UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Considerações sobre Conjuntos Numéricos

Flávio Marques Pereira

Maceió, Novembro de 2020

Instituto de Matemática

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FLÁVIO MARQUES PEREIRA

CONSIDERAÇÕES SOBRE CONJUNTOS NUMÉRICOS

Maceió 2020

Flávio marques Pereira

CONSIDERAÇÕES SOBRE CONJUNTOS NUMÉRICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Luiz Flores

Maceió 2020

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

P436c Pereira, Flávio Marques.
Considerações sobre conjuntos numéricos / Flávio Marques Pereira. - 2020.
90 f. : il.

Orientador: André Luiz Flores.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2020.

Bibliografia: f. 52-54.
Apêndices: f. 55-90.

1. Números irracionais. 2. Números complexos. 3. Números transcendentes. I. Título.

CDU: 511.46

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pois sem ele nada seria possível.

A minha mãe por sempre me incentivar a estudar e me dar tempo de fazer isso.

A meu pai por também sempre me incentivar a estudar e pela ajuda financeira no início.

A meu amigo Igor, que conheci neste programa e que me proporcionou ótimas conversas e sempre acreditou em mim.

A meu amigo Max, pelas conversas descontraídas nas caronas e que me tirou diversas dúvidas no último semestre.

A professora Juliana por algumas conversas e pela paciência com minhas diversas dúvidas.

Ao professor Márcio por algumas conversas e por tirar minhas dúvidas.

A meu orientador pelas sugestões e conversas dadas bem como por acreditar em mim.

RESUMO

Neste trabalho serão abordados aspectos históricos, operações entre elementos de diferentes conjuntos, discussão de algumas propriedades dos números complexos e algumas curiosidades. Os conjuntos aqui estudados são: racionais, irracionais, reais, complexos, algébricos e transcendentes. As operações mais usuais serão: soma, multiplicação e exponenciação. Será ainda discutido brevemente sobre a naturalidade com que certos números são aceitos (por exemplo: $\sqrt{2}$ e i). É visto ainda sobre certas propriedades de potenciação com números complexos pouco abordadas. Vários exercícios são aqui resolvidos a fim de melhor fixar o conteúdo aqui abordado. O conteúdo aqui presente é voltado para o ensino médio, para uma turma de olimpíadas e alguns tópicos para a formação do professor.

Palavras-chave: irracional, complexo, transcendente, fechado para operação.

ABSTRACT

In this work, historical aspects, operations between elements of different sets, discussion of some properties of complex numbers and some curiosities will be discussed. The sets studied here are: rational, irrational, real, complex, algebraic and transcendent. The most common operations will be: sum, multiplication and exponentiation. It will also be discussed briefly about the naturalness with which certain numbers are accepted (for example: $\sqrt{2}$ and i). It is also seen on certain potentiation properties with complex numbers little addressed. Several exercises are proposed here in order to better fix the content discussed here. The content presented here is aimed at high school, a class of Olympics and some topics for teacher education.
Keywords: irrational, complex, transcendente, closed for operation.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Na educação básica não é explorado em geral, se os principais conjuntos numéricos (inteiros, racionais ...) são fechados para uma dada operação, por exemplo: dados dois racionais, a soma e o produto deles também são racionais? E com relação aos irracionais? O problema maior acontece quando vamos para a exponenciação, pois dependendo do número é preciso de um resultado que está fora do currículo do ensino básico para responder se tal número é racional ou não. Depois de se apresentar os irracionais poderia ser natural um aluno perguntar: como $\sqrt{2}$ é irracional então o número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ também é irracional? Questões como essa serão tratadas aqui no capítulo 1, juntamente com alguns fatos históricos a respeito desses conjuntos.

Vale ressaltar que se o professor julgar o assunto "avançado" para uma turma comum, é recomendável que tais questões sejam apresentadas àqueles alunos mais curiosos, que gostam da área de exatas, por exemplo, uma turma olímpica.

A questão mencionada anteriormente se relaciona com números algébricos e transcendentes. Pode parecer estranho, mas para responder a última pergunta feita no primeiro parágrafo é necessário entrar no mundo dos transcendentes e conhecer o teorema de Gelfond-Schneider, que trataremos no capítulo 3.

Como o capítulo sobre números transcendentes está fora do currículo da educação básica, este é voltado para a aprendizagem de alunos mais curiosos, por exemplo numa turma de olimpíadas, como já foi mencionado. Vale ressaltar que a necessidade de se introduzir os números transcendentes nesse trabalho é para responder questões no universo dos números irracionais e também apresentar resultados interessantes dessa teoria como a transcendência de e e de π.

Aqui será tratado ainda sobre a questão da "aceitação rápida" de certos números: por exemplo, é ensinado a operar com o número $\sqrt{2}$ sem a preocupação de saber se ele "existe". O mesmo ocorre com a unidade imaginária, i. Em relação aos complexos será dada uma atenção a certas propriedades que valem para números reais e não valem para números complexos, como por exemplo $z^{a+b} = z^a z^b$, para isso será definido a exponencial complexa e o logaritmo complexo, no capítulo 2.

Ainda no capítulo 2, será abordado questões como: qual é a escrita correta: $\sqrt{4} = 2$ ou $\sqrt{4} = \pm 2$? As vezes o uso errado de certos símbolos podem causar certos absurdos como chegar na igualdade $1 = -1$.

No apêndice temos vários exercícios resolvidos que o professor pode aplicar em sala de aula, especialmente as questões relacionadas aos capítulos 1 e 2, a fim de mostrar aos alunos exercícios desafiantes e diferentes dos habituais.

Vejamos agora o que diz o PCN (Parâmetros Curriculares Nacional) e a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) a respeito dos conteúdos aqui trabalhado.

O único momento em que a palavra “irracional” é mencionada no PCN+ é no seguinte trecho

> “... pode-se tratar os números decimais e fracionários, mas mantendo de perto a relação estreita com problemas que envolvem medições, cálculos aproximados, porcentagens, assim como os números irracionais devem se ligar ao trabalho com geometria e medidas. ”

Percebe-se que não há uma preocupação sobre as operações nesse conjunto, nem mesmo o que significa saber o que é de fato um número irracional, ou ainda, será que existem infinitos dele?

Com os números complexos acontece algo similar, também só é mencionado uma vez, no seguinte trecho

> “Tradicionalmente, a Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas.”

Mais uma vez não se fala de operações por exemplo.

Na BNCC com relação ao ensino fundamental também é dito que os irracionais devem aparecer em situações geométricas, como se pode ver no trecho seguinte:

> “Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais.”

Na BNCC existem algumas habilidades que os alunos devem desenvolver, dentre elas as seguintes são as que mencionam os números irracionais:

> "**(EF09MA03)** Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários."

Aqui vemos um pouco de operações com irracionais.

> "**(EF09MA04)** Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações."

Mais uma vez as operações são mencionadas, mas não se fala nada a respeito do "tamanho" desse conjunto por exemplo.

Com relação ao ensino médio, não é mencionado algo sobre os irracionais e nem mesmo sobre os complexos, o que surpreende!

1 NÚMEROS RACIONAIS E IRRACIONAIS

1.1 Um pouco de história e algumas considerações

Segundo [14, cap. 1], as primeiras aparições de frações são vistas no povo Egípcio como podemos constatar no Papiro de Rhind, encontrado em 1858 pelo escocês Alexander Henry Rhind e escrito em 1650 a.C. por um escriba chamado Ahmes e por isso é também chamado de Papiro de Ahmes. Um fato curioso sobre este papiro é que o material que o compõe advém de um manuscrito ainda mais antigo produzido entre 2000 e 1800 a.C. As frações egípcias foram usadas para medir marcações relacionadas ao rio Nilo e também áreas e volumes. Os egípcios usavam e operavam apenas com frações de numerador unitário, sendo $\frac{2}{3}$ a única exceção. Assim, frações diferentes das mencionadas anteriormente seriam decompostas em frações unitárias, por exemplo: $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} \cdot$ No entanto, as frações eram vistas como "parte de um todo".

Só com os chineses, veio a ideia de que $\frac{n}{m} = n \times \left(\frac{1}{m}\right)$, ou seja, fixavam uma fração unitária e dispunham dela n vezes. Aparentemente os chineses não trabalhavam com fração imprópria, eles a transformavam na sua forma mista, por exemplo:

$$\frac{8}{3} = \frac{6}{3} + \frac{2}{3} = 2 + \frac{2}{3} = 2\frac{2}{3} \cdot$$

A notação mais moderna de fração surge então com os árabes. Com o desenvolvimento do comércio surgiram as frações decimais (aquelas que possuem o denominador como uma potência de 10). O uso de decimais se tornou mais popular na Europa em 1585 onde Simon Stevin mostrou como transformar fração em decimal. A representação decimal passou a ser bem vista pois o algoritmo para somar e subtrair eram similares ao dos números inteiros, no entanto para a multiplicação e divisão ainda usava-se a forma fracionária, visto que com a representação decimais seria mais provável o erro. Para mais informações sobre fração é recomendável [14].

O conjunto dos números racionais é simbolizado por $\mathbb{Q}$ e definido como:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \,|\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\right\}.$$

Já que os números racionais abrangem tantos números, como podermos verificar que ainda existem outros diferentes deles? Bom, para isso é uma boa ideia olharmos para a representação decimal dos racionais. Observe que $\frac{1}{2} = 0{,}5$, e $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$; no primeiro caso tivemos uma representação finita, enquanto no segundo, infinita e periódica. Cabe aqui uma pergunta: todo número racional tem uma representação decimal finita ou infinita periódica? Uma outra pergunta seria: toda representação decimal finita ou infinita periódica representa um número racional? A resposta para essas duas perguntas é sim, e podem ser vistas com mais detalhes em [12, Cap. 14, pág.186].

Daí, começamos a nos questionar a respeito das representações decimais infinitas e não periódicas: que tipo de "entes" são esses? Para entender melhor isso precisamos ir para a Grécia antiga, onde se tinha a ideia de comensurabilidade. Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ segmentos de reta. Ao escrevermos $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{CD}|} = \frac{m}{n}$, racional, queremos dizer que existe um segmento $\overline{EF}$ tal que $\overline{EF}$ cabe m vezes em $\overline{AB}$ e n vezes em $\overline{CD}$. Dizemos assim que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis.

Os gregos antigos admitiam apenas como números os naturais. Eles não usavam fração, apenas razão. Eles usavam as frações para comparar segmentos, e por isso eram sempre razão e não fração. Vale lembrar que razão é quando estamos comparando duas grandezas.

Nossa intuição nos leva a pensar que quaisquer dois segmentos são comensuráveis, visto que podemos conseguir segmentos tão pequenos como queiramos. No entanto isto é falso; os próprios gregos acharam um exemplo disso, provando que o lado de um quadrado e sua diagonal são grandezas incomensuráveis. Uma demonstração deste fato pode ser visto em [2, Cap.3, pág. 48].

Tal descoberta foi um tanto "chocante", pois como os Pitagóricos sempre relacionavam números a razão, então tinham encontrado um número com uma natureza até então desconhecida. Para superar essa crise, Eudoxo criou a teoria das proporções que só dependia de números naturais. Para entender melhor consulte [2,Cap.3, pág. 53].

Com o que foi exposto acima juntamente com o teorema de Pitágoras segue que não existe um número racional cujo quadrado resulte em 2. Uma maneira de intuir isso sem a necessidade da geometria é por aproximações, pensando que como $1^2 = 1$ e $2^2 = 4$, então devemos testar valores para $1 < x < 2$ a fim de obtermos $x^2 = 2$, como pode ser visto abaixo:

$$(1{,}5)^2 = 2{,}25 > 2.$$

$$(1{,}4)^2 = 1{,}96 < 2.$$

$$(1{,}45)^2 = 2{,}1025 > 2.$$

$$(1{,}42)^2 = 2{,}0164 > 2.$$

$$(1{,}41)^2 = 1{,}9881. < 2.$$

$$(1{,}415)^2 = 2{,}002225 > 2.$$

$$(1{,}414)^2 = 1{,}999396 < 2.$$

Parece que sempre que acrescentamos uma nova casa decimal, chegamos cada vez mais perto de 2, porém aparentemente nunca nele. Vamos provar que nossa “ intuição” está certa, dessa vez algebricamente.

Suponha que exista um racional $\frac{p}{q}$ com $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$ tal que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$ Observe que:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Longrightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Longrightarrow p^2 = 2q^2.$$

Usando a fatoração em primos, observamos que do lado direito da igualdade existe uma quantidade ímpar de fatores 2, enquanto do lado esquerdo existe uma quantidade par de fatores 2, mas isto contraria o teorema fundamental da Aritmética; chegamos então a um absurdo.

Vimos que não existe um racional d tal que $d^2 = 2$. Uma pergunta aqui seria, tal d existe? Esta pergunta parece ingênua num primeiro momento, pois sabemos que $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$, no entanto $\sqrt{2}$ a primeira vista é apenas uma representação gráfica em que não tem sentido próprio; faz menos sentido ainda operar com ela. Mas, a resposta para a pergunta é sim graças ao teorema a seguir.

Teorema: dados um real positivo x e um natural $n > 1$, existe um único real positivo y tal que $y^n = x$.

O número y chama-se de raiz n-ésima de x e é representado por $\sqrt[n]{x}$.

A demonstração deste pode ser visto em [16, cap. 2, pág. 72].

Por muitos anos, a existência de tal d foi assumida, tanto que foram desenvolvidas propriedades sobre números do tipo $\sqrt{n}$ mesmo que não houvesse uma teoria embasando esse desenvolvimento. Por exemplo, dizer que

$$\sqrt{2}.\sqrt{8} = \sqrt{16} = 4.$$

Apenas no século XIX os matemáticos sentiram uma necessidade de uma fundamentação com rigor para os diferentes sistemas de numeração. Por mais de dois mil anos a definição de Eudoxo, relacionada a teoria das proporções, foi a única base para tratar com os números irracionais até que Dedekind estudou este assunto e eliminou os "buracos" na reta. Cantor e Dedekind foram os principais a cuidarem desse rigor para os números reais. Cantor com as ideias de sequências de Cauchy, que não serão abordadas aqui, mas que podem ser encontradas em [11, cap.3]. Neste trabalho não pretendemos construir rigorosamente os números reais, faremos apenas alguns apontamentos importantes.

Segundo [20, cap. 1, pág. 7,8], Julius Wilhelm Richard Dedekind foi um grande matemático de sua época. Nasceu em Brunvisque em 1831, finalizou os estudos na universidade de Göttingen, foi o último doutorando de Gauss. Teve contato com Riemman e frequentou o curso de teoria dos números de Dirichelet. Mudou-se para Zurique em 1858 para ser professor de cálculo, daí começou a escrever Continuidade e Números Irracionais, um dos trabalhos mais importantes sobre os fundamentos da Análise. Em 1862 retornou para Brunvisque e ensinou na universidade local até se aposentar em 1896.

Dedekind usou a ideia de "cortes" que pode ser intuída como segue: se considerarmos o número 1 ele separa os racionais em dois conjuntos, aqueles que são maiores que 1 e os que são menores que 1, assim 1 é o elemento separador do corte. Se considerarmos as aproximações para $\sqrt{2}$ teremos a mesma ideia de separação, mas agora o $\sqrt{2}$ não é um elemento separador pois não existe um elemento máximo no conjunto das raízes quadradas por falta de 2 e nem um mínimo no conjunto das raízes quadradas por excesso. Uma prova disso pode ser visto em [2, cap. 3. Pag. 56 e 57].

A definição de corte é:

Todo par (E, D) de conjuntos não vazios de números racionais, cuja união seja $\mathbb{Q}$, e tais que todo elemento de E seja menor que todo elemento de D.

O elemento separador pode ser vinculado tanto ao conjunto E quanto ao D. Por exemplo seja E o conjunto do números racionais menores ou iguais a 1 e D o conjunto dos números racionais maiores que 1. Claramente temos $E \cup D = \mathbb{Q}$. No entanto se considerarmos E como o conjunto das raízes quadradas por falta de 2 e D como o conjunto das raízes quadradas por excesso de 2 não iremos ter $E \cup D = \mathbb{Q}$.

Dedekind ao analisar a existência de cortes sem elementos de separação percebe a descontinuidade de $\mathbb{Q}$, devido ao que hoje conhecemos como irracionais. Fazendo a união deste conjunto com $\mathbb{Q}$, espera-se agora que o novo conjunto obtido, os reais $\mathbb{R}$, possua propriedades semelhantes as já conhecidas em $\mathbb{Q}$. Isso pode ser visto melhor em [11, cap.3]. Poderia se pensar que existe um elemento separador que não seja real, mas que separa os reais, como se fez no caso racional acima, a fim de "aumentar" o conjunto dos reais. No entanto Dedekind provou que todo corte de números reais possui um número real como elemento separador.

Do que foi dito no parágrafo anterior, existe números que não são racionais, chamamos eles de números irracionais. Já foi dito que todo número que possui representação decimal finita ou infinita e periódica é racional. E os irracionais não são racionais, portanto é razoável pensar que os irracionais sejam todos os números com representação decimal infinita e não periódica, isto de fato é verdade. A construção rigorosa dos irracionais não será feita aqui, por fugir dos objetivos do trabalho, mas pode ser encontrada em [2, cap.3].

Foi visto que $\sqrt{2}$ é irracional mas será que $\sqrt{3}$ também será irracional? E $\sqrt{6}$? $\sqrt[3]{20}$? $\sqrt[14]{5000}$? São todos irracionais, é o que veremos a seguir!

Proposição 1: Sejam $n, k, m \in \mathbb{N}$, com $m \geq 2$. Se $n \neq k^m$ (para todo k), então $\sqrt[m]{n}$ é irracional.

Demonstração

Suponha que $\sqrt[m]{n}$ seja racional; daí existem $r, s \in \mathbb{N}$, com $mdc(r, s) = 1$, tal que $\frac{r}{s} = \sqrt[m]{n}$. Agora vamos analisar esta última igualdade:

$$\frac{r}{s} = \sqrt[m]{n} \Longrightarrow r^m = s^m n.$$

Seja $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_j^{\alpha_j}$, como $n \neq k^m$ então $\alpha_i \neq lm$. Ficamos com

$$r^m = s^m p_1^{\alpha_1} \dots p_j^{\alpha_j}$$

Agora note que como $p_i | p_i^{\alpha_i}$, temos que

$$p_i^{\alpha_i} | r^m \Rightarrow p_i | r^m \Rightarrow p_i | r$$

Seja $p_i^{\beta_i}$ a maior potência de p_i que divide r; ficamos então com

$$p_1^{m\beta_1} \dots p_j^{m\beta_j} t = s^m p_1^{\alpha_1} \dots p_j^{\alpha_j}.$$

Se $m\beta_i > \alpha_i$ então $p_i^{m\beta_i - \alpha_i}$ é um número inteiro, e pela igualdade acima, $p_i | s^m$; e daí, $p_i | s$, um absurdo, pois, $mdc(r, s) = 1$.

