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2675 & 0,2675 & 2,2408 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,9734 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,9734 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,9734 \end{bmatrix}.$$

- Resultado numérico do tensor $\langle \mathbb{A}_i^{tan} \rangle_\psi$ para inclusões desalinhadas inseridas e uma matriz elastoplástica independente do passo de deformação incremental:

$$\langle \mathbb{A}_i^{tan} \rangle_\psi = \begin{bmatrix} 2,2408 & 0,2675 & 0,2675 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2675 & 2,2408 & 0,2675 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2675 & 0,2675 & 2,2408 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,9734 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,9734 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,9734 \end{bmatrix}.$$

5.5 Conclusões do Capítulo 5

Usando o tensor de Eshelby apresentado por Peng et al. (2016), o tensor de concentração de deformação da inclusão, para o meio elastoplástico, foi deduzido. Observou-se que, para inclusões esféricas ou elipsoidais randomicamente distribuídas, o tensor de concentração de deformação da inclusão no regime elastoplástico não apresenta modificação e é igual ao tensor de concentração de deformação no regime elástico. Este modelo pode ser facilmente incorporado em esquemas de homogeneização de campos médios convencionais para o caso onde a rigidez da inclusão é negligenciada e a inclusão apresenta diferentes geometrias ou direções no espaço 3D. De forma específica, a abordagem para determinar o tensor de concentração de deformação na inclusão para meios elastoplásticos apresentou as seguintes vantagens:

- baixo custo computacional ao ser, por exemplo, comparado ao MEF e facilidade de aplicação direta por empregar apenas o módulo tangente e apresenta uma forma unificada nos casos elástico e elastoplástico;
- pode ser facilmente incorporado nos esquemas convencionais de homogeneização de campos médios e pode ser usado para análises de propriedades efetivas de materiais dúcteis porosos submetidos a variadas condições de carregamento macroscópico;
- pode ser usado em matrizes dúcteis que possuem poros randomicamente distribuídos, alinhados, desalinhados e variadas geometrias.

6 ANÁLISE DE RESULTADOS E DISCUSSÕES: TENSOR DE CONCENTRAÇÃO DE DEFORMAÇÃO PARA MEIOS ELASTOPLÁSTICOS POROSOS

6.1 Introdução

Recorrendo ao tensor de concentração de deformação para o meio elastoplástico, conforme visto na Capítulo 5, os resultados obtidos são comparados com resultados numéricos, experimentais e semi-analíticos provenientes da literatura ou *software* Digimat. Avaliações do comportamento elastoplástico da matriz porosa serão efetuadas considerando a matriz elastoplástica que escoa segundo o critério de von Mises e apresenta um endurecimento isotrópico ou cinemático. A matriz dúctil será submetida a variadas condições de carregamento macroscópico, seja tensão longitudinal, transversal ou cisalhamento puro. Os poros são distribuídos de forma aleatória e possuem variadas direções e geometrias. Para todos os exemplos, a aproximação isotrópica do operador anisotrópico será obtida por meio do método espectral. Neste contexto, também será analisado o comportamento do material poroso através da não extração da parte isotrópica do operador anisotrópico. Para atingir o objetivo deste capítulo, será aplicado o método de linearização incremental em conjunto com método de homogeneização de Mori e Tanaka (1973).

6.2 Algoritmo computacional

Por meio da micromecânica de campos médios, a Figura 74 e Figura 75, apresentam algoritmos explicitando as etapas seguidas para o estudo do comportamento elastoplástico de uma matriz dúctil porosa que possui endurecimento isotrópico e cinemático, respectivamente. Para a aplicação da metodologia em questão, foram utilizados o método de isotropização espectral, TEEP e o *Tensor de Concentração de Deformação Elastoplástico* (TCDEP). Os resultados são apresentados na seção 6.3. Este algoritmo computacional pode ser aplicado quando a matriz metálica apresenta poros de variadas geometrias e direções, submetida a condições de carregamento macroscópico em tensão longitudinal, transversal ou cisalhamento.

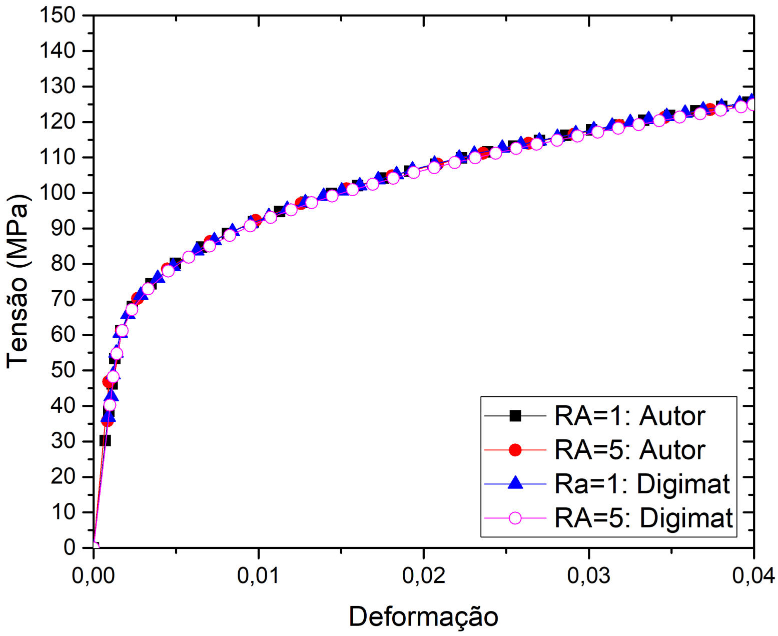
6.3 Resultados

6.3.1 Resultado semi-analítico e *software* Digimat

A Figura 56 apresenta o resultado do comportamento elastoplástico de uma matriz porosa submetida a um teste de tração uniaxial, onde a influência da razão de aspecto é analisada. Para obtenção dos resultados, foi utilizado o método de isotropização espectral e o tensor de concentração de deformação para o meio elastoplástico mostrado na Equação 5.7 e na

Equação 5.8, respectivamente. A matriz metálica apresenta endurecimento isotrópico e poros com RA=1 e RA=5 desalinhados e randomicamente distribuídos. As propriedades da matriz são apresentadas na Tabela 4. A fração volumétrica considerada foi de 30%.

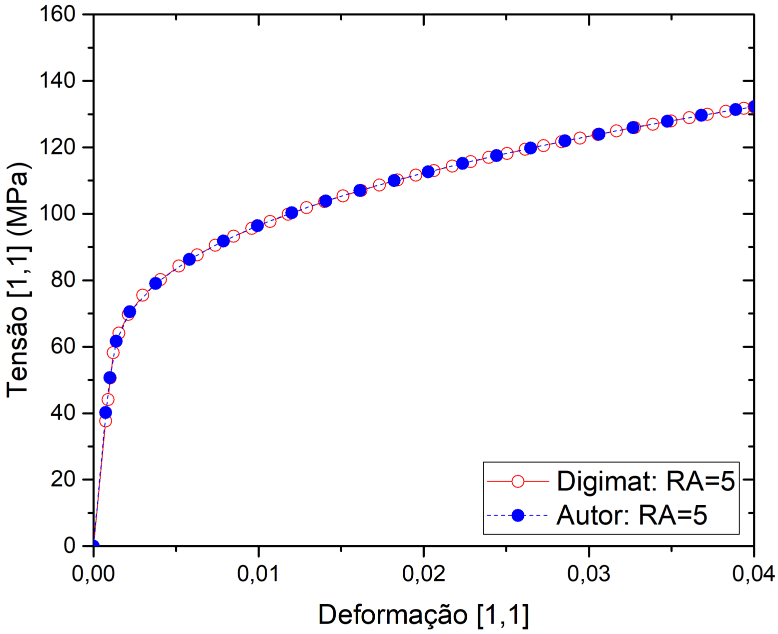
Figura 56 – Comportamento elastoplásticos de uma matriz que apresenta endurecimento isotrópico contendo poros com RA=1 ou RA=5 desalinhados e randomicamente distribuídoss



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

A Figura 57 apresenta o resultado do comportamento elastoplástico de uma matriz metálica porosa sob teste de tração uniaxial, onde a influência da razão de aspecto é analisada. Para obtenção dos resultados, foi utilizado o método de isotropização espectral e o tensor de concentração de deformação para o meio elastoplástico mostrado na Equação 5.7. A matriz metálica possui endurecimento isotrópico e poros com RA=5 alinhados longitudinalmente a tensão aplicada. As propriedades da matriz são apresentadas na Tabela 4. A fração volumétrica considerada foi de 30%.

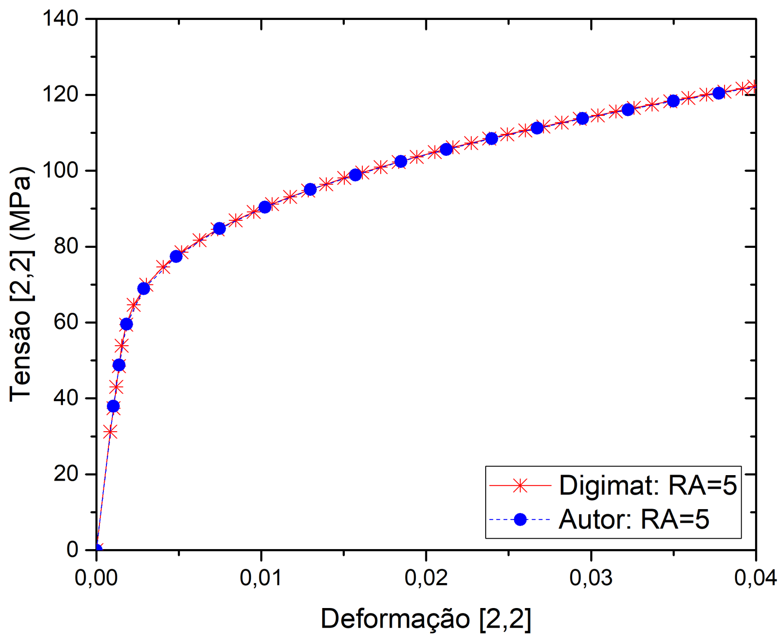
Figura 57 – Comportamento elastoplásticos de uma matriz que apresenta endurecimento isotrópico contendo poros alinhados longitudinalmente e com RA=5



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

A Figura 58 apresenta o resultado do comportamento elastoplástico de uma matriz metálica porosa sob teste de tração uniaxial, onde a influência da razão de aspecto é analisada. Para obtenção dos resultados, foi utilizado o método de isotropização espectral e o tensor de concentração de deformação para o meio elastoplástico mostrado na Equação 5.7. A matriz metálica possui endurecimento isotrópico e poros com RA=5 alinhados transversalmente a tensão aplicada. As propriedades da matriz são apresentadas na Tabela 4. A fração volumétrica considerada foi de 30%.

Figura 58 – Comportamento elastoplásticos de uma matriz que apresenta endurecimento isotrópico contendo poros alinhados transversalmente e com RA=5



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

6.3.2 Resultado semi-analítico e numérico

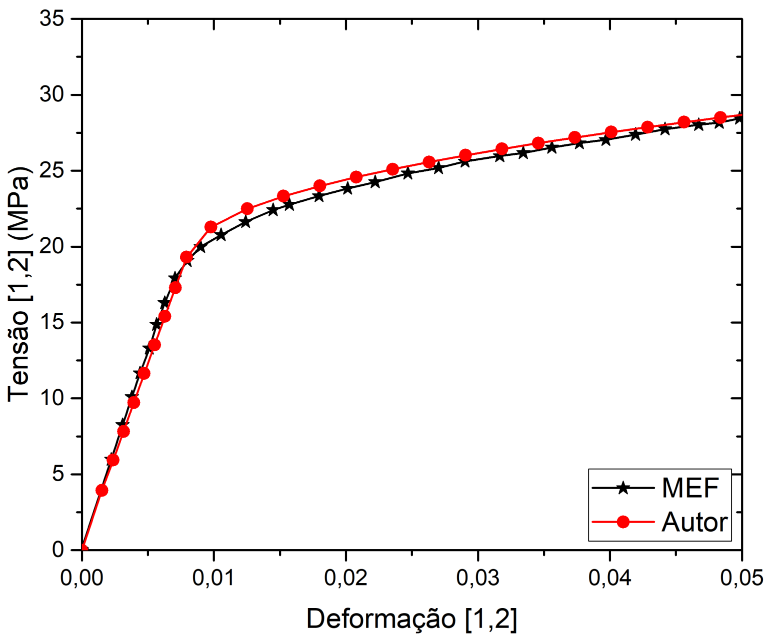
Na Figura 59 é apresentado comparações entre resultados obtidos neste trabalho com os resultados obtidos via MEF retirados do trabalho de Jiang, Shao e Xu (2011). Os poros apresentam geometria esférica e distribuídos randomicamente no espaço. Neste exemplo é apresentado uma análise micromecânica do comportamento elastoplástico de uma matriz metálica com 25% de porosidade as quais suas propriedades estão expostas na Tabela 7 e submetida a tensão macroscópica de cisalhamento puro.

Tabela 7 – Propriedades da matriz metálica de alumínio

Parâmetros do material	**Unidade**	**Valor**
Matriz		
Módulo de Young	(GPa)	10,0
Coeficiente de Poisson		0,25
Tensão de escoamento	(MPa)	45
Módulo de endurecimento	(MPa)	150
Expoente de endurecimento		0,5

Fonte: Jiang, Shao e Xu (2011)

Figura 59 – Comportamento elastoplásticos de uma matriz que apresenta endurecimento isotrópico contendo poros esféricos submetido a cisalhamento puro

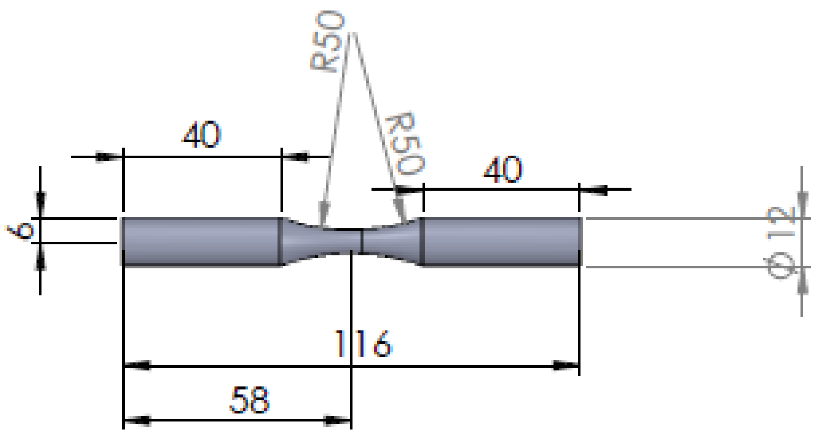


Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

6.3.3 Resultado do ensaio experimental, semi-analítico e *software* Digimat

Nesta seção é apresentado a realização de um ensaio de tração do corpo de prova construído conforme Figura 60. O material deste corpo de prova foi obtido mediante a fundição, em molde de areia, de várias ligas de alumínio sem a preocupação com contaminantes que influenciassem nas propriedades elásticas efetivas.

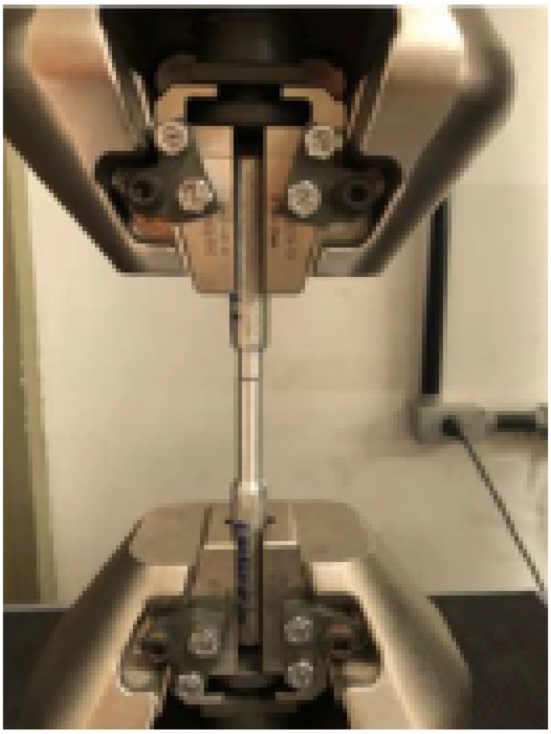
Figura 60 – Medidas do corpo de prova



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Os resultados do ensaio experimental, mostrado na Figura 61, foram comparados com os resultados obtidos via método semi-analítico em questão e com os resultados obtidos por meio do *software* Digimat.

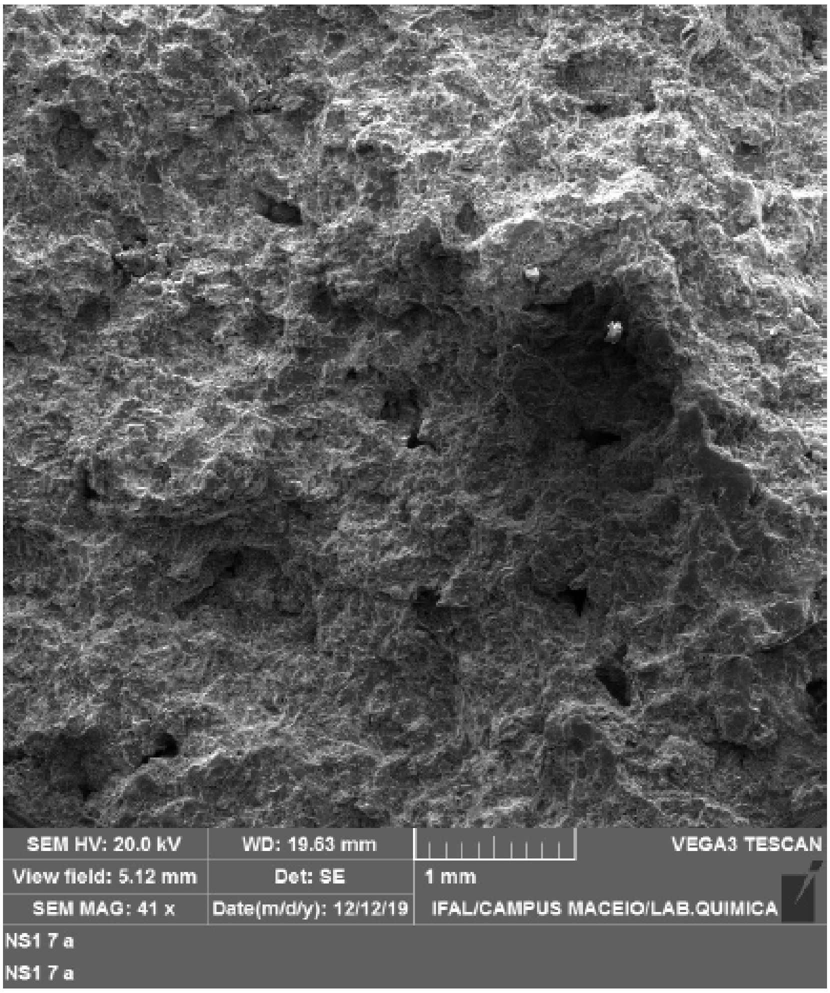
Figura 61 – Ensaio de tração



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Um dos grandes desafios para a análise do comportamento efetivo de materiais porosos é prever com precisão a geometria dos poros. Sua complexidade geométrica, conforme visto na Figura 62, requer aplicar modelos analíticos que simplifiquem os resultados (SUN; MA; ANDRIEUX, 2014; SANTOS et al., 2016). Portanto, para simplificação do problema, supõe-se que os poros sejam idênticos, possuem geometria esferoidal (RA=5) e rigidez igual a zero.

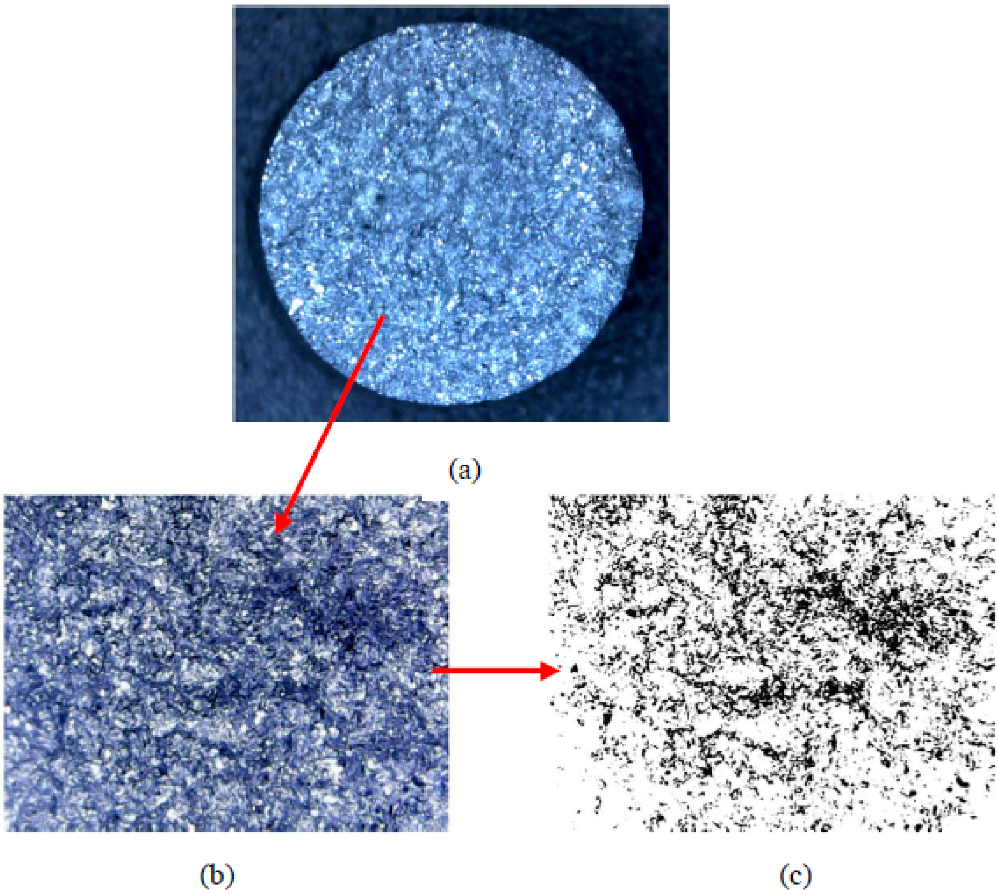
Figura 62 – Imagem do MEV: Poros elipsoidais desalinhados e distribuídos randomicamente



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

A superfície do corpo de prova após o ensaio (Figura 63 (a)) disponibilizou um EVR (Figura 63 (b)) que foi submetido a um processamento de binarização (Figura 63 (c)) para calcular a porosidade por meio de uma rotina no matlab desenvolvido por Arslan (2019). O valor encontrado da porosidade da liga de alumínio foi de 16%.

Figura 63 – Análise da porosidade: (a) Superfície da amostra após ensaio de tração (Escala 900 um); (b) EVR; (c) Binarização do EVR



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Por meio da curva de tensão e deformação obtida no ensaio experimental, e, ao usar o método de homogeneização de Mori-Tanaka de forma reversa, pôde-se determinar possíveis valores do módulo de Young, tensão de escoamento da matriz sólida, módulo e expoente de endurecimento. As propriedades elastoplásticas desta liga de alumínio porosa são mostradas na Tabela 8.

Tabela 8 – Propriedades da matriz de alumínio reciclada

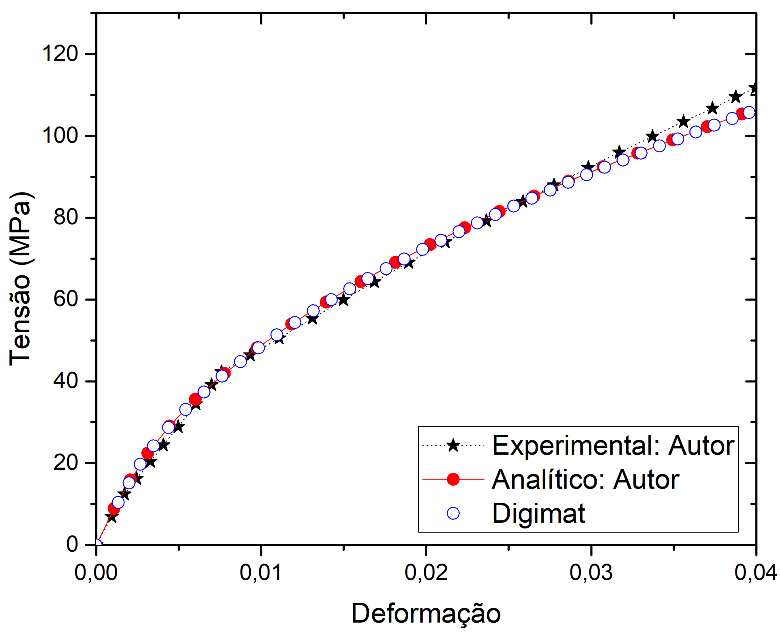
Parâmetros do material	**Unidade**	**Valor**
Matriz		
Módulo de Young	(GPa)	10,59
Coeficiente de Poisson		0,33
Tensão de escoamento	(MPa)	17,7486
Módulo de endurecimento	(MPa)	734,39
Expoente de endurecimento		0,5

Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

Por ser dúctil, essa matriz exibe um comportamento elastoplástico governado pelo critério de escoamento de von Mises e possui um endurecimento isotrópico. A análise do comportamento efetivo deste material poroso é efetuada via estados macroscópicos de tensões uniaxiais aplicadas de maneira incremental e monotônica.

Sendo assim, os resultados obtidos no ensaio de tração uniaxial, que determina o comportamento elastoplástico da liga porosa, foram comparados com os resultados obtidos via método analítico em questão e com os resultados obtidos por meio do *software* Digimat, conforme pode ser visto na Figura 64.

Figura 64 – Comportamento elastoplásticos de uma matriz de alumínio reciclado que apresenta endurecimento cinemático contendo poros com RA=5 desalinhados e randomicamente distribuídos

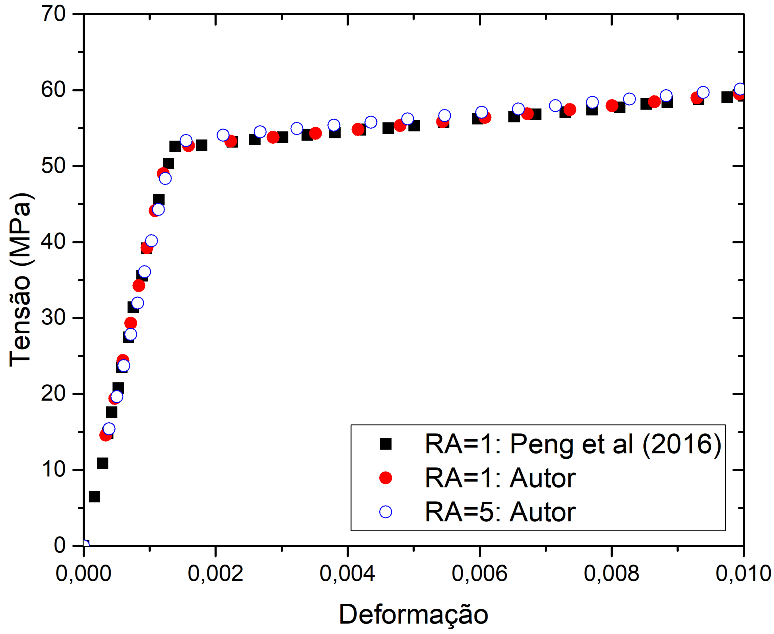


Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

6.3.4 Resultado semi-analítico da matriz que possui endurecimento cinemático

A Figura 65 apresenta o resultado do comportamento elastoplástico de uma matriz metálica porosa sob teste de tração uniaxial. Neste exemplo, a influência da razão de aspecto é analisada. Para obtenção dos resultados, foi utilizado o método de isotropização espectral e o tensor de concentração de deformação para o meio elastoplástico mostrado na Equação 5.7 e Equação 5.8, respectivamente. A matriz metálica apresenta endurecimento cinemático e poros com RA=1 ou RA=5 desalinhados e randomicamente distribuídos. As propriedades da matriz são apresentadas na Tabela 4. A fração volumétrica considerada foi de 30%. Os resultados mostram que a razão de aspecto pouco influenciou nos resultados elastoplásticos.

Figura 65 – Comportamento elastoplásticos de uma matriz que apresenta endurecimento cinemático contendo poros com RA=1 ou RA=5 desalinhados e randomicamente distribuídos

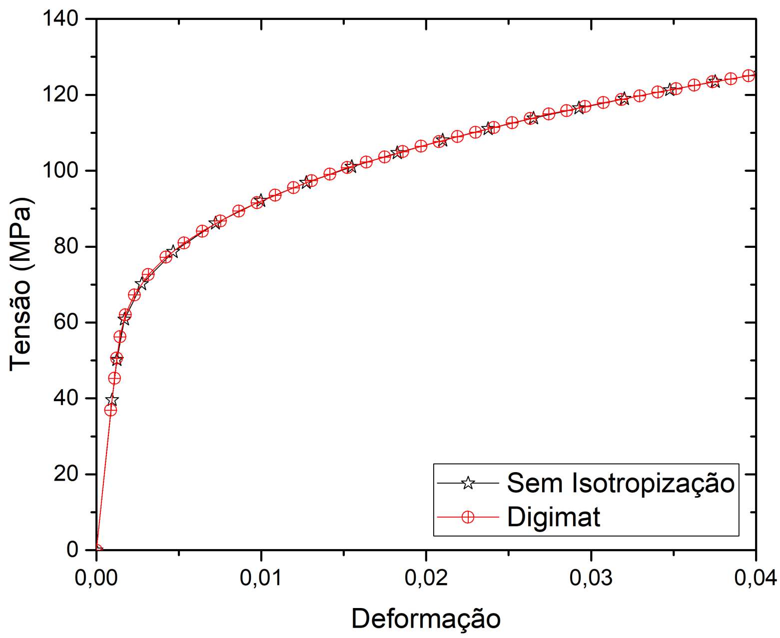


Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

6.3.5 Resultado semi-analítico sem isotropização

A Figura 66 apresenta o comportamento elastoplástico de onde uma matriz porosa com as suas propriedades apresentadas na Tabela 4. O operador anisotrópico será aplicado em todas as etapas do algoritmo, ou seja, neste exemplo, a metodologia de isotropização será descartada e apenas os operadores anisotrópicos serão usados. Os resultados obtidos nesse método serão comparados com os resultados obtidos através do *software* Digimat. A matriz possui uma porosidade de 30% e os poros apresentam uma RA=2.

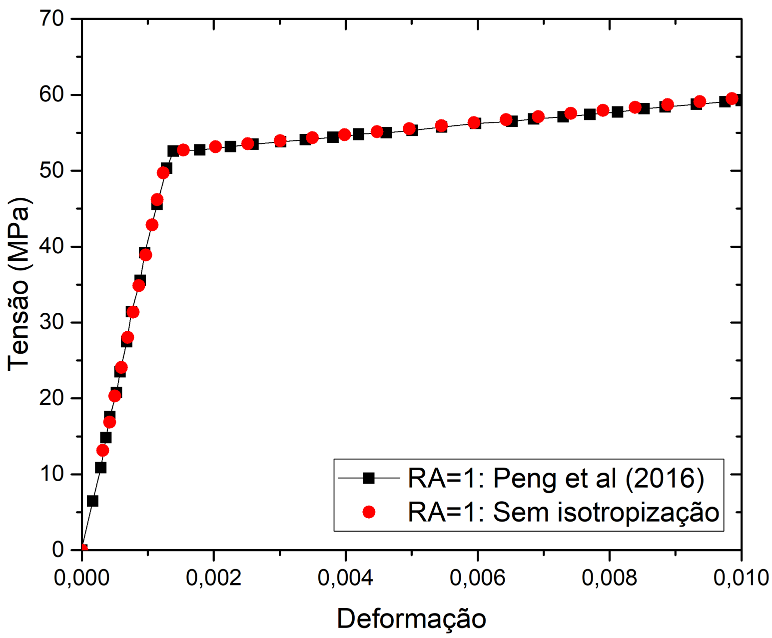
Figura 66 – Comportamento elastoplásticos de uma matriz porosa que apresenta endurecimento isotrópico sem o uso de isotropização



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

A Figura 67, onde foi considerado uma matriz porosa que apresenta endurecimento cinemático, cujas propriedades elastoplásticas apresentadas na Tabela 6, o operador anisotrópico será aplicado em todas as etapas do algoritmo, ou seja, neste exemplo, a metodologia de isotropização será descartada e apenas os operadores anisotrópicos serão usados. Os resultados obtidos nesse método serão comparados com os resultados obtidos no trabalho de Peng et al. (2016). A porosidade apresenta uma fração volumétrica de 30% e os poros RA=1 (esféricos).

Figura 67 – Comportamento elastoplásticos de uma matriz porosa que apresenta endurecimento cinemático sem o uso de isotropização



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

6.4 Conclusões do Capítulo 6

Neste capítulo, foi verificado, via resultados obtidos com o auxílio de métodos analíticos, MEF e experimental, a possibilidade do uso do tensor de concentração de deformação para o meio elastoplástico poroso, deduzido conforme visto no Capítulo 5. Para a obtenção dos resultados, foram considerados: deformações infinitesimais, linearização incremental, endurecimento isotrópico ou cinemático, operadores isotrópicos (isotropização espectral) ou anisotrópicos, cargas monotônicas e escoamento regido pela teoria da plasticidade clássica J_2. O material poroso, possui poros com variadas geometrias e direções. O material foi homogeneizado conforme o esquema de Mori e Tanaka (1973) e submetido a variadas condições de carregamento macroscópico, seja de tensão de cisalhamento, tensão longitudinal ou transversal. Independentemente da geometria ou direção do poro, foi observado que o modelo micromecânico proposto parece conseguir descrever as principais características dos comportamentos mecânicos observados, proporcionando resultados precisos a um custo/tempo computacional bastante atraente. Ainda no contexto da geometria do poro, observou-se na Figura 65 que a variação da razão de aspecto entre RA=1 e RA=5 pouco influenciou na curva do comportamento elastoplástico. Finalizando, de forma contrária aos resultados elastoplásticos obtidos por meio de materiais compósitos que apresentam fibras sólidas, a Figura 66 mostrou que, a não utilização da aproximação isotrópica, não proporcionou resultados rígidos e, sim, resultados fisicamente aceitáveis quando comparados com resultados disponíveis na literatura.

7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Usando micromecânica de campos médios, esta tese teve como objetivo principal o estudo analítico do comportamento elastoplástico de materiais compósitos e porosos. Esses materiais heterogêneos apresentam inclusões lineares e homogêneas de variadas geometrias e distribuição no espaço e inseridas em uma matriz dúctil elastoplástica homogênea.

Materiais compósitos que apresentam fibras curtas (sólida ou poro) são cada vez mais utilizados no âmbito industrial devido as suas propriedades mecânicas atraentes, processamento rápido e baixo custo de fabricação. Para considerar a natureza aleatória da direção das inclusões, a homogeneização de campos médios, tanto no regime elástico como no regime elastoplástico, prevê com precisão satisfatória as propriedades efetivas e o comportamento elastoplástico por meio de técnicas que utilizam uma função de distribuição de orientação FDO. Essa FDO pode ser aplicada diretamente no tensor de rigidez efetivo como no tensor de concentração de deformação para, em seguida, ser aplicado na equação de homogeneização.

Ainda no âmbito do desenvolvimento deste trabalho, porém com enfoque no regime elastoplástico, foram consideradas as condições que atendem as leis da termodinâmica, deformações infinitesimais, contabilização do histórico do carregamento, método de linearização incremental e esquema de homogeneização de Mori-Tanaka. A matriz dúctil pode apresentar um endurecimento isotrópico ou cinemático. Para a aproximação isotrópica do operador anisotrópico, dois métodos foram usados: método espectral e método geral.

A influência do tensor de Eshelby foi avaliada por dois caminhos: Tensor de Eshelby tangente (TET) e tensor de Eshelby para o meio elastoplástico (TEEP). Para entender o comportamento do material bifásico sob variadas condições de carregamento macroscópico, tensões axiais, transversais e cisalhamento puro; foram macroscopicamente aplicadas no material efetivo. O escoamento da matriz elastoplástica seguiu o critério de von Mises. Foram usados resultados obtidos na literatura, MEF e *software* Digimat para confrontar os resultados obtidos por meio do algoritmo do presente trabalho.

