



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Quebra Dinâmica de Simetria de Lorentz em um
Modelo de Quatro Férmions Derivativo**

RALINE SILVA DE ARAÚJO

MACEIÓ-AL, JULHO DE 2023

Dissertação de Mestrado

Quebra Dinâmica de Simetria de Lorentz em um Modelo de
Quatro Férmions Derivativo

RALINE SILVA DE ARAÚJO

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Programa de Pós-graduação em Física
do Instituto de Física da Universidade
Federal de Alagoas como parte dos
requisitos necessários para a obtenção
do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Tiago Homero Mariz do Nascimento

Maceió-AL, Julho de 2023

Instituto de Física - UFAL

Catálogo na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

A663q Araújo, Raline Silva de.

Quebra dinâmica de simetria de Lorentz em um modelo de quatro férmions derivativo / Raline Silva de Araújo. – 2023.
84 f. : il. color.

Orientador: Tiago Homero Mariz do Nascimento.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2023.

Bibliografia: f. 79-84.

1. Quebra espontânea de simetria de Lorentz. 2. Modelo de 4 férmions derivativo. 3. Potencial efetivo. 4. Temperatura zero e temperatura finita. 5. Restauração de simetria. 6. Ação cinética de segunda ordem. I. Título.

CDU: 537.8



Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física
Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14. Campus A.C. Simões
Cidade Universitária
Tabuleiro dos Martins
57072-970 Maceió - AL, Brasil
FONE : (82) 3214-1423

PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

“Quebra Dinâmica de Simetria de Lorentz em um Modelo de Quatro
Férmions Derivativo”

por

Raline Silva de Araújo

A Banca Examinadora composta pelos professores Tiago Homero Mariz do Nascimento (orientador e presidente da banca), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas; Alesandro Ferreira dos Santos, da Universidade Federal do Mato Grosso; e Job Saraiva Furtado Neto, da Universidade Federal do Cariri, consideram a **candidata aprovada com conceito “A”**.

Maceió, 27 de julho de 2023.

Documento assinado digitalmente

gov.br

TIAGO HOMERO MARIZ DO NASCIMENTO
Data: 31/07/2023 11:48:30-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Tiago Homero Mariz do Nascimento

Documento assinado digitalmente

gov.br

ALESANDRO FERREIRA DOS SANTOS
Data: 27/07/2023 14:23:22-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Alesandro Ferreira dos Santos

Documento assinado digitalmente

gov.br

JOB SARAIVA FURTADO NETO
Data: 29/07/2023 07:47:51-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto

DEDICATÓRIA

À minha família.

AGRADECIMENTOS

- Agradeço à Deus pela oportunidade de vivenciar este momento.
- Agradeço aos meus pais, Geraldo e Dora, por todo apoio e carinho durante esses dois anos. Aos meus sobrinhos pela motivação diária. À Max, meu companheiro de todas as horas, por estar ao meu lado desde o ensino médio e graduação, e por não me deixar desistir perante os momentos mais difíceis.
- Ao Prof. Dr. Tiago Mariz pela ótima orientação, ensinamentos e paciência, pelas conversas de fim de tarde e por toda dedicação na execução e conclusão deste trabalho.
- Aos amigos Karleyse Soares e Wellington Marinho, Grimário Júnior, Marconi Júnior, Reinaldo Freire e Ketly Santos por todas as conversas e brincadeiras nos momentos de descontração. Aos professores (amigos) Joseclécio Dantas e Fábio Medeiros, que desde a graduação me incentivaram e aconselharam. Aos amigos que fiz no instituto, com quem compartilhei muitos momentos.
- Ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Física da UFAL, em especial aos professores Iram Gléria, Paulo Brandão, Italo Oliveira e Vinícius Manzoni por compartilhar conhecimento e experiências durante as disciplinas.
- À CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Nesta dissertação investigamos a quebra espontânea de simetria de Lorentz em um modelo de 4 férmions derivativo. A essência do mecanismo de quebra espontânea de simetria de Lorentz consiste no acoplamento de campos tensoriais através de potenciais de forma que, nos mínimos dos potenciais, estes campos adquiram valores esperados de vácuo não triviais, introduzindo assim direções espaço-temporais privilegiadas. Para este modelo calculamos o potencial efetivo no contexto de temperatura zero e temperatura finita, também investigamos as condições para restauração de simetria. Em seguida, calculamos a correspondente ação efetiva e mostramos que o potencial resultante é definido positivamente e possui um conjunto contínuo de mínimos, assim como realizamos a indução da ação cinética de segunda ordem no campo auxiliar.

Palavras-chave: Quebra espontânea de simetria de Lorentz. Modelo de 4 férmions derivativo. Potencial efetivo. Temperatura zero e temperatura finita. Restauração de simetria. Ação cinética de segunda ordem.

ABSTRACT

In this dissertation we investigate spontaneous Lorentz symmetry breaking in a 4-fermion derivative model. The essence of the spontaneous Lorentz symmetry breaking mechanism consists in the coupling of tensor fields through potentials in such a way that, in the minima of the potentials, these fields acquire expected values of non-trivial vacuum, thus introducing privileged space-time directions. For this model we calculate the effective potential in the context of zero temperature and finite temperature, we also investigate the conditions for symmetry restoration. Next, we calculate the corresponding effective action and show that the resulting potential is positively defined and has a continuous set of minima, as well as performing the induction of the second order kinetic action in the auxiliary field.

Keywords: Spontaneous breaking of Lorentz symmetry. Derivative 4-fermion model. Effective potential. Zero temperature and finite temperature. Restoration of symmetry. Second order kinetic action.

Sumário

Capa	1
Folha de rosto	1
Dedicatória	4
Agradecimentos	5
Resumo	6
Abstract	7
1 Introdução	11
2 Eletrodinâmica Quântica Estendida	16
2.1 Violação da Simetria de Lorentz	16
2.1.1 Rotação Passiva	20
2.1.2 Rotação Ativa	22
2.1.3 Transformação de Lorentz de Observador e de Partícula	24
2.2 Violação da Simetria CPT	26
2.3 Modelo Padrão	32
2.4 Modelo Padrão Estendido	34
2.4.1 Eletrodinâmica Quântica Estendida	36

SUMÁRIO	9
3 Quebra Dinâmica de Simetria de Lorentz	40
3.1 Modelo de Quatro Férmions Derivativo	41
3.2 Potencial Efetivo	45
3.2.1 Equação de Gap a Temperatura Zero	47
3.2.2 Equação de Gap a Temperatura Finita	57
3.3 Ação Efetiva	68
4 Considerações Finais e Perspectivas	77
Referências Bibliográficas	79

Lista de Figuras

2.1	Sistema de referência O' se transladando com velocidade \vec{v} em relação ao sistema de referência O	18
2.2	Rotação do tipo passiva.	21
2.3	Rotação do tipo ativa.	23
2.4	Transformação de Lorentz de Observador.	25
2.5	Transformação de Lorentz de Partícula.	26
3.1	Mínimos não-triviais para o cálculo exato.	55
3.2	Mínimos não-triviais para o cálculo expandido.	57
3.3	Restauração de simetria.	66
3.4	Evolução do potencial sob condições de temperatura.	68

Capítulo 1

Introdução

A definição mais usual que encontramos para o conceito de simetria na física é “conjunto de transformações definidas num grupo que levam uma expressão ser invariante na sua forma” [1]. Desde os povos mais antigos, a simetria foi percebida como uma característica intrínseca da natureza. De fato, a natureza e tudo o que a compõe possui elementos simétricos, de forma isolada ou em combinações. Em Mecânica Quântica, as simetrias descrevem características do espaço-tempo e as partículas que permanecem inalteradas sob alguma transformação, no contexto da Mecânica Quântica Relativística e também na Teoria Quântica de Campos, bem como na formulação do Modelo Padrão. Em amplo sentido, a ideia de simetria pode ser entendida através de invariantes por grupos de transformações [2]. Na física, para a descrição de simetrias, os chamados grupos de Lie¹ são especialmente importantes pois estes são direcionados a casos de transformações contínuas, como por

¹Os grupos de Lie são grupos cujos elementos dependem de um conjunto de parâmetros que variam continuamente num intervalo finito, como por exemplo as matrizes de rotação [21].

exemplo: as rotações, as transformações de Galileu e de Lorentz, e as transformações associadas às simetrias de calibre.

Publicado em 1918 pela matemática alemã Emmy Noether, o teorema de Noether garante que a toda quantidade física conservativa está associada um grupo de simetria. Atualmente a simetria de Lorentz, um dos fundamentos da relatividade especial formulada por Einstein², tem sido alvo de muitas investigações. Esta, juntamente ao desenvolvimento da Mecânica Quântica, fornecem informações suficientes para a formulação de uma teoria que descreva o comportamento das partículas elementares de maneira coerente com os fenômenos envolvidos e com a física. A teoria mais bem aceita na descrição das partículas elementares e suas interações é o Modelo Padrão (MP), pois este está em concordância com a maioria dos dados experimentais obtidos.

Mesmo alcançando êxito na descrição das partículas elementares, o MP é considerado um limite de baixas energias de uma teoria mais fundamental. Tal teoria, como a Teoria de Cordas, no seu regime de energia apresenta naturalmente a violação tanto da simetria de Lorentz como de CPT [3, 4]. Da teoria de cordas com espaço-tempo não-comutativo surge a Teoria de Campos Não-comutativos [5], onde também aparece naturalmente a quebra da simetria de Lorentz [6, 7], como consequência direta da não-comutatividade entre as coordenadas espaço-temporais.

Em 1963, Bjorken sugeriu a quebra espontânea da simetria de Lorentz [8], no entanto, o estudo de modelos com violação da simetria de Lorentz começou em 1989 [9], e atualmente a teoria mais bem sucedida no estudo da violação da simetria de Lorentz é o Modelo Padrão Estendido (MPE), formulado por Kostelecky *et al.*

²Esta nos diz que as leis da física são invariantes sob transformações de Lorentz, i.e. que qualquer observador em um sistema de referência inercial deve observar mesma física.

apresentado inicialmente em [10, 11].

O MPE é uma teoria efetiva que contém todas as propriedades do MP, obedece a basicamente todas as simetrias do MP, como $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, porém, é composta também por termos que violam as simetrias de Lorentz e de CPT. Este pode ser a “chave” para questões não respondidas pelo MP, como é o caso da não unificação das quatro forças que compõem a natureza, incorporando assim a gravidade, a explicação para a assimetria bariônica, a energia escura, a oscilação de neutrinos e a matéria escura.

No estudo de modelos³ que complementem ou corrijam o MP, há três formas de implementar termos corretivos, ou apenas termos violadores das simetrias de Lorentz e CPT, sendo a anômala, a explícita e a espontânea. A forma anômala consiste no próprio espaço-tempo possuir uma topologia não trivial, este mecanismo pouco é utilizado [15]. A quebra explícita consiste em adicionar termos de maneira *ad hoc* na lagrangiana de modo que esta forneça a violação de simetria desejada, no entanto, a quebra explícita não é a mais adequada para implementar termos violadores de simetria dentro do MPE em espaços-tempos curvos pois leva à incompatibilidade das identidades de Bianchi com as leis de conservação covariantes para os tensores de energia-momento e densidade de spin [14]. Dentre os mecanismos citados o a quebra espontânea de simetria tem se destacado, este mecanismo foi utilizado por Higgs para descrever o processo de aquisição de massa dos bósons de calibre [13]. A essência deste mecanismo consiste no acoplamento de campos tensoriais através de potenciais de forma especial que, nos mínimos dos potenciais, estes campos adquiram valores esperados de vácuo não triviais, introduzindo assim dire-

³O termo modelo é usado naturalmente em todos os trabalhos desenvolvidos nesse sentido, no entanto, o termo mais apropriado seria “teoria”.

ções espaço-temporais privilegiadas. Sendo assim, promove violação da simetria de Lorentz no MPE em espaços-tempos curvos. Logo, tal mecanismo tem se mostrado o mais adequado na implementação da violação de simetria de Lorentz e também de CPT [4, 3].

Dessa forma, este trabalho se dispõe ao estudo da quebra espontânea de simetria induzida por correções radiativas a partir de uma teoria de férmions autointeragentes derivativa.

No capítulo seguinte, iremos introduzir uma breve fundamentação teórica acerca da simetria de Lorentz e de como pode ocorrer a violação desta. Partiremos de conceitos básicos vistos em um curso básico de relatividade ou de física moderna. Em seguida veremos também o que é a simetria CPT, como atuam cada um desses operadores, conjugação de carga, paridade e tempo, e como se dá a violação desta simetria por um quadrivetor do tipo b_μ , presente no MPE, e conseqüentemente a violação da simetria de Lorentz e CPT. Por fim, faremos uma explanação sobre o MP e o MPE, e, por conseqüência, as principais considerações da Eletrodinâmica Quântica Estendida.

Iniciamos o capítulo três com um breve resumo sobre os modelos de quatro férmions derivativo, citando alguns exemplos atuais encontrados na literatura, e em seguida calculamos o potencial efetivo de um laço (loop) em temperatura zero, a partir da regularização dimensional usual, e em seguida o calculamos novamente em regime de temperatura finita. Por último, calculamos a ação efetiva também em um loop. Finalmente, mostraremos que o potencial resultante é definido positivamente e possui um conjunto contínuo de mínimos.

Por fim, no quarto e último capítulo, apresentaremos nossas conclusões e

perspectivas acerca dos resultados apresentados ao longo do capítulo três deste trabalho.

Ao longo desta dissertação usamos o sistema de unidades naturais, em que $c = \hbar = k_B = e_0 = 1$. Neste sistema, temos que $[\text{comprimento}] = [\text{tempo}] = [\text{energia}]^{-1} = [\text{massa}]^{-1}$. A métrica utilizada possui os seguintes elementos diagonais $(+1, -1, -1, -1)$.

Capítulo 2

Eletrodinâmica Quântica Estendida

Neste capítulo, de forma resumida, apresentaremos a fundamentação teórica que é base para nossa pesquisa. Iniciaremos com uma revisão sobre a violação de simetria de Lorentz e de CPT, como são definidas estas transformações e como ocorrem tais violações de simetria. Em seguida revisaremos a teoria que descreve o Modelo Padrão da física de partículas, veremos que a violação simetria de Lorentz e de CPT surge nesta teoria, o que leva a um modelo que o amplia, o Modelo Padrão Estendido, que é apresentado logo em seguida. Por último, veremos a Eletrodinâmica Quântica Estendida, objeto de estudo do capítulo 3.

2.1 Violação da Simetria de Lorentz

A física do século XX foi marcada por descobertas que revolucionaram o modo como vemos os fenômenos físicos em diferentes escalas, seja em escala micros-

cópica ou macroscópica. Um dos principais responsáveis por tais descobertas é, sem dúvida, Albert Einstein, o símbolo de genialidade mais popular da ciência moderna. Em 1905, Einstein publicou a teoria da relatividade restrita (RR) [12], que é uma das teorias da física mais bem consolidada, tendo sido amplamente testada e com os resultados em completa concordância com a teoria. Esta tem como base dois princípios: (i) as leis da física são idênticas em qualquer referencial inercial; e (ii) a velocidade da luz no vácuo (c) é a mesma em qualquer sistema de referência inercial.

Em consequência à RR, Einstein viu que era necessário um conjunto de equações capazes de relacionar dois ou mais sistemas de coordenadas e de obedecer aos princípios estabelecidos na RR. Antes mesmo de Einstein chegar a esse conjunto de equações, muitos pesquisadores, entre eles o próprio Lorentz (cujo nome foi dado ao conjunto dessas equações), já havia chegado às chamadas transformações de Lorentz (TL). Einstein então, interpretou essas como uma extensão às transformações de Galileu, que agora obedecem aos princípios da RR.

A RR é relevante quando temos situações físicas em que a velocidade das partículas são uma razoável fração da velocidade da luz, $v \sim 1$. Neste limite surge uma nova simetria que deve ser respeitada: a invariância de Lorentz. Dizemos que um sistema é invariante de Lorentz se este é simétrico sob o grupo de Lorentz, que é a generalização do grupo de rotação para incluir rotações e empurrões (boosts) [16].