Se $m\beta_i < \alpha_i$ então $p_i^{\alpha_i - m\beta_i}$ é um número inteiro, e pela igualdade acima $p_i | t$, um absurdo pois $p_i^{\beta_i}$ é a maior potência de p_i que divide r.

Se $m\beta_i = \alpha_i$, ficaríamos com

$$t = s^m \Rightarrow s | t \Rightarrow s | r \Rightarrow mdc(r, s) \neq 1.$$

Note que não podemos ter $s = 1$, pois se assim fosse, $n = r^m$, o que contraria o enunciado.

Portanto, $\left(\sqrt[m]{n}\right)$ é um número irracional.

Os alunos concluem o ensino básico com a impressão que os irracionais são apenas algumas raízes não exatas de inteiros/racionais e o π, causando a ilusão de que os racionais estão em quantidade maior, mas na verdade é o contrário! É o que vamos entender neste e no próximo capítulo. Na proposição anterior já fica provado que existem infinitos irracionais. Uma outra maneira de ver isto é considerar os números da forma $m + \sqrt{2}$ com m inteiro, pois todos eles são irracionais (isto será provado um pouco mais a frente). Como existem infinitos números racionais e infinitos números irracionais pode-se questionar os alunos: será que existem mais racionais ou irracionais?

Aqui vale um comentário sobre o último "mais" mencionado acima. Considerando conjuntos finitos, é fácil ver quando um tem mais elementos que outro. No entanto, para conjuntos infinitos isto não é tão claro. Para esclarecer melhor este fato vamos precisar do conceito de conjuntos equivalentes, ou que têm a mesma cardinalidade, que segundo Cantor é (de acordo com [2,cap.2,pág.33]):

Dois conjuntos tem a mesma cardinalidade ou são equivalentes, quando é possível estabelecer uma bijeção entre eles, ou seja, uma correspondência que leve elementos distintos de um conjunto em elementos distintos do outro, todos os elementos de um e do outro conjunto sendo objeto dessa correspondência.

Vejamos então o conceito formal de conjunto finito e infinito, segundo [**11**,cap. 2, pág. 42].

Definimos

$$I_n = \{p \in \mathbb{N} | 1 \leq p \leq n\}.$$

Dizemos que um conjunto A é finito quando é vazio ou quando existe, para algum $n \in \mathbb{N}$, uma bijeção

$$f: I_n \to A.$$

Um conjunto é dito infinito quando não for finito.

Antes de mais nada, para estabelecer se dois conjuntos ditos infinitos têm a mesma cardinalidade, é necessário o conceito de conjunto enumerável, que será apresentado a seguir.

Um conjunto A é chamado de enumerável se for finito ou se existir uma bijeção

$$f: \mathbb{N} \to A.$$

Neste último caso dizemos que A é infinito enumerável.

De acordo com a definição, o conjunto que tomamos como "tamanho" base é $\mathbb{N}$. Como é possível construir uma bijeção entre os pares e $\mathbb{N}$, os ímpares e $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$ então todos esses conjuntos infinitos têm o mesmo "tamanho". No entanto, não é possível estabelecer uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$, daí, podemos afirmar que o infinito dos $\mathbb{R}$ é "maior" que o infinito dos $\mathbb{N}$. Observe que não podemos ter que o infinito dos $\mathbb{R}$ seja menor que o infinito dos $\mathbb{N}$ já que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

Portanto, não é conveniente dividir os conjuntos em apenas duas categorias: finito e infinito, já que nem todo infinito é igual. É melhor classifica-los em: finitos, infinito enumerável (mesmo "tamanho" que $\mathbb{N}$) e infinito não enumerável ("maior" que $\mathbb{N}$). Informações mais profundas sobre cardinalidade podem ser encontradas em [10, introdução].

Vale ressaltar que este estudo aprofundado sobre conjuntos infinitos foi a partir do século XIX com Benhard Bolzano, e depois Richard Dedekind seguido de Georg Cantor, que foi o que mais avançou neste assunto.

Para a próxima proposição usaremos o seguinte teorema: dados os conjuntos A_1, A_2, A_3, ..., todos eles enumeráveis, então, sua união $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$ também é enumerável. Uma demonstração para isto pode ser visto em [2,cap.3, pág. 34 e 35].

Proposição 2: o conjunto dos racionais é enumerável.

Demonstração

Considere o conjunto $\mathbb{Q}_+^*$ e nele todas as frações irredutíveis cuja soma do numerador com o denominador seja constante, por exemplo, abaixo está o grupo de frações cuja soma do numerador com denominador é 5.

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}$$

Sendo $A_k (k \geq 2)$ o conjunto cuja soma do numerador com denominador seja k temos que

$$A_2 \cup A_3 \cup \ldots A_n \cup \ldots = \mathbb{Q}_+^*$$

Como cada A_k é finito, portanto enumerável, então $\mathbb{Q}_+^*$ é enumerável, pois trata-se da união de conjuntos enumeráveis.

Defina agora $B_k = -A_k (k \geq 2)$, ou seja, se $x \in A_k$ então $-x \in B_k$. Note que

$$B_2 \cup B_3 \cup \ldots B_n \cup \ldots = \mathbb{Q}_-^*$$

Do mesmo modo concluímos que $\mathbb{Q}_-^*$ é enumerável. Portanto $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+^* \cup \mathbb{Q}_-^* \cup \{0\}$ é enumerável.

A fim de discutir as operações nos conjuntos racionais e irracionais precisamos definir a potência de um número real, isto será feito baseado em [9,cap.1].

Seja $a \in \mathbb{R}$,

Potência de expoente natural

Seja $m \in \mathbb{N}$ então

$$a^0 = 1 \ (a \neq 0)$$

$$a^m = a.a^{m-1}(m \geq 1)$$

Potência de expoente inteiro

Seja $m \in \mathbb{N}$ e $a \neq 0$ então

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Potência de expoente racional

Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$ com $n > 0$ e $a > 0$ então

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Se $\frac{m}{n} > 0$ e $a = 0$ temos que

$$0^{\frac{m}{n}} = 0.$$

Potência de expoente irracional

Para este caso, é indicado [3] visto que é preciso de uma formalização maior.

1.2 Operações

Vejamos agora algumas operações com racionais e irracionais, a fim de sabermos que tipo de número iremos obter no final dessas operações. No que segue $p, r \in \mathbb{Z}$, $q, s \in \mathbb{Z}^*$, $t, u \in \mathbb{Q}$, $v \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Obs. : a subtração e a divisão não serão trabalhadas aqui por serem similares a soma e multiplicação.

1) Multiplicação de racional por racional

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs} \cdot$$

O produto de inteiros é inteiro, daí $\left(\frac{pr}{qs}\right)$ é uma divisão de um inteiro por outro, logo é um número racional.

2) Multiplicação de irracional por irracional

Neste caso vemos com exemplos que teremos as duas possibilidades:

$$(\sqrt{2})(\sqrt{2}) = 2.$$

$$(\sqrt{2})(\sqrt{3}) = \sqrt{6}.$$

No primeiro exemplo encontramos um número racional, enquanto no segundo um número irracional, pela Proposição 1.

3) Multiplicação de racional por irracional

Se o racional considerado for 0, então o produto será 0, que é racional. Consideremos o racional diferente de zero e suponha que o produto seja racional, logo:

$$uv = t \Rightarrow v = \frac{t}{u} = t \cdot \left(\frac{1}{u}\right) \cdot$$

Mas, por 1), $\left[t \cdot \left(\frac{1}{u}\right)\right]$ é racional, uma contradição. Portanto, o produto de um racional não nulo por um irracional resulta em um irracional.

4) Soma de racional por racional

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + rq}{qs} \cdot$$

Como o numerador e denominador são inteiros então $\frac{ps+rq}{qs}$ é racional.

5) Soma de irracional por irracional

Neste caso vemos com exemplos que teremos as duas possibilidades.

$$(\sqrt{2}) + (-\sqrt{2}) = 0.$$

$$(\sqrt{2}) + (\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}.$$

No primeiro exemplo encontramos um número racional, enquanto no segundo um número irracional, pela proposição 1.

6) Soma de racional por irracional

Suponha que essa soma seja um número racional, então:

$$u + v = t \Rightarrow v = t - u.$$

Mas, por 4), $(t - u) \in \mathbb{Q}$, chegamos então em uma contradição. Portanto, a soma de um número racional com um número racional; resulta em um número irracional.

7) Exponenciação com base e expoente racional

Neste caso vemos com exemplos que teremos as duas possibilidades.

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}.$$

No primeiro caso temos um racional, enquanto no segundo um irracional.

8) Exponenciação com base e expoente irracional

Neste caso vemos com exemplos que teremos as duas possibilidades.

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}.$$

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{2} = 2.$$

No primeiro caso temos um irracional (será explicado no capítulo 3), enquanto no segundo um racional.

9) Exponenciação com base racional e expoente irracional

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{2}}.$$

$$2^{\log_2 3} = 3.$$

Neste caso vemos com exemplos que teremos as duas possibilidades. Será explicado no capítulo 3 porque o primeiro exemplo é irracional bem como $\log_2 3$.

10) Exponenciação com base irracional e expoente racional

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2.$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^3 = 2\sqrt{2}.$$

Neste caso vemos com exemplos que teremos as duas possibilidades.

1.3 Curiosidades

Ao considerarmos expressões do tipo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, devemos lembrar que ela pode ser reescrita como $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} a_1\right)$. Se este limite existir dizemos que a série é convergente, caso contrário é chamada de divergente. Neste trabalho todas as séries apresentadas são convergentes.

Uma curiosidade é que ainda existem números que não se sabe sobre sua racionalidade como é o caso da constante de Euler-Mascheroni [15, cap.1, pág. 4] que é dado por

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right)\cdot$$

Uma demonstração de que esta série é convergente pode ser vista em [1, cap. 11, pág. 979].

Um outro número que permanece com a racionalidade desconhecida é $\zeta(2n+1)$, com $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, sendo

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\cdot \ (s > 1)$$

a função zeta de Riemann.

Esta série é convergente pois é a própria “série p”, mais detalhes sobre essa série pode ser vista em [21, cap.11, pág. 647].

2 CONSIDERAÇÕES SOBRE NÚMEROS REAIS E COMPLEXOS

2.1 Números Reais

Agora ficará explicado porque existem “mais” irracionais do que racionais. Para isso vamos mostrar que o conjuntos dos números reais é não enumerável.

Para demonstrar a próxima proposição precisaremos de um lema que enunciaremos e demonstraremos agora. O próximo lema bem como as próximas duas proposições foram retiradas de [2, cap.2, pág. 36-38].

Lema: O intervalo $(0,1)$ tem a mesma cardinalidade que toda a reta real.

Demonstração

Sabemos que a função $f\colon\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(x)=tgx$ é bijetiva. Assim precisamos apenas fazer alguns ajustes para mostrar o que desejamos. De fato, a função $g\colon(0,1)\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $g(x)=tg\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)$ é o que procuramos.

Proposição 3: $\mathbb{R}$ é não enumerável.

Demonstração

Demonstraremos que o intervalo $(0,1)$ é não enumerável, que pelo Lema anterior é o mesmo que $\mathbb{R}$ não ser enumerável, já que é conhecida a proposição “ se f é um bijeção de A em B e A é não enumerável, então B é não enumerável”.

Agora observe que dado um número sempre podemos escrever sua representação decimal de modo infinito, veja os exemplos

$$5=4{,}999\ldots;\,2{,}42=2{,}41999\ldots$$

Assim, cada número tem uma única representação decimal infinita.

Suponhamos que fosse possível estabelecer uma bijeção dos naturais com o intervalo $(0,1)$; isto é o mesmo que supor que os números desse intervalo sejam os elementos de uma sequência infinita $x_1,x_2,x_3,\ldots$ Escritos em suas representações decimais, esses números seriam, digamos,

$$x_1=0,a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}\ldots$$

$$x_2 = 0, a_{21}a_{22} \dots a_{2n} \dots$$

$$\vdots$$

$$x_n = 0, a_{n1}a_{n2} \dots a_{nn} \dots$$

$$\vdots$$

onde os a_{ij} são algarismos de 0 a 9. Vamos agora construir um número que não está nesta lista, usando um processo conhecido como a diagonal de Cantor. Construímos um número que seja diferente de x_1 na primeira casa decimal, de x_2 na segunda casa decimal, e assim por diante. Sendo $x = 0, a_1a_2 \dots$ o número desejado, uma regra para ele não pertencer a lista seria por $a_i = 1$ se $a_{ii} = 2$ e $a_i = 2$ se $a_{ii} \neq 2$. Chegamos então a um absurdo. Portanto, $\mathbb{R}$ é não enumerável.

Proposição 4: O conjunto dos números irracionais é não enumerável.

Demonstração

Como $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$, se $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ fosse enumerável, como $\mathbb{Q}$ é enumerável então $\mathbb{R}$ também seria enumerável, uma absurdo pela proposição anterior. Portanto, $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ é não enumerável.

2.2 Números Complexos

Nessa seção entenderemos a importância dos números complexos.

Segundo [17, cap.3] muitas pessoas pensam que os números complexos surgiram com a equação do 2° grau, no entanto não foi, o surgimento se deu com as equações cúbicas. O matemático Bombelli ao resolver a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ percebeu que 4 é raiz, no entanto ao resolver a mesma equação usando a conhecida equação de Cardano encontrou

$$\left(\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}\right) = x$$

como raiz da equação, o que é estranho visto a presença de raízes quadradas de números negativos. Bombelli começou a admitir a existência de números do tipo $a \pm \sqrt{-b}$.

Ele escreveu

$$a+\sqrt{-b}+a-\sqrt{-b}=4 \Longrightarrow a=2.$$

e depois

$$2+\sqrt{-b}=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}$$

Considerando $\sqrt{-b}=(\sqrt{b})(\sqrt{-1})$ concluiu que $b=1$, pois

$$\left(2+\sqrt{-b}\right)^{3}=8+12\sqrt{-b}-6b-b\sqrt{-b}=(8-6b)+\sqrt{-1}\left[(12-b)\sqrt{b}\right]=2+11\sqrt{-1},$$

agora basta igualar as partes reais e imaginária.

Daí, de fato,

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4.$$

Logo, começou a ser natural admitir a existência desses números e também a operar com eles. Definimos então o conjunto dos números complexos como sendo

$$\mathbb{C}=\left\{a+bi, i=\sqrt{-1}, a, b \in \mathbb{R}\right\}.$$

Assim como no caso dos irracionais era inicialmente estranho operar com $\sqrt{2}$ sem saber a fundo o que tal número representaria o mesmo ocorre com o símbolo $i=\sqrt{-1}$. Para que este não se torne estranho, antes de começarmos a operar com ele uma boa ideia seria mostrar que $\mathbb{C}$ como foi definido acima é um corpo. Vamos relembrar o que é um corpo (segundo [11, cap. 3, pág. 61]).

Um corpo é um conjunto K, munido de duas operações: a adição que faz corresponder a cada par de elementos $x, y \in K$ sua soma $x+y \in K$, e a multiplicação que associa a esses elementos o seu produto $x.y \in K$, onde são satisfeitas as seguintes propriedades:

1) Associatividade: quaisquer que sejam $x, y, z \in K$, tem-se $(x+y)+z=x+(y+z)$.

2) Comutatividade: quaisquer que sejam $x, y \in K$, tem-se $x+y=y+x$.

3) Elemento neutro: existe $0 \in K$ tal que $x+0=x$, seja qual for $x \in K$.

4) Simétrico: todo elemento $x \in K$ possui um simétrico $-x \in K$ tal que $x+(-x)=0$.

5) Associatividade: dados quaisquer $x, y, z \in K$, tem-se $(x.y).z = x.(y.z)$.

6) Comutatividade: sejam quais forem $x, y \in K$, vale $x.y = y.x$.

7) Elemento neutro: existe um elemento em K que representaremos por "1" tal que $1 \neq 0$ e $x.1 = x$, qualquer que seja $x \in K$.

8) Inverso multiplicativo: todo $x \neq 0$ em K possui um inverso x^{-1}, tal que $x.x^{-1} = 1$.

9) Distributividade: Dados x, y, z quaisquer, em K, tem-se $x.(y + z) = x.y + x.z$.

Vamos agora definir duas operações.

Sejam a, b, c e d números reais então

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Proposição 5: $\mathbb{C}$ é corpo.

Demonstração

Sejam a, b, c, d, e e f números reais e $x = a + bi$, $y = c + di$ e $z = e + fi$.

Adição

Associatividade

$$(x + y) + z = [(a + bi) + (c + di)] + (e + fi) = [(a + c) + (b + d)i] + (e + fi) =$$

$$((a + c) + e) + ((b + d) + f)i = \big(a + (c + e)\big) + \big(b + (d + f)\big)i =$$

$$a + bi + [(c + e) + (d + f)i] = a + bi + [(c + di) + (e + fi)] = x + (y + z).$$

Comutatividade

$$x + y = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i = (c + a) + (d + b)i =$$

$$(c + a) + (d + b)i = c + di + a + bi = y + x.$$

Elemento neutro

Considere o complexo $0 = 0 + 0i$ e note que

$$x + 0 = a + bi + 0 + 0i = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi.$$

$$0 + x = 0 + 0i + a + bi = (0 + a) + (0 + b)i = a + bi.$$

Simétrico

Veja que $-x = -a + (-b)i$ daí

$$x + (-x) = a + bi + (-a) + (-b)i = \big(a + (-a)\big) + \big(b + (-b)\big)i = 0 + 0i = 0.$$

$$(-x) + x = (-a) + (-b)i + a + bi = \big((-a) + a\big) + \big((-b) + b\big)i = 0 + 0i = 0.$$

Multiplicação

A associatividade, a comutatividade e o elemento neutro (1) são similares ao da adição.