Considerando inclusões elásticas e aproximação isotrópica espectral, o uso do TEEP apresentou resultados menos rígidos ao ser comparado com a análise usando TET, conforme pode ser visto na Figura 30. Porém, usando apenas TET, o método de isotropização geral se apresentou menos rígido do que o método de isotropização espectral, conforme pode ser visto na Figura 34. Comparando os resultados ao considerar apenas o método de isotropização, o espectral foi o que mais se aproximou dos resultados obtidos via *software* Digimat e não apresentou limitações quanto à distribuição das inclusões elásticas, sinalizando, assim, a aproximação mais adequada a ser usada para análise elastoplástica de materiais compósitos que apresenta matriz dúctil.

Prosseguindo com as conclusões obtidas por meio das análises de compósitos que apresentam matriz dúctil e inclusões elásticas, para materiais que apresentam fibras com RA>1, o TET apresentou melhores resultados ao serem comparados com os resultados obtidos pelo TEEP (ver figura Figura 39), apresentando resultados menos rígidos, podendo, assim, mostrar uma limitação nesta metodologia.

Por fim, considerando materiais dúcteis que possuem poros alinhados ou desalinhados, usando o tensor de Eshelby elastoplástico deduzido por Peng et al. (2016), foi apresentada uma nova abordagem para a determinação do tensor de concentração de deformação. Conforme pode ser observado na dedução apresentada no Capítulo 5, concluiu-se que, para poros esféricas ou elipsoidais randomicamente distribuídas, o tensor de deformação no regime elastoplástico não apresenta variação e é igual ao tensor de deformação no regime elástico. De uma forma geral, considerando evidentemente uma matriz dúctil porosa, pode-se ainda considerar que:

- Usando o tensor de concentração de deformação para o meio elastoplástico poroso, não é necessário aplicar métodos de isotropização para a obtenção de resultados fisicamente satisfatórios.
- Para o comportamento plástico de um meio elastoplástico poroso, a razão de aspecto representa influência irrelevante nos resultados do comportamento efetivo;
- Devido à facilidade de aplicação, baixo custo computacional e ausência da relevância da razão de aspecto no comportamento elastoplástico, a metodologia que usa o TEEP e o tensor de concentração de deformação para o meio elastoplástico é ideal para o uso quando a matriz dúctil e porosa que apresenta endurecimento isotrópico ou cinemático.

Consolidando as conclusões, a abordagem para determinar o tensor de concentração de deformação para meios porosos elastoplásticos, apresentou as seguintes vantagens:

1. emprega o módulo tangente anisotrópico regular e oferece uma forma unificada nos casos elástico e elastoplástico;
2. pode ser facilmente incorporado nos esquemas convencionais de homogeneização de campos médios e usado para análises de propriedades efetivas de materiais bifásicos porosos submetidos a históricos de carregamento complexos;
3. possui alta eficiência computacional, uma vez que o tensor de Eshelby pode ser simplesmente calculado usando as propriedades elásticas e elastoplásticas da matriz porosa em cada incremento;
4. pode ser usado em matrizes dúcteis que possuem poros randomicamente distribuídos, alinhados, desalinhados e variadas geometrias;
5. pode ser aplicado em materiais porosos que escoam segundo o critério de von Mises e possui endurecimento isotrópico ou cinemático conforme regra de Prager;

6. ausência da necessidade de aplicar métodos de isotropização para obtenção de resultados fisicamente aceitáveis para matrizes dúcteis que apresentam poros esféricos ou esferoidais, randomicamente distribuídos e desalinhados no espaço, submetido a esforços tensões uniaxiais;

7. pode ser aplicado em variadas condições de carregamento macroscópico em materiais constituídos por matrizes dúcteis porosas que possuem endurecimento isotrópico ou cinemático.

7.1 Trabalhos futuros

O presente trabalho apresentou a eficiência do método de homogeneização de campos médios para capturar o comportamento elastoplástico macroscópico de materiais compósitos e porosos. Entre as melhorias propostas do método de homogeneização para materiais elastoplásticos, estão:

- Avaliar o efeito do endurecimento cinemático no comportamento de fatiga de compósitos e materiais porosos de matriz dúctil;
- Investigar a quantificação e a influência da anisotropia existentes em materiais compósitos e porosos submetidos a variadas condições de carregamento macroscópico, geometria e distribuição das inclusões.
- Investigar a quantificação e a influência da anisotropia existentes em materiais compósitos e porosos que apresentam variados contrastes entre a matriz e a inclusão;
- Usando o TEEP, investigar a influência do contraste entre a inclusão e a matriz, fração volumétrica, direção e geometria (esfera, oblate e prolate) das inclusões;
- Usando variados métodos de homogeneização baseados na micromecânica de campos médios, investigar a precisão dos resultados obtidos do comportamento elastoplásticos de materiais que possuem matriz dúctil e comparar com resultados experimentais e numéricos;
- Investigar o comportamento de diferentes materiais que apresenta o comportamento elastoplástico (dúctil, comentício, polimérico) para verificar qual o método de isotropização é o mais adequado;
- Investigar o efeito da razão de aspecto em materiais que apresentam fibras sólidas elásticas, alinhadas ou desalinhadas, com variadas razões de aspecto, utilizado os métodos de isotropização apresentados na subseção 3.6.1 e subseção 3.6.2 em conjuntos com TEEP;
- Aplicar o método de escoamento de Drucker-Prager em materiais compósitos e porosos e analisar a influência da razão de aspecto no comportamento elastoplástico;

- Analisar a influência da razão de aspecto do poro no comportamento elastoplástico de matrizes que escoam conforme von Mises e Drucker-Prager;
- Investigação analítica, numérica e experimental de novos materiais compósitos e porosos para aplicação biológica, tais como próteses, pinos ou parafusos no uso ortopédico e dentário;
- Estudo do comportamento elastoplástico de materiais com memória de forma;
- Gerar a evolução gráfica que representa a superfície de plastificação de um material heterogêneo contendo poros ou inclusões elásticas.

Conforme apresentado até o momento, muitas questões que norteiam o estudo do comportamento elastoplástico incremental de materiais heterogêneos ainda permanecem em aberto. Novos avanços serão necessários para capturar os efeitos da não uniformidade dos campos de tensão (ou deformação) que ocorrem na região de escoamento, que, em casos reais, essa suposição pode levar a resultados imprecisos. Além disso, mesmo obtendo-se resultados fisicamente aceitáveis, os métodos de isotropização não possui uma justificativa que seja fisicamente justificada, levando, assim, a uma lacuna que precisa ser corrigida com novos modelos que englobem a anisotropia adquirida do material compósito.

REFERÊNCIAS

ABDIN, Y. **Micro-Mechanics Based Fatigue Modelling of Composites Reinforced With Straight and Wavy Short Fibers**. 312 p. Tese (Doutorado) — KU LEUVEN, Leuven, 2015. 24, 55, 87

ABEDINI, A.; CHEN, Z. T. A micromechanical model of particle-reinforced metal matrix composites considering particle size and damage. **Computational Materials Science**, Elsevier B.V., v. 85, p. 200–205, 2014. ISSN 09270256. 91

ABOUDI, J.; ARNOLD, S. M.; BEDNARCYK, B. A. **Micromechanics of Composite**. [S.l.]: Elsevier, 2013. ISBN 978-0-12-397035-0. 164

ABOUDI, J.; ARNOLD, S. M.; BEDNARCYK, B. A. **Micromechanics of Composite Materials**. [s.n.], 2013. 1006 p. ISBN 9780123977595. Disponível em: <https://www.elsevier.com/books/micromechanics-of-composite-materials/aboudi/978-0-12-397035-0>. 24

ADAM, L.; ASSAKER, R. Integrated nonlinear multi-scale material modelling of fiber reinforced plastics with digimat: Application to short and continuous fiber composites. **11th World Congress on Computational Mechanics, WCCM 2014, 5th European Conference on Computational Mechanics, ECCM 2014 and 6th European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECFD 2014**, n. Wccm Xi, p. 2322–2333, 2014. 64

ADVANI, S. G.; TUCKER, A. L. The use of tensors to describe and predict fiber orientation in short fiber composites. **Journal of Rheology**, v. 31, n. 8, p. 751–784, 1987. ISSN 0148-6055. Disponível em: <https://doi.org/10.1122/1.549945>. 28, 58, 60

ARAÚJO, J. A. F. A micromechanical analysis of strain concentration tensor for elastoplastic medium containing aligned and misaligned pores. **Mechanics Research Communications**, Elsevier, v. 125, p. 103989, 2022. ISSN 0093-6413. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2022.103989>. 19, 37, 220

ARAÚJO, J. A. F.; RODRIGUES, M. C.; PIRES, R. B. d. P. Multiscale structural analysis of oil rig mast using mean fields and finite element method. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Springer Berlin Heidelberg, v. 4, 2023. ISSN 1806-3691. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s40430-022-03939-4>. 19, 37, 88

ARSLAN, C. **Porosity Calculator for SEM Images**. [S.l.]: MATLAB Central File Exchange., 2019. 133

ASKELAND, D. R. **Essentials of Materials Science and Engineering**. 1. ed. Pittsburg: [s.n.], 2008. 579 p. ISBN 978-85-221-0598-4. 24

BANHART, J. Manufacture, characterisation and application of cellular metals and metal foams. **Progress in Materials Science**, v. 46, n. 6, p. 559–632, 2001. ISSN 00796425. 25

BASIRI, A. et al. Micromechanical constitutive modeling of tensile and cyclic behavior of nano-clay reinforced metal matrix nanocomposites. **Mechanics of Materials**, Elsevier Ltd, p. 104280, 2022. ISSN 0167-6636. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2022.104280>. 34

BATHE, K. J.; MONTÁNS, F. J. On modeling mixed hardening in computational plasticity. **Computers and Structures**, v. 82, n. 6, p. 535–539, 2004. ISSN 00457949. 79

BEDNARCYK, B. A.; ABOUDI, J.; ARNOLD, S. M. The effect of general statistical fiber misalignment on predicted damage initiation in composites. **Composites Part B: Engineering**, v. 66, p. 97–108, 2014. 60

BENVENISTE, Y. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials. **Mechanics of Materials**, v. 6, n. 2, p. 147–157, 1987. 26, 28, 54, 55

BENVENISTE, Y.; DVORAK, G. J.; CHEN, T. Stress fields in composites with coated inclusions. **Mechanics of Materials**, v. 7, n. 4, p. 305–317, 1989. ISSN 01676636. 56

BERVEILLER, M.; ZAOUI, A. An extension of the self-consistent scheme to plastically-flowing polycrystals. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 26, n. 5-6, p. 325–344, 1979. ISSN 00225096. 27, 29, 172

BESSON, J. et al. **Non-Linear Mechanics of Materials**. 1. ed. [S.l.]: Springer, 2010. v. 53. ISSN 1098-6596. ISBN 978-90-481-3356-7. 76

BIOLZI, L.; CASTELLANI, L.; PITACCO, I. On the mechanical response of short fibre reinforced polymer composites. **Journal of Materials Science**, v. 29, n. 9, p. 2507–2512, 1994. ISSN 00222461. 55

BOHM, H. J. **A Short Introduction to Basic Aspects of Continuum Micromechanics**. Vienna, 1998. v. 207. 24, 52, 87

BORNERT, M.; BRETHEAU, T.; GILORMIN, B. P. **Homogénéisation en mécanique des matériaux 1 - Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques**. v1. Hermes science, 2001. 250 pages p. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00112720>. 75, 85

BORST, R.; SADOWSKI, T. **Lecture Notes on Composite Materials Current Topics and Achievements**. Waterloo: Springer, 2008. 249 p. ISBN 9781402087714. 164

BRASSART, L. **Homogenization of elasto-(visco) plastic composites : history-dependent incremental and variational approaches**. 177 p. Tese (Doutorado) — UNIVERSITE CATHOLIQUE DE LOUVAIN ECOLE, LOUVAIN, 2011. 84, 85, 89

BRASSART, L.; DOGHRI, I.; DELANNAY, L. Homogenization of elasto-plastic composites coupled with a nonlinear finite element analysis of the equivalent inclusion problem. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 47, n. 5, p. 716–729, 2010. ISSN 00207683. 33, 92

BRASSART, L. et al. A variational formulation for the incremental homogenization of elasto-plastic composites. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 59, n. 12, p. 2455–2475, 2011. ISSN 00225096. 83

BRASSART, L. et al. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle. **International Journal of Plasticity**, Elsevier, v. 36, p. 86–112, 2012. ISSN 07496419. 84, 89

BREUER, K.; STOMMEL, M.; KORTE, W. Analysis and Evaluation of Fiber Orientation Reconstruction Methods. p. 1–22, 2019. 60

BUDIANSKY, B. On the elastic moduli of some hererogeneous materials. **Mech. Phys. Solids,**, v. 13, n. 02, p. 1–5, 1965. 27, 53

BUDIANSKY, B.; O'CONNELL, R. J. Elastic moduli of a cracked solid. **International Journal of Solids and Structures**, v. 12, n. 2, p. 81–97, 1976. ISSN 00207683. 58

BUDIANSKY, B.; WU, T. T. Proc. 4 th Congr. Appl. Mech. **National Congr. Appl. Mech**, p. 1175, 1962. 29

BURAKOWSKI, L.; REZENDE, M. C. Modificação da rugosidade de fibras de carbono por método químico para aplicação em compósitos poliméricos. **Polímeros**, v. 11, n. 2, p. 51–57, 2001. ISSN 0104-1428. 24

BURYACHENKO, V. A. The overall elastoplastic behavior of multiphase materials with isotropic components. **Acta Mechanica**, v. 119, p. 93–117, 1996. ISSN 00015970. 29

CASTAÑEDA, P. P. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 39, n. 1, p. 45–71, 1991. ISSN 00225096. 90

CASTAÑEDA, P. P. Exact second-order estimates for the effective mechanical properties of nonlinear composite materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 44, n. 6, p. 827–862, 1996. ISSN 00225096. 81, 82, 83

CASTANEDA, P. P.; WILLIS, J. The Calculation of the Effective Tensor Coefficient of the Medium for the Objects with Microinclusions. **Mech. Phys. Solids**, v. 43, n. 827, 1995. 56

CAVALCANTE, M. A.; PINDERA, M. J. Generalized FVDAM theory for elastic-plastic periodic materials. **International Journal of Plasticity**, Elsevier, v. 77, p. 90–117, 2016. ISSN 07496419. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijplas.2015.09.010>. 34

CAVALCANTE, M. A. A.; PINDERA, M. J. Finite-volume enabled transformation field analysis of periodic materials. **International Journal of Mechanics and Materials in Design**, v. 9, p. 153–179, 2013. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s10999-013-9216-z>. 34

CHABOCHE, J. L. Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity. **International Journal of Plasticity**, v. 5, n. 3, p. 247–302, 1989. ISSN 07496419. 32

CHABOCHE, J. L.; KANOUTÉ, P. On the 'isotropic' and 'anisotropic' approximations of the tangent operator in the incremental tangent and affine methods. **Comptes Rendus - Mecanique**, v. 331, n. 12, p. 857–864, 2003. ISSN 16310721. 32, 75, 84

CHABOCHE, J. L.; KANOUTÉ, P.; ROOS, A. On the capabilities of mean-field approaches for the description of plasticity in metal matrix composites. **International Journal of Plasticity**, v. 21, n. 7, p. 1409–1434, 2005. ISSN 07496419. 36, 83, 84, 85, 172

CHAPRA, S. C.; CANELA, R. Numerical methods for engineers. **Mathematics and Computers in Simulation**, v. 33, n. 3, p. 260, 1991. ISSN 03784754. Disponível em: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/037847549190127O>. 28

CHAWLA, K. K. **Composite Materials - Science and Engineering**. 2. ed. New York: Springer US, 1998. ISBN 978-1-4419-3124-5. 24

CHEN, Q. et al. Differential-scheme based micromechanical framework for saturated concrete repaired by the electrochemical deposition method. **Materials and Structures/Materiaux et Constructions**, Springer Netherlands, v. 49, n. 12, p. 5183–5193, 2016. ISSN 13595997. 56, 58

CHEN, W. F.; ZHANG, H. **Plasticity for structural engineers**. [S.l.: s.n.], 1988. v. 14. ISSN 0143974X. ISBN 9781461283805. 76, 77, 79, 80, 81

CHEN, Z. et al. Microstructural characteristics and elastic modulus of porous solids. **Acta Materialia**, Acta Materialia Inc., v. 89, p. 268–277, 2015. ISSN 13596454. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.actamat.2015.02.014>. 26, 58

CHRISTENSEN, R. M.; LO, K. H. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 27, n. 4, p. 315–330, 1979. ISSN 00225096. 28, 53, 54

CHRISTENSEN, R. M.; WAALS, F. M. Effective Stiffness of Randomly Oriented Fibre Composites. **Journal Composite Materials**, v. 6, n. October, p. 518–535, 1972. Disponível em: <https://doi.org/10.1177/002199837200600307>. 26, 28, 43

COLLINI, L. **Micromechanical modeling of the elasto-plastic behavior of heterogeneous nodular cast iron**. Tese (Doutorado) — Universita' Degli Studi di Parma, Parma, 2004. 25

CONIGLIO, N.; CROSS, C. E. Mechanisms for solidification crack initiation and growth in aluminum welding. **Metallurgical and Materials Transactions A: Physical Metallurgy and Materials Science**, v. 40, n. 11, p. 2718–2728, 2009. ISSN 10735623. 25

COSTA, E. J. H. **Homogeneização de compósitos reforçados por fibras considerando efeitos de interfases. MSc thesis**. Universidade Federal de Alagoas, Maceió: [s.n.], 2017. 113 p. 52

CVITANIĆ, V.; KOVAČIĆ, M. Algorithmic formulations of evolutionary anisotropic plasticity models based on non-associated flow rule. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 14, n. 10, p. 1853–1871, 2017. ISSN 16797825. 79

DAI, L. H.; HUANG, G. J. Incremental micromechanical scheme for nonlinear particulate composites. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 43, n. 5, p. 1179–1193, 2001. ISSN 00207403. 31

DANIEL, I. M. **Engineering mechanics of composite materials**. Segunda. New York: [s.n.], 2006. v. 17. ISSN 02613069. ISBN 9780195150971. 24

DANIEL, I. M.; ISHAI, O. **Engineering Mechanics of Composite Materials**. [s.n.], 1994. ISBN 0-19-507506-4. Disponível em: <https://global.oup.com/ushe/product/engineering-mechanics-of-composite-materials-9780195150971?cc=gb&lang=en&%0Ahttp://www.amazon.it/Engineering-Mechanics-Composite-Materials-Daniel/dp/019515097X>. 24

DAVID, E. C.; ZIMMERMAN, R. W. Compressibility and shear compliance of spheroidal pores: Exact derivation via the Eshelby tensor, and asymptotic expressions in limiting cases. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 48, n. 5, p. 680–686, 2011. ISSN 00207683. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.11.001>. 58

DAVID, J. A.; SMITH, D. E. Elastic Properties of Short-fiber Polymer Composites, Derivation and Demonstration of Analytical Forms for Expectation and Variance from Orientation Tensors. **Journal of COMPOSITE MATERIALS**, v. 42, n. 3, 2008. 62

DELANNAY, L.; DOGHRI, I.; PIERARD, O. Prediction of tension-compression cycles in multiphase steel using a modified incremental mean-field model. **International Journal of Solids and Structures**, v. 44, n. 22-23, p. 7291–7306, 2007. ISSN 00207683. 32

Digimat Student. **Digmat Student**. 2023. Disponível em: <https://www.e-xstream.com/academia/students/student-edition>. 64

DILL, E. H. **Continuum Mechanics: Elasticity, Plasticity, Viscoelasticity**. [S.l.: s.n.], 2007. v. 66. 333 p. ISBN 0-8493-9779-0. 85

DOGHRI, I. **Mechanics of Deformable Solids: linear, nonlinear, analytical and computational aspects**. 1. ed. [S.l.: s.n.], 2000. 213–250 p. ISSN 21924740. ISBN 9783642086298. 25, 81, 82

DOGHRI, I. et al. A second-moment incremental formulation for the mean-field homogenization of elasto-plastic composites. **International Journal of Plasticity**, Elsevier, v. 27, n. 3, p. 352–371, 2011. ISSN 07496419. 33, 90

DOGHRI, I.; FRIEBEL, C. Effective elasto-plastic properties of inclusion-reinforced composites. Study of shape, orientation and cyclic response. **Mechanics of Materials**, v. 37, n. 1, p. 45–68, 2005. ISSN 01676636. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2003.12.007>. 92

DOGHRI, I.; OUAAR, A. Homogenization of two-phase elasto-plastic composite materials and structures Study of tangent operators , cyclic plasticity and numerical algorithms. **International Journal of Solids and Structures**, v. 40, p. 1681–1712, 2003. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00013-1>. 31, 32, 36, 81, 83, 84, 92, 102

DOGHRI, I.; TINEL, L. Micromechanical modeling and computation of elasto-plastic materials reinforced with distributed-orientation fibers. **International Journal of Plasticity**, v. 21, n. 10, p. 1919–1940, 2005. ISSN 07496419. 32, 64

DOGHRI, I.; TINEL, L. Micromechanics of inelastic composites with misaligned inclusions: Numerical treatment of orientation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, n. 13-16, p. 1387–1406, 2006. ISSN 00457825. 64

DUNNE, N. P. F. **Introduction Computacional Plasticity**. [S.l.]: Oxford University, 2005. v. 53. 239 p. ISSN 1098-6596. ISBN 978-0-19-856826-1. 78

DUTRA, V. F. P. **Um modelo constitutivo para o concreto reforçado com fibras de aço via teoria da homogeneização**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012. 58

DVORAK, G. J. Transformation Field Analysis of Composite Materials. **Handbook of Materials Behavior Models**, v. 437, n. 1900, p. 311–327, 1992. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/52200>. 30

DVORAK, G. J. **Micromechanics of composite materials**. New York: Springer, 2012. v. 186. 1–460 p. ISSN 09250042. ISBN 9789400741003. 42, 100

DVORAK, G. J.; BAHEI-EL-DIN, Y. A. Elastic-plastic behavior of fibrous composites. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 27, n. 1, p. 51–72, 1979. ISSN 00225096. 29

DVORAK, G. J.; BAHEI-EL-DIN, Y. A. Plasticity analysis of fibrous composites. **Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME**, v. 49, n. 2, p. 327–335, 1982. ISSN 15289036. 29

EROSHKIN, O.; TSUKROV, I. On micromechanical modeling of particulate composites with inclusions of various shapes. **International Journal of Solids and Structures**, v. 42, n. 2, p. 409–427, 2005. ISSN 00207683. 65

ESHELBY, J. D. The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems. **Materials Science and Engineering A**, v. 486, n. 1-2, p. 42–49, 1957. ISSN 09215093. Disponível em: <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/9781118495223.ch57/summary%0Ahttp://scholar.google.com/scholar?hl=en&btnG=Search&q=intitle:Gamma'+Formation+in+a+Nickel-Base+Disk+Superalloy#0%5Cnhttp://scholar.google.com/scholar?hl=en&btnG=Search&q=intitle:gamm>. 24, 25, 28, 33, 34, 36, 48, 52, 64, 90, 93, 123, 171, 172

FASSI-FEHRI, O. **Le problème de la paire d ' inclusions plastiques et hétérogènes dans une matrice anisotrope : application à l ' étude du comportement des matériaux composites et de la plasticité To cite this version : HAL Id : tel-01775688 soutenance et mis à dispositio**. Tese (Doutorado) — Université de Lorraine, 1985. 28

FASSI-FEHRI, O.; HIHI, A.; BERVEILLER, M. Multiple site self consistent scheme. **International Journal of Engineering Science**, v. 27, n. 5, p. 495–502, 1989. ISSN 00207225. 28

FERRARI, M. Asymmetry and the high concentration limit of the Mori-Tanaka effective medium theory. **Mechanics of Materials**, v. 11, n. 3, p. 251–256, 1991. ISSN 01676636. 56

FILHO, R. d. S. E. **Homogeneização de propriedades térmicas e mecânicas de materiais compósitos considerando efeitos de interfaces imperfeitas**. 170 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Alagoas, 2015. Disponível em: <http://eprints.ums.ac.id/37501/6/BABII.pdf>. 24

FRITZEN, F. et al. Computational homogenization of elasto-plastic porous metals. **International Journal of Plasticity**, Elsevier, v. 29, n. 1, p. 102–119, 2012. ISSN 07496419. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijplas.2011.08.005>. 25

GAVAZZI, A. C.; LAGOUDAS, D. C. On the numerical evaluation of Eshelby's tensor and its application to elastoplastic fibrous composites. **Computational Mechanics**, v. 7, n. 1, p. 13–19, 1990. ISSN 01787675. 30

GAWRONSKA, E. Different Techniques of Determination of the Cracking Criterion for Solidification in Casting. **Procedia Engineering**, The Author(s), v. 177, p. 86–91, 2017. ISSN 18777058. 25

GHEZAL, M. I. E.; DOGHRI, I. Micromechanical modeling of porous solids. **Poromechanics V - Proceedings of the 5th Biot Conference on Poromechanics**, p. 1736–1745, 2013. 25

GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas: Uma introdução com aplicações usando o MATLAB**. Porto Alegre: [s.n.], 2008. ISBN 9788577802975. 28

GIORDANO, S. Differential schemes for the elastic characterisation of dispersions of randomly oriented ellipsoids. **European Journal of Mechanics, A/Solids**, v. 22, n. 6, p. 885–902, 2003. ISSN 09977538. 28, 58, 63

GONG, S.; LI, Z.; ZHAO, Y. Y. An extended Mori-Tanaka model for the elastic moduli of porous materials of finite size. **Acta Materialia**, v. 59, n. 17, p. 6820–6830, 2011. ISSN 13596454. 25

GONZÁLEZ, C.; LLORCA, J. A Self-consistent approach to the elasto-plastic behaviour of two-phase materials including damage. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 48, n. 4, p. 675–692, 2000. ISSN 00225096. 31, 32

GRILO, T. J. **Estudo de modelos constitutivos anisotrópicos para chapas metálicas**. 153 p. Tese (Doutorado) — Universidade de Aveeiro, 2011. 77

GUTERRES, A. M.; OLIVEIRA, C. A. L. D.; SANTOS, C. A. D. Influence of porosity on some mechanical properties of an Al-6.5%Si-0.6%Mg as-cast and heat-treated alloy. **Revista Matéria**, v. 24, n. 1, 2019. ISSN 15177076. 25

HABERMAN, M. R. **Design of high loss viscoelastic composites through micromechanical modeling and decision based materials design**. Tese (Doutorado) — School of Mechanical Engineering, Georgia, 2007. Disponível em: <http://hdl.handle.net/1853/14599>. 24

HASHIN, Z. The differential scheme and its application to cracked materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 36, n. 6, p. 719–734, 1988. ISSN 00225096. 56

HASHIN, Z.; ROSEN, B. W. The Elastic Moduli of Fiber-Reinforced Materials. **Journal of Applied Mechanics**, n. 63, 1964. Disponível em: <http://asme.org/terms>. 27

HASHIN, Z.; SHTRICKMAN, A. A variational approach to the elastic behavior of multiphase materials. **J. Mech. Phys. Solids J. Mech. Phys. Solids**, v. 11, n. 42, p. 127–140, 1963. 27

HAUS, S. A. **Influência do Efeito Bauschinger no Retorno Elástico em Aços Avançados de Elevada Resistência**. 1–21 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011. 79

HERSHEY, A. V. The Elasticity of an Isotropic Aggregate of Anisotropic Cubic Crystals. **J. Appl. Mech**, v. 21, p. 236–240, 1954. 53

HESSMAN, P. A. et al. On mean field homogenization schemes for short fiber reinforced composites: Unified formulation, application and benchmark. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier Ltd, v. 230-231, p. 111141, 2021. ISSN 00207683. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.111141>. 53

Hexagon. **Digimat Mean Field User's Guide**. [S.l.], 2021. 64

HILL, R. Elastic properties of reinforced solids: Some Theorical Principles. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 11, n. Hill 1962, p. 357–372, 1963. 24, 27, 28, 43, 45, 46, 91

HILL, R. A Self-Consistent Mechanics of Composite Materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 13, n. 4, p. 213–222, 1965. 27, 53, 83, 84, 91

HILL, R. Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 13, n. 2, p. 89–101, 1965. ISSN 00225096. 26, 29, 36, 37, 89, 91

HOANG, T. H. Approches d'homogénéisation numériques incrémentales pour le calcul des structures hétérogénes élasto-plastiques et élasto-visco-plastiques. **Thèse doctorale**, p. 111–122, 2015. 87

HORI, H.; NEMAT-NASSER, S. Overall moduli of solids with microcracks: Load-induced anisotropy. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 31, n. 2, p. 155–171, 1983. ISSN 00225096. 28

HORI, M.; NEMAT-NASSER, S. Double-inclusion model and overall moduli of multi-phase composites. **Mechanics of Materials**, v. 14, n. 3, p. 189–206, 1993. ISSN 01676636. 28, 33

HU, G. A method of plasticity for general aligned spheroidal void or fiber-reinforced composites. **International Journal of Plasticity**, v. 12, n. 4, p. 439–449, 1996. ISSN 07496419. 29

HUANG, Z.-M.; ZHOU, Y.-X. **Strength of Fibrous Composites**. [S.l.: s.n.], 2011. ISBN 9787308082686. 164

HUTCHINSON, J. W. Elastic-Plastic Behaviour of Polycrystalline Metals and Composites. **The Royal Society**, v. 319, p. 247–272, 1970. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/77755>. 29

JAIN, A. et al. Pseudo-grain discretization and full Mori Tanaka formulation for random heterogeneous media: Predictive abilities for stresses in individual inclusions and the matrix. **Composites Science and Technology**, Elsevier Ltd, v. 87, p. 86–93, 2013. ISSN 02663538. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compscitech.2013.08.009>. 35

JIANG, T. **Contributions à la modélisation micromécanique des comportements anélastiques des géomatériaux hétérogènes**. 125 p. Tese (Doutorado) — Université des Sciences etTechnologies de Lille, 2009. 25, 83, 85

JIANG, T.; SHAO, J. F.; XU, W. Y. A micromechanical analysis of elastoplastic behavior of porous materials. **Mechanics Research Communications**, v. 38, n. 6, p. 437–442, 2011. ISSN 00936413. 130

JU, J. W.; SUN, L. Z. Effective elastoplastic behavior of metal matrix composites containing randomly located aligned spheroidal inhomogeneities. Part II: applications. **International Journal of Solids and Structures**, v. 38, n. 2, p. 203–225, 2001. ISSN 00207683. 60

KACHANOV, M. Effective elastic properties of cracked solids: Critical review of some basic concepts. **Applied Mechanics Reviews**, v. 45, n. 8, p. 304–336, 1992. ISSN 00036900. 25

KAMMOUN, S. **Micromechanical modeling of the progressive failure in short glass-fiber reinforced thermoplastics**. Tese (Doutorado) — Université catholique de Louvain, Louvain, 2011. 92

KAMMOUN, S. et al. Micromechanical modeling of short glass-fiber reinforced thermoplastics-Isotropic damage of pseudograins. **AIP Conference Proceedings**, v. 1353, n. 2011, p. 972–977, 2011. ISSN 0094243X. 64

KANG, G.; KAN, Q. **Cyclic Plasticity of Engineering Materials**. [S.l.: s.n.], 2017. ISBN 9781119180807. 40

KARL, T.; BÖHLKE, T. Unified mean-field modeling of viscous short-fiber suspensions and solid short-fiber reinforced composites. **Archive of Applied Mechanics**, Springer Berlin Heidelberg, v. 92, n. 12, p. 3695–3727, 2022. ISSN 14320681. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00419-022-02257-4>. 45

KAW, A. K. **Composite Materials**. 2. ed. [S.l.: s.n.], 2006. ISBN 9780849313431. 24

KAW, A. K. **Mechanics of Composite Materials**. 2. ed. New York: CRC Taylor & Francis Group, 2006. ISBN 0-8493-1343-0. 24

KIM, M. **Development of differential scheme micromechanics modeling framework for predictions of hot-mix asphalt (HMA) complex modulus and experimental validations**. Tese (Doutorado) — University of Illinois at Urbana-Champaign, 2009. 56, 58

KIM, N. H. **Introduction to nonlinear finite element analysis**. [S.l.: s.n.], 2015. 1–430 p. ISBN 9781441917461. 76, 79, 80, 81, 82

KOUASSI, A. Y. et al. Dispersion and morphology analysis of PMMA/organoclay nanocomposites using the Ripley functions and determination of effective elastic properties. **Composite Structures**, v. 312, n. March, 2023. ISSN 02638223. 64

KRABBENHØFT, K. Basic Computational Plasticity. **Technical University of Denmark**, n. June, p. 1–40, 2002. 79

KRÖNER, E. Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls. **Zeitschrift für Physik**, v. 151, p. 504–518, 1958. 53

KRÖNER, E. On the plastic deformation of polycrystals. **Acta Metallurgica**, v. 9, n. 2, p. 155–161, 1961. ISSN 00016160. 28, 29

KUSTER, G. T.; TOKSOZ, M. N. Velocity and Attenuation os Seismic Waves in Tho-Phase Media: Part I. Teorical Formalations. **Society of Exploration Geophysicist**, v. 39, n. 1973, p. 587–606, 1974. ISSN 1942-2156. Disponível em: <https://doi.org/10.1190/1.1440450>. 58

LAGES, E. N.; MARQUES, S. P. C. An eigenstrain-based micromechanical model for homogenization of elastic multiphase/multilayer composites. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier Inc., v. 124, p. 109–121, 2023. ISSN 0307904X. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2023.07.033>. 35

LAGOUDAS, D. C.; GAVAZZI, A. C.; NIGAM, H. Elastoplastic behavior of metal matrix composites based on incremental plasticity and the Mori-Tanaka averaging scheme. **Computational Mechanics**, v. 8, n. 3, p. 193–203, 1991. ISSN 01787675. 30

LALA, S. D.; SADIKBASHA, S.; DEOGHARE, A. B. Prediction of elastic modulus of polymer composites using Hashin–Shtrikman bound, mean field homogenization and finite element technique. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, v. 234, n. 8, p. 1653–1659, 2020. ISSN 20412983. 64

LI, D. et al. Effect of pore defects on mechanical properties of graphene reinforced aluminum nanocomposites. **Metals**, v. 10, n. 4, p. 1–9, 2020. ISSN 20754701. 25

LI, S.; WANG, G. **Introduction to micromechanics and nanomechanics**. [S.l.]: Word Scientific Publishing, 2008. 515 p. ISBN 981-281-413-2. 48, 49

LI, Y.; LI, Y. Evaluation of elastic properties of fiber reinforced concrete with homogenization theory and finite element simulation. **Construction and Building Materials**, Elsevier Ltd, v. 200, p. 301–309, 2019. ISSN 09500618. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2018.12.134>. 60

LIU, J. et al. A Study on the Mechanical Properties of the Representative Volume Element in Fractal Porous Media. **Geofluids**, v. 2017, 2017. ISSN 14688123. 25, 26

LIU, L.; HUANG, Z. A Note on Mori-Tanaka's method. **Acta Mechanica Solida Sinica**, v. 27, n. 3, p. 234–244, 2014. ISSN 18602134. 54

LOMOV, S. V.; ABDIN, Y.; JAIN, A. Mori-tanaka methods for micromechanics of random fibre composites. **ICCM International Conferences on Composite Materials**, v. 2015-July, n. July, p. 19–24, 2015. 56

LUO, J.; STEVENS, R. Porosity-dependence of elastic moduli and hardness of 3Y-TZP ceramics. v. 25, 1999. 25

MA, L.; KORSUNSKY, A. M. The principle of equivalent eigenstrain for inhomogeneous inclusion problems. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier Ltd, v. 51, n. 25-26, p. 4477–4484, 2014. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.08.023>. 47

MA, L. H. et al. Elastoplastic mechanics of porous materials with varied inner pressures. **Mechanics of Materials**, Elsevier, v. 73, p. 58–75, 2014. ISSN 01676636. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmat.2014.02.005>. 25

MAGHOUS, S.; DORMIEUX, L.; BARTHÉLÉMY, J. F. Micromechanical approach to the strength properties of frictional geomaterials. **European Journal of Mechanics, A/Solids**, Elsevier Masson SAS, v. 28, n. 1, p. 179–188, 2009. ISSN 09977538. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechsol.2008.03.002>. 33