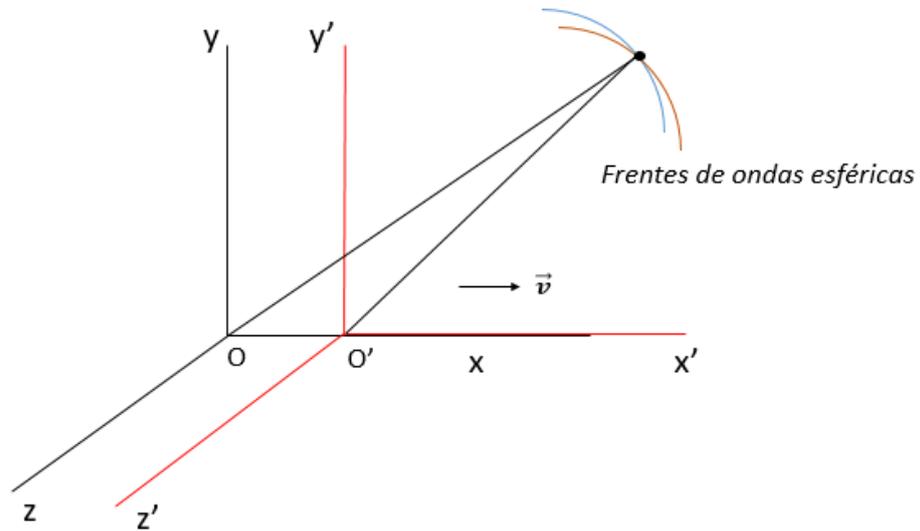


Figura 2.1: Sistema de referência O' se transladando com velocidade \vec{v} em relação ao sistema de referência O .

Fonte: Autor, 2023.

Vamos considerar a experiência imaginária descrita em [20]. Consideremos dois observadores O e O' , com O' se movendo relativamente a O com uma velocidade de módulo v no sentido positivo dos eixos x e x' . Os planos $x'y'$ e xy são sempre coincidentes, como é mostrado na Fig. (2.1), e as origens de seus sistemas de referência coincidem no instante $t = t' = 0$. Neste instante O' produz um sinal luminoso em sua origem, que produz uma frente de onda luminosa que se expande a partir do ponto de emissão com velocidade de módulo c em todas as direções. Portanto, segundo O' a frente de onda em um tempo t' será uma esfera centrada em sua origem, de raio $r' = ct'$. As coordenadas de qualquer ponto pertencente à

frente de onda neste instante vão então satisfazer à equação de uma esfera

$$c^2t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0. \quad (2.1)$$

Será igualmente verdadeiro que de acordo com O a luz se expande a partir de seu ponto de emissão, a origem, com velocidade de módulo c em todas as direções. Assim, do ponto de vista de O , a frente de onda em um tempo t também é uma esfera de raio $r = ct$ centrada em sua própria origem, satisfazendo à equação

$$c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad (2.2)$$

em que vale a igualdade

$$c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = c^2t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2. \quad (2.3)$$

As coordenadas y e z em relação aos eixos perpendiculares à direção do movimento não são afetadas pelo movimento, ou seja, $y = y'$ e $z = z'$. Então, como já é conhecido, as possíveis relações que satisfazem (2.3) são dadas por

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (2.4)$$

$$y' = y, \quad (2.5)$$

$$z' = z, \quad (2.6)$$

$$ct' = \gamma\left(ct - \frac{v}{c}x\right), \quad (2.7)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.8)$$

Estas transformações que envolvem mudanças de coordenadas espaciais e temporais são chamadas de boosts de Lorentz. Há um tipo de transformações de Lorentz que envolve apenas coordenadas espaciais e também satisfazem a expressão (2.3), são as rotações. Para nosso propósito, iremos utilizar apenas o exemplo de transformações de Lorentz para rotações.

Neste caso, temos as seguintes relações:

$$x' = x \cos \phi + y \sin \phi, \quad (2.9)$$

$$y' = -x \sin \phi + y \cos \phi, \quad (2.10)$$

$$z' = z, \quad (2.11)$$

$$t' = t. \quad (2.12)$$

Podemos realizar transformações de Lorentz (TL) por rotação de duas maneiras, por rotação passiva e por rotação ativa. Em uma TL passiva, o sistema de coordenadas sofre uma rotação ou boost, mantendo os pontos do espaço-tempo fixos. Já em uma TL ativa, os pontos do espaço-tempo é que são transformados, mantendo o sistema de coordenadas fixo. Nas subseções que seguem, iremos analisar como se dão cada uma dessas transformações. Para isso, vamos seguir a notação adotada no trabalho [17].

2.1.1 Rotação Passiva

Descrevamos um ponto P , no plano xy , em dois sistemas de referência. Como veremos na figura (2.2) adiante, as coordenadas do ponto P relacionam os sistemas de coordenadas (x, y) e (x', y') , que é rotacionado por um ângulo ϕ . Assim, escrevemos

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

onde

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

é a matriz de transformação por rotação passiva definida.

Tomando o infinitésimo de ϕ até sua primeira ordem, chegamos em

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \delta\phi \\ -\delta\phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

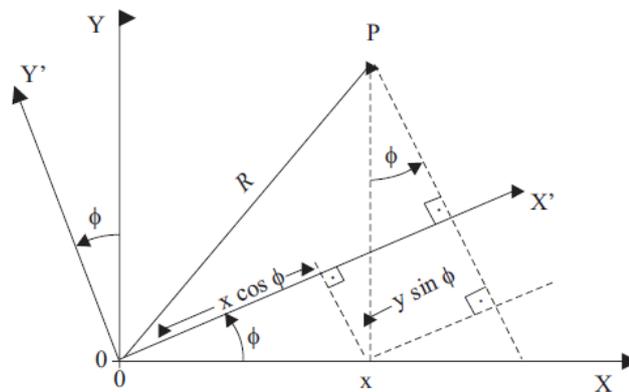


Figura 2.2: Rotação do tipo passiva.

Fonte: Belich et al., 2007.

De modo que, ao considerarmos $\delta x = x' - x$ e $\delta y = y - y'$, temos

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x' \\ y - y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \delta\phi \\ -\delta\phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \delta\phi \\ -\delta\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

2.1.2 Rotação Ativa

Vamos utilizar o mesmo sistema adotado para a rotação passiva, no entanto, no caso da rotação ativa, como já vimos, o ponto P em (x, y) é quem vai passar por uma rotação. Como observado na figura (2.3), o ponto P é transladado de ϕR até o ponto P' em (x', y') pela seguinte transformação:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

é a matriz de transformação por rotação ativa definida.

Tomando o infinitésimo de ϕ até sua primeira ordem, temos

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\delta\phi \\ \delta\phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

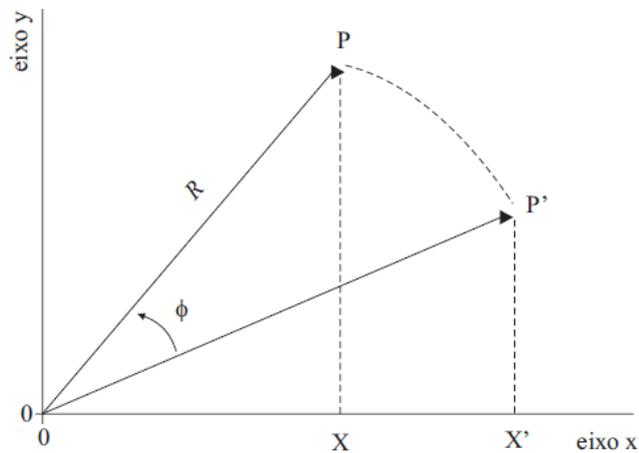


Figura 2.3: Rotação do tipo ativa.

Fonte: Belich et al., 2007.

tal que, assim, obtemos

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \delta\phi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Podemos então concluir que ao realizarmos uma rotação passiva de um ângulo ϕ ou uma rotação ativa por um ângulo $-\phi$, obteremos a mesma matriz de rotação. Ou seja, as duas transformações são equivalentes.

No entanto, quando assumimos que existe um campo de fundo¹ presente no sistema em questão, a descrição física do que se observa muda. É este ponto que iremos explorar daqui em diante, pois esse campo de fundo é o que nos leva a observar a violação de Lorentz (VL).

2.1.3 Transformação de Lorentz de Observador e de Partícula

Como citado na seção anterior, o cenário de invariância de Lorentz pode mudar quando consideramos a presença de um campo de fundo. Vamos tomar como exemplo um elétron em um ponto P na presença de um campo elétrico $E\hat{z}$ e vamos transportar nossa discussão para o interior dessa nova configuração (capacitor de placas paralelas com campo constante $E\hat{z}$). Vamos descrever inicialmente, por simplicidade, a rotação do elétron por um ângulo $\phi = \frac{\pi}{2}$ radianos por meio de uma transformação passiva e de uma transformação ativa.

Por meio de uma transformação passiva, ilustrada na figura (2.4), rotacionamos o sistema de coordenadas por um ângulo ϕ . Observe que, a presença do

¹Chamamos de campo de fundo um campo que desconhecemos sua origem ou fonte, e que seja constante e uniforme.

campo de fundo provoca os dois observadores, em O e O' , a concordarem que o vetor posição \vec{R} é perpendicular ao campo \vec{E} .

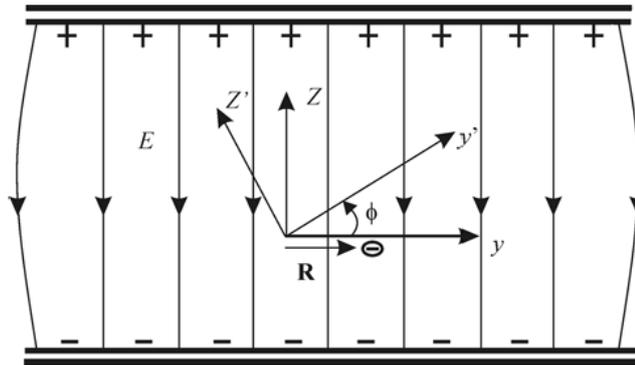


Figura 2.4: Transformação de Lorentz de Observador.

Fonte: Belich et al., 2007.

Por meio de uma transformação ativa, ilustrada na figura (2.5), rotacionamos o elétron por um ângulo $-\phi$. Observe que, agora, os observadores concordam que o vetor posição \vec{R} é paralelo ao campo \vec{E} , diferentemente do observado quando é feita uma transformação do tipo passiva. Logo, concluímos que, na presença de um campo de fundo, a descrição física de um fenômeno pode mudar, a depender do tipo de transformação que é realizada, assim provocando uma violação da invariância de Lorentz.

Na presença de um campo de fundo denominamos estas transformações de forma diferente. A transformação passiva na presença de um campo de fundo passa a ser chamada de TL de observador, e a transformação ativa na presença de um campo de fundo para a ser chamada de TL de partícula.

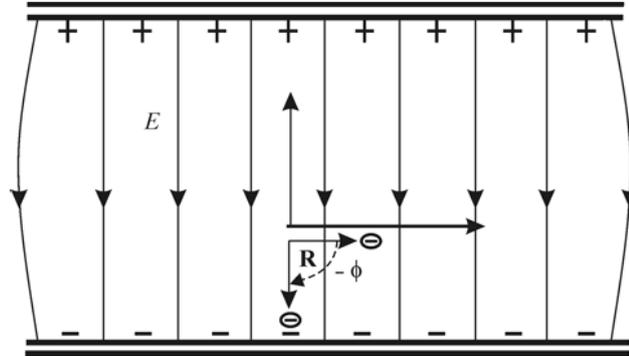


Figura 2.5: Transformação de Lorentz de Partícula.

Fonte: Belich et al., 2007.

A invariância da física por transformações ativas, portanto, representa a ideia de isotropia do universo e das leis da física. Como não queremos perder a ideia de invariância da física frente à escolha de um referencial, admitimos a invariância por transformações de observador. Restando, então, admitir a possibilidade de pequenas violações da invariância frente às transformações de partícula, ou seja, violações na isotropia das leis da física (anisotropia fundamental no Universo) [18].

Na seção a seguir, iremos revisar os fundamentos de outra simetria, que acredita-se ser fundamental na natureza, a simetria CPT.

2.2 Violação da Simetria CPT

A simetria CPT foi proposta inicialmente por Julian Schwinger em 1951 e modificada em 1954 por Gerhard Lüders e Wolfgang Pauli [19].

Individualmente, as simetrias C, P e T são chamadas de simetrias discretas ou impróprias.

A simetria por paridade ou apenas transformação de paridade é denotada pela letra \mathcal{P} e corresponde à inversão dos eixos espaciais. A transformação de paridade de um campo vetorial V^μ é

$$\mathcal{P}V^\mu(\vec{x}, t)\mathcal{P}^{-1} = \left(V^0(-\vec{x}, t), -\vec{V}(-\vec{x}, t) \right) \quad (2.23)$$

$$= V_\mu(-\vec{x}, t). \quad (2.24)$$

Notemos que, um vetor contravariante passa a ser covariante (e vice-versa). Note ainda que, a componente V_0 não muda de sinal por ser escalar, no entanto, os pseudoescalares mudam. De modo que podemos generalizar da seguinte maneira:

$$\mathcal{P}\phi(\vec{x}, t)\mathcal{P}^{-1} = \pm\phi(-\vec{x}, t), \quad (2.25)$$

em que o sinal (+) corresponde a um ϕ escalar e o (-) a um ϕ pseudoescalar.

A teoria eletromagnética, que é formulada em termos de vetores e tensores, é invariante por transformação de paridade. O mesmo se dá para uma teoria escalar, com ou sem autointeração, e para a teoria de Dirac. No caso da teoria de Dirac, temos

$$\mathcal{P}\psi(\vec{x}, t)\mathcal{P}^{-1} = \gamma^0\psi(-\vec{x}, t), \quad (2.26)$$

que é obtida diretamente através da lagrangiana de Dirac e da relação de covariância.

A conjugação de carga, denotada por \mathcal{C} , corresponde a troca de partículas por

antipartículas (e vice-versa). A invariância por esta transformação ocorre nas teorias de Maxwell², Dirac e Klein-Gordon³. Essa invariância continua nas interações dos campos escalares e espinoriais com o eletromagnético.

Vejam, como exemplo, o caso do campo eletromagnético A^μ . Partindo do termo de interação $j_\mu A^\mu$, temos

$$\mathcal{C}j_\mu\mathcal{C}^{-1} = -j_\mu, \quad (2.27)$$

$$\mathcal{C}A^\mu\mathcal{C}^{-1} = -A^\mu, \quad (2.28)$$

onde j_μ faz o papel da corrente elétrica.

A inversão temporal, representada por \mathcal{T} , consiste em ver como um sistema estava no instante $-t$. Não devemos entender que isso significa que o sistema evoluiu de t para $-t$ ⁴, mas sim que o sistema estava em $-t$ e evoluiu para t . Aqui o eixo temporal se inverte, no entanto, como a componente temporal do vetor é um escalar ela não muda de sinal, já a componente espacial pode mudar seu sinal, desde que contenha uma velocidade, por exemplo. Vejam mais uma vez o caso do quadrivetor corrente,

$$\mathcal{T}j^\mu(\vec{x}, t)\mathcal{T}^{-1} = (j^0(\vec{x}, -t), -\vec{j}(\vec{x}, -t)) \quad (2.29)$$

$$= j_\mu(\vec{x}, -t). \quad (2.30)$$

²Isso decorre do fato de que o fóton é idêntico ao antifóton.

³Como as soluções de partículas e antipartículas estão contidas na mesma equação, ocorre a invariância na troca de uma pela outra.

⁴Isso violaria a causalidade.

Conseqüentemente, para o campo,

$$\mathcal{T}A^\mu(\vec{x}, t)\mathcal{T}^{-1} = A_\mu(\vec{x}, -t), \quad (2.31)$$

sendo assim, o termo $j_\mu A^\mu$ fica invariante. Para mais detalhes dos cálculos de demonstração das relações de transformação de conjugação de carga, inversão temporal e inversão de carga indicamos [21, 22].

Para o caso de um spinor Dirac, essas transformações se dão da seguinte maneira:

$$\mathcal{C}\psi(\vec{x}, t)\mathcal{C}^{-1} \xrightarrow{\mathcal{C}} i\gamma^2\gamma^0\bar{\psi}(\vec{x}, t), \quad (2.32)$$

$$\mathcal{P}\psi(\vec{x}, t)\mathcal{P}^{-1} \xrightarrow{\mathcal{P}} \gamma^0\psi(-\vec{x}, t), \quad (2.33)$$

$$\mathcal{T}\psi(\vec{x}, t)\mathcal{T}^{-1} \xrightarrow{\mathcal{T}} i\gamma^1\gamma^3\psi(\vec{x}, -t), \quad (2.34)$$

onde $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ é o spinor adjunto de ψ .