Inverso multiplicativo

Seja

$$x^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \left(\frac{-b}{a^2 + b^2}\right)i$$

note que:

$$x.x^{-1} = (a + bi)\left(\frac{a}{a^2 + b^2} + \left(\frac{-b}{a^2 + b^2}\right)i\right) =$$

$$\left(a.\left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right) - b\left(\frac{-b}{a^2 + b^2}\right)\right) + \left(b.\left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right) + a\left(\frac{-b}{a^2 + b^2}\right)\right)i =$$

$$\left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}\right) + \left(\frac{ab}{a^2 + b^2} - \frac{ab}{a^2 + b^2}\right)i = \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}\right) + 0i = 1 + 0 = 1.$$

Distributividade

$$x(y + z) = (a + bi)\big((c + di) + (e + fi)\big) = (a + bi)\big((c + e) + (d + f)i\big) =$$

$$[a(c + e) - b(d + f)] + \big[\big(a(d + f) + b(c + e)\big)i\big] =$$

$$(ac + ae - bd - bf) + (ad + af + bc + be)i =$$

$$ac + ae - bd - bf + adi + afi + bci + bei =$$

$$(ac + adi + bci - bd) + (ae + afi + bei - bf) =$$

$$\big((ac - bd) + (ad + bc)i\big) + \big((ae - bf) + (af + be)i\big) =$$

$$(a + bi)(c + di) + (a + bi)(e + fi) = xy + xz.$$

Antes de prosseguirmos para as operações devemos nos atentar quando falamos em raízes n-ésimas, temos dois casos a considerar. De acordo com [7, cap.1, pág. 31] temos o seguinte:

Seja $n \geq 2$ um número natural e K um corpo. Considere z e w elementos de K. Se w é tal que $w^n = z$ então w é chamado de raiz n-ésima de z.

Obs: se $z = 0$, então a equação $x^n = 0$ tem uma única solução, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo corpo k.

Quando n e $z \in K$ é não nulo, nem sempre existe em K uma raiz n-ésima de z. Vejamos alguns exemplos:

a) Em $\mathbb{Q}$ não há raízes quadradas de 2;

b) Em $\mathbb{R}$ há duas raízes quadradas de 2: $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$;

c) se n é par, em $\mathbb{R}$ não há raízes n-ésimas de números negativos;

d) se n é par, em $\mathbb{R}$ há duas raízes n-ésimas de $a > 0$, o número real positivo $\sqrt[n]{a}$ e o seu simétrico $-\sqrt[n]{a}$;

e) se n é ímpar, em $\mathbb{R}$ há uma única raiz n-ésima de qualquer número real;

f) sendo $z \neq 0$ um número complexo, z possui n raízes n-ésimas.

Vejamos agora algumas informações sobre números complexos.

Vale aqui uma observação, quando se escreve por exemplo $\sqrt{4}$, devemos ler esse símbolo como "raiz quadrada de quatro", e assim, é correto escrever $\sqrt{4} = 2$, e incorreto escrever $\sqrt{4} = \pm 2$. No entanto, para a pergunta "quais são as raízes quadradas de quatro?" é equivalente a " quais são os números que elevado ao quadrado resulta em 4?", agora devemos ir para o campo dos complexos, mas que neste caso vai coincidir com os reais, já que -2 também é real, quero dizer, para esta pergunta a resposta seria ± 2. Vale ressaltar que escrever

$\sqrt{4} = \pm 2$, pode ser correto desde que esteja claro que estejamos trabalhando no universo dos números complexos. Vejamos agora outro exemplo: qual a resposta para $\sqrt[3]{1}$? Devemos ler esse símbolo como "raiz cúbica de um", assim, é correto escrever $\sqrt[3]{1} = 1$. E ao perguntar: "quais as raízes cúbicas de um?", a resposta correta será todos os números do seguinte conjunto $\left\{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Sendo $z = a + bi$ um número complexo, definimos o módulo de z cuja notação é $|z|$ como sendo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Sabemos que a forma trigonométrica de um complexo z é dada por:

$$z = |z|(cos\theta + isen\theta).$$

θ é um argumento de z, bem como $\theta + 2\pi$. Definimos então

$$arg(z) = \{\theta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

O único argumento de z que pertence ao intervalo $(-\pi, \pi]$ é chamado o argumento principal de z e é denotado por $Arg(z)$.

A primeira fórmula de Moivre nos diz que se m é um número inteiro então:

$$z^m = |z|^m(\cos(m\theta) + isen(m\theta)).$$

A segunda fórmula de Moivre nos diz que se n é um número natural maior ou igual a dois e k é um número inteiro então as raízes n-ésimas de z são da forma:

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right).$$

Cabe aqui um comentário: a literatura traz significados distintos para o símbolo $\sqrt[n]{z}$, este pode ser visto como um conjunto (das raízes n-ésimas), mas assim não faria sentido fazer operações do tipo $\sqrt{z}.\sqrt{w} = \sqrt{zw}$ (vamos analisar em breve tal igualdade), Uma alternativa para isso é dizer que o símbolo $\sqrt[n]{z}$ pode representar qualquer dos elementos do conjunto raízes n-ésimas de z e agora faz sentido operações do tipo mencionada acima.

Vamos agora definir a função exponencial complexa segundo [4, cap. 2, pág. 26]. Trata-se da função $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = e^z$.

Vale ressaltar que tal definição na literatura é "construída" a partir de igualdades que envolvem séries de Taylor, que não serão abordadas aqui; para mais informações é recomendável [4, cap. 1, pág. 13]. Dessas igualdades é que surge a famosa identidade de Euler:

$$e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta).$$

Vamos provar agora uma propriedade muito importante com relação a exponencial complexa. Considere z e w números complexos então $e^z.e^w = e^{z+w}$.

Demonstração

Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$, então:

$$e^z.e^w = e^{a+bi}e^{c+di} = e^a(cos(b) + isen(b))e^c(cos(d) + isen(d)) =$$

$$e^a e^c\big(cos(b + d) + isen(b + d)\big) = e^a e^c e^{i(b+d)} = e^{a+c+ib+id} = e^{z+w}.$$

Observe que, sendo $z = x + yi$, então

$$e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x(cos(y) + isen(y)),$$

daí, $|e^z| = e^x$. Agora podemos representar um número complexo de outra forma

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Vale ressaltar que a função exponencial na variável complexa z não é injetiva. Para entender melhor observe que:

$$e^{i\pi} = cos(\pi) + isen(\pi) = -1 = cos(3\pi) + isen(3\pi) = e^{i(3\pi)}.$$

De fato, a verdade é que:

$$e^z = e^w \Leftrightarrow z - w = 2k\pi i.$$

Demonstração

$\Longrightarrow$)

Sendo $z = a + bi$ e $w = c + di$ temos que

$$e^a(cos(b) + isen(b)) = e^c(cos(d) + isen(d))$$

Da igualdade de números complexos segue que $a = c$ e $b = d + 2k\pi$ e daí $z - w = 2k\pi i$.

$\Leftarrow$)

$$z = w + 2k\pi i \Longrightarrow e^z = e^{w+2k\pi i} = e^{c+i(d+2k\pi)} = e^c(cos(d) + isen(d)) = e^w.$$

Vamos agora definir o logaritmo complexo na variável $z \neq 0$ segundo [3, cap. 1, pág. 15].

$$ln(z) = \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\}.$$

De acordo com o que foi mostrado anteriormente, é fácil ver que se w é um logaritmo de z, o mesmo ocorre com $w + 2k\pi$. Agora veja que:

$$e^w = z = |z|e^{i\theta} = e^{ln|Z|}e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{ln|Z|+i(\theta+2k\pi)}.$$

Portanto,

$$ln(z) = \{ln|z| + i(Arg(z) + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Sendo z e w números complexos com $z \neq 0$, definimos a potencia com expoente complexo (segundo [8,cap. 2, pág. 39]) da seguinte maneira

$$z^w = e^{wln(z)} = \left\{e^{w[ln|z|+i(Arg(z)+2k\pi)]} : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Algumas propriedades da função exponencial complexa são válidas assim como no caso real, mas outras não, isto é devido a não injetividade no caso complexo, vejamos quais são válidas e quais não são, segundo [8, cap. 2, pág. 38-40].

Considere agora z, w, α e β números complexos com z e w não nulos, e n e m naturais.

Propriedades que valem em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{C}$:

1) $ln(zw) = ln(z) + ln(w) \quad (z, w \neq 0)$

Antes de demonstrá-la vamos explicar tal igualdade, já que a primeira vista estaríamos manipulando conjuntos. Esta igualdade deve ser entendida do seguinte modo: dado um valor de $lnzw$, existem valores de $ln(z)$ e $ln(w)$ cuja soma seja o valor dado, e, reciprocamente, a soma de dois valores quaisquer de $ln(z)$ e $ln(w)$ é sempre um valor de $ln(zw)$.

Demonstração

Note que

$$ln(zw) = ln|zw| + i(arg(zw) + 2k\pi) = ln|z| + ln|w| + i(arg(z) + arg(w) + 2t\pi).$$

$$ln(z) + ln(w) = ln|z| + i(arg(z) + 2l\pi) + ln|w| + i(arg(w) + 2p\pi) =$$

$$ln|z| + ln|w| + i(arg(z) + arg(w) + 2(l + p)\pi),$$

do fato que todo número inteiro t pode ser escrito como soma de dois outros inteiros, $m + n$, e vice e versa então a propriedade está demonstrada.

2) $ln\left(\frac{z}{w}\right) = ln(z) - ln(w)$

A demonstração é análoga à anterior.

3) $\alpha ln(zw) = \alpha ln(z) + \ \alpha ln(w)$

A demonstração é análoga à 1).

4) $ln(z^n) = ln(z) + \cdots + ln(z)$ (n parcelas)

A demonstração segue de 1).

5) $(zw)^\alpha = z^\alpha w^\alpha$

Demonstração

$$z^\alpha w^\alpha = e^{\alpha ln(z)} e^{\alpha ln(w)} = e^{\alpha ln(z) + \alpha ln(w)} = e^{\alpha ln(zw)} = (zw)^\alpha.$$

Propriedades que valem em $\mathbb{R}$ mas nem sempre valem em $\mathbb{C}$:

1) $ln(z^n) = nln(z)$

Tome $n = 2$ e observe que:

$$ln(z^2) = ln|z^2| + i(arg(z^2) + 2k\pi) = 2\,ln|z| + i(2arg(z) + 2t\pi).$$

$$2ln(z) = 2[ln|z| + i(arg(z) + 2l\pi)] = 2\,ln|z| + i(2arg(z) + 4l\pi),$$

todo múltiplo de 4 é múltiplo de 2, mas não vale o contrário e daí nem sempre podemos ter a igualdade.

2) $z^{\alpha+\beta} = z^{\alpha}z^{\beta}$

Tome $\alpha = \beta = \frac{1}{2} \cdot$ Ficaremos com

$$z^{\alpha+\beta} = z^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = z,$$

$$z^{\alpha}z^{\beta} = z^{\frac{1}{2}}.z^{\frac{1}{2}} = \pm z,$$

que claramente são distintos.

3) $(z^{\alpha})^{\beta} = z^{\alpha\beta}$

Tome $\alpha = n$ e $\beta = \frac{1}{nm} \cdot$ Ficaremos com

$$(z^{\alpha})^{\beta} = (z^{n})^{\frac{1}{nm}},$$

$$z^{\alpha\beta} = z^{\frac{1}{m}},$$

que claramente são distintos pois o primeiro assume nm valores e o segundo, n valores.

Vamos agora restringir o domínio da função exponencial a fim de que ela se torne injetiva e com isso algumas propriedades se tornem válidas no domínio especificado.

Seja

$$S = \left\{a + bi \middle| a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1} \text{ e } -\pi < b \leq \pi\right\}.$$

A função que desejamos é $f: S \to \mathbb{C}^{*}$ tal que $f(z) = e^{z}$.

Dada esta restrição, com relação ao logaritmo complexo e colocando $Arg(z) = \theta$ ficaremos com:

$$ln(z) = ln|z| + i\theta$$

observe que não temos mais um conjunto.

Considerando esta restrição a seguinte igualdade torna-se verdadeira $(e^{\alpha})^{\beta} = e^{\alpha\beta}$. Vamos provar isso. Seja $\alpha = a + bi$, então

$$(e^{\alpha})^{\beta} = e^{\beta ln(e^{\alpha})} = e^{\beta(ln(e^{a+bi}))} = e^{\beta(ln|e^{a+bi}|+ib)} = e^{\beta(ln(e^{a})+ib)} = e^{\beta\alpha} = e^{\alpha\beta}.$$

Note que com esta restrição fica válida uma das propriedades que antes nem sempre era verdadeira, vejamos:

$$z^{\alpha+\beta} = e^{(\alpha+\beta)ln(z)} = e^{(\alpha+\beta)(ln|z|+i\theta)} = e^{\alpha\, ln|z|+\alpha i\theta+\beta\, ln|z|+\beta i\theta} = e^{\alpha(ln|z|+i\theta)+\beta(ln|z|+i\theta)} =$$

$$e^{\alpha(ln|z|+i\theta)}.e^{\beta(ln|z|+i\theta)} = e^{\alpha ln(z)}.e^{\beta ln(z)} = z^{\alpha}z^{\beta}.$$

Daqui pra frente neste trabalho, esta restrição será sempre adotada.

Vamos ver algumas observações sobre potência de números complexos comentadas em [8, cap.1, pág.12-14].

A igualdade $(z^a)^b = (z^b)^a = z^{ab}$ não é válida para quaisquer a e b reais. Se a e b são naturais sim, mas se são racionais nem sempre. Temos que se a e b são naturais e primos entre si então é verdade que $(z^a)^{\frac{1}{b}} = \left(z^{\frac{1}{b}}\right)^a = z^{\frac{a}{b}}$. A igualdade aqui em questão quer dizer que o conjunto dos elementos representados por $(z^a)^{\frac{1}{b}}$ é o mesmo de $\left(z^{\frac{1}{b}}\right)^a$ que é o mesmo de $z^{\frac{a}{b}}$.

Embora seja sempre verdade que $\left(z^{\frac{1}{b}}\right)^a = z^{\frac{a}{b}}$ como podemos ver a seguir:

$$\left(z^{\frac{1}{b}}\right)^a = \left\{[|z|(\cos(\theta) + isen(\theta))]^{\frac{1}{b}}\right\}^a = \left[\left(\sqrt[b]{|z|}\right)\left(cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{b}\right) + isen\left(\frac{\theta+2k\pi}{b}\right)\right)\right]^a =$$

$$|z|^{\frac{a}{b}}\left(cos\left(\frac{a\theta+2ak\pi}{b}\right) + isen\left(\frac{a\theta+a2k\pi}{b}\right)\right) =$$

$$|z|^{\frac{a}{b}}\left(cos\left(\frac{a}{b}(\theta+2k\pi)\right) + isen\left(\frac{a}{b}(\theta+2k\pi)\right)\right) = z^{\frac{a}{b}}.$$

Vejamos mais um exemplo onde falha a igualdade $(z^a)^b = (z^b)^a$. Tome $z = i$, $a = 4$ e $b = 2$.

$$(z^a)^{\frac{1}{b}} = (i^4)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = \pm 1$$

$$\left(z^{\frac{1}{b}}\right)^a = \left(i^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 1.$$

2.3 Operações

Vejamos agora algumas operações entre números complexos.

1) Multiplicação entre complexos não reais

Veremos com exemplos que encontraremos tanto número real quanto complexo não real.

$$i.i = i^2 = -1$$

$$i(1+i) = i - 1$$

2) Multiplicação entre complexo não real e real

$$c(a+bi) = ca + cbi$$

Sendo $c \neq 0$, teremos um complexo não real, se $c = 0$ teremos claramente um número real, ou seja, um número real multiplicado por um complexo não real resulta em real se e somente se este real é 0.

3) Soma entre complexos não reais

Veremos com exemplos que encontraremos tanto número real quanto complexo não real.

$$(i) + (1-i) = 1$$

$$(i) + (1+i) = 1 + 2i$$

4) Soma entre complexo não real e real

$$c + (a+bi) = (a+c) + (bi)$$

Sempre teremos um número complexo não real.

5) Exponenciação entre complexos não reais

Note que:

$$e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = i \Longrightarrow \left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right)^i = i^i \Longrightarrow i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

$$i^{1+i} = i.i^i = ie^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Vemos com exemplos que podemos obter tanto número real quando complexo não real.

6) Exponenciação com base complexa não real e expoente real

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

Vemos com exemplos que podemos obter tanto número real quanto complexo não real.

7) Exponenciação com base real e expoente complexo não real

$$(e^{\pi})^i = e^{i\pi} = \cos(\pi) + isen(\pi) = -1$$

$$e^i = e^{i.1} = \cos(1) + isen(1)$$

Vemos com exemplos que podemos obter tanto número real quanto complexo não real.

3 CONSIDERAÇÕES SOBRE NÚMEROS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES

3.1 Um pouco de história e algumas considerações

Um número é dito algébrico se for raiz de algum polinômio com coeficientes inteiros. Vejamos alguns exemplos desses números para ilustrar melhor a definição.

4 é algébrico pois é raiz do polinômio $p(x) = x - 4$.

$\sqrt[3]{5}$ é algébrico pois é raiz do polinômio $p(x) = x^3 - 5$.

Um fato curioso é que o conjunto dos números algébricos (cuja notação é $\overline{\mathbb{Q}}$) é um corpo. Isto será mostrado em partes ao longo do texto.

Um número é dito transcendente quando não for algébrico. Vale ressaltar que o conjunto dos números transcendentes (cuja notação é $\mathbb{T}$) não é um corpo como será visto mais adiante. Segundo Euler os números transcendentes receberam esse nome porque transcendem o poder das operações algébricas. A definição destes foi dada no século XVIII, mas uma teoria veio apenas no século seguinte, em 1844 por Liouville, com o que hoje é conhecido como números de Liouville. A ideia dele foi criar uma propriedade que só é satisfeita por números algébricos; assim, se um número não satisfaz esta propriedade então ele será transcendente. Para mais informações sobre estes números é recomendável consultar [15, cap. 5].

Ainda no século XIX, em 1873, Hermite provou a transcendência de e e em 1884, Lindemann ampliou as ideias de Hermite e como consequência disso, provou a transcendência de π. Os números transcendentes aparecem também na solução da questão grega na quadratura do círculo e na famosa lista dos 23 problemas de Hilbert.