MANDEL, J. Generalisation dans r9 de la regle du potentiel plastique pour un element polycristallin. **Comptes rendus de l'Académie des Sci**, v. 280, n. 22, p. 481–484, 1980. Disponível em: <http://pascal-francis.inist.fr/vibad/index.php?action=getRecordDetail&idt=PASCAL8130018916>. 45

MANOYLOV, A. V.; BORODICH, F. M.; EVANS, H. P. Modelling of elastic properties of sintered porous materials. **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 469, n. 2154, 2013. ISSN 14712946. 25

MAVKO, G. M.; NUR, A. The Effect of Nonelliptical Cracks on the Compressibility of Rocks. **Journal of Geophysical Research**, v. 83, n. 8, p. 1–6, 1978. 58

MCLAUGHLIN, R. A study of the differential scheme for composite materials. **International Journal of Engineering Science**, v. 15, n. 4, p. 237–244, 1977. ISSN 00207225. 27, 56

MELO, C. F. d. **Avaliação comparativa da homogeneização de Mori-Tanaka utilizando o tensor de Eshelby em materiais bifásicos com diferentes formatos de inclusão. MSc thesis**. Universidade Federal do Paraná, Curitiba: [s.n.], 2015. 98 p. 54

MICOTA, D.; ISAINCU, A.; MARSAVINA, L. Micromechanical modeling of glass fiber reinforced plastic material. **Materials Today: Proceedings**, Elsevier Ltd., v. 45, p. 4330–4336, 2020. ISSN 22147853. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.12.919>. 64

MILED, K.; SAB, K.; ROY, R. L. Effective elastic properties of porous materials: Homogenization schemes vs experimental data. **Mechanics Research Communications**, v. 38, n. 2, p. 131–135, 2011. ISSN 00936413. 67, 68

MOKARIZADEHHAGHIGHISHIRAZI, M. et al. Homogenisation of the Local Thermal Conductivity in Injection-Moulded Short Fibre Reinforced Composites. **Polymers**, v. 14, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.3390/polym14163360>. 60

MOLAVITABRIZI, D.; EKBERG, A.; MOUSAVI, S. M. Computational model for low cycle fatigue analysis of lattice materials: Incorporating theory of critical distance with elastoplastic homogenization. **European Journal of Mechanics, A/Solids**, Elsevier Masson SAS, v. 92, p. 104480, 2022. ISSN 09977538. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104480>. 35

MORI, T.; TANAKA, K. Avarage Stress in Matrix and Avarage Elastic Energy of Materials with Misfitting Inclusions. **Acta Metallurgica**, v. 21, n. 5, p. 571–574, 1973. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0001616073900643>. 26, 27, 28, 30, 32, 35, 37, 54, 61, 64, 87, 88, 90, 92, 122, 123, 127, 138, 164, 165

MOULINEC, H.; SUQUET, P. A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 157, n. 1-2, p. 69–94, 1998. ISSN 00457825. 30

MOULINEC, H.; SUQUET, P. Intraphase strain heterogeneity in nonlinear composites: A computational approach. **European Journal of Mechanics, A/Solids**, v. 22, n. 5, p. 751–770, 2003. ISSN 09977538. 90

MÜLLER, V. et al. Homogenization of linear elastic properties of short-fiber reinforced composites - A comparison of mean field and voxel-based methods. **International Journal of Solids and Structures**, v. 67-68, p. 56–70, 2015. ISSN 00207683. 54

MURA, T. **Micrormechanics of defects in solids**. [S.l.: s.n.], 1982. ISBN 9789401185486. 48, 58

NEMAT-NASSER, S. **Applied Mathematics and Mechanics: Overall Properties os Heterogeneous Materials**. [S.l.: s.n.], 1993. v. 37. ISBN 0444898816. 48

NEMAT-NASSER, S.; HORI, M. **Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials**. 1. ed. Amsterdam: Elsevier B.V., 1993. v. 37. ISBN 0444898816. 32

NIELSEN, L. F. **Composite Materials**. 1. ed. [S.l.]: Springer, 2005. 249 p. ISBN 9783540243854. 58

NORRIS, A. N. A differential scheme for the effective moduli of composites. **Mechanics of Materials**, v. 4, n. 1, p. 1–16, 1985. ISSN 01676636. 56

NOTTA-CUVIER, D. et al. An efficient modelling of inelastic composites with misaligned short fibres. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 50, n. 19, p. 2857–2871, 2013. ISSN 00207683. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.04.031>. 54, 60

ORTOLANO, J. M.; HERNÁNDEZ, J. A.; OLIVER, J. **A Comparative Study On Homogenization Strategies For Multi-Scale Analysis Of Materials**. [S.l.: s.n.], 2013. 156 p. ISBN 978-84-941004-6-8. 52

OUAAR, A. **Micromechanics of rate-independent multi-phase composites : application to Steel Fiber-Reinforced Concrete**. 260 p. Tese (Doutorado) — Université Catholique de Louvain, 2006. 58, 85

PENG, X. et al. Extension of Combined Self-Consistent and Mori-Tanaka Approach to Evaluation of Elastoplastic property of Particulate Composites. **Acta Mechanica**, The Chinese Society of Theoretical and Applied Mechanics, v. 26, n. 1, 2013. 34

PENG, X. et al. Determination of the Eshelby tensor in mean-field schemes for evaluation of mechanical properties of elastoplastic composites. **International Journal of Plasticity**, v. 76, p. 147–165, 2016. ISSN 07496419. 34, 36, 93, 94, 95, 96, 106, 111, 112, 113, 122, 123, 126, 137, 141, 173

PERDAHCIOğLU, E. S.; GEIJSELAERS, H. J. Constitutive modeling of two phase materials using the mean field method for homogenization. **International Journal of Material Forming**, v. 4, n. 2, p. 93–102, 2011. ISSN 19606206. 45, 91

PETTERMANN, H. E. et al. Thermo-elasto-plastic constitutive law for inhomogeneous materials based on an incremental Mori-Tanaka approach. **Computers and Structures**, v. 71, n. 2, p. 197–214, 1999. ISSN 00457949. 31, 90

PIERARD, O. **Micromechanics of inclusion-reinforced composites in elasto-plasticity and modeling and computation**. 179 p. Tese (Doutorado) — Universite Catholique de Louvain, Louvain, 2006. Disponível em: <http://hdl.handle.net/2078.1/5204>. 29, 43

PIERARD, O.; DOGHRI, I. Study of various estimates of the macroscopic tangent operator in the incremental homogenization of elastoplastic composites. **International Journal for Multiscale Computational Engineering**, v. 4, n. 4, p. 521–543, 2006. ISSN 15431649. 32, 82, 84, 85, 96, 114

PIERARD, O.; FRIEBEL, C.; DOGHRI, I. Mean-field homogenization of multi-phase thermo-elastic composites: A general framework and its validation. **Composites Science and Technology**, v. 64, n. 10-11, p. 1587–1603, 2004. ISSN 02663538. 54, 56, 62

PIERARD, O. et al. Micromechanics of elasto-plastic materials reinforced with ellipsoidal inclusions. **International Journal of Solids and Structures**, v. 44, n. 21, p. 6945–6962, 2007. ISSN 00207683. 25, 32, 82

PINDERA, M. J. et al. Micromechanics of spatially uniform heterogeneous media: A critical review and emerging approaches. **Composites Part B: Engineering**, Elsevier, v. 40, n. 5, p. 349–378, 2009. ISSN 13598368. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesb.2009.03.007>. 24

PLESSIS, A. du; YADROITSAVA, I.; YADROITSEV, I. Effects of defects on mechanical properties in metal additive manufacturing: A review focusing on X-ray tomography insights. **Materials and Design**, The Authors, v. 187, p. 108385, 2020. ISSN 18734197. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2019.108385>. 25

POLETTO, M. Compósitos termoplásticos com madeira - uma breve revisão. **Revista Interdisciplinar de Ciência Aplicada**, v. 2, 2017. ISSN 2525-3824. 24

PRAGER, W. The Theory of Plasticity: A Survey of Recent Achievements. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, v. 169, n. 1, 1955. 80

QIU, Y. P.; WENG, G. J. The Influence of Iinclusion Shape on the Overall Elastoplastic Behavior of a Two-Phase Isotropic Composite. **Im. J. Solids Structures**, Pergamon Press plc, v. 27, n. 12, p. 1537–1550, 1991. 29

QIU, Y. P.; WENG, G. J. An Energy Approach to the Plasticity of a Two-Phase Composite Containtng Aligned Inclusions. **Asme**, v. 62, n. December 1995, 1995. 29

QIU, Y. P.; WENG, G. J.; CASTANEDA, P. A Theory of Plasticity for Porous Materials and Particle-Reinforced Composites. v. 59, n. June 1992, 1992. 29, 87

QU, J.; CHERKAOUI, M. **Fundamentals of Micromechanics of Solids**. [S.l.]: John Wiley, 2006. ISBN 9780471464518. 46, 49, 51, 56, 57, 89

REES, D. W. A. **Basic Engineering Plasticity**. 1. ed. Oxford: Elsevier, 2006. ISBN 978-0-7506-8025-7. 79

REKIK, A. et al. Objective evaluation of linearization procedures in nonlinear homogenization: A methodology and some implications on the accuracy of micromechanical schemes. **International Journal of Solids and Structures**, v. 44, n. 10, p. 3468–3496, 2007. ISSN 00207683. 90

RIBEZZO, A. et al. Experimental analysis of carbon-based Phase Change Materials composites for a fast numerical design of cold energy storage systems. **Applied Thermal Engineering**, Elsevier Ltd, v. 231, n. March, p. 120907, 2023. ISSN 13594311. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2023.120907>. 64

SANTOS, A. V. et al. O Incrivel Mundo dos Materiais Porosos – Caracteristicas, Propriedades e Aplicações. **Química Nova na Escola**, v. 38, n. 1, p. 4–11, 2016. ISSN 0104-8899. 26, 132

SCALET, G.; AURICCHIO, F. **Computational Methods for Elastoplasticity: An Overview of Conventional and Less-Conventional Approaches**. [S.l.]: Springer Netherlands, 2018. v. 25. 545–589 p. ISSN 18861784. ISBN 0123456789. 81

SCHJØDT-THOMSEN, J.; PYRZ, R. The Mori-Tanaka stiffness tensor: Diagonal symmetry, complex fibre orientations and non-dilute volume fractions. **Mechanics of Materials**, v. 33, n. 10, p. 531–544, 2001. ISSN 01676636. 55

SEKKATE, Z.; ABOUTAJEDDINE, A.; SEDDOUKI, A. Elastoplastic mean-field homogenization: recent advances review. **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, Taylor & Francis, n. July, 2020. ISSN 15376532. 81

SHEN, W. Q. et al. Prediction of plastic yield surface for porous materials by a machine learning approach. **Materials Today Communications**, Elsevier, v. 25, n. July, p. 101477, 2020. ISSN 23524928. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2020.101477>. 87

SIMO, J. C.; HUGHES, T. J. R. **Computational inelasticity**. [S.l.]: Springer, 1999. v. 37. 134 p. ISSN 08981221. 79

SMITH, W. F. **Princípios de Ciência e Engenharia dos Materiais**. 3. ed. Orlando - Florida: [s.n.], 1998. 885 p. ISBN 972-8298-68-4. 24

SONG, Z. et al. A homogenization scheme for elastoplastic composites using concept of Mori-Tanaka method and average deformation power rate density. **International Journal of Plasticity**, Elsevier, v. 128, n. January, p. 102652, 2020. ISSN 07496419. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2019.102652>. 34, 36

SOUZA_NETO, E. d.; PERIC, D.; OWEN, D. **Computational Methods for Plasticity**. [S.l.: s.n.], 2008. ISBN 9780470694527. 76, 77, 78

SUN, D. Z.; MA, Y. S.; ANDRIEUX, F. Modeling of the influence of pore morphology on damage behavior of an aluminum die casting alloy. **Materials Science Forum**, v. 794-796, n. February, p. 319–324, 2014. ISSN 02555476. 132

SUQUET, P. Overall Properties of Nonlinear Composites. **IUTAM Symposium on Micromechanics of Plasticity and Damage of MultipluJse Materials**, p. 149–156, 1996. 30

SUQUET, P.; CASTANEDA, P. P. Nonlinear Composites. **Advances in Applied Mechanics**, v. 34, p. 171–302, 1998. 30

TANDON, G. P.; WENG, G. J. The effect of aspect ratio of inclusions on the elastic properties of unidirectionally aligned composites. **Polymer Composites**, v. 5, n. 4, p. 327–333, 1984. ISSN 15480569. 28

TANDON, G. P.; WENG, G. J. Average stress in the matrix and effective moduli of randomly oriented composites. **Composites Science and Technology**, v. 27, n. 2, p. 111–132, 1986. ISSN 02663538. 28, 58

TANDON, G. P.; WENG, G. J. A Theory of Particle-Reinforced Plasticity. **Asme**, v. 55, 1988. Disponível em: <http://appliedmechanics.asmedigitalcollection.asme.org/on>. 29

TENG, H. A new formulation of the effective elastic-plastic response of two-phase particulate composite materials. **Mechanics Research Communications**, Elsevier, v. 52, p. 81–87, 2013. ISSN 00936413. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechrescom.2013.07.003>. 33, 34

TENG, H. Effective elastic–plastic response of two-phase composite materials of aligned spheroids under uniaxial loading. **Mechanics of Materials**, Elsevier, v. 117, n. June 2017, p. 91–104, 2018. ISSN 01676636. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2017.10.011>. 34

THORVALDSEN, T. **Modelling the elastic stiffness of nanocomposites using the Mori-Tanaka method**. [S.l.: s.n.], 2015. ISBN 9788246425542. 58, 69, 70

TIAN, W. et al. Evaluation for elastic properties of metal matrix composites with randomly distributed fibers: Two-step mean-field homogenization procedure versus FE homogenization method. **Journal of Alloys and Compounds**, Elsevier B.V, v. 658, p. 241–247, 2016. ISSN 09258388. 64

TIAN, W. et al. Numerical simulation on elastic properties of short-fiber-reinforced metal matrix composites : Effect of fiber orientation. **Composite Structures**, Elsevier, v. 152, p. 408–417, 2016. ISSN 0263-8223. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.05.046>. 60

TIMOTHY, J. J.; MESCHKE, G. A cascade continuum micromechanics model for the effective elastic properties of porous materials. **International Journal of Solids and Structures**, v. 83, p. 1–12, 2016. 25

TUCKER, C. L.; LIANG, E. Stiffness predictions for unidirectional short-fiber composites: Review and evaluation. **Composites Science and Technology**, v. 59, p. 655–671, 1999. ISSN 0266-3538. 54

VAUTRIN, A.; SOL, H. **Determination of the Effective Mechanical Response of Polymer Matrix Composites Via Microstuctural Data**. [S.l.]: Springer Netherlands, 1991. 238–45 p. ISBN 2013206534. 55

VIEIRA, C. d. S. **Homogeneização Térmica e Elástica de Compósitos Periódicos com Interfases**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2018. 24

VINSON, J. R.; SIERAKOWSKI, R. L. **The Behavior of Structures Composed of Composite Materials**. 2. ed. Netherlands: Springer, 2008. ISBN 9781402009044. 24

WALSH, J. B.; GROSENBAUGH, M. A. A new model for analyzing the effect of fractures on compressibility. **Journal of Geophysical Research**, 1979. Disponível em: <https://doi-org.ez133.periodicos.capes.gov.br/10.1029/JB084iB07p03532>. 58

WANG, Y.; HUANG, Z. A Review of Analytical Micromechanics Models on Composite Elastoplastic Behaviour. **Procedia Engineering**, Elsevier B.V., v. 173, p. 1283–1290, 2017. ISSN 18777058. 92

WENG, G. J. Mori-Tanaka's Theory and the Hashin-Shtrikman-Walpole. **International Journal of Engineering Science**, v. 28, n. 11, p. 1111–1120, 1990. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/0020-7225(90)90111-U>. 28

WENG, G. J. The Overall Elastoplastic Stress-Strain Relations of Dual-Phase Metals. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 38, n. 3, p. 419–441, 1990. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/0022-5096(90)90007-Q>. 29

WU, T. T. The effect of inclusion shape on the elastic moduli of a two-phase material. **Solid Structures**, v. 2, n. x, p. 1–8, 1966. 58

YAO, Y. et al. An alternative constitutive model for elastic particle-reinforced hyperelastic matrix composites with explicitly expressed Eshelby tensor. **Composites Science and Technology**, Elsevier Ltd, v. 221, n. February, p. 109343, 2022. ISSN 02663538. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2022.109343>. 35

YIN, S.; PINDERA, M. J. Homogenized moduli and local stress fields of random fiber composites under homogeneous and periodic boundary conditions. **European Journal of Mechanics, A/Solids**, Elsevier Masson SAS, v. 93, n. June 2021, p. 104504, 2022. ISSN 09977538. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104504>. 35

YOSHIMURA, H. N. et al. Porosity dependence of elastic constants in aluminum nitride ceramics. **Materials Research**, v. 10, n. 2, p. 127–133, 2007. ISSN 15161439. 25

YOSHIMURA, H. N. et al. Efeito da porosidade nas propriedades mecânicas de uma alumina de elevada pureza. **Cerâmica**, v. 51, p. 239–251, 2005. 25

ZAOUI, A.; MASSON, R. Micromechanics-based modeling of plastic polycrystals: An affine formulation. **Materials Science and Engineering A**, v. 285, n. 1-2, p. 418–424, 2000. ISSN 09215093. 31

ZHANG, J. J.; BENTLEY, L. R. **Pore geometry and elastic moduli in sandstone**. [S.l.], 2003. v. 15, 1–20 p. Disponível em: <https://www.semanticscholar.org/paper/Pore-geometry-and-elastic-moduli-in-sandstones-Zhang-Bentley/6d90fde3bc65450617f63942390e061f97c220f2>. 58

Apêndices

APÊNDICE A – TEOREMA DE DEFORMAÇÃO MÉDIA

Sabe-se que a deformação média no material heterogêneo é calculada pela Equação A.1:

$$\langle \bar{\varepsilon}_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV, \tag{A.1}$$

e o campo de deformação infinitesimal através da Equação A.2:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \tag{A.2}$$

substituindo Equação A.2 em Equação A.1, tem-se:

$$\langle \bar{\varepsilon}_{i,j} \rangle = \frac{1}{2V} \int_V \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dV, \tag{A.3}$$

aplicando o teorema da divergência, por definição, sai do volume e vai para a superfície do material heterogêneo:

$$\langle \bar{\varepsilon}_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \left(\int_S u_i N_j dS + \int_S u_j N_i dS \right). \tag{A.4}$$

Sabendo-se que $u_i = \varepsilon^0_{i,j} x_j$, $\forall x \in S$. Substituindo u_i na Equação A.4, tem-se:

$$\langle \bar{\varepsilon}_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \left(\int_S \varepsilon^0_{ik} x_j N_j dS + \int_S \varepsilon^0_{jk} x_j N_i dS \right), \tag{A.5}$$

arrumando, fica:

$$\langle \bar{\varepsilon}_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \left(\varepsilon^0_{ik} \int_S x_k N_j dS + \varepsilon^0_{jk} \int_S x_j N_i dS \right), \tag{A.6}$$

aplicando novamente o teorema da divergência, tem-se:

$$\langle \bar{\varepsilon}_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \left(\varepsilon^0_{ik} \int_V \frac{\partial x_k}{\partial x_j} dV + \varepsilon^0_{jk} \int_V \frac{\partial x_k}{\partial x_i} dV \right), \tag{A.7}$$

usando o delta de Kronecker (Equação 2.14), tem-se:

$$\langle \bar{\varepsilon}_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \left(\varepsilon^0_{ik} \int_V \delta_{kj} dV + \varepsilon^0_{jk} \int_V \delta_{ki} dV \right), \tag{A.8}$$

integrando,

$$\langle \bar{\varepsilon}_{ij} \rangle = \frac{1}{2} \left(\varepsilon^0_{ik} \delta_{kj} + \varepsilon^0_{jk} \delta_{ki} \right), \tag{A.9}$$

$$\langle \bar{\varepsilon}_{ij} \rangle = \frac{1}{2} \left(\varepsilon^0_{ik} + \varepsilon^0_{jk} \right), \tag{A.10}$$

por simetria, $\varepsilon^0_{ik} = \varepsilon^0_{jk}$, então, através da Equação A.11, fica demonstrado o teorema da deformação média:

$$\langle \bar{\varepsilon}_{ij} \rangle = \varepsilon^0_{ij} \;\Rightarrow\; \langle \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}. \tag{A.11}$$

Obtendo-se, assim, a relação de igualdade entre a deformação média e a deformação macroscópica no EVR.

APÊNDICE B – TEOREMA DE TENSÃO MÉDIA

Independente da composição e da microestrutura do EVR, o tensor de tensão médio $\langle\bar{\sigma}_{ij}\rangle$, na ausência de força de corpo, é definido pelas tensões σ^0_{ij} aplicada no contorno do EVR

$$t_i = \sigma^0_{ij} N_j, \tag{B.1}$$

em que N_j representa as componentes do vetor unitário normal ao ponto do contorno. Da Equação 2.27, sabe-se que:

$$\langle\bar{\sigma}_{ij}\rangle = \frac{1}{V}\int_V \sigma_{ij} dV. \tag{B.2}$$

As componentes de tensão podem ser escritas na forma:

$$\sigma_{ij} = \delta_{ik}\sigma_{kj}, \tag{B.3}$$

em que, por definição,

$$\delta_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial x_k} = x_{i,k}. \tag{B.4}$$

Substituindo Equação B.3 na Equação B.2, tem-se:

$$\langle\bar{\sigma}_{ij}\rangle = \frac{1}{V}\int_V \delta_{ik}\sigma_{kj} dV, \tag{B.5}$$

ou, ainda usando a Equação B.4,

$$\langle\bar{\sigma}_{ij}\rangle = \frac{1}{V}\int_V x_{i,k}\sigma_{kj} dV. \tag{B.6}$$

O desenvolvimento da Equação B.6, por consideração de equilíbrio de forças, fica:

$$\langle\bar{\sigma}_{ij}\rangle = \frac{1}{V}\int_V \left[\frac{\partial}{\partial x_k}(x_i\sigma_{kj})\right] dV. \tag{B.7}$$

Aplicando o teorema da divergência, tem-se:

$$\langle\bar{\sigma}_{ij}\rangle = \frac{1}{V}\int_S \left[N_k(x_i\sigma^0_{kj})\right] dS = \frac{1}{V}\int_S x_i N_k \sigma^0_{kj} dS, \tag{B.8}$$

Usando novamente o teorema da divergência, fica:

$$\langle\bar{\sigma}_{ij}\rangle = \frac{1}{V}\int_V \frac{\partial}{\partial x_k}(\sigma^0_{kj}x_i) dV, \tag{B.9}$$

$$\langle\bar{\sigma}_{ij}\rangle = \frac{1}{V}\left(\sigma^0_{kj}\frac{\partial x_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \sigma^0_{kj}}{\partial x_k}x_i\right) dV = \frac{1}{V}\int_V \left(\sigma^0_{kj}\frac{\partial x_i}{\partial x_k}\right) dV, \tag{B.10}$$

$$\langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \left(\sigma^0_{kj} \delta_{ik} \right) dV = \frac{1}{V} \int_V \sigma^0_{ij} dV = \sigma^0_{ij}, \tag{B.11}$$

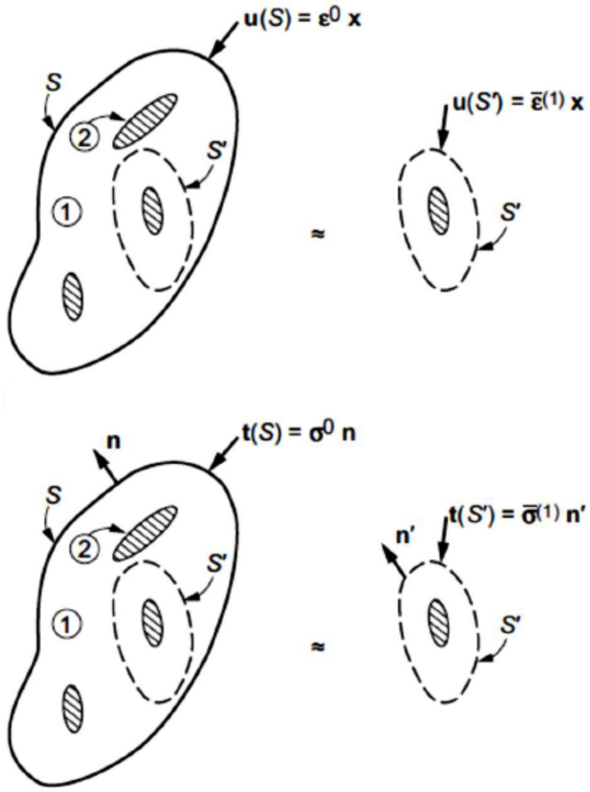
$$\langle \bar{\sigma}_{ij} \rangle = \sigma^0_{ij} \;\Rightarrow\; \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}} \rangle = \bar{\boldsymbol{\sigma}}. \tag{B.12}$$

Obtendo-se, assim, a relação de igualdade entre a tensão média e a tensão macroscópica no EVR.

APÊNDICE C – DETALHAMENTO DA ABORDAGEM DO ESQUEMA DE HOMOGENEIZAÇÃO DE MORI-TANAKA

O método de homogeneização de Mori e Tanaka (1973), conforme pode ser visto na Figura 68, assume que a deformação (ou tensão) média nas heterogeneidades interagentes $\langle\bar{\varepsilon}\rangle^{(2)}$ pode ser aproximada pela deformação (ou tensão) média de uma única heterogeneidade embutida em uma matriz infinita submetida à deformação média na matriz $\langle\bar{\varepsilon}\rangle^{(1)}$ (BORST; SADOWSKI, 2008; HUANG; ZHOU, 2011).

Figura 68 – Esquema conceitual do esquema de homogeneização de Mori-Tanaka: condição de carregamento macroscópico em deformação ou tensão



Fonte: Aboudi, Arnold e Bednarcyk (2013a)

Correlacionando as tensões e deformações médias efetivas, tem-se, respectivamente:

$$\langle\bar{\boldsymbol{\sigma}}\rangle = c_{(1)}\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle^{(1)} + c_{(2)}\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle^{(2)}, \tag{C.1}$$

$$\langle\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\rangle = c_{(1)}\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle^{(1)} + c_{(2)}\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle^{(2)}, \tag{C.2}$$

em que esse material heterogêneo possui fração volumétrica da inclusão igual a $c_{(2)}$ e fração volumétrica da matriz igual a $c_{(1)}$.

Conforme ocorre no método da inclusão equivalente apresentado na seção 2.5, supõe-se que o material da inclusão tenha as mesmas propriedades elásticas do material da matriz e seja submetido a uma tensão macroscópica σ_{ij}^0 (ou deformação macroscópica ε_{ij}^0):

$$\sigma_{ij}^0 = C_{ijkl}^{(1)} : \varepsilon_{kl}^0, \tag{C.3}$$

$$\varepsilon_{ij}^0 = D_{ijkl}^{(1)} : \sigma_{kl}^0, \tag{C.4}$$

em que $C^{(1)}$ é o tensor de rigidez da matriz e $D^{(1)}$ é o tensor de flexibilidade da matriz.

Devido à existência da heterogeneidade, as tensões e deformações medidas na matriz são perturbadas $\widetilde{\sigma}_{ij}$ e $\widetilde{\varepsilon}_{ij}$, respectivamente.

$$\langle\sigma_{ij}\rangle^{(1)} = \sigma_{ij}^0 + \widetilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{(1)} : \left(\varepsilon_{kl}^0 + \widetilde{\varepsilon}_{kl}\right), \tag{C.5}$$

em que $\left(\varepsilon_{ij}^0 + \widetilde{\varepsilon}_{ij}\right) = \langle\varepsilon_{ij}\rangle^{(1)}$ é a deformação média na matriz.

Por outro lado, a tensão e deformação média na heterogeneidade diferem da tensão e deformação média na matriz devido à presença de σ_{ij}' e ε_{ij}'. Portanto,

$$\langle\sigma_{ij}\rangle^{(2)} = \sigma_{ij}^0 + \widetilde{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}' = C_{ijkl}^{(2)} : \left(\varepsilon_{ij}^0 + \widetilde{\varepsilon}_{ij} + \varepsilon_{ij}'\right) \tag{C.6}$$

em que $\left(\varepsilon_{ij}^0 + \widetilde{\varepsilon}_{ij} + \varepsilon_{ij}'\right) = \langle\varepsilon_{ij}\rangle^{(2)}$ é a deformação média na fibra.

Da mesma forma que ocorre no método da inclusão equivalente, no esquema de homogeneização de Mori e Tanaka (1973) a inclusão fictícia presente no material homogêneo é submetida a um *eigenstrain* ε^*. Essa equivalência é escrita como:

$$\sigma_{ij}^{(2)} = C_{ijkl}^{(2)} : \left(\varepsilon_{kl}^0 + \widetilde{\varepsilon}_{kl} + \varepsilon_{kl}'\right) = C_{ijkl}^{(1)} : \left(\varepsilon_{kl}^0 + \widetilde{\varepsilon}_{kl} + \varepsilon_{kl}' - \varepsilon_{kl}^*\right), \tag{C.7}$$

em que

$$\varepsilon_{ij}' = S_{ijkl}^{\Omega} : \varepsilon_{kl}^*. \tag{C.8}$$

Ao usar a Equação C.8 na Equação C.7, pode-se encontrar o *eigenstrain* ε_{ij}^*:

$$\varepsilon_{ij}^* = (C_{ijkl}^{(1)})^{-1} : \left(C_{klpq}^{(1)} - C_{klpq}^{(2)}\right) : \langle\varepsilon_{pq}\rangle^{(2)}, \tag{C.9}$$

então, usando a , a deformação ε_{ij}' também pode ser obtida;

$$\varepsilon_{ij}' = S_{ijkl}^{\Omega}(C_{klpq}^{(1)})^{-1} : \left(C_{pqrs}^{(1)} - C_{pqrs}^{(2)}\right) : \langle\varepsilon_{rs}\rangle^{(2)}. \tag{C.10}$$

Ao comparar a Equação C.9 com a Equação C.10, tem-se:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle^{(2)} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle^{(1)} + \varepsilon'_{ij}, \tag{C.11}$$

Substituindo a Equação C.10 na Equação C.11, a relação entre a deformação na inclusão e na matriz pode ser encontrada:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(2)} = \mathbb{A}_i^{dil} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(1)} \tag{C.12}$$

em que:

$$\mathbb{A}_i^{dil} = [\mathbb{I} + \mathbb{S}^{\Omega} : (\mathbb{C}^{(1)})^{-1} : (\mathbb{C}^{(2)} - \mathbb{C}^{(1)})]^{-1}. \tag{C.13}$$

Usando as equações constitutivas da inclusão (Equação 2.33) e da matriz (Equação 2.34), uma relação correlacionando $\sigma_{ij}^{(1)}$ e $\sigma_{ij}^{(2)}$ pode ser deduzido das Equação C.12 e Equação C.13 como:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(2)} = \mathbb{B}_i^{dil} : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(1)}, \tag{C.14}$$

em que $\mathbb{B}_i^{dil}$ apresentado na Equação 2.66 pode ser reescrito como segue

$$\mathbb{B}_i^{dil} = \mathbb{C}^{(2)} : \mathbb{A}_i^{dil} : (\mathbb{C}^{(1)})^{-1}. \tag{C.15}$$

Substituindo a Equação C.12 na Equação C.2, as deformações médias nos materiais podem ser relacionadas com a deformação média no compósito por meio de:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(2)} = \left[c_{(2)}\mathbb{I} + c_{(1)}\mathbb{A}_i^{dil} \right]^{-1} : \langle \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle, \tag{C.16}$$

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^{(1)} = \mathbb{A}_i^{dil} : \left[c_{(2)}\mathbb{I} + c_{(1)}\mathbb{A}_i^{dil} \right]^{-1} : \langle \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle. \tag{C.17}$$

Similarmente, usando a Equação C.1 e a Equação C.14, obtém-se:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(1)} = \left[c_{(2)}\mathbb{I} + c_{(1)}\mathbb{B}_i^{dil} \right]^{-1} : \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}} \rangle, \tag{C.18}$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(2)} = \mathbb{B}_i^{dil} : \left[c_{(2)}\mathbb{I} + c_{(1)}\mathbb{B}_i^{dil} \right]^{-1} : \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}} \rangle. \tag{C.19}$$

APÊNDICE D – COMPONENTES DO TENSOR DE ESHELBY

O tensor de Eshelby depende da geometria da inclusão e do material da matriz. O tensor de Eshelby é calculado por:

$$\varepsilon_{ij}^{\Omega} = S_{ijkl}^{\Omega} \cdot \varepsilon_{kl}^{*}. \tag{D.1}$$

Por relacionar dois tensores de deformação simétricos, o tensor de Eshelby satisfaz simetrias menores conforme abaixo:

1. $S_{ijkl}^{\Omega} = S_{jikl}^{\Omega} = S_{ijlk}^{\Omega}$,
2. $S_{ijkl}^{\Omega} \neq S_{klij}^{\Omega}$.

Considere o esferoide prolate com o semi-eixo maior direcionado ao longo do eixo x_1 do sistema de coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3). Portanto, o tensor de Eshelby de forma reduzida e explícita, fica:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^{\Omega} \\ \varepsilon_{22}^{\Omega} \\ \varepsilon_{33}^{\Omega} \\ \varepsilon_{23}^{\Omega} \\ \varepsilon_{31}^{\Omega} \\ \varepsilon_{12}^{\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111}^{\Omega} & S_{1122}^{\Omega} & S_{1133}^{\Omega} & 0 & 0 & 0 \\ S_{2211}^{\Omega} & S_{2222}^{\Omega} & S_{2233}^{\Omega} & 0 & 0 & 0 \\ S_{3311}^{\Omega} & S_{3322}^{\Omega} & S_{3333}^{\Omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2S_{2323}^{\Omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2S_{1313}^{\Omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2S_{1212}^{\Omega} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^{*} \\ \varepsilon_{22}^{*} \\ \varepsilon_{33}^{*} \\ \varepsilon_{23}^{*} \\ \varepsilon_{31}^{*} \\ \varepsilon_{12}^{*} \end{bmatrix}. \tag{D.2}$$

- Componentes do tensor de Eshelby INCLUSÃO ESFEROIDAL alinhado com o eixo x_1:

$$S_{1111}^{\Omega} = \frac{1}{2(1-\nu_m)} \left\{ 1 - 2\nu_m + \frac{3\alpha^2 - 1}{\alpha^2 - 1} - \left[1 - 2\nu_m + \frac{3\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \right] g \right\}, \tag{D.3}$$

$$S_{2222}^{\Omega} = S_{3333}^{\Omega} = \frac{3}{8(1-\nu_m)} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} + \frac{1}{4(1-\nu_m)} \left[1 - 2\nu_m - \frac{9}{4(\alpha^2 - 1)} \right] g, \tag{D.4}$$

$$S_{2233}^{\Omega} = S_{3322}^{\Omega} = \frac{1}{4(1-\nu_m)} \left\{ \frac{\alpha^2}{2(\alpha^2 - 1)} - \left[1 - 2\nu_m + \frac{3}{4(\alpha^2 - 1)} \right] g \right\}, \tag{D.5}$$

$$S_{2211}^{\Omega} = S_{3311}^{\Omega} = -\frac{1}{2(1-\nu_m)} \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} + \frac{1}{4(1-\nu_m)} \left\{ \frac{3\alpha^2}{\alpha^2 - 1} - (1 - 2\nu_m) \right\} g, \tag{D.6}$$

$$S^{\Omega}_{1122} = S^{\Omega}_{1133} = -\frac{1}{2(1-\nu_m)}\left[1-2\nu_m+\frac{1}{\alpha^2-1}\right]+\frac{1}{2(1-\nu_m)}\left[1-2\nu_m+\frac{3}{2(\alpha^2-1)}\right]g, \tag{D.7}$$

$$S^{\Omega}_{2323} = S^{\Omega}_{3232} = \frac{1}{4(1-\nu_m)}\left\{\frac{\alpha^2}{2(\alpha^2-1)}+\left[1-2\nu_m-\frac{3}{4(\alpha^2-1)}\right]g\right\}, \tag{D.8}$$

$$S^{\Omega}_{1212} = S^{\Omega}_{1313} = \frac{1}{4(1-\nu_m)}\left\{1-2\nu_m-\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}-\frac{1}{2}\left[1-2\nu_m-\frac{3(\alpha^2+1)}{\alpha^2-1}\right]g\right\}. \tag{D.9}$$

Em que $S^{\Omega}_{1313} = S^{\Omega}_{1212}$ e $S^{\Omega}_{3131} = S^{\Omega}_{1313}$.

com as seguintes simetrias:

$S^{\Omega}_{1111} = S^{\Omega}_{2222}$,

$S^{\Omega}_{1122} = S^{\Omega}_{2211}$,

$S^{\Omega}_{1133} = S^{\Omega}_{2233}$,

$S^{\Omega}_{3311} = S^{\Omega}_{3322}$,

$S^{\Omega}_{1212} = S^{\Omega}_{2121}$,

$S^{\Omega}_{1313} = S^{\Omega}_{2323}$.