O teorema \mathcal{CPT} diz que, se a densidade lagrangiana de uma teoria é hermitiana e invariante de Lorentz, então as transformações consecutivas de \mathcal{C} , \mathcal{P} e \mathcal{T} (\mathcal{CPT}) é uma simetria da teoria. De fato, a simetria \mathcal{CPT} exhibe conexões com a simetria de Lorentz, em que Oscar Greenberg mostrou que se uma teoria quebra a simetria \mathcal{CPT} isto também se reflete na quebra da simetria de Lorentz [23, 24].

Ademais, o teorema \mathcal{CPT} relaciona as propriedades das partículas e de suas antipartículas, segundo este, ambas devem obedecer as mesmas leis. Em muitas situações em que a simetria \mathcal{P} é quebrada a simetria \mathcal{CP} é mantida, só em raras ocasiões a simetria \mathcal{CP} é também violada, raramente, no entanto, também acontece.

Esta quebra pode explicar a predominância da matéria sobre a antimatéria que é observada no universo [25]. Ou seja, a violação da simetria \mathcal{CP} permitiria que partículas e antipartículas decaíssem a taxas diferentes. Resta-nos então saber sobre a simetria \mathcal{CPT} . No contexto do MP a simetria \mathcal{CPT} é considerada uma propriedade fundamental [26], mas, espera-se que qualquer violação observada seja mínima.

Veremos adiante que, em teorias com número de dimensões espaço-temporais maior que quatro ($4 + D$), como em teorias de cordas, tanto a simetria de Lorentz como a \mathcal{CPT} são naturalmente violadas [3, 4], a partir daí surge o Modelo Padrão Estendido. Nesta extensão do MP, a estrutura $b_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$ do setor fermiônico viola a simetria \mathcal{CPT} e, conseqüentemente, viola a simetria de Lorentz. Como estamos interessados em um modelo que contém uma estrutura desse tipo, vamos provar que a estrutura citada viola \mathcal{CPT} .

Antes, vamos considerar um quadrivetor não constante $B_\mu = B_\mu(x)$, no lugar do quadrivetor constante b_μ , e analisar o termo $B_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$ sob cada uma das transformações.

Para a conjugação de carga, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(B_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi) \mathcal{C}^{-1} &= \mathcal{C}(B_\mu) \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C}(\bar{\psi}) \mathcal{C}^{-1} \gamma^\mu \gamma^5 \mathcal{C}(\psi) \mathcal{C}^{-1} \\ &= -B_\mu(\vec{x}, t) \bar{\psi}(\vec{x}, t) \gamma^\mu \gamma^5 \psi(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Sob conjugação de paridade, escrevemos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(B_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi) \mathcal{P}^{-1} &= \mathcal{P}(B_\mu) \mathcal{P}^{-1} \mathcal{P}(\bar{\psi}) \mathcal{P}^{-1} \gamma^\mu \gamma^5 \mathcal{P}(\psi) \mathcal{P}^{-1} \\ &= B_\mu(-\vec{x}, t) \bar{\psi}(-\vec{x}, t) \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^0 \psi(-\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Nesse caso, ficaremos com a seguinte expressão:

$$\mathcal{P}(B_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi) \mathcal{P}^{-1} = \begin{cases} -B_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi & \text{para } \mu = 0 \\ +B_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi & \text{para } \mu = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Finalmente, para a reversão temporal, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(B_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi) \mathcal{T}^{-1} &= \mathcal{T}(B_\mu) \mathcal{T}^{-1} \mathcal{T}(\bar{\psi}) \mathcal{T}^{-1} \gamma^\mu \gamma^5 \mathcal{T}(\psi) \mathcal{T}^{-1} \\ &= -B_\mu(\vec{x}, -t) \bar{\psi}(\vec{x}, -t) \gamma^1 \gamma^3 \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^1 \gamma^3 \psi(\vec{x}, -t). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Nesse caso, temos que

$$\mathcal{T}(B_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi) \mathcal{T}^{-1} = \begin{cases} +B_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi & \text{para } \mu = 0 \\ -B_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi & \text{para } \mu = 1, 2, 3. \end{cases}$$

A partir destas transformações, podemos listar cada coeficiente sob cada transformação como segue:

	C	P	T	CP	CT	PT	CPT
$B_0 \bar{\psi} \gamma^0 \gamma^5 \psi$	-	-	+	+	-	-	+
$B_i \bar{\psi} \gamma^i \gamma^5 \psi$	-	+	-	-	+	-	+

Tabela 2.1: Coeficientes e simetrias discretas para o quadrivetor não constante B_μ .

Note que, se substituirmos o quadrivetor não constante (B_μ) pelo quadrivetor constante (b_μ) que tínhamos inicialmente, este, por ser constante, não sofre altera-

ção por conjugação de carga. De modo que, ao listá-lo na tabela (2.2), podemos comparar com a anterior.

	C	P	T	CP	CT	PT	CPT
$b_0\bar{\psi}\gamma^0\gamma^5\psi$	+	-	+	-	+	-	-
$b_i\bar{\psi}\gamma^i\gamma^5\psi$	+	+	-	+	-	-	-

Tabela 2.2: Coeficientes e simetrias discretas para o quadri-*vetor* constante b_μ .

Então, de fato, a estrutura $b_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ do modelo padrão estendido viola a simetria CPT e, conseqüentemente, viola Lorentz.

Na próxima seção, vamos revisar o modelo teórico que descreve partículas, campos e interações, o Modelo Padrão. Este é a base das pesquisas que têm movido físicos teóricos e experimentais, de partículas e campos.

2.3 Modelo Padrão

Neste seção iremos realizar uma revisão conceitual dos principais pontos do Modelo Padrão. O Modelo Padrão (MP) é o modelo das interações fundamentais que descreve três das quatro forças fundamentais da natureza, forte, fraca e eletromagnética, deixando de fora a gravitacional. Este é um dos problemas a ser resolvidos, a unificação da interação gravitacional ao modelo padrão. Chamamos de Modelo Padrão mas, este não é exatamente um modelo, é uma teoria. Há quem diz, uma das melhores. Este identifica todas as partículas elementares e especifica como elas interagem, logo, como tudo o que acontece no nosso mundo é advento das

partículas do MP interagindo de acordo com suas regras e equações, esta se torna uma das mais magníficas teorias da física [27].

O MP foi proposto por volta de 1970 e foi firmemente estabelecido, experimentalmente, no final desta década. O MP foi construído com base na torrente de dados das décadas de 1960 a 1980, quando grandes aceleradores se tornaram operacionais. Ele marcou o fim da era da busca pelos fundamentos da matéria iniciada por Rutherford no século 20 e abriu uma nova era.

O MP é uma teoria quântica de campos consistente com a mecânica quântica e a relatividade especial. Neste, existem dois tipos de partículas fundamentais, os férmions e os bósons. Os férmions são partículas de spin semi-inteiro que, de fato, constituem a matéria, e os bósons de spin inteiro são o que chamamos de quantos dos campos associados a cada uma das interações do MP, e os entendemos como mediadores dessas interações.

Podemos classificar os bósons como: fótons (γ), bósons W^+ , W^- e Z , glúons (g) e bósons de Higgs (H). E, os férmions como: léptons - elétron (e), múon (μ), tau (τ) e seus neutrinos (ν); e quarks - up (u), down (d), charm (c), strange (s), top (t) e bottom (b).

Os férmions são capazes de interagir por meio das forças fraca e eletromagnética, e os quarks são capazes de interagir também pela força forte. Por exemplo, a partícula mediadora da interação eletromagnética é o fóton, no caso da interação gravitacional acredita-se que seja o gráviton, cuja existência ainda não foi comprovada experimentalmente, mas que é tido como o bóson mediador da interação gravitacional.

Em resumo, a interação forte é mediada pelo pelos glúos, existem ao todo

8 tipos, sendo seis rotulados como pares de cores (verde, azul e vermelho) e anti-cores. A força forte é sentida apenas pelos quarks e é a força que mantém o núcleo dos átomos unido. A interação fraca é mediada pelos bósons vetoriais (W^+ , W^- e Z), é responsável pelo decaimento β , suas partículas mediadoras possuem massa. A força fraca é sentida por todas as partículas da matéria. Um fato interessante, o bóson Z_0 neutro foi predito pelo brasileiro José L. Lopes em 1958 [28] mas só foi descoberto em 1983 no CERN. A interação eletromagnética é mediada pelos fótons e mantém os átomos juntos. Pode se apresentar por meio de duas diferentes manifestações, o magnetismo e a eletricidade. A força eletromagnética pode ser sentida por todas as partículas que possui carga, o que não é o caso dos neutrinos. A interação gravitacional é mediada, teoricamente, pelos grávitons e é responsável pela atração dos objetos astronômicos com massa. A força gravitacional pode ser sentida por todas as partículas, exceto pelos glúons e fótons.

O MP também pode ser referido pela estrutura $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, onde $SU(3)$ (interação forte), $SU(2)$ (interação fraca) e $U(1)$ (interação eletromagnética) são grupos de simetria, ou de calibre, que mantém a estrutura de calibre do MP.

Na seção a seguir veremos que o MP pode ser uma primeira versão de um modelo de partículas e campos mais abrangente, que responde algumas questões que o MP não elucidava.

2.4 Modelo Padrão Estendido

Como vimos na seção anterior, na física de partículas existe um “modelo” que

descreve todas as partículas elementares, como interagem e por qual meio interagem, no entanto, este modelo ainda deixa algumas perguntas sem resposta. Como por exemplo, como incorporar a gravidade no MP? Por que existe mais matéria do que antimatéria no universo? Como explicar a predominância da matéria escura sobre a matéria formada pelas partículas do MP no universo?

Em 1998, Colladay e Kostelecky elaboraram um modelo teórico que corresponde a uma extensão do MP, que hoje o chamamos de Modelo Padrão Estendido (MPE) [10, 11]. O MPE pode ser dividido em MPE mínimo e MPE não-mínimo, neste trabalho vamos nos deter ao MPE mínimo. O MPE mínimo incorpora ao MP termos de violação das simetrias CPT e de Lorentz em todos os setores de interação e, ao mesmo tempo, é uma teoria efetiva que preserva renormalizabilidade⁵, causalidade⁶ e estabilidade⁷.

A necessidade de incorporar termos de violação de Lorentz e CPT ao MP vem do fato de que estas simetrias são violadas quando o espaço-tempo possui $(4 + D)$ dimensões, como é o caso do que ocorre em Teoria das Cordas⁸. Neste contexto esses termos violadores são obtidos através da quebra espontânea de simetria em uma teoria mais fundamental definida na escala de energia de Planck ($10^{19} GeV$), onde devemos, futuramente, observar uma nova física⁹. Esses termos se apresentam como quantidades tensoriais que fazem o papel de valores esperados no vácuo [19].

⁵Garante que a escala de energia seja finita.

⁶O efeito não pode preceder a causa ou que não existe propagação instantânea de informação.

⁷Propriedade do hamiltoniano da teoria ser limitado inferiormente. Em TQC, os autoestados no espaço de Fock devem possuir autovalores de energia positivos.

⁸A mais famosa teoria para gravitação quântica é a chamada teoria das cordas (string theory) [34].

⁹Assim como a Mecânica de Newton possui um domínio de validade e a Mecânica Quântica possui outro domínio de validade, espera-se que a escala de energia de Planck ($10^{19} GeV$) seja domínio de validade de uma nova Física. Assim como a Mecânica Clássica é um limite de baixas velocidades da Relatividade Restrita, espera-se que o MPE seja uma teoria limite de baixas energias da Teoria de Cordas [18].

Observar, experimentalmente, violações de Lorentz e de CPT significaria encontrar evidências da existência dessa teoria mais fundamental na natureza. Por esta razão diversos pesquisadores se dedicam a propor mecanismos para testar essas simetrias em diversos contextos. Em [29] os autores utilizam experimentos de antimatéria, em [30] as simetrias de Lorentz e CPT são investigadas no contexto da teoria de perturbação quiral, no contexto da gravitação em [31, 32] e oscilações de neutrinos em [33], entre outros.

2.4.1 Eletrodinâmica Quântica Estendida

A Eletrodinâmica Quântica (EDQ) é a teoria das interações entre fótons e elétrons, ou seja, é a teoria que se dedica a estudar e explicar como a luz e a matéria se comportam e interagem. A EDQ obedece, simultaneamente, os postulados da relatividade especial e a teoria quântica. Esta é uma das teorias mais bem sucedidas da física, isto devido às suas previsões serem altamente consistentes com os dados experimentais obtidos. Logo, a EDQ é essencial para a compreensão da natureza e, sendo assim, esta contida no MP.

Apesar do sucesso da EDQ na explicação e compreensão da natureza, a possível existência de violação da simetria de Lorentz em uma teoria mais fundamental, já comentada anteriormente, leva a extensão da EDQ tornando possível a inclusão dessa violação de simetria, chamamos esta extensão de EDQ Estendida.

Em 1990, Carroll, Field e Jackiw publicam um trabalho pioneiro [9], no qual abordam uma EDQ com violação de simetria de Lorentz. Neste trabalho, eles perceberam que é possível formular uma teoria semelhante a EDQ em $(3 +$

1) D , pela adição de um termo chamado hoje de Carroll-Field-Jackiw (CFJ), CPT-ímpar, à ação de Maxwell convencional. Neste caso as transformações de calibre são preservadas e a simetria de Lorentz é violada.

Um dos requerimentos do MPE é que o setor de violação de Lorentz deve ser incorporado à teoria usual sem modificar o conteúdo deste e sem introduzir novos campos além daqueles de fundo acoplados a operadores compostos, construídos a partir dos campos usuais do MP.

No setor mínimo, de operadores renormalizáveis de dimensão $d = 3$ e $d = 4$ de massa, a densidade lagrangiana da EDQ com violação de simetria de Lorentz é da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{i}{2} \bar{\psi} \Gamma^\mu D_\mu \psi - \bar{\psi} M \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} (k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu} F^{\kappa\lambda} F^{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{2} (k_{AF})^\kappa \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} A^\lambda F^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde $D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu$ é a derivada covariante, $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é a definição usual do tensor intensidade do campo eletromagnético, e A_μ é o campo de calibre, ψ é o campo de Dirac, e seu adjunto é $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$, $\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \Gamma_1^\mu$ e $M = m + M_1$, estes, por sua vez, são escritos como

$$M_1 = a_\mu \gamma^\mu + b_\mu \gamma^5 \gamma^\mu + \frac{1}{2} H_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}, \quad (2.39)$$

$$\Gamma_1^\mu = c^{\nu\mu} \gamma_\nu + d^{\nu\mu} \gamma^5 \gamma_\nu + e^\mu + if^\mu \gamma^5 + \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda\mu} \sigma_{\kappa\lambda}, \quad (2.40)$$

em que m é a massa do elétron e e é a constante de acoplamento eletromagnético.

A violação da simetria de Lorentz no setor fermiônico é caracterizada pelos

campos tensoriais constantes: $c_{\nu\mu}$, $d_{\nu\mu}$, e_μ , f_μ , $g_{\alpha\beta\mu}$, a_μ , b_μ e $H_{\mu\nu}$. Os campos tensoriais $c_{\nu\mu}$, $d_{\nu\mu}$, e_μ , f_μ e $g_{\alpha\beta\mu}$ são adimensionais e a_μ , b_μ e $H_{\mu\nu}$ têm dimensão de massa. O campo tensorial $H_{\mu\nu}$ é antissimétrico e $g_{\alpha\beta\mu}$ é antissimétrico somente nos seus dois primeiros índices. Os tensores $c_{\nu\mu}$ e $d_{\nu\mu}$ são assumidos serem de traço nulo. No setor bosônico, a violação de Lorentz é caracterizada pelos coeficientes $(k_F)_{\kappa\lambda\mu\nu}$, adimensional, e $(k_{AF})^\kappa$, dimensão de massa. Além da violação de simetria de Lorentz, os coeficientes com número ímpar de índices (CPT-ímpar) também violam CPT, como mostrado na tabela 2.3.

	C	P	T	CP	CT	PT	CPT
$c_{00}, (k_F)_{0j0k}, c_{jk}, (k_F)_{jklm}$	+	+	+	+	+	+	+
$b_j, g_{j0l}, g_{jk0}, (k_{AF})_j$	+	+	-	+	-	-	-
$b_0, g_{j00}, g_{jkl}, (k_{AF})_0$	+	-	+	-	+	-	-
$c_{0j}, c_{j0}, (k_F)_{0jkl}$	+	-	-	-	-	+	+
a_0, e_0, f_j	-	+	+	-	-	+	-
H_{jk}, d_{0j}, d_{j0}	-	+	-	-	+	-	+
H_{0j}, d_{00}, d_{jk}	-	-	+	+	-	-	+
a_j, e_j, f_0	-	-	-	+	+	+	-

Tabela 2.3: Coeficientes do MPE e simetrias discretas.