Neste trabalho vamos demonstrar a transcendência de e e de π por meio do teorema de Hermite-Lindemann, que será anunciado na próxima página. No entanto, outra demonstração para cada número pode ser encontrada em [21]. A irracionalidade desses números neste trabalho segue da transcendência deles. No entanto, provas independentes da transcendência podem ser encontradas em [15, cap.3.].

Uma pergunta natural surge: Existe algum número que não é algébrico? Responderemos a seguir.

Proposição 6: O conjunto dos números algébricos é enumerável.

Demonstração

Considere o polinômio de coeficientes inteiros

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Definimos a altura de um polinômio como sendo

$$h(p) = |a_n| + \cdots + |a_1| + |a_0| + n - 1.$$

Pelo teorema fundamental da álgebra, cada polinômio de grau n tem n raízes complexas.

Note que para cada altura dada, temos um número finito de polinômios, por exemplo, os polinômios com altura 1, são

$$p(x) = x \ \ e \ g(x) = -x$$

Temos assim que as raízes de todos os polinômios com uma dada altura formam um conjunto finito (dada uma altura h, esta terá n polinômios associados, e cada polinômio tem um número finito de raízes, e daí também será finito o total de raízes desses n polinômios) e conseguimos enumerar essas alturas, ou seja, temos uma união enumerável de conjuntos finitos, o que resulta em um conjunto enumerável.

Como consequência, então existem números transcendentes pois o conjunto $\mathbb{C}$ é não enumerável e $\overline{\mathbb{Q}}$ é enumerável, então existe um conjunto $\mathbb{T} = \mathbb{C} - \overline{\mathbb{Q}}$ não enumerável, já que $\mathbb{C} = \overline{\mathbb{Q}} \cup \mathbb{T}$.

Antes enunciar os dois teoremas centrais desse capítulo precisamos entender o significado da expressão “linearmente independente”.

Seja o corpo $A \subset \mathbb{C}$. Dizemos que o conjunto $X = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{C}$ é linearmente independente (L.I.) sobre A se, e somente, uma igualdade do tipo

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0,$$

com os $\alpha_i \in A$, só for possível para $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Caso contrário é linearmente dependente (L.D.) sobre A.

Vamos agora enunciar dois teoremas (cujas demonstrações podem ser vistas em [15, apêndice A e B]) que vão nos permitir avaliar se vários números são ou não transcendentes sem a necessidade de usar polinômios.

Teorema (Gelfond-Schneider): seja $\alpha \notin \{0,1\}$ um número algébrico e β um número algébrico não racional, então α^{β} é transcendente.

Teorema (Hermite-Lindemann): se $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ são números algébricos distintos, então $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_m}$ são linearmente independente sobre o corpo dos números algébricos.

3.2 Operações

1) Multiplicação de algébrico por algébrico

Vamos mostrar que o produto de dois números algébricos resulta em um número algébrico.

Sejam α e β números algébricos. Então existem polinômios p e q com coeficientes inteiros tais que $p(\alpha) = q(\beta) = 0$, onde

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

e

$$q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$$

Assim,

$$a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} \dots + a_1 \alpha + a_0 = 0 \Longrightarrow \alpha^n = \left(-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)\alpha^{n-1} - \cdots \left(-\frac{a_1}{a_n}\right)\alpha - \frac{a_0}{a_n}.$$

Ou seja, α^n foi escrito como combinação linear de $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$. Note que multiplicando a expressão anterior por α teremos que α^{n+1} também será escrito como combinação linear de $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$ pois poderemos substituir α^n pela expressão dada anteriormente. Com esse raciocínio todas as potências α^j $(j \geq n)$ podem ser expressas como combinação linear de $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$. Com um raciocínio análogo concluímos que toda potência $\beta^k (k \geq m)$ pode ser escrita como combinação linear de $\{1, \dots, \beta^{m-1}\}$. Observe que os coeficientes dessas combinações lineares são números racionais.

Considere agora a sequência

$$1, (\alpha\beta), (\alpha\beta)^2, \dots, (\alpha\beta)^{mn}$$

Note que todos os números acima podem ser expressos como combinação linear de $\alpha^j\beta^k$ com $0 \leq j \leq n-1$ e $0 \leq k \leq m-1$. Veja agora que temos $mn+1$ números escrito como combinação linear de mn números, ou seja, os números da lista acima estão no conjunto gerado por $\alpha^j\beta^k$, e, da álgebra linear[1], sabemos que qualquer conjunto com mais de mn elementos será linearmente dependente sobre o espaço considerado (neste caso, $\mathbb{Q}$), portanto existem r_i, não todos nulos, tais que

$$r_0.1 + r_1(\alpha\beta) + \cdots + r_{mn}(\alpha\beta)^{mn} = 0,$$

mostrando assim que $(\alpha\beta)$ é raiz de um polinômio com coeficientes racionais, portanto, algébrico.

2) Multiplicação de transcendente por transcendente

Observe que o número 2^i é transcendente, pelo teorema de Gelfond-Schneider. Agora veja que:

$$(2^i)(2^i) = 2^{2i}$$

Analogamente temos que:

$$(2^i)(2^{-i}) = 1$$

Pelo teorema de Gelfond-Schneider o primeiro exemplo é um número transcendente. Vemos então que podemos obter tanto um transcendente quando um algébrico.

3) Multiplicação de algébrico por transcendente

Se $\alpha = 0$ obteríamos um número algébrico.

Sejam α um número algébrico não nulo e β um número transcendente, agora observe

$$x = \alpha\beta \Rightarrow \left(\frac{x}{\alpha}\right) = \beta.$$

---

[1] A proposição usada aqui foi exatamente esta: se um espaço vetorial V tem dimensão n então qualquer $n+1$ vetores de V são linearmente dependentes.

Se x fosse algébrico então β também seria algébrico, já que $\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ é algébrico (será mostrado que o inverso de um número algébrico também é algébrico, início do apêndice C) e produto de algébrico é algébrico, um absurdo. Portanto, x é transcendente.

4) Soma de algébrico com algébrico

Na multiplicação, trocando a sequência

$$1, (\alpha\beta), (\alpha\beta)^2, \ldots, (\alpha\beta)^{mn}$$

Por

$$1, (\alpha + \beta), (\alpha + \beta)^2, \ldots, (\alpha + \beta)^{mn}$$

é fácil ver que esses números podem ser escritos como combinação linear de $\alpha^j\beta^k$ com $0 \leq j \leq n - 1$ e $0 \leq k \leq m - 1$, graças ao binômio de newton. E daí o resultado segue de modo análogo como foi feito com o produto.

5) Soma de transcendente com transcendente

$$2^i + 2^i = 2.2^i = 2^{i+1}$$

$$2^i + \left(-2^i\right) = 0$$

Vemos que poderemos obter os dois tipos de números.

6) Soma de algébrico com transcendente

Sejam α um número algébrico não nulo e β um número transcendente, agora observe

$$x = \alpha + \beta \Longrightarrow x - \alpha = \beta$$

Se x fosse algébrico então β também seria algébrico, já que $(-\alpha)$ é algébrico (será mostrado que o oposto de um número algébrico também é algébrico, no início do apêndice C) e soma de algébrico é algébrico, um absurdo. Portanto, x é transcendente.

7) Exponenciação com base e expoente algébrico

$$1^2 = 1$$

$$2^i$$

Vemos que poderemos obter os dois tipos de números.

8) Exponenciação com base e expoente transcendente

$$e^{ln2} = 2$$

$$e^{\pi}$$

No apêndice C será mostrado que e, $ln2$ e e^{π} são transcendentes. Vemos então que poderemos obter os dois tipos de números.

9) Exponenciação com base algébrico e expoente transcendente

$$1^{\pi} = 1$$

$$2^{\frac{1}{ln2}} = e$$

Vemos que poderemos obter os dois tipos de números.

10) Exponenciação com base transcendente e expoente algébrico

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$e^2$$

Pelo teorema de Gelfond-Schneider $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é transcendente. Será mostrado no apêndice C que e^2 é transcendente. Vemos, com exemplos, que podemos obter os dois tipos de números.

3.3 Curiosidades

As curiosidades a seguir foram retiradas de [15, cap.1, pág. 2 e 3].

Um fato interessante é que existem vários números que não se sabe ainda se são ou não transcendentes como por exemplo $e + \pi, e\pi, \zeta(2n + 1)$ $(n \in \mathbb{N} - \{0,1\})$.

A seguir anunciamos o principal problema em aberto na teoria dos números transcendentes

Conjectura (Schanuel): Sejam $x_1, \dots, x_n$ números complexos linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Então existem pelo menos n números algebricamente independentes, dentre $x_1, \dots, x_n, e^{x_1}, \dots, e^{x_n}$.

Muitos números teriam a transcendência descoberta se a conjectura de Schanuel fosse provada, por exemplo, e^e, $ln(ln(2))$, $ln\pi$. Mesmo que esta importante conjectura fosse provada ainda existiriam problemas em aberto, como por exemplo $\zeta(2n+1)$ $(n \in \mathbb{N} - \{0,1\})$ e γ (constante de Euler-Mascheroni).

4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A seguir será dada uma sugestão de como o professor pode aplicar este material numa turma de olimpíada que estejam cursando o final do 3° ano do ensino médio, pois os alunos já terão estudado sobre os principais conjuntos numéricos, e daí, como alguns dos tópicos não serão mostrados a primeira vez a eles, a aula fluirá mais rápido. Estamos supondo aqui que o público já tem alguma experiência com aulas de olimpíadas a fim de que não haja surpresa com o "nível" dos tópicos aqui apresentados.

Geralmente, numa turma olímpica os assuntos são aprofundados, alguns assuntos são vistos na sala de aula convencional e revisto em aulas olímpicas, outros por serem mais específicos são apenas vistos em aulas olímpicas. A quantidade de aulas será de 12 a 15, dependendo do ritmo da turma, cada aula com duração de 1 hora, pensando nisso sugerimos a seguinte sequência:

Capítulo 1

Obs.: o tópico sobre história, sobre corte e o teorema sobre a existência de raiz são voltados para o professor, e não são recomendados para ministrar para a turma pois são muito técnicos.

Aula 1: as várias formas de um número racional, mostrar alguns números irracionais e demonstrar sua irracionalidade, proposição 1 e 2, bem como fazer alguns exercícios.

Esboço

Dar a definição de número racional, e dela mostrar que alguns decimais também são racionais, e daí perceber que um número racional tem mais de uma representação, como por exemplo:

$$3{,}14=\frac{314}{100}=\frac{157}{50} \qquad \frac{4}{-3}=\frac{-4}{3}=-1{,}333\ldots \qquad -\frac{2{,}5}{2}=-\frac{5}{4}=-1{,}25$$

$$\frac{20}{4}=\frac{-10}{-2}=5=5{,}000\ldots \qquad \sqrt{9}=3 \qquad 23{,}48979797\ldots=\frac{232.549}{9900}$$

Os números irracionais podem ser introduzidos através de aproximações começando com a pergunta: qual o número que elevado ao quadrado resulta em 2? Os alunos podem usar uma calculadora e perceberem que tal número não existe (considerando que usarão números decimais na calculadora). Dada tal percepção agora está na hora de mostrar que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

O próximo passo é questionar se números do tipo $\sqrt{p}$ com p primo é também um número irracional. Não há necessidade de demonstrar isto visto que a proposição 1 já englobará este caso. Outros questionamentos também são válidos, exemplo: também são irracionais os números $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[18]{75}$ ...? Questionamentos desse tipo são abordados na proposição 1.

Proposição 1: Sejam $n, k, m \in \mathbb{N}$, com $m \geq 2$. Se $n \neq k^m$ (para todo k), então $\sqrt[m]{n}$ é irracional.

Outra questão interessante que pode ser mostrada é sobre a irracionalidade dos números

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} \qquad \sqrt[3]{3-\sqrt{7}} \qquad \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

O próxima questão a ser abordada diz respeito ao fato de existem infinitos números irracionais. Para isso vamos mostrar que se m é inteiro então $m+\sqrt{2}$ é irracional, como existem infinitos números inteiros então existem infinitos números irracionais. Uma pergunta torna-se inevitável: existem mais números racionais ou irracionais? Precisaremos agora do conceito de enumerabilidade.

Dado esse conceito, para exemplificar a ideia de bijeção de um modo simples usaremos a função $f: \{1,2,4\} \rightarrow \{2,4,8\}$ tal que $f(x) = 2x$. Após isso, mostrar que existe uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e o conjunto dos números pares, usando a lei de correspondência acima. Em seguida mostrar uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ e por fim mostrar que $\mathbb{Q}$ é enumerável, que é exatamente o que a proposição 2 aborda.

Proposição 2: o conjunto dos racionais é enumerável.

Os exercícios recomendados para esta aula são as de número 2,4,5,7,8,16 e 19 do apêndice A.

Aula 2: Definir potenciação, destacar as operações e abordar a curta seção 2.1.

O destaque aqui seria para as operações e na seção 2.1 fazer com que o aluno tenha familiaridade com enumerabilidade.

Esboço

A aula se inicia definindo potenciação, inicialmente com o exponente no conjunto dos números naturais (aqui é importante salientar que a igualdade $a^0 = 1$ (com $a \neq 0$) faz parte da definição e não é uma propriedade!), depois no conjunto dos números inteiros (aqui vale salientar que a definição deste é elaborada de modo a continuar a valer as propriedades do conjunto anterior, ou seja, considerando apenas o expoente natural temos que $a^m a^n = a^{m+n}$, a fim de preservar tal igualdade com exponente inteiro faz sentido definir $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, pois $a^{-m}a^m = a^0 = 1$.), seguido do conjunto dos números racionais. Com relação ao expoente irracional, a fim de não querer usar a ideia de limite para não ter que entrar em um outro assunto, podemos estimar o valor de um número com expoente irracional, como $1{,}42 > \sqrt{2} > 1{,}41$ então, $2{,}675 \cong 2^{1{,}42} > 2^{\sqrt{2}} > 2^{1{,}41} \cong 2{,}657$. Deixando claro que mesmo o expoente sendo irracional, as propriedades de potenciação permanecem válidas.

O próximo momento da aula é estudar se o conjunto dos números racionais e irracionais são fechados para uma determinada operação, para iremos usar a seção 1.2. Note que na seção mencionada os exemplos dados são sempre com dois elementos de um dado conjunto. É interessante pontuar que algumas operações para uma dada afirmação feita lá continua valendo para uma quantidade maior de elementos, por exemplo, foi mostrado que a soma de dois números racionais resulta em um número racional, mas isto também vale para a soma de três números racionais, ou até mesmo de mil, na verdade qualquer quantidade finita! Quando consideramos uma quantidade infinita de elementos podemos nos surpreender como mostra a questão 9 do apêndice A. Um exemplo importante de que soma/produto de números irracionais resulta em número racional é o par $a + \sqrt{b}$ e $a - \sqrt{b}$, onde a e b são racionais com $b > 0$. A questão 11 do apêndice A traz uma proposição bastante interessante envolvendo pares do tipo mencionado.

O último tópico da aula é voltado para responder o fato do conjunto dos números irracionais ser "maior" do que o conjunto dos números racionais. Para isso mostramos antes que o "tamanho" do intervalo (0,1) é o mesmo de toda a reta real, fazemos isso através de uma manipulação da função tangente, como pode ser visto na seção 2.1. Em seguida vamos para a proposição 3, onde mostramos que $\mathbb{R}$ é não enumerável e, por fim, vamos para a proposição 4, mostrando que o conjunto dos números irracionais é não enumerável, mostrando que na reta existem "mais" números irracionais do que números racionais. Um ótimo exercício para esse fim de aula aproveitando este tópico é a questão 1 do apêndice B que trata da densidade dos racionais e dos irracionais na reta.

Aula 3 e 4: exercícios.

Esboço

Esta aulas são dedicadas a terminar a lista de exercícios do apêndice A, ou pelo menos, resolver o maior número possível delas. Destaco agora as questões mais importantes: 3, 4, 6, 7, 11, 12, 13,15 e 18.

Capítulo 2

Obs. 1: a proposição 5, que diz respeito a corpo, é voltada para o professor, e não é recomendável para a turma, pois é um conteúdo muito técnico.

Obs. 2: se os alunos ainda não estudaram números complexos ou tem uma base fraca neste assunto o professor pode aproveitar para revisar ou introduzir com mais calma este conteúdo.

Aula 5: fatos históricos, fórmula de Moivre e raízes n-ésimas.

Está se levando em conta que não é a primeira vez que a turma se depara com números complexos, seria então uma aula de revisão de alguns tópicos e também abordar a discussão sobre raízes n-ésimas que se encontra nas páginas 26 e 27. Vale ressaltar que não é recomendável fazer a abordagem sobre corpo, visto que é um conteúdo mais técnico e não será trabalhado isso a fundo.

Esboço

A aula se inicia com fatos históricos destacando a equação $x^3 - 15x + 4 = 0$ resolvida por Bombelli seguindo a discussão na seção 2.2 até a definição do conjunto dos números complexos.

O próximo tópico diz respeito a discussão da igualdade $\sqrt{4} = \pm 2$ que será feita seguindo a página 27, frisando que tal igualdade está correta se estivermos considerando o conjunto dos números e complexos e por isso não está infringindo o teorema da existência de raiz n-ésima da página 12. Neste tópico é importante falar ainda que a propriedade $\sqrt{zw} = \sqrt{z}\sqrt{w}$ não é válida para todos os complexos z e w, para ver isto basta tomar $i = z = w$.

Feita essa discussão, vamos seguir para as fórmulas de Moivre, primeiro a de potenciação e depois a de radiciação. Agora até o fim da aula deve-se apenas resolver questões mais básicas a fim de que os alunos trabalhem com tranquilidade no futuro com as fórmulas de Moivre, vejamos alguns exemplos de questões:

1) Determinar os valores do natural n para os quais os seguintes números são reais:

a) $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ b) $(1+i)^n$ c) $i\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$

2) Seja z um número complexo satisfazendo $Re(z)>0$ e $(z+i)^2+|\bar{z}+i|^2=6$. Determine o menor n natural para que z^n é um imaginário puro.

3) Se $w\neq 1$ é uma raiz cúbica da unidade e k é um número inteiro calcule o valor de

$$w^{2k}+w^k+1.$$

4) Mostre que a soma das raízes da unidade é igual a zero.

5) Calcule o valor das raízes cúbicas de i e das raízes quartas de $16i$.

