

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS**  
**INSTITUTO DE FÍSICA**  
**CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**FELIPE NAZARIO DA SILVA**

**ESTUDO SOBRE GERAÇÃO DE UM ELEMENTO "FAN-OUT"**

**MACEIÓ - AL**

**2019**

FELIPE NAZARIO DA SILVA

ESTUDO SOBRE GERAÇÃO DE UM ELEMENTO "FAN-OUT"

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Física do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para à obtenção do grau de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Alcenísio José de Jesus Silva

MACEIÓ - AL

2019

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecário Responsável: Valter dos Santos Andrade – CRB-4 - 1251

S586e Silva, Felipe Nazário da.

Estudo sobre geração de um elemento "fan-out"/ Felipe Nazário da Silva. – 2020.  
32 f. : il.

Orientador: Alcenísio José de Jesus Silva.

Monografia (Trabalho de conclusão de curso em licenciatura em Física) –  
Universidade Federal de Alagoas, Instituto de Física. Maceió, 2020.

Bibliografia: f. 31-32.

1. Óptica. 2. Fan-out. 3. Feixes óticos. 4. Sampling, teorema. 5. Difração. I. Título.

CDU: 535.42

Dedico este trabalho a minha família, especialmente aos meus pais.

## **AGRADECIMENTOS**

- Primeiramente agradeço a Deus por me conceder força e condições para batalhar.
- Aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.
- Agradeço ao GON pela oportunidade concedida de participar do Projeto de Iniciação Científica.
- Ao professor Alcenísio pelo apoio e paciência na orientação deste trabalho.
- A todos os membros que compõem o grupo GON, em especial aos professores Eduardo, Alcenísio e Samuel. E colegas de Iniciação Científica.
- Ao meu amigo João Paulo, pelo auxílio nas atividades que constituíram o desenvolvimento do Projeto de Iniciação Científica.
- A Fapeal e CNPq, pelo apoio financeiro.
- Ao professor Antônio Ornellas atual coordenador do curso de Licenciatura Plena em Física.

## RESUMO

O presente trabalho consiste no estudo de um elemento ótico difrativo que recebe o nome de elemento "fan-out". Tal dispositivo é capaz de dividir um único feixe em múltiplas réplicas, as quais podem ser focalizadas por uma lente para gerar uma rede de "spots". A ênfase será dada ao método que usa um somatório de ondas planas, o qual apresenta um resultado considerável, quanto aos parâmetros de uniformidade e eficiência do padrão de "spots" gerado. Será apresentado também, uma breve discussão sobre o estudo de feixes Gaussiano e Laguerre-Gauss. E por fim, vai ser feita uma análise do holograma de dupla-fase, bem como sua aplicação ao somatório de ondas planas.

**Palavras-chave:** Elemento "Fan-out". Feixes óticos. Teorema do "Sampling". Holografia.

## **ABSTRACT**

In this article we analyze the diffractive optical known as fan-out, with a brief discussion about the study of Gaussian and Laguerre-Gauss beams and the double-phase hologram, as well its applicability to the sum of plane waves. Such a device, the fan-out, is capable of dividing a single beam into multiple replicates, where they can be focused by the use of a lens to generate a network of spots. The method which will be emphasized is the sum of plane waves. This method presents relevant results regarding the parameters of uniformity and efficiency of the generated spot pattern.

**Keywords:** Fan-out Element. Optical Beams. Sampling Theorem. Holography

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Padrão de Intensidade do Feixe Gaussiano. . . . .	16
Figura 2 – Padrões de Intensidade dos feixes Laguerre-Gauss e suas respectivas cargas topológicas: (a) $m = 1$ , (b) $m = 2$ , (c) $m = 3$ e (d) $m = 4$ . . . . .	17
Figura 3 – Representação das Frentes de Onda, Fase e Amplitude de Feixes com Momento Orbital. . . . .	18
Figura 4 – Processo de gravação e reconstrução de hologramas. . . . .	19
Figura 5 – Constituição do modulador espacial de luz. . . . .	20
Figura 6 – Ilustração do Padrão de Dupla-Fase para cada "Pixel" do SLM. . . . .	22
Figura 7 – Ilustração do elemento fan-out. . . . .	24
Figura 8 – Aparato Experimental para para geração de um Elemento "Fan-out". . . . .	26
Figura 9 – Resultados Teórico e Experimental do padrão de "spots" para o Feixe Gaussiano. . . . .	27
Figura 10 – Resultados Teórico e Experimental do padrão de "spots" para para $m = 2$ . . . . .	27
Figura 11 – Resultados Teórico e Experimental do padrão de "spots", com usado o Holograma de Dupla-Fase para Feixes Gaussianos. . . . .	28
Figura 12 – Resultados Teórico e Experimental do padrão de "spots", com usado o Holograma de Dupla-Fase para Feixes com $m = 2$ . . . . .	29