Fonte: extraída de [35].

Os termos que implementam a violação de simetria de Lorentz devem ser mínimos, de modo que não alterem as propriedades fundamentais do MP. De fato,

anulando esses termos, voltamos a lagrangiana da EDQ usual,

$$\mathcal{L}_{EDQ} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - \bar{\psi}m\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (2.41)$$

As quantidades b_μ e $c_{\nu\mu}$ produzem correções quânticas no setor bosônico, e o quadrivetor b_μ é capaz de gerar o termo de Chern-Simons 4-dimensional, ou melhor, o termo de CFJ.

No capítulo a seguir apresentaremos a teoria proposta e investigaremos a possibilidade da violação da simetria de Lorentz, através de correções radiativas, avaliando a equação de gap do potencial em regime de temperatura zero e finita. Em seguida, calcularemos a ação efetiva de um loop.

Capítulo 3

Quebra Dinâmica de Simetria de Lorentz

Neste capítulo nos dedicaremos a revisar o que é um Modelo de Quatro Férmions, e em especial um Modelo de Quatro Férmions Derivativo. A seguir, iremos realizar o cálculo do potencial efetivo (o cálculo realizado é um cálculo ainda não presente na literatura) e investigar a possibilidade de uma indução de quebra dinâmica de simetria por correções quânticas, realizando a solução da equação de intervalo (gap) para $T = 0$ e $T \neq 0$ para a determinação de mínimos não-triviais ($b^\mu \neq 0$) para o potencial que conduzam a valores esperados no vácuo (VEV) não nulos, que dão origem a campos vetoriais de fundo que violam as simetrias de Lorentz e CPT. Por fim, realizamos o cálculo da ação efetiva, e assim construímos a lagrangiana efetiva para nossa teoria.

3.1 Modelo de Quatro Férmions Derivativo

Neste trabalho estamos interessados na quebra dinâmica de simetria de Lorentz em um modelo de quatro férmions derivativo. A saber, modelos de quatro férmions são modelos teóricos que descrevem interações locais entre quatro campos fermiônicos, e ocorrem naturalmente em várias extensões do MP, como uma parametrização de baixa energia de teorias mais fundamentais, porém desconhecidas. Essas parametrizações são válidas mesmo quando não renormalizáveis.

Um dos primeiros modelos desse tipo foi o de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) [36, 37]. Com a Cromodinâmica Quântica¹, este passou a ser entendido como uma teoria efetiva para interações entre quarks [38]. Sendo uma das primeiras teorias que considera a quebra dinâmica de simetria, esta sugere que a massa dos férmions passa a existir através do emparelhamento destes, e que o mesmo deveria acontecer com partículas fundamentais por meio do mesmo mecanismo. Com base no trabalho desenvolvido por Nambu e Jona-Lasinio, surgiu o modelo apresentado em 1974 por David Gross e Neveu [39], que também é destaque nessa área de estudos. Na exploração desses modelos que acoplam quatro campos fermiônicos, o modelo estudado e apresentado por Thirring [40] se destaca. Este é uma teoria fermiônica com autointeração de quatro férmions e é uma das possíveis teorias quânticas de campos solucionáveis exatamente mais simples, que descreve a autointeração em $(1 + 1)$ dimensões.

Em seu trabalho publicado em 1963 [8], Bjorken discutiu a possibilidade de os fótons surgirem a partir de uma teoria fermiônica autointeragente em $(3+1)$

¹Teoria das interações fortes.

dimensões, com quebra espontânea de simetria de Lorentz. Para sua análise ele utilizou um termo de corrente vetorial da forma $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, semelhante a utilizada por Thirring em (1+1) dimensões.

O modelo de quatro férmons derivativo, por sua vez, é um modelo de quatro férmons com a presença de derivadas na corrente. De forma geral, podemos escrever a lagrangiana que o identifica como

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{G}{2}(\bar{\psi}\gamma^{\mu_1\cdots\mu_n}i\partial_{\mu_1}\cdots i\partial_{\mu_p}\gamma_5^q\psi)^2, \quad (3.1)$$

no qual $\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_n}$ + permutações e $n \geq p$.

Dentre os diversos modelos propostos nos últimos anos, podemos citar alguns trabalhos conhecidos.

O primeiro [41], com $n = 1$, $p = 0$ e $q = 1$ em (3.1), ou seja, com termo $(\bar{\psi}\gamma^{\mu_1}\gamma_5\psi)^2$, após a integração fermiônica apresenta a lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{ef} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{e^2}{24\pi^2}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \frac{1}{12}(e^2 A_\mu A^\mu - b_\mu b^\mu)^2. \quad (3.2)$$

Este é um modelo de Thirring quiral $4D$, cujo potencial efetivo mostra que a corrente quiral $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ pode assumir um valor esperado de vácuo diferente de zero que desencadeia violações de Lorentz e CPT. Como também, avaliando as flutuações no mínimo do potencial, é induzido dinamicamente um modelo do tipo bumblebee contendo um termo Chern-Simons.

O segundo modelo [42], com $n = 3$ e $p = 2$ apenas na parte espacial e $q = 2$, o que leva aos termos $(\bar{\psi}\gamma^0\psi)^2$ e $(\bar{\psi}\gamma^{ijk}\partial_i\partial_j\psi)^2$ e a correspondente lagrangiana da

teoria é dada por

$$\mathcal{L}_{ef} = -\frac{1}{2}\alpha_3 F_{0i} F^{0i} - \frac{1}{4}\alpha_5 F_{ij} F^{ij} - \frac{e^2}{4}\beta(A_i^2 - a_i^2)^2. \quad (3.3)$$

Este é um modelo de quatro férmons de Horava-Lifshitz para o caso específico $z = 3$ e, para este, foi demonstrado explicitamente que para várias dimensões do espaço-tempo, pode-se chegar à teoria exibindo tanto a geração dinâmica da simetria de Lorentz para o termo cinético e surgindo o potencial definido positivamente ao mesmo tempo. Também, ao mesmo tempo, para $D = 3$, o termo Chern-Simons invariante de Lorentz é gerado.

O terceiro modelo [43], com $p = 1$, $n = 1$ e $q = 1$, com termo $(\bar{\psi}\gamma^{\mu_1}\gamma^5\psi)^2$ e a lagrangiana resultante que identifica a teoria dada por

$$\mathcal{L}_{ef} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{e^4}{12\pi^2}(B_\mu B^\mu + \beta_\mu\beta^\mu)^2. \quad (3.4)$$

Este é um modelo quadridimensional de quatro férmons sem massa. Neste, o potencial bumblebee surge como resultado de cálculos de um loop e exibe mínimos não triviais.

O quarto modelo [44], com $n = 3$, $p = 1$ e $q = 2$, i.e., com o termo $(\bar{\psi}\gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3}\partial_{\mu_1}\psi)^2$, e a lagrangiana resultante que identifica a teoria dada por

$$\mathcal{L}_{ef} = -\frac{1}{12}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda} - \frac{m^4}{4}(e^2 B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - b_{\mu\nu}b^{\mu\nu})^2. \quad (3.5)$$

Essa é uma teoria do campo (pseudo)tensorial antissimétrico de segunda ordem minimamente acoplado a um espinor. Nesse trabalho, foi calculado o potencial

efetivo de um loop do campo tensorial, e, explicitamente, foi demonstrado que ele é definido positivamente e possui um conjunto contínuo de mínimos, tanto para o caso tensorial quanto para o pseudotensorial. Logo, exhibe quebra dinâmica de simetria de Lorentz.

O quinto modelo, apresentado em [45], com $n = 1$, $p = 0$ e $q = 0$,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{A_\mu A^\mu}{2G} - \frac{\lambda}{4}(A_\mu A^\mu)^2, \quad (3.6)$$

onde Bjorken reinterpreta o modelo proposto em [8], para a geração da EDQ, como um modelo com quebra dinâmica de simetria de Lorentz e CPT, promovida pela corrente vetorial $j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$. O modelo proposto por Bjorken, que consiste em um campo fermiônico, com massa m , em um autoacoplamento via interação vetorial, relaciona o surgimento do fóton com a existência de um vácuo infinitamente degenerado, causado por uma quebra dinâmica de simetria.

Os trabalhos citados anteriormente, como também o trabalho aqui desenvolvido, têm um diferencial importante com relação ao resultado apresentado por Bjorken, eles apresentam um termo de potencial quártico que é induzido dinamicamente, já o termo $-\frac{\lambda}{4}(A_\mu A^\mu)^2$ presente em (3.6) foi inserido de modo *ad hoc* nesta lagrangiana.

Na próxima seção apresentaremos a teoria proposta nesta dissertação, na qual tomamos um modelo de quatro férmons derivativo com $n = 2$, $p = 1$ e $q = 1$. A partir deste iremos realizar o cálculo exato do potencial efetivo e a ação efetiva.

3.2 Potencial Efetivo

Nesta seção estamos interessados em verificar o aparecimento da quebra dinâmica da simetria de Lorentz em um modelo de quatro férmions derivativo com massa, a partir do mecanismo de Coleman-Weinberg [46], i.e., por meio de correções quânticas. Para isso, devemos averiguar a existência de mínimos não-triviais no potencial, i.e., a presença de valores esperados no vácuo não-nulos. A teoria objeto de nosso estudo é representada pela seguinte lagrangiana:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\rlap{\not{\partial}} - m)\psi - \frac{G}{2} \left(\bar{\psi} \frac{1}{2} \{i\rlap{\not{\partial}}, \gamma^\mu\} \gamma_5 \psi \right)^2, \quad (3.7)$$

onde $j^\mu = \bar{\psi} \{i\rlap{\not{\partial}}, \gamma^\mu\} \gamma_5 \psi$ é a corrente, com $\{i\rlap{\not{\partial}}, \gamma^\mu\} = 2i\rlap{\not{\partial}}_\mu$ e $\rlap{\not{\partial}}_\mu = \frac{1}{2}(\vec{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu)$. Podemos reescrever esta corrente considerando $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, de modo que temos a lagrangiana como

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\rlap{\not{\partial}} - m)\psi - \frac{G}{2} (\bar{\psi} i\rlap{\not{\partial}}_\mu \gamma_5 \psi)^2, \quad (3.8)$$

em que $G = e^2/g^2$.

Introduzindo um campo auxiliar A_μ , de modo a eliminar a autointeração, podemos escrever a lagrangiana na forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \frac{g^2}{2} \left(A_\mu - \frac{e}{g^2} \bar{\psi} i\rlap{\not{\partial}}_\mu \gamma_5 \psi \right)^2, \quad (3.9)$$

que, resolvendo, fica

$$\mathcal{L} = \frac{g^2}{2} A_\mu A^\mu + \bar{\psi} (i\rlap{\not{\partial}} - ie(\partial_\mu A^\mu) \gamma_5 - 2ieA^\mu \partial_\mu \gamma_5 - m) \psi. \quad (3.10)$$

A lagrangiana acima (3.10) é a que iremos estudar. O funcional gerador é dado por

$$Z(\bar{\eta}, \eta) = \int DA_\mu D\psi D\bar{\psi} e^{i \int d^4x (\mathcal{L} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)}, \quad (3.11)$$

onde $\bar{\eta}$ e η são os termos de fonte. Escrevendo a lagrangiana (3.10) em (3.11), temos

$$Z(\bar{\eta}, \eta) = \int DA_\mu e^{i \int d^4x \frac{g^2}{2} A_\mu A^\mu} \int D\psi D\bar{\psi} e^{i \int d^4x (\bar{\psi} S^{-1} \psi - \bar{\eta} S \eta)}, \quad (3.12)$$

com $S^{-1} = (i\cancel{\partial} - m - ie(\partial_\mu A^\mu)\gamma^5 - 2ieA^\mu\partial_\mu\gamma^5)$. Em (3.11), também realizamos um deslocamento nos campos de férmions, i.e., $\psi \rightarrow \psi - S\eta$ e $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} - \bar{\eta}S$. Integrando nos campos de férmions², obtemos

$$Z(\bar{\eta}, \eta) = \int DA_\mu \exp\left(iS_{ef}[A] - i \int d^4x \bar{\eta} S \eta\right), \quad (3.13)$$

em que a ação efetiva é dada por

$$S_{ef}[A] = \frac{g^2}{2} \int d^4x A_\mu A^\mu - i \text{Tr} \ln(\cancel{\not{p}} - m - e(2p - i\cancel{\partial})_\mu A^\mu \gamma_5). \quad (3.14)$$

Aqui, Tr representa não apenas o traço sobre as matrizes de Dirac, mas também sobre a integração nos espaços de momentos ou coordenadas.

Para encontrarmos uma expressão para o potencial efetivo a partir da ação efetiva (3.14), levamos em conta que $S = \int d^4x \mathcal{L}_{ef} = \int dt \mathcal{L} = \int dt (T - V)$, tal que

²Realizamos essa integração da seguinte maneira:

$$\int D\psi D\bar{\psi} e^{i \int d^4x \bar{\psi} S^{-1} \psi} = \det S^{-1} = \prod_{i=1}^n e^{\ln S_i^{-1}} = e^{\sum_i \ln S_i^{-1}} = e^{\ln \sum_i S_i^{-1}} = e^{\ln Tr S^{-1}}.$$

podemos escrever

$$V_{ef}[A] = -\frac{g^2}{2} A_\mu A^\mu + i \operatorname{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln [\not{p} - m - e(2p - i\partial)_\mu A^\mu \gamma^5], \quad (3.15)$$

onde usamos que

$$\operatorname{Tr} \ln \theta = \int d^4 x \langle x | \ln \theta | x \rangle = \int d^4 x \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \langle x | \ln \theta | p \rangle \langle p | x \rangle \quad (3.16)$$

$$= \int d^4 x \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln \theta. \quad (3.17)$$

A seguir vamos calcular a equação de gap a temperatura zero, assim verificaremos a existência de mínimos não-triviais para o potencial determinado aqui.

3.2.1 Equação de Gap a Temperatura Zero

A fim de verificar a existência de um potencial efetivo com mínimos não triviais para nossa teoria, vamos efetuar o cálculo da equação de gap a temperatura zero ($T = 0$), que consiste em encontrar soluções para a seguinte equação:

$$\left. \frac{dV_{ef}}{dA_\mu} \right|_{A_\mu = \beta_\mu} = -\frac{g^2}{e} b^\mu - ie\Pi^\mu = 0, \quad (3.18)$$

com $b_\mu = e\beta_\mu$, em que

$$\Pi^\mu = \operatorname{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{2p^\mu \gamma^5}{\not{p} - m - 2p_\alpha b^\alpha \gamma^5}. \quad (3.19)$$

Observe que Π^μ é uma função de um ponto, chamada de amplitude de tadpole³.

³Diagrama de Feynman dotado de uma única perna externa.

Estamos interessados agora nesta última equação. A seguir, iremos calculá-la de maneira exata, fazendo o cálculo completo do traço e da integral contidos na mesma. Para isso, vamos racionalizar o termo do denominador em (3.19), tal que temos

$$(\not{p} - 2pb\gamma^5 - m)(\not{p} - 2pb\gamma^5 + m) = p^2 + 4(p \cdot b)^2 - m^2,$$

onde consideramos as propriedades: $(\gamma^5)^2 = 1$ e $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$. Com isso, podemos escrever

$$\begin{aligned} \Pi^\mu &= tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} - m - 2p_\alpha b^\alpha \gamma^5} \frac{\not{p} - 2(p \cdot b)\gamma^5 + m}{\not{p} - 2(p \cdot b)\gamma^5 + m} 2p^\mu \gamma^5 \\ &= tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} - 2(p \cdot b)\gamma^5 + m}{p^2 + 4(p \cdot b)^2 - m^2} 2p^\mu \gamma^5 \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(-16)(p \cdot b)p^\mu}{p^2 + 4(p \cdot b)^2 - m^2}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Para o cálculo dos traços acima, usamos as seguintes propriedades para as matrizes de Dirac:

$$tr(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}) = 0, \quad \text{se } n \text{ é ímpar}; \quad (3.21)$$

$$tr(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n} \gamma^5) = 0, \quad \text{se } n \text{ é ímpar ou menor que } 4; \quad (3.22)$$

$$tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}; \quad (3.23)$$

$$tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}); \quad (3.24)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}; \quad (3.25)$$

$$\{\not{p}, \not{b}\} = 2(p \cdot b); \quad (3.26)$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (3.27)$$

A matriz γ^5 é hermitiana, com $\text{tr}(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) = 4i\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ e a matriz $g^{\mu\nu}$ é o tensor métrico, na métrica de Minkowski.