Aula 6: função exponencial complexa, logaritmo complexo e exponenciação entre números complexos

Como a parte de logaritmo pode causar certa estranheza, é recomendável fazer vários exemplos, bem como a parte de exponenciação entre complexos.

Esboço

Definir a função exponencial complexa do modo como está na página 28, provar a importante propriedade $e^z e^w=e^{z+w}$ e depois mostrar que esta função é periódica, seguindo as páginas 28 e 29. Feito isso, agora deverá ser mostrada a famosa relação de Euler

$$e^{i\theta}=cos\theta+isen\theta$$

mesmo que sem demonstração, já que esta envolve assuntos que não são aqui abordados (série de Taylor). A fim de se acostumar com esta função faremos agora algumas questões:

1) Determine os valores de z tais que $e^{2z-1}=1$.

2) Mostre que $e^{-|z|}\leq|e^z|\leq e^{|z|}$ para todo z complexo.

3) Mostrar que $e^{z+i\pi}=-e^z$.

4) Calcular a parte real e imaginária, o módulo e o argumento da função $f(z)=e^{iz}$.

Feito este tópico, o próximo é definir a função logaritmo complexo de acordo com a página 30, e em seguida fazer alguns exemplos:

1) Calcule o valor de:

a) $ln(i)$ b) $ln(1+i)$ c) $ln(-1)$

2) Explique por que $2lnz \neq lnz + lnz$.

O último tópico da aula é dedicado a exponenciação entre números complexos que será feita de acordo com a página 30 e em seguida fazer alguns exemplos:

1) Calcule o valor de:

a) i^i b) $(-1)^i$ c) $(1+i)^i$ d) i^{1+i}

Aula 7: propriedades dos logaritmos complexos e restrição da função exponencial complexa

Esboço

A aula se iniciará mostrando as propriedades dos logaritmos complexos e aquelas que valem em $\mathbb{C}$ mas não valem em $\mathbb{R}$, e para isto vamos usar a página 30, 31 e 32.

Após isso abordar sobre a restrição da função exponencial complexa de acordo com a página 32, enfatizando que com a sua injetividade ganhamos algumas propriedades: agilidade na hora de fazer questões e o logaritmo complexo deixa de ser um conjunto.

O próximo tópico corresponde a “permutação” dos expoentes com uma base complexa, seguindo a discussão feita na página 33. As questões 5 e 7 do apêndice B são ótimas para esse tópico.

Aula 8: operações e exercícios.

Esboço

A aula se iniciará com o tópico sobre operações seguindo a seção 2.3, após isso iremos para os exercícios. Como este capítulo tem menos questões que o anterior, imagina-se que nesta aula será possível terminar todos as questões propostas, ou pelo menos boa parte dela. Caso não dê tempo de fazer boa parte deles, então uma outra aula deve ser usada para tal.

Capítulo 3

Aula 9: fatos históricos, definição, proposição 6 e provar que a multiplicação entre algébricos é algébrico.

Esboço

A aula se iniciará com a definição de número algébrico seguido alguns exemplos: 4, $\frac{3}{2}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{3-\sqrt{2}}$, i e $cos\left(\frac{\pi}{2020}\right)+isen\left(\frac{\pi}{2020}\right)$. Após isso um breve comentário histórico, seguindo a página 36.

O próximo tópico seria mostrar que o produto de números algébricos resulta em um número algébrico, seguindo o início da proposição 3.2 com a seguinte observação: nesta prova é usado uma proposição da álgebra linear "se um espaço vetorial V tem dimensão n então qualquer $n+1$ vetores de V são linearmente dependentes", como o conceito de dimensão não é visto no ensino básico, a prova desta afirmação pode tomar muito tempo, visto que se faz necessário a explicação desse conceito, o professor deve ficar atento a isso.

A seguir é natural perguntar se existem infinitos números algébricos. Caso sim, será que é um conjunto enumerável? Para ver que são infinitos, basta mostrar que se m é inteiro então o mesmo é raiz do polinômio $p(x)=x-m$. O caso m racional vem a seguir, sendo $m=\frac{p}{q}$ então este é raiz do polinômio $\mathrm{q}(x)=qx-p$. Com relação aos irracionais, seja p um número primo, logo $\sqrt{p}$ é irracional, e este é raiz do polinômio $r(x)=x^2-p$. Assim, fica provado que todo racional é algébrico, e o mesmo acontece com alguns irracionais. É uma ótima hora de questionar se o conjunto dos números algébricos é um conjunto enumerável, já que contêm $\mathbb{Q}$ e um pouco mais. Agora é hora de provar a proposição 6.

Proposição 6: O conjunto dos números algébricos é enumerável.

Para finalizar a aula é importante ser dito que o conjunto dos números algébricos e dos números transcendentes constitui uma partição dos números reais.

Aula 10: operações, teorema de Gelfond-Schneider e o teorema de Hermite-Lindemann.

Esboço

A aula se iniciará respondendo a pergunta deixada lá na aula 2 a respeito da irracionalidade de $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, e para isso vamos apresentar o teorema de Gelfond-Schneider. Após isso outros exemplos de números transcendentes serão dados, como: $(-1)^i$, i^i e $5^{\sqrt{3}}$.

Teorema (Gelfond-Schneider): seja $\alpha \notin \{0,1\}$ um número algébrico e β um número algébrico não racional, então α^β é transcendente.

O próximo tópico é voltado para a apresentação do teorema de Hermite-Lindemann, este tem o objetivo de provar que e e π são números transcendentes. Por isso, depois da apresentação do teorema será feita as questões 1 e 6 do apêndice C.

Teorema (Hermite-Lindemann): se $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ são números algébricos distintos, então $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_m}$ são linearmente independente sobre o corpo dos números algébricos.

A parte final da aula é dedicada as operações, como se pode ver na seção 3.2.

Aula 11 e 12: exercícios.

Esboço

A ideia é fazer o maior número de exercícios possíveis do apêndice C, destaco os mais importantes que ainda não foram feitos: 3, 5, 7, 8, 13 e 14.

CONCLUSÃO

Observou-se que a construção dos números racionais e irracionais foi um processo lento e que se começou a operar com certos símbolos antes mesmo de defini-los, embora em algum momento da história tal definição mostrou-se bastante necessária. Vimos também que apesar da quantidade de números racionais e irracionais serem infinitas, existem mais irracionais do que racionais.

Foi interessante ver como um novo conjunto (transcendentes) poderia nos ajudar a resolver problemas para saber sobre irracionalidade de um número através do teorema de Gelfond-Schneider, mostrando assim que uma introdução de números transcendentes no ensino básico seria bem vinda. Vimos também que com teorema de Hermite-Lindemann a transcendência de e e π é mostrada de modo simples.

Foi visto também a importância de se dizer que certos símbolos de fato fazem sentido e que são importantes para a evolução da matemática. Ressaltou-se que nem toda a propriedade que é válida no universo dos números reais valem no universo dos números complexos. Sobre números complexos foi estudado a exponenciação com complexos, dando um melhor sentido a conhecida igualdade $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

REFERÊNCIAS

[1] ANDERSON, Daniel; COLE, Jeffery; DRUCKER, Daniel. Complete Solutions Manual for SINGLE VARIABLE CALCULUS EARLY TRANSCENDENTALS SEVENTH EDITION. 1^aed. Belmont: Cengage Learning, 2012.

[2] ÁVILA, Geraldo. Análise matemática pra licenciados. 3^aed. São Paulo: Blucher, 2006.

[3] BURLE NETO, Augusto. Potência de Expoente Irracional: Uma aula para os alunos da 3^a série do Ensino Médio. Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado. Universidade Federal de Juiz de Fora, 2013.

[4] FERNANDEZ, Cecília; JUNIOR BERNARDES, Nilson. Introdução às Funções de uma Variável Complexa. 2^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[5] FIGUEIREDO, Djairo. Números Irracionais e Transcendentes. 3^aed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[6] GUIMARÃES, Caio. Matemática Em Nível IME/ITAVolume 1: Números Complexos e Polinômios. 1^a ed. São Paulo: VestSeller, 2008.

[7] HEFEZ, Abramo; VILLELA, Maria. Polinômios e Equações Algébricas. $\mathbf{2^a}$ed. Rio de Janeiro: SBM, 2018.

[8] HONIG, Chaim. Introdução às Funções de uma Variável Complexa. 4^aed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981.

[9] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, CARLOS. Fundamentos de Matemática Elementar. 10^aed. São Paulo: Atual, 2013.

[10] LEÃO,Alessandro. Noções Básicas de Infinito e Números Cardinais. Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado. Universidade Federal da Paraíba, 2014.

[11] LIMA, Elon. Curso de análise volume 1. 14^aed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

[12] LIMA, Elon. Meu professor de matemática e Outras histórias. 6^aed. Rio de janeiro: SBM, 2012.

[13] LIMA, Marcus. Tetração e Superexponenciais. Professor de Matemática Online. 2016. Número 1, volume 4. Disponível em: <http://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/2016/02/pmo-sbm-v004-n001-lima.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2020.

[14] LOSCHA FILHO, Roberto. Fração: história, teoria e aplicações. Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado. Universidade Estadual de Santa Cruz, 2017.

[15] MARQUES, Diego. Teoria dos Números Transcendentes. 1^aed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[16] MUNIZ NETO, Antonio. Fundamentos de Cálculo. 1^aed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[17] PAES, Lilian. Números Complexos: uma proposta didática baseada na modelagem matemática e em contextos históricos. Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado. Universidade Estadual de Londrina, 2013.

[18] PEREIRA, Flávio Esse número parece irracional, será que é?. Trabalho de Conclusão de Curso de Especialização. Claretiano - Centro Universitário, 2019.

[19] SANTOS FILHO, Marcos. Euler e o problema da Basiléia. Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado. Universidade Federal da Paraíba, 2014.

[20] SOUSA, Luísa. Números Reais: História e Didática. Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado. Universidade de Lisboa, 2013.

[21] STEWART, James. Cálculo, volume II. 7^aed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[22] OLIVEIRA, Josivaldo. A Transcendencia de Pi, e e dos Números de Liouville. Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado. Universidade Federal de Sergipe, 2015.

[23] OLIVEIRA, Rufino; PINHEIRO, Márcio. Coleção elementos da matemática, 1: conjuntos, funções, aritmética. 2^aed. Pará: GTR, 2009.

[24] <http://www.vestibular.ita.br/provas/2020_fase1.pdf> Acesso em: 29 jun. 2020.

[25] <http://www.apmo-official.org/static/problems/apmo2005_prb.pdf> Acesso em: 05 ago. 2020.

[26]<http://www.ime.eb.mil.br/arquivos/Admissao/Vestibular_CFG/Provas_Anteriores/provas02_03/mat0203.pdf> Acesso em: 04 ago. 2020.

[27] <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/> Acesso em: 03 ago. 2020.

[28] <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf> Acesso em: 03 ago. 2020.

[29] <http://madematica.blogspot.com/> Acesso em: 07 ago. 2020.

[30] <https://brilliant.org/> Acesso em: 07 ago. 2020.

[31] < https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/equacoes.pdf> Acesso em: 09 ago. 2020.

[32] < https://en.wikipedia.org/wiki/Equation_x%CA%B8_%3D_y%CB%A3 > Acesso em: 20 ago. 2020.

APÊNDICES

Apêndice A −Exercícios resolvidos para o capítulo 1

1) Mostre que se a, b e c são inteiros ímpares, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não tem raiz racional.

Solução

Suponha que a equação tenha raiz racional, sendo $\frac{p}{q}$ ela com p e q inteiros com $q \neq 0$ e $mdc(p, q) = 1$ então

$$ax^2 + bx + c = 0 \Longrightarrow \frac{ap^2}{q^2} + \frac{bp}{q} + c = 0 \Longrightarrow ap^2 + bpq + cq^2 = 0,$$

como $mdc(p, q) = 1$ então p e q não podem ser ambos pares, temos então três casos a considerar

i) p e q são ímpares

Daí, ap^2, bpq e cq^2 são todos ímpares, logo $ap^2 + bpq + cq^2$ é um número ímpar, o que é um absurdo.

ii) p é par e q é ímpar

Logo, ap^2 e bpq são pares e cq^2 é impar, assim $ap^2 + bpq + cq^2$ é um número ímpar, o que é um absurdo.

iii) p é ímpar e q é par

É análogo ao caso anterior.

2) Considere a expressão $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$, é possível que ela seja um número racional se:

a) $x, y \in \mathbb{N}^*$

Solução

Suponha que sim, ficaríamos com

$$\sqrt[3]{x^3 + y^3} = z \Longrightarrow x^3 + y^3 = \left(\frac{p}{q}\right)^3 \Longrightarrow (qx)^3 + (qy)^3 = p^3$$

Segue do último teorema de Fermat que a última equação não possui solução.

b) $x, y \in \mathbb{Q}_+^*$

Suponha que sim, ficaríamos com

$$\sqrt[3]{x^3+y^3} = z \Longrightarrow x^3+y^3 = z^3 \Longrightarrow \frac{p^3}{q^3}+\frac{r^3}{s^3} = \frac{t^3}{u^3} \Longrightarrow p^3s^3u^3 + r^3q^3u^3 = t^3q^3s^3 \Longrightarrow$$

$$(psu)^3 + (rqu)^3 = (tqs)^3$$

Segue do último teorema de Fermat que a última equação não possui solução.

c) $x, y \in \mathbb{R}$

Basta tomar $x = 1$ e $y = \sqrt[3]{7}$, encontrando 2 como solução.

3) Dado $a \in \mathbb{R}$, defina $p = a + a^2$ e $q = a + a^3$ e considere as seguintes afirmações:

I. se p ou q é irracional, então a é irracional.

II. se p e q são racionais, então a é racional.

III. se q é irracional, então p é irracional.

É(são) VERDADEIRA(S)

a) ( ) apenas I. b) ( ) apenas II. c) ( ) apenas I e II.

d) ( ) apenas I e III. e) ( ) todas

Solução

I. A contrapositiva nos diz: “se a é racional então p e q são racionais”.

Note que esta proposição é claramente verdadeira, já que produto e soma de racionais gera racionais.

II. Note que:

$$p = a + a^2 = \frac{1}{4} + a + a^2 - \frac{1}{4} = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\cdot$$

Como p e $\frac{1}{4}$ são racionais então $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$ também é racional. Daí existem r e s inteiros positivos com $mdc(r,s) = 1$ tal que:

$$\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{r}{s} \Longrightarrow a = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{r}{s}}$$

Suponha que a é irracional então r e s não são ambos quadrados perfeitos. Veja que:

$$q = a + a^3 = a(1+a^2) = \left(-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{r}{s}}\right)\left(\frac{5}{4} \mp \sqrt{\frac{r}{s}} + \frac{r}{s}\right) =$$

$$-\frac{5}{8} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{s}} - \frac{r}{2s} \pm \frac{5}{4}\sqrt{\frac{r}{s}} - \frac{r}{s} \pm \frac{r}{s}\sqrt{\frac{r}{s}} = -\frac{5}{8} - \frac{3r}{2s} + \sqrt{\frac{r}{s}}\left(\pm\frac{7}{4} \pm \frac{r}{s}\right).$$

A única possibilidade deste número ser racional seria$\left(\pm\frac{7}{4} \pm \frac{r}{s}\right) = 0$, mas nesse caso $\frac{r}{s} < 0$. Uma contradição. Portanto q é um número irracional, o que é um absurdo. Concluímos assim que a é um número racional.

III. A contrapositiva nos diz: "se p é racional então q é racional."

$$p = \left(a+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Note que

$$a = \sqrt{2} - \frac{1}{2} \Longrightarrow p = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \in \mathbb{Q} \Longrightarrow q = \sqrt{2} - \frac{1}{2} + 2\sqrt{2} - 3 + \frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{8} =$$

$$\left(\frac{-29}{8} + \frac{13\sqrt{2}}{4}\right) \notin \mathbb{Q}$$

Portanto a resposta é letra c).

Os dois próximos problemas tratam da sequência $a_n = \sqrt{m + a_{n-1}}$, com $a_1 = \sqrt{m}$, $n > 1$ e m natural. Tal sequência é crescente e limitada portanto a sequência é convergente, e faz sentido o símbolo $\left(\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \cdots}}}\right)$. Vamos mostrar isso.

a_n é crescente

Faremos por indução sobre n

$$a_2 = \sqrt{m + \sqrt{m}} > \sqrt{m} = a_1.$$

Suponha que $a_{n-1} < a_n$ vamos mostrar que $a_n < a_{n+1}$.

$$a_{n-1} < a_n \Rightarrow m + a_{n-1} < m + a_n \Rightarrow \sqrt{m + a_{n-1}} < \sqrt{m + a_n} \Rightarrow a_n < a_{n+1}.$$

a_n é limitada

Faremos por indução sobre n, mostrando que $a_n < m + 1$.

$$a_1 = \sqrt{m} < m + 1 \Leftrightarrow m < m^2 + 2m + 1 \Leftrightarrow 0 < m^2 + m - 1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}.$$

Do fato que $m \geq 1$, a última desigualdade é de fato verdadeira.

Suponha $a_{n-1} < m + 1$ vamos mostrar que $a_n < m + 1$.

$$a_{n-1} < m + 1 \Rightarrow m + a_{n-1} < 2m + 1 \Rightarrow \sqrt{m + a_{n-1}} < \sqrt{2m + 1} \Rightarrow$$

$$a_n < \sqrt{m^2 + 2m + 1 - m^2} = \sqrt{(m + 1)^2 - m^2} < \sqrt{(m + 1)^2} = m + 1.$$

Portanto, existe $\lim_{n\to\infty} a_n$.

4) É racional ou irracional: $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}$?

Solução

O número dado é racional, vejamos o porquê.

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}} = x \Leftrightarrow \sqrt{2 + x} = x \Rightarrow \left(\sqrt{2 + x}\right)^2 = x^2 \Rightarrow 2 + x = x^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1 \; ou \; x_2 = 2.$$

É claro que $x > 0$. Vejamos se x_2 satisfaz a equação irracional.

$$\sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2.$$

De fato satisfaz, portanto $x = 2$ que é racional.

5) Para que valores de $n \in \mathbb{N}$, $x = \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \cdots}}}$ é um número natural ?

