Universidade Federal de Alagoas UFAL

Instituto de Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso

O Grupo das Tranças no Disco Unitário como Aplicação de Grupos Quocientes

Área: Geometria e Topologia / Subarea: Topologia Algébrica

Aluna: Gisele Lima de Amorim

Orientadora: Profa. Dra. Juliana Roberta Theodoro de Lima

Julho 2023

Gisele Lima de Amorim

O Grupo das Tranças no Disco Unitário como Aplicação de Grupos Quocientes

Trabalho de conclusão de curso apresentado à banca examinadora do curso de Matemática Licenciatura, da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Matemática. Orientadora: Profa. Dra. Juliana Roberta Theodoro de Lima

Maceió - AL

2023

Catalogação na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

A524g Amorim, Gisele Lima de.
O grupo de tranças no disco unitário como aplicações de grupos quocientes / Gisele Lima de Amorim. - 2023.
[57] f. : il.

Orientadora: Juliana Roberta Theodoro de Lima.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2023.

Bibliografia: f. [57].

1. Geometria e topologia. 2. Topologia algébrica. 3. Grupo quociente. 4. Teoria das tranças. I. Título.

CDU: 515.162

Folha de Aprovação

Gisele Lima de Amorim

O Grupo das Tranças no Disco Unitário como Aplicação de Grupos Quocientes

Trabalho de conclusão de curso apresentado à banca examinadora do curso de Matemática Licenciatura, da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Matemática. Orientadora: Profa. Dra. Juliana Roberta Theodoro de Lima

Banca Examinadora:

gov.br Documento assinado digitalmente
JULIANA ROBERTA THEODORO DE LIMA
Data: 04/09/2023 17:57:20-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Juliana Theodoro de Lima (Orientadora - Presidente da Banca)
IM-UFAL

gov.br Documento assinado digitalmente
EDIEL AZEVEDO GUERRA
Data: 23/08/2023 21:31:48-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Ediel de Azevedo Guerra
IM-UFAL

gov.br Documento assinado digitalmente
ANDRE LUIZ FLORES
Data: 27/08/2023 22:14:44-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. André Luis Flores
IM-UFAL

"Erram duplamente os filósofos quando julgam medir com unidades negativas a capacidade intelectual da mulher. A inteligência feminina (...) pode acolher, com incomparável perfeição, as belezas e os segredos da ciência."

Malba Tahan

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço à Deus e à Virgem Maria, por terem me guiado e protegido até aqui.

Em seguida agradeço aos meus pais, Alda e Jailton, pela minha vida, por cada palavra de incentivo, por todas as oportunidades que me deram, por cada momento juntos, por serem minha maior fonte de exemplo e inspiração e por nunca duvidarem do meu potencial: eu sou o produto de vocês, que sorte a minha!

Aos meus amados irmãos, Eduardo e Guilherme, por cuidarem tão bem de mim, por toda ajuda em todos os âmbitos da minha vida, por simplesmente estarem presentes ao longo dessa jornada (e em todas as outras).

À minha grande família, por todo o apoio e amor incondicional ao longo de todos esses anos. Em especial aos meus avós, Jaci e Aldo e Terezinha e Batista; à Betânia, por se orgulhar tanto de mim, e me ajudar diariamente em todas as pequenas batalhas diárias. Aos meus primos, Juan, Mateus, Felipe e Myllena, e minha cunhada Regina, vocês sabiam antes de mim que eu era capaz.

Aos meus amigos, que são muitos graças à Deus, e aqui preciso me prolongar. Luiz, Darliny e João, Arthur, Bruno, Igor e Mayckson que me acompanham desde a época da escola, que deixam a minha vida mais leve. Aos amigos do ônibus, em especial Amanda e Mayara que embarcaram juntas na "loucura" de fazer Matemática, todos vocês fizeram as mais de 3h de viagem diárias, durante quase 4 anos, ser muito melhor.

Aos meus presentes que o IM-UFAL me proporcionou, Weverson, Symon e Lucas, em inúmeras vezes em que eu pensei em desistir: vocês não só me impediram como me auxiliaram das melhores maneiras possíveis, vocês acreditaram em mim quando eu mais me questionava. Eu não tenho palavras que consigam expressar a minha gratidão por vocês. Obrigada por se fazerem presentes nos melhores momentos, mas principalmente nos piores.

Ao meu mais amado sobrinho, Renato, titia conseguiu por você, amor.

Agradeço também por ter tido a sorte de encontrar professores que além de grandes profissionais são grandes incentivadores, em especial minha orientadora, Profa. Dra. Juliana Theodoro, e aos professores Elisa Sena (in memorian), Rafael Lucena, José Carlos, Dione Lara e Vânio Fragoso.

Eu sou o resultado de cada um de vocês. Augusto Cury ao dizer "obrigado por tolerar minha ansiedade, compreender minhas loucuras e ter me amado com todos os meus defeitos", traduz o que sinto quando penso em como vocês foram essenciais, eu serei eternamente grata por tudo e, principalmente, por todos.

Resumo

O Grupo de Tranças (Braid Groups) no Disco Unitário pode ser visto de três definições equivalentes graças à diferentes estruturas na Matemática: como grupos quocientes ([L]) na Álgebra Abstrata ([H, M]), como grupo fundamental de espaços de configuração e como grupos de classes de mapas (Mapping Class Groups), em áreas mais específicas e densas da Topologia Algébrica ([B]).

Aqui, vamos apresentar o *Grupo de Tranças no Disco Unitário* ou *Grupo de Tranças de Artin*, como também é conhecido, como uma aplicação de uma construção via teoria de grupos quocientes: tomando um conjunto não vazio (das tranças sob n - fios), quocientando-o por uma relação de equivalência denominada *relação de movimentos elementares* (formalmente chamada de isotopia ambiente) e, munindo o conjunto quociente produzido com uma operação produto de tranças (concatenação), definine-se o grupo de tranças supracitado. Além disso, vamos fornecer a apresentação finitamente gerada desse grupo, como Artin, o pai da teoria, o fez em 1925, mas só ficou mundialmente conhecida quando foi traduzida para o inglês em 1946 ([A1, A2]). A abordagem dessa construção será feita de maneira geométrica, como é feito em [M], porque é um tipo de bordagem que alunos de graduação são capazes de compreender de uma forma mais aplicada, já que é necessário ferramentas matemáticas muito mais "robustas" para tal construção.

Por fim, vamos falar sobre um problema famoso na área de estudos de grupos de tranças, chamado de *Problema da Palavra*, que consiste em oferecer um algoritmo de decisão para quando uma determinada trança é equivalente à trança trivial ou não.

Esse trabalho foi resultado de anos de iniciação científicas combinadas com orientações de TCC entre a aluna e a orientadora.

Abstract

The Braid Group Over the Unit Disk (Braid Groups) has 3 different equivalent definitions thanks to Mathematical different structures: as quotient groups ([L]) over Abstract Algebra ([H, M]), as fundamental group of configuration spaces and also, as mapping class groups; this last two structures are from heavier tools over Algebraic Topology ([B]).

Here we present The Braid Group over the Unit Disk, or simply, Artin Braid Groups as is also known, as a application of a special construction under quotient groups: we consider a set (of braids on n-strands), quotient up to a equivalence relation of elementary movements (formally called ambient isotopy) and finally, equip this quotient set with a product operation (concatenation), giving rise to the mentioned group above. Furthermore, we discuss over the finitely presentation for The Braid Group Over the Unit Disk given by Artin in 1925. This presentation became known worldwide only in 1946, when the paper was translated to English in that time ([A1, A2]).

Finally, we talk about a famous problem on conjugacy theory, called *Word Problem*, which consists in providing an algorithm which decides when a given braid is equivalent to the trivial braid or not.

The approach we suggest here is given in a geometrical way as is done in [M], since is a manner to undergraduate students are able to understand, as much difficult the theory is.

This work was a result from years of scientific cooperation between the student and her advisor.

Sumário

Introdução **1**

1 Teoria de Grupos **3**

1.1 Grupos, Subgrupos e Classes Laterais 3

1.1.1 Grupos Quocientes e Homomorfismo de grupos 8

2 Grupos de Tranças no Disco Unitário **17**

2.1 Conjunto das Tranças em n-Cordas 18

2.1.1 Definição de Tranças 18

2.1.2 Movimento Elementar: uma relação de equivalência para tranças . . 21

2.1.3 Projeção de Tranças 25

2.1.4 Permutação Induzida nas Tranças: a trança pura 28

2.2 O Grupo das Tranças 31

2.3 Construção do Grupo das Tranças 31

2.3.1 Apresentação do Grupo de Tranças no Disco Unitário 36

2.3.2 A Integridade das Relações 40

2.3.3 Propriedades Elementares do Grupo de Tranças no Disco Unitário . 42

3 Invariantes de Tranças **49**

3.1 Expoentes de uma Trança 49

3.2 O Problema da Palavra 50

Introdução

Em 1925, Artin introduziu o estudo de tranças (braids), o qual se relaciona profundamente com o estudo de nós e enlaçamentos (links) [A1, A2]. Um resultado importante obtido por Artin foi o seu teorema da apresentação que fornece uma apresentação para o grupo das tranças no disco.

A teoria de tranças se desenvolveu em várias direções com os trabalhos de Alexander, Markov, Birman e outros. A teoria básica pode ser encontrada em [B].

Neste trabalho, o principal objetivo é estudar o grupo de tranças no disco unitário como a construção de um grupo quociente especial [L, M] e mostrar a apresentação do grupo das tranças no disco unitário, demonstrado por Artin em [A1, A2].

Para finalizar, vamos falar sobre um problema famoso na área de estudos de grupos de tranças, chamado de Problema da Palavra, que consiste em oferecer um algoritmo de decisão de quando uma determinada trança é equivalente à trança trivial ou não.

Capítulo

1

Teoria de Grupos

Esta seção aborda teoria de grupos: a construção de grupos quocientes até o Teorema dos Isomorfismos. Esse capítulo foi resultado de estudos dos livros [L, G].

1.1 Grupos, Subgrupos e Classes Laterais

Definição 1.1.1. *Seja G um conjunto não vazio, munido com uma operação fechada:*

$$\begin{aligned} . : G \times G &\to G \\ (a, b) &\to a \cdot b \end{aligned}$$

Chamamos de grupo*, o par $(G, \cdot)$, ou simplesmente G (quando não houver ambiguidade da operação) se ele satisfaz as seguintes condições abaixo:*

(1) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall\ a, b\ e\ c \in G$. *(Associatividade)*

(2) $\exists\ e \in G$, *tal que* $e \cdot a = a \cdot e, \forall\ a \in G$. *(Elemento neutro)*

(3) $\forall a \in G, \exists b\ \in G$ *tal que* $a \cdot b = b \cdot a = e$. *(Elemento inverso)*

Se G for um grupo e, além disso, satisfizer a seguinte condição:

[4] $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in G,$

então diremos que G é um grupo comutativo ou abeliano.

Exemplo 1.1.2. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, .)$, $(\mathbb{R}, +)$ *e* $(\mathbb{R}, .)$ *são exemplos de grupos.*

É sabido que os elementos neutro e inverso de um dado grupo G são únicos.

Definição 1.1.3. *Seja* $(G, \cdot)$ *um grupo. Um subconjunto não-vazio H de G é um subgrupo de G (denotado por* $H \leq G$*) se as seguintes condições, com as operações de G, são satisfeitas:*

(i) $h_1 \cdot h_2 \in H, \forall\ h_1, h_2 \in H.$

(ii) $h_1 \cdot (h_2 \cdot h_3) = (h_1 \cdot h_2) \cdot h_3, \forall\ h_1, h_2\ e\ h_3 \in H.$

(iii) $\forall\ h \in H, \exists\ e_H\ tal\ que\ e_H \cdot h = h \cdot e_H = h.$

(iv) $\forall\ h \in H, \exists\ h^{-1} \in\ H\ tal\ que\ h^{-1} \cdot h = h \cdot h^{-1} = e_H.$

Exemplo 1.1.4. *Seja* $m \in \mathbb{Z}$ *um inteiro fixado. Então,* $H = \mathbb{Z}m = \{rm; r \in \mathbb{Z}\}$ *é um subgrupo de* $(\mathbb{Z}, +)$*.*

Uma proposição muito conhecida na teoria, que caracteriza subgrupos é dada a seguir:

Proposição 1.1.5. *Seja G um grupo e H um subconjunto não vazio de G. As seguintes condições são satisfeitas:*

(i) *H é subgrupo de G.*

(ii) $H \neq \emptyset\ e\ \forall a, b \in H$*, tem-se* $ab^{-1} \in H.$

Ou seja, se $H \subseteq G$ for um grupo com a operação herdada de G. Além disso, pela unicidade do elemento neutro, $e_H = e$.

O objetivo aqui é construir classes laterais através de subgrupos H de um certo grupo arbitrário para a consrução de conjuntos e grupos quocientes.

Seja G um grupo e $H \subseteq G$ um subgrupo de G. Vamos definir a seguinte relação:

$$x, y \in G, x \equiv y\ mod H \Leftrightarrow xy^{-1} \in H. \tag{1.1.1}$$

Proposição 1.1.6. *A relação 1.1.1 é uma relação de equivalência.*

Demonstração. (i) $x \equiv x(modH),\ \forall x \in \mathbf{G}$ pois $e = x \cdot x^{-1} \in H$.

(ii) Se $x \equiv y(modH)$, então $y \equiv x(modH)$, pois se $xy^{-1} \in H$, então $(xy^{-1})^{-1} \in H$.

(iii) Se $x \equiv y(modH)$ e $y \equiv z(modH)$, então $x \equiv z(modH)$ pois se $xy^{-1} \in H$ e $yz^{-1} \in H$, então $(xy^{-1})(yz^{-1}) \in H$.

□

Consideremos a classe de equivalência

$$\overline{x} = \{y \in G; y \equiv x(modH)\}.$$

Assim $y \in \overline{x} \Leftrightarrow y \equiv x(modH) \Leftrightarrow yx^{-1} = h \in H$, para algum $h \in H \Leftrightarrow y = hx$, para algum $h \in H$. Se denotarmos $Hx = \{hx; h \in H\}$ então temos que $\overline{x} = Hx$, que é chamada de *classe lateral (à direita) de H em G.*

De forma análoga, definimos a classe lateral (à esquerda) de H em G: $\overline{x} = xH$.

É sabido que a quantidade de classes laterais à direita de H em G é a mesma que a quantidade de classes laterais à esquerda de H em G.

Representaremos o *conjunto quociente* $\{\overline{x}; x \in G\}$ por $\frac{G}{H}$, isto é,

$$\frac{G}{H} = \{Hx : x \in G\},$$

é o conjunto de todas as classes de equivalênica à direita (respct. à esquerda) de H em G.

Suponhamos que $\dfrac{G}{H}$ possui exatamente n classes laterais, assim

$$\frac{G}{H} = \{Hx_1, Hx_2, \cdots, Hx_n\}$$

onde $x_1, \cdots, x_n \in G$.

Como $\{Hx_1, \cdots, Hx_n\}$ é uma partição de G, temos:

$$\begin{cases} Hx_i \cap Hx_j = \emptyset, i \neq j \\ G = Hx_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} Hx_n. \end{cases}$$

Se X é um conjunto finito representaremos por $|X|$ o número de elementos de X. Se G é um grupo finito, definimos a *ordem de* G como sendo o número $|G|$ de elementos de G.

Agora, provaremos um teorema clássico da teoria que trata da relação entre ordem do grupo e da ordem dos seus subgrupos.