Voltando ao denominador da equação (3.20), vamos a seguir encontrar uma maneira de escrevermos $p^2 + 4(p \cdot b)^2 = p'^2$, em que $p'_\mu = \zeta p_\mu + \eta b_\mu$. Para isso, note que então temos

$$p^2 = 4(p \cdot b)^2 + 2\zeta\eta(p \cdot b) + \eta^2 b^2. \quad (3.28)$$

Assim, claramente $\zeta = 1$, tal que encontramos a equação

$$b^2 \eta^2 + 2(p \cdot b)\eta - 4(p \cdot b)^2 = 0, \quad (3.29)$$

com solução

$$\eta = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4b^2}}{b^2} (p \cdot b) = \beta(p \cdot b). \quad (3.30)$$

Dessa forma, obtemos

$$p'_\mu = p_\mu + \beta(p \cdot b)b_\mu, \quad (3.31)$$

que então podemos escrever

$$p'_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu + \beta b_\mu b_\nu p^\nu \quad (3.32)$$

$$= M_{\mu\nu} p^\nu, \quad (3.33)$$

em que

$$M_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \beta b_\mu b_\nu, \quad (3.34)$$

e

$$\beta = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4b^2}}{b^2}. \quad (3.35)$$

A matriz em (3.34) nos ajudará a construir a expressão para a amplitude tadpole em uma única variável, o que é muito importante para a conclusão do cálculo neste momento. Desta maneira, temos ainda alguns resultados para a matriz M :

$$(M^{-1})^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{\beta}{1 + \beta b^2} b^\mu b^\nu, \quad (3.36)$$

$$\det(M_{\mu\nu}) = -(1 + \beta b^2) = \det(M^{\mu\nu}). \quad (3.37)$$

Então, agora podemos escrever (3.20) em termos de uma única variável e numa forma mais fácil para realizar seu cálculo. Dessa forma, dados

$$p'_\mu p'^\mu = p^2 + 4(p \cdot b)^2 \quad (3.38)$$

$$p'_2 = M_{\mu\alpha} p^\alpha M^{\mu\beta} p_\beta, \quad (3.39)$$

podemos também escrever

$$p'_\alpha = M_{\alpha\mu} p^\mu \Rightarrow p^\mu = (M^{-1})^{\alpha\mu} p'_\alpha \quad (3.40)$$

$$p'_\beta = M_{\beta\nu} p^\nu \Rightarrow p^\nu = (M^{-1})^{\beta\nu} p'_\beta. \quad (3.41)$$

O elemento diferencial se modifica por meio da seguinte manipulação:

$$p'_\mu = M_{\mu\nu}p^\nu \Rightarrow p_\mu = (M^{-1})_{\mu\nu}p'^\nu \quad (3.42)$$

$$d^4p' = \det\left(\frac{\partial p'^\mu}{\partial p^\nu}\right) d^4p \quad (3.43)$$

$$= \det(M^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu})d^4p \quad (3.44)$$

$$= -\det(M^{\mu\alpha})d^4p \quad (3.45)$$

$$= (1 + \beta b^2)d^4p, \quad (3.46)$$

pois $\det(g_{\alpha\nu}) = -1$. Logo, finalmente, temos a forma mais adequada para (3.20), dada por

$$\Pi^\mu = -16(1 + \beta b^2)^{-1}(M^{-1})^{\mu\alpha}(M^{-1})^{\nu\beta}b_\nu \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \frac{p'_\alpha p'_\beta}{p'^2 - m^2}. \quad (3.47)$$

O passo seguinte consiste em calcular a integral de laço. Para isso vamos usar a fórmula de Feynman,

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p_{\mu_1} \dots p_{\mu_P}}{(p^2 - m^2)^\alpha} = \frac{1}{(2\pi)^D} \frac{i\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\alpha)(-m)^{\alpha - \frac{D}{2}}} [(g_{\mu_1\mu_2} \dots g_{\mu_{P-1}\mu_P} + \text{permut.})] \times \left[\left(-\frac{m}{2}\right)^{\frac{P}{2}} \Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2} - \frac{P}{2}\right) \right]. \quad (3.48)$$

Para resolvermos (3.47) utilizando a solução geral (3.48), passamos a integral do espaço quadridimensional para o espaço D-dimensional da seguinte maneira:

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \rightarrow \mu^{4-D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}, \quad (3.49)$$

onde μ é um parâmetro arbitrário de dimensão de massa. Este tipo de regularização dimensional⁴ é útil, pois elimina tanto as divergências ultravioletas quanto infravermelhas na integral de laço que nos interessa sem interferir nas simetrias da teoria. Então, podemos escrever

$$\begin{aligned} \Pi^\mu &= -16(1 + \beta b^2)^{-1}(M^{-1})^{\mu\alpha}(M^{-1})^{\nu\beta}b_\nu \\ &\times [\mu^{4-D}(-i)(i)^{-D}2^{-D-1}\pi^{-\frac{D}{2}}(m^2)(-m^2)^{\frac{D}{2}-1}\Gamma(-\frac{D}{2})g_{\alpha\beta}]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

De modo que, realizando a expansão em séries do termo entre colchetes em (3.50) em torno de D , obtemos

$$-\frac{im^4 g_{\alpha\beta}}{32\pi^2} \left[\frac{1}{D-4} + \frac{1}{2} \left(\log \left(\frac{m^2 e^\gamma}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{3}{2} \right) \right] = \frac{im^4}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right) g_{\alpha\beta}, \quad (3.51)$$

cujo termo resolvemos tomando em consideração que $\epsilon = 4 - D$, $\ln(m^2/\mu'^2) = \log\left(\frac{m^2 e^\gamma}{4\pi\mu^2}\right)$, com $\mu'^2 = 4\pi\mu^2 e^{-\gamma}$, e $\frac{1}{\epsilon} - \ln\frac{m}{\mu'} = \frac{1}{\epsilon'}$. Substituindo (3.51) em (3.50), temos que

$$\Pi^\mu = -16(1 + \beta b^2)^{-1}(M^{-1})^{\mu\alpha}(M^{-1})^{\nu\beta}b_\nu \times \left[\frac{im^4}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right) g_{\alpha\beta} \right], \quad (3.52)$$

em que

$$\begin{aligned} (M^{-1})^{\mu\alpha}(M^{-1})^{\nu\beta}b_\nu g_{\alpha\beta} &= \left(g^{\mu\alpha} - \frac{\beta}{1 + \beta b^2} b^\mu b^\alpha \right) \left(g^{\nu\beta} - \frac{\beta}{1 + \beta b^2} b^\nu b^\beta \right) b_\nu g_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{(1 + \beta b^2)^2} b^\mu, \end{aligned} \quad (3.53)$$

⁴Primeiro calculamos o traço das matrizes de Dirac no espaço-tempo quadridimensional e em seguida promovemos as integrais e o tensor métrico $g^{\mu\nu}$ para o espaço-tempo D-dimensional.

com $(1 + \beta b^2) = \pm(1 + 4b^2)^{1/2}$ de (3.35). Portanto,

$$\Pi^\mu = -\frac{im^4}{2\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right) \frac{1}{(1 + 4b^2)^{3/2}} b^\mu. \quad (3.54)$$

De volta a equação de gap em (3.18), temos que

$$\left. \frac{dV_{ef}}{dA_\mu} \right|_{A_\mu = \beta_\mu} = -\frac{e}{G} b^\mu - ie \left(-\frac{im^4}{2\pi^2} \right) \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right) \frac{1}{(1 + 4b^2)^{3/2}} b^\mu = 0 \quad (3.55)$$

$$\left[-\frac{1}{G} - m_R^4 (1 + 4b^2)^{-3/2} \right] e b^\mu = 0, \quad (3.56)$$

em que consideramos o fator de massa renormalizada $m_R^4 = \frac{m^4}{Z_m} = \frac{m^4}{2\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right)$, i.e.,

$$\frac{1}{Z_m} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right). \quad (3.57)$$

A solução não-trivial ($b^\mu \neq 0$) para a equação de gap (3.56) é dada por

$$\frac{1}{G} = -m_R^4 (1 + 4b^2)^{-3/2}, \quad (3.58)$$

ou ainda,

$$b^2 = \frac{-1 + (-Gm_R^4)^{2/3}}{4},$$

que torna b^2 um número complexo, a não ser que $G = -|G|$, consideração esta que deve implicar na alteração do sinal presente na expressão em (3.8), da lagrangiana

da teoria, pois $G = e^2/g^2$. Logo,

$$b^2 = \frac{-1 + (|G|m_R^4)^{2/3}}{4}, \quad (3.59)$$

que deixa evidente a existência de duas possibilidades para a presença de mínimos para o potencial efetivo. Se b^μ é um vetor do tipo tempo ($b_0^2 > b_i^2 \Rightarrow b^2 > 0$), então teremos $|G|m_R^4 > 1$, ou, se b^μ é tipo espaço ($b_0^2 < b_i^2 \Rightarrow b^2 < 0$), então teremos $|G|m_R^4 < 1$.

Para determinar o potencial devemos integrar a expressão em (3.56), onde iremos adotar $X = e^2 A_\mu A^\mu$. Como resultado de tal integração, temos

$$V_{ef} = -\frac{X}{2G} - \frac{m_R^4}{4} + \frac{m_R^4}{4(1+4X)^{1/2}} + \alpha, \quad (3.60)$$

onde α é uma constante de integração. O comportamento deste potencial é ilustrado na Fig. (3.1), onde plotamos o potencial obtido em (3.60) como função de A_μ considerando o intervalo $[-1, 1]$ para A_μ , $m_R^4 = 1$ e substituímos o valor de G .

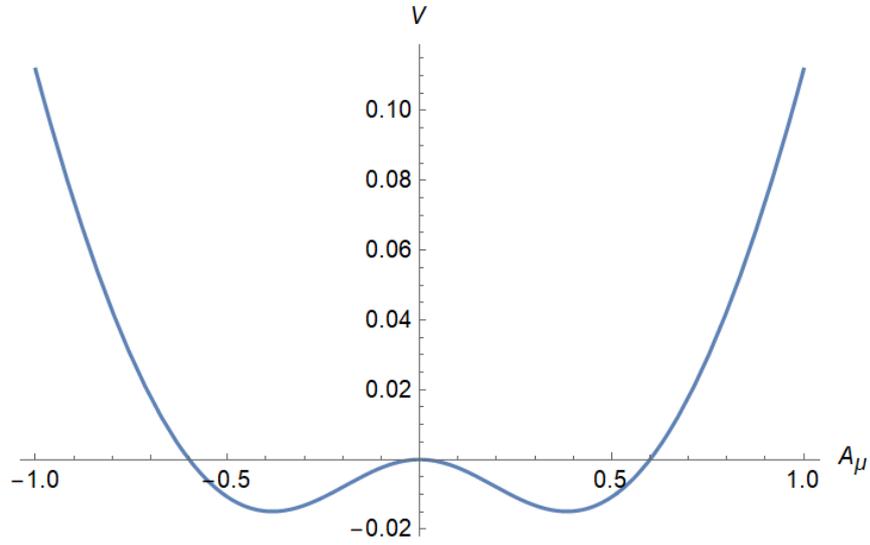


Figura 3.1: Mínimos não-triviais para o cálculo exato.

Fonte: Autor, 2023.

Expandindo o resultado em (3.60) em série de potência até sua quarta ordem, obtemos

$$V_{ef} = \frac{3}{2}m_R^4 X^2 - \left(\frac{X}{2G} + \frac{1}{2}Xm_R^4 \right) + \alpha + \dots \quad (3.61)$$

Substituindo (3.58) nesta última expressão, temos

$$V_{ef} = \frac{3}{2}m_R^4 X^2 - \frac{X}{2} [-m_R^4(1 - 6x) + m_R^4] + \alpha + \dots \quad (3.62)$$

$$= \frac{3}{2}m_R^4 X^2 - \frac{6}{2}m_R^4 Xx + \alpha + \dots, \quad (3.63)$$

em que adotamos $x = b^2$. Para chegar a forma mais simples do potencial definimos $\alpha = \frac{3}{2}m_R^4 x^2$, de modo que o potencial fica

$$V_{ef} = \frac{3}{2}m_R^4 (e^2 A_\mu A^\mu - b_\mu b^\mu)^2 + \dots \quad (3.64)$$

Então, ao analisarmos este potencial observamos a existência de mínimos não triviais caracterizados por um potencial semelhante ao potencial do campo de Higgs⁵, um potencial com quebra espontânea de simetria, que para A_μ , chamamos de bumblebee.

O potencial do tipo bumblebee associado a um campo vetorial geralmente é identificado pela expressão $V = \lambda(B_\mu B^\mu \mp b^2)^2$, este é característico dos modelos chamados bumblebee. Este permite a quebra espontânea da simetria de Lorentz. O primeiro modelo de teoria de campos vetoriais, envolvendo potenciais deste tipo, foi abordado em [47], e em [48] ele foi chamado pela primeira vez de “modelo bumblebee”.

Os modelos bumblebee são conhecidos por serem a forma mais simples da teoria quântica de campos efetiva com quebra espontânea da simetria de Lorentz.

Como ilustração para o comportamento do potencial obtido aqui, causado pela existência desses mínimos, vejamos a Fig. (3.2), onde realizamos as mesmas considerações que para o caso do potencial exato, no entanto, o intervalo admitido foi $[-0.8, 0.8]$.

⁵O potencial de Higgs possui um comportamento diagramático que se assemelha a um chapéu mexicano. Observe que, na figura ilustrativa (3.1) o potencial aqui obtido possui o mesmo comportamento. No entanto, o potencial de Higgs é escalar e este é vetorial.

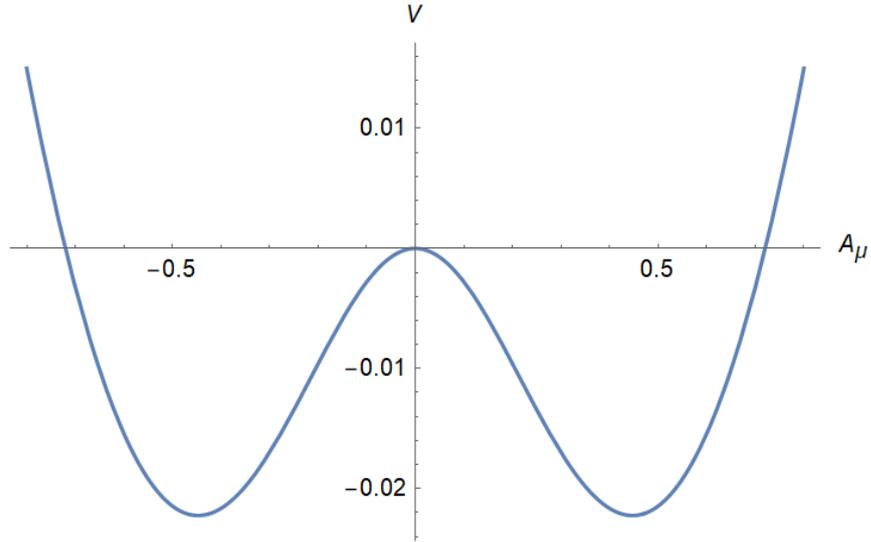


Figura 3.2: Mínimos não-triviais para o cálculo expandido.

Fonte: Autor, 2023.

3.2.2 Equação de Gap a Temperatura Finita

Para a implementação de temperatura, vamos tomar a equação de gap a temperatura finita ($T \neq 0$). Para isso, escolhemos utilizar o formalismo de Matsubara⁶ [49]. Para realizarmos o tratamento da equação de gap a temperatura finita, vamos partir da expressão em (3.47). O primeiro passo será tratar a parte integral separadamente do restante da expressão. Temos então,

$$I_{\alpha\beta} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p_\alpha p_\beta}{p^2 - m^2}, \quad (3.65)$$

⁶Também chamado de formalismo do tempo imaginário, este nos permite representar a função de partição de um sistema através de integrais de trajetória e assim permite calcular os efeitos causados pela adição do fator temperatura.

onde omitimos a linha que identifica os termos na integral, a fim de simplificar a notação daqui em diante.