Sabendo que ν_m é o coeficiente de Poisson da matriz, α é a razão de aspecto da inclusão e g é um parâmetro que depende da geometria da inclusão, mostrado na Equação D.10 e Equação D.11.

- para formato prolate:

$$g = \frac{\alpha}{(\alpha^2-1)^{3/2}}\cdot\left[\alpha(\alpha^2-1)^{\frac{1}{2}}-\cosh^{-1}\alpha\right]. \tag{D.10}$$

- para formato oblate:

$$g = \frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^{3/2}}\cdot\left[\cos^{-1}\alpha-a(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}\right]. \tag{D.11}$$

A razão de aspecto é calculado por:

$$\alpha = \frac{l}{d}. \tag{D.12}$$

Para $\alpha = 1$, a inclusão é esférica.

- INCLUSÃO COM FORMATO ESFÉRICA ($a_1 = a_2 = a_3 = a$):

$$S^{\Omega}_{1111} = S^{\Omega}_{2222} = S^{\Omega}_{3333} = \frac{7-5\nu_m}{15(1-\nu_m)}, \tag{D.13}$$

$$S^{\Omega}_{1122} = S^{\Omega}_{2233} = S^{\Omega}_{3311} = S^{\Omega}_{1133} = S^{\Omega}_{2211} = S^{\Omega}_{3322} = \frac{5\nu_m - 1}{15(1-\nu_m)}, \tag{D.14}$$

$$S^{\Omega}_{1212} = S^{\Omega}_{2323} = S^{\Omega}_{3131} = \frac{4-5\nu_m}{15(1-\nu_m)}. \tag{D.15}$$

- INCLUSÃO COM FORMATO DE DISCO ACHATADO:

$$S^{\Omega}_{1111} = S^{\Omega}_{2222} = \frac{(13-8\nu_m)}{32(1-\nu_m)}\pi\frac{a_3}{a_1}, \tag{D.16}$$

$$S^{\Omega}_{1122} = S^{\Omega}_{2211} = \frac{(8\nu_m-1)}{32(1-\nu_m)}\pi\frac{a_3}{a_1}, \tag{D.17}$$

$$S^{\Omega}_{3311} = S^{\Omega}_{3322} = \frac{\nu_m}{1-\nu_m}\left[1 - \frac{(4\nu_m+1)}{8\nu_m}\pi\frac{a_3}{a_1}\right], \tag{D.18}$$

$$S^{\Omega}_{1212} = \frac{(7-8\nu_m)}{32(1-\nu_m)}\pi\frac{a_3}{a_1}, \tag{D.19}$$

$$S^{\Omega}_{3131} = S^{\Omega}_{2323} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{(\nu_m-2)}{4(1-\nu_m)}\pi\frac{a_3}{a_1}\right], \tag{D.20}$$

$$S^{\Omega}_{3333} = 1 - \frac{(1-2\nu_m)}{4(1-\nu_m)}\pi\frac{a_3}{a_1}, \tag{D.21}$$

$$S^{\Omega}_{1133} = S^{\Omega}_{2233} = \frac{(2\nu_m-1)}{8(1-\nu_m)}\pi\frac{a_3}{a_1}. \tag{D.22}$$

- INCLUSÃO COM FORMATO CILÍNDRICA ($a \to \infty$) (FIBRAS LONGAS):

$$S^{\Omega}_{2222} = S^{\Omega}_{3333} = \frac{5-4\nu_m}{8(1-\nu_m)}, \tag{D.23}$$

$$S^{\Omega}_{2211} = S^{\Omega}_{3311} = \frac{1-4\nu_m}{8(\nu_m-1)}, \tag{D.24}$$

$$S^{\Omega}_{2233} = S^{\Omega}_{3322} = \frac{\nu_m}{2(1-\nu_m)}, \tag{D.25}$$

$$S^{\Omega}_{P_{(23)}P_{(23)}} = \frac{3-4\nu_m}{8(1-\nu_m)}, \tag{D.26}$$

$$S^{\Omega}_{P_{(12)}P_{(12)}} = S^{\Omega}_{P_{(13)}P_{(13)}} = \frac{1}{4}. \tag{D.27}$$

- INCLUSÃO EM FORMATO DE CILINDRO ELÍPTICO ($a_3 \to \infty$):

$$S^{\Omega}_{1111} = \frac{1}{2(1-\nu_m)}\left[\frac{a_2^2+2a_1a_2}{(a_1+a_2)^2} + (1-2\nu_m)\frac{a_2}{a_1+a_2}\right], \tag{D.28}$$

$$S^{\Omega}_{2222} = \frac{1}{2(1-\nu_m)}\left[\frac{a_1^2+2a_1a_2}{(a_1+a_2)^2} + (1-2\nu_m)\frac{a_1}{a_1+a_2}\right], \tag{D.29}$$

$$S^{\Omega}_{1122} = \frac{1}{2(1-\nu_m)}\left[\frac{a_2^2}{(a_1+a_2)^2} - (1-2\nu_m)\frac{a_2}{a_1+a_2}\right], \tag{D.30}$$

$$S^{\Omega}_{2323} = \frac{1}{2(1-\nu_m)}\left[\frac{2\nu_m a_1}{a_1+a_2}\right], \tag{D.31}$$

$$S^{\Omega}_{3333} = 0, \tag{D.32}$$

$$S^{\Omega}_{2211} = \frac{1}{2(1-\nu_m)}\left[\frac{a_1^2}{(a_1+a_2)^2} - (1-2\nu_m)\frac{a_1}{a_1+a_2}\right], \tag{D.33}$$

$$S^{\Omega}_{1133} = \frac{1}{2(1-\nu_m)}\left[\frac{2\nu_m a_2}{a_1+a_2}\right], \tag{D.34}$$

$$S^{\Omega}_{3311} = S^{\Omega}_{3322} = 0, \tag{D.35}$$

$$S^{\Omega}_{1212} = \frac{1}{4(1-\nu_m)}\left[\frac{a_1^2+a_2^2}{(a_1+a_2)^2} + 1 - 2\nu_m\right], \tag{D.36}$$

$$S^{\Omega}_{2323} = \frac{a_1}{2(a_1+a_2)}, \tag{D.37}$$

$$S^{\Omega}_{3131} = \frac{a_2}{2(a_1+a_2)}. \tag{D.38}$$

APÊNDICE E – DEDUÇÃO DO TENSOR DE ESHELBY PARA O MEIO ELASTOPLÁSTICO

Suponha que um meio elastoplástico homogêneo infinito tenha sofrido algum tipo de deformação incremental elastoplástica, seus módulos elásticos e elastoplásticos tangentes são considerados homogêneos e denotados por $\mathbb{C}_m$ e $\mathbb{L}_m^{tan}$, respectivamente, em que $\mathbb{L}_m^{tan}$ é igual ao módulo elastoplástico tangente local sendo linearizado de acordo com incremento da carga efetiva apicada. Assumindo que uma região elipsoidal Ω inserida em uma matriz infinita D sofre um incremento de deformação inelástica $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^*$. Usando Eshelby (1957), pode-se relacionar o incremento de deformação perturbado $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^t$ restrito em D com o incremento *eigenstrain* $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^*$ por através do tensor de Eshelby para o meio elastoplástico S:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^t = \mathbb{S} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^*. \tag{E.1}$$

No qual os incrementos de tensão e deformação se distribuem uniformemente em uma inclusão elipsoidal (ESHELBY, 1957). Deve-se notar que a Equação E.1 toma apenas a forma do tensor de Eshelby convencional para um meio elástico, na qual, a determinação do tensor de Eshelby $\mathbb{S}$ para o meio elastoplástico, será desenvolvida a seguir.

Seguindo a Equação 2.46, porém, para o meio elastoplástico, sabe-se que $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^t$ deve ser a soma do incremento de deformação elastoplástica neste problema $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{ep}$ e o incremento da deformação inelástica *eigenstrains* $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^*$, ou seja,

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^t = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{ep} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^*. \tag{E.2}$$

Portanto, o incremento de tensão na inclusão (ver conceito de inclusão na seção 2.4) pode ser determinado:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{L}_m^{tan} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{ep} = \mathbb{L}_m^{tan} : (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^t - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^*). \tag{E.3}$$

Separando $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^t$ em Ω em $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{te}$ e $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{tp}$ como segue, correspondendo respectivamente às respostas elástica e plástica da inclusão, tem-se:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^t = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{te} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{tp}, \tag{E.4}$$

em que,

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{te} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{*e}, \quad \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{tp} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{*p}, \quad \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{ep} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p. \tag{E.5}$$

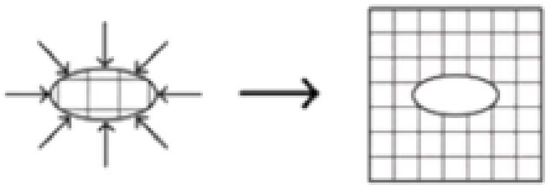
Em que $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e$ e $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$ são as partes elástica e plástica de $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{ep}$, $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e$; $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{*e}$ e $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p$; $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{*p}$ são as partes elástica e plástica de $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^*$, respectivamente.

O incremento de tensão na inclusão pode ser determinado por:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}_m : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbb{C}_m : (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{te} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{*e}). \tag{E.6}$$

Agora, aplica-se um incremento de tração superficial $\Delta\boldsymbol{t}^0 = \Delta\boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{N}$ à inclusão, que foi removida da matriz e submetida a um incremento de *eigenstrain* $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^*$, que a traz de volta à configuração inicial (sem sofrer $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^*$), onde $\boldsymbol{N}$ é a componente normal externa da região Ω,

Figura 69 – Tensão superficial na inclusão



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^0 = -\mathbb{L}_m^{tan} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^*. \tag{E.7}$$

O incremento de deformação induzida pode ser separado em partes elásticas e plásticas, nas quais a parte elástica, $-\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{*e}$, podem ser determinadas:

$$-\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{*e} = \mathbb{C}_m^{-1} : \Delta\boldsymbol{\sigma}^0, \tag{E.8}$$

substituindo Equação E em Equação E.8, tem-se:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{*e} = \mathbb{C}_m^{-1} : \mathbb{L}_m^{tan} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^*, \tag{E.9}$$

que pode ser considerada a parte elástica de $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^*$.

Para deduzir o tensor de Eshelby $\mathbb{S}$ para um MEP, presente na Equação E.1, foi introduzido um *Meio Elástico de Referência* (MER). Se ainda for assumido que a anisotropia induzida pela deformação plástica pode ser ignorada (Berveiller e Zaoui (1979); Chaboche, Kanouté e Roos (2005)), e deixar a inclusão presente no MER (a região Ω) sofrer um incremento de deformação induzida (*eigenstrain*) $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{*e} = -\mathbb{C}_m^{-1} : \Delta\boldsymbol{\sigma}^0$; o incremento de deformação restrito (perturbado) pode ser obtido seguindo o procedimento conforme Eshelby (1957):

$$\Delta\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{te} = \mathbb{S}^\Omega : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{*e}, \tag{E.10}$$

em que $\mathbb{S}^\Omega$ é o tensor de Eshelby do MER. O incremento de tensão restrita (perturbada) na inclusão pode ser calculada por:

$$\Delta\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}_m : \Delta\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \mathbb{C}_m : (\Delta\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{te} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{*e}). \tag{E.11}$$

Como foi assumido que o MEP e o MER são homogêneos, isotrópicos e incrementalmente linearizáveis, em que as inclusões estão sujeitas à tração superficial determinada pelo incremento $\Delta\varepsilon^*$, os incrementos de tensão restrita (perturbada) no MEP (Equação E.6) pode ser aproximado com a tensão restrita (perturbada) no MER (Equação E.11), ou seja, $\Delta\boldsymbol{\sigma} = \Delta\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$ (ver Apêndice em Peng et al. (2016)). Sendo assim, a partir das Equação E.6 e Equação E.11, tem-se $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e = \Delta\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$,

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{te} = \Delta\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{te} = \mathbb{S}^{\Omega} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{*e}. \tag{E.12}$$

Combinando a Equação E.3 com a Equação E.6 e usando a Equação E.1 e Equação E.12, tem-se:

$$\mathbb{L}_m^{tan} : (\mathbb{S} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^* - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^*) = \mathbb{C}_m : (\mathbb{S}^{\Omega} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{*e} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{*e}), \tag{E.13}$$

portanto,

$$\mathbb{L}_m^{tan} : (\mathbb{S} - \mathbb{I}) : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbb{C}_m : (\mathbb{S}^{\Omega} - \mathbb{I}) : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{*e}. \tag{E.14}$$

Usando a Equação E.9 na Equação E.14, tem-se:

$$\mathbb{L}_m^{tan} : (\mathbb{S} - \mathbb{I}) = \mathbb{C}_m : (\mathbb{S}^{\Omega} - \mathbb{I}) : \mathbb{C}_m^{-1} : \mathbb{L}_m^{tan}. \tag{E.15}$$

O tensor de Eshelby $\mathbb{S}$ para o meio elastoplástico pode, então, ser encontrado:

$$\mathbb{S} = \left[\mathbb{C}_m^{-1} : \mathbb{L}_m^{tan}\right]^{-1} : \mathbb{S}^{\Omega} : \left[\mathbb{C}_m^{-1} : \mathbb{L}_m^{tan}\right]. \tag{E.16}$$

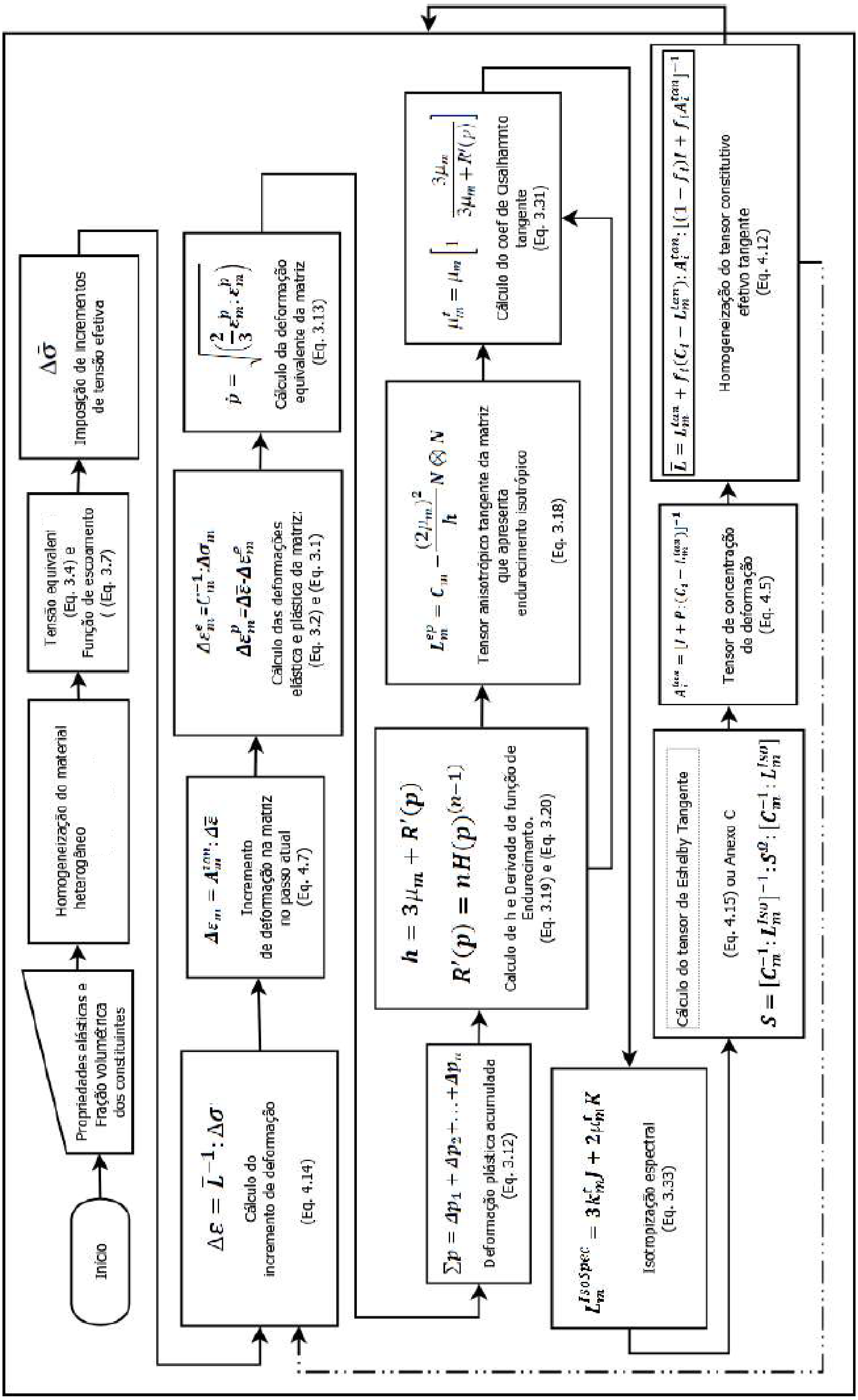
APÊNDICE F – ALGORITMO: ISOTROPIZAÇÃO ESPECTRAL E ENDURECIMENTO ISOTRÓPICO

Para a aplicação do algoritmo, o leitor deve atentar para o uso correto do tensor de concentração de deformação no regime plástico, ou seja:

- Para inclusões esféricas ou elipsoidais alinhadas, usa-se o tensor de concentração de deformação $\mathbb{A}_i^{tan}$;
- Para inclusões elipsoidais desalinhadas, usa-se o tensor de concentração de deformação $\langle \mathbb{A}_i^{dil} \rangle_\psi^{tan}$.

Para o caso do cálculo do tensor constitutivo global elástico, para inclusões desalinhadas, o método usado neste trabalho está explícito na Equação 2.101.

Figura 70 – Fluxograma do comportamento elastoplástico: Isotropização espectral e endurecimento isotrópico



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

A seguir, o código na linguagem Scilab de um material bifásico que se encontra sob a carregamento macroscópico de tração e cisalhamento. A matriz do material heterogêneo apresenta endurecimento isotrópico e método de isotropização espectral.

```
// Mori-Tanaka
// Inclusões Esféricas
// Endurecimento isotrópico
// Condição de contorno direção [1,1]

clear
clc
xdel(winsid()) // close all

// DADOS DE ENTRADA:

// Constantes da Matriz
Em=input ('Modulo de Elasticidade da Matriz em GPa, Em= ');
vm= input ('Coeficiente de Poisson da Matriz, vm= ');
VF=input ('Fração Volumétrica das inclusões, VF [0-1]]=');
Vf = linspace(0, VF,10) // O valor valor pode ser aumentado.
Sigmay=input ('Tensão de Escoamento da Matriz, Sy=___[GPa] ');
n=input ('Expoente de endurecimento da matriz, []0-0.4] n= ');
H1=input ('Módulo de endurecimento da matriz, H=___[GPa] ');

// Constantes da Inclusão
Ei=input ('Modulo de Elasticidade da Inclusão em GPa, Ei= ');
vi=input ('Coeficiente de Poisson da Inclusão, vi= ');

incrementos=input ('Número de incrementos de tensão = ');

VM=1-VF; //Fração volumétrica da matriz

// Contraste entre Matriz e Inclusão
C_el=Ei/Em;

Gm=Em/(2*(1+vm));
Km=Em/(3*(1-2*vm));

Gi=Ei/(2*(1+vi));
Ki=Ei/(3*(1-2*vi));

// CALCULO DA TENSOR DE RIGIDEZ DA MATRIZ

C=[ 1-vm vm vm 0 0 0;
    vm 1-vm vm 0 0 0;
    vm vm 1-vm 0 0 0;
    0 0 0 (1-(2*vm))/2 0 0;
    0 0 0 0 (1-(2*vm))/2 0;
    0 0 0 0 0 (1-(2*vm))/2];

Cm=(Em/((1+vm)*(1-2*vm)))*C;

// CALCULO DA TENSOR DE RIGIDEZ DA INCLUSÃO

C_=[ 1-vi vi vi 0 0 0;
     vi 1-vi vi 0 0 0;
     vi vi 1-vi 0 0 0;
     0 0 0 (1-(2*vi))/2 0 0;
     0 0 0 0 (1-(2*vi))/2 0;
     0 0 0 0 0 (1-(2*vi))/2];

Ci=(Ei/((1+vi)*(1-2*vi)))*C_;

//COMPONENTES DO TENSOR DE ESHELBY (Inclusões Esféricas)

S1111 = (7-(5*vm))/(15*(1-vm));
S2222 = (7-(5*vm))/(15*(1-vm));
S3333 = (7-(5*vm))/(15*(1-vm));
S1122 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
S2233 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
S3311 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
```

```
S1133 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
S2211 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
S3322 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
S2332=(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S2323=(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S3131=(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S3113=(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S1212 =(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S1221=(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S1313=S1212;

 //TENSOR DE ESHELBY

  S=[S1111 S1122 S1133 0 0 0;
     S2211 S2222 S2233 0 0 0;
     S3311 S3322 S3333 0 0 0;
     0 0 0 (S1212+S1212) 0 0;
     0 0 0 0 (S2323+S2323) 0;
     0 0 0 0 0 (S1313+S1313)];

// MATRIZ IDENTIDADE
I=[ 1 0 0 0 0 0;0 1 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 1 0 0;0 0 0 0 1 0;0 0 0 0 0 1];

// TENSOR CONCENTRACAO DE DEFORMACAO NA INCLUSAO
Ai=(I-(S*Cm^-1)*(Cm-Ci))^-1;
//ou
A=(I+(S*Cm^-1)*(Ci-Cm))^-1;

// CÁLCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO COMPÓSITO: MODELO MORI-TANAKA
//////////////////////////////////////////////////////////////////////
tam = length(Vf)
Eeqmt = zeros(1,tam)
Geqmt = zeros(1,tam)
Keqmt = zeros(1,tam)
v_l = zeros(1,tam)

for i=1:tam
//Tensor Elástico de Rigidez Efetivo
Ccmt1=(((1-Vf(i))*Cm)+Vf(i)*Ci*A)*((1-Vf(i))*I+Vf(i)*A)^-1;

//Tensor de Flexibilidade Efetivo
Dcmt1=Ccmt1^-1;

// Módulo de Young Elástico Efetivo
Eeqmt(i)=1/Dcmt1(1,1);

// Módulo de Cisalhamento Elástico Efetivo
Geqmt(i)=(Ccmt1(1,1)-Ccmt1(1,2))/2;

// Módulo bulk Elástico Efetivo
Keqmt(i)=(Ccmt1(1,1)+(2*Ccmt1(1,2)))/3;

// Coefic de Poisson Elástico Efetivo
v_l(i)=(Eeqmt(i)-(2*Geqmt(i)))/(2*Geqmt(i));

end
//////////////////////////////////////////////////////////////////////

// GRÁFICOS DAS CONSTANTES ELÁSTICAS EFETIVAS

scf(1)
plot(Vf,Geqmt,'r*-','LineWidth',3)
xtitle('Fração Volumética x Módulo de Cisalhamento para Inclusões Esféricas')
xlabel('Fração Volumétrica (Vf)')
ylabel('Módulo de Cisalhamento Efetivo [GPa]')
//xgrid
```

```
scf(2)
plot(Vf,Keqmt,'b*-','LineWidth',3)
xtitle('Fração Volumética x Módulo de Bulk para Inclusões Esféricas')
xlabel('Fração Volumétrica (Vf)')
ylabel('Módulo de Bulk Efetivo [GPa]')
//xgrid

scf(3)
plot(Vf,Eeqmt,'go-','LineWidth',3)
xtitle('Fração Volumética x Módulo de Young para Inclusões Esféricas')
xlabel('Fração Volumétrica (Vf)')
ylabel('Módulo de Young Efetivo [GPa]')
//xgrid

scf(4)
plot(Vf,v_l,'go-','LineWidth',3)
xtitle('Fração Volumética x Coef de Poisson para Inclusões Esféricas')
xlabel('Fração Volumétrica (Vf)')
ylabel('Coef. de Poisson Efetivo')
//xgrid

// Tensor de Projeção Volumétrico
J=[1/3 1/3 1/3 0 0 0;
    1/3 1/3 1/3 0 0 0;
    1/3 1/3 1/3 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0];

// Tensor de Projeção Desviador
 K=[2/3 -1/3 -1/3 0 0 0;
   -1/3 2/3 -1/3 0 0 0;
   -1/3 -1/3 2/3 0 0 0;
    0 0 0 1 0 0;
    0 0 0 0 1 0;
    0 0 0 0 0 1];

// Delta de Kronecker:
 delta=[1 0 0 0 0 0;
    0 1 0 0 0 0;
    0 0 1 0 0 0;
    0 0 0 1 0 0;
    0 0 0 0 1 0;
    0 0 0 0 0 1];

//ISOTROPIZAÇÃO ESPECTRAL + TENSOR DE ESHELBY TANGENTE

for i=1 : incrementos //Número de incrementos

    if i == 1

//AVALIAÇÃO DO ESCOAMENTO DO MATERIAL HETEROGÊNEO

SIGMA_BARRA= [1 0 0 0 0 0]'; // Tensor de tensão Macroscópico

Am_MT=((1-VF)*I+VF*Ai)^-1; // Tensor de Concentração de Deformação na Matriz

Bm=Cm*Am_MT*Ccmt1^-1; // Tensor de Concentração de Tensão na Matriz

sigma_matriz_0=Bm*SIGMA_BARRA;  // TTensor Tensão na Matriz

Sigma_matriz_eq=sqrt(0.5*((sigma_matriz_0(1,1)-sigma_matriz_0(2,1))^2+...
(sigma_matriz_0(2,1)-sigma_matriz_0(3,1))^2+(sigma_matriz_0(3,1)-...
sigma_matriz_0(1,1))^2)+3*((sigma_matriz_0(4,1))^2+...
(sigma_matriz_0(5,1))^2+(sigma_matriz_0(6,1))^2));// Tensão Equivalente da matriz .

lambda0=(Sigmay/Sigma_matriz_eq); // FATOR DE ESCOAMENTO DA MATRIZ DO MATRIAL BIFÁSICO
```

```
///////////////////////////////////////////////////////////////////////
///////////////////////////////////////////////////////////////////////

// AVALIAÇÃO DO COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO:

sigmay0=lambda0*SIGMA_BARRA; // Tensor Tensão Global de Escoamento da Matriz do Compósito

epsilon_barra1=Ccmt1^-1*sigmay0 // Deformação Global de Escoamento do Compósito

EPSILON_MATRIZ_ESCOA=((1-VF)*I+VF*A)^-1*epsilon_barra1; // Deformação Média na Matriz

EPSILON_INCLUSAO=A*(VF*A+(1-VF)*I)^-1*epsilon_barra1; // Deformação Média na Inclusão

TENSAO_MATRIZ_ESCOA=Cm*EPSILON_MATRIZ_ESCOA; // Tensão Média na Matriz

TENSAO_INCLUSAO_ESCOA=Ci*EPSILON_INCLUSAO; // Tensão Média na Inclusão

s_Devia_Escoa=K*TENSAO_MATRIZ_ESCOA; // Tensão Desviadora Média na Matriz

Sigma_m_eq_ESCOA=sqrt(0.5*((TENSAO_MATRIZ_ESCOA(1,1)-TENSAO_MATRIZ_ESCOA(2,1))^2+...
(TENSAO_MATRIZ_ESCOA(2,1)-TENSAO_MATRIZ_ESCOA(3,1))^2+(TENSAO_MATRIZ_ESCOA(3,1)-...
TENSAO_MATRIZ_ESCOA(1,1))^2)+3*((TENSAO_MATRIZ_ESCOA(4,1))^2+(TENSAO_MATRIZ_ESCOA(5,1))^2+...
(TENSAO_MATRIZ_ESCOA(6,1))^2)); // Tensão Equivalente da matriz
//
N_ESCOA=(3/2)*((s_Devia_Escoa)/(Sigma_m_eq_ESCOA)); // Componente normal a superf de escoamento
//
EPSILON_ELASTICO=(Cm)^-1*TENSAO_MATRIZ_ESCOA; // Deformação Elástica da Matriz do Compósito
//
EPSILON_PLASTICO=EPSILON_MATRIZ_ESCOA-EPSILON_ELASTICO;
//
delta_p1=sqrt((2/3)*EPSILON_PLASTICO'*EPSILON_PLASTICO);

p1=delta_p1; // Na superfície de escoamento, não existe deformação plástica acumulada
panterior = p1;

Rp_1=n*H1*(p1)^(n-1); // Derivada da Função de Endurecimento.

h1=3*Gm+Rp_1;

Cmtan_Aniso_1=Cm-((4*Gm^2)/(3*Gm+Rp_1))*N_ESCOA*N_ESCOA';

Cmtan_Aniso_anterior = Cmtan_Aniso_1;

// ISOTROPIZAÇÃO ESPECTRAL + ESHELBY TANGENTE

// Propriedade Tangentes da Matriz
Gmt1=Gm*(1-(3*Gm/(3*Gm+Rp_1)));  //MÓDULO DE CISALHAMENTO TANGENTE
Emt1=(9*Km*Gmt1)/(3*Km+Gmt1);    //MÓDULO DE YOUNG TANGENTE
v_1=(3*Km-2*Gmt1)/(6*Km+2*Gmt1); //COEFICIENTE DE POISSON TANGENTE


// Tensor de Rigidez tangente da matriz
Ctan1=[1-v_1 v_1 v_1 0 0 0;
       v_1 1-v_1 v_1 0 0 0;
       v_1 v_1 1-v_1 0 0 0;
       0 0 0 (1-(2*v_1))/2 0 0;
       0 0 0 0 (1-(2*v_1))/2 0;
       0 0 0 0 0 (1-(2*v_1))/2];

// Tensor de Rigidez tangente da matriz
Cmtan_Iso_1=(Emt1/((1+v_1)*(1-2*v_1)))*Ctan1;

Cmtan_Iso_anterior = Cmtan_Iso_1; // Para guardar o valor calculado acima

// COMPONENTES DO TENSOR DE ESHELBY TANGENTE
            S1111_Tan1 = (7-(5*v_1))/(15*(1-v_1));
```

```
            S2222_Tan1 = (7-(5*v_1))/(15*(1-v_1));
            S3333_Tan1 = (7-(5*v_1))/(15*(1-v_1));
            S1122_Tan1 = (5*v_1-1)/(15*(1-v_1));
            S2233_Tan1 = (5*v_1-1)/(15*(1-v_1));
            S3311_Tan1 = (5*v_1-1)/(15*(1-v_1));
            S1133_Tan1 = (5*v_1-1)/(15*(1-v_1));
            S2211_Tan1 = (5*v_1-1)/(15*(1-v_1));
            S3322_Tan1 = (5*v_1-1)/(15*(1-v_1));
            S2332_Tan1=(4-(5*v_1))/(15*(1-v_1));
            S2323_Tan1=(4-(5*v_1))/(15*(1-v_1));
            S3131_Tan1=(4-(5*v_1))/(15*(1-v_1));
            S3113_Tan1=(4-(5*v_1))/(15*(1-v_1));
            S1212_Tan1=(4-(5*v_1))/(15*(1-v_1));
            S1221_Tan1=(4-(5*v_1))/(15*(1-v_1));
            S1313_Tan1=S1212_Tan1;

             // TENSOR DE ESHELBY TANGENTE
              S_Tang1=[S1111_Tan1 S1122_Tan1 S1133_Tan1 0 0 0;
                 S2211_Tan1 S2222_Tan1 S2233_Tan1 0 0 0;
                 S3311_Tan1 S3322_Tan1 S3333_Tan1 0 0 0;
                 0 0 0 (S1212_Tan1+S1212_Tan1) 0 0;
                 0 0 0 0 (S2323_Tan1+S2323_Tan1) 0;
                 0 0 0 0 0 (S1313_Tan1+S1313_Tan1)];

A_tang1=(I+(S_Tang1*Cmtan_Iso_1^-1)*(Ci-Cmtan_Iso_1))^-1; // Tensor de concentração de deformação tangente

A_tang_anterior = A_tang1; // Para guardar o valor calculado acima

LL1=Cmtan_Iso_1+VF*(Ci-Cmtan_Iso_1)*A_tang1*((1-VF)*I+VF*A_tang1)^-1; // Tensor de rigidez efetiva tangente do compósito
LL_anterior = LL1; // "Para guardar o valor calculado acima"

//////////////////////////////////////////////////////////////////////
//Informações a serem usadas para construção o gráfico Tensão x Deformação do Compósito
//(ATENTAR PARA A CONDIÇÃO DE CONTORNO !!!)

            tensao (i)= sigmay0 (1,1);
            deformacao (i) = epsilon_barra1(1,1);
            tensao_anterior = sigmay0 (1,1);
            deformacao_anterior = epsilon_barra1(1,1);

//////////////////////////////////////////////////////////////////////

else  // INÍCIO DO PROCESSO INCREMENTAL

DELTA_SIGMA= [0.00001 0 0 0 0 0]'; // Incremento do tensor tensão macroscópico

delta_epsilon_barra2=LL_anterior^-1*DELTA_SIGMA; // Incremento de Deformação Global do Compósito

delta_epsilon_matriz2=((1-VF)*I+VF*A_tang_anterior)^-1*delta_epsilon_barra2;//Incremento de Deformação na matriz

delta_epsilon_fibra2=A_tang_anterior*(VF*A_tang_anterior+(1-VF)*I)^-1*delta_epsilon_barra2; // Increm de Deform na fibra
delta_tensao_matriz2=Cmtan_Iso_anterior*delta_epsilon_matriz2; //Increm de Tensão na Matriz

delta_tensao_inclusao2=Ci*delta_epsilon_fibra2; // Incremento de Tensão na Inclusão

Tensao_Matriz_2=TENSAO_MATRIZ_ESCOA+delta_tensao_matriz2; //Tens Tot. méd da matriz no final do passo atual

Tensao_Inclusao_2=TENSAO_INCLUSAO_ESCOA+delta_tensao_inclusao2; // Tens. Tot. méd. na Inc. no final passo atual

sm2=K*Tensao_Matriz_2; // Incremento de Tensão Desviadora no final do passo atual da matriz.