Teorema 1.1.7 (Lagrange)**.** *Se G é um grupo finito e H é um subgrupo de G, então $|H|$ divide $|G|$.*

Demonstração. Retomando a relação de equivalência dada em 1.1.1 e sendo G um grupo finito segue imediatamente que o conjunto $\frac{G}{H}$ das classes laterais (à direita) de G, é finito. Digamos que

$$\begin{cases} |\frac{G}{H}| = n \\ \frac{G}{H} = \{Hx_1, \cdots, Hx_n\} \end{cases}$$

Assim, $Hx_1 \dot{\cup} Hx_2 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} Hx_n$, e portanto segue que

$$|G| = |Hx_1| + |Hx_2| + \ldots + |Hx_n|.$$

Afirmamos agora que $|G| = n|H|$ (o que demonstra o toerema). De fato, basta mostrar que $|Hx_i| = |H|, \forall i, 1 \leq i \leq n$. Considere a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \psi : H &\to Hx_i \\ h &\mapsto hx_i, \ 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Observe que ψ é sobrejetiva pela própria construção. Além disso:

$\psi(h) = \psi(h') \Rightarrow hx_1 = h'x_1 \Rightarrow h = h'$, ou seja, ψ é bijetiva e portanto $|H| = |Hx_i|$ qualquer que seja $i, 1 \leq i \leq n$, como queríamos demonstrar.

□

Dado um grupo G, definimos a seguinte relação em G:

$$x, y \in G, x \underset{G}{\sim} y \Leftrightarrow \exists \ g \in G \ \ tal \ \ que \ \ y = g^{-1}xg. \tag{1.1.2}$$

Quando x e y a relação 1.1.2, dizemos que y é *conjugado de* x e vice-versa.

Proposição 1.1.8. *A relação* 1.1.2 acima é uma relação de equivalência.

Demonstração. Devemos mostrar que a relação satisfaz as três condições: reflexiva, simétrica e transitiva. De fato:

(i) $x \underset{G}{\sim} x \ \forall\ x \in G,$ pois $x = e^{-1}xe \ \forall\ x \in G.$

(ii) Se $x \underset{G}{\sim} y,$ então $y \underset{G}{\sim} x.$ Se $x \underset{G}{\sim} y,\ \exists\ g \in G$ tal que $y = g^{-1}xg.$ Assim, se $u = g^{-1},$ temos $x = u^{-1}yu,$ isto é, $y \underset{G}{\sim} x.$

(iii) Se $x \underset{G}{\sim} y$ e $y \underset{G}{\sim} z$ então $x \underset{G}{\sim} z.$ De fato, se $y = g^{-1}xg$ e $z = h^{-1}yh,$ onde $g, h \in H,$ temos, $z = u^{-1}xu, u = gh.$

□

Se $x \underset{G}{\sim} y$ dizemos que x e y são elementos conjugados em G. Se denotarmos $g^{-1}xg = x^g,$ são válidas as seguintes propriedades:

(a) $x^e = x \ \ \forall\ x \in G.$

(b) $y = x^g \Rightarrow x = y^{g^{-1}} \ \ \forall\ x, y, g \in G.$

(c) $(x^g)^h = x^{(hg)} \ \ \forall\ x, g, h \in G.$

As demonstrações das propriedades acima são diretas da definição e deixadas a cargo do leitor.

A classe $\overline{x} = \{y : x \underset{G}{\sim} y\} = \{x^g : g \in G\}$ é chamada *classe de conjugação* (em G) determinada pelo elemento $x \in G.$ Denotaremos a classe $\overline{x}$ por $C_x.$

Se G é um grupo finito e existem n classes de conjugação (em G) com representantes $x_1, x_2, \ldots, x_n,$ então

$$G = C_{x_1} \dot{\cup} C_{x_2} \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} C_{x_n},$$

e assim, chegamos à chamada equação de classes:

$$|G| = |C_{x_1}| + |C_{x_2}| + \ldots + |C_{x_n}|.$$

Observe:

$$x \in Z(G) \Leftrightarrow C_x = x,$$

onde $Z(G)$ é o centro de G. Assim, a equação de classes torna-se:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x_i \notin Z(G)} |C_{x_i}|$$

1.1.1 Grupos Quocientes e Homomorfismo de grupos

Agora, vamos introduzir a noção de subgrupos normais (ou invariantes) e grupos quocientes.

Sejam G um grupo e $H \leq G$. Se $g \in G$, definimos a função ψ_g, chamada função conjugação pelo elemento $g \in G$, por:

$$\begin{aligned} \psi_g : G &\to G \\ x &\mapsto \psi_g(x) = x^g = g^{-1}xg. \end{aligned}$$

Observe que $\psi_g(H) = \{\psi_g(h) : h \in H\} = \{h^g = g^{-1}hg : h \in H\}$, que denotaremos por H^g ou $g^{-1}Hg$. Afirmamos que H^g é também um subgrupo de G. De fato, pela Proposição 1.1.5:

(i) $e = e^g \in H^g$.

(ii) $h_1^g, h_2^g \in H^g \Rightarrow h_1^g \cdot h_2^g = (h_1h_2)^g \in H^g$.

(iii) $h^g \in H^g \Rightarrow (h^g)^{-1} = (h^{-1})^g \in H^g$.

Logo, a função conjugação transforma subgrupos de G em subgrupos de G.

Dizemos que um subgrupo $H \leq G$ é normal (ou invariante) em G se

$$\psi_g(H) = H^g \subseteq H \ \forall \ g \in G.$$

É interessante observar que

$$H^g \subseteq H, \forall\ g \in G \Leftrightarrow H^g = H, \forall g \in G.$$

Se H é um subgrupo normal de G, denotaremos por $H \trianglelefteq G$.

Proposição 1.1.9. *Seja G um grupo. Então,*

(a) $N \trianglelefteq G \Leftrightarrow Ng = gN, \forall g \in G$ *onde* $gN = \{gn : n \in N\}$, *é uma classe lateral (à esquerda) de N em G.*

(b) $N_1, N_2 \trianglelefteq G \Rightarrow N_1 \cap N_2 \trianglelefteq G$.

(c) $H \leq G$ *e* $N \trianglelefteq G \Rightarrow HN = \{hn : h \in H, n \in N\}$ *é subgrupo de G.*

(d) $N_1 \trianglelefteq G, N_2 \trianglelefteq G \Rightarrow N_1N_2 \leq G$.

(e) $H \leq G, N \trianglelefteq G \Rightarrow H \cap N \trianglelefteq H$.

Demonstração. Mostremos a validade de cada item a seguir:

(a) Nesse item, basta observar que $N^g = g^{-1}Ng = N \Leftrightarrow Ng = gN, \forall\ g \in G$.

(b) Se $x \in N_1 \cap N_2$ então, $x \in N_1$ e $x \in N_2$. Logo, dado $g \in G$, $x^g \in N_1^g = N_1$ e $x^g \in N_2^g = N_2$, ou seja, $x \in N_1 \cap N_2$. Portanto, $(N_1 \cap N_2)^g = N_1 \cap N_2, \forall g \in G$.

(c) Seja $H \leq G$ e $N \trianglelefteq G$. Vamos provar que $L = HN = \{hn : h \in H, n \in N\}$ é um subgrupo de G. De fato, utilizando a Proposição 1.1.5:

(i) $e = e \cdot e \in HN$, já que H e N são subgrupos de G.

(ii) Dados, $h_1n_1, h_2n_2 \in L$, então:

$$\begin{aligned}(h_1n_1)(h_2n_2) &= h_1(h_2h_2^{-1})(n_1h_2)n_2 \\ &= (h_1h_2)(h_2^{-1}n_1h_2)n_2 \\ &= (h_1h_2)((n_1)^{h_2} \cdot n_2),\end{aligned}$$

e denotando por $h = h_1h_2, n = n_1^{h_2}n_2 \in H$, $n_1^{h_2} \in N^{h_2} = N$ e $n = n_1^{h_2}n_2 \in N$, tem-se:

$$(h_1n_1)(h_2n_2) = hn \in L = HN.$$

(iii) Dado $x = hn \in L$, para algum $h \in H$, para algum $n \in N$, tem-se $x^{-1} = n^{-1}h^{-1} = h^{-1}(hn^{-1}h^{-1})$. Além disso, $h^{-1} \in H$ e

$$h \cdot n^{-1} \cdot h^{-1} \in N,$$

pois N é subgrupo normal de G. Portanto $x^{-1} \in L = HN$, e isto demonstra o item (c).

(d) Basta observar que, $\forall g \in G$, tem-se:

$$\begin{aligned}(N_1N_2)^g &= g^{-1}(N_1N_2)g \\ &= (g^{-1}N_1g)(g^{-1}N_2g) \\ &= N_1^gN_2^g,\end{aligned}$$

e como $N_1^g = N_1, N_2^g = N_2, \forall g \in G$, segue que $(N_1N_2)^g = N_1N_2, \forall g \in G$.

(e) Seja $x \in H \cap N$ e $h \in H$,. Então $x \in N$ e $x^h \in N^h = N$. Como $x, h \in H$, segue imediatamente que $x^h \in H \cap N, \forall\ h \in H$ e isto demonstra o item (e).

□

A partir daqui, vamos nos concentrar na teoria para a construção de conjuntos quocientes com estrutura de grupo, ou seja, para que tenhamos *grupos quocientes*.

Definição 1.1.10. *Sejam G um grupo e N um subgrupo normal em G. Sabemos que, $x, y \in G, x \equiv y(modN) \Leftrightarrow xy^{-1} \in N$ define uma relação de equivalência em G e $\frac{G}{N} = \{\bar{g} : g \in G\}$ é o conjunto quociente de G por esta relação de equivalência onde $\bar{g} = Ng = \{ng : n \in N\}$ é a classe de equivalência módulo N tendo g como representante.*

Sendo $N \trianglelefteq G$, vamos agora introduzir de modo natural uma operação no conjunto de classes $\frac{G}{N}$, de modo que $\frac{G}{N}$ seja um grupo com essa operação. Este grupo receberá o nome de *grupo quociente de G por N*.

Proposição 1.1.11. *Seja G um grupo e $N \trianglelefteq G$. Então, $\forall\ x, y \in G$,*

$$\begin{aligned} \frac{G}{N} \times \frac{G}{N} &\to \frac{G}{N} \\ (\overline{x}, \overline{y}) &\mapsto \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{xy} \end{aligned}$$

define uma operação no conjunto das classes $\frac{G}{N}$ e $\frac{G}{N}$ é um grupo com essa operação.

Demonstração. Para demonstrarmos que $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{xy}$ define uma operação em $\frac{G}{N}$, temos que provar que a definição acima não depende da escolha dos representantes das classes. De fato, se $\overline{x} = \overline{a}$ *e* $\overline{y} = \overline{b}$, provaremos que $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{a} \cdot \overline{b}$, isto é, $\overline{x \cdot y} = \overline{a \cdot b}$.

Para isso, é suficiente provarmos que $Nxy = Nab$, ou ainda, $(xy) \cdot (ab)^{-1} \in N, yb^{-1} \in N$. Mas, $xy \cdot (ab)^{-1} = xyb^{-1}a^{-1}$. Além disso, $\overline{x} = \overline{a}, \overline{y} = \overline{b}$, nos diz que $xa^{-1} \in N, yb^{-1} \in N$.

Se $xa^{-1} = n_1 \in N, yb^{-1} = n_2 \in N$ então,

$$\begin{aligned} (xy)(ab)^{-1} &= x(n_2)a^{-1} \\ &= (n_1 a)(n_2)a^{-1} \\ &= n_1(an_2a^{-1}). \end{aligned}$$

Como $n_1 \in N$ e $an_2a^{-1} \in N^{a^{-1}} = N$, segue imediatamente que,

$$(xy)(ab)^{-1} \in N.$$

E, dessa forma, nossa definição não depende da escolha dos representantes.

Agora, sendo e a identidade do grupo G, temos:

(i) $\overline{e} = Ne = N$ é o elemento identidade de $\frac{G}{N}$ pois, $\overline{e} \cdot \overline{x} = \overline{e \cdot x} = \overline{x} = \overline{x \cdot e} = \overline{x} \cdot \overline{e}, \forall\ \overline{x} \in \frac{G}{N}$;

(ii) $\overline{x} \cdot (\overline{y} \cdot \overline{z}) = \overline{x} \cdot (\overline{y \cdot z}) = \overline{x \cdot (y \cdot z)} = \overline{(x \cdot y) \cdot z} = \overline{(x \cdot y)} \cdot \overline{z} = (\overline{x} \cdot \overline{y}) \cdot \overline{z}, \forall\ \overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \in \frac{G}{N}$;

(iii) Se $\overline{x} \in \frac{G}{N}$, então $\overline{x^{-1}} \cdot \overline{x} = \overline{x} \cdot \overline{x^{-1}} = \overline{e}$.

Assim, $\frac{G}{N}$ é um grupo com a operação definida pela regra

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}, \forall\ \overline{x}, \overline{y} \in \frac{G}{N}.$$

□

Proposição 1.1.12. *Seja G um grupo, $N \trianglelefteq G$ e $\dfrac{G}{N}$ o grupo quociente de G por N. Então,*

$$\begin{aligned} \pi : G &\to \overline{G} \\ x &\mapsto \pi(x) = \overline{x}, \end{aligned}$$

é uma função sobrejetiva denominada projeção canônica, tal que:

(a) $\pi(xy) = \pi(x) \cdot \pi(y), \forall\ x, y \in G$.

(b) $N = \{x \in G : \pi(x) = \overline{e}\}$, *onde e é a identidade de G e $\overline{e}$ é a identidade de $\overline{G}$.*

Demonstração. (a) $\pi(xy) = \overline{xy} = \overline{x} \cdot \overline{y} = \pi(x) \cdot \pi(y),\ \forall\ x, y \in G$.

(b) $\pi(x) = \overline{e} \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{e} \Leftrightarrow x \in N$, e isto demonstra o item (b).

□

Agora vamos definir a noção de homomorfismo de grupos.

Definição 1.1.13. *Sejam G e G' grupos e $\psi : G \to G'$ uma aplicação de G em G'. Dizemos que ψ é um* homorfismo, *se $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y), \forall\ x, y \in G$.*

Observe que a projeção canônica $\pi : G \to \frac{G}{N}$ definida na Proposição 1.1.12, é um homomorfismo de G sobre $\frac{G}{N}$.

Se o homomorfismo $\psi : G \to G'$ for bijetivo, dizemos que ψ é um *isomorfismo*. Nesse caso, dizemos que G é *isomorfo* a G' e denotamos por $G \simeq G'$.

Um isomorfismo de um grupo G nele mesmo, ou seja, $\psi : G \to G$ é dito um *automorfismo* de G. Além disso, o conjunto de automorfismos de G é denotado $AutG$:

$$AutG = \{\psi : G \to G; \psi \text{ é isomorfismo}\}.$$

As funções $\psi_g : G \to G$ conjugação pelos elementos $g \in G$ são exemplos de automorfismos de G, chamados *automorfismos internos* de G e o conjunto dos automorfismos de G é denotado por Inn G:

$$\begin{aligned} \psi_g : G &\to G \\ x &\mapsto \psi_g(x) = gxg^{-1} \end{aligned}$$

Proposição 1.1.14. *Se G é um grupo e $f_1, f_2 \in AutG$, então:*

(a) $f_1 \circ f_2 \in AutG$*(composição de automorfismos é um automorfismo);*

(b) $f_1^{-1} \in AutG$*, onde f_1^{-1} é a função inversa de f_1.*

Demonstração. (a)

$$\begin{aligned} (f_1 \circ f_2)(xy) &= f_1(f_2(xy)) \\ &= f_1(f_2(x) \cdot f_2(y)) \\ &= f_1(f_2(x)) \cdot f_1(f_2(y)) \\ &= (f_1 \circ f_2)(x)) \cdot (f_1 \circ f_2(y)), \forall x, y \in G, \end{aligned}$$

e como a composição $f_1 \circ f_2$ de funções bijetivas é também bijetiva, temos que $f_1 \circ f_2 \in AutG$.