Inicialmente, vamos fazer uma mudança do espaço-tempo de Minkowski para o espaço-tempo euclidiano, através do seguinte mapeamento (rotação de Wick):

$$g^{\mu\nu} \Rightarrow -\delta^{\mu\nu} \quad (3.66)$$

$$p^\mu \Rightarrow -p_E^\mu \quad (3.67)$$

$$p_0 \Rightarrow ip_0 \quad (3.68)$$

$$p^2 \Rightarrow -p_E^2 \quad (3.69)$$

$$dp_0 \Rightarrow idp_0, \quad (3.70)$$

assim como

$$\mu^{A-D} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \Rightarrow \mu^{3-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} i \int \frac{d^d p_0}{(2\pi)^d}, \quad (3.71)$$

onde $p_E^\mu = \vec{p}^\mu + p_0 u^\mu$, com $\vec{p}^\mu = (0, \vec{p})$ e $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$, com $D = d + 1$. Então para o caso em questão (3.65), temos as substituições

$$p_E^\alpha p_E^\beta = \vec{p}_\alpha \vec{p}_\beta + p_0^2 u_\alpha u_\beta, \quad (3.72)$$

$$\vec{p}_\alpha \vec{p}_\beta = \frac{\vec{p}^2}{d} (\delta_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta). \quad (3.73)$$

Com isso, podemos reescrever (3.65) na forma

$$\begin{aligned}
I_{\alpha\beta} &= i \int \frac{dp_0}{2\pi} \mu^{3-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p_E^\alpha p_E^\beta}{(-p_E^2 - m^2)} \\
&= -i\mu^{3-d} \int \frac{dp_0}{2\pi} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{(\vec{p}_\alpha \vec{p}_\beta + p_0^2 u_\alpha u_\beta)}{(\vec{p}^2 + p_0^2 + m^2)} \\
&= -i\mu^{3-d} \int \frac{dp_0}{2\pi} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\vec{p}^2 + p_0^2 + m^2)} \left[\frac{\vec{p}^2}{d} (\delta_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta) + p_0^2 u_\alpha u_\beta \right] \\
&= -i\mu^{3-d} \int \frac{dp_0}{2\pi} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\vec{p}^2 + p_0^2 + m^2)} \left[\frac{\vec{p}^2}{d} \delta_{\alpha\beta} - \left(\frac{\vec{p}^2}{d} - p_0^2 \right) u_\alpha u_\beta \right] \quad (3.74)
\end{aligned}$$

Em (3.74) temos duas integrais, tal que, para suas soluções vamos utilizar as soluções

$$\int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{1}{(\vec{p}^2 + \Delta^2)^\alpha} = \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{\pi^{n/2} \Gamma(\alpha - n/2)}{\Gamma(\alpha) (\Delta^2)^{\alpha - n/2}}, \quad (3.75)$$

$$\int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{\vec{p}^2}{(\vec{p}^2 + \Delta^2)^\alpha} = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{\pi^{n/2} n \Gamma(\alpha - 1 - n/2)}{\Gamma(\alpha) (\Delta^2)^{\alpha - 1 - n/2}}. \quad (3.76)$$

De modo que, em (3.74), teremos

$$\begin{aligned}
I_{\alpha\beta} &= -i\mu^{3-d} 2^{-d-1} \pi^{-d/2} \int \frac{dp_0}{2\pi} \left[\frac{\Gamma(-d/2)}{(p_0^2 + m^2)^{-d/2}} \right] \delta_{\alpha\beta} \\
&+ i\mu^{3-d} 2^{-d} \pi^{-d/2} \int \frac{dp_0}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \frac{\Gamma(-d/2)}{(p_0^2 + m^2)^{-d/2}} - \frac{p_0^2 \Gamma(1 - d/2)}{(p_0^2 + m^2)^{1-d/2}} \right] u_\alpha u_\beta, \quad (3.77)
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
I_{\alpha\beta} &= -i\mu^{3-d} 2^{-d-1} \pi^{-d/2} \int \frac{dp_0}{2\pi} \left[\frac{\Gamma(-d/2)}{(p_0^2 + m^2)^{-d/2}} \right] \delta_{\alpha\beta} \\
&+ i\mu^{3-d} 2^{-d} \pi^{-d/2} \int \frac{dp_0}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \frac{\Gamma(-d/2)}{(p_0^2 + m^2)^{-d/2}} - \frac{(p_0^2 + m^2 - m^2) d/2 \Gamma(-d/2)}{(p_0^2 + m^2)^{1-d/2}} \right] u_\alpha u_\beta, \quad (3.78)
\end{aligned}$$

onde usamos a propriedade $\Gamma(1 - d/2) = -d/2 \Gamma(-d/2)$. Finalmente, podemos

reescrever (3.74) como:

$$\begin{aligned}
I_{\alpha\beta} = & -i\mu^{3-d}2^{-d-1}\pi^{-d/2} \int \frac{dp_0}{2\pi} \Gamma(-d/2) \left[\frac{1}{(p_0^2 + m^2)^{-d/2}} \right] \delta_{\alpha\beta} \\
& + i\mu^{3-d}2^{-d-1}\pi^{-d/2} \int \frac{dp_0}{2\pi} \Gamma(-d/2) \left[\frac{(1+d)}{(p_0^2 + m^2)^{-d/2}} - m^2 \frac{d}{(p_0^2 + m^2)^{1-d/2}} \right] u_\alpha u_\beta.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Para adicionarmos o comportamento a temperatura finita, vamos então escrever em termos da discretização da componente temporal p_0 , dada por

$$\int \frac{dp_0}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n \tag{3.80}$$

$$p_0 \rightarrow \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi}{\beta}, \tag{3.81}$$

onde p_0 na forma escrita acima representa as frequências de Matsubara para férmions e $T = 1/\beta$ é a temperatura do sistema.

Então, tomando estas considerações, escrevemos

$$\begin{aligned}
I_{\alpha\beta} = & -i\mu^{3-d}2^{-d-1}\pi^{-d/2}T \sum_n \Gamma(-d/2) \left\{ \left(\frac{\xi^2}{m^2} \right)^{-d/2} \left[\frac{1}{[(n+1/2)^2 + \xi^2]^{-d/2}} \right] \delta_{\alpha\beta} \right. \\
& \left. + \left(\frac{\xi^2}{m^2} \right)^{-d/2} \left[\frac{(1+d)}{[(n+1/2)^2 + \xi^2]^{-d/2}} \right] u_\alpha u_\beta + \left(\frac{\xi^2}{m^2} \right)^{1-d/2} \left[\frac{m^2 d}{[(n+1/2)^2 + \xi^2]^{1-d/2}} \right] u_\alpha u_\beta \right\},
\end{aligned} \tag{3.82}$$

onde $\xi = \frac{\beta m}{2\pi}$.

Para calcular os somatórios em (3.82), vamos usar uma representação explícita em relação à frequência de Matsubara:

$$\sum_n [(n+b)^2 + a^2]^{-\lambda} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\lambda - 1/2)}{\Gamma(\lambda) (a^2)^{\lambda-1/2}} + 4 \sin(\pi\lambda) f_\lambda(a, d), \tag{3.83}$$

onde,

$$f_\lambda(a, d) = \int_{|a|}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 - a^2)^\lambda} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\epsilon^{2\pi(z+ib)} - 1} \right), \quad (3.84)$$

que é válida para $\lambda < 1$. Em (3.83) o primeiro termo é a contribuição de temperatura zero, enquanto o segundo termo é a contribuição de temperatura finita.

Note que, em (3.82), quando tomamos o limite $d \rightarrow 3$, temos expoente $\lambda \rightarrow -3/2$ nos denominadores do primeiro e segundo termo, já para o terceiro termo temos expoente $\lambda \rightarrow -1/2$. Ambas as potências estão dentro do limite de validade de λ .

Vamos dividir nossa expressão (3.82) da seguinte maneira:

$$I_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta}^{(1)} + I_{\alpha\beta}^{(2)}, \quad (3.85)$$

onde $I_{\alpha\beta}^{(1)}$ corresponde a contribuição dada por $\delta_{\alpha\beta}$ e $I_{\alpha\beta}^{(2)}$ a contribuição dada por $u_\alpha u_\beta$. Desse modo, para a primeira contribuição, obtemos

$$I_{\alpha\beta}^{(1)} = -\frac{im^4}{32\pi^2} \delta_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right) - \frac{im^4}{12\pi^2 \xi^4} \delta_{\alpha\beta} G(\xi), \quad (3.86)$$

com

$$G(\xi) = \int_{|\xi|}^{\infty} dz ((z - \xi)(\xi + z))^{3/2} (\tan(\pi z) - 1), \quad (3.87)$$

que no regime de altas temperaturas ($\xi \rightarrow 0$), temos

$$G(\xi \rightarrow 0) = \int_0^{\infty} dz z^3 (\tan(\pi z) - 1) = -\frac{7}{960}. \quad (3.88)$$

Com esses resultados, obtemos

$$I_{\alpha\beta}^{(1)} = -\frac{im^4}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right) \delta_{\alpha\beta} + \frac{7i\pi^2 T^4}{720} \delta_{\alpha\beta}, \quad (3.89)$$

onde $m^4/\xi^4 = (2\pi T)^4$, e definimos $\frac{1}{\epsilon'} = \frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m}{\mu'}$, $\epsilon = 3 - d$ e $\mu'^2 = 4\pi\mu^2 e^{-\gamma}$.

Para a segunda contribuição temos

$$I_{\alpha\beta}^{(2)} = -\frac{im^4}{12\pi^2 \xi^4} F(\xi) u_\alpha u_\beta, \quad (3.90)$$

com

$$F(\xi) = \int_{|\xi|}^{\infty} dz \sqrt{(z - \xi)(\xi + z)} (\xi^2 - 4z^2) (\tan(\pi z) - 1), \quad (3.91)$$

que no regime de altas temperaturas ($\xi \rightarrow 0$), temos

$$F(\xi \rightarrow 0) = \int_0^{\infty} dz (-4)z^3 (\tan(\pi z) - 1) = \frac{7}{240}. \quad (3.92)$$

Com estes resultados, obtemos agora

$$I_{\alpha\beta}^{(2)} = -\frac{7i\pi^2 T^4}{180} u_\alpha u_\beta, \quad (3.93)$$

onde, novamente, $m^4/\xi^4 = (2\pi T)^4$.

Substituindo estes resultados em (3.85) obtemos

$$I_{\alpha\beta} = -\frac{im^4}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right) \delta_{\alpha\beta} + \frac{7i\pi^2 T^4}{720} (\delta_{\alpha\beta} - 4u_\alpha u_\beta). \quad (3.94)$$

Retornando ao espaço de Minkowski, a última equação se torna a seguinte:

$$I_{\alpha\beta} = \frac{im^4}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right) g_{\alpha\beta} - \frac{7i\pi^2 T^4}{720} (g_{\alpha\beta} + 4u_\alpha u_\beta). \quad (3.95)$$

Finalmente, para a expressão original (3.47), obtemos

$$\begin{aligned} \Pi^\mu &= -16(1 + \beta b^2)^{-1} (M^{-1})^{\mu\alpha} (M^{-1})^{\nu\beta} b_\nu I_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{16(M^{-1})^{\mu\alpha} (M^{-1})^{\nu\beta}}{(1 + \beta b^2)} b_\nu \left[\frac{im^4}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right) g_{\alpha\beta} - \frac{7i\pi^2 T^4}{720} (g_{\alpha\beta} + 4u_\alpha u_\beta) \right]. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Para resolver a equação acima precisamos realizar as devidas contrações, nas quais utilizaremos os resultados de (3.53), (3.35) e (3.36). Fazemos então

$$\begin{aligned} (M^{-1})^{\mu\alpha} (M^{-1})^{\nu\beta} b_\nu g_{\alpha\beta} &= \left(g^{\mu\alpha} - \frac{\beta}{1 + \beta b^2} b^\mu b^\alpha \right) \left(g^{\nu\beta} - \frac{\beta}{1 + \beta b^2} b^\nu b^\beta \right) b_\nu g_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{(1 + \beta b^2)^2} b^\mu, \end{aligned} \quad (3.97)$$

e

$$\begin{aligned} (M^{-1})^{\mu\alpha} (M^{-1})^{\nu\beta} b_\nu u_\alpha u_\beta &= \left(g^{\mu\alpha} - \frac{\beta}{1 + \beta b^2} b^\mu b^\alpha \right) \left(g^{\nu\beta} - \frac{\beta}{1 + \beta b^2} b^\nu b^\beta \right) b_\nu u_\alpha u_\beta \\ &= \frac{u^\mu b_0}{(1 + \beta b^2)} - \frac{\beta b^\mu b_0^2}{(1 + \beta b^2)^2}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Logo, com estes resultados, temos que

$$\begin{aligned} \Pi^\mu &= -\frac{im^4}{2\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right) \frac{b^\mu}{(1 + \beta b^2)^3} + \frac{7i\pi^2 T^4}{45} \frac{b^\mu}{(1 + \beta b^2)^3} \\ &\quad - \frac{28i\pi^2 T^4}{45} \frac{\beta b_0^2 b^\mu}{(1 + \beta b^2)^3} + \frac{28i\pi^2 T^4}{45} \frac{b_0 u^\mu}{(1 + \beta b^2)^2}, \end{aligned} \quad (3.99)$$

que podemos simplificar da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Pi^\mu &= \frac{1}{(1 + \beta b^2)^3} \left\{ \frac{-im^4}{2\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right) + \frac{7i\pi^2 T^4}{45} - \frac{28i\pi^2 T^4}{45} \beta b_0^2 \right\} b^\mu \\ &\quad + \frac{1}{(1 + \beta b^2)^2} \left\{ \frac{28i\pi^2 T^4}{45} \right\} b_0 u^\mu. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Substituindo este resultado na equação de gap (3.18) obtemos a expressão

$$\begin{aligned} -\frac{g^2}{e} b^\mu - \frac{e}{(1 + \beta b^2)^3} \left[\frac{m^4}{2\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right) - \frac{7\pi^2 T^4}{45} + \frac{28\pi^2 T^4}{45} \beta b_0^2 \right] b^\mu \\ + \frac{e}{(1 + \beta b^2)^2} \left[\frac{28\pi^2 T^4}{45} \right] b_0 u^\mu = 0, \end{aligned} \quad (3.101)$$

onde $g^2 = e^2/G$. Portanto, temos a expressão

$$\left\{ -\frac{e}{G} - \frac{e}{(1 + \beta b^2)^3} \left[m_R^4 - \frac{7\pi^2 T^4}{45} (1 - 4\beta b_0^2) \right] \right\} b^\mu + \frac{e}{(1 + \beta b^2)^2} \left[\frac{28\pi^2 T^4}{45} \right] b_0 u^\mu = 0, \quad (3.102)$$

ou, substituindo o valor de β no denominador e definindo $m_R^4 = \frac{m^4}{2\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right)$ como a massa renormalizada, temos

$$\left\{ -\frac{e}{G} - \frac{e}{(1 + 4b^2)^{3/2}} \left[m_R^4 - \frac{7\pi^2 T^4}{45} (1 - 4\beta b_0^2) \right] \right\} b^\mu + \frac{e}{(1 + 4b^2)^2} \left[\frac{28\pi^2 T^4}{45} \right] b_0 u^\mu = 0. \quad (3.103)$$

Para obtermos a temperatura crítica, na qual a simetria de Lorentz é restaurada, vamos a seguir considerar a decomposição $b^\mu = \vec{b}^\mu + b_0 u^\mu$ e analisar a equação gap (3.103) separadamente para \vec{b}^μ e $b_0 u^\mu$.

Assim, inicialmente para $b_0 = 0$, temos

$$e \left\{ -\frac{1}{G} - \frac{1}{(1 + 4b^2)^{3/2}} \left[m_R^4 - \frac{7\pi^2 T^4}{45} \right] \right\} b^\mu = 0, \quad (3.104)$$

ou melhor,

$$e \left\{ -\frac{1}{G} - \frac{1}{(1 + 4\vec{b}^2)^{3/2}} \left[m_R^4 - \frac{7\pi^2 T^4}{45} \right] \right\} \vec{b}^\mu = 0, \quad (3.105)$$

a qual possui apenas componente espacial, com a presença do termo de temperatura.

Para obtermos a restauração de simetria, temos que

$$m_R^4 - \frac{7\pi^2 T^4}{45} \leq 0, \quad (3.106)$$

ou seja,

$$T^4 \geq \frac{45}{7\pi^2} m_R^4, \quad (3.107)$$

com temperatura crítica dada por

$$T_c^4 = \frac{45}{7\pi^2} m_R^4. \quad (3.108)$$

Portanto, definindo $m_R^4 - \frac{7\pi^2 T^4}{45} = -m_{RT}^4$ e escrevendo $G = -|G|$, ao integrarmos a equação gap (3.104), obtemos o potencial

$$V_{ef} = \frac{X}{2|G|} + \frac{m_{RT}^4}{4} - \frac{m_{RT}^4}{4(1 + 4X)^{1/2}} + \alpha, \quad (3.109)$$

com $X = e^2 A_\mu A^\mu$, que no regime termal acima da temperatura crítica apresenta

comportamento observado na Fig. (3.3), onde consideramos $m_{RT}^4 = 1$ e o intervalo $[-1.5, 1.5]$. Portanto, temos aqui claramente um potencial sem quebra espontânea de simetria, caracterizando assim restauração da simetria.