Solução

Note que:

$$\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \cdots}}} = x \Leftrightarrow \sqrt{n + x} = x \Leftrightarrow x^2 - x - n = 0$$

$$\Delta = 1 + 4n \Longrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4n}}{2}.$$

Note que:

$$1 + 4n \geq 1 \Longrightarrow \sqrt{1 + 4n} \geq 1 \Longrightarrow 1 - \sqrt{1 + 4n} \leq 0$$

Veja que para $n = 0$ a raiz da equação é dupla. Então, para $n \neq 0$ ficaremos com:

$$x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4n}}{2}.$$

Veja que x será natural se e somente se $\sqrt{1 + 4n}$ for um número ímpar.

$$\sqrt{1 + 4n} = 2k + 1 \Leftrightarrow 1 + 4n = 4k^2 + 4k + 1 \Leftrightarrow n = k^2 + k = k(k + 1).$$

$$x = \frac{1 + 2k + 1}{2} = k + 1.$$

Portanto, x será natural se e somente se n é produto de dois números consecutivos e x será o maior deles.

Para a próxima questão e outras vale ressaltar que o símbolo $a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ está bem definido para $a \in \left[\left(\frac{1}{e}\right)^{e}, e^{\frac{1}{e}}\right]$. Este fato foi provado por Euler e pode ser melhor entendido em [13].

6) Calcule o valor de $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$.

Solução

Note que

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}} = x \Longrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^{x} = x \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{2}} = x \Leftrightarrow 2^{x} = x^{2}$$

Esta última equação possui duas soluções, $x = 2$ e $x = 4$, mas será que as duas são a resposta? Se não, qual delas é? Esta questão mostra a necessidade de explicar o que exatamente significa $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$.

Considere a sequência $a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$ onde $a_1 = \sqrt{2}$. O que queremos calcular na verdade é $\lim_{n\to\infty} a_n$ (que anteriormente chamamos de x) se este realmente existir. Note que

$$a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n} \Leftrightarrow a_{n+1} = 2^{\frac{a_n}{2}} \Leftrightarrow a_{n+1}^{2} = 2^{a_n}$$

I) a_n é crescente

É claro que $a_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} > \sqrt{2} = a_1$. Vamos provar o que se quer por indução. Suponha que $a_k > a_{k-1}$ para todo $k < n$. Vamos provar que isto também é válido para $k + 1$. Veja que:

$$a_k > a_{k-1} \Longrightarrow 2^{a_k} > 2^{a_{k-1}} \Longrightarrow a_{k+1}^{2} > a_k^{2} \Longrightarrow a_{k+1} > a_k.$$

II) a_n é limitada

É claro que $a_1 = \sqrt{2} < 2$. Vamos provar o que se quer por indução. Suponha que $a_k < 2$ para todo $k < n$; vamos provar que isto também é válido para $k + 1$. Veja que:

$$a_k < 2 \Longrightarrow 2^{a_k} < 2^{2} \Longrightarrow a_{k+1}^{2} < 2^{2} \Longrightarrow a_{k+1} < 2,$$

como a_n é monótona e limitada, então é convergente. Como o limite é único sabemos agora que a solução ou é 2 ou é 4. Vejamos então qual será. Note que

$$a_n < 2 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} 2 \Longrightarrow x \leq 2.$$

Concluímos daí que $x = 2$ é a única solução.

7) É racional ou irracional: $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt[3]{5}}$?

Solução

O número dado é racional, pois

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt[3]{5}}=x \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^3=x^3 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)^3+3\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt[3]{5}}\right)+\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^3=x^3$$

$$\Leftrightarrow \left(2+\sqrt{5}\right)+3(4-5)(x)+\left(2-\sqrt{5}\right)=x^3 \Leftrightarrow 4-3x=x^3 \Leftrightarrow x^3+3x-4=0.$$

É fácil ver que 1 é raiz dessa última equação, pois, $1^3+3.1-4=1+3-4=0$. Sendo assim, vamos dividir (x^3+3x-4) por $(x-1)$, para encontrar x^2+x+4. Assim,

$$x^3+3x-4=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+4)=0.(I)$$

Observe agora que a equação $(x^2+x+4)=0$ não possui raiz, já que

$$\Delta=1^2-4.1.4=1-16=-15<0.$$

Portanto, a única maneira de (I) ser verdade é termos $x=1$, que é racional.

8) É racional ou irracional $\log_{10} 2$?

Solução

Suponha que seja racional, daí existem $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$ tais que $\log_{10} 2=\frac{p}{q}\cdot$ Agora observe que:

$$\log_{10} 2=\frac{p}{q} \Leftrightarrow 10^{\frac{p}{q}}=2 \Leftrightarrow 10^p=2^q.$$

Do lado esquerdo da igualdade temos fatores 2 e 5, enquanto que do lado direito, apenas fator 2. Isso contraria o teorema fundamental da Aritmética. Chegamos assim em um absurdo. Portanto $\log_{10} 2$ é um número irracional.

9) Foi visto que a soma de dois números racionais resulta em um número racional. Isso pode ser estendido para uma quantidade qualquer (finita) de parcelas. E quando o número de parcelas é infinita, podemos garantir o mesmo ?

Solução

Não! Observe os dois casos a seguir.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)}=2.$$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}\cdot$$

No primeiro caso temos uma soma de P.G. infinita, que resulta em um racional. No segundo caso temos a soma dos inversos dos quadrados perfeitos, que resulta em um irracional. A última igualdade pode ser entendida com detalhes em [19, cap. 2].

10) Verifique porque o número a seguir é racional.

$$\sqrt{\sqrt{4+4\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}+\sqrt{4-4\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}.}$$

Solução

Note que $\left(2\pm\sqrt[3]{2}\right)^2=4\pm4\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$. Assim,

$$\sqrt{\sqrt{4+4\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}+\sqrt{4-4\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}}=\sqrt{\sqrt{\left(2+\sqrt[3]{2}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt[3]{2}\right)^2}}=$$

$$\sqrt{2+\sqrt[3]{2}+2-\sqrt[3]{2}}=\sqrt{4}=2.$$

11) Sejam $a, b \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$. Se $(a+b), (ab) \in \mathbb{Q}$ mostre que $(a^m+b^m) \in \mathbb{Q}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$.

Solução

Inicialmente, vamos considerar $m \in \mathbb{N}$ e proceder por indução sobre m.

Definimos $p(m)$: $(a^m+b^m) \in \mathbb{Q}$

$p(1)$ é verdade por hipótese.

$$p(2): a^2+b^2=(a+b)^2-2(ab)$$

Pela hipótese e pelo fato de produto e soma de racionais resultarem racional $p(2)$ é verdadeira.

Suponha agora que $p(k)$ é verdadeira para todo $k < m$, com $k \in \mathbb{N}$. Vamos provar que $p(k+1)$ também é verdadeira.

Note que:

$$a^{k+1} + b^{k+1} = a^{k+1} + b^{k+1} + ab^k - ab^k + ba^k - ba^k =$$

$$(a^{k+1} + ab^k) + (b^{k+1} + ba^k) - (ab^k + ba^k) =$$

$$a(a^k + b^k) + b(b^k + a^k) - ab(b^{k-1} + a^{k-1}) =$$

$$(a^k + b^k)(a + b) - ab(b^{k-1} + a^{k-1}).$$

Pela hipótese de indução $(a^k + b^k), (b^{k-1} + a^{k-1}) \in \mathbb{Q}$, e, pela hipótese da questão, $(a + b),\ (ab) \in \mathbb{Q}$. Portanto, $a^{k+1} + b^{k+1} \in \mathbb{Q}$.

Fica provado então o que foi pedido para $m \in \mathbb{N}$. Vejamos agora o caso $m \in \mathbb{Z}$ com $m < 0$; neste caso existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = -k$. Note que:

$$a^{-k} + b^{-k} = \frac{1}{a^k} + \frac{1}{b^k} = \frac{b^k + a^k}{(ab)^k}\cdot$$

Como $(b^k + a^k) \in \mathbb{Q}$ e $(ab)^k \in \mathbb{Q}$ então o quociente entre eles também é racional.

12) Considere a equação $x^y = y^x$ com x e y distintos, responda:

a) ache todas as soluções da equação sendo $x, y \in \mathbb{Z}$

Solução

Veja que, se $x = 1$ então $y = 1$, o que não interessa. Se $x = 0$ então $y = 0$, um absurdo. Logo, $x, y \notin \{0,1\}$.

Considere inicialmente $x, y \in \mathbb{N}$ e suponha $y > x$, daí

$$x^y = y^x \Leftrightarrow \frac{x^y}{x^x} = \frac{y^x}{x^x} \Leftrightarrow x^{y-x} = \left(\frac{y}{x}\right)^x,$$

como $x^{y-x} \in \mathbb{N}$ então $\left(\frac{y}{x}\right)^x$ é inteiro, logo $x|y$, portanto, $y = kx$, com $k \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, ficamos com

$$x^{y-x} = \left(\frac{y}{x}\right)^x \Rightarrow x^{kx-x} = k^x \Rightarrow (x^{kx-x})^{\frac{1}{x}} = (k^x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow x^{k-1} = k \Rightarrow x = k^{\frac{1}{k-1}},$$

observe agora que

$$k^{\frac{1}{k-1}} < 2 \Leftrightarrow k < 2^{k-1},$$

esta desigualdade é verdadeira para todo $k > 2$, vamos ver isso por indução sobre k.

Se $k = 3$, temos que $3 < 4 = 2^2$. Suponha que a desigualdade é para um certo $m > 2$, vamos provar que é válida para $m + 1$

$$m < 2^{m-1} \Rightarrow 2m < 2^m$$

$$2m = m + m > m + 2 > m + 1,$$

fica então provado.

Assim, $x < 2$, então não temos solução. Resta analisar apenas um caso, $k = 2$, daí, $x = 2$ e $y = 4$, é a única solução.

Considere agora o caso $x > 0$ e $y < 0$, logo, existe $n > 0$ tal que $y = -n$, ficamos com:

$$x^y = y^x \Rightarrow x^{-n} = (-n)^x \Rightarrow \frac{1}{x^n} = (-n)^x,$$

Do lado direito temos um número inteiro, mas do lado esquerdo não, chegamos a um absurdo.

O caso $x < 0$ e $y > 0$ é análogo. Resta agora apenas um caso, que é $x, y < 0$, assim existem $m, n > 0$ inteiros tais que $x = -m$ e $y = -n$, ficamos com:

$$x^y = y^x \Rightarrow (-m)^{-n} = (-n)^{-m} \Rightarrow \frac{1}{(-m)^n} = \frac{1}{(-n)^m} \Rightarrow (-m)^n = (-n)^m,$$

Se m é par e n é impar, do lado esquerdo teremos um número negativo e do direito um positivo, um absurdo, Se m é impar e n é par é análogo, se m e n tem a mesma paridade, então $(-m)^n = (-n)^m$ é equivalente a $m^n = n^m$, cuja a única solução é $m = 4$ e $n = 2$, desde que $m > n$.

Concluímos então que as únicas soluções são os pares $(2,4), (4,2), (-2,-4)$ e$(-4,-2)$.

b) mostre que se $x, y \in \mathbb{R}$ a equação dada possui infinitas soluções

Solução

Tome $y = tx$, onde $t \in \mathbb{R}$, logo

$$x^y = y^x \Longrightarrow x^{tx} = (tx)^x \Longrightarrow x^t = tx \Longrightarrow x^{t-1} = t \Longrightarrow x = t^{\frac{1}{t-1}} \Longrightarrow y = t.\, t^{\frac{1}{t-1}} = t^{\frac{t}{t-1}}.$$

Portanto, o par $\left(t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}\right)$ produz infinitas soluções para a equação dada.

c) dê uma solução onde $x, y \in (\mathbb{Q} - \mathbb{Z})$ e outra onde $x, y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

tomando $t = \frac{3}{2}$, ficaremos com $x = \left(\frac{3}{2}\right)^2$ e $y = \left(\frac{3}{2}\right)^3$, logo

$$\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^{\left(\frac{3}{2}\right)^3} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]^{\left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

tomando $t = 3$, ficaremos com $x = \sqrt{3}$ e $y = \sqrt{27}$, logo

$$\sqrt{3}^{\sqrt{27}} = \sqrt{27}^{\sqrt{3}}.$$

13) Mostre que são irracionais

a) $\cos 20\,°$

Solução

Pelo arco triplo temos que

$$cos60° = 4cos^3 20° - 3cos20° \Longrightarrow 4cos^3 20° - 3cos20° - \frac{1}{2} = 0 \Longrightarrow$$

$$8cos^3 20° - 6cos20° - 1 = 0$$

Considere o polinômio $p(x) = 8x^3 - 6x - 1$, usando o teorema das raízes racionais vemos que não há raiz racional, e por isso $\cos 20\,°$ é irracional.

b) $\cos 36°$

Solução

Pelo arco quíntuplo temos que

$$\cos 180° = 16\cos^5 36° - 20cos^3 36° + 5cos36° \Longrightarrow$$

$$16\cos^5 36° - 20cos^3 36° + 5cos36° + 1 = 0$$

Considere o polinômio $p(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x + 1$, usando o teorema das raízes racionais vemos que não há raiz racional, e por isso $\cos 36\,°$ é irracional.

14) Verifique que as expressões a seguir resultam em números racionais:

a) $(cos20°)(cos40°)(cos80°)$

Solução

$$(cos20°)(cos40°)(cos80°) = \frac{(cos20°)(cos40°)(cos80°)(8sen20°)}{8sen20°} =$$

$$\frac{4(sen40°)(cos40°)(cos80°)}{8sen20°} = \frac{2(sen80°)(cos80°)}{8sen20°} = \frac{sen160°}{8sen20°} = \frac{sen20°}{8sen20°} = \frac{1}{8}\,.$$

b) $sen\left(\frac{\pi}{14}\right) sen\left(\frac{3\pi}{14}\right) sen\left(\frac{5\pi}{14}\right)$

Solução

Usando a relação $senx = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ temos que

$$sen\left(\frac{\pi}{14}\right) = cos\left(\frac{7\pi}{14} - \frac{\pi}{14}\right) = cos\left(\frac{6\pi}{14}\right) = cos\left(\frac{3\pi}{7}\right),$$

analogamente,

$$sen\left(\frac{3\pi}{14}\right) = cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\ e\ sen\left(\frac{5\pi}{14}\right) = cos\left(\frac{\pi}{7}\right),$$

ficando então com

$$cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\ cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) = \frac{cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\ cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) 4sen\left(\frac{\pi}{7}\right)}{4sen\left(\frac{\pi}{7}\right)} =$$

$$\frac{2sen\left(\frac{2\pi}{7}\right) cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)}{4sen\left(\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{sen\left(\frac{4\pi}{7}\right) cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)}{4sen\left(\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\left[sen(\pi) + sen\left(\frac{\pi}{7}\right)\right]}{4sen\left(\frac{\pi}{7}\right)} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}sen\left(\frac{\pi}{7}\right)}{4sen\left(\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{1}{8}.$$

É muito curioso o fato de chegarmos ao mesmo valor do item a).

15) Mostre que para todo número real irracional a, existem números reais e irracionais b e c tais que $a + b$ e ac são ambos racionais, enquanto ab e $a + c$ são ambos irracionais.

Solução

Tome $b = n - a$, onde n é um natural qualquer, logo

$$a + b = a + n - a = n \in \mathbb{Q}.$$

$$ab = a(n - a) = an - a^2,$$

a princípio não há como saber se $an - a^2$ é racional ou não, mas como n é qualquer, podemos tomar alguns valores para chegar no irracional desejado. Afirmo que ao menos um dos números $a - a^2$ $(n = 1)$ e $2a - a^2$ $(n = 2)$ é irracional. De fato, suponha por absurdo que os dois são racionais, então a diferença entre eles seria racional:

$$a - a^2 - (2a - a^2) = -a,$$

o que é um absurdo.

Tome $c = \frac{m}{a}$, onde m é um natural qualquer, logo

$$ac = a\left(\frac{m}{a}\right) = m \in \mathbb{Q}.$$

$$a + c = a + \frac{m}{a},$$

estamos agora numa situação similar à anterior, então usaremos a mesma estratégia. Afirmo que ao menos um dos números $a + \frac{1}{a}$ $(m = 1)$ e $a + \frac{2}{a}$ $(m = 2)$ é irracional. De fato, suponha por absurdo que os dois são racionais, então a diferença entre eles seria racional:

$$a + \frac{1}{a} - \left(a + \frac{2}{a}\right) = -\frac{1}{a} \Longrightarrow a \in \mathbb{Q},$$

o que é um absurdo.

16) Seja o conjunto $S = \{r \in \mathbb{Q} | r \geq 0 \; e \; r^2 \leq 2\}$, sobre o qual são feitas as seguintes afirmações:

I. $\frac{5}{4} \in S$ e $\frac{7}{5} \in S$.

II.$\{x \in \mathbb{R} \big| 0 \leq x \leq \sqrt{2}\} \cap S = \emptyset$.

III. $\sqrt{2} \in S$.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s)

a) I e II b) I e III c) II e III d) I e) II

Solução

I. $\frac{5}{4} > 0$ e $\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} < \frac{32}{16} = 2$, logo, $\frac{5}{4} \in S$. $\frac{7}{5} > 0$ e $\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} < \frac{50}{25} = 2$, logo, $\frac{7}{5} \in S$.

II. $S \subset \{x \in \mathbb{R} \big| 0 \leq x \leq \sqrt{2}\} \Longrightarrow \{x \in \mathbb{R} \big| 0 \leq x \leq \sqrt{2}\} \cap S = S \neq \emptyset$.

III. já foi visto que $\sqrt{2}$ é um número irracional, daí, $\sqrt{2} \notin S$.

Assim, alternativa d) é a correta.

17) Considere o polinômio: $P(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$ com raízes reais. O coeficiente a é racional e a diferença entre duas de suas raízes também é racional. Nestas condições, mostre que é verdadeira a afirmação: “se uma das raízes de $P(x)$ é racional, então todas as suas raízes são racionais.”

Solução

Sejam b, c e d suas raízes e b racional. Temos dois casos a considerar

1) $b - c$ é racional

$$b = \frac{p}{q} \Longrightarrow \frac{p}{q} - c = \frac{r}{s} \Longrightarrow c = \frac{p}{q} - \frac{r}{s} \Longrightarrow c \in \mathbb{Q}.$$

Pelas relações de girard segue que

$$b + c + d = -a \Longrightarrow d = -a - b - c \Longrightarrow d \in \mathbb{Q}.$$

2) $c - d$ é racional

$$b + c + d = -a \Longrightarrow b + c - d = -a - 2d \Longrightarrow \frac{b + a + (c - d)}{-2} = d \Longrightarrow d \in \mathbb{Q}.$$

$$c - d = \frac{m}{n} \Longrightarrow c = \frac{m}{n} + d \Longrightarrow c \in \mathbb{Q}.$$

18) Classifique os itens a seguir em verdadeiro ou falso

a) se $x + y$ e xy são racionais, então x e y são racionais.