(b) Se $f_1 \in AutG$, então $\forall x', y' \in G$, $\exists x, y \in G$ tais que $x' = f_1(x)$ e $y' = f_1(y)$. Logo, se $h = f_1^{-1}$ temos,

$$h(x'y') = h(f_1(x) \cdot f_1(y)) = h(f_1(xy)) = (h \circ f_1)(xy) = xy = h(x') \cdot h(y'),$$

e demonstra que $f_1^{-1} = h \in AutG$.

□

Corolário 1.1.15. *Se G é um grupo então $AutG$ é também um grupo com operação de composição de funções.*

Demonstração. Usando a Proposição 1.1.14 basta observar que $I_G : G \to G$, definida pela identidade de G é um automorfismo de G, e que a composição de funções é associativa. □

Proposição 1.1.16. *Se G é um grupo então $InnG$ é um subgrupo normal de $AutG$.*

Demonstração. Primeiramente, se $g_1, g_2 \in G$, então:

$$\psi_{g1} \circ \psi_{g2} = \psi_{g2g1},$$

pois:

$$\psi_{g2g1}(x) = (g_2g_1)^{-1}x(g_2g_1) = g_1^{-1}(g_2^{-1}xg_2)g_1, \forall x \in G.$$

Dessa forma, $InnG$ é um subconjunto fechado em relação à composição de funções. Como $\psi_e = I_e \in InnG$ e $(\psi_g)^{-1} = \psi_{g^{-1}} \in InnG, \forall g \in G$, segue imediatamente que $InnG$ é um subgrupo de G.

Agora, se $g \in G, \sigma \in AutG$ então:

$$(\sigma^{-1} \circ \psi_g \circ \sigma)(x) = \sigma^{-1}(g^{-1}\sigma(x)g) = (\sigma^{-1}(g))^{-1}x\sigma^{-1}(g) = \psi_{\sigma^{-1}(g)}(x), \forall x \in G.$$

ou seja, $\sigma^{-1}\psi_g\sigma \in InnG$, $\forall \sigma \in AutG$, $\forall g \in G$ e isto demonstra a proposição. □

Teorema 1.1.17 (Teorema dos Isomorfismos)**.** *Sejam G e G' grupos com identidade e e e', respectivamente. Além disso, seja $\psi : G \to G'$ um homorfismo entre grupos. Então,*

(a) *$Im\psi = \psi(G) = \{\psi(g) : g \in G\}$ é um subgrupo de G';*

(b) *$N(\psi) = \{g \in G : \psi(g) = e'\}$ é um subgrupo normal de G (chamado de núcleo de homomorfismo). Mais ainda, se ψ é injetiva, então $N(\psi) = \{e\}$;*

(c) $\dfrac{G}{N}(\psi) \simeq Im\psi.$

Demonstração. (a) Primeiramente,

(i) $e' = \psi(e) \in Im\psi$ pois $ee = e \Rightarrow \psi(e)\psi(e) \Rightarrow \psi(e) = e' \in Im\psi$, logo $Im\psi \neq \emptyset$.

(ii) $\psi(g_1), \psi(g_2) \in Im\psi \Rightarrow \psi(g_1) \cdot \psi(g_2)^{-1} = \psi(g_1 g_2^{-1}) \in Im\psi, \forall g \in G$ e isto demonstra o item (a), pela definição de subgrupo.

(b) (i) $e \in N(\psi)$ pois $\psi(e) = e'$.

(ii) $g_1, g_2 \in N(\psi) \Rightarrow \psi(g_1 g_2) = \psi(g_1) \cdot \psi(g_2) = e' \cdot e' = e' \Rightarrow g_1 g_2 \in N(\psi)$.

(iii) $g \in N(\psi) \Rightarrow \psi(g^{-1}) = \psi(g)^{-1} = (e')^{-1} = e' \Rightarrow g^{-1} \in N(\psi)$. Agora, se $n \in N(\psi)$ e $g \in G$ temos:

$$\begin{aligned} \psi(g^{-1}ng) &= \psi(g)^{-1}\psi(n)\psi(g) \\ &= \psi(g)^{-1}e'\psi(g) \\ &= e', \end{aligned}$$

ou seja, $g^{-1}ng \in N(\psi), \forall n \in N(\psi), \forall g \in G$. Dessa forma, segue que $N(\psi)$ é um subgrupo normal de G.

Agora, sejam $x, y \in G$. Temos:

$$\begin{aligned} \psi(x) = \psi(y) &\Leftrightarrow \psi(x)\psi(y)^{-1} = e' \\ &\Leftrightarrow \psi(xy^{-1}) = e' \\ &\Leftrightarrow xy^{-1} \in N(\psi), \end{aligned}$$

e, portanto, segue imediatamente o item (b) deste teorema.

(c) Seja $\dfrac{G}{N}$ e $N = N(\psi) \trianglelefteq G$. Vamos definir:

$$\begin{aligned} \overline{\psi} : \frac{G}{N} &\to Im(\psi) \\ \overline{g} &\mapsto \psi(g). \end{aligned}$$

Primeiramente $\overline{\psi}$ está bem definida pois,

$$\begin{aligned} &\overline{g} = \overline{h} \\ &\Rightarrow gh^{-1} \in N(\psi) \\ &\Rightarrow \psi(gh^{-1}) = e' \\ &\Rightarrow \psi(g) = \psi(h). \end{aligned}$$

Agora, $Im\overline{\psi} = Im\psi$ e, portanto, a função é sobrejetiva por construção.
Se $\overline{x}, \overline{y} \in \dfrac{G}{N}$ temos,

$$\overline{\psi}(\overline{x}\ \overline{y}) = \overline{\psi}(\overline{xy}) = \overline{\psi(xy)} = \overline{\psi(x)} \cdot \overline{\psi(y)} = \overline{\psi}(x) \cdot \overline{\psi}(y),$$

ou seja, ψ é um homomorfismo.

Mais ainda,

$$\begin{aligned} \overline{\psi}(\overline{x}) = e' &\Leftrightarrow \psi(x) = e' \\ &\Leftrightarrow x \in N \\ &\Leftrightarrow \overline{x} = \overline{e}. \end{aligned}$$

Daí segue que $N(\overline{\psi}) = \{\overline{e}\}$ e $\overline{\psi}$ é injetiva. Assim, $\overline{\psi}$ é um isomorfismo de $\dfrac{G}{N}$ sobre $Im(\psi)$ e, portanto, $\overline{G} \simeq Im\psi$, demonstrando o teorema.

□

Capítulo

2

Grupos de Tranças no Disco Unitário

Antes de começar a desenvolver a teoria das cordas com uma inclinação geométrica, é importante olhar alguns exemplos de contextos de tranças.

A trança é um objeto extremamente físico, por muitos séculos as tranças foram tecidas com cordas, cabelo e até mesmo massa. Para as pessoas, é fácil pensar numa imagem de uma trança.

Além de ser um objeto físico, as tranças também possuem um significado cultural. Por exemplo, entre Ucranianos, como parte das solenidades da ceia de véspera de natal, eles cozinham um pão trançado em formato de anel. Para os Africanos, as estruturas das variadas tranças de seus cabelos tem significado forte no seu contexto histórico.

Na natureza não é difícil encontrar exemplos de tranças. No entanto, não espere que os exemplos de tranças se limitam ao alcance do nosso planeta. Mas, era isso que se pensava antes das naves espaciais da NASA, Voyager 1, 2, enviar fotos dos anéis de Saturno. Nessas fotos, pôde-se ver que o F-anel dos anéis de Saturno eram trançados.

Indo de um extremo ao outro, devemos mencionar brevemente que usando um microscópio, sob certas circunstâncias, o DNA também foi observado ter uma trança de dois fios como estrutura.

Como nosso último exemplo, uma estrutura mais forte dentro da Matemática, temos os sistemas dinâmicos. Na Figura 2.1, temos um desenho de uma órbita periódica do terceiro período obtida de um específico sistema dinâmico encontrado, empiricamente e

em teoria. O ponto no centro da figura significa a intersecção dos z-eixo com o plano da página. Então, começando em P e movendo na direção mostrada, traçamos a órbita a partir da terceira rotação no z-eixo. À primeira vista, a órbita não parece com nenhum tipo de trança, mas sim com um nó, onde a trança é uma particularidade dessa teoria.

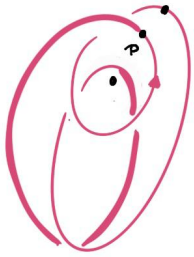

Figura 2.1: Sistema dinâmico como trança (nó).

2.1 Conjunto das Tranças em n-Cordas

As seções a seguir seguem a abordagem de [M]. As figuras foram desenhadas pelas próprias autoras.

2.1.1 Definição de Tranças

Dos exemplos vistos no início do Capítulo 2, no dia a dia, eventos comuns e práticos, o uso das tranças é variado e numeroso. No entanto, nosso propósito é olhar para as tranças de um ponto de vista matemático, e, portanto, fazer o uso de conceitos e ideias.

Então, o que significa dizer que uma trança possui propriedades matemáticas? Mais especificamente, uma trança é um tipo de objeto geométrico. Sendo assim, também devemos considerar a corda, o cabelo e a massa que tecem as tranças? De um ponto de vista matemático, a resposta é não. Para os nossos propósitos, não vemos diferenças entre um fino fio de cabelo ou um pedaço grosso de corda. O que vamos considerar, de fato, para diferenciar ou não uma trança, será dito mais a frente.

A análise de uma trança, como veremos, não é limitado a uma configuração geométrica. Técnicas de outras áreas matemáticas, principalmente a Álgebra e a Topologia Algébrica, são usadas para ter uma compreensão das propriedades exatas das tranças.

É justo dizer que o primeiro estudo matemático aprofundado sobre as propriedades das tranças foi feito pelo alemão Emil Artin. Embora seus trabalhos, publicados em 1925 e 1946 respectivamente, são fundamentais e base da teoria moderna das tranças, ele mesmo descreve diferentes abordagens sobre a configuração matemática de trança. O trabalho de Artin [A1, A2], é bastante intuitivo, com um quê bem geométrico, além do rigor algébrico. Nossa definição de trança segue diretamente do trabalho de Artin.

Definição 2.1.1. *Seja D uma unidade de cubo, então $\mathbb{D} = \{(x, y, z) | 0 \leq x, y, z \leq 1\}$. Na face de cima, topo, do cubo, tome n pontos, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, e projetados ortogonalmente dos A_i ´s, tome n pontos na face de baixo, $B_1, B_2, \ldots, B_n$.*

Na Figura 2.2, desenhamos um tipo dessa configuração:

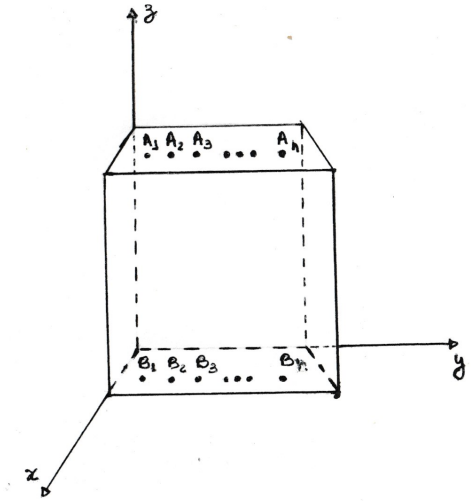

Figura 2.2: Cubo em perspectiva.

Por conveniência, tome $A_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{n+1}, 1), A_2 = (\frac{1}{2}, \frac{2}{n+2}, 1), \ldots, A_n = (\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}, 1)$; e também $B_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{n+1}, 0), B_2 = (\frac{1}{2}, \frac{2}{n+1}, 0), \ldots, B_n = (\frac{1}{2}, \frac{n}{n+1}, 0)$.

Definição 2.1.2 (Trança em n-arcos (ou n-cordas ou n-fios))**.** *Nas condições do cubo descrito na Definição 2.1.1, junte os n pontos $A_1, \ldots, A_n$ com $B_1, \ldots, B_n$ por meio de n segmentos ou arcos poligonais $d_1, d_2, \ldots, dn$. (Os segmentos devem ser poligonais, mas para melhor desenhar/visualizar serão feitas curvas suaves). No entanto, os arcos só podem ser atados de modo que sigam as seguintes três condições:*

(1) *$d_1, d_2, \ldots, d_n$ são mutualmente disjuntas.*

(2) *Cada d_i conecta A_j a um B_k, onde j e k podem ou não ser iguais, mas d_i não pode conectar A_j com A_k nem B_j a B_k.*

(3) *Cada plano E_s (chamado de plano nível), de modo que $z = s$ e $0 \leq s \leq 1$ (em outras palavras, paralelo a plano xy), intersecta cada arco d_i em um, e apenas um, ponto.*

Tal configuração de n arcos $d_1, \ldots, d_n$ é chamado uma n-trança, ou uma trança com n cordas. Como esperado, d_i é chamado de (trança) corda ou equivalentes. Notação: $\beta(t) = (d_1(t), d_2(t), \cdots, d_n(t))$, $t \in [0, 1]$.

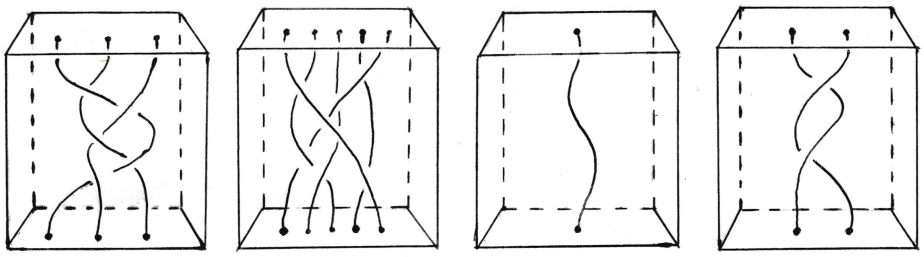

Figura 2.3: Exemplos de tranças.

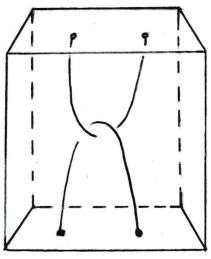

Figura 2.4: Não é uma trança.

Observação 2.1.3. *Note que uma trança $\beta = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ induz permutação nos seus fios, graças aos n pontos iniciais e finais que são fixados.*

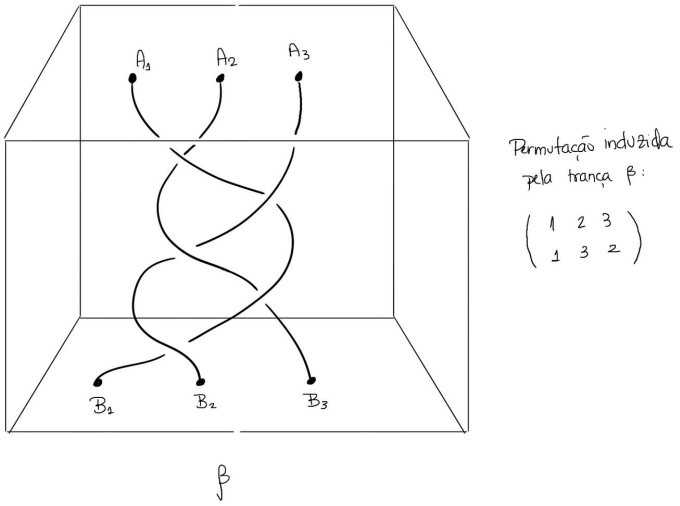

Figura 2.5: Permutação induzida pelos fios da trança β.

2.1.2 Movimento Elementar: uma relação de equivalência para tranças

De um ponto de vista matemático, é natural perguntar, quando e o que significa dizer que duas tranças são iguais ou equivalentes?

De modo a estabelecer um critério ou mais possivelmente critérios para equivalência, não estamos interessados em qual cor é a corda ou sua grossura. Matematicamente, como mencionado anteriormente, não nos interessa a composição da trança. O que nos importa é: de quais formas nós podemos mover as cordas, a fim de formarmos uma trança, sem alterar suas propriedades matemáticas iniciais?