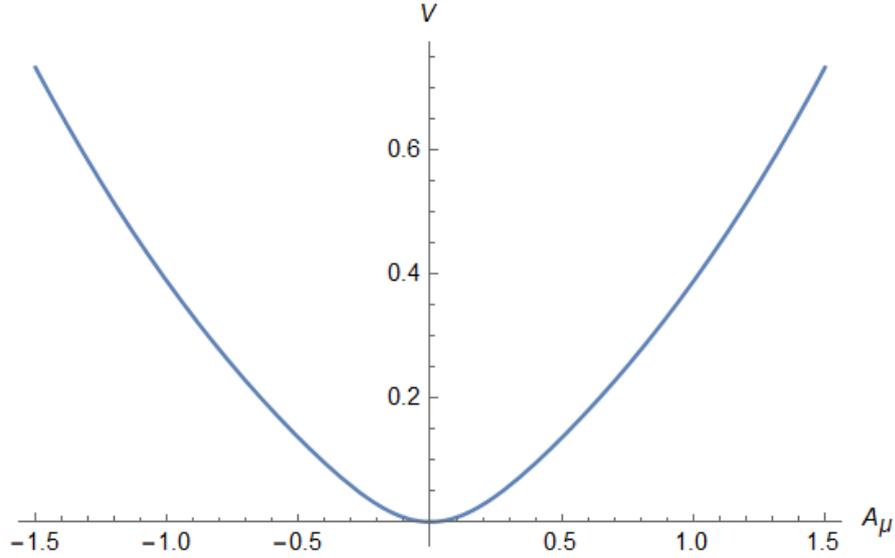


Figura 3.3: Restauração de simetria.

Fonte: Autor, 2023.

Vamos agora considerar apenas a contribuição da parte temporal em (3.103), i.e., vamos fazer $\vec{b}^\mu = 0$. Neste caso, temos

$$\left\{ -\frac{e}{G} - \frac{e}{(1 + \beta b_0^2)^3} \left[m_R^4 - \frac{7\pi^2 T^4}{45} (1 - 4\beta b_0^2) \right] \right\} b_0 u^\mu + \frac{e}{(1 + \beta b_0^2)^2} \left[\frac{28\pi^2 T^4}{45} \right] b_0 u^\mu = 0, \quad (3.110)$$

que, ao ser simplificada, assume a forma compacta

$$\left[-\frac{e}{G} - \frac{e}{(1 + \beta b_0^2)^3} \left(m_R^4 - \frac{35\pi^2 T^4}{45} \right) \right] b_0 u^\mu = 0. \quad (3.111)$$

Assim, a temperatura que restaura a simetria na componente temporal é tal que

$$T^4 \geq \frac{45}{35\pi^2} m_R^4, \quad (3.112)$$

com temperatura crítica

$$T_c^4 = \frac{45}{35\pi^2} m_R^4. \quad (3.113)$$

Note que este resultado é $\frac{1}{5}$ da temperatura crítica para a componente espacial e que, ao integrarmos a Eq. (3.111), temos exatamente o mesmo potencial (3.109).

Se quisermos ter as duas componentes simultâneas, espacial e temporal, devemos analisar a Eq. (3.102) com uma expansão em b_μ . Assim, considerando apenas os termos da expansão até $O(b^2)$, temos a expressão

$$\begin{aligned} & e \left\{ -\frac{1}{G} - m_R^4 + \frac{7\pi^2 T^4}{45} - \frac{56\pi^2 T^4}{45} b_0^2 \right\} b^\mu + e \left\{ 6m_R^4 - \frac{42\pi^2 T^4}{45} \right\} b^2 b^\mu \\ & + e(1 - 4b^2) \left[\frac{28\pi^2 T^4}{45} \right] b_0 u^\mu = 0. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Note que, para $b_0 = 0$, temos a temperatura crítica (3.108), assim como para $\vec{b}^\mu = 0$, temos a temperatura crítica (3.113), confirmando assim os resultados acima. Contudo, para as duas componentes simultâneas, temos a presença dos termos cruzados $b_0^2 \vec{b}^\mu$ e $\vec{b}_\nu \vec{b}^\nu b_0 u^\mu$ com coeficientes tais que não sejam possíveis de escrever uma expressão como $(b_0^2 + \vec{b}_\nu \vec{b}^\nu)(\vec{b}^\mu + b_0 u^\mu)$, inviabilizando assim esta análise e a obtenção de um potencial completamente covariante.

Por fim, podemos ainda ilustrar o comportamento do potencial sob cada regime de temperatura por meio da Fig. (3.4), onde a curva na cor laranja descreve o comportamento do potencial no regime de temperatura zero, a curva em verde

descreve o comportamento do potencial no regime em que a temperatura é igual a temperatura crítica e a curva em azul corresponde ao potencial no regime em que a temperatura é maior que a temperatura crítica.

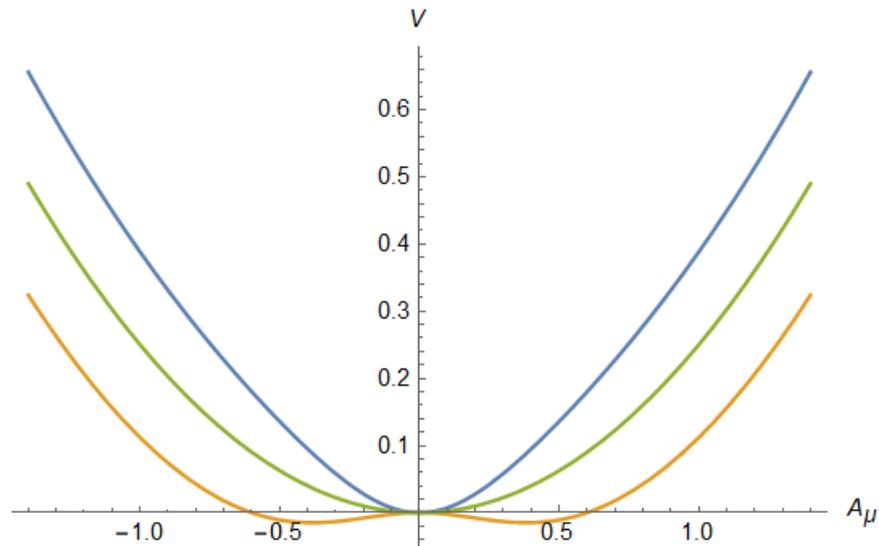


Figura 3.4: Evolução do potencial sob condições de temperatura.

Fonte: Autor, 2023.

3.3 Ação Efetiva

Nesta seção vamos determinar a forma explícita para a ação efetiva de um loop. Para isso, vamos determinar o tensor amplitude em termos de ordem de derivada, que dá a ação efetiva cinética, que assim nos permitirá escrever a densidade lagrangiana efetiva.

Então, para isso, vamos reescrever (3.14) de forma mais apropriada para obtenção do resultado desejado aqui. Temos então

$$\begin{aligned} S'_{ef} &= -i\text{Tr} \ln(\not{p} - m - e(2p - i\partial)_\mu A^\mu \gamma_5) \\ &= -i\text{Tr} \ln \left[(\not{p} - m) \left(1 - \frac{1}{\not{p} - m} (e(2p - i\partial)_\mu A^\mu \gamma_5) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.115)$$

que vamos adotar $P = \not{p} - m$ e $Q = [e(2p - i\partial)_\mu A^\mu \gamma_5]$, de modo que obtemos

$$S'_{ef} = -i\text{Tr} \ln \left[P \left(1 - \frac{Q}{P} \right) \right]. \quad (3.116)$$

Resolvendo a equação acima por meio da regra do logaritmo neperiano do produto, e voltando para os termos originais, temos a seguinte expressão:

$$S'_{ef} = -i\text{Tr} \ln(\not{p} - m) + S''_{ef}, \quad (3.117)$$

com

$$S''_{ef} = -i\text{Tr} \ln [1 - S(p)e(2p - i\partial)_\mu A^\mu \gamma_5], \quad (3.118)$$

onde $S(p) = \frac{1}{\not{p} - m}$ é o propagador.

Em (3.118), vamos usar $\ln(1 - x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, tal que assim temos

$$S''_{ef} = \sum_{n=1}^{\infty} S_{ef}^{(n)}, \quad (3.119)$$

onde

$$S_{ef}^{(n)} = i\text{Tr} \frac{1}{n} [S(p)e(2p - i\partial)_\mu A^\mu \gamma_5]^n. \quad (3.120)$$

Dessa forma, substituindo (3.120) em (3.14), temos

$$S_{ef}[A] = \frac{g^2}{2} \int d^4x A_\mu A^\mu + S_{ef}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{ef}^{(n)}, \quad (3.121)$$

em que $S_{ef}^{(0)} = -i \text{Tr} \ln(\not{p} - m)$ será absorvido na constante de normalização do funcional gerador.

Para determinar o tensor amplitude de ordem zero de derivada, vamos desconsiderar as contribuições com derivadas em (3.120). Como para as ordens de $n = 1$ e $n = 3$ a ação é nula, vamos então determinar para $n = 2$ e $n = 4$.

Para ordem $n = 2$ da ação efetiva, que nos dá as correções de um loop de segunda ordem, temos

$$\begin{aligned} S_{ef}^{(2)} &= i \text{Tr} \frac{(2eS(p)A_\mu p^\mu \gamma^5)(2eS(p)A_\nu p^\nu \gamma^5)}{2} \\ &= 2ie^2 \text{Tr} S(p)A_\mu p^\mu \gamma^5 S(p)A_\nu p^\nu \gamma^5 \\ &= 2ie^2 \text{Tr} \int d^4x \langle x | S(p)A_\mu p^\mu \gamma^5 S(p)A_\nu p^\nu \gamma^5 | x \rangle \\ &= 2ie^2 \text{Tr} \int d^4x \langle x | S(p)p^\mu \gamma^5 S(p)p^\nu \gamma^5 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} | p \rangle \langle p | A_\mu A_\nu | x \rangle \\ &= 2ie^2 \text{Tr} \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S(p)p^\mu \gamma^5 S(p)p^\nu \gamma^5 A_\mu A_\nu \langle x | p \rangle \langle p | x \rangle. \end{aligned} \quad (3.122)$$

Na expressão acima calculamos o valor esperado onde operam os operadores $\hat{A}(x)$ e \hat{p} , e inserimos a relação de completeza no espaço dos momentos, com $\langle x | p \rangle \langle p | x \rangle = e^{ipx} e^{-ipx} = 1$. Logo, a ação efetiva de ordem dois pode ser expressa como,

$$S_{ef}^{(2)} = \int d^4x \Pi_{(0)}^{\mu\nu} A_\mu A_\nu, \quad (3.123)$$

em que o tensor amplitude com derivada zero, indicada pelo subscrito, é

$$\Pi_{(0)}^{\mu\nu} = 2ie^2 \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S(p) p^\mu \gamma_5 S(p) p^\nu \gamma_5. \quad (3.124)$$

Para o cálculo exato, reescrevemos (3.124) explicitando o propagador $S(p)$,

$$\Pi_{(0)}^{\mu\nu} = 2ie^2 \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} - m} p^\mu \gamma_5 \frac{1}{\not{p} - m} p^\nu \gamma_5, \quad (3.125)$$

ou melhor,

$$\Pi_{(0)}^{\mu\nu} = 2ie^2 \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^2} (\not{p} + m) p^\mu \gamma_5 (\not{p} + m) p^\nu \gamma_5, \quad (3.126)$$

onde racionalizamos o propagador da seguinte maneira:

$$S(p) = \frac{1}{\not{p} - m} = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}. \quad (3.127)$$

Logo, substituindo o resultado do traço e resolvendo a integral em (3.126), obtemos

$$\Pi_{(0)}^{\mu\nu} = 2ie^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^2} [4(m^2 - p^2) p^\mu p^\nu] \quad (3.128)$$

$$= 2ie^2 \left[-\mu^{4-D} \frac{i^{1-D} 2^{2-D} \pi^{-\frac{D}{2}} m^2 (-m^2)^{\frac{D}{2}-1} \Gamma(1 - \frac{D}{2}) g^{\mu\nu}}{D} \right], \quad (3.129)$$

e expandindo o termo entre colchetes em torno de $D = 4$, temos

$$\begin{aligned} \Pi_{(0)}^{\mu\nu} &= 2ie^2 \left[\frac{-im^4 g^{\mu\nu}}{8\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right) \right] \\ &= \frac{e^2 m^4}{4\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right) g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.130)$$

no qual $\frac{1}{\epsilon'} = \frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m}{\mu'}$ com $\epsilon = 4 - D$ e $\mu'^2 = 4\pi\mu^2\epsilon^{-\gamma}$. Portanto, para ordem $n = 2$ e considerando que a ação efetiva é a integral da lagrangiana efetiva no espaço-tempo $S_{ef}^{(2)} = \int d^4x \mathcal{L}_{ef}^{(2)}$, obtemos

$$\mathcal{L}_{ef,0}^{(2)} = \frac{e^2 m^4}{4\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right) A_\mu A^\mu. \quad (3.131)$$

Agora, definindo a massa renormalizada como $m_R^4 = m^4/Z_m$, com $\frac{1}{Z_m} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right)$, podemos reescrever esta última expressão na forma

$$\mathcal{L}_{ef,0}^{(2)} = \frac{e^2 m_R^4}{2} A_\mu A^\mu. \quad (3.132)$$

Para $n = 4$ temos ação efetiva de ordem quatro, que gera as correções radiativas de quarta ordem. Seguimos o mesmo procedimento adotado para o caso de $n = 2$, de modo que obtemos

$$S_{ef}^{(4)} = \int d^4x \Pi_{(0)}^{\mu\nu\alpha\lambda} A_\mu A_\nu A_\alpha A_\lambda, \quad (3.133)$$

onde o tensor amplitude, para $n = 4$ e derivada zero, é

$$\Pi_{(0)}^{\mu\nu\alpha\lambda} = 4ie^4 tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} - m} p^\mu \gamma_5 \frac{1}{\not{p} - m} p^\nu \gamma_5 \frac{1}{\not{p} - m} p^\alpha \gamma_5 \frac{1}{\not{p} - m} p^\lambda \gamma_5, \quad (3.134)$$

ou ainda,

$$\Pi_{(0)}^{\mu\nu\alpha\lambda} = 4ie^4 tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^4} (\not{p} + m) p^\mu \gamma_5 (\not{p} + m) p^\nu \gamma_5 (\not{p} + m) p^\alpha \gamma_5 (\not{p} + m) p^\lambda \gamma_5. \quad (3.135)$$

Feito o cálculo exato, e adotando as considerações já feitas para (3.132),

obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ef,0}^{(4)} &= -\frac{3e^4m^4}{4\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right) A_\mu A^\mu A_\nu A^\nu \\ &= -\frac{3e^4m_R^4}{2} A_\mu A^\mu A_\nu A^\nu,\end{aligned}\tag{3.136}$$

onde consideramos a massa renormalizada $m_R^4 = m^4/Z_m$ com $\frac{1}{Z_m} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{3}{4} \right)$.

Para determinarmos as contribuições do termo cinético, tensor amplitude com ordem dois de derivada, iremos partir da ação efetiva de ordem $n = 2$, visto que o termo cinético é dado quando tratamos de termos com duas derivadas.