```

```
Sigma_m_eq2=sqrt(0.5*((Tensao_Matriz_2(1,1)-Tensao_Matriz_2(2,1))^2+...
(Tensao_Matriz_2(2,1)-Tensao_Matriz_2(3,1))^2+(Tensao_Matriz_2(3,1)-...
Tensao_Matriz_2(1,1))^2)+3*((Tensao_Matriz_2(4,1))^2+...
(Tensao_Matriz_2(5,1))^2+(Tensao_Matriz_2(6,1))^2));// Tensão Equivalente no passo atual.

N2=(3/2)*((sm2)/(Sigma_m_eq2)) // Componente Normal a Superfície de Escoamento no passo atual.

delta_epsilon_elast_2=Cm^-1*delta_tensao_matriz2 // Incremento de deformação elástica

delta_epsilon_plastic_2=delta_epsilon_matriz2-delta_epsilon_elast_2; // Incremento de deformação plástica

delta_p2=sqrt((2/3)*delta_epsilon_plastic_2'*delta_epsilon_plastic_2); // Incremento de deformação plástica acumulada

p2=panterior+delta_p2; // Deformação plástica total

panterior = p2; // Para guardar o valor calculado acima

Rp_2=n*H1*(p2)^(n-1); // Derivada da Função de Endurecimento.

Cmtan_Aniso_2=Cm-((4*Gm^2)/(3*Gm+Rp_2))*N2*N2'; //Tensor de rigidez tangente da matriz (Anisotrópico)

Cmtan_Aniso_anterior = Cmtan_Aniso_2; // Para guardar o valor calculado acima

// ISOTROPIZAÇÃO ESPECTRAL + ESHELBY TANGENTE

// Propriedade Tangentes da Matriz
Gmt2=Gm*(1-(3*Gm/(3*Gm+Rp_2))); // Mód. Cisalham Tangente da Matriz
Emt2=(9*Km*Gmt2)/(3*Km+Gmt2); // Mód. Young Tangente da Matriz
v_2=(3*Km-2*Gmt2)/(6*Km+2*Gmt2); // Poisson Tangente da Matriz
Kmt2=(Gmt2*Emt2)/(9*Gmt2-3*Emt2); // Mód. bulk (Kmt=Km)

// Tensor Tangente de Rigidez da Matriz
            Ctan2=[1-v_2 v_2 v_2 0 0 0;
                v_2 1-v_2 v_2 0 0 0;
                v_2 v_2 1-v_2 0 0 0;
                0 0 0 (1-(2*v_2))/2 0 0;
                0 0 0 0 (1-(2*v_2))/2 0;
                0 0 0 0 0 (1-(2*v_2))/2];

Cmtan_Iso_2=(Emt2/((1+v_2)*(1-2*v_2)))*Ctan2;

Cmtan_Iso_anterior = Cmtan_Iso_2;  // Para guardar o valor calculado acima

        // COMPONENTES DO TENSOR DE ESHELBY TANGENTE
            S1111_Tan2 = (7-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S2222_Tan2 = (7-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S3333_Tan2 = (7-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S1122_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S2233_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S3311_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S1133_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S2211_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S3322_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S2332_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S2323_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S3131_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S3113_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S1212_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S1221_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S1313_Tan2=S1212_Tan2;

             //TENSOR DE ESHELBY TANGENTE
              S_Tang2=[S1111_Tan2 S1122_Tan2 S1133_Tan2 0 0 0;
                 S2211_Tan2 S2222_Tan2 S2233_Tan2 0 0 0;
```

```
                 S3311_Tan2 S3322_Tan2 S3333_Tan2 0 0 0;
                 0 0 0 (S1212_Tan2+S1212_Tan2) 0 0;
                 0 0 0 0 (S2323_Tan2+S2323_Tan2) 0;
                 0 0 0 0 0 (S1313_Tan2+S1313_Tan2)];
//
A_tang2=(I+(S_Tang2*Cmtan_Iso_2^-1)*(Ci-Cmtan_Iso_2))^-1;// TENSOR DE CONCENTRAÇÃO ISOTROPIZADO
A_tang_anterior = A_tang2; // Para guardar o valor calculado acima
//
LL2=Cmtan_Iso_2+VF*(Ci-Cmtan_Iso_2)*A_tang2*((1-VF)*I+VF*A_tang2)^-1; // Tensor de rigidez efetivo tangente (Isotrópico))
LL_anterior = LL2; // Para guardar o valor calculado acima

////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
//Informações a serem usadas para construção o gráfico Tensão x Deformação do Compósito
//(ATENTAR PARA A CONDIÇÃO DE CONTORNO !!!)

            tensao (i)=  DELTA_SIGMA(1,1) + tensao_anterior;
            deformacao (i) = delta_epsilon_barra2(1,1) + deformacao_anterior;
            tensao_anterior = tensao(i);
            deformacao_anterior = deformacao (i);
////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////

            end
end

tensao_plot = [0 (tensao)'];
deformacao_plot = [0 deformacao'];

// GRÁFICO ISOTROPIZAÇÃO ESPECTRAL

scf(5)
plot(deformacao_plot, tensao_plot,'b-','Linewidth',3)
title('COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO DE UM MATERIAL HETEROGÊNEO COM INCLUSÕES ESFÉRICAS')
xlabel('DEFORMAÇÃO')
ylabel('TENSÃO [GPa]')

////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
```

```
// Mori-Tanaka
// Inclusões Esféricas
// Endurecimento isotrópico
// Condição de contorno: CISALHAMENTO

clear
clc
xdel(winsid()) // close all

// DADOS DE ENTRADA:

// Constantes da Matriz
Em=input ('Modulo de Elasticidade da Matriz em GPa, Em= ');
vm= input ('Coeficiente de Poisson da Matriz, vm= ');
VF=input ('Fração Volumétrica das inclusões, VF [0-1]]=');
Vf = linspace(0, VF,10) // O valor valor pode ser aumentado.
Sigmay=input ('Tensão de Escoamento da Matriz, Sy=___[GPa] ');
n=input ('Expoente de endurecimento da matriz, []0-0.4] n= ');
H1=input ('Módulo de endurecimento da matriz, H=___[GPa] ');

// Constantes da Inclusão
Ei=input ('Modulo de Elasticidade da Inclusão em GPa, Ei= ');
vi=input ('Coeficiente de Poisson da Inclusão, vi= ');

incrementos=input ('Número de incrementos de tensão = ');

VM=1-VF; //Fração volumétrica da matriz

// Contraste entre Matriz e Inclusão
C_el=Ei/Em;

Gm=Em/(2*(1+vm));
Km=Em/(3*(1-2*vm));

Gi=Ei/(2*(1+vi));
Ki=Ei/(3*(1-2*vi));

// CALCULO DA TENSOR DE RIGIDEZ DA MATRIZ

C=[ 1-vm vm vm 0 0 0;
    vm 1-vm vm 0 0 0;
    vm vm 1-vm 0 0 0;
    0 0 0 (1-(2*vm))/2 0 0;
    0 0 0 0 (1-(2*vm))/2 0;
    0 0 0 0 0 (1-(2*vm))/2];

Cm=(Em/((1+vm)*(1-2*vm)))*C;

// CALCULO DA TENSOR DE RIGIDEZ DA INCLUSÃO

C_=[ 1-vi vi vi 0 0 0;
     vi 1-vi vi 0 0 0;
     vi vi 1-vi 0 0 0;
     0 0 0 (1-(2*vi))/2 0 0;
     0 0 0 0 (1-(2*vi))/2 0;
     0 0 0 0 0 (1-(2*vi))/2];

Ci=(Ei/((1+vi)*(1-2*vi)))*C_;

//COMPONENTES DO TENSOR DE ESHELBY (Inclusões Esféricas)

S1111 = (7-(5*vm))/(15*(1-vm));
S2222 = (7-(5*vm))/(15*(1-vm));
S3333 = (7-(5*vm))/(15*(1-vm));
S1122 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
S2233 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
S3311 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
```

```
S1133 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
S2211 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
S3322 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
S2332=(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S2323=(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S3131=(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S3113=(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S1212 =(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S1221=(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S1313=S1212;

 //TENSOR DE ESHELBY

  S=[S1111 S1122 S1133 0 0 0;
     S2211 S2222 S2233 0 0 0;
     S3311 S3322 S3333 0 0 0;
     0 0 0 (S1212+S1212) 0 0;
     0 0 0 0 (S2323+S2323) 0;
     0 0 0 0 0 (S1313+S1313)];

// MATRIZ IDENTIDADE
I=[ 1 0 0 0 0 0;0 1 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 1 0 0;0 0 0 0 1 0;0 0 0 0 0 1];

// TENSOR CONCENTRACAO DE DEFORMACAO NA INCLUSAO
Ai=(I-(S*Cm^-1)*(Cm-Ci))^-1;
//ou
A=(I+(S*Cm^-1)*(Ci-Cm))^-1;

// CÁLCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO COMPÓSITO: MODELO MORI-TANAKA
//////////////////////////////////////////////////////////////////////
tam = length(Vf)
Eeqmt = zeros(1,tam)
Geqmt = zeros(1,tam)
Keqmt = zeros(1,tam)
v_l = zeros(1,tam)

for i=1:tam
//Tensor Elástico de Rigidez Efetivo
Ccmt1=(((1-Vf(i))*Cm)+Vf(i)*Ci*A)*((1-Vf(i))*I+Vf(i)*A)^-1;

//Tensor de Flexibilidade Efetivo
Dcmt1=Ccmt1^-1;

// Módulo de Young Elástico Efetivo
Eeqmt(i)=1/Dcmt1(1,1);

// Módulo de Cisalhamento Elástico Efetivo
Geqmt(i)=(Ccmt1(1,1)-Ccmt1(1,2))/2;

// Módulo bulk Elástico Efetivo
Keqmt(i)=(Ccmt1(1,1)+(2*Ccmt1(1,2)))/3;

// Coefic de Poisson Elástico Efetivo
v_l(i)=(Eeqmt(i)-(2*Geqmt(i)))/(2*Geqmt(i));

end
//////////////////////////////////////////////////////////////////////

// GRÁFICOS DAS CONSTANTES ELÁSTICAS EFETIVAS

scf(1)
plot(Vf,Geqmt,'r*-','LineWidth',3)
xtitle('Fração Volumética x Módulo de Cisalhamento para Inclusões Esféricas')
xlabel('Fração Volumétrica (Vf)')
ylabel('Módulo de Cisalhamento Efetivo [GPa]')
//xgrid
```

```
scf(2)
plot(Vf,Keqmt,'b*-','LineWidth',3)
xtitle('Fração Volumética x Módulo de Bulk para Inclusões Esféricas')
xlabel('Fração Volumétrica (Vf)')
ylabel('Módulo de Bulk Efetivo [GPa]')
//xgrid

scf(3)
plot(Vf,Eeqmt,'go-','LineWidth',3)
xtitle('Fração Volumética x Módulo de Young para Inclusões Esféricas')
xlabel('Fração Volumétrica (Vf)')
ylabel('Módulo de Young Efetivo [GPa]')
//xgrid

scf(4)
plot(Vf,v_l,'go-','LineWidth',3)
xtitle('Fração Volumética x Coef de Poisson para Inclusões Esféricas')
xlabel('Fração Volumétrica (Vf)')
ylabel('Coef. de Poisson Efetivo')
//xgrid

// Tensor de Projeção Volumétrico
J=[1/3 1/3 1/3 0 0 0;
    1/3 1/3 1/3 0 0 0;
    1/3 1/3 1/3 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0];

// Tensor de Projeção Desviador
 K=[2/3 -1/3 -1/3 0 0 0;
   -1/3 2/3 -1/3 0 0 0;
   -1/3 -1/3 2/3 0 0 0;
    0 0 0 1 0 0;
    0 0 0 0 1 0;
    0 0 0 0 0 1];

// Delta de Kronecker:
 delta=[1 0 0 0 0 0;
    0 1 0 0 0 0;
    0 0 1 0 0 0;
    0 0 0 1 0 0;
    0 0 0 0 1 0;
    0 0 0 0 0 1];

//ISOTROPIZAÇÃO ESPECTRAL + TENSOR DE ESHELBY TANGENTE

for i=1 : incrementos //Número de incrementos

    if i == 1

//AVALIAÇÃO DO ESCOAMENTO DO MATERIAL HETEROGÊNEO

SIGMA_BARRA= [0 0 0 1 0 0]'; // Tensor de tensão Macroscópico

Am_MT=((1-VF)*I+VF*Ai)^-1; // Tensor de Concentração de Deformação na Matriz

Bm=Cm*Am_MT*Ccmt1^-1; // Tensor de Concentração de Tensão na Matriz

sigma_matriz_0=Bm*SIGMA_BARRA;  // TTensor Tensão na Matriz

Sigma_matriz_eq=sqrt(0.5*((sigma_matriz_0(1,1)-sigma_matriz_0(2,1))^2+...
(sigma_matriz_0(2,1)-sigma_matriz_0(3,1))^2+(sigma_matriz_0(3,1)-...
sigma_matriz_0(1,1))^2)+3*((sigma_matriz_0(4,1))^2+...
(sigma_matriz_0(5,1))^2+(sigma_matriz_0(6,1))^2));// Tensão Equivalente da matriz .

lambda0=(Sigmay/Sigma_matriz_eq); // FATOR DE ESCOAMENTO DA MATRIZ DO MATRIAL BIFÁSICO
```

```
//////////////////////////////////////////////////////////////////////
//////////////////////////////////////////////////////////////////////

// AVALIAÇÃO DO COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO:

sigmay0=lambda0*SIGMA_BARRA; // Tensor Tensão Global de Escoamento da Matriz do Compósito

epsilon_barra1=Ccmt1^-1*sigmay0 // Deformação Global de Escoamento do Compósito

EPSILON_MATRIZ_ESCOA=((1-VF)*I+VF*A)^-1*epsilon_barra1; // Deformação Média na Matriz

EPSILON_INCLUSAO=A*(VF*A+(1-VF)*I)^-1*epsilon_barra1; // Deformação Média na Inclusão

TENSAO_MATRIZ_ESCOA=Cm*EPSILON_MATRIZ_ESCOA; // Tensão Média na Matriz

TENSAO_INCLUSAO_ESCOA=Ci*EPSILON_INCLUSAO; // Tensão Média na Inclusão

s_Devia_Escoa=K*TENSAO_MATRIZ_ESCOA; // Tensão Desviadora Média na Matriz

Sigma_m_eq_ESCOA=sqrt(0.5*((TENSAO_MATRIZ_ESCOA(1,1)-TENSAO_MATRIZ_ESCOA(2,1))^2+...
(TENSAO_MATRIZ_ESCOA(2,1)-TENSAO_MATRIZ_ESCOA(3,1))^2+(TENSAO_MATRIZ_ESCOA(3,1)-...
TENSAO_MATRIZ_ESCOA(1,1))^2)+3*((TENSAO_MATRIZ_ESCOA(4,1))^2+(TENSAO_MATRIZ_ESCOA(5,1))^2+...
(TENSAO_MATRIZ_ESCOA(6,1))^2)); // Tensão Equivalente da matriz
//
N_ESCOA=(3/2)*((s_Devia_Escoa)/(Sigma_m_eq_ESCOA)); // Componente normal a superf de escoamento
//
EPSILON_ELASTICO=(Cm)^-1*TENSAO_MATRIZ_ESCOA; // Deformação Elástica da Matriz do Compósito
//
EPSILON_PLASTICO=EPSILON_MATRIZ_ESCOA-EPSILON_ELASTICO;
//
delta_p1=sqrt((2/3)*EPSILON_PLASTICO'*EPSILON_PLASTICO);

p1=delta_p1;// Na superfície de escoamento, não existe deformação plástica acumulada
panterior = p1;

Rp_1=n*H1*(p1)^(n-1); // Derivada da Função de Endurecimento.

h1=3*Gm+Rp_1;

Cmtan_Aniso_1=Cm-((4*Gm^2)/(3*Gm+Rp_1))*N_ESCOA*N_ESCOA';

Cmtan_Aniso_anterior = Cmtan_Aniso_1;

// ISOTROPIZAÇÃO ESPECTRAL + ESHELBY TANGENTE

// Propriedade Tangentes da Matriz
Gmt1=Gm*(1-(3*Gm/(3*Gm+Rp_1)));  //MÓDULO DE CISALHAMENTO TANGENTE
Emt1=(9*Km*Gmt1)/(3*Km+Gmt1);     //MÓDULO DE YOUNG TANGENTE
v_1=(3*Km-2*Gmt1)/(6*Km+2*Gmt1); //COEFICIENTE DE POISSON TANGENTE


// Tensor de Rigidez tangente da matriz
Ctan1=[1-v_1 v_1 v_1 0 0 0;
       v_1 1-v_1 v_1 0 0 0;
       v_1 v_1 1-v_1 0 0 0;
       0 0 0 (1-(2*v_1))/2 0 0;
       0 0 0 0 (1-(2*v_1))/2 0;
       0 0 0 0 0 (1-(2*v_1))/2];

// Tensor de Rigidez tangente da matriz
Cmtan_Iso_1=(Emt1/((1+v_1)*(1-2*v_1)))*Ctan1;

Cmtan_Iso_anterior = Cmtan_Iso_1; // Para guardar o valor calculado acima

// COMPONENTES DO TENSOR DE ESHELBY TANGENTE
            S1111_Tan1 = (7-(5*v_1))/(15*(1-v_1));
```

```
            S2222_Tan1 = (7-(5*v_1))/(15*(1-v_1));
            S3333_Tan1 = (7-(5*v_1))/(15*(1-v_1));
            S1122_Tan1 = (5*v_1-1)/(15*(1-v_1));
            S2233_Tan1 = (5*v_1-1)/(15*(1-v_1));
            S3311_Tan1 = (5*v_1-1)/(15*(1-v_1));
            S1133_Tan1 = (5*v_1-1)/(15*(1-v_1));
            S2211_Tan1 = (5*v_1-1)/(15*(1-v_1));
            S3322_Tan1 = (5*v_1-1)/(15*(1-v_1));
            S2332_Tan1=(4-(5*v_1))/(15*(1-v_1));
            S2323_Tan1=(4-(5*v_1))/(15*(1-v_1));
            S3131_Tan1=(4-(5*v_1))/(15*(1-v_1));
            S3113_Tan1=(4-(5*v_1))/(15*(1-v_1));
            S1212_Tan1=(4-(5*v_1))/(15*(1-v_1));
            S1221_Tan1=(4-(5*v_1))/(15*(1-v_1));
            S1313_Tan1=S1212_Tan1;

             // TENSOR DE ESHELBY TANGENTE
              S_Tang1=[S1111_Tan1 S1122_Tan1 S1133_Tan1 0 0 0;
                 S2211_Tan1 S2222_Tan1 S2233_Tan1 0 0 0;
                 S3311_Tan1 S3322_Tan1 S3333_Tan1 0 0 0;
                 0 0 0 (S1212_Tan1+S1212_Tan1) 0 0;
                 0 0 0 0 (S2323_Tan1+S2323_Tan1) 0;
                 0 0 0 0 0 (S1313_Tan1+S1313_Tan1)];

A_tang1=(I+(S_Tang1*Cmtan_Iso_1^-1)*(Ci-Cmtan_Iso_1))^-1; // Tensor de concentração de deformação tangente

A_tang_anterior = A_tang1; // Para guardar o valor calculado acima

LL1=Cmtan_Iso_1+VF*(Ci-Cmtan_Iso_1)*A_tang1*((1-VF)*I+VF*A_tang1)^-1; // Tensor de rigidez efetiva tangente do compósito
LL_anterior = LL1; // "Para guardar o valor calculado acima"

///////////////////////////////////////////////////////////////////////
//Informações a serem usadas para construção o gráfico Tensão x Deformação do Compósito
//(ATENTAR PARA A CONDIÇÃO DE CONTORNO !!!)

            tensao (i)= sigmay0 (4,1);
            deformacao (i) = epsilon_barra1(4,1);
            tensao_anterior = sigmay0 (4,1);
            deformacao_anterior = epsilon_barra1(4,1);

///////////////////////////////////////////////////////////////////////

else  // INÍCIO DO PROCESSO INCREMENTAL

DELTA_SIGMA= [0 0 0 0.0001 0 0]'; // Incremento do tensor tensão macroscópico

delta_epsilon_barra2=LL_anterior^-1*DELTA_SIGMA; // Incremento de Deformação Global do Compósito

delta_epsilon_matriz2=((1-VF)*I+VF*A_tang_anterior)^-1*delta_epsilon_barra2;//Incremento de Deformação na matriz

delta_epsilon_fibra2=A_tang_anterior*(VF*A_tang_anterior+(1-VF)*I)^-1*delta_epsilon_barra2; // Increm de Deform na fibra
delta_tensao_matriz2=Cmtan_Iso_anterior*delta_epsilon_matriz2; //Increm de Tensão na Matriz

delta_tensao_inclusao2=Ci*delta_epsilon_fibra2; // Incremento de Tensão na Inclusão

Tensao_Matriz_2=TENSAO_MATRIZ_ESCOA+delta_tensao_matriz2; //Tens Tot. méd da matriz no final do passo atual

Tensao_Inclusao_2=TENSAO_INCLUSAO_ESCOA+delta_tensao_inclusao2; // Tens. Tot. méd. na Inc. no final passo atual

sm2=K*Tensao_Matriz_2; // Incremento de Tensão Desviadora no final do passo atual da matriz.
```

```
Sigma_m_eq2=sqrt(0.5*((Tensao_Matriz_2(1,1)-Tensao_Matriz_2(2,1))^2+...
(Tensao_Matriz_2(2,1)-Tensao_Matriz_2(3,1))^2+(Tensao_Matriz_2(3,1)-...
Tensao_Matriz_2(1,1))^2)+3*((Tensao_Matriz_2(4,1))^2+...
(Tensao_Matriz_2(5,1))^2+(Tensao_Matriz_2(6,1))^2));// Tensão Equivalente no passo atual.

N2=(3/2)*((sm2)/(Sigma_m_eq2)) // Componente Normal a Superfície de Escoamento no passo atual.

delta_epsilon_elast_2=Cm^-1*delta_tensao_matriz2 // Incremento de deformação elástica

delta_epsilon_plastic_2=delta_epsilon_matriz2-delta_epsilon_elast_2; // Incremento de deformação plástica

delta_p2=(sqrt(2)/3)*(sqrt((6/4*(delta_epsilon_plastic_2(4,1)^2+...
(delta_epsilon_plastic_2(5,1)^2)+(delta_epsilon_plastic_2(6,1)^2))))); // Incremento de deformação plástica acumulada

p2=panterior+delta_p2; // Deformação plástica total

panterior = p2; // Para guardar o valor calculado acima

Rp_2=n*H1*(p2)^(n-1); // Derivada da Função de Endurecimento.

Cmtan_Aniso_2=Cm-((4*Gm^2)/(3*Gm+Rp_2))*N2*N2'; //Tensor de rigidez tangente da matriz (Anisotrópico)

Cmtan_Aniso_anterior = Cmtan_Aniso_2; // Para guardar o valor calculado acima

// ISOTROPIZAÇÃO ESPECTRAL + ESHELBY TANGENTE

// Propriedade Tangentes da Matriz
Gmt2=Gm*(1-(3*Gm/(3*Gm+Rp_2))); // Mód. Cisalham Tangente da Matriz
Emt2=(9*Km*Gmt2)/(3*Km+Gmt2); // Mód. Young Tangente da Matriz
v_2=(3*Km-2*Gmt2)/(6*Km+2*Gmt2); // Poisson Tangente da Matriz
Kmt2=(Gmt2*Emt2)/(9*Gmt2-3*Emt2); // Mód. bulk (Kmt=Km)

// Tensor Tangente de Rigidez da Matriz
            Ctan2=[1-v_2 v_2 v_2 0 0 0;
                v_2 1-v_2 v_2 0 0 0;
                v_2 v_2 1-v_2 0 0 0;
                0 0 0 (1-(2*v_2))/2 0 0;
                0 0 0 0 (1-(2*v_2))/2 0;
                0 0 0 0 0 (1-(2*v_2))/2];

Cmtan_Iso_2=(Emt2/((1+v_2)*(1-2*v_2)))*Ctan2;

Cmtan_Iso_anterior = Cmtan_Iso_2;  // Para guardar o valor calculado acima

            // COMPONENTES DO TENSOR DE ESHELBY TANGENTE
            S1111_Tan2 = (7-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S2222_Tan2 = (7-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S3333_Tan2 = (7-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S1122_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S2233_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S3311_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S1133_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S2211_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S3322_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S2332_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S2323_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S3131_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S3113_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S1212_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S1221_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S1313_Tan2=S1212_Tan2;

             //TENSOR DE ESHELBY TANGENTE
              S_Tang2=[S1111_Tan2 S1122_Tan2 S1133_Tan2 0 0 0;
```

```
                S2211_Tan2 S2222_Tan2 S2233_Tan2 0 0 0;
                S3311_Tan2 S3322_Tan2 S3333_Tan2 0 0 0;
                0 0 0 (S1212_Tan2+S1212_Tan2) 0 0;
                0 0 0 0 (S2323_Tan2+S2323_Tan2) 0;
                0 0 0 0 0 (S1313_Tan2+S1313_Tan2)];

A_tang2=(I+(S_Tang2*Cmtan_Iso_2^-1)*(Ci-Cmtan_Iso_2))^-1;// TENSOR DE CONCENTRAÇÃO ISOTROPIZADO
A_tang_anterior = A_tang2; // Para guardar o valor calculado acima

LL2=Cmtan_Iso_2+VF*(Ci-Cmtan_Iso_2)*A_tang2*((1-VF)*I+VF*A_tang2)^-1; // Tensor de rigidez
efetivo tangente (Isotrópico))
LL_anterior = LL2; // Para guardar o valor calculado acima

////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
//Informações a serem usadas para construção o gráfico Tensão x Deformação do Compósito
//(ATENTAR PARA A CONDIÇÃO DE CONTORNO !!!)

            tensao (i)=  DELTA_SIGMA(4,1) + tensao_anterior;
            deformacao (i) = delta_epsilon_barra2(4,1) + deformacao_anterior;
            tensao_anterior = tensao(i);
            deformacao_anterior = deformacao (i);
////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////

            end
end

tensao_plot = [0 (tensao)'];
deformacao_plot = [0 deformacao'];

// GRÁFICO ISOTROPIZAÇÃO ESPECTRAL

scf(5)
plot(deformacao_plot, tensao_plot,'b-','Linewidth',3)
title('COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO DE UM MATERIAL HETEROGÊNEO COM INCLUSÕES ESFÉRICAS')
xlabel('DEFORMAÇÃO')
ylabel('TENSÃO (Cisalhamento)[GPa]')

////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
```

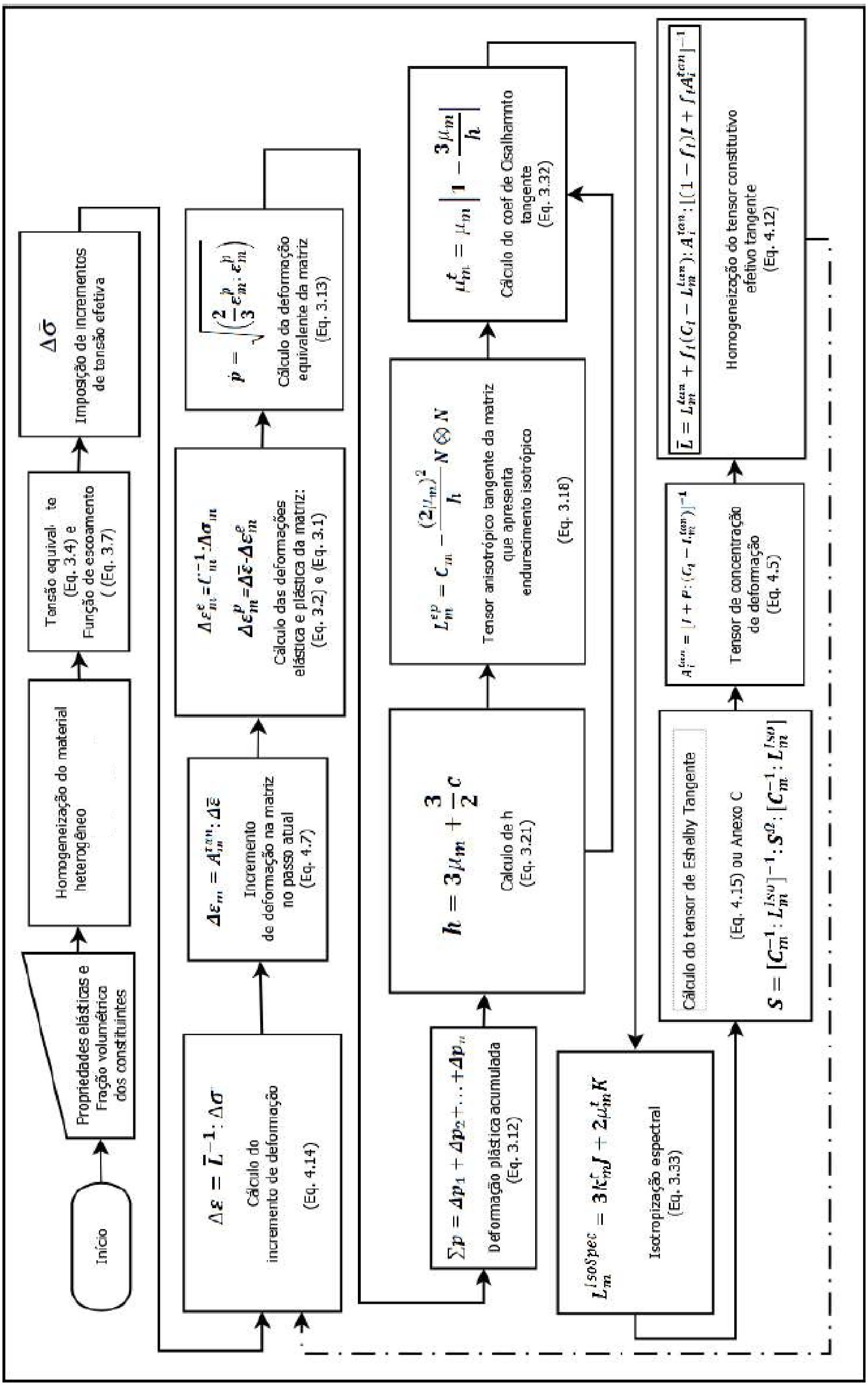
APÊNDICE G – ALGORITMO: ISOTROPIZAÇÃO ESPECTRAL E ENDURECIMENTO CINEMÁTICO

Para a aplicação do algoritmo, o leitor deve atentar para o uso correto do tensor de concentração de deformação no regime plástico, ou seja:

- Para inclusões esféricas ou elipsoidais alinhadas, usa-se o tensor de concentração de deformação $\mathbb{A}_i^{tan}$;
- Para inclusões elipsoidais desalinhadas, usa-se o tensor de concentração de deformação $\langle \mathbb{A}_i^{dil} \rangle_{\psi}^{tan}$.

Para o caso do cálculo do tensor constitutivo global elástico, para inclusões desalinhadas, o método usado neste trabalho está explícito na Equação 2.101.

Figura 71 – Fluxograma do comportamento elastoplástico: Isotropização espectral e endurecimento cinemático



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

A seguir, o código na linguagem Scilab de um material bifásico que se encontra sob a condição de carregamento macroscópico de tração. A matriz do material heterogêneo apresenta endurecimento cinemático e método de isotropização espectral.

```
// Mori-Tanaka
// Inclusões Esféricas
// Endurecimento cinemático
// Condição de contorno direção [1,1]

clear
clc
xdel(winsid()) // close all

// DADOS DE ENTRADA:

// Constantes da Matriz
Em=input ('Modulo de Elasticidade da Matriz em GPa, Em= ');
vm= input ('Coeficiente de Poisson da Matriz, vm= ');
VF=input ('Fração Volumétrica das inclusões, VF [0-1]]=');
Vf = linspace(0, VF,10) // O valor valor pode ser aumentado.
Sigmay=input ('Tensão de Escoamento da Matriz, Sy=___[GPa] ');
c=input ('Módulo de endurecimento da matriz, c=___[GPa] ');

// Constantes da Inclusão
Ei=input ('Modulo de Elasticidade da Inclusão em GPa, Ei= ');
vi=input ('Coeficiente de Poisson da Inclusão, vi= ');

incrementos=input ('Número de incrementos de tensão = ');

VM=1-VF; //Fração volumétrica da matriz

Gm=Em/(2*(1+vm));
Km=Em/(3*(1-2*vm));

Gi=Ei/(2*(1+vi));
Ki=Ei/(3*(1-2*vi));

// CALCULO DA TENSOR DE RIGIDEZ DA MATRIZ

C=[ 1-vm vm vm 0 0 0;
    vm 1-vm vm 0 0 0;
    vm vm 1-vm 0 0 0;
    0 0 0 (1-(2*vm))/2 0 0;
    0 0 0 0 (1-(2*vm))/2 0;
    0 0 0 0 0 (1-(2*vm))/2];

Cm=(Em/((1+vm)*(1-2*vm)))*C;

// CALCULO DA TENSOR DE RIGIDEZ DA INCLUSÃO

C_=[ 1-vi vi vi 0 0 0;
     vi 1-vi vi 0 0 0;
     vi vi 1-vi 0 0 0;
     0 0 0 (1-(2*vi))/2 0 0;
     0 0 0 0 (1-(2*vi))/2 0;
     0 0 0 0 0 (1-(2*vi))/2];

Ci=(Ei/((1+vi)*(1-2*vi)))*C_;

//COMPONENTES DO TENSOR DE ESHELBY (Inclusões Esféricas)
S1111 = (7-(5*vm))/(15*(1-vm));
S2222 = (7-(5*vm))/(15*(1-vm));
S3333 = (7-(5*vm))/(15*(1-vm));
S1122 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
S2233 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
S3311 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
S1133 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
S2211 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
S3322 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
S2332=(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S2323=(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
```

```
S3131=(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S3113=(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S1212 =(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S1221=(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S1313=S1212;

 //TENSOR DE ESHELBY
  S=[S1111 S1122 S1133 0 0 0;
     S2211 S2222 S2233 0 0 0;
     S3311 S3322 S3333 0 0 0;
     0 0 0 (S1212+S1212) 0 0;
     0 0 0 0 (S2323+S2323) 0;
     0 0 0 0 0 (S1313+S1313)];

// MATRIZ IDENTIDADE
I=[ 1 0 0 0 0 0;0 1 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 1 0 0;0 0 0 0 1 0;0 0 0 0 0 1];

// TENSOR CONCENTRACAO DE DEFORMACAO DA INCLUSAO
Ai=(I-(S*Cm^-1)*(Cm-Ci))^-1;
A=(I+(S*Cm^-1)*(Ci-Cm))^-1;

// CÁLCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO COMPÓSITO: MODELO MORI-TANAKA

tam = length(Vf)
Eeqmt = zeros(1,tam)
Geqmt = zeros(1,tam)
Keqmt = zeros(1,tam)
v_l = zeros(1,tam)

for i=1:tam

//Tensor Elástico de Rigidez Efetivo
Ccmt1=(((1-Vf(i))*Cm)+Vf(i)*Ci*A)*((1-Vf(i))*I+Vf(i)*A)^-1;

//Tensor Elástico de Flexibilidade Efetivo
Dcmt1=Ccmt1^-1;

// Módulo de Young  Efetivo Elástico
Eeqmt(i)=1/Dcmt1(1,1);

// Módulo de Cisalhamento Efetivo Elástico Elástico
Geqmt(i)=(Ccmt1(1,1)-Ccmt1(1,2))/2;

// Módulo bulk Efetivo Elástico Elástico
Keqmt(i)=(Ccmt1(1,1)+(2*Ccmt1(1,2)))/3;

// Coefic de Poisson Efetivo Elástico Elástico
v_l(i)=(Eeqmt-(2*Geqmt))/(2*Geqmt);

end

// GRÁFICOS DAS CONSTANTES ELÁSTICAS

scf(1)
plot(Vf,Geqmt,'r*-','LineWidth',3)
xtitle('Fração Volumética x Módulo de Cisalhamento para Inclusões Esféricas')
xlabel('Fração Volumétrica (Vf)')
ylabel('Módulo de Cisalhamento Efetivo [GPa]')
//xgrid

scf(2)
plot(Vf,Keqmt,'b*-','LineWidth',3)
xtitle('Fração Volumética x Múdulo de Bulk para Inclusões Esféricas')
xlabel('Fração Volumétrica (Vf)')
ylabel('Módulo de Bulk Efetivo [GPa]')
//xgrid
```

```
scf(3)
plot(Vf,Eeqmt,'go-','LineWidth',3)
xtitle('Fração Volumética x Módulo de Young para Inclusões Esféricas')
xlabel('Fração Volumétrica (Vf)')
ylabel('Módulo de Young Efetivo [GPa]')
//xgrid

// Tensor Volumétrico
J=[1/3 1/3 1/3 0 0 0;
    1/3 1/3 1/3 0 0 0;
    1/3 1/3 1/3 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0];

// tensor Desviador
 K=[2/3 -1/3 -1/3 0 0 0;
   -1/3 2/3 -1/3 0 0 0;
   -1/3 -1/3 2/3 0 0 0;
    0 0 0 1 0 0;
    0 0 0 0 1 0;
    0 0 0 0 0 1];

// Delta de Kronecker:
 delta=[1 0 0 0 0 0;
    0 1 0 0 0 0;
    0 0 1 0 0 0;
    0 0 0 1 0 0;
    0 0 0 0 1 0;
    0 0 0 0 0 1];

//ISOTROPIZAÇÃO ESPECTRAL + TENSOR DE ESHELBY TANGENTE ENDURECIMENTO CINEMÁTICO
for i=1 : incrementos //Número de incrementos

    if i == 1

SIGMA_BARRA= [1 0 0 0 0 0]'; // Tensor de tensão Macroscópico

Am_MT=((1-VF)*I+VF*Ai)^-1; // Tensor de Concentração de Deformação na Matriz

Bm=Cm*Am_MT*Ccmt1^-1; // Tensor de Concentração de Tensão na Matriz

sigma_matriz_0=Bm*SIGMA_BARRA;  // TTensor Tensão na Matriz

Sigma_matriz_eq=sqrt(0.5*((sigma_matriz_0(1,1)-sigma_matriz_0(2,1))^2+...
(sigma_matriz_0(2,1)-sigma_matriz_0(3,1))^2+(sigma_matriz_0(3,1)-...
sigma_matriz_0(1,1))^2)+3*((sigma_matriz_0(4,1))^2+...
(sigma_matriz_0(5,1))^2+(sigma_matriz_0(6,1))^2));// Tensão Equivalente da matriz .

lambda0=(Sigmay/Sigma_matriz_eq); // FATOR DE ESCOAMENTO DA MATRIZ DO MATRIAL BIFÁSICO

//////////////////////////////////////////////////////////////////////
//////////////////////////////////////////////////////////////////////
sigmay0=lambda0*SIGMA_BARRA; // Tensor Tensão Global de Escoamento da Matriz do Compósito
//
epsilon_barra1=Ccmt1^-1*sigmay0 // Deformação Global de Escoamento do Compósito
//
EPSILON_MATRIZ_ESCOA=((1-VF)*I+VF*A)^-1*epsilon_barra1; // Deformação Média na Matriz

EPSILON_INCLUSAO=A*(VF*A+(1-VF)*I)^-1*epsilon_barra1; // Deformação Média na Inclusão
//
TENSAO_MATRIZ_ESCOA=Cm*EPSILON_MATRIZ_ESCOA; // Tensão Média na Matriz

TENSAO_INCLUSAO_ESCOA=Ci*EPSILON_INCLUSAO; // Tensão Média na Inclusão
//
EPSILON_ELASTICO=(Cm)^-1*TENSAO_MATRIZ_ESCOA; // Deformação Elástica da Matriz do Compósito
//
```

```
EPSILON_PLASTICO=EPSILON_MATRIZ_ESCOA-EPSILON_ELASTICO;
//
delta_p1=sqrt((2/3)*EPSILON_PLASTICO'*EPSILON_PLASTICO);

p1=delta_p1;// Não existe deformação plástica na superfície
panterior = p1;

alpha1=(c*EPSILON_PLASTICO); //Back Strss (Tensão de Retorno)

s_Devia_Escoa=(K*TENSAO_MATRIZ_ESCOA)-alpha1;

Sigma_m_eq_ESCOA=sqrt(0.5*(((TENSAO_MATRIZ_ESCOA(1,1)-alpha1(1,1))-...
 (TENSAO_MATRIZ_ESCOA(2,1)-alpha1(2,1)))^2+((TENSAO_MATRIZ_ESCOA(2,1)-alpha1(2,1))-...
 (TENSAO_MATRIZ_ESCOA(3,1)-alpha1(3,1)))^2+((TENSAO_MATRIZ_ESCOA(3,1)-alpha1(3,1))-...
 (TENSAO_MATRIZ_ESCOA(1,1)-alpha1(1,1)))^2)+3*((TENSAO_MATRIZ_ESCOA(4,1)-alpha1(4,1))^2+...
 (TENSAO_MATRIZ_ESCOA(5,1)-alpha1(5,1))^2+(TENSAO_MATRIZ_ESCOA(6,1)-alpha1(6,1))^2));// Tensão Equivalente GERAL.


Cmtan_Aniso_1=Cm //Não existe deformação plástica na superfície

Cmtan_Aniso_anterior = Cmtan_Aniso_1;

Cmtan_Iso_1=Cm

Cmtan_Iso_anterior = Cm; // Para guardar o valor calculado acima

             // TENSOR DE ESHELBY TANGENTE
                S_Tang1=S;

              // TENSOR DE CONCENTRAÇÃO DE DEFORMAÇÃO
A_tang1=(I+(S_Tang1*Cmtan_Iso_1^-1)*(Ci-Cmtan_Iso_1))^-1; // Tensor de concentração de deformação tangente

A_tang_anterior = A_tang1; // Para guardar o valor calculado acima

LL1=Cmtan_Iso_1+VF*(Ci-Cmtan_Iso_1)*A_tang1*((1-VF)*I+VF*A_tang1)^-1; // Tensor de rigidez efetivo
LL_anterior = LL1; // Para guardar o valor calculado acima

//////////////////////////////////////////////////////////////////////
//Informações a serem usadas para construção o gráfico Tensão x Deformação do Compósito
tensao (i)= sigmay0 (1,1);
deformacao (i) = epsilon_barra1(1,1);
tensao_anterior = sigmay0 (1,1);
deformacao_anterior = epsilon_barra1(1,1);

//////////////////////////////////////////////////////////////////////
// ISOTROPIZAÇÃO ESPECTRAL + ESHELBY TANGENTE
else  // INÍCIO DO PROCESSO INCREMENTAL

DELTA_SIGMA= [0.00001 0 0 0 0 0]'; // Incremento de vetor de tensão macroscópico

delta_epsilon_barra2=LL_anterior^-1*DELTA_SIGMA; // Incremento de Deformação Global do Compósito

delta_epsilon_matriz2=((1-VF)*I+VF*A_tang_anterior)^-1*delta_epsilon_barra2;//Incremento de Deformação na matriz

delta_epsilon_fibra2=A_tang_anterior*(VF*A_tang_anterior+(1-VF)*I)^-1*delta_epsilon_barra2; // Incremento de Deformação na fibra
delta_tensao_matriz2=Cmtan_Iso_anterior*delta_epsilon_matriz2; //Increm de Tensão na Matriz

delta_tensao_inclusao2=Ci*delta_epsilon_fibra2; // Incremento de Tensão na Inclusão

Tensao_Matriz_2=TENSAO_MATRIZ_ESCOA+delta_tensao_matriz2; //Tens Tot. méd da matriz no final do passo atual