Isso nos guia ao próximo problema, duas pessoas trançando a mesma trança não irão, dentre todas as possibilidades, seguir o mesmo padrão. Então, é possível que haja pequenas discrepâncias entre as duas tranças no final, por exemplo, uma parte pode estar ligeiramente mais alta que a outra. No entanto, essas discrepâncias podem ser facilmente retificadas, e então essas cordas podem ser ditas iguais.

Por outro lado, se uma trança é feita manufaturada por uma máquina é de se esperar que o processo seja quase constante. Então, obviamente, podemos dizer que tranças manufaturadas são equivalentes.

Intuitivamente, pelo o que foi dito acima, gostaríamos de dizer que duas tranças são

essencialmente a mesma ou equivalentes se suas diferenças podem ser removidas razoavelmente, de maneira simples, sendo que não não podemos cortar as cordas e nem desafixar os pontos iniciais e finais da mesma. Então, devemos começar transformando essa ideia de igualdade matematicamente rigorosa.

Precisamos encontrar ou um movimento ou, mais provavelmente, uma sequência finita de movimentos que irá sair de uma trança inicial sendo deformada até uma outra, satisfazendo algumas condições.

Por fim, vamos denotar o conjunto de todas n-tranças representadas pela Definição 2.1.2 por B_n. Em símbolos:

$$B_n = \{d = (\mathrm{d}_1, d_2, \cdots, d_n); \beta \text{ é uma trança de n-fios}\}$$

Seguindo, devemos definir um movimento, que chamaremos de movimento elementar, que será útil para a relação de equivalência especial que estamos buscando para nossa construção do grupo das tranças.

Definição 2.1.4 (Movimento Elementar)**.** *Suponha $\mathbb{D}$ como uma unidade de cubo e nesse cubo tem um número de cordas como definido na Definição 2.1.1. Tome AB como os extremos da corda d_i, para algum $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Seja C o ponto em $\mathbb{D}$, de modo que o $\triangle ABC$ (em D) não intersecta nenhuma outra corda e apenas encontra d_i em AB. Além disso, suponha:*

(1) *$AC \cup CB$ intersecta cada plano nível E_s, $0 \leq s \leq 1$ em no máximo um ponto. Se isso acontecer, então teremos a operação que chamaremos de Ω.*

(2) *Substituindo AB por dois extremos $AC \cup CB$ ou o inverso da operação Ω, a saber, se $AC \cup CB$ é uma parte da corda e o $\triangle ABC$ não intersecta nenhuma outra corda, então temos a operação que chamaremos de Ω^{-1}.*

(2') *Substitua $AC \cup BC$ pelo extremo AB. E teremos um movimento elementar numa trança.*

Definição 2.1.5 (Equivalência de Tranças)**.** *Uma n-trança β é dita equivalente (ou igual) a outra n-trança β', e denotada $\beta \sim \beta'$, se β pode transformar (deformar) em β' ao aplicar, começando com β, um número finito de movimentos elementares dentro do cubo $\mathbb{D}$.*

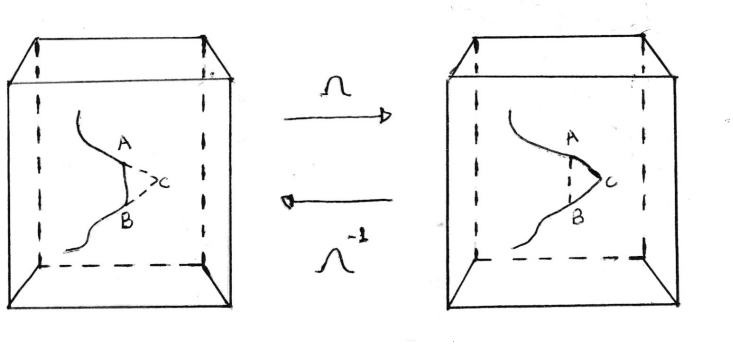

Figura 2.6: Movimento elementar Ω e seu movimento elementar inverso, Ω^{-1}

Geralmente, é conveniente pensar na Definição 2.1.5 da seguinte forma: β é equivalente ou igual a β', se existir a seguinte sequência finita:

$$\beta = \beta_0 \xrightarrow{\Omega \pm 1} \beta_1 \xrightarrow{\Omega \pm 1} \dots \xrightarrow{\Omega \pm 1} \beta_m = \beta',$$

onde para $i = 1, 2, \cdots, m$ a n-trança β_i é obtida da n-trança $\beta_{(i-1)}$ ao aplicar ou Ω ou Ω^{-1}.

De fato, essa noção de 'equivalência' pode ser demonstrada como uma relação de equivalência.

Proposição 2.1.6. *Sejam $\beta, \alpha \in B_n$. Nas condições anteriores, defina a seguinte relação:*

$\beta \sim \alpha \Leftrightarrow$ existe uma sequência finta de movimentos elementares que deforma β em α.

Então $\sim$ é uma relação de equivalência.

Demonstração. Devemos mostrar que $\sim$ é uma relação satisfazendo as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva. De fato:

(1) Reflexiva: $\beta \sim \beta$

Com um número finito de movimentos elementares (no caso zero).

(2) Simétrica:$\beta \sim \beta' \Rightarrow \beta' \sim \beta$.

Suponha que β é equivalente à β' por um número finito de movimentos elementares,

$\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_m$ e seus movimentos elementares inversos, de modo que:

$$\beta = \beta_0 \xrightarrow{\Omega_1} \beta_1 \xrightarrow{\Omega_2} \ldots \xrightarrow{\Omega_m} \beta_m = \beta'$$

Já temos $\beta \sim \beta$', agora basta pegarmos os movimentos elementares e seus inversos, da seguinte forma:

$$\beta' = {\beta_0}' \xrightarrow{\Omega_k} {\beta_1}' \xrightarrow{\Omega_{(k+1)}} \ldots \xrightarrow{\Omega_l} {\beta'}_l = \beta,$$

e assim temos $\beta' \sim \beta$.

(3) Transitiva: Se $\beta \sim \beta'$ e $\beta' \sim \beta'' \Rightarrow \beta \sim \beta''$.

Por definição, $\beta \sim \beta'$ e $\beta' \sim \beta''$ implicam em:

$$\beta = \beta_0 \xrightarrow{\Omega_1} \beta_1 \xrightarrow{\Omega_2} \ldots \xrightarrow{\Omega_m} \beta_m = \beta'$$

$$\beta' = {\beta_0}' \xrightarrow{\delta_1} {\beta_1}' \xrightarrow{\delta_2} \ldots \xrightarrow{\delta_p} {\beta'}_p = \beta''$$

Então:

$$\beta = \beta_0 \xrightarrow{\Omega_1} \beta_1 \xrightarrow{\Omega_2} \ldots \xrightarrow{\Omega_m} \beta_m = \beta' = {\beta_0}' \xrightarrow{\delta_1} {\beta_1}' \xrightarrow{\delta_2} \ldots \xrightarrow{\delta_p} {\beta'}_p = \beta''$$

□

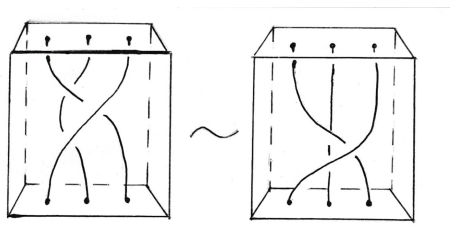

Figura 2.7: Tranças equivalentes - parte 1.

Nas condições estudadas aqui, não há uma ambiguidade matemática ao dizer que duas

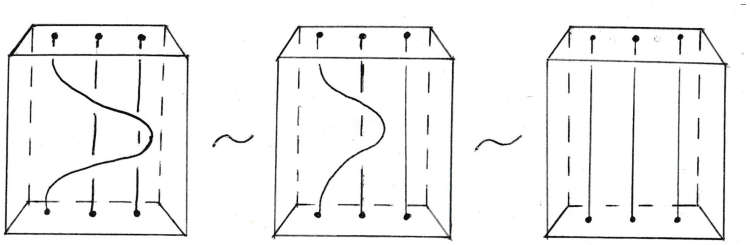

Figura 2.8: Tranças equivalentes - parte 2.

tranças, β e β', são equivalentes, e usarmos a notação $\beta \sim \beta'$. Sendo assim, devemos usar a notação $\beta \not\sim \beta'$ quando elas não forem equivalentes.

Intuitivamente, em alguma vizinhança de uma corda da trança, os movimentos elementares nos permitem puxar/esticar ou encolher a trança em uma outra configuração das cordas, que a partir das restrições da definição, também forma uma trança. Devemos nos ater ao fato de que nunca podemos cortar as cordas da trança nem mover os pontos iniciais e finais das mesmas.

No contexto matemático da teoria das tranças, se as tranças são equivalentes, então podemos tratá-las como sendo a mesma trança.Assim, não precisamos carregar a notação de classe de equialência e continuaremos usando a notação do conjunto B_n para o conjunto de n-tranças equivalentes. Precisamente, com a relação de equivalência garantida pela Proposição 2.1.6, tem-se o quociente $B_n = \frac{B_n}{\sim}$.

2.1.3 Projeção de Tranças

Até agora em nossos exemplos e diagramas, lidamos com n-tranças relativamente "simples" β num cubo $\mathbb{D}$. Conforme nos aprofundamos e desenvolvemos a teoria das tranças, devemos considerar tranças mais "complexas". No entanto, visualizar essas tranças em um cubo 3D em um pedaço de papel 2D tende a ficar mais cansativo, ao invés de melhorar nossa leitura, além do que pode ficar muito mais trabalhoso. Então, vamos descrever uma alternativa de representar visualmente uma n-trança no plano (projeção ds tranças no plano).

Primeiramente, vamos retratar o cubo $\mathbb{D}$ para trás no plano yz, ou seja a projeção, p, dada por $p(x, y, z) = (0, y, z)$. O efeito de p em β é mostrar um conjunto simples (poligonal) de curvas, $d_1, \ldots, d_n$, no plano yz. Para ficar mais claro, assuma que a própria página é o plano yz. Também, vamos denotar $p(\beta)$ simplesmente β, já que a nova representação não altera nenhuma propriedade da trança.

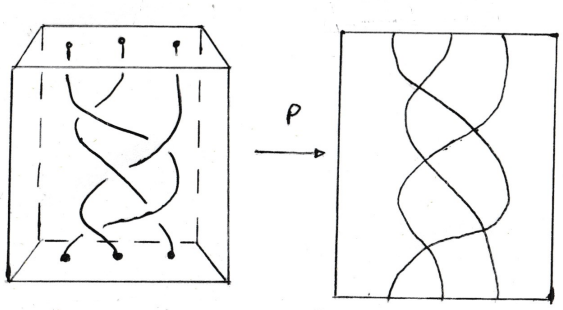

Figura 2.9: Projeção da trança no cubo para o plano.

Note que, na projeção geral da trança no cubo no plano da Figura 2.9 continuará representando o conjunto de curvas d_i, da trança em questão porém com muitos pontos de intersecção, contradizendo a definição de tranças dada na Definição 2.1.2. Dessa forma, ao aplicar vários movimentos elementares em β, vamos assumir que as curvas d_i ainda satisfazem as condições representando de maneira cuidadosa os cruzamentos dos fios.

Pela Figura 2.9, podemos observar que as projeções das tranças satisfazem as condições a seguir, mesmo nos seus casos mais gerais:

(1) $p(\beta)$ tem no máximo um número finito de pontos de intersecção.

(2) Se Q é um ponto de intersecção da projeção de β no plano, então a imagem inversa $p^{-1}(Q) \cap \beta$ de Q em β tem exatamente dois pontos. Então, no máximo dois pontos distintos em β são representados no mesmo ponto na projeção. Nesses casos, Q é dito um ponto duplo (ou intersecção de pontos) da projeção de β no plano.

(3) Um vértice de β nunca é representado por um ponto duplo na projeção de β no plano.

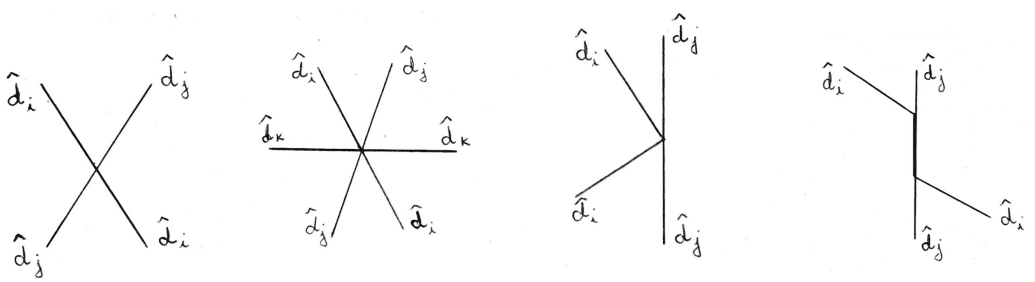

Figura 2.10: Alguns problemas ao projetar tranças do cubo para o plano.

A projeção β que satisfaça as condições acima é dita uma projeção regular de β. Queremos pensar em alguma maneira que contornemos esses problemas, lembrando sempre que as representações que damos a trança, não importando a dimensão (2 ou 3), deve sempre ser fiél as características das tranças em quaisquer definição existente.

Observação 2.1.7. *Como estamos considerando tranças equivalentes como sendo a mesma trança não há ambiguidade na nossa escolha de projeção.*

Seja β uma trança e considere sua projeção regular no plano. Essencialmente, essa projeção representa β com exceção dos pontos duplos. Nesses pontos duplos, no entanto, não é claro qual corda está na frente da outra. Mas, se mudarmos ligeiramente nossa percepção de projeção regular, então podemos de fato aproximar a projeção regular para que possamos visualizar e dizer qual corda passa por cima ou por baixo, e o mais importante: sanamos o problema de possíveis intersecções dos fios da mesma. Essa parte da visualização pode ser feita ao representar a corda que enlaça outra corta, como um pequeno corte perto de um ponto duplo de qualquer lado da corda. Embora, nós não cortamos de fato as cordas, apenas para a representação dos cruzamentos por cima ou por baixo dos fios, no diagrama. Essa propriedade nos dá a sensação de que a corda passe por cima ou por baixo, e usaremos esse esquema na Figura 2.11 a seguir:

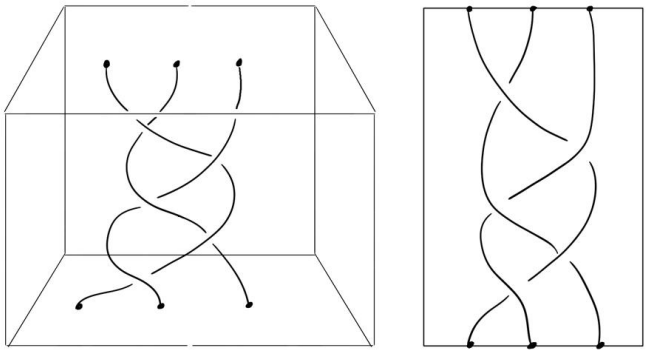

Figura 2.11: A projeção da trança no plano da Figura 2.9 com os cruzamentos explícitos.

Um diagrama é muito útil em ajudar a entender e investigar a natureza da trança ou de um conjunto de tranças. Desse ponto em diante não desenharemos uma distinção entre a trança β e um diagrama que a representa. A figura que desenharemos irá consistir, quase que exclusivamente, de diagramas regulares, que, dependendo do contexto, estará dentro de retângulos, ou mais simples, laçadas por um segmento de reta em cima e em baixo onde os pontos estarão.