Solução

Falso, tome $x = \sqrt{2} - 1$ e $y = \sqrt{2} + 1$.

b) existem x e y irracionais tais que $x + y$ é racional e xy é irracional.

Solução

Verdadeiro, tome $x = -\sqrt{2}$ e $y = \sqrt{2} + 1$.

c) existem x e y irracionais tais que $x + y$ é irracional e xy é racional.

Solução

Verdadeiro, tome $x = \sqrt{2}$ e $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

d) existem x e y irracionais tais que xy^2 e x^2y sejam racionais.

Solução

Verdadeiro, tome $x = y = \sqrt[3]{2}$. Para $|x| \neq |y|$, tome $y = \frac{1}{x^2}$ e $x = \sqrt[3]{2}$.

e) existe x irracional tal que $x + \frac{1}{x}$ seja racional.

Solução

Verdadeiro, tome $x = 2 + \sqrt{3}$. Na verdade existem infinitos, basta tomar $x = k + \sqrt{k^2 - 1}$ onde $k > 1$ é um número inteiro.

f) se x,y são números positivos e distintos com x, y e $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ todos racionais, então $\sqrt{x}$ e $\sqrt{y}$ são também racionais.

Solução

Verdadeiro, note que:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)=\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}},$$

como x e y são racionais, o mesmo ocorre com $x-y$ e como $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ também é racional, o mesmo vai ocorrer com $\sqrt{x}-\sqrt{y}$, daí também são racionais os números

$$\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)+\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{2}=\sqrt{x}\ \ e\ \ \ \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{2}=\sqrt{y}.$$

g) Se o quadrado de um número é racional então ele é racional.

Solução

Falso, veja o exemplo a seguir: $\sqrt{3}\in(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, mas $\left(\sqrt{3}\right)^2=3\in\mathbb{Q}$.

19) Mostre que se $x\in(\mathbb{Q}_+^*-\mathbb{Z})$ então $x^x\notin\mathbb{Q}$.

Solução

Como $x\in(\mathbb{Q}_+^*-\mathbb{Z})$ então existem p e q inteiros positivos com $mdc(p,q)=1$ tal que $x=\frac{p}{q}\cdot$ Suponha que $x^x\in\mathbb{Q}$ então existem r e s inteiros positivos com $mdc(r,s)=1$ tal que $x^x=\frac{r}{s}$, agora note que:

$$x^x=\frac{r}{s}\Longrightarrow\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{q}}=\frac{r}{s}\Longrightarrow\frac{p^p}{q^p}=\frac{r^q}{s^q}\Longrightarrow p^p.s^q=r^q.q^p.$$

$$d=mdc(s,q)\Longrightarrow s=da\ e\ q=db$$

Com $mdc(a,b)=1$, ficaremos com

$$p^p.d^qa^q=r^q.d^pb^p$$

Suponha $p>q$, então

$$p^p . a^q = r^q . d^{p-q} b^p$$

Observe que $mdc(a, r) = 1$, já que $a|s$ e $mdc(s, r) = 1$. Então, $a^q | d^{p-q}$.

Como $mdc(p, q) = 1$ e $d|q$, então $mdc(p, d) = 1$. Assim, $d^{p-q} | a^q$. Portanto, $a^q = d^{p-q}$. Ficamos com

$$p^p = r^q b^p$$

Como $mdc(p, q) = 1$ e $b|q$, então $mdc(p, b) = 1$. Daí, $b = 1$. E ficamos com

$$p^p = r^q \Longrightarrow p^{\frac{p}{q}} = r$$

Como $mdc(p, q) = 1$ e $p > 1$, já que $p > q \geq 1$, então $q = 1$. Mas, daí, $x = p$, um absurdo, pois x não é inteiro.

O caso em que $p < q$ é similar.

20) Seja s um número real, m e n números inteiros com $mdc(m, n) = 1$ tal que s^m e s^n são números racionais, mostre que s é racional.

Solução

Como $mdc(m, n) = 1$ então existem p e q inteiros tal que $mp + nq = 1$. Também são racionais s^{mp} e s^{nq}, portanto também será racional

$$s^{mp} . s^{nq} = s^{mp+nq} = s.$$

Apêndice B −Exercícios resolvidos para o capítulo 2

1) Mostre que entre dois números reais distintos sempre há um racional e um irracional entre eles.

Solução

Vejamos inicialmente o caso dos números racionais.

Sejam a, b números reais com $b > a \geq 0$ (o caso $a < 0$ é análogo). Sabemos que sempre é possível achar um número natural maior que qualquer real dado, assim, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > \frac{1}{b-a} \Longrightarrow 0 < \frac{1}{n} < b - a \cdot$$

Agora vamos provar que um dos números $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots$ pertencem ao intervalo (a, b). De fato, suponha que não, sendo $k \in \mathbb{N}$ então teríamos:

$$\frac{k}{n} < a < b < \frac{k+1}{n} \Longrightarrow b - \frac{k}{n} < \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n} < b - a \Longrightarrow -\frac{k}{n} < -a \Longrightarrow \frac{k}{n} > a,$$

mas, isso é uma contradição, logo o intervalo (a, b) possui um número da forma $\frac{k}{n} \cdot$

Para o caso irracional, no lugar de $\frac{1}{b-a}$ tome $\frac{\sqrt{2}}{b-a} \cdot$

2) Mostre que a parte real de 2^i está entre 0,7 e 0,9.

Solução

Note que

$$2^i = e^{i(ln2)} = \cos(ln2) + isen(ln2).$$

$$\frac{\pi}{4} > ln2 > \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{4}} > 2 > e^{\frac{\pi}{6}}$$

$$2 > e^{\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow 2^6 > e^{\pi}$$

$$e^{\pi} < e^4 < (2{,}8)^4 = (7{,}84)^2 < 8^2 = 64 = 2^6$$

$$e^{\frac{\pi}{4}} > 2 \Leftrightarrow e^{\pi} > 2^4 = 16$$

$$e^{\pi} > (2{,}7)^3 = 19{,}683 > 16$$

Logo,

$$\frac{\pi}{4} > ln2 > \frac{\pi}{6} \Longrightarrow cos\left(\frac{\pi}{4}\right) < cos(ln2) < cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < cos(ln2) < \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow$$

$$0{,}7 < cos(ln2) < 0{,}9.$$

3) Sendo $z = cos(\theta) + isen(\theta)$, determine $arg\left(e^{iz}\right)$.

Solução

$$iz = \left(cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)(\cos(\theta) + isen(\theta)) = cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$-sen(\theta) + icos(\theta) \Longrightarrow e^{iz} = e^{-sen(\theta)+icos(\theta)} = e^{-sen(\theta)}e^{icos(\theta)} \Longrightarrow arg\left(e^{iz}\right) = \cos(\theta).$$

4) Explique se os seguintes números são reais ou complexos:

a) i^{i^i}

Solução

Note que:

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \Longrightarrow i^{i^i} = i^{e^{-\frac{\pi}{2}}} = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^{e^{-\frac{\pi}{2}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)\right)} = cos\left(\frac{\pi}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)\right) + isen\left(\frac{\pi}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)\right),$$

que claramente é um número complexo.

b) $i^{i^{i^i}}$

Solução

Observe que:

$$i^{i^{i^i}} = e^{i^{i^i}lni} = e^{\left[cos\left(\frac{\pi}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)\right)+isen\left(\frac{\pi}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)\right)\right]\left[\frac{i\pi}{2}\right]} =$$

$$e^{\frac{\pi}{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)\right)+isen\left(\frac{\pi}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)\right)\right]\left[cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+isen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]} = e^{\frac{\pi}{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)+\frac{\pi}{2}\right)+isen\left(\frac{\pi}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)+\frac{\pi}{2}\right)\right]},$$

a fim de deixar a expressão um pouco menos carregada, vale ressaltar que $\cos(x) = sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ e $sen(x) = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, daí ficaremos com

$$e^{\frac{\pi}{2}\left[sen\left(-\frac{\pi}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)\right)+icos\left(-\frac{\pi}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)\right)\right]} = e^{-\frac{\pi}{2}sen\left(\frac{\pi}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)\right)}\left[e^{\left(\frac{i\pi}{2}\right)cos\left(\frac{\pi}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)\right)}\right] =$$

$$e^{-\frac{\pi}{2}sen\left(\frac{\pi}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)\right)}\left[cos\left(\frac{\pi}{2}cos\left(\frac{\pi}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)\right)\right) + isen\left(\frac{\pi}{2}cos\left(\frac{\pi}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)\right)\right)\right],$$

que claramente é um número complexo.

Obs: para o cálculo de $i^{i^{i^{i}}}$ a ideia é a mesma, ou seja, usar o valor de $i^{i^{i}}$.

5) Mostre que $\left(z^{\frac{1}{n}}\right)^n = z$ e $(z^n)^{\frac{1}{n}} \neq z$, onde z é um número complexo e $n > 1$ um número inteiro.

Solução

Sendo $z = |z|(cos\theta + isen\theta)$ temos que:

$$\left(z^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(|z|^{\frac{1}{n}}\left(cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)\right)^n =$$

$$|z|\big(cos(\theta + 2k\pi) + isen(\theta + 2k\pi)\big) =$$

$$|z|(\cos(\theta) + isen(\theta)) = z$$

$$(z^n)^{\frac{1}{n}} = \big(|z|^n \cos(n\theta) + isen(n\theta)\big)^{\frac{1}{n}} =$$

$$|z|\left(cos\left(\frac{n\theta + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{n\theta + 2k\pi}{n}\right)\right) =$$

$$|z|\left(cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) + isen\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)\right).$$

Se $k \neq 0$ vemos claramente que o último número é diferente de z.

6) Mostre que a expressão $\left(\sqrt[3]{2+2i}+\sqrt[3]{2-2i}\right)$ não representa um número complexo não real.

Solução

$$x=\left(\sqrt[3]{2+2i}+\sqrt[3]{2-2i}\right)\Longrightarrow$$

$$x^3=2+2i+2-2i+3(\sqrt[3]{2+2i}\sqrt[3]{2-2i})(\sqrt[3]{2+2i}+\sqrt[3]{2-2i})\Longrightarrow$$

$$x^3=4+3\left(\sqrt[3]{4+4}\right)x\Longrightarrow x^3=4+6x\Longrightarrow x^3-6x-4=0.$$

Note que

$$(-2)^3-6(-2)-4=-8+12-4=0.$$

Assim,

$$x^3-6x-4=0\Longrightarrow(x+2)(x^2-2x-2)=0.$$

$$x^2-2x-2=0\Longrightarrow x^2-2x+1=3\Longrightarrow(x-1)^2=3\Longrightarrow x=1\pm\sqrt{3},$$

$$x+2=0\Longrightarrow x=-2.$$

Como todos os valores de x são reais, então de fato a expressão do enunciado representa apenas números reais. Vale ressaltar que os três valores encontrados para x correspondem a expressão do enunciado e não apenas alguns deles. Para uma outra discussão sobre, é recomendável [12, cap. 2,pág. 23].

7) Observe as igualdades a seguir e explique onde está errado.

$$-1=i^2=i^{\frac{4}{2}}=(i^4)^{\frac{1}{2}}=1^{\frac{1}{2}}=\pm1$$

Solução

O problema está na “permutação” dos expoentes, que nem sempre é válida, como já foi comentado. Observe:

$$\left(i^{\frac{1}{2}}\right)^4=\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+isen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^4=-1\ ou\ \left(cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+isen\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)^4=-1\ .$$

Considerando o número (i^4) teremos como resposta apenas um resultado, mas $(i^4)^{\frac{1}{2}}$ nos dará dois resultados, necessariamente distintos.

Considerando o número$\left(i^{\frac{1}{2}}\right)$ teremos como resposta dois resultados necessariamente distintos, mas $\left(i^{\frac{1}{2}}\right)^4$ também nos dará dois resultados, que podem ser iguais!

8) Considere a igualdade abaixo

$$(cos(\theta) + isen(\theta))^x = \cos(x\theta) + isen(x\theta)$$

ela é válida para todo x irracional?

Solução

Não! tome $x = \frac{1}{2\pi}$ e $\theta = 2\pi$, dai teríamos

$$(cos(\theta) + isen(\theta))^x = (\cos(2\pi) + isen(2\pi))^{\frac{1}{2\pi}} = 1^{\frac{1}{2\pi}} = 1$$

$$\cos(x\theta) + isen(x\theta) = cos\left(\left(\frac{1}{2\pi}\right)(2\pi)\right) + isen\left(\left(\frac{1}{2\pi}\right)(2\pi)\right) =$$

$$\cos(1) + isen(1).$$

9) Seja z um número complexo de módulo unitário que satisfaz a condição $z^{2n} \neq -1$, onde n é um número inteiro positivo. Demonstre que $\frac{z^n}{1+ z^{2n}}$ é um número real.

Solução

Seja $z = cos\theta + isen\theta$, logo

$$\frac{z^n}{1 + z^{2n}} = \frac{1}{\frac{1}{z^n} + \frac{z^{2n}}{z^n}} = \frac{1}{z^{-n} + z^n} = \frac{1}{\cos(-n\theta) + isen(-n\theta) + \cos(n\theta) + isen(n\theta)} =$$

$$\frac{1}{2\,cos(n\theta)} \in \mathbb{R}.$$

10) Mostre que a expressão $cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$ resulta em um número racional.

Solução

Uma pergunta natural é por que esta questão está nesta seção. Apesar da pergunta ser da seção anterior, usaremos elementos desta seção para resolvê-la.

As raízes sétimas da unidade são da forma $cos\left(\frac{2k\pi}{7}\right) + isen\left(\frac{2k\pi}{7}\right)$ onde $0 \leq k \leq 6$ e k inteiro. É sabido que a soma dessas raízes é zero, logo,

$$cos(0) + isen(0) + cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cdots + cos\left(\frac{12\pi}{7}\right) + isen\left(\frac{12\pi}{7}\right) = 0,$$

a parte real do lado esquerdo é igual a zero, daí

$$1 + cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cdots + cos\left(\frac{12\pi}{7}\right) = 0,$$

observando que,

$$cos\left(\frac{12\pi}{7}\right) = cos\left(2\pi - \frac{12\pi}{7}\right) = cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$$

$$cos\left(\frac{10\pi}{7}\right) = cos\left(2\pi - \frac{10\pi}{7}\right) = cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$$

$$cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) = cos\left(2\pi - \frac{8\pi}{7}\right) = cos\left(\frac{6\pi}{7}\right),$$

ficamos com

$$1 + 2cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 2cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + 2cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) = 0 \Longrightarrow cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2}\cdot$$

Apêndice C −Exercícios resolvidos para o capítulo 3

1) Mostre que se α é algébrico então

a) $(-\alpha)$ é algébrico

Solução

Se $p(x)$ é um polinômio que possui α como raiz então $p(-x)$ é um polinômio que possui $(-\alpha)$ como raiz.

b) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ é algébrico $(\alpha \neq 0)$

Solução

Seja $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ tal que $p(\alpha) = 0$. Se $g(x) = a_0 x^n + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ então

$$g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{a_0}{\alpha^n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{\alpha} + a_n = \frac{a_0 + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_n\alpha^n}{\alpha^n} = \frac{p(\alpha)}{\alpha^n} = 0.$$

c) e^α é transcendente $(\alpha \neq 0)$

Solução

No teorema de Hermite-Lindemann fazendo $m = 2$, $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = \alpha$ teremos que $e^0 = 1$ e e^α são L.I. ou seja, sendo β_1 e β_2 algébricos ambos não nulos temos $\beta_1.1 + \beta_2 e^\alpha \neq 0$. Se e^α fosse algébrico então o mesmo aconteceria com $e^{-\alpha}$, sendo assim, tomando $\beta_1 = -1$ e $\beta_2 = e^{-\alpha}$ ficamos com

$$-1.1 + e^{-\alpha}.e^\alpha = -1 + 1 = 0$$

o que é um absurdo.

d) $ln\alpha$ é transcendente $(\alpha \notin \{0,1\})$

Solução

Se $ln\alpha$ fosse algébrico então pelo teorema de Hermite-Lindemann $e^{ln(\alpha)} = \alpha$ seria transcendente, um absurdo.

2) Sejam a e b números racionais. Mostre que a^b é um número algébrico.

Solução

Como a e b são números racionais então existem inteiros p, q, r e s com $mdc(p,q) = mdc(r,s) = 1$, $q, s \neq 0$ e p e r não ambos nulos tais que $a = \frac{p}{q}$ e $b = \frac{r}{s}$ · Agora note que

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{r}{s}} = x \Rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^{r} = x^s \Longrightarrow p^r = q^r x^s \Longrightarrow q^r x^s - p^r = 0.$$

Mostrando assim que a^b é um número algébrico.

3) Sejam α um número algébrico e β um número transcendente. Mostre que

a) β^m é transcendente, para todo $m \in \mathbb{Z}^*$;

Solução

Considere inicialmente o caso $m \in \mathbb{N}^*$.

Suponha que β^m é algébrico, daí existe um polinômio P com coeficientes inteiros tal que $P(\beta^m) = 0$, ou seja

$$a_n(\beta^m)^n + a_{n-1}(\beta^m)^{n-1} + \cdots + a_1\beta^m + a_0 = 0 \Longrightarrow$$

$$a_n(\beta)^{mn} + a_{n-1}(\beta)^{mn-m} + \cdots + a_1\beta^m + a_0 = 0.$$

Daí, sendo

$$g(x) = a_n x^{mn} + a_{n-1}x^{mn-m} + \cdots + a_1 x^m + a_0$$

Temos que $g(\beta) = 0$ e daí β é algébrico, um absurdo.

Se $m \in \mathbb{Z}_-^*$ então existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $m = -k$, daí

$$\beta^m = \beta^{-k} = \frac{1}{\beta^k}$$

Como β^k é transcendente, então o mesmo acontece com seu inverso.

b) α^q é algébrico, para qualquer $q \in \mathbb{Q}^*$;

Solução

Seja $q = \frac{r}{s}$ com r e s inteiros positivos. Suponha que $\alpha^q = t$ é transcendente, daí

$$\alpha^q = t \Longrightarrow \alpha^{\frac{r}{s}} = t \Longrightarrow \alpha^r = t^s.$$

Como multiplicação de algébrico resulta em algébrico e pelo item a) t^s é transcendente, temos que uma igualdade ente algébrico e transcendente, o que é um absurdo.