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>ESTUDO DE FEIXES ÓPTICOS</b> . . . . .	<b>12</b>
2.1	INTRODUÇÃO . . . . .	12
2.2	FEIXE GAUSSIANO . . . . .	14
2.3	FEIXES LAGUERRE-GAUSS . . . . .	16
2.4	MOMENTO ANGULAR ORBITAL DA LUZ . . . . .	17
2.5	HOLOGRAFIA . . . . .	18
<b>3</b>	<b>DESCRIÇÃO DO HOLOGRAMA DE DUPLA FASE</b> . . . . .	<b>21</b>
3.1	INTRODUÇÃO . . . . .	21
3.2	TEORIA DO HOLOGRAMA DE DUPLA-FASE . . . . .	21
<b>4</b>	<b>GERAÇÃO DE UM ELEMENTO "FAN-OUT" USANDO UMA SOMA DE ONDAS PLANAS</b> . . . . .	<b>24</b>
4.1	INTRODUÇÃO . . . . .	24
4.2	GERAÇÃO DE UM ELEMENTO "FAN-OUT"UTILIZANDO SOMATÓRIO DE ONDAS PLANAS . . . . .	24
4.3	APLICAÇÃO DO HOLOGRAMA DE DUPLA-FASE AO SOMATÓRIO DE ONDAS PLANAS . . . . .	27
4.4	RESULTADOS E DISCUSSÕES . . . . .	29
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>30</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>31</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Desde os tempos primórdios a humanidade procura decifrar os fascinantes fenômenos que o campo da ótica proporciona. Tendo por início a observação dos astros que aparecem no céu, bem como a declinação da sombra de objetos iluminados pela luz do sol e da lua. Como se sabe, a ocorrência cotidiana desses fenômenos efetuados pela natureza da luz, tem contribuído para que os povos da antiguidade construíssem instrumentos que lhes proporcionasse estabelecer um acompanhamento da decorrência do dia, de modo que deu início a fabricação dos relógios de sol. De igual modo, a observação desses fenômenos favoreceu também a evolução das navegações através da criação de instrumentos que serviam para identificar a localização ou direção dos navios, baseado-se na observação dos corpos celestes.

No entanto, o advento da ótica aconteceu em meados do século XV, pela construção de instrumentos que possibilitaram a observação de forma mais nítida para objetos distantes, incluindo a lua e alguns planetas do sistema solar, essa capacidade foi alcançada graças a invenção do telescópio. Mas o ápice no estudo dos fenômenos luminosos surgiu a partir dos trabalhos de Newton por volta da segunda metade do século XVII, cuja teoria se baseava na ideia de que um feixe de luz era composto por micro partículas, as quais colidiam com os objetos em volta e, em seguida, eram refletidas em todas as direções, dessa maneira, seria possível enxergar as coisas em volta. Em relação a isso, houveram muitas contradições sobre a aceitação das ideias de Newton em relação a natureza da luz, principalmente por alguns estudiosos da época que acreditavam que a luz se propagava como uma onda. Portanto, no começo do século XIX, o físico Thomas Young realizou um experimento em que fez passar feixes de luz monocromáticos por duas fendas, de dimensões muito pequenas, presentes num mesmo anteparo. Com isso, na tela de observação o padrão era de uma sequencia de franjas claras e escuras. Dessa forma, foi constatado a ocorrência de um fenômeno de interferência. Sendo assim, os resultados obtidos por Young no experimento da dupla fenda, corroborou para a comprovação de que a luz possui natureza ondulatória.

Em contra partida, o desenvolvimento de teorias para explicar o fenômeno da difração da luz teve seu êxito em 1818 com as ideias de August Fresnel, o qual juntou o experimento de dupla fenda de Young com os princípios de Huygens. Este último, idealizou que uma frente de onda era o resultado da sobreposição de ondas secundárias. De modo que, cada ponto da onda primária representa uma fonte de ondas secundárias. E a sobreposição destas últimas gera uma nova frente onda.