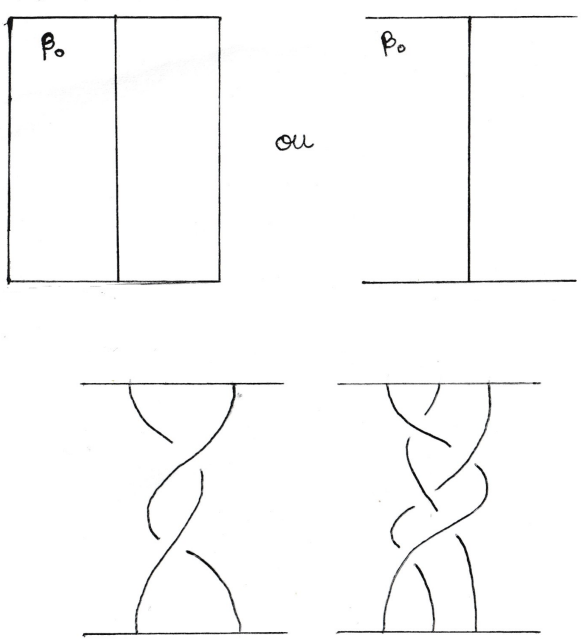

Figura 2.12: Mais exemplos de projeções fiéis às suas respectivas tranças no cubo.

2.1.4 Permutação Induzida nas Tranças: a trança pura

Sabemos que uma n-trança β não pode ser equivalente a uma m-trança α, com $n \neq m$. No entanto, isso não diz que duas n-tranças quaisquer são equivalentes.

Então, se suspeitarmos (por intuição matemática) que duas n-tranças não são equivalentes, como exatamente provamos de uma maneira rigorosa razoável?

O que seria útil para achar um tipo de invariante, ou seja, algo que possamos atribuir ou calcular para cada trança, e que se os "valores" forem diferentes, então concluímos que as tranças não são equivalentes.

Assim, tome f como sendo a aplicação dos conjuntos de todas as tranças B_n em algum objeto algébrico, por exemplo, um número, polinômio ou alguma outra quantidade matemática. Se f tem a seguinte propriedade:

$$\beta \sim \alpha \Rightarrow f(\beta) = f(\alpha)$$

Então, a aplicação f é dita um *invariante* de B_n ou simplesmente *invariante de tranças.*

Em geral, mesmo tradicionalmente, não esperamos que f seja verdade. De fato, temos vários exemplos onde $f(\beta) = f(\alpha)$ mas β e α não são equivalentes. Nessa conjuntura, o que é importante é que se $f(\beta)$ for diferente de $f(\alpha)$ então β e α não são equivalentes.

Usualmente, a permutação induzida pelos fios de uma uma dada trança, discutida na Observação 2.1.3 é chamada *permutação de trança* e denotada por $\pi(\beta)$ ou π_β.

Como esperado, a permutação de tranças é um dos invariantes de tranças menos complexas, mas muito útil.

Definição 2.1.8. *Uma n-trança $\beta = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ é chamada de n-trança pura se β induz a permutação identidade nos seus fios, ou seja, cada fio d_i começa em A_i e termina no mesmo ponto em seus respectivos planos, ou seja, B_i.*

Assim, se β é uma trança pura, então:

$$\pi(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n. \end{pmatrix}$$

Como essa é a permutação identidade, denotamos por (1). Então, uma n-trança pura é uma n-trança que para cada $i = 1, 2, \cdots, n$ a i-ésima corda sempre une A_i em B_i. O conceito de n-trança pura tem um papel fundamental no estudo das tranças.

Queremos mostrar que é possível definir um grupo de inteiros para cada n-trança. Tome β como n-trança e pegue duas cordas diferentes, a i-ésima corda d_i e a j-ésima corda d_j, digamos, com $i \neq j$. No diagrama D de β, d_i e d_j se cruzam em vários pontos. Sejam as grandezas $p(d_i, d_j)$ (e $n(d_i, d_j)$) que denotam o número de vezes que d_i cruza por baixo de d_j começando da esquerda (para a direita). Então o número $p(d_i, d_j) - n(d_i, d_j)$ é chamado de índice de cruzamento de d_i para d_j e denotado por $cr(d_i, d_j)$.

Em geral, $cr(d_i, d_j)$ não precisa ser igual a $cr(d_j, d_i)$, então $cr(d_i, d_j)$ não é simétrico por natureza. Tais grandezas são outros exemplos de invariantes de tranças.

Proposição 2.1.9. *Sendo as grandezas $p*(d_i, d_j)$ (e $n*(d_i, d_j)$) das condições anteriores, denotando o número de vezes que d_i cruza d_j da esquerda (pra direita). Então, para $i \neq j$,*

(1) $p * (d_i, d_j) = n(dj, di)$

(2) $n * (d_i, d_j) = p(dj, di)$

Demonstração. Para a prova, vide [M, Capítulo 1]. □

Proposição 2.1.10. *Tome β sendo uma n-trança pura. Então para a qualquer $i \neq j$, $cr(d_i, d_j) = cr(d_j, d_i)$. O inteiro $cr(d_i, d_j)(= cr(d_j, d_i))$ é chamado de índice de vinculação entre d_i e d_j, é denotado por $lk(d_i, d_j)$.*

Demonstração. Para a prova, vide [M, Capítulo 1]. □

Corolário 2.1.11. *Para qualquer n-trança pura, $lk(d_i, d_j) = lk(d_j, d_i)$, onde $1 \leq i, j \leq n$ e com $i \neq j$. Se as n-tranças puras β e β' são equivalentes, então o índice de cruzamento $cr(d_i, d_j)$ é igual para β e β'.*

Demonstração. Para a prova, vide [M, Capítulo 1]. □

Aqui, é relevante discutir sobre invariantes de tranças, já que abordaremos,mais a frente o *Problema da Palavra*, que é um invariante de trança que realmente consegue decidir quando uma trança é equivalente à trança trivial.

2.2 O Grupo das Tranças

Nas seções a seguir, vamos construir o Grupo de Tranças, via o conjunto quociente de B_n discutido nas seções anteriores. Para mais detalhes, [M].

Na tentativa de estabelecer uma teoria das tranças, a pergunta mais primitiva que podemos fazer é: Quantas tranças diferentes (não-equivalentes) existem?

Podemos rapidamente descartar a possibilidade de ter apenas um número finito de diferentes tranças. Podemos mostrar que a 1-trança, a 2-trança, ..., a n-trança, ... são mutualmente diferentes. No entanto, não parece plausível que todas as n-tranças sejam equivalentes, então devemos refinar a questão acima e perguntar: Quantas tranças diferentes existem para cada n?

Mesmo que essa nova questão seja mais refinada, a solução ainda é longe de ser fácil. De fato, para cada $n \geq 2, B_n$ é sempre infinito. No entanto, usando a permutação de tranças, para o momento tudo o que podemos mostrar é que o número de n-tranças distintas deve ser no mínimo $n!$ (desde que o grupo da permutações, a saber, S_n é tal que $|S_n| = n!$). Pelo o que queremos provar, isso é muito rústico e extremamente impreciso.

Na tentativa de entender como podemos mostrar que B_n para cada n tem um infinito número de n-tranças, vamos olhar para o mais simples caso não trivial, tomando $n = 2$. Toda 2-trança é equivalente à um dos 2 tipos de tranças a seguir:

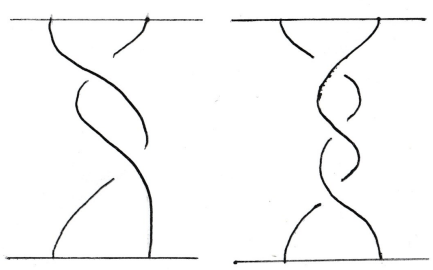

Figura 2.13: Geradores de B_2.

2.3 Construção do Grupo das Tranças

Primeiramente, gostaríamos de introduzir o conceito de grupo de tranças. O grupo de tranças também é conhecido como o Grupo de Tranças de Artin, já que foi Amil Artin quem fez a primeira investigação mais detalhada desse grupo em seus artigos de 1925 e

1947. Para detalhes de seus trabalhos, vide [A1, A2].

Definição 2.3.1 (Operação entre Tranças)**.** *Suponha β_1 e β_2 duas n-tranças em B_n. Devemos criar uma terceira n-trança, resultante de ambas, que vamos chamar de produto entre β_1 e β_2, e denotar por $\beta_1\beta_2$, de seguinte maneira: primeiramente, pegue os dois quadrados U_1 e U_2 os quais são as projeções fiéis de β_1 e β_2 no plano respectivamente, e "cole" (ou melhor una) a parte inferior de U_1 com a parte superior de U_2. Ao colar as pontas, assumimos que os respectivos pontos do pano inferior da trança inicial também são colados (ou unidos) com os pontos do plano superior da segunda trança. Depois, remova a linha de colagem desses pontos, o que nos dá agora uma nova trança, ainda em B_n, garantindo que tal operação é fechada em B_n. Essa nova n-trança é definida como o produto das n-tranças β_1 e β_2.*

Formalmente, essa operação é chamada de *concatenação*.

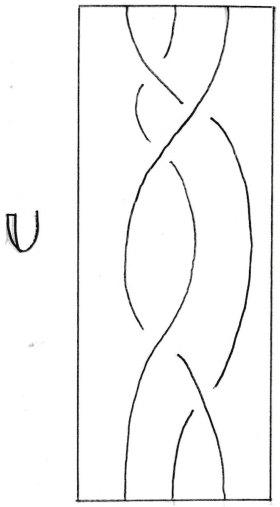

Figura 2.14: O produto entre duas tranças de 3-fios.

Proposição 2.3.2. *Suponha que β, β', $\overline{\beta}$ e $\overline{\beta'}$ são n-tranças, de modo que $\beta \sim \beta'$ e $\overline{\beta} \sim \overline{\beta'}$. Então, $\beta\overline{\beta} \sim \beta'\overline{\beta'}$.*

Demonstração. Se $\beta \sim \beta'$ então, pela definição, existe uma sequência finita

$$\beta = \beta_0 \xrightarrow{\Omega\pm1} \beta_1 \xrightarrow{\Omega\pm1} \ldots \xrightarrow{\Omega\pm1} \beta_m = \beta'.$$

Essa sequência, por sua vez, induz uma outra sequência:

$$\beta\overline{\beta} = \beta_0\overline{\beta} \xrightarrow{\Omega\pm1} \beta_1\overline{\beta} \xrightarrow{\Omega\pm1} \ldots \xrightarrow{\Omega\pm1} \beta_m\overline{\beta} = \beta'\overline{\beta}.$$

Portanto, temos que $\beta\overline{\beta} \sim \beta'\overline{\beta}$.

De maneira similar, como $\overline{\beta} \sim \overline{\beta'}$, então existe uma sequência finita de movimentos elementares,

$$\overline{\beta} = \overline{\beta_0} \xrightarrow{\Omega\pm1} \overline{\beta_1} \xrightarrow{\Omega\pm1} \ldots \xrightarrow{\Omega\pm1} \overline{\beta_k} = \overline{\beta'},$$

o que, por sua vez, induz a seguinte sequência:

$$\beta'\overline{\beta} = \beta'\overline{\beta_0} \xrightarrow{\Omega\pm1} \beta'\overline{\beta_1} \xrightarrow{\Omega\pm1} \ldots \xrightarrow{\Omega\pm1} \beta'\overline{\beta_k} = \beta'\overline{\beta'}.$$

Sendo assim, β'$\overline{\beta} \sim \beta$'$\overline{\beta}$'.

A transitividade da relação de equivalência garante que $\beta\overline{\beta}(\sim \beta'\overline{\beta}) \sim \beta'\overline{\beta'}$. □

A Proposição 2.3.2 garante a boa definição da operação entre tranças, já que independe da escolha dos representantes.

Proposição 2.3.3. *O produto de tranças é associativo, ou seja,* $(\beta_1\beta_2)\beta_3 \sim \beta_1(\beta_2\beta_3)$

Demonstração. A afirmação decorre diretamente de um diagrama de tranças geral. □

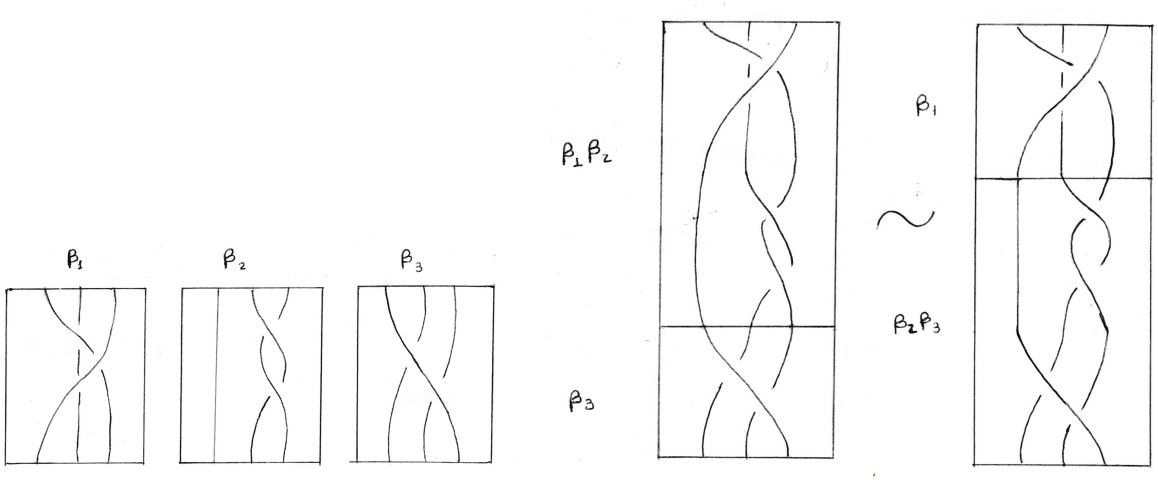

Figura 2.15: Exemplo de associatividade entre tranças.

É importante observar que o produto de duas tranças não é comutativo em geral, ou seja, $\beta_1\beta_2$ não é necessariamente equivalente à $\beta_2\beta_1$.

Observe ainda, na Figura 2.16 um exemplo de tranças onde a operação da comutatividade não é válida:

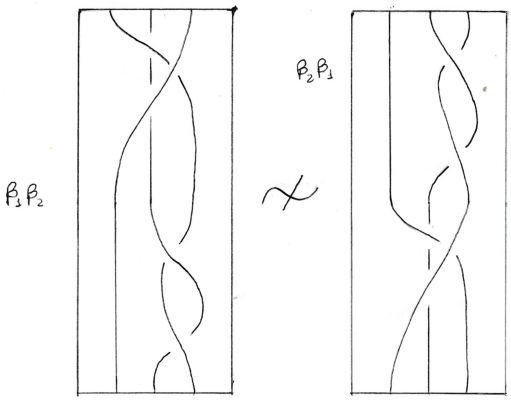

Figura 2.16: B_n não é comutativo.

Proposição 2.3.4. *Seja 1_n a n-trança definida por cada fio d_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ é um segmento de linha reta o ponto A_i ao ponto B_i. Então, para qualquer n-trança β, tem-se:*

$$\beta 1_n \sim \beta \ e \ \beta \sim \beta 1_n.$$

Essa trança é chamada de trança identidade *(ou n- trança trivial).*

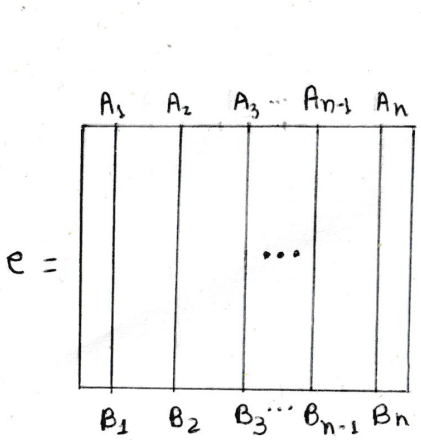

Figura 2.17: A trança 1_n.