```

```
Tensao_Inclusao_2=TENSAO_INCLUSAO_ESCOA+delta_tensao_inclusao2; // Tens. Tot. méd. na Inc. no final passo atual

delta_epsilon_elast_2=Cm^-1*delta_tensao_matriz2 // Incremento de deformação elástica

delta_epsilon_plastic_2=delta_epsilon_matriz2-delta_epsilon_elast_2; // Incremento de deformação plástica

delta_p2=sqrt((2/3)*delta_epsilon_plastic_2'*delta_epsilon_plastic_2); // Incremento de deformação plástica acumulada

p2=panterior+delta_p2; // Deformação plástica total

panterior = p2; // Para guardar o valor calculado acima

alpha2=(c*delta_epsilon_plastic_2); //Back Strss (Tensão de Retorno)

sm2=(K*Tensao_Matriz_2)-(alpha2); // Desviadora Total na Matriz

Sigma_m_eq2=sqrt(0.5*(((Tensao_Matriz_2(1,1)-alpha2(1,1))-...
(Tensao_Matriz_2(2,1)-alpha2(2,1)))^2+((Tensao_Matriz_2(2,1)-alpha2(2,1))-...
(Tensao_Matriz_2(3,1)-alpha2(3,1)))^2+((Tensao_Matriz_2(3,1)-alpha2(3,1))-...
(Tensao_Matriz_2(1,1)-alpha2(1,1)))^2)+3*((Tensao_Matriz_2(4,1)-alpha2(4,1))^2+...
(Tensao_Matriz_2(5,1)-alpha2(5,1))^2+(Tensao_Matriz_2(6,1)-alpha2(6,1))^2));// Tensão Equivalente GERAL.

N2=(3/2)*((sm2)/(Sigma_m_eq2)) // Vetor Normal a Superfície de Escoamento no passo atual.

Hp2=(3/2)*c;// Módulo Plástico (Chen & Zhang Eq. 5.96) (ver eq.5.187 e 5.193)

h2=(3*Gm+(Hp2)) // Funão escalar (Chen & Zhang Eq. 5.188)

Cmtan_Aniso_2=Cm-((4*Gm^2)/h2)*N2*N2';

Cmtan_Aniso_anterior = Cmtan_Aniso_2;

// ISOTROPIZAÇÃO ESPECTRAL + ESHELBY TANGENTE
//Gmt2x=Gm*(1-(3*Gm/(h2)));//(Apenas para comprovação de resultado)
Gmt2=Gm*(1-(3*Gm/(3*Gm+(3/2)*c))); // Mód. Cisalham. na região plást. usando Hp da Eq. 5.187 de(Chen & Zhang)
Emt2=(9*Km*Gmt2)/(3*Km+Gmt2);       // Módulo de Young
v_2=(3*Km-2*Gmt2)/(6*Km+2*Gmt2);    // Coeficiente de Poisson
Kmt2=(Gmt2*Emt2)/(9*Gmt2-3*Emt2);   // Módulo bulk

// Tensor Tangente de Rigidez da Matriz
Ctan2=[1-v_2 v_2 v_2 0 0 0;
       v_2 1-v_2 v_2 0 0 0;
       v_2 v_2 1-v_2 0 0 0;
       0 0 0 (1-(2*v_2))/2 0 0;
       0 0 0 0 (1-(2*v_2))/2 0;
       0 0 0 0 0 (1-(2*v_2))/2];
//
Cmtan_Iso_2=(Emt2/((1+v_2)*(1-2*v_2)))*Ctan2;

Cmtan_Iso_anterior = Cmtan_Iso_2;  // Para guardar o valor calculado acima

// COMPONENTES DO TENSOR DE ESHELBY TANGENTE
            S1111_Tan2 = (7-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S2222_Tan2 = (7-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S3333_Tan2 = (7-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S1122_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S2233_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S3311_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S1133_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S2211_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S3322_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S2332_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
```

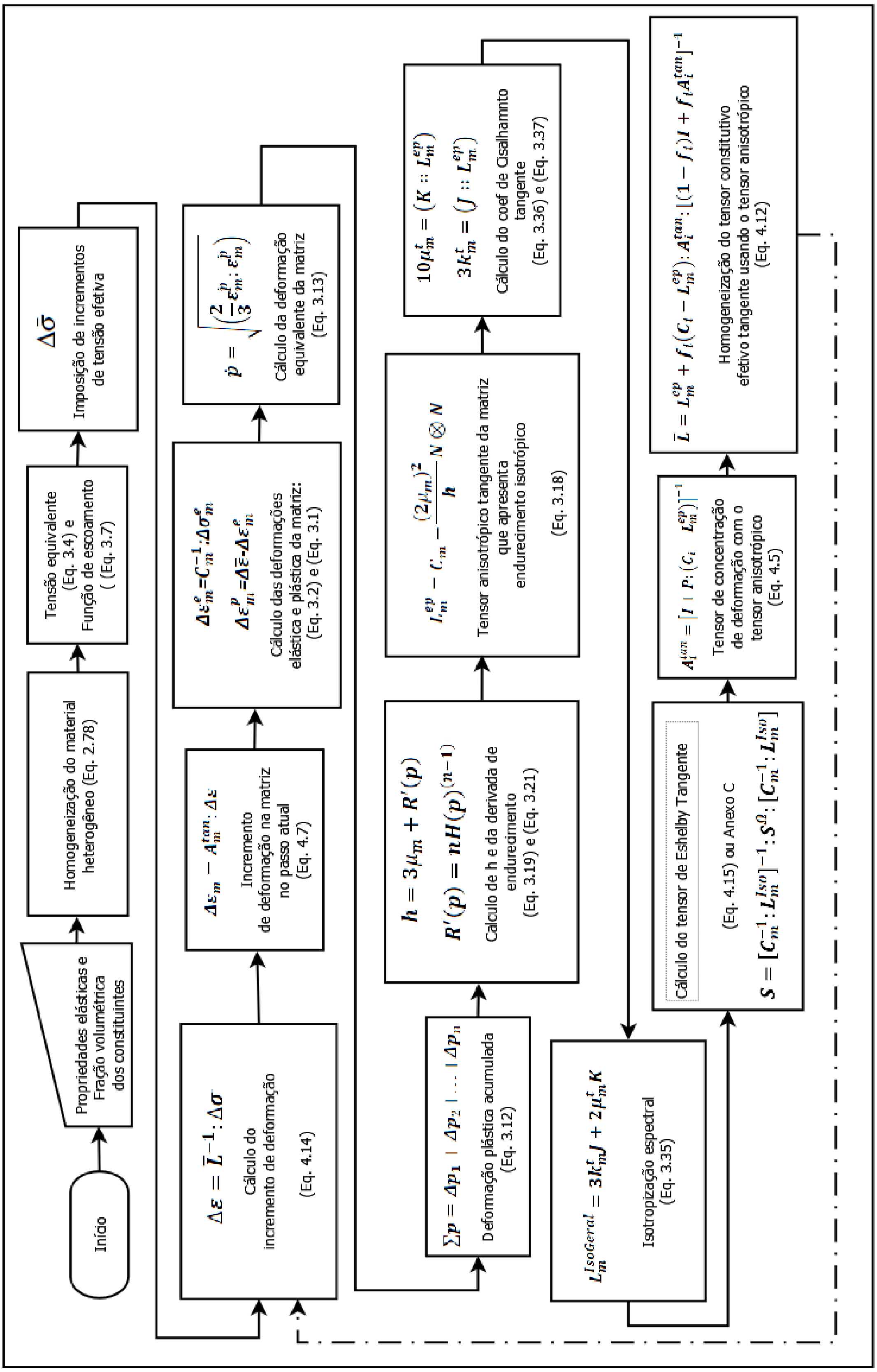
```
            S2323_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S3131_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S3113_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S1212_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S1221_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S1313_Tan2=S1212_Tan2;

              //TENSOR DE ESHELBY TANGENTE
              S_Tang2=[S1111_Tan2 S1122_Tan2 S1133_Tan2 0 0 0;
                 S2211_Tan2 S2222_Tan2 S2233_Tan2 0 0 0;
                 S3311_Tan2 S3322_Tan2 S3333_Tan2 0 0 0;
                 0 0 0 (S1212_Tan2+S1212_Tan2) 0 0;
                 0 0 0 0 (S2323_Tan2+S2323_Tan2) 0;
                 0 0 0 0 0 (S1313_Tan2+S1313_Tan2)];


A_tang2=(I+(S_Tang2*Cmtan_Iso_2^-1)*(Ci-Cmtan_Iso_2))^-1; // Tensor de concentração de deformação tangente

A_tang_anterior = A_tang2; // Para guardar o valor calculado acima

LL2=Cmtan_Iso_2+VF*(Ci-Cmtan_Iso_2)*A_tang2*((1-VF)*I+VF*A_tang2)^-1; // Tensor de rigidez efetivo tangente
LL_anterior = LL2; // Para guardar o valor calculado acima

//Informações a serem usadas para construção o gráfico Tensão x Deformação do Compósito
            tensao (i)=  DELTA_SIGMA(1,1) + tensao_anterior;
            deformacao (i) = delta_epsilon_barra2(1,1) + deformacao_anterior;
            tensao_anterior = tensao(i);
            deformacao_anterior = deformacao (i);

            end

end

tensao_plot = [0 (tensao)'];
deformacao_plot = [0 deformacao'];

// GRÁFICO ISOTROPIZAÇÃO ESPECTRAL

scf(4)
plot(deformacao_plot, tensao_plot,'b-','Linewidth',3)

legend('ISOTROPIZAÇÃO ESPECTRAL + ESHELBY TANGENTE',4)
title('COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO DE UM COMPÓSITO COM INCLUSÕES ESFÉRICAS')
xlabel('DEFORMAÇÃO')
ylabel('TENSÃO [GPa]')

/////////////////////////////////////////////////////////////////////
/////////////////////////////////////////////////////////////////////
/////////////////////////////////////////////////////////////////////
```

APÊNDICE H – ALGORITMO: ISOTROPIZAÇÃO GERAL E ENDURECIMENTO ISOTRÓPICO

Para a aplicação do algoritmo, o leitor deve atentar para o uso correto do tensor anisotrópico no regime plástico, ou seja:

- Para o cálculo do tensor de Esheby, usa-se o tensor constitutivo isotropizado apresentado na Equação 3.35;
- Para os demais cálculos, usa-se o tensor constitutivo anisotrópico apresentado na Equação 3.18.

Figura 72 – Fluxograma do comportamento elastoplástico: Isotropização geral e endurecimento isotrópico



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

A seguir, o código na linguagem Scilab de um material bifásico que se encontra sob a condição de carregamento macroscópico de tração. A matriz do material heterogêneo apresenta endurecimento isotrópico e método de isotropização geral.

```
// Mori-Tanaka
// Inclusões Esféricas
// Endurecimento cinemático
// Condição de contorno direção [1,1]
// ATENTAR PARA O USO DOS TENSORES ANISOTRÓPICOS
// OBSERVE QUE APENAS O TENSOR DE ESHELBY É ISOTRÓPICO

clear
clc
xdel(winsid()) // close all

// DADOS DE ENTRADA:

// Constantes da Matriz
Em=input ('Modulo de Elasticidade da Matriz em GPa, Em= ');
vm= input ('Coeficiente de Poisson da Matriz, vm= ');
VF=input ('Fração Volumétrica das inclusões, VF [0-1]]=');
Vf = linspace(0, VF,10) // O valor valor pode ser aumentado.
Sigmay=input ('Tensão de Escoamento da Matriz, Sy=___[GPa] ');
n=input ('Expoente de endurecimento da matriz, []0-0.4] n= ');
H1=input ('Módulo de endurecimento da matriz, H=___[GPa] ');

// Constantes da Inclusão
Ei=input ('Modulo de Elasticidade da Inclusão em GPa, Ei= ');
vi=input ('Coeficiente de Poisson da Inclusão, vi= ');

incrementos=input ('Número de incrementos de tensão = ');

VM=1-VF; //Fração volumétrica da matriz

// Contraste entre Matriz e Inclusão
C_el=Ei/Em;

Gm=Em/(2*(1+vm));
Km=Em/(3*(1-2*vm));

Gi=Ei/(2*(1+vi));
Ki=Ei/(3*(1-2*vi));

// CALCULO DA TENSOR DE RIGIDEZ DA MATRIZ

C=[ 1-vm vm vm 0 0 0;
    vm 1-vm vm 0 0 0;
    vm vm 1-vm 0 0 0;
    0 0 0 (1-(2*vm))/2 0 0;
    0 0 0 0 (1-(2*vm))/2 0;
    0 0 0 0 0 (1-(2*vm))/2];

Cm=(Em/((1+vm)*(1-2*vm)))*C;

// CALCULO DA TENSOR DE RIGIDEZ DA INCLUSÃO

C_=[ 1-vi vi vi 0 0 0;
     vi 1-vi vi 0 0 0;
     vi vi 1-vi 0 0 0;
     0 0 0 (1-(2*vi))/2 0 0;
     0 0 0 0 (1-(2*vi))/2 0;
     0 0 0 0 0 (1-(2*vi))/2];

Ci=(Ei/((1+vi)*(1-2*vi)))*C_;

//COMPONENTES DO TENSOR DE ESHELBY (Inclusões Esféricas)

S1111 = (7-(5*vm))/(15*(1-vm));
S2222 = (7-(5*vm))/(15*(1-vm));
S3333 = (7-(5*vm))/(15*(1-vm));
S1122 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
```

```
S2233 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
S3311 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
S1133 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
S2211 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
S3322 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
S2332=(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S2323=(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S3131=(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S3113=(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S1212 =(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S1221=(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S1313=S1212;

 //TENSOR DE ESHELBY

  S=[S1111 S1122 S1133 0 0 0;
     S2211 S2222 S2233 0 0 0;
     S3311 S3322 S3333 0 0 0;
     0 0 0 (S1212+S1212) 0 0;
     0 0 0 0 (S2323+S2323) 0;
     0 0 0 0 0 (S1313+S1313)];

// MATRIZ IDENTIDADE
I=[ 1 0 0 0 0 0;0 1 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 1 0 0;0 0 0 0 1 0;0 0 0 0 0 1];

// TENSOR CONCENTRACAO DE DEFORMACAO NA INCLUSAO
Ai=(I-(S*Cm^-1)*(Cm-Ci))^-1;
//ou
A=(I+(S*Cm^-1)*(Ci-Cm))^-1;

// CÁLCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO COMPÓSITO: MODELO MORI-TANAKA
//////////////////////////////////////////////////////////////////////
tam = length(Vf)
Eeqmt = zeros(1,tam)
Geqmt = zeros(1,tam)
Keqmt = zeros(1,tam)
v_l = zeros(1,tam)

for i=1:tam
//Tensor Elástico de Rigidez Efetivo
Ccmt1=(((1-Vf(i))*Cm)+Vf(i)*Ci*A)*((1-Vf(i))*I+Vf(i)*A)^-1;

//Tensor de Flexibilidade Efetivo
Dcmt1=Ccmt1^-1;

// Módulo de Young Elástico Efetivo
Eeqmt(i)=1/Dcmt1(1,1);

// Módulo de Cisalhamento Elástico Efetivo
Geqmt(i)=(Ccmt1(1,1)-Ccmt1(1,2))/2;

// Módulo bulk Elástico Efetivo
Keqmt(i)=(Ccmt1(1,1)+(2*Ccmt1(1,2)))/3;

// Coefic de Poisson Elástico Efetivo
v_l(i)=(Eeqmt(i)-(2*Geqmt(i)))/(2*Geqmt(i));

end
//////////////////////////////////////////////////////////////////////

// GRÁFICOS DAS CONSTANTES ELÁSTICAS EFETIVAS

scf(1)
plot(Vf,Geqmt,'r*-','LineWidth',3)
xtitle('Fração Volumética x Módulo de Cisalhamento para Inclusões Esféricas')
xlabel('Fração Volumétrica (Vf)')
ylabel('Módulo de Cisalhamento Efetivo [GPa]')
```

```
//xgrid

scf(2)
plot(Vf,Keqmt,'b*-','LineWidth',3)
xtitle('Fração Volumética x Módulo de Bulk para Inclusões Esféricas')
xlabel('Fração Volumétrica (Vf)')
ylabel('Módulo de Bulk Efetivo [GPa]')
//xgrid

scf(3)
plot(Vf,Eeqmt,'go-','LineWidth',3)
xtitle('Fração Volumética x Módulo de Young para Inclusões Esféricas')
xlabel('Fração Volumétrica (Vf)')
ylabel('Módulo de Young Efetivo [GPa]')
//xgrid

scf(4)
plot(Vf,v_l,'go-','LineWidth',3)
xtitle('Fração Volumética x Coef de Poisson para Inclusões Esféricas')
xlabel('Fração Volumétrica (Vf)')
ylabel('Coef. de Poisson Efetivo')
//xgrid

// Tensor de Projeção Volumétrico
J=[1/3 1/3 1/3 0 0 0;
    1/3 1/3 1/3 0 0 0;
    1/3 1/3 1/3 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0];

// Tensor de Projeção Desviador
 K=[2/3 -1/3 -1/3 0 0 0;
   -1/3 2/3 -1/3 0 0 0;
   -1/3 -1/3 2/3 0 0 0;
    0 0 0 1 0 0;
    0 0 0 0 1 0;
    0 0 0 0 0 1];

// Delta de Kronecker:
 delta=[1 0 0 0 0 0;
    0 1 0 0 0 0;
    0 0 1 0 0 0;
    0 0 0 1 0 0;
    0 0 0 0 1 0;
    0 0 0 0 0 1];

//ISOTROPIZAÇÃO ESPECTRAL + TENSOR DE ESHELBY TANGENTE

for i=1 : incrementos //Número de incrementos

    if i == 1

//AVALIAÇÃO DO ESCOAMENTO DO MATERIAL HETEROGÊNEO

SIGMA_BARRA= [1 0 0 0 0 0]'; // Tensor de tensão Macroscópico

Am_MT=((1-VF)*I+VF*Ai)^-1; // Tensor de Concentração de Deformação na Matriz

Bm=Cm*Am_MT*Ccmt1^-1; // Tensor de Concentração de Tensão na Matriz

sigma_matriz_0=Bm*SIGMA_BARRA;  // TTensor Tensão na Matriz

Sigma_matriz_eq=sqrt(0.5*((sigma_matriz_0(1,1)-sigma_matriz_0(2,1))^2+...
(sigma_matriz_0(2,1)-sigma_matriz_0(3,1))^2+(sigma_matriz_0(3,1)-...
sigma_matriz_0(1,1))^2)+3*((sigma_matriz_0(4,1))^2+...
(sigma_matriz_0(5,1))^2+(sigma_matriz_0(6,1))^2));// Tensão Equivalente da matriz .
```

```
lambda0=(Sigmay/Sigma_matriz_eq); // FATOR DE ESCOAMENTO DA MATRIZ DO MATRIAL BIFÁSICO
////////////////////////////////////////////////////////////////////
////////////////////////////////////////////////////////////////////
// AVALIAÇÃO DO COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO:
sigmay0=lambda0*SIGMA_BARRA; // Tensor Tensão Global de Escoamento da Matriz do Compósito
epsilon_barra1=Ccmt1^-1*sigmay0 // Deformação Global de Escoamento do Compósito
EPSILON_MATRIZ_ESCOA=((1-VF)*I+VF*A)^-1*epsilon_barra1; // Deformação Média na Matriz
//
EPSILON_INCLUSAO=A*(VF*A+(1-VF)*I)^-1*epsilon_barra1; // Deformação Média na Inclusão
//
TENSAO_MATRIZ_ESCOA=Cm*EPSILON_MATRIZ_ESCOA; // Tensão Média na Matriz
//
TENSAO_INCLUSAO_ESCOA=Ci*EPSILON_INCLUSAO; // Tensão Média na Inclusão
//
s_Devia_Escoa=K*TENSAO_MATRIZ_ESCOA; // Tensão Desviadora Média na Matriz
//
Sigma_m_eq_ESCOA=sqrt(0.5*((TENSAO_MATRIZ_ESCOA(1,1)-TENSAO_MATRIZ_ESCOA(2,1))^2+...
(TENSAO_MATRIZ_ESCOA(2,1)-TENSAO_MATRIZ_ESCOA(3,1))^2+(TENSAO_MATRIZ_ESCOA(3,1)-...
TENSAO_MATRIZ_ESCOA(1,1))^2)+3*((TENSAO_MATRIZ_ESCOA(4,1))^2+(TENSAO_MATRIZ_ESCOA(5,1))^2+...
(TENSAO_MATRIZ_ESCOA(6,1))^2)); // Tensão Equivalente da matriz
////
N_ESCOA=(3/2)*((s_Devia_Escoa)/(Sigma_m_eq_ESCOA)); // Componente normal a superf de escoamento
////
EPSILON_ELASTICO=(Cm)^-1*TENSAO_MATRIZ_ESCOA; // Deformação Elástica da Matriz do Compósito
////
EPSILON_PLASTICO=EPSILON_MATRIZ_ESCOA-EPSILON_ELASTICO;
////
delta_p1=sqrt((2/3)*EPSILON_PLASTICO'*EPSILON_PLASTICO);
//
p1=delta_p1; // Na superfície de escoamento, não existe deformação plástica acumulada
//
panterior = p1;
//
Rp_1=n*H1*(p1)^(n-1); // Derivada da Função de Endurecimento.
//
h1=3*Gm+Rp_1;
//
Cmtan_Aniso_1=Cm-((4*Gm^2)/(3*Gm+Rp_1))*N_ESCOA*N_ESCOA';
//
Cmtan_Aniso_anterior = Cmtan_Aniso_1;
//
Cmtan_Iso_anterior = Cmtan_Aniso_1;
//
S_Tang1=S
//
A_tang1=(I+(S_Tang1*Cmtan_Aniso_1^-1)*(Ci-Cmtan_Aniso_1))^-1; // Tensor de concentração de deformação tangente
//
A_tang_anterior = A_tang1; // Para guardar o valor calculado acima
//
LL1=Cmtan_Aniso_1+VF*(Ci-Cmtan_Aniso_1)*A_tang1*((1-VF)*I+VF*A_tang1)^-1; // Tensor de rigidez efetiva tangente do compósito
//
LL_anterior = LL1; // "Para guardar o valor calculado acima"
////////////////////////////////////////////////////////////////////
//Informações a serem usadas para construção o gráfico Tensão x Deformação do Compósito
//(ATENTAR PARA A CONDIÇÃO DE CONTORNO !!!)
            tensao (i)= sigmay0 (1,1);
            deformacao (i) = epsilon_barra1(1,1);
```

```
            tensao_anterior = sigmay0 (1,1);
            deformacao_anterior = epsilon_barra1(1,1);

////////////////////////////////////////////////////////////////////

else  // INÍCIO DO PROCESSO INCREMENTAL

DELTA_SIGMA= [0.00001 0 0 0 0 0]'; // Incremento do tensor tensão macroscópico

delta_epsilon_barra2=LL_anterior^-1*DELTA_SIGMA; // Incremento de Deformação Global do Compósito

delta_epsilon_matriz2=((1-VF)*I+VF*A_tang_anterior)^-1*delta_epsilon_barra2;//Incremento de Deformação na matriz

delta_epsilon_fibra2=A_tang_anterior*(VF*A_tang_anterior+(1-VF)*I)^-1*delta_epsilon_barra2; // Increm de Deform na fibra
delta_tensao_matriz2=Cmtan_Aniso_anterior*delta_epsilon_matriz2;//Increm. de Tensã Matriz (ANISOTRÓPICO)

delta_tensao_inclusao2=Ci*delta_epsilon_fibra2; // Incremento de Tensão na Inclusão

Tensao_Matriz_2=TENSAO_MATRIZ_ESCOA+delta_tensao_matriz2; //Tens Tot. méd da matriz no final do passo atual

Tensao_Inclusao_2=TENSAO_INCLUSAO_ESCOA+delta_tensao_inclusao2; // Tens. Tot. méd. na Inc. no final passo atual

sm2=K*Tensao_Matriz_2; // Incremento de Tensão Desviadora no final do passo atual da matriz.

Sigma_m_eq2=sqrt(0.5*((Tensao_Matriz_2(1,1)-Tensao_Matriz_2(2,1))^2+...
(Tensao_Matriz_2(2,1)-Tensao_Matriz_2(3,1))^2+(Tensao_Matriz_2(3,1)-...
Tensao_Matriz_2(1,1))^2)+3*((Tensao_Matriz_2(4,1))^2+...
(Tensao_Matriz_2(5,1))^2+(Tensao_Matriz_2(6,1))^2));// Tensão Equivalente no passo atual.

N2=(3/2)*((sm2)/(Sigma_m_eq2)) // Componente Normal a Superfície de Escoamento no passo atual.

delta_epsilon_elast_2=Cm^-1*delta_tensao_matriz2 // Incremento de deformação elástica

delta_epsilon_plastic_2=delta_epsilon_matriz2-delta_epsilon_elast_2; // Incremento de deformação plástica

delta_p2=sqrt((2/3)*delta_epsilon_plastic_2'*delta_epsilon_plastic_2); // Incremento de deformação plástica acumulada

p2=panterior+delta_p2; // Deformação plástica total

panterior = p2; // Para guardar o valor calculado acima

Rp_2=n*H1*(p2)^(n-1); // Derivada da Função de Endurecimento.

Cmtan_Aniso_2=Cm-((4*Gm^2)/(3*Gm+Rp_2))*N2*N2'; //Tensor de rigidez tangente da matriz (Anisotrópico)

Cmtan_Aniso_anterior = Cmtan_Aniso_2; // Para guardar o valor calculado acima

// ISOTROPIZAÇÃO GERAL + ESHELBY TANGENTE
// Propriedade Tangentes da Matriz

Kmt2=sum(J.*Cmtan_Aniso_2)/3; // MÓDULO BULK TANGENTE
Gmt2=sum(K.*Cmtan_Aniso_2)*(1/10); // MÓDULO DE CISALHAMENTO TANGENTE
v_2=(3*Kmt2-2*Gmt2)/(6*Kmt2+2*Gmt2); //COEFICIENTE DE POISSON TANGENTE
Emt2=(9*Kmt2*Gmt2)/(3*Kmt2+Gmt2);    //MÓDULO DE YOUNG TANGENTE

// Tensor Tangente de Rigidez da Matriz
            Ctan2=[1-v_2 v_2 v_2 0 0 0;
                v_2 1-v_2 v_2 0 0 0;
                v_2 v_2 1-v_2 0 0 0;
```

```
                  0 0 0 (1-(2*v_2))/2 0 0;
                  0 0 0 0 (1-(2*v_2))/2 0;
                  0 0 0 0 0 (1-(2*v_2))/2];

Cmtan_Iso_2=(Emt2/((1+v_2)*(1-2*v_2)))*Ctan2;

Cmtan_Iso_anterior = Cmtan_Iso_2;  // Para guardar o valor calculado acima

            // COMPONENTES DO TENSOR DE ESHELBY TANGENTE
            S1111_Tan2 = (7-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S2222_Tan2 = (7-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S3333_Tan2 = (7-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S1122_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S2233_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S3311_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S1133_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S2211_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S3322_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S2332_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S2323_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S3131_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S3113_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S1212_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S1221_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S1313_Tan2=S1212_Tan2;

             //TENSOR DE ESHELBY TANGENTE
             S_Tang2=[S1111_Tan2 S1122_Tan2 S1133_Tan2 0 0 0;
                S2211_Tan2 S2222_Tan2 S2233_Tan2 0 0 0;
                S3311_Tan2 S3322_Tan2 S3333_Tan2 0 0 0;
                0 0 0 (S1212_Tan2+S1212_Tan2) 0 0;
                0 0 0 0 (S2323_Tan2+S2323_Tan2) 0;
                0 0 0 0 0 (S1313_Tan2+S1313_Tan2)];

A_tang2=(I+(S_Tang2*Cmtan_Aniso_2^-1)*(Ci-Cmtan_Aniso_2))^-1; //Tensor de concentração de deformação (ANISOTRÓPICO)
A_tang_anterior = A_tang2; // Para guardar o valor calculado acima

LL2=Cmtan_Aniso_2+VF*(Ci-Cmtan_Aniso_2)*A_tang2*((1-VF)*I+VF*A_tang2)^-1; // Tensor de rigidez efetivo tangente (ANISOTRÓPICO)
LL_anterior = LL2; // Para guardar o valor calculado acima

////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
//Informações a serem usadas para construção o gráfico Tensão x Deformação do Compósito
//(ATENTAR PARA A CONDIÇÃO DE CONTORNO !!!)

            tensao (i)=  DELTA_SIGMA(1,1) + tensao_anterior;
            deformacao (i) = delta_epsilon_barra2(1,1) + deformacao_anterior;
            tensao_anterior = tensao(i);
            deformacao_anterior = deformacao (i);
////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////

            end
end

tensao_plot = [0 (tensao)'];
deformacao_plot = [0 deformacao'];

// GRÁFICO

scf(5)
plot(deformacao_plot, tensao_plot,'b-','Linewidth',3)
title('COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO DE UM MATERIAL HETEROGÊNEO COM INCLUSÕES ESFÉRICAS')
xlabel('DEFORMAÇÃO')
ylabel('TENSÃO [GPa]')

////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
```

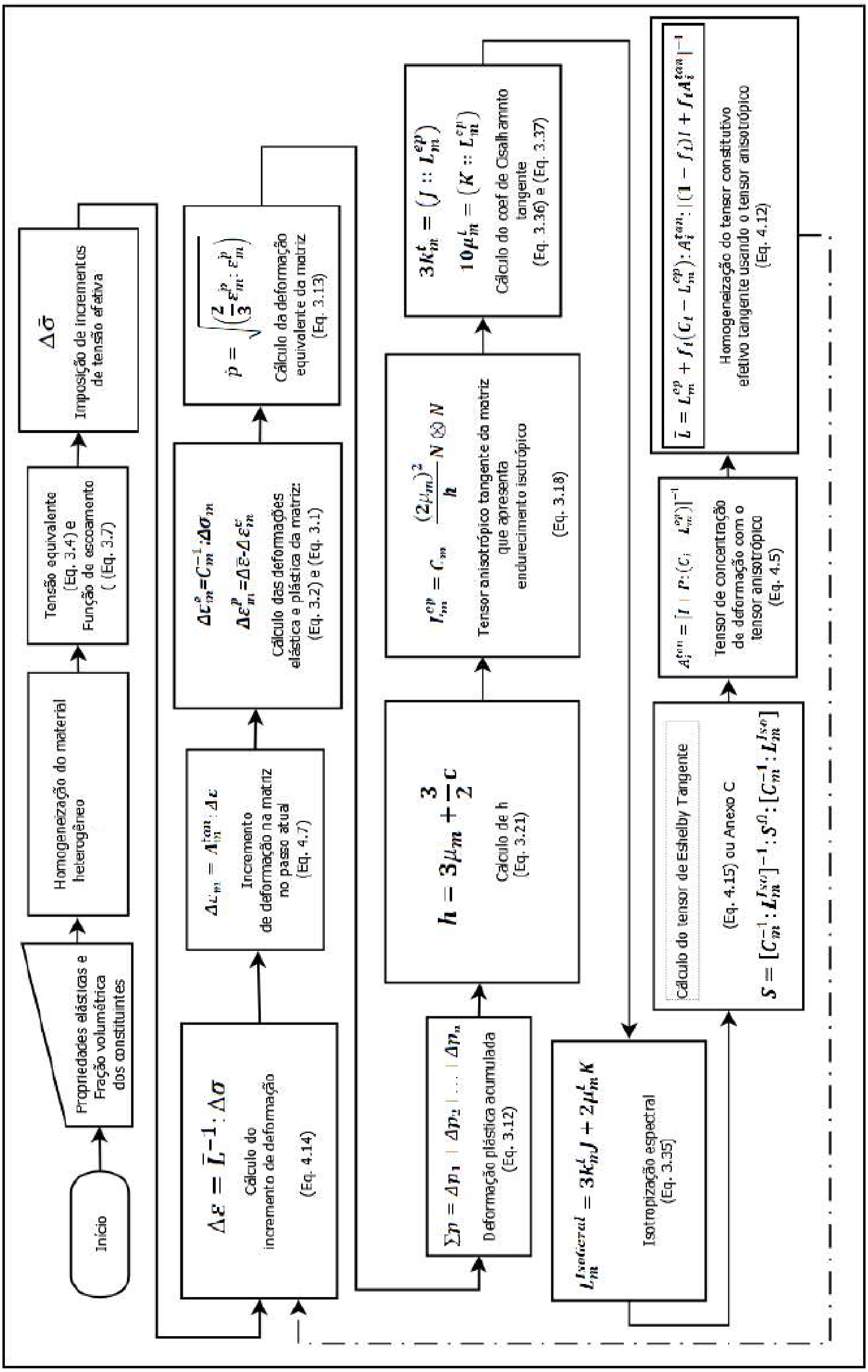
```
///////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
///////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
///////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
```

APÊNDICE I – ALGORITMO: ISOTROPIZAÇÃO GERAL E ENDURECIMENTO CINEMÁTICO

Para a aplicação do algoritmo, o leitor deve atentar para o uso correto do tensor anisotrópico no regime plástico, ou seja:

- Para o cálculo do tensor de Esheby, usa-se o tensor constitutivo isotropizado apresentado na Equação 3.35;
- Para os demais cálculos, usa-se o tensor constitutivo anisotrópico apresentado na Equação 3.18.