Contudo, quase no fim do século XIX, as ideias de Huygens e Fresnel foram colocadas em bases matemáticas sólidas por Kirchhoff, que se baseou na suposição acerca dos valores de contorno da luz incidente na superfície de um obstáculo posto no caminho de propagação da luz. Porém, essas suposições tem se mostrado inconsistente, por Poincaré e Sommerfeld no ano de 1894. A formulação de Kirchhoff é chamada de princípio de Huygens-Fresnel, a qual pode ser considerada como boa aproximação para o fenômeno da difração. Posteriormente, essa teoria foi modificada por Sommerfeld, que eliminou uma das suposições acerca da amplitude da luz no contorno pelo uso das funções de Green. Esse tratamento é então chamado de difração de Rayleigh-Sommerfeld.

Em tempos modernos, um trabalho publicado por Allen e colaboradores [1], constatou que feixes possuindo uma estrutura de fase azimutal  $\exp(im\phi)$ , em que  $\phi$  é a coordenada azimutal e  $m$  é um número inteiro referido como índice azimutal ou carga topológica, tem a característica de transportar momento angular (MAO) bem definido de  $m\hbar$  por fóton, sendo  $\hbar$  a constante de Planck dividido por  $2\pi$ . Dessa maneira, vale ressaltar que o (MAO) possui um número ilimitado no espaço de estados acessíveis, diferentemente do momento de spin que possui apenas dois estados possíveis para o fóton.

Neste sentido, será apresentado uma discussão sobre feixes óticos que têm a característica de transportar momento angular orbital (MAO); porém, será dada ênfase ao modo Laguerre-Gauss. Em contra partida, devido ao seu frequente uso em laboratório será discutido o feixe Gaussiano. De modo que, o desenvolvimento e os parâmetros característicos desses feixes serão abordados com base na obra de Saleh [2].

O advento da holografia estabeleceu um progresso significativo em áreas diversas. Com o surgimentos de hologramas gerados por computador foi estimulado a criação e uso de técnicas holográficas que propiciaram o desenvolvimento da pesquisa no campo da ótica.

Dessa maneira, aparece uma forma mais dinâmica de gerar hologramas por meio de um dispositivo ótica capaz de modular a amplitude e fase de um feixe incidente, esse instrumento é chamado de Modular Espacial de Luz (SLM). Além disso, esse dispositivo possibilita controlar estados de polarização [3], correção de aberrações da frente de onda [4], dentre outros.

Imerso neste ambiente, aparecem os elementos óticos difrativos, de modo que será analisado aqui o elemento "fan-out", cuja capacidade é dividir um único feixe em múltiplas réplicas. Podendo serem focalizadas por uma lente para produzir uma matriz de pontos luminosos no plano de observação.

Os métodos para a produção dos elementos "fan-out" são vários, mas aqui será

apresentado um cujo desenvolvimento foi gerenciado por membros do GON (Grupo de Óptica e Nanoscopia) da Universidade Federal de Alagoas, pelo qual o conceito básico está em gerar um holograma através da superposição de ondas planas [5].

Nessa sequência, será discutido brevemente, o desenvolvimento de um método que estabelece a geração de um holograma de codificação do campo complexo como uma combinação de duas fases. De forma que, essa técnica vai ser aplicada ao método da superposição de ondas planas que gera uma matriz de "spots".

Por fim, concluímos o trabalho fazendo uma síntese dos temas apresentados no desenvolvimento do mesmo. Porém, dando maior ênfase ao método de geração do elemento "fan-out", comparando os resultados da geração de "spots" com e sem o uso do holograma de codificação do campo complexo.

## 2 ESTUDO DE FEIXES ÓPTICOS

### 2.1 INTRODUÇÃO

Em 1860, James Clerk Maxwell mostrou que a luz é uma onda eletromagnética [6]. Isso se deu em consequência da unificação dos fenômenos elétricos e magnéticos, realizada por Maxwell. Se for considerada a propagação da luz no espaço livre (vácuo), estas equações são dadas por:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.4)$$

com  $\varepsilon_0$  e  $\mu_0$  sendo, respectivamente, a permissividade e a permeabilidade do vácuo.