Agora, dada uma n-trança β arbitrária, vamos construir uma nova n-trança $\overline{\beta}$ elemento inverso de β: imagine que o plano inferior de β funciona como um plano de reflexão horizontal de um espelho. A imagem espelhada de β, é exatamente, o seu elemento inverso, a saber, $\overline{\beta}$. Pela Figura 2.18, temos um exemplo, já que a concatenação com seu elemento inverso, é exatamente a n-trança identidade (tanto concatenando à esquerda quanto à direita). É fácil ver no exemplo a seguir, que $\beta\overline{\beta}$ é equivalente à $1_3 \in B_3$.

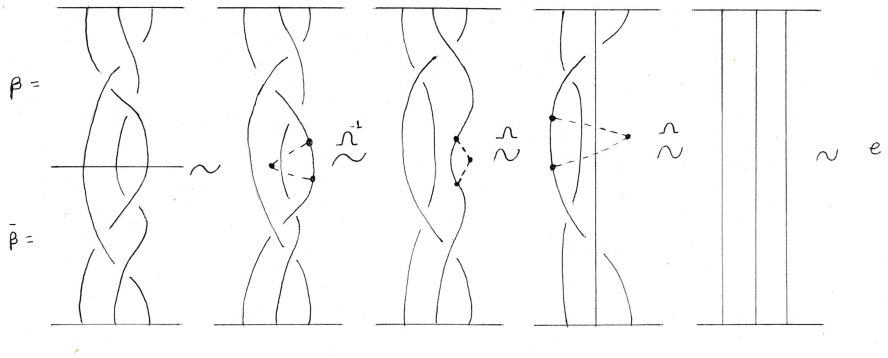

Figura 2.18: Concatenação de β pelo seu elemento inverso $\overline{\beta}$.

Isso nos dá a Proposição 2.3.5 a seguir:

Proposição 2.3.5. *Para cada n-trança, existe uma n-trança $\overline{\beta}$ de modo que*

$$\beta\overline{\beta} \sim 1_n \ e \ \overline{\beta}\beta \sim 1_n.$$

A n-trança $\beta\overline{\beta}$ é chamada de *elemento inverso* de β e é denotada por β^{-1}.

Observe agora que pelas Proposições 2.3.2, 2.3.4 e 2.3.5, B_n possui uma estrutura de grupo (quociente), com a relação de equivalência dada pela Proposição 2.1.6. Assim, temos o Teorema 2.3.6 a seguir:

Teorema 2.3.6. *O conjunto de classes de equivalência de n-tranças, B_n, forma um grupo. Esse grupo é chamado geralmente de* grupo das n-tranças no disco unitário *ou* grupo das n-tranças de Artin.

Demonstração. Já foi construída nessa seção. □

Observação 2.3.7. *A menção do grupo de tranças ser no disco unitário vem do fato de que a base do cubo $\mathbb{D}$ na construção de uma n-trança geométrica construída na Figura 2.2, é um disco unitário (homeomorfo a um disco unitário). Homeomorfismos não foram objetivos de estudos aqui, pois era necessário ferramentas mais pesadas de topologia*

algébrica. Mas pense que o quadrado pode ser deformado até formar um disco (alisando-se as bordas).

2.3.1 Apresentação do Grupo de Tranças no Disco Unitário

Entende-se por *apresentação* de um grupo por representá-lo (se possível) através de seus geradores e relações. Relações são equivalências não triviais que caracterizam certas propriedades do grupo, por exemplo: um grupo pode não ser comutativo, mas pode haver elementos que comutam entre si. Tais elementos em comutatividade é um exemplo de relação do grupo, entre outras relações. O grupo de tranças B_n será um exemplo contendo esses casos.

Um fato importante e totalmente relevante a se discutir é que Artin em 1925, obteve uma apresentação finitamente gerada para B_n, ou seja, Artin obteve uma apresentação com um número finito de geradores e relações. Nem todas as apresentações de um grupo arbitrário são finitamente geradas, e encontrar tal apresentação para um determinado grupo torna o grupo muito mais fácil de ser estudado, na busca de novas informações e propriedades. Para mais detalhes do trabalho feito por Artin, vide [A1, A2].

Vamos olhar a projeção fiél da trança de perto. É fácil ver que podemos dividir essa projeção, ou seja, por meio de planos de níveis intermediários, de modo que entre dois planos de níveis consecutivos, apenas duas cordas são trançadas, ou seja, cada plano intermediário considerado, tenha apenas um cruzamento entre dois fios consecutivos da trança, como o exemplo na Figura 2.19 a seguir:

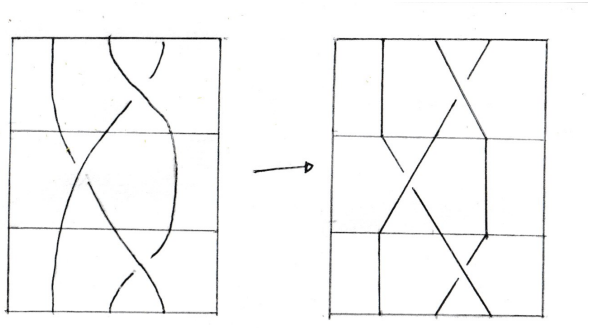

Figura 2.19: Cruzamentos entre fios consecutivos separados por planos intermediários.

A trança definida em cada plano intermediário que é definida por cruzamento entre fios consecutivos, é chamada de *n-trança elementar*, e elas serão as geradoras de qualquer n-trança em B_n por razão natural: qualquer n-trança $\beta \in B_n$ pode ser escrita como

produto de tranças elementares. Na Figura 2.19, temos o exemplo de uma 3-trança que é produto de 3 tranças elementares. Vamos definir tais tranças elementares de maneira mais formal:

Definição 2.3.8. *Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, definimos a n-trança elementar σ_i como sendo a trança que cruza por baixo o fio que sai do ponto A_i com o fio que sai do ponto A_{i+1} no plano superior da projeção da trança no plano e todos os outros fios que saem do ponto A_j são triviais, ou seja, segmentos de linha reta que chegam no ponto B_j, sem cruzar nenhum outro fio, para todo $j \neq i, i+1 \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Note que, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, a n-trança σ_i induz a permutação $\pi(\sigma_i) = (i \;\; i+1)$.

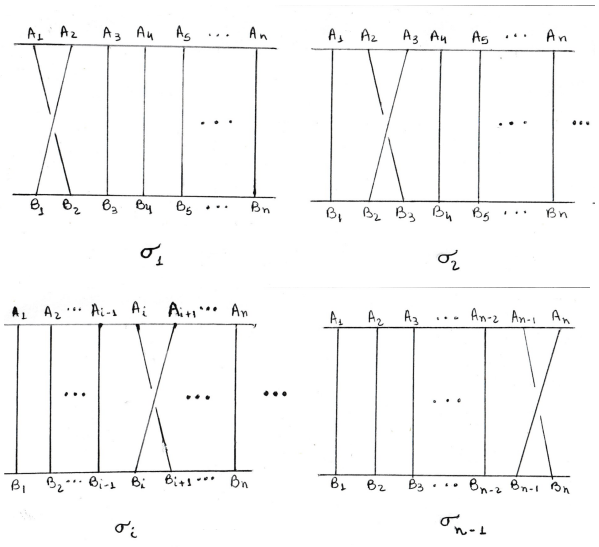

Figura 2.20: As tranças elementares $\sigma_i,\ i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Agora, é natural pensarmos em quem são as n-tranças que são os elementos inversos das n-tranças elementares $\sigma_i,\ i = 1, 2, \ldots, n-1$. Ora, se pensarmos na imagem das tranças elementares como reflexos do espelho na horizontal, as tranças elementares inversas, a saber, ${\sigma_i}^{-1},\ i = 1, 2, \ldots, n-1$ são as tranças que cruzam por **cima** o fio que sai do ponto A_i com o fio que sai do ponto A_{i+1} no plano superior da projeção da trança no plano e todos os outros fios que saem do ponto A_j são triviais, com $j \neq i, i+1$, como mostra a Figura 2.21:

Proposição 2.3.9. *Qualquer n-trança β em B_n pode ser escrito como o produto de elementos do conjunto $\{\sigma_i^{\pm 1},\ \ i = 1, 2, \cdots, n-1\}$, ou seja.*

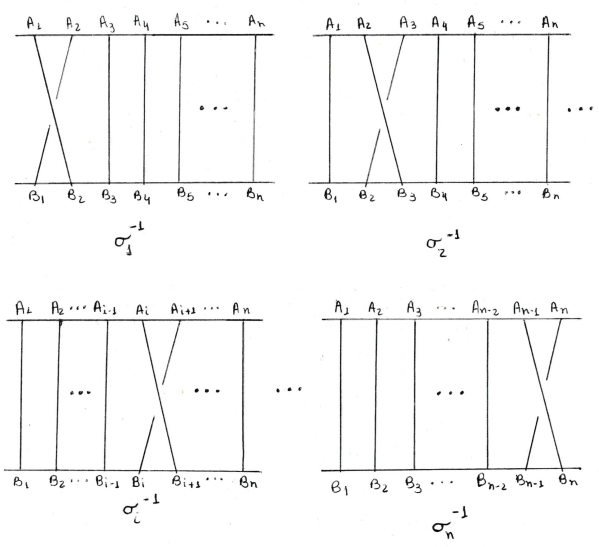

Figura 2.21: As tranças elementares inversas ${\sigma_i}^{-1},\ i = 1, 2, \ldots, n-1$.

$$\beta = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1}\sigma_{i_2}^{\varepsilon_2}\cdots\sigma_{i_k}^{\varepsilon_k},$$

onde $1 \leq i_1, i_2, \cdots, i_k \leq n-1$ *e* $\varepsilon_i = \pm 1$ *para* $i = 1, 2, \cdots, k$.

Demonstração. A ideia da prova resume-se em tomar a projeção fiél no plano de uma dada n-trança arbitrária β e separar os planos intermediários com apenas um único cruzamento de fios consecutivos cada um. Dessa forma, fica claro que β é um produto de σ_i´s e seus inversos (lembre do exemplo da Figura 2.19) □

Observação 2.3.10. *Vamos esclarecer a notação: primeiramente* σ_i^{+1} *será denotado por* σ_i *e* $\sigma_i^0 = 1_n$ *ou, simplesmente,* 1. *Por fim, denotaremos o produto de uma m-upla* $\sigma_i\sigma_i\cdots\sigma_i$ *(m vezes), por* σ_i^m. *E pela mesma lógica, denotaremos o produto da m-upla* σ_i^{-1}, *por* σ_i^{-m}.

Fica bastante claro que, pela Proposição 2.3.9, o conjunto $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}\}$ forma um conjunto finito de geradores do grupo B_n.

Teorema 2.3.11 (Artin´s Presentation Theorem)**.** [A1, A2, 1925,1946]

Para qualquer $n \geq 2$, *o Grupo de Tranças no Disco Unitário, a saber,* B_n, *admite a seguinte apresentação finitamente gerada de geradores e relações:*

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{c} \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1},\ \textit{para } i = 1, 2, \cdots, n-2 \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i,\ \textit{para } |i-j| \geq 2 \end{array} \right\rangle$$

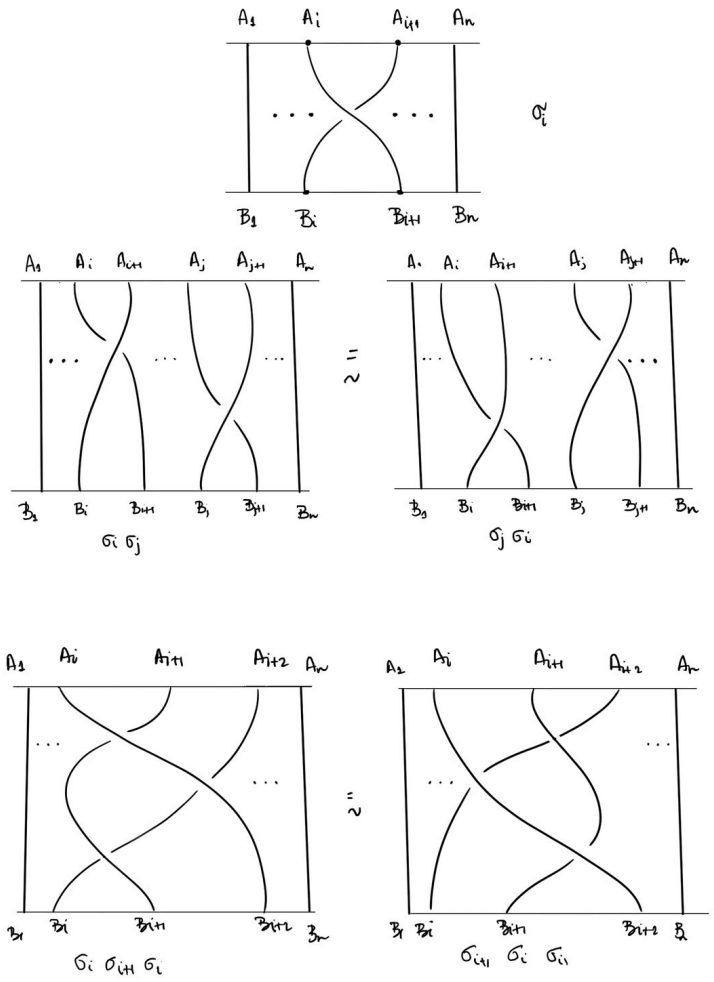

Figura 2.22: Representação geométrica dos geradores e relações em B_n.

Note que, para $n = 2$, $B_2 = \langle \sigma_1 | - \rangle$ é isomorfo ao Grupo dos Inteiros $\mathbb{Z}$ ($B_2 \simeq \mathbb{Z}$).

A seção a seguir, abordará com detalhes, a importância das relações apresentadas no Teorema 2.3.11.

2.3.2 A Integridade das Relações

Essa seção será voltada para observarmos que qualquer relação em B_n é consequência das duas relações dadas no Teorema 2.3.11. Sendo assim, também será uma idéia da prova para o mesmo. É relevante observar a importância do resultado desse teorema, feito por Artin, que descreve e comprova algebricamente, absolutamente todas as noções geométricas abordadas até agora.

Vamos começar definindo de maneira abstrata, em termos de apresentação, o seguinte grupo G,

$$\left\langle x_1, x_2, \cdots, x_{n-1} \,\middle|\, \begin{array}{c} x_i x_{i+1} x_i = x_{i+1} x_i x_{i+1} \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n-2 \\ x_i x_j = x_j x_i \text{ para } |i-j| \geq 2 \end{array} \right\rangle$$

Ainda que G possa ser extremamente semelhante a B_n, devemos banir qualquer forma de significados geométricos para os elementos de G e pensar nele estritamente como um grupo cujos elementos são totalmente abstratos. Assim, pela apresentação de G vista acima, as únicas relações em G são as mostradas acima ou consequências delas. Então, para provar que qualquer relação em B_n é consequência direta do que vimos no Teorema 2.3.11, precisamos mostrar que G e B_n são *isomorfos como grupos*, ou seja, que há uma a correspondência natural (que leva gerador em gerador):

$$\begin{aligned} &\varphi : G \to B_n \\ &\quad x_i \mapsto \varphi(x_i) = \sigma_i, \ i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad (\heartsuit) \end{aligned}$$

é, de fato, um isomorfismo de grupos.

Dessa forma, tal isomorfismo se estenderia para qualquer palavra abstrata

$$W = x_{i1}^{\epsilon 1} x_{i2}^{\epsilon 2} \cdots x_{ik}^{\epsilon k}$$

de G homomorficamente como:

$$\varphi(W) = \varphi(x_{i1}^{\epsilon 1} x_{i2}^{\epsilon 2} \cdots x_{ik}^{\epsilon k}) = \sigma_{i1}^{\epsilon 1} \sigma_{i2}^{\epsilon 2} \cdots \sigma_{ik}^{\epsilon k} \in B_n.$$

Vamos começar o esboço da prova: a correspondência natural φ dada em ($\heartsuit$) deve ser um isomorfismo de grupos entre G e B_n.