Figura 73 – Fluxograma do comportamento elastoplástico: Isotropização geral e endurecimento cinemático



Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

A seguir, o código na linguagem Scilab de um material bifásico que se encontra sob a condição de carregamento macroscópico de tração. A matriz do material heterogêneo apresenta endurecimento cinemático e método de isotropização geral.

```
// Mori-Tanaka
// Inclusões Esféricas
// Endurecimento cinemático
// Condição de contorno direção [1,1]
// ATENTAR PARA O USO DOS TENSORES ANISOTRÓPICOS
// OBSERVE QUE APENAS O TENSOR DE ESHELBY É ISOTRÓPICO

clear
clc
xdel(winsid()) // close all

// DADOS DE ENTRADA:

// Constantes da Matriz
Em=input ('Modulo de Elasticidade da Matriz em GPa, Em= ');
vm= input ('Coeficiente de Poisson da Matriz, vm= ');
VF=input ('Fração Volumétrica das inclusões, VF [0-1]]=');
Vf = linspace(0, VF,10) // O valor valor pode ser aumentado.
Sigmay=input ('Tensão de Escoamento da Matriz, Sy=___[GPa] ');
c=input ('Módulo de endurecimento da matriz, c=___[GPa] ');

// Constantes da Inclusão
Ei=input ('Modulo de Elasticidade da Inclusão em GPa, Ei= ');
vi=input ('Coeficiente de Poisson da Inclusão, vi= ');

incrementos=input ('Número de incrementos de tensão = ');

VM=1-VF; //Fração volumétrica da matriz

Gm=Em/(2*(1+vm));
Km=Em/(3*(1-2*vm));

Gi=Ei/(2*(1+vi));
Ki=Ei/(3*(1-2*vi));

// CALCULO DA TENSOR DE RIGIDEZ DA MATRIZ

C=[ 1-vm vm vm 0 0 0;
    vm 1-vm vm 0 0 0;
    vm vm 1-vm 0 0 0;
    0 0 0 (1-(2*vm))/2 0 0;
    0 0 0 0 (1-(2*vm))/2 0;
    0 0 0 0 0 (1-(2*vm))/2];

Cm=(Em/((1+vm)*(1-2*vm)))*C;

// CALCULO DA TENSOR DE RIGIDEZ DA INCLUSÃO

C_=[ 1-vi vi vi 0 0 0;
     vi 1-vi vi 0 0 0;
     vi vi 1-vi 0 0 0;
     0 0 0 (1-(2*vi))/2 0 0;
     0 0 0 0 (1-(2*vi))/2 0;
     0 0 0 0 0 (1-(2*vi))/2];

Ci=(Ei/((1+vi)*(1-2*vi)))*C_;

//COMPONENTES DO TENSOR DE ESHELBY (Inclusões Esféricas)
S1111 = (7-(5*vm))/(15*(1-vm));
S2222 = (7-(5*vm))/(15*(1-vm));
S3333 = (7-(5*vm))/(15*(1-vm));
S1122 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
S2233 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
S3311 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
S1133 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
S2211 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
S3322 = (5*vm-1)/(15*(1-vm));
```

```
S2332=(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S2323=(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S3131=(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S3113=(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S1212 =(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S1221=(4-(5*vm))/(15*(1-vm));
S1313=S1212;

 //TENSOR DE ESHELBY
  S=[S1111 S1122 S1133 0 0 0;
     S2211 S2222 S2233 0 0 0;
     S3311 S3322 S3333 0 0 0;
     0 0 0 (S1212+S1212) 0 0;
     0 0 0 0 (S2323+S2323) 0;
     0 0 0 0 0 (S1313+S1313)];

// MATRIZ IDENTIDADE
I=[ 1 0 0 0 0 0;0 1 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 1 0 0;0 0 0 0 1 0;0 0 0 0 0 1];

// TENSOR CONCENTRACAO DE DEFORMACAO DA INCLUSAO
Ai=(I-(S*Cm^-1)*(Cm-Ci))^-1;
A=(I+(S*Cm^-1)*(Ci-Cm))^-1;

// CÁLCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO COMPÓSITO: MODELO MORI-TANAKA

tam = length(Vf)
Eeqmt = zeros(1,tam)
Geqmt = zeros(1,tam)
Keqmt = zeros(1,tam)
v_l = zeros(1,tam)

for i=1:tam

//Tensor Elástico de Rigidez Efetivo
Ccmt1=(((1-Vf(i))*Cm)+Vf(i)*Ci*A)*((1-Vf(i))*I+Vf(i)*A)^-1;

//Tensor Elástico de Flexibilidade Efetivo
Dcmt1=Ccmt1^-1;

// Módulo de Young  Efetivo Elástico
Eeqmt(i)=1/Dcmt1(1,1);

// Módulo de Cisalhamento Efetivo Elástico Elástico
Geqmt(i)=(Ccmt1(1,1)-Ccmt1(1,2))/2;

// Módulo bulk Efetivo Elástico Elástico
Keqmt(i)=(Ccmt1(1,1)+(2*Ccmt1(1,2)))/3;

// Coefic de Poisson Efetivo Elástico Elástico
v_l(i)=(Eeqmt-(2*Geqmt))/(2*Geqmt);

end

// GRÁFICOS DAS CONSTANTES ELÁSTICAS

scf(1)
plot(Vf,Geqmt,'r*-','LineWidth',3)
xtitle('Fração Volumética x Módulo de Cisalhamento para Inclusões Esféricas')
xlabel('Fração Volumétrica (Vf)')
ylabel('Módulo de Cisalhamento Efetivo [GPa]')
//xgrid

scf(2)
plot(Vf,Keqmt,'b*-','LineWidth',3)
xtitle('Fração Volumética x Múdulo de Bulk para Inclusões Esféricas')
xlabel('Fração Volumétrica (Vf)')
ylabel('Módulo de Bulk Efetivo [GPa]')
```

```
//xgrid

scf(3)
plot(Vf,Eeqmt,'go-','LineWidth',3)
xtitle('Fração Volumética x Módulo de Young para Inclusões Esféricas')
xlabel('Fração Volumétrica (Vf)')
ylabel('Módulo de Young Efetivo [GPa]')
//xgrid

// Tensor Volumétrico
J=[1/3 1/3 1/3 0 0 0;
    1/3 1/3 1/3 0 0 0;
    1/3 1/3 1/3 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0];

// tensor Desviador
 K=[2/3 -1/3 -1/3 0 0 0;
   -1/3 2/3 -1/3 0 0 0;
   -1/3 -1/3 2/3 0 0 0;
    0 0 0 1 0 0;
    0 0 0 0 1 0;
    0 0 0 0 0 1];

// Delta de Kronecker:
 delta=[1 0 0 0 0 0;
    0 1 0 0 0 0;
    0 0 1 0 0 0;
    0 0 0 1 0 0;
    0 0 0 0 1 0;
    0 0 0 0 0 1];

//ISOTROPIZAÇÃO GERAL + TENSOR DE ESHELBY TANGENTE ENDURECIMENTO CINEMÁTICO
for i=1 : incrementos //Número de incrementos

    if i == 1

SIGMA_BARRA= [1 0 0 0 0 0]'; // Tensor de tensão Macroscópico
//
Am_MT=((1-VF)*I+VF*Ai)^-1; // Tensor de Concentração de Deformação na Matriz
//
Bm=Cm*Am_MT*Ccmt1^-1; // Tensor de Concentração de Tensão na Matriz
//
sigma_matriz_0=Bm*SIGMA_BARRA;  // TTensor Tensão na Matriz
//
Sigma_matriz_eq=sqrt(0.5*((sigma_matriz_0(1,1)-sigma_matriz_0(2,1))^2+...
(sigma_matriz_0(2,1)-sigma_matriz_0(3,1))^2+(sigma_matriz_0(3,1)-...
sigma_matriz_0(1,1))^2)+3*((sigma_matriz_0(4,1))^2+...
(sigma_matriz_0(5,1))^2+(sigma_matriz_0(6,1))^2));// Tensão Equivalente da matriz .
//
lambda0=(Sigmay/Sigma_matriz_eq); // FATOR DE ESCOAMENTO DA MATRIZ DO MATRIAL BIFÁSICO
//
//////////////////////////////////////////////////////////////////////
//////////////////////////////////////////////////////////////////////
sigmay0=lambda0*SIGMA_BARRA; // Tensor Tensão Global de Escoamento da Matriz do Compósito
//
epsilon_barra1=Ccmt1^-1*sigmay0 // Deformação Global de Escoamento do Compósito
//
EPSILON_MATRIZ_ESCOA=((1-VF)*I+VF*A)^-1*epsilon_barra1; // Deformação Média na Matriz

EPSILON_INCLUSAO=A*(VF*A+(1-VF)*I)^-1*epsilon_barra1; // Deformação Média na Inclusão
//
TENSAO_MATRIZ_ESCOA=Cm*EPSILON_MATRIZ_ESCOA; // Tensão Média na Matriz

TENSAO_INCLUSAO_ESCOA=Ci*EPSILON_INCLUSAO; // Tensão Média na Inclusão
//
```

```
EPSILON_ELASTICO=(Cm)^-1*TENSAO_MATRIZ_ESCOA; // Deformação Elástica da Matriz do Compósito
//
EPSILON_PLASTICO=EPSILON_MATRIZ_ESCOA-EPSILON_ELASTICO;
//
delta_p1=sqrt((2/3)*EPSILON_PLASTICO'*EPSILON_PLASTICO);
//
p1=delta_p1;//
panterior = p1;
//
alpha1=(c*EPSILON_PLASTICO); //Back Strss (Tensão de Retorno)
//
s_Devia_Escoa=(K*TENSAO_MATRIZ_ESCOA)-alpha1;
//
Sigma_m_eq_ESCOA=sqrt(0.5*(((TENSAO_MATRIZ_ESCOA(1,1)-alpha1(1,1))-...
(TENSAO_MATRIZ_ESCOA(2,1)-alpha1(2,1)))^2+((TENSAO_MATRIZ_ESCOA(2,1)-alpha1(2,1))-...
(TENSAO_MATRIZ_ESCOA(3,1)-alpha1(3,1)))^2+((TENSAO_MATRIZ_ESCOA(3,1)-alpha1(3,1))-...
(TENSAO_MATRIZ_ESCOA(1,1)-alpha1(1,1)))^2)+3*((TENSAO_MATRIZ_ESCOA(4,1)-alpha1(4,1))^2+...
(TENSAO_MATRIZ_ESCOA(5,1)-alpha1(5,1))^2+(TENSAO_MATRIZ_ESCOA(6,1)-alpha1(6,1))^2));// Tensão Equivalente GERAL.

//
Cmtan_Aniso_1=Cm;
//
Cmtan_Aniso_anterior = Cmtan_Aniso_1;
//
Cmtan_Iso_anterior = Cm;
//
S_Tang1=S;
//
A_tang1=(I+(S_Tang1*Cmtan_Aniso_1^-1)*(Ci-Cmtan_Aniso_1))^-1;// Tensor de concentração de deformação tangente (ANISOTRÓPICO)
//
A_tang_anterior = A_tang1; // Para guardar o valor calculado acima
//
LL1=Cmtan_Aniso_1+VF*(Ci-Cmtan_Aniso_1)*A_tang1*((1-VF)*I+VF*A_tang1)^-1; // Tensor de rigidez efetivo (ANISOTRÓPICO)
LL_anterior = LL1; // Para guardar o valor calculado acima
//
//////////////////////////////////////////////////////////////////////
//Informações a serem usadas para construção o gráfico Tensão x Deformação do Compósito
tensao (i)= sigmay0 (1,1);
deformacao (i) = epsilon_barra1(1,1);
tensao_anterior = sigmay0 (1,1);
deformacao_anterior = epsilon_barra1(1,1);

//////////////////////////////////////////////////////////////////////
// ISOTROPIZAÇÃO GERAL + ESHELBY TANGENTE
else  // INÍCIO DO PROCESSO INCREMENTAL

DELTA_SIGMA= [0.00001 0 0 0 0 0]'; // Incremento de vetor de tensão macroscópico

delta_epsilon_barra2=LL_anterior^-1*DELTA_SIGMA; // Incremento de Deformação Global do Compósito

delta_epsilon_matriz2=((1-VF)*I+VF*A_tang_anterior)^-1*delta_epsilon_barra2;//Incremento de Deformação na matriz

delta_epsilon_fibra2=A_tang_anterior*(VF*A_tang_anterior+(1-VF)*I)^-1*delta_epsilon_barra2; // Incremento de Deformação na fibra

delta_tensao_matriz2=Cmtan_Aniso_anterior*delta_epsilon_matriz2; //Increm de Tensão na Matriz (ANISOTRÓPICO)

delta_tensao_inclusao2=Ci*delta_epsilon_fibra2; // Incremento de Tensão na Inclusão

Tensao_Matriz_2=TENSAO_MATRIZ_ESCOA+delta_tensao_matriz2; //Tens Tot. méd da matriz no final do passo atual
```

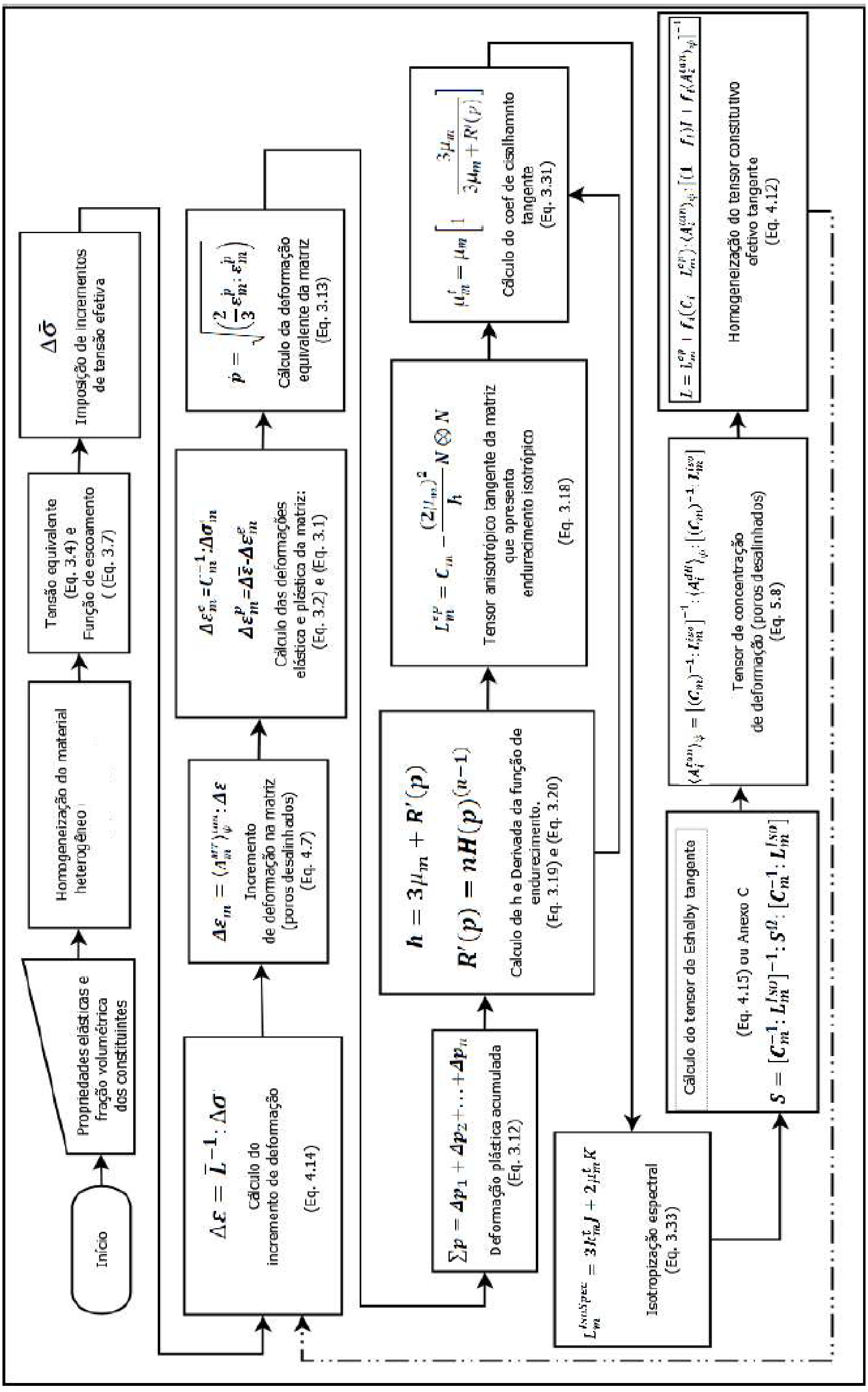
```
Tensao_Inclusao_2=TENSAO_INCLUSAO_ESCOA+delta_tensao_inclusao2; // Tens. Tot. méd. na Inc. no final passo atual

delta_epsilon_elast_2=Cm^-1*delta_tensao_matriz2 // Incremento de deformação elástica

delta_epsilon_plastic_2=delta_epsilon_matriz2-delta_epsilon_elast_2; // Incremento de deformação plástica

delta_p2=sqrt((2/3)*delta_epsilon_plastic_2'*delta_epsilon_plastic_2); // Incremento de deformação plástica acumulada

p2=panterior+delta_p2; // Deformação plástica total

panterior = p2; // Para guardar o valor calculado acima

alpha2=(c*delta_epsilon_plastic_2); //Back Strss (Tensão de Retorno)

sm2=(K*Tensao_Matriz_2)-(alpha2); // Desviadora Total na Matriz

Sigma_m_eq2=sqrt(0.5*(((Tensao_Matriz_2(1,1)-alpha2(1,1))-...
(Tensao_Matriz_2(2,1)-alpha2(2,1)))^2+((Tensao_Matriz_2(2,1)-alpha2(2,1))-...
(Tensao_Matriz_2(3,1)-alpha2(3,1)))^2+((Tensao_Matriz_2(3,1)-alpha2(3,1))-...
(Tensao_Matriz_2(1,1)-alpha2(1,1)))^2)+3*((Tensao_Matriz_2(4,1)-alpha2(4,1))^2+...
(Tensao_Matriz_2(5,1)-alpha2(5,1))^2+(Tensao_Matriz_2(6,1)-alpha2(6,1))^2));// Tensão Equivalente GERAL.

N2=(3/2)*((sm2)/(Sigma_m_eq2)) // Vetor Normal a Superfície de Escoamento no passo atual.

Hp2=(3/2)*c;// Módulo Plástico (Chen & Zhang Eq. 5.96) (ver eq.5.187 e 5.193)

h2=(3*Gm+(Hp2)) // Funão escalar (Chen & Zhang Eq. 5.188)

Cmtan_Aniso_2=Cm-((4*Gm^2)/h2)*N2*N2';

Cmtan_Aniso_anterior = Cmtan_Aniso_2;

// ISOTROPIZAÇÃO GERAL + ESHELBY TANGENTE

Kmt2=sum(J.*Cmtan_Aniso_2)/3 // MÓDULO BULK TANGENTE
Gmt2=sum(K.*Cmtan_Aniso_2)/10 // MÓDULO DE CISALHAMENTO TANGENTE
v_2=(3*Kmt2-2*Gmt2)/(6*Kmt2+2*Gmt2); //COEFICIENTE DE POISSON TANGENTE
Emt2=(9*Kmt2*Gmt2)/(3*Kmt2+Gmt2);    //MÓDULO DE YOUNG TANGENTE

// Tensor de Rigidez tangente da matriz
            Ctan2=[1-v_2 v_2 v_2 0 0 0;
                   v_2 1-v_2 v_2 0 0 0;
                   v_2 v_2 1-v_2 0 0 0;
                   0 0 0 (1-(2*v_2))/2 0 0;
                   0 0 0 0 (1-(2*v_2))/2 0;
                   0 0 0 0 0 (1-(2*v_2))/2];

// Tensor de Rigidez tangente da matriz
Cmtan_Iso_2=(Emt2/((1+v_2)*(1-2*v_2)))*Ctan2;

Cmtan_Iso_anterior = Cmtan_Iso_2;  // Para guardar o valor calculado acima

// COMPONENTES DO TENSOR DE ESHELBY TANGENTE
            S1111_Tan2 = (7-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S2222_Tan2 = (7-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S3333_Tan2 = (7-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S1122_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S2233_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S3311_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S1133_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S2211_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S3322_Tan2 = (5*v_2-1)/(15*(1-v_2));
            S2332_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
```

```
            S2323_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S3131_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S3113_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S1212_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S1221_Tan2=(4-(5*v_2))/(15*(1-v_2));
            S1313_Tan2=S1212_Tan2;

              //TENSOR DE ESHELBY TANGENTE
              S_Tang2=[S1111_Tan2 S1122_Tan2 S1133_Tan2 0 0 0;
                 S2211_Tan2 S2222_Tan2 S2233_Tan2 0 0 0;
                 S3311_Tan2 S3322_Tan2 S3333_Tan2 0 0 0;
                 0 0 0 (S1212_Tan2+S1212_Tan2) 0 0;
                 0 0 0 0 (S2323_Tan2+S2323_Tan2) 0;
                 0 0 0 0 0 (S1313_Tan2+S1313_Tan2)];


A_tang2=(I+(S_Tang2*Cmtan_Aniso_2^-1)*(Ci-Cmtan_Aniso_2))^-1; // Tensor de concentração de deformação tangente (ANISOTRÓPICO)

A_tang_anterior = A_tang2; // Para guardar o valor calculado acima

LL2=Cmtan_Aniso_2+VF*(Ci-Cmtan_Aniso_2)*A_tang2*((1-VF)*I+VF*A_tang2)^-1; // Tensor de rigidez efetivo tangente (ANISOTRÓPICO)
LL_anterior = LL2; // Para guardar o valor calculado acima

//Informações a serem usadas para construção o gráfico Tensão x Deformação do Compósito
            tensao (i)=  DELTA_SIGMA(1,1) + tensao_anterior;
            deformacao (i) = delta_epsilon_barra2(1,1) + deformacao_anterior;
            tensao_anterior = tensao(i);
            deformacao_anterior = deformacao (i);

            end

end

tensao_plot = [0 (tensao)'];
deformacao_plot = [0 deformacao'];

// GRÁFICO

scf(4)
plot(deformacao_plot, tensao_plot,'b-','Linewidth',3)
title('COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO DE UM COMPÓSITO COM INCLUSÕES ESFÉRICAS')
xlabel('DEFORMAÇÃO')
ylabel('TENSÃO [GPa]')

/////////////////////////////////////////////////////////////////////
/////////////////////////////////////////////////////////////////////
/////////////////////////////////////////////////////////////////////
```

APÊNDICE J – ALGORITMO: POROS DESALINHADOS E ENDURECIMENTO ISOTRÓPICO

A seguir, o código na linguagem Scilab de uma matriz metálica porosa que se encontra sob a condição de carregamento macroscópico de tração na direção [1,1]. A matriz do material heterogêneo apresenta endurecimento isotrópico e método de isotropização espectral.

Figura 74 – Algorítimo computacional usando o tensor de concentração de deformação para o meio elastoplástico que apresenta endurecimento isotrópico e poros desalinhados



Fonte: Adaptado de Araújo (2022)

```
// Mori-Tanaka
// Inclusões Oblate ou Prolate
// Endurecimento Isotrópico
// Condição de contorno direção [1,1]
// Tensor de Eshelby para o meio elastoplástico
// Material Poroso

clear
clc
xdel(winsid()) // close all

// DADOS DE ENTRADA:

// Constantes da Matriz
Em=input ('Modulo de Elasticidade da Matriz em GPa, Em= ');
vm= input ('Coeficiente de Poisson da Matriz, vm= ');
VF=input ('Fração Volumétrica das inclusões, VF [0-1]]=');
Vf = linspace(0, VF,10) // O valor valor pode ser aumentado.
Sigmay=input ('Tensão de Escoamento da Matriz, Sy=___[GPa] ');
n=input ('Expoente de endurecimento da matriz, []0-0.4] n= ');
H1=input ('Módulo de endurecimento da matriz, H=___[GPa] ');
//
vi=input ('Coeficiente de Poisson da Inclusão, vi= ');
r=input ('Entre com Razão de Aspecto, r= ');
//
incrementos=input ('Número de incrementos de tensão = ');
//
// Constantes da Inclusão (Young zero)
Ei=0; // Modulo de Elasticidade do Poro;
//
VM=1-VF; //Fração volumétrica da matriz
//
// Contraste entre Matriz e Inclusão
C_el=Ei/Em;

Gm=Em/(2*(1+vm));
Km=Em/(3*(1-2*vm));

Gi=Ei/(2*(1+vi));
Ki=Ei/(3*(1-2*vi));

////////////////////////////////////////////////////////////////////////

// CALCULO DA TENSOR DE RIGIDEZ DA MATRIZ

C=[ 1-vm vm vm 0 0 0;
    vm 1-vm vm 0 0 0;
    vm vm 1-vm 0 0 0;
    0 0 0 (1-(2*vm))/2 0 0;
    0 0 0 0 (1-(2*vm))/2 0;
    0 0 0 0 0 (1-(2*vm))/2];

Cm=(Em/((1+vm)*(1-2*vm)))*C;

////////////////////////////////////////////////////////////////////////

// CALCULO DA TENSOR DE RIGIDEZ DA INCLUSÃO

C_=[ 1-vi vi vi 0 0 0;
     vi 1-vi vi 0 0 0;
     vi vi 1-vi 0 0 0;
     0 0 0 (1-(2*vi))/2 0 0;
     0 0 0 0 (1-(2*vi))/2 0;
     0 0 0 0 0 (1-(2*vi))/2];
//
Ci=(Ei/((1+vi)*(1-2*vi)))*C_;
//
```

```
// ABAIXO, ASCOMPONENTES DO TENSOR DE ESHELBY  (PROLATE)

if r>1 //Prolate
    g=(r/(r^2-1)^1.5)*(r*sqrt(r^2-1)-acosh(r));

else r<1 //Oblate
    g = (r/((1-r^2)^1.5))*((acos(r))-r*(sqrt(1-r^2)));

end

// Fibras Curtas (OBLATE OU PROLATE)

a2 = (r^2);
b = 1/(1-vm);
c = 1-2*vm;
e = 1/(a2-1);

S_1111 = 0.5*b*(c + e*(3*a2-1)-(c+3*e*a2)*g); //OK
S_2222 = (3/8)*b*e*a2+0.25*b*(c-(9/4)*e)*g;
S_3333 = S_2222; //OK
S_2233 = 0.25*b*(0.5*e*a2-(c+0.75*e)*g);
S_3322 = S_2233; //OK
S_2211 = -0.5*b*e*a2 + 0.25*b*(3*e*a2-c)*g;
S_3311 = S_2211; //OK
S_1122 = -0.5*b*(c+e)+0.5*b*(c+1.5*e)*g;
S_1133 = S_1122;
S_2323 = 0.25*b*(0.5*e*a2 + (c-0.75*e)*g);
S_3232 = S_2323;
S_1212 = 0.25*b*(c-(a2+1)*e-0.5*(c-3*e*(a2+1))*g);
S_1313 = S_1212; //OK
S_3131 = S_1313;
//S_2323=(S_2222-S_1122)/2;
//
// TENSOR DE ESHELBY
 S=[S_1111 S_1122 S_1133 0 0 0;
     S_2211 S_2222 S_2233 0 0 0;
     S_3311 S_3322 S_3333 0 0 0;
     0 0 0 (2*S_2323) 0 0;
     0 0 0 0 (2*S_1313) 0;
     0 0 0 0 0 (2*S_1212)];
//
// MATRIZ IDENTIDADE
I=[ 1 0 0 0 0 0;0 1 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 1 0 0;0 0 0 0 1 0;0 0 0 0 0 1];
//
// TENSOR CONCENTRACAO DE DEFORMACAO DA INCLUSAO
//
Aii=(I+(S*Cm^-1)*(Ci-Cm))^-1; //Tensor de concetração de deformação para fibra alinhada
//
// PROCEDIMENTO DE DESALINHAMENTO
//

alpha=((1/5)*Aii(1,1))+((1/5)*Aii(2,2))+((1/5)*Aii(3,3))+((2/15)*Aii(6,6))+((2/15)*Aii(4,4))+((2/15)*Aii(6,6))+((1
//

betha=((1/15)*Aii(1,1))+((1/15)*Aii(2,2))+((1/15)*Aii(3,3))-((1/15)*Aii(6,6))-((1/15)*Aii(4,4))-((1/15)*Aii(6,6))+
//
// TENSOR CONCENTRACAO DE DEFORMACAO DA INCLUSAO PARA FIBRAS DESALINHADAS
AiD=[alpha betha betha 0 0 0;
     betha alpha betha 0 0 0;
     betha betha alpha 0 0 0;
     0 0 0 alpha-betha 0 0;
     0 0 0 0 alpha-betha 0;
     0 0 0 0 0 alpha-betha];
//
// CÁLCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO COMPÓSITO: MODELO MORI-TANAKA
/////////////////////////////////////////////////////////////////////
tam = length(Vf)
```

```
Eeqmt = zeros(1,tam)
Geqmt = zeros(1,tam)
Keqmt = zeros(1,tam)
v_l = zeros(1,tam)
//

for i=1:tam
//Tensor Elástico de Rigidez Efetivo

Ccmt1=(((1-Vf(i))*Cm)+Vf(i)*Ci*AiD)*((1-Vf(i))*I+Vf(i)*AiD)^-1; //(Apenas para analise do outro metrdo de desalinhamento)
//
//Tensor Elástico de Flexibilidade Efetivo
Dcmt1=Ccmt1^-1;

// Módulo de Young Elástico
Eeqmt(i)=1/Dcmt1(1,1);

// Módulo de Cisalhamento Elástico
Geqmt(i)=(Ccmt1(1,1)-Ccmt1(1,2))/2;

// Módulo bulk Elástico
Keqmt(i)=(Ccmt1(1,1)+(2*Ccmt1(1,2)))/3;

// Coefic de Poisson Elástico
v_l(i)=(Eeqmt(i)-(2*Geqmt(i)))/(2*Geqmt(i));

end
////////////////////////////////////////////////////////////////////////

// GRÁFICOS DAS CONSTANTES ELÁSTICAS

scf(1)
plot(Vf,Geqmt,'r*-','LineWidth',3)
xtitle('Fração Volumética x Módulo de Cisalhamento para Inclusões Esféricas')
xlabel('Fração Volumétrica (Vf)')
ylabel('Módulo de Cisalhamento Efetivo [GPa]')
//xgrid

scf(2)
plot(Vf,Keqmt,'b*-','LineWidth',3)
xtitle('Fração Volumética x Múdulo de Bulk para Inclusões Esféricas')
xlabel('Fração Volumétrica (Vf)')
ylabel('Módulo de Bulk Efetivo [GPa]')
//xgrid

scf(3)
plot(Vf,Eeqmt,'go-','LineWidth',3)
xtitle('Fração Volumética x Módulo de Young para Inclusões Esféricas')
xlabel('Fração Volumétrica (Vf)')
ylabel('Módulo de Young Efetivo [GPa]')
//xgrid

//
// Tensor Volumétrico
J=[1/3 1/3 1/3 0 0 0;
    1/3 1/3 1/3 0 0 0;
    1/3 1/3 1/3 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0];
//
// tensor Desviador
     K=[2/3 -1/3 -1/3 0 0 0;
   -1/3 2/3 -1/3 0 0 0;
   -1/3 -1/3 2/3 0 0 0;
    0 0 0 1 0 0;
```

```
     0 0 0 0 1 0;
     0 0 0 0 0 1];

// Delta de Kronecker:
 delta=[1 0 0 0 0 0;
     0 1 0 0 0 0;
     0 0 1 0 0 0;
     0 0 0 1 0 0;
     0 0 0 0 1 0;
     0 0 0 0 0 1];
//
///////////////////////////////////////////////////////////////////////

// ISOTROPIZAÇÃO GERAL + ESHELBY TANGENTE
for i = 1:incrementos
    if i == 1
//
// A SEGUIR, TRÊS CAMINHOS PARA ENCONTRAR O ESCOAMENTO DO COMPÓSITO:

SIGMA_BARRA= [1 0 0 0 0 0]'; // vetor de tensão macroscópico
//
Am_MT=((1-VF)*I+VF*AiD)^-1; // Tensor de concentração de deformação na matriz
//
Ai_MT=Aii*(VF*AiD+(1-VF)*I)^-1;// Tensor de concentração de deformação na inclusão
//
Bm=Cm*Am_MT*Ccmt1^-1; // Tensor de concentração de tensão na matriz
//
Bi=Ci*Ai_MT*Ccmt1^-1; //Tensor de concentração de tensão na inclusão
//
sigma_matriz_0=Bm*SIGMA_BARRA;  // Tensor de tensão na matriz
//
Sigma_matriz_eq=sqrt(0.5*((sigma_matriz_0(1,1)-sigma_matriz_0(2,1))^2+...
(sigma_matriz_0(2,1)-sigma_matriz_0(3,1))^2+(sigma_matriz_0(3,1)-...
sigma_matriz_0(1,1))^2)+3*((sigma_matriz_0(4,1))^2+(sigma_matriz_0(5,1))^2+...
(sigma_matriz_0(6,1))^2));// Tensão Equivalente GERAL no passo atual.
//
lambda0=(Sigmay/Sigma_matriz_eq); // FATOR DE ESCOAMENTO NA MATRIZ DO COMPÓSITO
//
sigmay0=lambda0*SIGMA_BARRA; // Tensor Tensão Global de Escoamento da Matriz do Compósito
//
epsilon_barra1=Ccmt1^-1*sigmay0; // Deformação Global de Escoamento do Compósito
//
EPSILON_MATRIZ_ESCOA=((1-VF)*I+VF*AiD)^-1*epsilon_barra1; // Deformação Média na Matriz
//
EPSILON_INCLUSAO=AiD*(VF*AiD+(1-VF)*I)^-1*epsilon_barra1; // Deformação Média na Inclusão
//
TENSAO_MATRIZ_ESCOA=Cm*EPSILON_MATRIZ_ESCOA; // Tensão Média na Matriz
//
TENSAO_INCLUSAO_ESCOA=Ci*EPSILON_INCLUSAO; // Tensão Média na Inclusão
//
s_Devia_Escoa=K*TENSAO_MATRIZ_ESCOA; // Tensão Desviadora Média na Matriz
//
Sigma_m_eq_ESCOA=sqrt(0.5*((TENSAO_MATRIZ_ESCOA(1,1)-TENSAO_MATRIZ_ESCOA(2,1))^2+...
(TENSAO_MATRIZ_ESCOA(2,1)-TENSAO_MATRIZ_ESCOA(3,1))^2+(TENSAO_MATRIZ_ESCOA(3,1)-...
TENSAO_MATRIZ_ESCOA(1,1))^2)+3*((TENSAO_MATRIZ_ESCOA(4,1))^2+...
(TENSAO_MATRIZ_ESCOA(5,1))^2+(TENSAO_MATRIZ_ESCOA(6,1))^2));
//
N_ESCOA=(3/2)*((s_Devia_Escoa)/(Sigma_m_eq_ESCOA)); // Vetor normal a superf de escoamento
//
EPSILON_ELASTICO=(Cm)^-1*TENSAO_MATRIZ_ESCOA;
//
EPSILON_PLASTICO=EPSILON_MATRIZ_ESCOA-EPSILON_ELASTICO;
//
delta_p1=sqrt((2/3)*EPSILON_PLASTICO'*EPSILON_PLASTICO);
//
p1=delta_p1;// Na superfície de escoamento, não existe deformação plástica acumulada
panterior = p1;
```