Fazendo uso destas equações, podemos mostrar que os campos elétrico e magnético,  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  e  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ , satisfazem a equação de onda. No entanto, o campo elétrico é bem mais evidente que o campo magnético, considerando o fato de que  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = c\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ . Onde a constante  $c$  representa a velocidade de propagação da luz. Dessa forma, um campo de luz é representado por  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ . Onde temos a equação da onda:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (2.5)$$

Dessa maneira, podemos deduzir que o campo elétrico,  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , é uma onda que se propaga com uma velocidade dada por

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 2,99792 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

O estudo da luz se restringe mais em considerar campos de onda monocromáticos, ou seja, que possuem uma única frequência, e que sejam linearmente polarizados. Com isso, a equação que descreve um campo monocromático tem a seguinte representação:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.6)$$

de maneira que é conhecida como a equação vetorial de Helmholtz, onde  $k = \omega/c$  é o módulo do vetor de onda e  $\omega$  é a frequência de oscilação. Porém, é de maior interesse campos que possuem alta direcionalidade; ou seja, campos que se propagam ao longo de um único eixo.

Considerando o caso específico da propagação de um campo de onda  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , que se propaga apenas ao longo de um único eixo. É possível escrevê-lo como  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 U(\mathbf{r})$ , sendo o eixo  $z$  tomado como a direção de propagação. O vetor  $\mathbf{E}_0$  é um vetor constante que determina a polarização do campo, enquanto que a função escalar  $U(\mathbf{r})$  é representada como sendo a amplitude complexa do campo elétrico. Substituindo essa nova expressão de  $\mathbf{E}$  na Eq.(2.6), obtém-se a seguinte forma

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}) + k^2 U(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.7)$$

que é chamada de equação escalar de Helmholtz. Deste modo, mesmo sabendo que a luz possui natureza vetorial, é possível ser feito um tratamento escalar da mesma.

Com isso, é necessário pensar que  $U(\mathbf{r})$  representa feixes de luz difratantes ao longo da propagação. No entanto, é importante salientar que podemos resolver a Eq.(2.7) via aproximação paraxial e de maneira exata. As soluções obtidas com a aproximação paraxial dão origem aos feixes paraxiais, que estão sujeitos aos efeitos da difração e vão ser apresentados aqui.

Portanto, considerando a ideia de onda paraxial, definida como sendo uma onda plana que se propaga ao longo do eixo  $z$  e que a amplitude da mesma varia lentamente com a posição  $\mathbf{r}$ . Tal onda pode ser expressa por  $U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{-ikz}$ . Então, substituindo essa nova expressão de  $U(\mathbf{r})$  na equação Eq.(2.7), obtemos

$$[\nabla_{\mathbf{r}}^2 A(\mathbf{r})]e^{-ikz} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} [A(\mathbf{r})e^{-ikz}] + k^2 [A(\mathbf{r})e^{-ikz}] = 0, \quad (2.8)$$

em que  $\nabla_t^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  é o laplaciano transversal. A Eq.(2.7) é conhecida como a equação paraxial de Helmholtz.

Dessa forma, vale considerar que a variação do envelope  $A(\mathbf{r})$  e sua derivada com a posição  $z$  deve ser muito lenta dentro da distância de um comprimento de onda  $\lambda = 2\pi/k$ , de maneira que seja mantida a natureza de ondas planas [2]. Sendo assim, a representação paraxial da equação de Helmholtz fica sendo dada por

$$\nabla_t^2 A(\mathbf{r}) - 2ik \frac{\partial A(\mathbf{r})}{\partial z} = 0. \quad (2.9)$$

## 2.2 FEIXE GAUSSIANO

Um dos principais feixes que se faz presente na execução de vários experimentos em ótica, denomina-se o feixe gaussiano; de modo que, se provem matematicamente como uma das soluções da equação paraxial de Helmholtz. Esse feixe carrega como aspectos principais um formato aproximadamente cilíndrico, em torno do eixo de propagação, mas passa a expandir a medida que se propaga. É observado, também, que a maior parte de sua intensidade está concentrada na região paraxial. Ou seja, está mais concentrado em torno de seu eixo.

Devido ao efeito da difração de um feixe que se propaga, sua menor largura está situada na origem do eixo de propagação que recebe o nome de cintura do feixe. Próximo dessa região, as frentes de onda são aparentemente planas, e tornam-se aproximadamente esféricas a medida que se distanciam [2].