O primeiro passo é mostrar que a função φ é um homomorfismo de G em B_n, ou seja, leva elemento neutro de G no elemento neutro de B_n. De fato:

$$\begin{aligned}\varphi(x_k x_l x_k^{-1} x_l^{-1}) &= \sigma_k \sigma_l \sigma_k^{-1} \sigma_l^{-1} \\ &= 1_n, \text{ para } |k-l| \geq 2.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\varphi(x_i x_{i+1} x_i x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} x_{i+1}^{-1}) &= \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1} \\ &= 1_n, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n-2.\end{aligned}$$

Então, agora só falta mostrar que o homomorfismo φ é para e um para um,ou seja, injetor, já que a construção natural de φ já garante sua sobrejetividade.

Primeiramente, suponha que β é um elemento arbitrário de B_n. Pela Proposição 2.3.9, podemos escrever β da seguinte forma:

$$\sigma_{i1}^{\epsilon 1} \sigma_{i2}^{\epsilon 2} \cdots \sigma_{ik}^{\epsilon k},$$

onde $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_k \leq n-1$ e $\epsilon = \pm 1$.

Agora, considere o elemento

$$W = x_{i1}^{\epsilon 1} x_{i2}^{\epsilon 2} \cdots x_{ik}^{\epsilon k} \in G.$$

Pela definição ($\heartsuit$),

$$\varphi(W) = \varphi(x_{i1}^{\epsilon 1} x_{i2}^{\epsilon 2} \cdots x_{ik}^{\epsilon k}) = \sigma_{i1}^{\epsilon 1} \sigma_{i2}^{\epsilon 2} \cdots \sigma_{ik}^{\epsilon k} = \beta.$$

Agora, suponha que em G existam dois elementos g e g' de modo que $\varphi(g) = \varphi(g')$. Então, podemos escrever:

$$\begin{cases} g = x_{i1}^{\epsilon 1} x_{i2}^{\epsilon 2} \cdots x_{ik}^{\epsilon k} \\ g' = x_{j1}^{\eta 1} x_{j2}^{\eta 2} \ldots x_{ji}^{\eta i}. \end{cases}$$

Sejam $\beta = \sigma_{i1}^{\epsilon 1}\sigma_{i2}^{\epsilon 2}\cdots\sigma_{ik}^{\epsilon k}$ e $\beta' = \sigma_{j1}^{\eta 1}\sigma_{j2}^{\eta 2}\cdots\sigma_{ji}^{\eta i}$, com $\varphi(g) = \beta$ e $\varphi(g') = \beta'$. Como estamos assumindo $\varphi(g) = \varphi(g')$, temos que $\beta \sim \beta'$, ou seja, equivalentes em B_n. Portanto, devemos mostrar que $g = g'$ como elementos de G, ou, de maneira equivalente, $W = x_{i1}^{\epsilon 1}x_{i2}^{\epsilon 2}\cdots x_{ik}^{\epsilon k}$ e $W' = x_{j1}^{\eta 1}x_{j2}^{\eta 2}\ldots x_{ji}^{\eta i}$ podem ser conectados por uma sequência finita como

$$W = W_1 \to W_2 \to \ldots W_r = W',$$

onde para $i = 1, 2, \ldots, r-1$, tem-se que W_{i+1} é obtido através de W_i ou por inserção ou supressão de uma das relações iniciais conjugadas. Se denotarmos o conjunto de todas as relações iniciais por R então, temos que $W \underset{R}{\sim} W'$.

Então, como construirmos tal sequência? Sabemos que $\beta \sim \beta'$ garante uma sequência finita de movimentos elementares e seus inversos

$$\beta = \beta_1 \to \beta_2 \to \ldots \to \beta_s = \beta'.$$

Vamos mostrar que é possível construir uma sequência desse tipo: suponha que X_i para $i = 1, 2, \cdots, s-1, \in G$. Em particular, pegue $X_1 = W$ e $X_s = W$'. Então, se pudermos mostrar que X_i é equivalente à X_{i+1} relativo a R, para $i = 1, 2, \cdots, s-1$, seremos capazes de construir exatamente a sequência que buscamos,

$$W = X_1 \to X_2 \to \ldots \to X_s = W'$$

e, portanto, $W \underset{R}{\sim} W'$.

E é totalmente relevante lembrar que tudo isso é possível porque já temos a informação que ε é sobrejetora por construção em cada passo $\beta_i \to \beta_{i+1}$ dos movimentos elementares que tranformam β em β'. Dessa forma, conseguimos mostrar que $W = W'$.

2.3.3 Propriedades Elementares do Grupo de Tranças no Disco Unitário

Nessa seção, vamos discutir algumas propriedades do grupo B_n que são bem úteis e frequentemente usadas em teoria de tranças. Muitas vezes, faltará uma base teórica mais rígida de Topologia Algébrica, mas mesmo assim, vale a pena a discussão, pelas noções geométricas que nos fazem compreendê-las.

Proposição 2.3.12. *Para* $1 \leq i \leq n-1$,

$$(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^n\sigma_i = \sigma_i(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^n.$$

Portanto, $(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})^n$ *pertence ao centro de* B_n.

Demonstração. É ilustrada por meio de diagramas de tranças, mas a prova se faz utilizando-se das relações da apresentação do grupo das tranças, ou seja, descrevendo algebricamente. □

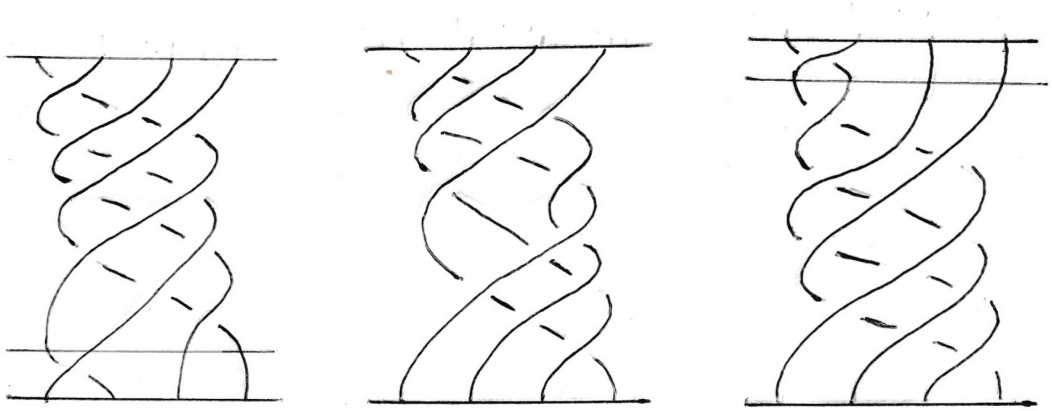

Figura 2.23: $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^4\sigma_1 = \sigma_1(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^4$.

Proposição 2.3.13. *Para* $1 \leq m \leq n$, *a aplicação*

$$\begin{aligned}\psi : B_m &\to B_n \\ \sigma_i &\mapsto \psi(\sigma_i) = \sigma_i, i = 1, 2, \ldots, m-1\end{aligned}$$

onde $\sigma_i \in B_m$ *é levado em* $\sigma_i \in B_n$, *completando-se com fios triviais a partir dos pontos iniciais* $A_i \in B_n$, *para* $i = m+1, m+2, \ldots, n$, *é um homomorfismo. Além disso,* B_m *é um subgrupo de* B_n.

Demonstração. É fácil ver que podemos escrever apresentações de B_m e B_n. Para mostrar que ψ é um homomorfismo, basta mostrar que cada relação de B_m também é válida em B_n, o que de toda forma sai diretamente da apresentação de B_m.

Suponha que $\psi(\beta) = 1_n$ para algum $\beta \in \mathbb{B}_m$, ou seja, existe uma m-trança β que, ao adicionarmos $n - m$ cordas, se torna um $n-$trança trivial, 1_n.

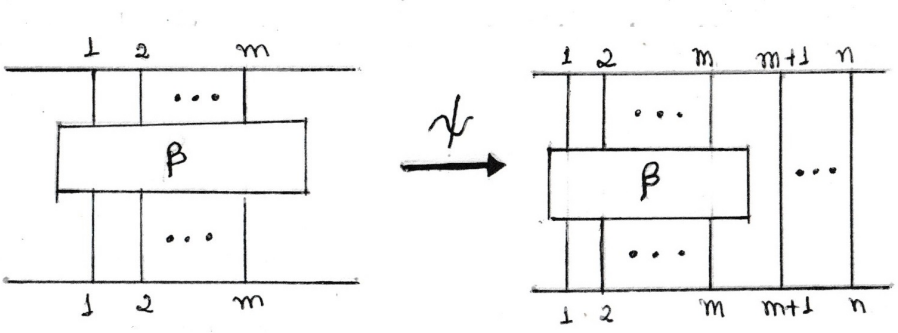

Figura 2.24: $\sigma_i \in B_m$ como elemento $\sigma_i \in B_n$, $n \geq m$.

Como é sabido, a igualdade $\psi(\beta) = 1_n$ implica na existência de uma sequência finita de movimentos elementares e seus inversos,

$$\psi(\beta) = \beta_0 \to \beta_1 \ldots \to \beta_k = 1_n,$$

Agora, se removermos as $n - m$ cordas finais, de cada β_i para termos $\hat{\beta}_i$, induzimos a seguinte sequência:

$$\beta = \hat{\beta}_0 \to \hat{\beta}_1 \ldots \to \hat{\beta}_k = 1_m,$$

onde cada $\hat{\beta}_{i+1}$ é obtido de $\hat{\beta}_i$ a partir dos movimentos elementares. Esse último acontece se ao aplicar o movimento elementar na l-ésima corda de β_i com $m < l \leq n$. Portanto, $\beta \sim 1_m$. □

Corolário 2.3.14. *Se β é uma $m-$trança que não é equivalente à trança trivial, então β sendo uma $n-$trança, com $n \geq m$, também não será equivalente à trança trivial. Mas precisamente, a $n-$trança $\tilde{\beta}$, obtida a partir de β ao adicionar $n-m$ cordas triviais, não é equivalente à trança trivial.*

Proposição 2.3.15. *Todo gerador σ_i com $1 \leq i \leq n-1$, de B_n possui ordem infinita. Ou seja, o subgrupo de B_n gerado por σ_i possui ordem infinita, ou, de maneira equivalente, para qualquer inteiro positivo $k, \sigma_i^k \neq 1$.*

Demonstração. Como $\mathbb{B}_2 = \langle \sigma_1 | - \rangle$, σ_1 é isomorfo à $\mathbb{Z}$, segue que $\mathbb{B}_2$ não tem ordem finita, portanto $|\sigma_1| = \infty$.

Pela Proposição 2.3.13, sabemos que $\mathbb{B}_2$ pode ser considerado como um subgrupo de B_n, para $n \geq 2$. Portanto, como um elemento de B_n o gerador σ_1 também não tem ordem finita.

Suponha, agora, que $\sigma_2 \in B_n$ é de ordem finita, então podemos assumir que existe um inteiro positivo, l por exemplo, de modo que $\sigma_2^l = 1_n$. Logo:

$$(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)\sigma_2^l(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^{-1} = 1_n.$$

Afirmação: Para qualquer que seja o inteiro positivo l, é válido:

$$(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)\sigma_2^l(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^{-1} = \sigma_1^l$$

Demonstração da afirmação: A prova é dada por indução sobre o número natural l. De fato, da relação de Artin:

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2\sigma_1 &= \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \\ \Leftrightarrow \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1} &= \sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} (\star\star) \end{aligned}$$

- Para $l = 1$:

$$\begin{aligned} (\sigma_1\sigma_2\sigma_1)\sigma_2(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^{-1} &= \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1} \\ &\overset{(\star\star)}{=} \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} \\ &= \sigma_1. \end{aligned}$$

- Para $l = 2$:

$$\begin{aligned}(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)\sigma_2^2(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^{-1} &= \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1} \\ &\overset{(\star\star)}{=} \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} \\ &= \sigma_1\underbrace{(\sigma_2\sigma_1\sigma_2)}_{rel.deArtin}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} \\ &= \sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} \\ &= \sigma_1^2.\end{aligned}$$

- (Hipótese de Indução): Para $l = n-1$, com $l = 1, 2, \ldots, n-1$, temos:

$$(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)\sigma_2^{n-1}(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^{-1} = \sigma_1^{n-1}.$$

- Para o passo final da Indução, temos:

$$\begin{aligned}(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)\sigma_2^n(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^{-1} &= \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{n-1}\sigma_2\underbrace{(\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1})}_{(\star\star)} \\ &= \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{n-1}\sigma_2\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} \\ &= \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{n-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} \\ &= \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{n-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\underbrace{\sigma_1^{-1}\sigma_1}_{elem.\ neutro} \\ &= \underbrace{(\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{n-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1})}_{Hip.\ de\ Ind.}\sigma_1 \\ &= \sigma_1^{n-1}\sigma_1 \\ &= \sigma_1^n.\end{aligned}$$

  E assim, provamos nossa afirmação.

Finalmente, segue:

$$\begin{aligned}1_n &= \underbrace{\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2^l\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}}_{Afirm.} \\ &= \sigma_1^l,\end{aligned}$$

o que contradiz o fato de que σ_1 tem ordem infinita. Portanto, σ_2 possui ordem infinita.

Aplicando a ideia de maneira indutiva, graças à Proposição 2.3.13, temos que se σ_i possui ordem finita em B_n, provando-se que $(\sigma_{i-1}\sigma_i\sigma_{i-1})\sigma_i^l(\sigma_{i-1}\sigma_i\sigma_{i-1})^{-1} = \sigma_{i-1}^l$, então σ_{i-1} também o teria, gerando novamente uma contradição, $i = 3, 4, \ldots, n-1$. □

A proposição anterior nos garante que B_n é livre de torção (torsion free), $n \geq 1$.

Proposição 2.3.16. *Seja P_n, com $n \geq 1$, o conjunto de todas as $n-$tranças puras. Então P_n é um subgrupo normal de B_n. Além disso, o grupo quociente $\frac{B_n}{P_n}$ é isomorfo à $\mathbb{S}_n$, o grupo das permutações sob n letras, e assim $[B_n : P_n] = n!$.*

Demonstração. Para essa demonstração, vamos construir um homomorfismo especial de B_n em $\mathbb{S}_n$, que garante que P_n é um subgrupo normal de B_n, já que ele será o núcleo desse homomorfismo. De consequência do Teorema dos Isomorfismos 1.1.17, $\frac{B_n}{P_n}$ será isomorfo à $\mathbb{S}_n$, tendo $n!$, pelo Teorema de Lagrange 1.1.7.

De fato, defina a seguinte aplicação entre os grupos:

$$\begin{aligned} \Phi : B_n &\to \mathbb{S}_n \\ \beta &\mapsto \Phi(\beta) = \pi(\beta), \end{aligned}$$

que leva uma trança de n-fios na respectiva permutação induzida pelas suas cordas. É fácil ver que Φ é um homomorfismo sobrejetor, na naturalidade de sua construção, já que para qualquer permutação em n letras é possível construir uma n-trança com a mesma permutação. Assim, pelo Teorema 1.1.17, $\frac{B_n}{N(\Phi)} \simeq \mathbb{S}_n$, onde $N(\Phi)$ denota o núcleo do homomorfismo Φ.