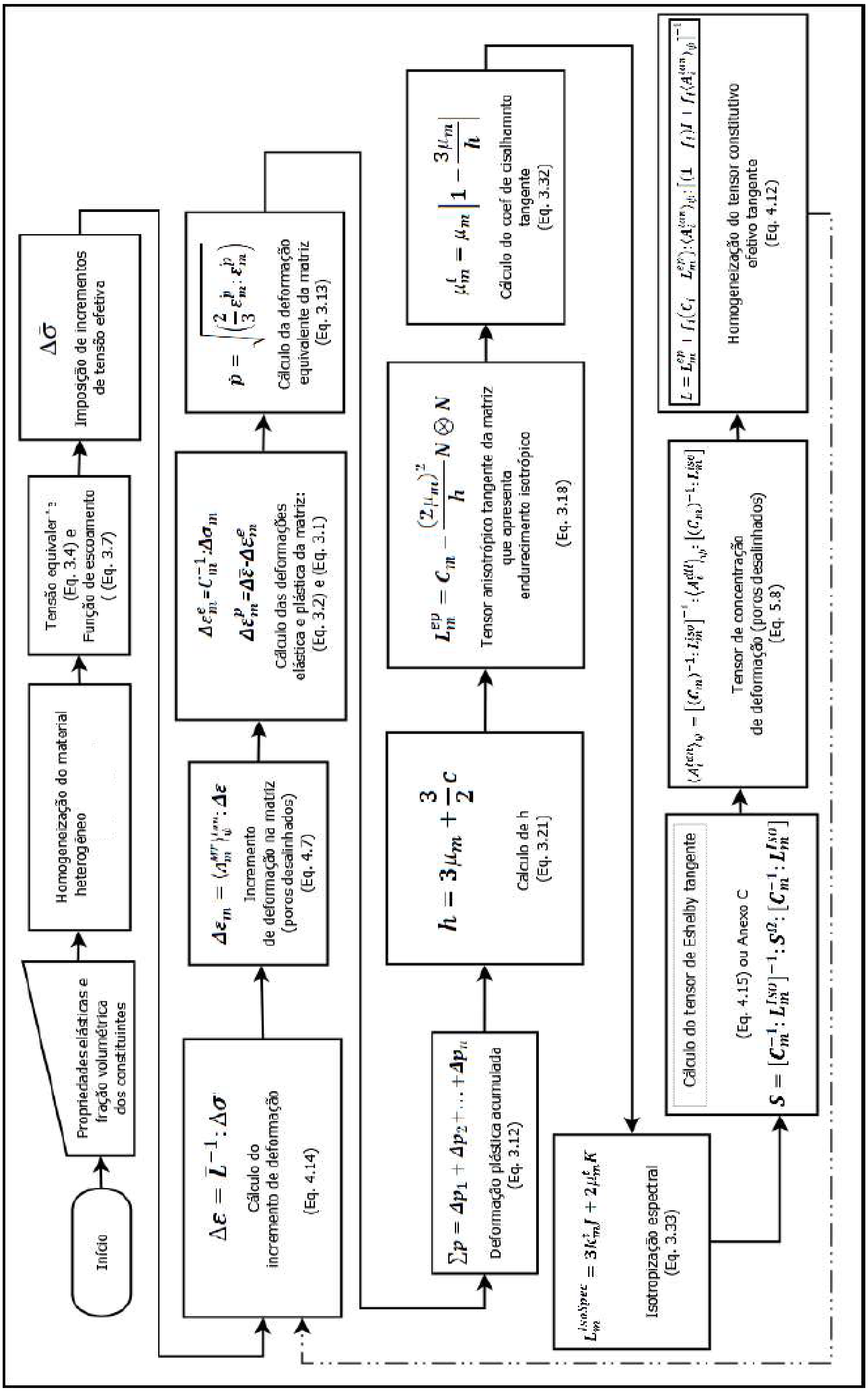
```
//
Rp_1=n*H1*(p1)^(n-1); // Derivada da Função de Endurecimento.
//
h1=3*Gm+Rp_1;
//
Cmtan_Aniso_1=Cm-((4*Gm^2)/(3*Gm+Rp_1))*N_ESCOA*N_ESCOA'; // Tensor Anisotrópico da matriz
//
Cmtan_Aniso_anterior = Cmtan_Aniso_1;
//
// Propriedade Tangentes da Matriz
Gmt1=Gm*(1-(3*Gm/(3*Gm+Rp_1)));  //MÓDULO DE CISALHAMENTO TANGENTE
Emt1=(9*Km*Gmt1)/(3*Km+Gmt1);    //MÓDULO DE YOUNG TANGENTE
v_1=(3*Km-2*Gmt1)/(6*Km+2*Gmt1); //COEFICIENTE DE POISSON TANGENTE
Kmt1=Km;
//
// Tensor Tangente de Rigidez da Matriz
//
Ctan1=[1-v_1 v_1 v_1 0 0 0;
       v_1 1-v_1 v_1 0 0 0;
       v_1 v_1 1-v_1 0 0 0;
       0 0 0 (1-(2*v_1))/2 0 0;
       0 0 0 0 (1-(2*v_1))/2 0;
       0 0 0 0 0 (1-(2*v_1))/2];
//
// Tensor de Rigidez tangente da matriz
Cmtan_Iso_1=(Emt1/((1+v_1)*(1-2*v_1)))*Ctan1; // Tensor de rigidez da matriz (Isotropizado)
//
Cmtan_Iso_anterior = Cmtan_Iso_1;
//
// TENSOR DE ESHELBY ELASTOPLÁSTICO
S_Tang1=(Cm^-1*Cmtan_Iso_1)^-1*S*(Cm^-1*Cmtan_Iso_1);
//
A_tang_1=(Cm^-1*Cmtan_Iso_1)^-1*AiD*(Cm^-1*Cmtan_Iso_1);  //Tensor de concentração (NOVA METODOLOGIA)
//
A_tang_anterior = A_tang_1;
//
// TENSOR DE RIGIDEZ DO COMPÓSITO
LL1=Cmtan_Aniso_1+VF*(Ci-Cmtan_Aniso_1)*AiD*((1-VF)*I+VF*AiD)^-1;
//
LL_anterior = LL1; // Para guardar o valor calculado acima
//
//Informações a serem usadas para construção o gráfico Tensão x Deformação do Compósito
//(ATENTAR PARA A CONDIÇÃO DE CONTORNO !!!)
//
tensao (i)= sigmay0 (1,1);
deformacao (i) = epsilon_barra1(1,1);
tensao_anterior = sigmay0 (1,1);
deformacao_anterior = epsilon_barra1(1,1);
//
// INÍCIO DO PROCESSO INCREMENTAL
else // INÍCIO DO PROCESSO INCREMENTAL

DELTA_SIGMA= [0.00001 0 0 0 0 0]'; // Incremento de vetor de tensão macroscópico
//
delta_epsilon_barra2=LL_anterior^-1*DELTA_SIGMA; // Incremento de Deformação Global do Compósito
//
delta_epsilon_matriz2=((1-VF)*I+VF*A_tang_anterior)^-1*delta_epsilon_barra2;//Incremento de Deformação na matriz
//
delta_epsilon_fibra2=A_tang_anterior*(VF*A_tang_anterior+(1-VF)*I)^-1*delta_epsilon_barra2; // Incremento de Deformação na fibra
//
delta_tensao_matriz2=Cmtan_Iso_anterior*delta_epsilon_matriz2; //Increm de Tensão na Matriz
//
delta_tensao_inclusao2=Ci*delta_epsilon_fibra2; // Incremento de Tensão na Inclusão
//
```

```
Tensao_Matriz_2=TENSAO_MATRIZ_ESCOA+delta_tensao_matriz2; //Tens Tot. méd da matriz no final do passo atual
//
Tensao_Inclusao_2=TENSAO_INCLUSAO_ESCOA+delta_tensao_inclusao2; // Tens. Tot. méd. na Inc. no final passo atual
//
sm2=K*Tensao_Matriz_2; // Incremento de Tensão Desviadora no final do passo atual da matriz.
//
Sigma_m_eq2=sqrt(0.5*((Tensao_Matriz_2(1,1)-Tensao_Matriz_2(2,1))^2+...
(Tensao_Matriz_2(2,1)-Tensao_Matriz_2(3,1))^2+(Tensao_Matriz_2(3,1)-...
Tensao_Matriz_2(1,1))^2)+3*((Tensao_Matriz_2(4,1))^2+(Tensao_Matriz_2(5,1))^2+...
(Tensao_Matriz_2(6,1))^2));// Tensão Equivalente GERAL no passo atual.
//
N2=(3/2)*((sm2)/(Sigma_m_eq2)); // Vetor Normal a Superfície de Escoamento no passo atual.
//
delta_epsilon_elast_2=Cm^-1*delta_tensao_matriz2 // Incremento de deformação elástica
//
delta_epsilon_plastic_2=delta_epsilon_matriz2-delta_epsilon_elast_2; // Incremento de deformação plástica
//
delta_p2=sqrt((2/3)*delta_epsilon_plastic_2'*delta_epsilon_plastic_2); // Incremento de deformação plástica acumulada
//
p2=panterior+delta_p2; // Deformação plástica total
//
panterior = p2; // Para guardar o valor calculado acima
//
Rp_2=n*H1*(p2)^(n-1); // Derivada da Função de Endurecimento.
//
Cmtan_Aniso_2=Cm-((4*Gm^2)/(3*Gm+Rp_2))*N2*N2';
//
Cmtan_Aniso_anterior = Cmtan_Aniso_2
//
//
// Propriedade Tangentes da Matriz
Gmt2=Gm*(1-(3*Gm/(3*Gm+Rp_2))); // Mód. Cisalham Tangente da Matriz
Emt2=(9*Km*Gmt2)/(3*Km+Gmt2); // Mód. Young Tangente da Matriz
v_2=(3*Km-2*Gmt2)/(6*Km+2*Gmt2); // Poisson Tangente da Matriz
Kmt2=(Gmt2*Emt2)/(9*Gmt2-3*Emt2); // Mód. bulk (Kmt=Km)
//
// Tensor Tangente de Rigidez da Matriz
Ctan2=[1-v_2 v_2 v_2 0 0 0;
       v_2 1-v_2 v_2 0 0 0;
       v_2 v_2 1-v_2 0 0 0;
       0 0 0 (1-(2*v_2))/2 0 0;
       0 0 0 0 (1-(2*v_2))/2 0;
       0 0 0 0 0 (1-(2*v_2))/2];
//
Cmtan_Iso_2=(Emt2/((1+v_2)*(1-2*v_2)))*Ctan2;
//
Cmtan_Iso_anterior = Cmtan_Iso_2;  // Para guardar o valor calculado acima
//
// TENSOR DE ESHELBY ELASTOPLÁSTICO
S_Tang2=(Cm^-1*Cmtan_Iso_2)^-1*S*(Cm^-1*Cmtan_Iso_2);
//
A_tang2=(Cm^-1*Cmtan_Iso_2)^-1*AiD*(Cm^-1*Cmtan_Iso_2); //Tensor de concentração de deformação (NOVA METODOLOGIA)
//
A_tang_anterior = A_tang2; // Para guardar o valor calculado acima
//
LL2=Cmtan_Iso_2+VF*(Ci-Cmtan_Iso_2)*A_tang2*((1-VF)*I+VF*A_tang2)^-1; // Tensor de rigidez efetivo tangente
//
LL_anterior = LL2; // Para guardar o valor calculado acima

/////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
//Informações a serem usadas para construção o gráfico Tensão x Deformação do Compósito
```

```
//(ATENTAR PARA A CONDIÇÃO DE CONTORNO !!!)

tensao (i)=  DELTA_SIGMA(1,1) + tensao_anterior;
deformacao (i) = delta_epsilon_barra2(1,1) + deformacao_anterior;
tensao_anterior = tensao(i);
deformacao_anterior = deformacao (i);
///////////////////////////////////////////////////////////////////////////////

end

end

tensao_plot = [0 (tensao)'];
deformacao_plot = [0 deformacao'];

// GRÁFICO

scf(5)
plot(deformacao_plot, tensao_plot,'b-','Linewidth',3)
title('COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO DE UM COMPÓSITO COM INCLUSÕES DESALINHADAS')
xlabel('DEFORMAÇÃO')
ylabel('TENSÃO [GPa]')
```

APÊNDICE K – ALGORITMO: POROS DESALINHADOS E ENDURECIMENTO CINEMÁTICO

Figura 75 – Algorítimo computacional usando o tensor de concentração de deformação para o meio elastoplástico que apresenta endurecimento cinemático e poros desalinhados



Fonte: Autoria própria (2023)

A seguir, o código na linguagem Scilab de uma matriz metálica porosa que se encontra sob a condição de carregamento macroscópico de tração. A matriz do material heterogêneo apresenta endurecimento cinemático e método de isotropização espectral.

```
// Mori-Tanaka
// Inclusões Oblate ou Prolate
// Endurecimento cinemático
// Condição de contorno direção [1,1]
// Tensor de Eshelby para o meio elastoplástico

clear
clc
xdel(winsid()) // close all

// DADOS DE ENTRADA:

// Constantes da Matriz
Em=input ('Modulo de Elasticidade da Matriz em GPa, Em= ');
vm= input ('Coeficiente de Poisson da Matriz, vm= ');
VF=input ('Fração Volumétrica das inclusões, VF [0-1]]=');
Vf = linspace(0, VF,10) // O valor valor pode ser aumentado.
Sigmay=input ('Tensão de Escoamento da Matriz, Sy=___[GPa] ');
c=input ('Módulo de endurecimento da matriz, c=___[GPa] ');
//
vi=input ('Coeficiente de Poisson da Inclusão, vi= ');
r=input ('Entre com Razão de Aspecto, r= ');
//
incrementos=input ('Número de incrementos de tensão = ');
//
// Constantes da Inclusão (Young zero)
Ei=0; // Modulo de Elasticidade do Poro;
//
VM=1-VF; //Fração volumétrica da matriz
//
// Contraste entre Matriz e Inclusão
C_el=Ei/Em;

Gm=Em/(2*(1+vm));
Km=Em/(3*(1-2*vm));

Gi=Ei/(2*(1+vi));
Ki=Ei/(3*(1-2*vi));

//////////////////////////////////////////////////////////////////////////

// CALCULO DA TENSOR DE RIGIDEZ DA MATRIZ

C=[ 1-vm vm vm 0 0 0;
    vm 1-vm vm 0 0 0;
    vm vm 1-vm 0 0 0;
    0 0 0 (1-(2*vm))/2 0 0;
    0 0 0 0 (1-(2*vm))/2 0;
    0 0 0 0 0 (1-(2*vm))/2];

Cm=(Em/((1+vm)*(1-2*vm)))*C;

//////////////////////////////////////////////////////////////////////////

// CALCULO DA TENSOR DE RIGIDEZ DA INCLUSÃO

C_=[ 1-vi vi vi 0 0 0;
     vi 1-vi vi 0 0 0;
     vi vi 1-vi 0 0 0;
     0 0 0 (1-(2*vi))/2 0 0;
     0 0 0 0 (1-(2*vi))/2 0;
     0 0 0 0 0 (1-(2*vi))/2];
//
Ci=(Ei/((1+vi)*(1-2*vi)))*C_;
//
// ABAIXO, ASCOMPONENTES DO TENSOR DE ESHELBY  (PROLATE)

```

```
if r>1 //Prolate
    g=(r/(r^2-1)^1.5)*(r*sqrt(r^2-1)-acosh(r));

else r<1 //Oblate
    g = (r/((1-r^2)^1.5))*((acos(r))-r*(sqrt(1-r^2)));

end

// Fibras Curtas (OBLATE OU PROLATE)

a2 = (r^2);
b = 1/(1-vm);
c = 1-2*vm;
e = 1/(a2-1);

S_1111 = 0.5*b*(c + e*(3*a2-1)-(c+3*e*a2)*g); //OK
S_2222 = (3/8)*b*e*a2+0.25*b*(c-(9/4)*e)*g;
S_3333 = S_2222; //OK
S_2233 = 0.25*b*(0.5*e*a2-(c+0.75*e)*g);
S_3322 = S_2233; //OK
S_2211 = -0.5*b*e*a2 + 0.25*b*(3*e*a2-c)*g;
S_3311 = S_2211; //OK
S_1122 = -0.5*b*(c+e)+0.5*b*(c+1.5*e)*g;
S_1133 = S_1122;
S_2323 = 0.25*b*(0.5*e*a2 + (c-0.75*e)*g);
S_3232 = S_2323;
S_1212 = 0.25*b*(c-(a2+1)*e-0.5*(c-3*e*(a2+1))*g);
S_1313 = S_1212; //OK
S_3131 = S_1313;
//S_2323=(S_2222-S_1122)/2;
//
// TENSOR DE ESHELBY
 S=[S_1111 S_1122 S_1133 0 0 0;
     S_2211 S_2222 S_2233 0 0 0;
     S_3311 S_3322 S_3333 0 0 0;
     0 0 0 (2*S_2323) 0 0;
     0 0 0 0 (2*S_1313) 0;
     0 0 0 0 0 (2*S_1212)];
//
// MATRIZ IDENTIDADE
I=[ 1 0 0 0 0 0;0 1 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0;0 0 0 1 0 0;0 0 0 0 1 0;0 0 0 0 0 1];
//
// TENSOR CONCENTRACAO DE DEFORMACAO DA INCLUSAO
//
Aii=(I+(S*Cm^-1)*(Ci-Cm))^-1; //Tensor de concetração de deformação para fibra alinhada
//
// PROCEDIMENTO DE DESALINHAMENTO
//

alpha=((1/5)*Aii(1,1))+((1/5)*Aii(2,2))+((1/5)*Aii(3,3))+((2/15)*Aii(6,6))+((2/15)*Aii(4,4))+((2/15)*Aii(6,6))+((1
//
//

betha=((1/15)*Aii(1,1))+((1/15)*Aii(2,2))+((1/15)*Aii(3,3))-((1/15)*Aii(6,6))-((1/15)*Aii(4,4))-((1/15)*Aii(6,6))+
//
// TENSOR CONCENTRACAO DE DEFORMACAO DA INCLUSAO PARA FIBRAS DESALINHADAS
AiD=[alpha betha betha 0 0 0;
     betha alpha betha 0 0 0;
     betha betha alpha 0 0 0;
     0 0 0 alpha-betha 0 0;
     0 0 0 0 alpha-betha 0;
     0 0 0 0 0 alpha-betha];
//
// CÁLCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO COMPÓSITO: MODELO MORI-TANAKA
/////////////////////////////////////////////////////////////////////
tam = length(Vf)
Eeqmt = zeros(1,tam)
```

```
Geqmt = zeros(1,tam)
Keqmt = zeros(1,tam)
v_l = zeros(1,tam)
//

for i=1:tam
//Tensor Elástico de Rigidez Efetivo

Ccmt1=(((1-Vf(i))*Cm)+Vf(i)*Ci*AiD)*((1-Vf(i))*I+Vf(i)*AiD)^-1; //(Apenas para analise do outro metrdo de desalinhamento)
//
//Tensor Elástico de Flexibilidade Efetivo
Dcmt1=Ccmt1^-1;

// Módulo de Young Elástico
Eeqmt(i)=1/Dcmt1(1,1);

// Módulo de Cisalhamento Elástico
Geqmt(i)=(Ccmt1(1,1)-Ccmt1(1,2))/2;

// Módulo bulk Elástico
Keqmt(i)=(Ccmt1(1,1)+(2*Ccmt1(1,2)))/3;

// Coefic de Poisson Elástico
v_l(i)=(Eeqmt(i)-(2*Geqmt(i)))/(2*Geqmt(i));

end
////////////////////////////////////////////////////////////////////////

// GRÁFICOS DAS CONSTANTES ELÁSTICAS

scf(1)
plot(Vf,Geqmt,'r*-','LineWidth',3)
xtitle('Fração Volumética x Módulo de Cisalhamento para Inclusões Esféricas')
xlabel('Fração Volumétrica (Vf)')
ylabel('Módulo de Cisalhamento Efetivo [GPa]')
//xgrid

scf(2)
plot(Vf,Keqmt,'b*-','LineWidth',3)
xtitle('Fração Volumética x Múdulo de Bulk para Inclusões Esféricas')
xlabel('Fração Volumétrica (Vf)')
ylabel('Módulo de Bulk Efetivo [GPa]')
//xgrid

scf(3)
plot(Vf,Eeqmt,'go-','LineWidth',3)
xtitle('Fração Volumética x Módulo de Young para Inclusões Esféricas')
xlabel('Fração Volumétrica (Vf)')
ylabel('Módulo de Young Efetivo [GPa]')
//xgrid

//
// Tensor Volumétrico
J=[1/3 1/3 1/3 0 0 0;
    1/3 1/3 1/3 0 0 0;
    1/3 1/3 1/3 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0];
//
// tensor Desviador
     K=[2/3 -1/3 -1/3 0 0 0;
   -1/3 2/3 -1/3 0 0 0;
   -1/3 -1/3 2/3 0 0 0;
    0 0 0 1 0 0;
    0 0 0 0 1 0;
```

```
    0 0 0 0 0 1];

// Delta de Kronecker:
 delta=[1 0 0 0 0 0;
    0 1 0 0 0 0;
    0 0 1 0 0 0;
    0 0 0 1 0 0;
    0 0 0 0 1 0;
    0 0 0 0 0 1];
//
///////////////////////////////////////////////////////////////////////

// ISOTROPIZAÇÃO GERAL + ESHELBY TANGENTE
for i = 1:incrementos
    if i == 1
//
// A SEGUIR, TRÊS CAMINHOS PARA ENCONTRAR O ESCOAMENTO DO COMPÓSITO:

SIGMA_BARRA= [1 0 0 0 0 0]'; // vetor de tensão macroscópico
//
Am_MT=((1-VF)*I+VF*AiD)^-1; // Tensor de concentração de deformação na matriz
//
Ai_MT=Aii*(VF*AiD+(1-VF)*I)^-1;// Tensor de concentração de deformação na inclusão
//
Bm=Cm*Am_MT*Ccmt1^-1; // Tensor de concentração de tensão na matriz
//
Bi=Ci*Ai_MT*Ccmt1^-1; //Tensor de concentração de tensão na inclusão
//
sigma_matriz_0=Bm*SIGMA_BARRA;  // Tensor de tensão na matriz
//
Sigma_matriz_eq=sqrt(0.5*((sigma_matriz_0(1,1)-sigma_matriz_0(2,1))^2+...
(sigma_matriz_0(2,1)-sigma_matriz_0(3,1))^2+(sigma_matriz_0(3,1)-...
sigma_matriz_0(1,1))^2)+3*((sigma_matriz_0(4,1))^2+(sigma_matriz_0(5,1))^2+...
(sigma_matriz_0(6,1))^2));// Tensão Equivalente GERAL no passo atual.
//
lambda0=(Sigmay/Sigma_matriz_eq); // FATOR DE ESCOAMENTO NA MATRIZ DO COMPÓSITO
//
sigmay0=lambda0*SIGMA_BARRA; // Tensor Tensão Global de Escoamento da Matriz do Compósito
//
epsilon_barra1=Ccmt1^-1*sigmay0; // Deformação Global de Escoamento do Compósito
//
EPSILON_MATRIZ_ESCOA=((1-VF)*I+VF*AiD)^-1*epsilon_barra1; // Deformação Média na Matriz
//
EPSILON_INCLUSAO=AiD*(VF*AiD+(1-VF)*I)^-1*epsilon_barra1; // Deformação Média na Inclusão
//
TENSAO_MATRIZ_ESCOA=Cm*EPSILON_MATRIZ_ESCOA; // Tensão Média na Matriz
//
TENSAO_INCLUSAO_ESCOA=Ci*EPSILON_INCLUSAO; // Tensão Média na Inclusão
//
s_Devia_Escoa=K*TENSAO_MATRIZ_ESCOA; // Tensão Desviadora Média na Matriz
//
EPSILON_ELASTICO=(Cm)^-1*TENSAO_MATRIZ_ESCOA;
//
EPSILON_PLASTICO=EPSILON_MATRIZ_ESCOA-EPSILON_ELASTICO;
//
delta_p1=sqrt((2/3)*EPSILON_PLASTICO'*EPSILON_PLASTICO);
//
p1=delta_p1;// Na superfície de escoamento, não existe deformação plástica acumulada
panterior = p1;
//
alpha1=(c*EPSILON_PLASTICO); //Back Strss (Tensão de Retorno)
//
s_Devia_Escoa=(K*TENSAO_MATRIZ_ESCOA)-alpha1;
//
Sigma_m_eq_ESCOA=sqrt(0.5*(((TENSAO_MATRIZ_ESCOA(1,1)-alpha1(1,1))-...
(TENSAO_MATRIZ_ESCOA(2,1)-alpha1(2,1)))^2+((TENSAO_MATRIZ_ESCOA(2,1)-alpha1(2,1))-...
(TENSAO_MATRIZ_ESCOA(3,1)-alpha1(3,1)))^2+((TENSAO_MATRIZ_ESCOA(3,1)-alpha1(3,1))-...
```

```
(TENSAO_MATRIZ_ESCOA(1,1)-alpha1(1,1)))^2)+3*((TENSAO_MATRIZ_ESCOA(4,1)-alpha1(4,1))^2+...
(TENSAO_MATRIZ_ESCOA(5,1)-alpha1(5,1))^2+(TENSAO_MATRIZ_ESCOA(6,1)-alpha1(6,1))^2));// Tensão Equivalente GERAL.
//
N_ESCOA=(3/2)*((s_Devia_Escoa)/(Sigma_m_eq_ESCOA)); // Vetor normal a superf de escoamento
//
Hp1=(3/2)*c;// Módulo Plástico (Chen & Zhang Eq. 5.96) (ver eq.5.187 e 5.193)
//
h1=(3*Gm+(Hp1)) // Funão escalar (Chen & Zhang Eq. 5.188)
//
Cmtan_Aniso_1=Cm-((4*Gm^2)/h1)*N_ESCOA*N_ESCOA';
//
Cmtan_Aniso_anterior = Cmtan_Aniso_1;
//
//ISOTROPIZAÇÃO ESPECTRAL + ESHELBY TANGENTE
//
// Propriedade Tangentes da Matriz
Gmt1=Gm*(1-(3*Gm/(3*Gm+Hp1)));
Emt1=(9*Km*Gmt1)/(3*Km+Gmt1);
v_1=(3*Km-2*Gmt1)/(6*Km+2*Gmt1);
Kmt1=Km;
//
// Tensor Tangente de Rigidez da Matriz
//
Ctan1=[1-v_1 v_1 v_1 0 0 0;
       v_1 1-v_1 v_1 0 0 0;
       v_1 v_1 1-v_1 0 0 0;
       0 0 0 (1-(2*v_1))/2 0 0;
       0 0 0 0 (1-(2*v_1))/2 0;
       0 0 0 0 0 (1-(2*v_1))/2];
//
// Tensor de Rigidez tangente da matriz
Cmtan_Iso_1=(Emt1/((1+v_1)*(1-2*v_1)))*Ctan1; // Tensor de rigidez da matriz (Isotropizado)

Cmtan_Iso_anterior = Cmtan_Iso_1;
//
// TENSOR DE ESHELBY ELASTOPLÁSTICO
S_Tang1=(Cm^-1*Cmtan_Iso_1)^-1*S*(Cm^-1*Cmtan_Iso_1);
//
A_tang_1=(Cm^-1*Cmtan_Iso_1)^-1*AiD*(Cm^-1*Cmtan_Iso_1);  //Tensor de concentração (NOVA METODOLOGIA)
//
A_tang_anterior = A_tang_1;
//
// TENSOR DE RIGIDEZ DO COMPÓSITO
LL1=Cmtan_Aniso_1+VF*(Ci-Cmtan_Aniso_1)*AiD*((1-VF)*I+VF*AiD)^-1;
//
LL_anterior = LL1; // Para guardar o valor calculado acima
//
//Informações a serem usadas para construção o gráfico Tensão x Deformação do Compósito
//(ATENTAR PARA A CONDIÇÃO DE CONTORNO !!!)
//
tensao (i)= sigmay0 (1,1);
deformacao (i) = epsilon_barra1(1,1);
tensao_anterior = sigmay0 (1,1);
deformacao_anterior = epsilon_barra1(1,1);
//
// INÍCIO DO PROCESSO INCREMENTAL
else // INÍCIO DO PROCESSO INCREMENTAL

DELTA_SIGMA= [0.00001 0 0 0 0 0]'; // Incremento de vetor de tensão macroscópico
//
delta_epsilon_barra2=LL_anterior^-1*DELTA_SIGMA; // Incremento de Deformação Global do Compósito
//
delta_epsilon_matriz2=((1-VF)*I+VF*A_tang_anterior)^-1*delta_epsilon_barra2;//Incremento de Deformação na matriz
//
```

```
delta_epsilon_fibra2=A_tang_anterior*(VF*A_tang_anterior+(1-VF)*I)^-1*delta_epsilon_barra2; // Incremento de Deformação na fibra
//
delta_tensao_matriz2=Cmtan_Iso_anterior*delta_epsilon_matriz2; //Increm de Tensão na Matriz
//
delta_tensao_inclusao2=Ci*delta_epsilon_fibra2; // Incremento de Tensão na Inclusão
//
Tensao_Matriz_2=TENSAO_MATRIZ_ESCOA+delta_tensao_matriz2; //Tens Tot. méd da matriz no final do passo atual
//
Tensao_Inclusao_2=TENSAO_INCLUSAO_ESCOA+delta_tensao_inclusao2; // Tens. Tot. méd. na Inc. no final passo atual
//
sm2=K*Tensao_Matriz_2; // Incremento de Tensão Desviadora no final do passo atual da matriz.
//
delta_epsilon_elast_2=Cm^-1*delta_tensao_matriz2 // Incremento de deformação elástica
//
delta_epsilon_plastic_2=delta_epsilon_matriz2-delta_epsilon_elast_2; // Incremento de deformação plástica
//
delta_p2=sqrt((2/3)*delta_epsilon_plastic_2'*delta_epsilon_plastic_2); // Incremento de deformação plástica acumulada
//
p2=panterior+delta_p2; // Deformação plástica total
//
panterior = p2; // Para guardar o valor calculado acima
//
alpha2=(c*delta_epsilon_plastic_2); //Back Strss (Tensão de Retorno)

sm2=(K*Tensao_Matriz_2)-(alpha2); // Desviadora Total na Matriz

Sigma_m_eq2=sqrt(0.5*(((Tensao_Matriz_2(1,1)-alpha2(1,1))-...
(Tensao_Matriz_2(2,1)-alpha2(2,1)))^2+((Tensao_Matriz_2(2,1)-alpha2(2,1))-...
(Tensao_Matriz_2(3,1)-alpha2(3,1)))^2+((Tensao_Matriz_2(3,1)-alpha2(3,1))-...
(Tensao_Matriz_2(1,1)-alpha2(1,1)))^2)+3*((Tensao_Matriz_2(4,1)-alpha2(4,1))^2+...
(Tensao_Matriz_2(5,1)-alpha2(5,1))^2+(Tensao_Matriz_2(6,1)-alpha2(6,1))^2));// Tensão Equivalente GERAL.

N2=(3/2)*((sm2)/(Sigma_m_eq2)) // Vetor Normal a Superfície de Escoamento no passo atual.

Hp2=(3/2)*c;// Módulo Plástico (Chen & Zhang Eq. 5.96) (ver eq.5.187 e 5.193)

h2=(3*Gm+(Hp2)) // Funão escalar (Chen & Zhang Eq. 5.188)

Cmtan_Aniso_2=Cm-((4*Gm^2)/h2)*N2*N2';
//
Cmtan_Aniso_anterior = Cmtan_Aniso_2
//
//Gmt2x=Gm*(1-(3*Gm/(h2)));//(Apenas para comprovação de resultado)
Gmt2=Gm*(1-(3*Gm/(3*Gm+(3/2)*c))); // Mód. Cisalham. na região plást. usando Hp da Eq. 5.187 de(Chen & Zhang)
Emt2=(9*Km*Gmt2)/(3*Km+Gmt2);       // Módulo de Young
v_2=(3*Km-2*Gmt2)/(6*Km+2*Gmt2);    // Coeficiente de Poisson
Kmt2=(Gmt2*Emt2)/(9*Gmt2-3*Emt2);   // Módulo bulk
//
// Tensor Tangente de Rigidez da Matriz
Ctan2=[1-v_2 v_2 v_2 0 0 0;
       v_2 1-v_2 v_2 0 0 0;
       v_2 v_2 1-v_2 0 0 0;
       0 0 0 (1-(2*v_2))/2 0 0;
       0 0 0 0 (1-(2*v_2))/2 0;
       0 0 0 0 0 (1-(2*v_2))/2];
//
Cmtan_Iso_2=(Emt2/((1+v_2)*(1-2*v_2)))*Ctan2;
//
Cmtan_Iso_anterior = Cmtan_Iso_2;  // Para guardar o valor calculado acima
//
```

```
// TENSOR DE ESHELBY ELASTOPLÁSTICO
S_Tang2=(Cm^-1*Cmtan_Iso_2)^-1*S*(Cm^-1*Cmtan_Iso_2);
//
A_tang2=(Cm^-1*Cmtan_Iso_2)^-1*AiD*(Cm^-1*Cmtan_Iso_2); //Tensor de concentração de deformação (NOVA METODOLOGIA)
//
A_tang_anterior = A_tang2; // Para guardar o valor calculado acima
//
LL2=Cmtan_Iso_2+VF*(Ci-Cmtan_Iso_2)*A_tang2*((1-VF)*I+VF*A_tang2)^-1; // Tensor de rigidez efetivo tangente
//
LL_anterior = LL2; // Para guardar o valor calculado acima

////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
//Informações a serem usadas para construção o gráfico Tensão x Deformação do Compósito
//(ATENTAR PARA A CONDIÇÃO DE CONTORNO !!!)

tensao (i)=  DELTA_SIGMA(1,1) + tensao_anterior;
deformacao (i) = delta_epsilon_barra2(1,1) + deformacao_anterior;
tensao_anterior = tensao(i);
deformacao_anterior = deformacao (i);
////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////

end

end

tensao_plot = [0 (tensao)'];
deformacao_plot = [0 deformacao'];

// GRÁFICO

scf(5)
plot(deformacao_plot, tensao_plot,'b-','Linewidth',3)
title('COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO DE UM COMPÓSITO COM INCLUSÕES DESALINHADAS')
xlabel('DEFORMAÇÃO')
ylabel('TENSÃO [GPa]')
```