Vamos então partir da expressão (3.120)

$$S_{ef}^{(n)} = i\text{Tr} \frac{1}{n} [eS(p)(2p - i\partial)_\mu A^\mu \gamma_5]^n.\tag{3.137}$$

Entretanto, desta vez, vamos manter o termo diferencial na expressão, pois é justamente este termo que nos dará a contribuição que buscamos. Então, para $n = 2$, temos

$$\begin{aligned}S_{ef}^{(2)} &= \frac{ie^2}{2} \text{Tr} [S(p)(2p - i\partial)_\mu A^\mu \gamma_5 S(p)(2p - i\partial)_\nu A'^\nu \gamma_5] \\ &= \frac{ie^2}{2} \int d^4x \Pi_{\mu\nu}^{(2)} A^\mu A'^\nu,\end{aligned}\tag{3.138}$$

onde $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}$ é o tensor amplitude de ordem dois de derivada, no qual a ordem de derivada é indicada pelo sobrescrito, e é da forma

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)} = \text{Tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S(p)(2p - i\partial)_\mu \gamma_5 S(p - i\partial)(2p - i\partial)_\nu \gamma_5.\tag{3.139}$$

Em (3.139) temos o propagador $S(p - i\partial)$ e vamos expandi-lo da seguinte maneira:

$$S(p - i\partial) = \frac{1}{\not{p} - m - i\cancel{\partial}} = \frac{1}{A - B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A}B\frac{1}{A} + \frac{1}{A}B\frac{1}{A}B\frac{1}{A} + \dots, \quad (3.140)$$

onde $A = \not{p} - m$ e $B = i\cancel{\partial}$. Com isso, temos

$$S(p - i\partial) = \frac{1}{\not{p} - m} + \frac{1}{\not{p} - m}i\cancel{\partial}\frac{1}{\not{p} - m} + \frac{1}{\not{p} - m}i\cancel{\partial}\frac{1}{\not{p} - m}i\cancel{\partial}\frac{1}{\not{p} - m} + \dots. \quad (3.141)$$

Vamos substituir a expansão do propagador em (3.139), o que resulta em

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{(2)} &= tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (2p - i\partial)_\mu \gamma_5 \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (2p - i\partial)_\nu \gamma_5 \\ &+ tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (2p - i\partial)_\mu \gamma_5 \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} i\cancel{\partial} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (2p - i\partial)_\nu \gamma_5 \\ &+ tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (2p - i\partial)_\mu \gamma_5 \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} i\cancel{\partial} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} i\cancel{\partial} \times \\ &\quad \times \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (2p - i\partial)_\nu \gamma_5 + \dots. \end{aligned} \quad (3.142)$$

Nesta última expressão, vamos considerar os possíveis termos com duas derivadas.

Desse modo, temos

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{(2)} &= tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (-i\partial)_\mu \gamma_5 \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (-i\partial)_\nu \gamma_5 \\ &+ tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (2p_\mu) \gamma_5 \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} i\cancel{\partial} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (-i\partial)_\nu \gamma_5 \\ &+ tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (-i\partial)_\mu \gamma_5 \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} i\cancel{\partial} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (2p_\nu) \gamma_5 \\ &+ tr \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (2p_\mu) \gamma_5 \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} i\cancel{\partial} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} i\cancel{\partial} \times \\ &\quad \times \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} (2p_\nu) \gamma_5 + \dots. \end{aligned} \quad (3.143)$$

Em (3.143) usaremos as relações $i\cancel{\partial} = \cancel{k}$, $i\partial_\mu = k_\mu$ e $i\partial_\nu = k_\nu$. Realizando o cálculo dos traços⁷, temos então

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}^{(2)} &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^2} [4m^2 k_\mu k_\nu - 4p^2 k_\mu k_\nu] + \\
&+ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^3} [-8m^2 k_\nu p_\mu (k \cdot p) + 8p^2 k_\nu p_\mu (k \cdot p) - 8m^2 k_\mu p_\nu (k \cdot p) \\
&+ 8p^2 k_\mu p_\nu (k \cdot p)] \\
&+ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^4} [16k^2 m^4 p_\mu p_\nu - 32k^2 m^2 p^2 p_\mu p_\nu + 16k^2 (p^2)^2 p_\mu p_\nu + \\
&+ 32m^2 p_\mu p_\nu (k \cdot p)^2 - 32p^2 p_\mu p_\nu (k \cdot p)^2],
\end{aligned} \tag{3.144}$$

onde juntamos a segunda e terceira integral em (3.143) na segunda integral em (3.144). Realizando a integração e a soma dos termos resultantes em (3.144), obtemos

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{im^2}{2\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{1}{2} \right) (k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu). \tag{3.145}$$

Assim, avaliando a expressão (3.138), temos

$$\mathcal{L}_{ef,2}^{(2)} = \frac{e^2 m^2}{4\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{1}{2} \right) (k_\mu k_\nu - k^2 g_{\mu\nu}) A^\mu A^\nu, \tag{3.146}$$

ou

$$\mathcal{L}_{ef,2}^{(2)} = \frac{1}{2Z_3} e^2 (\partial^2 g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) A^\mu A^\nu, \tag{3.147}$$

em que $\frac{1}{Z_3} = \frac{e^2 m^2}{2\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon'} + \frac{1}{2} \right)$.

Portanto, a densidade lagrangiana que descreve nossa teoria é dada pela

⁷Para realizar esses cálculos de traços, podemos usar o programa Wolfram Mathematica ou podemos calcular algebricamente utilizando as propriedades das matrizes gamma de Dirac já mencionadas no texto.

soma das densidades lagrangianas de ordem dois e quatro, e de ordem de derivada zero e dois. Assim, ao definirmos o campo renormalizado $A_R^\mu = Z_3^{-1/2} A^\mu$, como também a constante de acoplamento renormalizada $e_R = Z_3^{1/2} e$, podemos rescrever a lagrangiana efetiva como

$$\mathcal{L}_{ef} = \frac{e_R^2}{2G} A_{R\mu} A_R^\mu + \frac{e_R^2 m_R^4}{2} A_{R\mu} A_R^\mu - \frac{3e_R^4 m_R^4}{2} A_{R\mu} A_R^\mu A_{R\nu} A_R^\nu + \frac{1}{2} (\partial^2 g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) A_{R\mu} A_R^\nu. \quad (3.148)$$

Para simplificar a expressão acima, vamos usar a expansão $1/G = -m_R^4(1 - 6b^2)$ da equação (3.58), de modo que obtemos

$$\mathcal{L}_{ef} = -\frac{1}{4} F_{R\mu\nu} F_R^{\mu\nu} - \frac{3}{2} m_R^4 (e^2 A_\mu A^\mu - b_\mu b^\mu)^2, \quad (3.149)$$

onde adicionamos a constante $-\frac{3}{2} m_R^4 x^2$.

Então, avaliando a expressão final para a densidade lagrangiana, recuperamos a expressão para o potencial antes obtida em (3.64), porém desta vez por meio das correções radiativas de ordem dois e quatro. O termo adicional que aparece na expressão (3.149) é a contribuição da ação cinética induzida, que possui energia positiva como esperado.

Capítulo 4

Considerações Finais e Perspectivas

Nesta dissertação, investigamos a possibilidade da quebra espontânea de simetria de Lorentz, através de correções quântica, a partir de um modelo de quatro férmions autointeragente derivativo.

No capítulo 2, dedicamo-nos a exposição e discussão da fundamentação teórica a cerca das simetrias CPT e de Lorentz, assim como ao MP e a sua extensão, o MPE, com ênfase na eletrodinâmica quântica estendida.

Apresentamos no capítulo 3 um modelo geral de quatro férmions derivativo e assim identificamos alguns trabalhos que já foram desenvolvidos neste estudo da quebra dinâmica da simetria de Lorentz. Em seguida, ao considerarmos uma teoria fermiônica com o termo autointeragente $(\bar{\psi}i\overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mu}\gamma_5\psi)^2$, obtemos uma expressão para o potencial efetivo de um loop, assim como para a correspondente ação efetiva.

Para isso, por meio da equação de gap, verificamos a presença de valores esperados no vácuo (VEV) não nulo, e constatamos que o potencial é do tipo bumblebee. Também investigamos esta teoria no regime de temperatura finita e verificamos que

ambas as componentes do potencial, espacial e temporal, são susceptíveis aos efeitos de temperatura, i.e., o potencial se altera a medida que T varia. Para cada componente, estimamos as temperaturas críticas, dadas por (3.108) e (3.113), a partir das quais ocorrem a restauração de simetria. Por fim, calculamos a ação efetiva de um loop e mostramos que o potencial resultante é definido positivamente, e realizamos a indução da ação cinética de segunda ordem no campo auxiliar A^μ .

Como perspectivas futuras deste trabalho, entre outras possibilidades, podemos utilizar o método de regularização de 't Hooft e Veltman, que nos permitirá realizar uma comparação com os resultados aqui obtidos, onde utilizamos o método de regularização dimensional convencional, e investigar quais alterações decorrem dessa nova abordagem. Ainda mais, podemos realizar o cálculo do grupo de renormalização desta teoria, assim como investigar teorias com mais derivadas, e.g., dada por $(\bar{\psi}\partial_\kappa\partial_\mu\gamma^{\kappa\mu\nu}\psi)^2$, sempre com o intuito na busca por um potencial com quebra espontânea de simetria, através de correções quânticas.

Referências Bibliográficas

- [1] A. S. Martins, “Simetrias e Leis de Conservação na Mecânica Clássica,” *Rev. Brasileira de Ensino de Física* **21**, 33 (1999).
- [2] J. Furtado e J. A. Helajel-Neto, “Teoria de Grupos e o Papel das Simetrias em Física,” *Rev. Brasileira de Ensino de Física* **43**, e20200338 (2021).
- [3] V. A. Kostelecky and S. Samuel, “Spontaneous Breaking of Lorentz Symmetry in String Theory,” *Phys. Rev. D* **39**, 683 (1989).
- [4] V. A. Kostelecky and R. Potting, “CPT and strings,” *Nucl. Phys. B* **359**, 545-570 (1991).
- [5] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, “Noncommutative field theory,” *Rev. Mod. Phys.* **73**, 977-1029 (2001).
- [6] S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecky, C. D. Lane and T. Okamoto, “Noncommutative field theory and Lorentz violation,” *Phys. Rev. Lett.* **87**, 141601 (2001).
- [7] Z. Guralnik, R. Jackiw, S. Y. Pi and A. P. Polychronakos, “Testing noncommutative QED, constructing noncommutative MHD,” *Phys. Lett. B* **517**, 450-456 (2001).

- [8] J. D. Bjorken, “A Dynamical origin for the electromagnetic field,” *Annals Phys.* **24**, 174-187 (1963).
- [9] S. M. Carroll, G. B. Field and R. Jackiw, “Limits on a Lorentz and Parity Violating Modification of Electrodynamics,” *Phys. Rev. D* **41**, 1231 (1990).
- [10] D. Colladay and V. A. Kostelecky, “Lorentz violating extension of the standard model,” *Phys. Rev. D* **58**, 116002 (1998).
- [11] D. Colladay and V. A. Kostelecký, “CPT violation and the standard model,” *Phys. Rev. D* **55**, 6760 (1997).
- [12] A. Einstein, “On the electrodynamics of moving bodies,” *Annalen Phys.* **17**, 891 (1905) [*Annalen Phys.* **14**, 194 (2005)].
- [13] P. W. Higgs, “Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons,” *Phys. Rev. Lett.* **13**, 508-509 (1964).
- [14] E. S. Carvalho, “Redução dimensional do setor CPT-PAR do modelo padrão estendido”. 67 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2011.
- [15] F. R. Klinkhamer, “A CPT anomaly,” *Nucl. Phys. B* **578**, 277-289 (2000).
- [16] M. D. Schwartz, “Quantum Field Theory and the Standard Model,” Cambridge University Press, 2014. [ISBN 978-1-107-03473-0]
- [17] H. Belich and et.al., “Violação da Simetria de Lorentz,” *Rev. Brasileira de Ensino de Física* **29**, 57-64 (2007).

- [18] A. F. Ferrari, “A busca por violações da simetria de Lorentz: testando os princípios da relatividade restrita na escala de Planck,” *Rev. Brasileira de Ensino de Física* **41**, e20190092 (2019).
- [19] R. P. M. Moreira, R. R. Luz e L. R. Silva, “O termo CPT do Modelo Padrão Estendido,” *e-Boletim da Física*, [S. l.] **10**, (2021).
- [20] EISBERG, R., RESNICK, R. “Física Quântica. Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas”. Rio de Janeiro: Campus Ltda, 1979.
- [21] J. B. Neto, “Teoria de Campos e a Natureza: parte quântica”, Editora Livraria da Física, 2017. [ISBN 978-85-7861-491-1]
- [22] M. Gomes, “Teoria Quântica dos Campos”, Editora da Universidade de São Paulo, 2015. [ISBN 978-85-314-1547-0]
- [23] O. W. A. Greenberg, “Remarks on a Challenge to the Relation between *CPT* and Lorentz Violation,” 1105.0927 [hep-ph] (2011).
- [24] O. W. Greenberg, “CPT violation implies violation of Lorentz invariance,” *Phys. Rev. Lett.* **89**, 231602 (2002).
- [25] M. A. Moreira, “O Modelo Padrão da Física de Partículas,” *Rev. Brasileira de Ensino de Física* **31**, 1306 (2009).
- [26] J. S. Schwinger, “The Theory of quantized fields. 1.,” *Phys. Rev.* **82**, 914 (1951).
- [27] G. L. Kane, “Physics beyond the standard model,” *Sci. Am.* **288N6**, 68-75 (2003).

- [28] J. L. Lopes, “forty years of the first attempt at the electroweak unification and of the prediction of the weak neutral boson Z_0 ,” *Braz. J. Phys.* **29**, 3 (1999).
- [29] A. J. Vargas, “Prospects for testing Lorentz and CPT symmetry with antiprotons,” *Phil. Trans. R. Soc. A* **376**, 2116 (2018).
- [30] J. P. Noordmans, J. de Vries and R. G. E. Timmermans, “Tests of Lorentz and CPT symmetry with hadrons and nuclei,” *Phys. Rev. C* **94**, 025502 (2016).
- [31] H. Muller, S. w. Chiow, S. Herrmann, S. Chu and K. Y. Chung, “Atom Interferometry tests of the isotropy of post-Newtonian gravity,” *Phys. Rev. Lett.* **100**, 031101 (2008).
- [32] M. A. Hohensee, S. Chu, A. Peters and H. Muller, “Equivalence Principle and Gravitational Redshift,” *Phys. Rev. Lett.* **106**, 151102 (2011).
- [33] P. Adamson *et al.* [MINOS], “Testing Lorentz Invariance and CPT Conservation with NuMI Neutrinos in the MINOS Near Detector,” *Phys. Rev. Lett.* **101**, 151601 (2008).
- [34] B. Greene, “O Universo Elegante,” Companhia das Letras, São Paulo, 2001.
- [35] V. A. Kostelecky, C. D. Lane and A. G. M. Pickering, “One loop renormalization of Lorentz violating electrodynamics,” *Phys. Rev. D* **65**, 056006 (2002).
- [36] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, “Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. 1.,” *Phys. Rev.* **122**, 345-358 (1961).

- [37] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, “Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. II.,” *Phys. Rev.* **124**, 246-254 (1961).
- [38] A. Dhar and S. R. Wadia, “Nambu—Jona-Lasinio model: an effective Lagrangian for quantum chromodynamics at intermediate length scales.,” *Physical Review Letters* **52**, 959 (1984).
- [39] D. J. Gross and A. Neveu, “Dynamical Symmetry Breaking in Asymptotically Free Field Theories,” *Phys. Rev. D* **10**, 3235 (1974).
- [40] W. E. Thirring, “A Soluble relativistic field theory?,” *Annals Phys.* **3**, 91-112 (1958).
- [41] M. Gomes, T. Mariz, J. R. Nascimento and A. J. da Silva, “Dynamical Lorentz and CPT symmetry breaking in a 4D four-fermion model,” *Phys. Rev. D* **77**, 105002 (2008).
- [42] T. Mariz, J. R. Nascimento and A. Y. Petrov, “Horava-Lifshitz four-fermion model revisited and dynamical symmetry breaking,” *Phys. Rev. D* **101**, 105008 (2020).
- [43] J. F. Assuncao, T. Mariz, J. R. Nascimento and A. Y. Petrov, “Dynamical Lorentz symmetry breaking in a 4D massless four-fermion model,” *Phys. Rev. D* **96**, 065021 (2017).
- [44] J. F. Assunção, T. Mariz, J. R. Nascimento and A. Y. Petrov, “Dynamical Lorentz symmetry breaking in a tensor bumblebee model,” *Phys. Rev. D* **100**, 085009 (2019).

- [45] J. Bjorken, “Emergent gauge bosons,” 0111196 [hep-th] (2001).
- [46] S. R. Coleman and E. J. Weinberg, “Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking,” *Phys. Rev. D* **7**, 1888-1910 (1973).
- [47] V. A. Kostelecky and R. Lehnert, “Stability, causality, and Lorentz and CPT violation,” *Phys. Rev. D* **63**, 065008 (2001).
- [48] O. Bertolami and J. Paramos, “The Flight of the bumblebee: Vacuum solutions of a gravity model with vector-induced spontaneous Lorentz symmetry breaking,” *Phys. Rev. D* **72**, 044001 (2005).
- [49] Matsubara, T., “A New Approach to Quantum-Statistical Mechanics”, *Prog. Theor. Phys.* **14**, 351 (1955).