Na beleza da definição simplista de $N(\Phi)$, vemos que ela é exatamente a definição de uma n-trança pura:

$$\begin{aligned} N(\Phi) &= \{\beta \in B_n; \Phi(\beta) = (1)\} \\ &= \{\beta \in B_n; \pi(\beta) = (1)\} \\ &= \{\beta \in B_n; \beta \text{ tem permutação identidade}\} \\ &:= P_n \end{aligned}$$

Logo, $\frac{B_n}{P_n} \simeq \mathbb{S}_n$. Pelo Teorema de Lagrange 1.1.7:

$$[B_n : P_n] = \left| \frac{B_n}{P_n} \right| = |\mathbb{S}_n| = n!$$

□

Capítulo

3

Invariantes de Tranças

3.1 Expoentes de uma Trança

A matemática não se preocupa em reviver ou reaproveitar-se, mas com a acumulação constante, embora às vezes de forma não linear. Uma forma de perseguir esse processo de inovação contínua é aplicar estruturas já conhecidas como ferramentas de alavancagem. O que mostramos até agora é que o conjunto de tranças pode ser feito para formar um grupo nas propriedades algébricas muito naturais dos grupos e, de fato, muitas propriedades das tranças são derivadas do grupo de tranças.

Dito isso, podemos imediatamente afirmar e provar um resultado que dependa da estrutura do grupo de tranças, e que possa ser dito como o nosso primeiro significado de invariante de trança.

Proposição 3.1.1. *Seja β uma $n-$trança, que podemos escrever como $\beta = \sigma_{i1}^{\varepsilon 1}\sigma_{i2}^{\varepsilon 2}\cdots\sigma_{ik}^{\varepsilon k}$ onde, $\varepsilon = \pm 1$. Vamos definir a soma dos expoentes de β (em termos de σ_i), denotada por $exp(\beta)$, como*

$$exp(\beta) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_k.$$

Então, $exp(\beta)$ é uma invariante do grupo de tranças, ou seja,

$$\beta_1 \sim \beta_2 \Longrightarrow exp(\beta_1) = exp(\beta_2).$$

Demonstração. Como $\beta_1 \sim \beta_2$, então existe uma sequência finita de movimentos elementares e seus inversos:

$$\beta_1 = \gamma_0 \to \gamma_1 \to \ldots \to \gamma_m = \beta_2,$$

onde, γ_i é uma palavra nos geradores $\{\sigma_1^{\pm 1}, \sigma_2^{\pm 1}, \cdots \sigma_{n-1}^{\pm 1}\}$ de B_n, e γ_{i+1} é obtido através de γ_i, para $i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, inserindo ou suprimindo uma palavra da forma $uR^{\pm 1}u^{-1}$, em que R é um dos relatores definidores do grupo de $n-$tranças B_n.

Como $exp(R) = 0$, segue que:

$$exp(\gamma_i) = exp(\gamma_{i+1}),\ para\ i = 0, 1, 2, \cdots, m-1.$$

Portanto,

$$exp(\beta_1) = exp(\gamma_0) = exp(\gamma_m) = exp(\beta_2).$$

□

A soma dos expoentes é um invariante bastante útil, uma vez que nos permite verificar muito rapidamente se duas tranças não são equivalentes. Por exemplo, $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ não é equivalente a $\sigma_1\sigma_2\sigma_3^{-1}$, já que $\exp(\sigma_1\sigma_2\sigma_3) = 3$, enquanto $exp(\sigma_1\sigma_2\sigma_3^{-1}) = 1$.

3.2 O Problema da Palavra

Vimos que uma $n-$trança β é equivalente à outra $n-$trança β' se, e somente se, existe uma sequência finita de movimentos elementares e seus inversos em B_n que deformam β em β', sem que elas deixem de satisfazer as condições de tranças em nenhum momento da deformação. O objetivo aqui, será encontrar um método prático que nos permita decidir se $\beta = \beta'$ ou não.

De fato, esse é o tipo de situação que algebristas chamam de *Problema da Palavra de um Grupo*, que consiste num algoritmo que decida se dois elementos são equivalentes(iguais) ou não, na respectiva relação de equivalencia do seu conjunto especificado. Em particular, quando esses determinados grupos são descritos através de palavras. No

nosso caso, o Grupo de Tranças possui tal invariante de tranças, talvez o mais importante deles.

É fácil ver que podemos modificar isso para digamos, encontrar um método que nos permita decidir se uma determinada trança β seja equivalente à trança identidade 1, ou seja $\beta = 1$ (já que $\beta_1 = \beta_2 \Leftrightarrow \beta_1\beta_2^{-1} = 1$).

Esse método a seguir, é o famoso *Problema da Palavra*.

- **Primeiro passo - A trança em questão é uma trança pura ou não?**

Perguntamos isso porque a trança trivial **1** é uma trança pura. Portanto, já discutimos em seções anteriores que se duas tranças não induzirem a mesma permutação, então não é possível que elas sejam equivalentes. Dessa forma, se pudermos mostrar que a $n-$trança β não é uma trança pura então, imediatamente, podemos dizer que β não pode ser **1**. Então, o algoritmo acaba.

Nesse processo, se β é uma trança pura, devemos prosseguir para o segundo passo.

- **Segundo passo - A trança em questão é pura.**

Se β é uma $n-$trança pura, pela definição, sabemos que cada corda da trança, d_i para $i = 1, 2, \cdots, n$, comeca no ponto A_i e termina em B_i. Vamos, então, remover a última corda, d_n, e substituímos por uma corda reta que junta A_n à B_n. Denote a $n-$trança resultante por γ.

Na Figura 3.1, a corda d_4 é representada pela corda esticada.

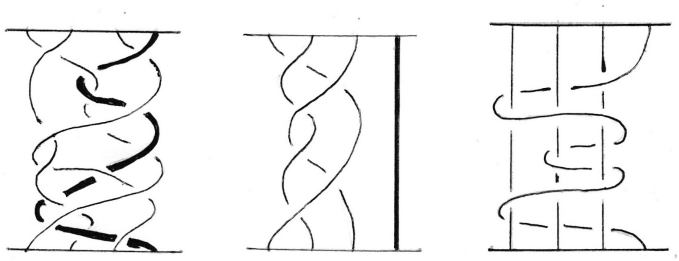

Figura 3.1: As tranças β, γ e $\beta\gamma^{-1}$, respectivamente.

Agora, chamaremos de $n-$trança α o produto de β e γ^{-1}, ou seja, $\alpha = \beta\gamma^{-1}$.

Por construção, se nós removermos a última corda de α, então o resultado, uma $(n-1)-$trança α' por exemplo, é equivalente à trança trivial. Portanto, nós podemos pensar que α' como $n-1$ fios triviais. Assim, α, pode ser dita como uma $n-$trança

onde as primeiras $(n-1)$ cordas são triviais, e a última corda se enlaça com essas linhas paralelas. Tal trança é chamada de *trança penteada (combed braid).*

Se chamarmos $\alpha = \alpha_1$ e $\gamma = \gamma_1$, ou seja, $\beta = \alpha_1\gamma_1$, com α_1 penteada, vamos passar para análise de γ_1. Como a última corda de γ_1 é um fio trivial, para aplicarmos o processo acima em γ_1 devemos começar pela $(n-1)$-ésima corda. Denote por γ_2 a n-trança obtida de γ_1 ao remover a $(n-1)$-ésima corda e substituí-la por um fio trivial. Claramente, as duas últimas cordas de γ_2 são triviais. Repetindo o processo, obteremos a 'trança penteada' α_2, mas nesse caso com $(n-2)$-fios, onde a n-ésima corda é trivial e a $(n-1)$-ésima corda se liga com apenas as primeiras $(n-2)$-cordas triviais. Logo, o processo nos dá $\gamma_1 = \alpha_2\gamma_2$.

Ao repetir esse processo, finalmente, chegamos a uma decomposição de β da forma:

$$\beta = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n-1},$$

onde cada n-trança α_i é uma trança penteada e, em α_{n-1} cada fio,*exceto a segunda corda*, é trivial e a segunda corda se liga apenas com a primeira corda.

Proposição 3.2.1. *Seja β uma n-trança pura. Assim, β é a trança trivial se, e somente se, cada α_i da decomposição é uma trança trivial.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) A volta da proposição é direta, já que se cada α_i é a trança trivial, então β tem que ser a trança trivial.

($\Rightarrow$) Suponha que β é a trança trivial. Além disso, seja ξ_i a $(n-i)$-trança obtida de β ao remover as últimas i-cordas.

Por construção, ξ_{n-1} é 1-trança e ξ_n é vazia.

Obviamente, se β é a trança trivial, cada ξ_i com $i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$, é também uma trança trivial.

Da mesma forma, vamos definir $\alpha_{j,i}$ como a $(n-i)-$trança obtida de α_j ao removermos as últimas i cordas. Agora, por construção,

$$\begin{aligned}
\beta &= \xi_0 = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\\
\xi_1 &= \alpha_{1,1}\alpha_{2,1}\ldots\alpha_{n-1,1}\\
\xi_2 &= \alpha_{1,2}\alpha_{2,2}\ldots\alpha_{n-1,2}\\
&\ldots\\
\xi_{n-2} &= \alpha_{1,n-2}\alpha_{2,n-2}\ldots\alpha_{n-1,n-2},
\end{aligned}$$

onde $\alpha_{1,1}$ é a $(n-1)$-trança trivial, $\alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}$ são $(n-2)$-tranças triviais, de maneira geral, $\alpha_{1,i}, \alpha_{2,i}, \cdots, \alpha_{i,i}$ para $i = 1, 2, \cdots, n-2$, são todas $(n-i)$-tranças triviais.

Agora, $\alpha_{1,n-2}, \alpha_{2,n-2}, \ldots \alpha_{n-2,n-2}$ são todas as 2-tranças triviais e α_{n-1} é uma $n-$trança obtida a partir da 2-trança $\alpha_{n-1,n-2}$ e adicionada $n-2$ linhas retas paralelas. Sendo assim, a trivialidade de $\xi_{n-2} = \alpha_{n-1,n-2}$ implica que α_{n-1} é a $n-$trança trivial. Logo,

$$\beta = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-2}.$$

Pela mesma razão descrita acima, podemos dizer que $\alpha_{n-2,n-3} = \xi_{n-3}$, e assim α_{n-2} é uma trança trivial. Logo, ao continuar o processo, mostramos que cada α_i é, de fato, a trança trivial. □

Observação 3.2.2. *Decompor a trança β em tranças penteadas, significa, decompor a trança pura β em elementos dentro de um subgrupo especial de P_n, que é um grupo livre. Dentro da teoria de grupos livres, é garantida a forma normal de palavras, ou seja, seus elementos são palavras reduzidas onde qualquer processo de cancelamento já foi feito. Dessa forma, uma palavra só é trivial dentro de um grupo livre, se, e somente se, cada letra da palavra for trivial. Essa é a solução do Problema da Palavra para Grupos Livres. Para mais detalhes, vide [H].*

- **Terceiro passo - Determinar se cada α_i é, ou não, trança trivial?**

Sabemos que o problema da palavra tem solução para grupos livres. Então, se pudermos mostrar que cada α_i é um elemento de um grupo livre, podemos determinar se α_i é,

ou não, trança trivial. Contudo, os argumentos para provar isso são os mais envolvidos dos três passos, e vamos adiar a exposição rigorosa, pela falta de ferramentas mais densas da Topologia Algébrica.

É fácil ver que o terceiro passo é o último passo do algoritmo. Esses três passos nos permite resolver completamente o problema da palavra para B_n.

Aqui, vamos finalizar a seção com a solução do Problema da Palavra num caso particular.

Exemplo 3.2.3. *Considere a 4-trança:*

$$\beta = \sigma_3\sigma_1\sigma_2^{-2}\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3,$$

já mostrada na Figura 3.1.

Como visto, é fácil ver que $\gamma = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2\sigma_1$. *Ainda na mesma figura, mostramos uma sequência de diagramas que* $\beta\gamma^{-1}$ *é a trança penteada e também:*

$$\alpha_1 = \beta\gamma^{-1} = (\sigma_3\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-2}\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1})(\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-2}\sigma_3)(\sigma_3\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3).$$

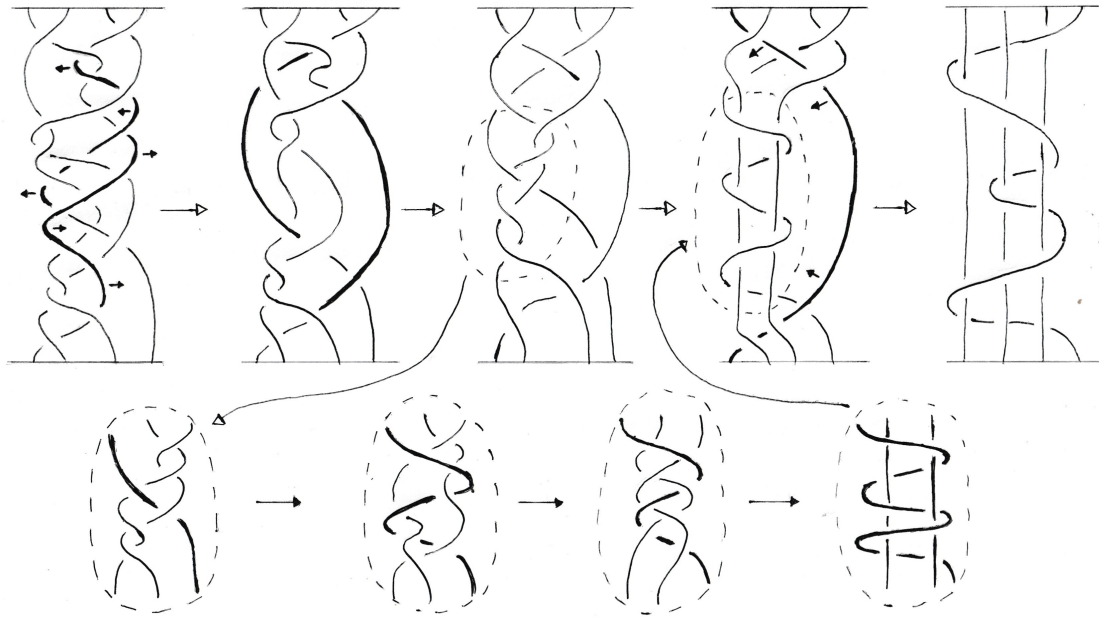

Figura 3.2: Processo de decomposição em tranças penteadas.

Agora, vamos prestar atenção à γ. *Ao repor a terceira corda de* γ *como uma linha*

reta, obtemos $\gamma_2 = \sigma_1^2$. *Portanto,*

$$\alpha_2 = \gamma\gamma_2^{-1} = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2\sigma_1\sigma_1^{-2} = \sigma_2\sigma_1^2\sigma^2,$$

e finalmente, $\alpha_3 = \gamma_2$. *Sendo assim, podemos escrever* β *como*

$$\beta = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

.

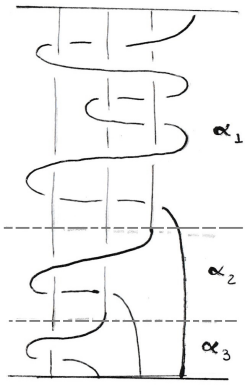

Figura 3.3: $\beta = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$.

Note que as três tranças em que β *foi decomposta, não são triviais. Assim,* β *também não é.*

Referências Bibliográficas

[A1] E., Artin. *Theorie der Zöpfe*. Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg. Vol. 4.(Springer-Verlag, 1925).

[A2] E., Artin. *Theory of braids*. Annals of Mathematics, p. 101-126, 1947.

[B] J. S. Birman, *Braids, Links and Mapping class Groups*. Annals of Math. Studies 82 (Princeton University Press, 1973).

[G] A. Gonçalves. *Introdução a Algebra*. 5a edição. (IMPA 2008).

[H] V. L. Hansen, *Braids and Coverings: Selected Topics*. (Cambridge University Press, 1989).

[L] A. Garcia and Y. Lequain. *Elementos de Álgebra*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, (SBM Press 2006).

[M] K. Murasugi and B. Kurpita. *A Study of Braids*, (Springer Science and Business Media, 2012).