O caso $q < 0$ é similar, lembrado do fato que inverso de algébrico é também algébrico.

c) β^q é transcendente para qualquer $q \in \mathbb{Q}^*$.

Solução

Análoga ao item anterior.

4) Se x e y são transcendentes mostre que:

a) $x + y$ ou $x - y$ é também transcendente

Solução

Suponha que ambos sejam algébricos, então a soma também será, daí $2x$ será algébrico, e portanto x será algébrico, um absurdo.

b) x^x ou x^{x+1} é transcendente

Solução

Suponha que ambos sejam algébricos, então a divisão também será algébrico, daí $\frac{x^{x+1}}{x^x} = x$ será algébrico, um absurdo.

c) $x + y$ ou xy é também transcendente.

Solução

Suponha ambos sejam algébricos, daí também seriam algébricos os números $(x + y)^2$ e $4xy$, e também seria algébrico o número

$$(x + y)^2 - 4xy = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

Pela questão 2), $(x - y)$ também será algébrico, e daí será algébrico o número

$$(x + y) + (x - y) = 2x$$

Logo, x será algébrico, o que é um absurdo.

d) $x^2 + qx$ é transcendente, onde $q \in \mathbb{Q}$

Solução

Suponha que $x^2 + qx = a$ seja algébrico, logo

$$x^2 + qx = a \Rightarrow x^2 - qx - a = 0 \Rightarrow \Delta = q^2 + 4a \Rightarrow x = \frac{q \pm \sqrt{q^2 + 4a}}{2} \Rightarrow x \in \overline{\mathbb{Q}},$$

pois, como a é algébrico, o mesmo ocorre com $4a$ e também com $q^2 + 4a$, já que q é racional, daí x será algébrico, o que é um absurdo.

5) Sejam a e b números reais. Prove que $a + ib$ é algébrico, se e somente se a e b são algébricos.

Solução

Sabemos que se $P(x)$ é um polinômio com coeficientes reais que possui o complexo z como raiz então também possui $\bar{z}$ como raiz. Assim, como $a + ib$ é algébrico então $a - ib$ também será.

$\Rightarrow$) Como $a + ib$ e $a - ib$ são algébricos, então a soma também será, logo é algébrico o número $2a$ e dái a. Subtraindo os números iniciais temos que $(2i)b$ será algébrico e portanto b será algébrico.

$\Leftarrow$) Como a, b e i são algébricos então $a + bi$ é algébrico, já que produto e soma de

algébricos resulta em algébrico.

6) Mostre que:

a) $e^{i\pi}$ é um número algébrico

Solução

Como $e^{ix} = \cos(x) + isen(x)$ então, $e^{i\pi} = -1$, que é um número algébrico.

b) π é um número transcendente

Solução

Suponha que π é algébrico, então o mesmo aconteceria com $i\pi$ e pelo item c) da questão 1 deste apêndice $e^{i\pi}$ seria transcendente, o que é um absurdo pelo item anterior, portanto π é transcendente.

c) e^{π} é um número transcendente

Solução

Do que foi feito acima temos que

$$e^{i\pi} = -1 \Rightarrow \left(e^{i\pi}\right)^{-i} = (-1)^{-i} \Rightarrow e^{\pi} = (-1)^{-i}$$

Que pelo teorema de Gelfond-Schneider é transcendente.

7) Prove que

a) $\cos(Q\pi)$ e $sen(Q\pi)$ são algébricos para todo $Q \in \mathbb{Q}$.

Solução

$$e^{ix} = \cos(x) + isen(x)$$

Fazendo $x = Q\pi$ ficamos com

$$e^{iQ\pi} = \cos(Q\pi) + isen(Q\pi)$$

Mas,

$$e^{iQ\pi} = \left(e^{i\pi}\right)^{Q} = (-1)^{Q}$$

Que é um número algébrico pela questão anterior. Logo, $\cos(Q\pi) + isen(Q\pi)$ é um número algébrico, e pela questão 5), $\cos(Q\pi)$ e $sen(Q\pi)$ são algébricos.

b) $\cos(x)$ e $sen(x)$ são transcendentes para todo x algébrico.

Solução

No teorema de Hermite-Lindemann considere $m = 3$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = ix$ e $\alpha_3 = -ix$. Sendo β_1, β_2 e β_3 algébricos não nulos temos

$$\beta_1 e^{0} + \beta_2 e^{ix} + \beta_3 e^{-ix} \neq 0$$

Suponha que $sen(x)$ seja algébrico, então tomando $\beta_1 = 2isen(x)$, $\beta_2 = -1$ e $\beta_3 = 1$ ficamos com

$$2isen(x) - \cos(x) - isen(x) + \cos(x) - isen(x) = 0$$

O que é um absurdo. Mostrando assim que $sen(x)$ é transcendente.

Para o $\cos(x)$ é análogo.

8) Se α e β são algébricos não nulos mostre que $(ln(\alpha) + ln(\beta))$ é transcendente.

Solução

Note que

$$\alpha = e^{ln\alpha}$$

$$\beta = e^{ln\beta}$$

Daí

$$\alpha\beta = e^{ln\alpha+ln\beta}$$

Se $(ln\alpha + ln\beta)$ fosse algébrico, então pelo item c) da questão 1 deste apêndice $e^{ln\alpha+ln\beta}$ seria transcendente, um absurdo, visto que $\alpha\beta$ é algébrico.

9) Mostre que

a) $\sqrt[3]{e}^{\sqrt[3]{e}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$ é transcendente

Solução

Note que

$$\sqrt[3]{e}^{\sqrt[3]{e}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}} = x \Longrightarrow \left(\sqrt[3]{e}\right)^x = x \Longrightarrow e^{\frac{x}{3}} = x$$

Se x fosse algébrico, pelo item c) da questão 1 deste apêndice $e^{\frac{x}{3}}$ seria transcendente, um absurdo.

b) $\frac{1}{2}^{\frac{1}{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$ é transcendente

Solução

Note que

$$\frac{1}{2}^{\frac{1}{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}} = x \Longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x} = x \Longrightarrow 2^{-x} = x$$

Pelo teorema de Gelfond-Schneider se x é algébrico não racional, então 2^{-x} é transcendente, uma absurdo.

Suponha agora que x é racional, daí, existem inteiros positivos p e q com $mdc(p,q) = 1$ tal que $x = \frac{p}{q}\cdot$ Agora veja que

$$2^{-x} = x \Longrightarrow 2^{-\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \Longrightarrow 2^{p} = \left(\frac{q}{p}\right)^{q}$$

Como 2^{p} é inteiro, o mesmo ocorre com $\left(\frac{q}{p}\right)^{q}$, mas como $mdc(p,q) = 1,$ a única possibilidade seria $p = 1,$ daí

$$2 = q^{q}$$

Claro que $q = 1$ não resolve essa equação, então

$$q \geq 2 \Longrightarrow q^{q} \geq 2^{q} \geq 2^{2} > 2.$$

Portanto, não haverá solução.

10) Na questão anterior sendo o número inicial algébrico ou transcendente, tivemos como resultado um número transcendente. Será possível encontrar como resultado um número algébrico iniciando com um número transcendente?

Solução

Sim, observe

$$\sqrt{2}^{-\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{-\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} = x \Longrightarrow \left(\sqrt{2}^{-\sqrt{2}}\right)^{x} = x \Longrightarrow \sqrt{2}^{-\sqrt{2}} = x^{\frac{1}{x}} \Longrightarrow \sqrt{2}^{\sqrt{2}} = \left(x^{\frac{1}{x}}\right)^{-1} \Longrightarrow$$

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Daí, a solução é $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ que é um número algébrico.

11) Sejam a, b, c e d números algébricos, não nulos, com lna e lnb linearmente independente sobre $\mathbb{Q}$. Mostre que

a) $cln(a) + dln(b) \neq 0$

Solução

Suponha que possa ser igual a zero, daí

$$cln(a) + dln(b) = 0 \Rightarrow ln(a) = \left(-\frac{d}{c}\right) ln(b) \Longrightarrow a = b^{-\frac{d}{c}}.$$

Como b é algébrico[2], se $\left(-\frac{d}{c}\right)$ não for racional, então $\left(b^{-\frac{d}{c}}\right)$ seria transcendente, um absurdo, pois a é algébrico. Logo, $\left(-\frac{d}{c}\right)$ é racional. Agora note que

$$-\frac{d}{c} = r \Longrightarrow d = -cr$$

Voltando ao início ficaríamos com

$$cln(a) - crln(b) = 0 \Longrightarrow lna - rln(b) = 0$$

Contrariando a independência linear de $ln(a)$, $ln(b)$ sobre $\mathbb{Q}$, chegamos novamente a um absurdo.

b) $\frac{ln2020}{ln2}$ é transcendente.

Solução

Vamos provar que $ln2020$ e $ln2$ são L.I. sobre $\mathbb{Q}$. Suponha que não, daí

$$aln2020 + bln2 = 0 \Longrightarrow ln2020 = -\frac{bln2}{a} \Longrightarrow ln2020 = ln\left(2^{\left(-\frac{b}{a}\right)}\right) \Longrightarrow 2020 = 2^{\left(-\frac{b}{a}\right)} \Longrightarrow$$

$$2020^a = 2^{-b}.$$

[2] Caso $b = 1$, no início ficaríamos com $clna = 0$, e daí $lna = 0$, ou seja, lna e lnb não seriam L.I.

O que contraria o teorema fundamental da Aritmética. Assim, $ln2020$ e $ln2$ são L.I. sobre $\mathbb{Q}$.

Suponha agora que $\frac{ln2020}{ln2}$ seja algébrico, daí

$$\frac{ln2020}{ln2} = \alpha \Longrightarrow 1.\, ln2020 - \alpha ln2 = 0$$

O que é um absurdo, visto o item a). Portanto, $\frac{ln2020}{ln2}$ é transcendente.

12) Mostre que é transcendente o seguinte número

$$\log_2 \sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2\sqrt[5]{2\ldots}}}}.$$

Solução

Inicialmente vamos considerar algo mais simples e observar o que acontece

$$\sqrt{2\sqrt[3]{2}} = \left(2.2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}.\, 2^{\frac{1}{3.2}} = 2^{\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}},$$

$$\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{2\sqrt[3]{2.\, 2^{\frac{1}{4}}}} = \sqrt{2.\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{2}} = \left(\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{2\sqrt[3]{2}} = 2^{\frac{1}{4!}}.\, 2^{\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}} = 2^{\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}},$$

usando esse raciocínio indutivo, é fácil ver que

$$\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2\sqrt[5]{2\ldots}}}} = 2^{\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots}.$$

No entanto, é bastante conhecido que

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \Longrightarrow e - 2 = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots,$$

ficamos então com:

$$\log_2 \sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2\sqrt[5]{2\ldots}}}} = \log_2 2^{e-2} = e - 2.$$

13) Prove que se x é racional não inteiro então x^{x^x} é transcendente.

Solução

Pela questão 19) do apêndice A, x^x é irracional, e pela questão 2) deste apêndice é algébrico, logo, utilizando o teorema de Gelfond-Schneider concluímos que $x^{(x^x)}$ é transcendente.

14) Seja p um número primo, mostre que se $x^x = p$ então x é transcendente.

Solução

Claramente $x \notin \{0,1\}$, temos alguns casos a considerar,

Se x é inteiro positivo então $x|p$, então $x = p$, daí

$$p^p = p \Longrightarrow p^{p-1} = 1,$$

Mas,

$$p \geq 2 \Longrightarrow p - 1 \geq 1 \Longrightarrow p^{p-1} \geq 2 > 1,$$

Para este caso, não temos solução.

Se x é inteiro negativo, então existe $k > 0$ inteiro, tal que $x = -k$, daí

$$x^x = p \Longrightarrow (-k)^{(-k)} = p \Longrightarrow \frac{1}{(-k)^k} = p,$$

do lado esquerdo temos um número que não é inteiro, um absurdo. Observe que se $k = 1$, então $p < 0$, um absurdo.

Se x é racional não inteiro, então pela questão 19) do apêndice A, x^x é irracional e novamente não temos solução.

Se x é algébrico não racional, então x^x é transcendente, pelo teorema de Gelfond-Schneider, e mais uma vez não temos solução.

Portanto, x é transcendente.

15) Demonstre que $e^{e\sqrt{n}}$ é transcendente , para infinitos $n \in \mathbb{N}$.

Solução

Como não sabemos se e^e é algébrico ou transcendente vamos considerar os dois casos:

I) e^e é algébrico

Claramente $e^e > 1$. Tome n não quadrado perfeito, então, pelo teorema de Gelfond-Schneider, $e^{e\sqrt{n}} = (e^e)^{\sqrt{n}}$ é transcendente, já que $\sqrt{n}$ é algébrico não racional.

II) e^e é transcendente

Tomando n como sendo quadrado perfeito, então $\sqrt{n}$ é inteiro, logo, $(e^e)^{\sqrt{n}}$ é transcendente, pela questão 3-a) deste apêndice.

16) Demonstre que a constante de Plouffe, a seguir, é transcendente

$$\frac{tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi}.$$

Solução

Note que

$$e^{ix} = cosx + isenx \Longrightarrow e^{i(-x)} = cosx - isenx$$

Assim,

$$cosx = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \ e \ senx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Logo,

$$tgx = \left(\frac{1}{i}\right)\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}\right) = \left(\frac{1}{i}\right)\left(\frac{e^{2ix} - 1}{e^{2ix} + 1}\right) \Longrightarrow x = tan^{-1}\left[\left(\frac{1}{i}\right)\left(\frac{e^{2ix} - 1}{e^{2ix} + 1}\right)\right]$$

Veja agora que

$$\left(\frac{1}{i}\right)\left(\frac{e^{2ix} - 1}{e^{2ix} + 1}\right) = \frac{1}{2} \Longrightarrow 2e^{2ix} - 2 = ie^{2ix} + i \Longrightarrow e^{2ix}(2 - i) = i + 2 \Longrightarrow$$

$$e^{2ix} = \frac{2 + i}{2 - i} = \frac{3 + 2i}{5} \Longrightarrow e^{ix} = \pm\left(\frac{2 + i}{\sqrt{5}}\right) \Longrightarrow ix = ln\left[\pm\left(\frac{2 + i}{\sqrt{5}}\right)\right] \Longrightarrow$$

$$x = \left(\frac{1}{i}\right) ln\left[\pm\left(\frac{2 + i}{\sqrt{5}}\right)\right].$$

Assim,

$$\frac{\left(\frac{1}{i}\right) ln\left[\pm\left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)\right]}{\pi} = \frac{tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi}\cdot$$

Sabemos que a imagem da função $tan^{-1}x$ é $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, mas em $\left(\frac{1}{i}\right) ln\left[\pm\left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)\right]$ temos dois valores. Note que

$$\left(\frac{1}{i}\right) ln\left[\pm\left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)\right] = \left(\frac{1}{i}\right)\left\{ln\left|\pm\left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)\right| + iArg\left[\pm\left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)\right]\right\} = Arg\left[\pm\left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)\right].$$

Como as partes real e imaginária de $\left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)$ são positivas então $0 < Arg\left[\left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)\right] < \frac{\pi}{2}\cdot$ Como as partes real e imaginária de $-\left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)$ são negativas então $-\pi < Arg\left[\left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)\right] < -\frac{\pi}{2}\cdot$ Isso mostra que a igualdade que de fato vale é

$$\frac{\left(\frac{1}{i}\right) ln\left[\left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)\right]}{\pi} = \frac{tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi}\cdot$$

Resta mostrar que a expressão a esquerda é um número transcendente.

$$\frac{\left(\frac{1}{i}\right) ln\left[\left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)\right]}{\pi} = \left(\frac{1}{i\pi}\right) ln\left[\left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)\right] = \log_{e^{i\pi}}\left[\left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)\right] = \log_{-1}\left[\left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)\right] = y$$

$$\Rightarrow (-1)^y = \left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)\cdot$$

Suponha agora que y é racional, então existem p e q inteiros com $q \neq 0$ e $mdc(p,q) = 1$ tal que $y = \frac{p}{q}$ logo:

$$(-1)^{\frac{p}{q}} = \left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right) \Rightarrow (-1)^p = \left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)^q \Rightarrow (-1)^p\left(\sqrt{5}\right)^q = (2+i)^q\cdot$$

Para tal igualdade ocorrer é necessário a parte imaginária do lado direito ser zero, vamos provar que ela é sempre positiva, por indução. Definindo $A_n = (2+i)^n$, observe primeiramente que $Re(A_n)$ e $Im(A_n)$ são números inteiros já que soma e multiplicação de inteiros resulta em inteiro. Agora note que:

$$A_1 = 2 + i \Rightarrow Re(A_1), Im(A_1) > 0$$

$$A_2 = 3 + 4i \Longrightarrow Re(A_2), Im(A_2) > 0$$

Suponha que $Re(A_k)\ e\ Im(A_k)$ sejam positivas para todo $k \leq n$, vamos provar que a propriedade se mantém para $k + 1$.

$$A_{k+1} = (2 + i)^{k+1} = (2 + i)^k(2 + i) = (a + bi)(2 + i) = 2a + ai + 2bi - 1 =$$

$$(2a - 1) + i(a + 2b).$$

Como a e b são inteiros e positivos então $2a - 1 > 0$ e $a + 2b > 0$, fica então provado.

Concluímos assim que y é não racional. Se ele for algébrico, pelo teorema de Gelfond-Schneider $(-1)^y$ é transcendente, mas $\left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)$ é um número algébrico, chegamos a um absurdo. Concluímos assim finalmente, que y é transcendente.

17) Prove que existem infinitos transcendentes na sequência $a_n = e^{a_{n-1}}$, com $a_1 = e$.

Solução

Se há uma quantidade finita de algébricos, então há uma quantidade infinita de transcendentes, neste caso não há o que fazer.

Se há uma quantidade infinita de algébricos então há uma quantidade infinita de transcendentes, pois, se a_i é algébrico, então $a_{i+1} = e^{a_i}$ é transcendente, como há sequência é infinita, então temos infinitos transcendentes.