Com esses conceitos apresentados nas discussões acima, agora é justo fornecer um desenvolvimento quantitativo que represente um feixe gaussiano. Para isso, será usada a expressão (2.9), que representa a forma paraxial da equação de Helmholtz em coordenadas retangulares.

No entanto, já que é necessário chegar a uma expressão que obedeça aos pré-requisitos de um feixe gaussiano, isto se dá pela procura de soluções da equação paraxial de Helmholtz que possuem o aspecto das ondas planas, porém a amplitude deve variar ao longo da propagação. Assim, essa expressão é dada da seguinte forma

$$U(x, y, z) = A(x, y, z) \exp(-ikz), \quad (2.10)$$

Neste sentido, torna-se necessário procurar uma forma funcional que seja fisicamente

aceita. Desse modo, uma solução teste pode ser usada [2]:

$$A(x, y, z) = E_0 \exp \left[ -i \left( k \frac{x^2 + y^2}{2q(z)} \right) + P(z) \right] \quad (2.11)$$

de modo que  $P(z)$  é representado como sendo um deslocamento de fase, enquanto que  $q(z)$  é conhecido como parâmetro do feixe. Agora, a tarefa é identificar os valores para esses parâmetros.

Feito isso, obtemos

$$A(x, y, z) = \frac{E_0}{[1 + (z/z_R)^2]^{1/2}} \exp \left[ -\frac{kzRr^2}{2(z^2 + z_R^2)} \right] \exp \left[ -i \frac{kz^2}{2(z^2 + z_R^2)} \right] \exp[i\zeta(z)], \quad (2.12)$$

em que  $r^2 = x^2 + y^2$ . O ângulo de fase

$$\zeta(z) = \tan^{-1}(z/z_R) \quad (2.13)$$

é conhecido como fase de Gouy. Além disso, é comum definir a cintura do feixe ao longo da propagação como sendo

$$\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_R} \right)^2} \quad (2.14)$$

em que  $\omega_0$  é o menor tamanho da cintura do feixe. Por conveniência, costuma-se localizar  $\omega_0$  em  $z = 0$ . Com isso, define-se que  $z_R = \omega_0^2 k / 2$ , o que é conhecido como comprimento Rayleigh e  $k = 2\pi/\lambda$  é o módulo do vetor de onda e  $\lambda$  é o comprimento de onda da luz. Outra definição importante é o raio de curvatura do feixe:

$$R(z) = z \sqrt{1 + \left( \frac{z_R}{z} \right)^2}. \quad (2.15)$$

Partindo dessas definições, a Eq.(2.10) pode ser reescrita da seguinte forma

$$U(x, y, z) = E_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} \exp \left[ -\frac{r^2}{\omega^2(z)} \right] \exp \left[ -i \frac{r^2}{2R(z)} - ikz + i\zeta(z) \right] \quad (2.16)$$

essa expressão representa o feixe gaussiano com as características expostas no início dessa seção.

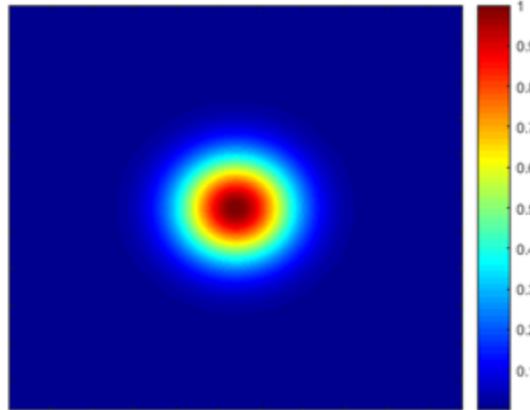
Sendo assim, a intensidade ótica desse feixe é dada por

$$I(x, y, z) = E_0^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2(z)} \exp \left[ -\frac{2r^2}{\omega^2(z)} \right]. \quad (2.17)$$

Logo abaixo está ilustrado o perfil do padrão de intensidade para o referido feixe na

Fig. 1:

Figura 1 – Padrão de Intensidade do Feixe Gaussiano.



Fonte: Autor, 2019

### 2.3 FEIXES LAGUERRE-GAUSS

A representação da equação de Holmholtz na aproximação paraxial em coordenadas cilíndricas constitui uma família completa de soluções que podem ser chamadas de modos Laguerre-Gauss [2]. São obtidas utilizando a técnica de separação de variáveis. A representação matemática dos modos Laguerre-Gauss pode ser dada pela seguinte expressão:

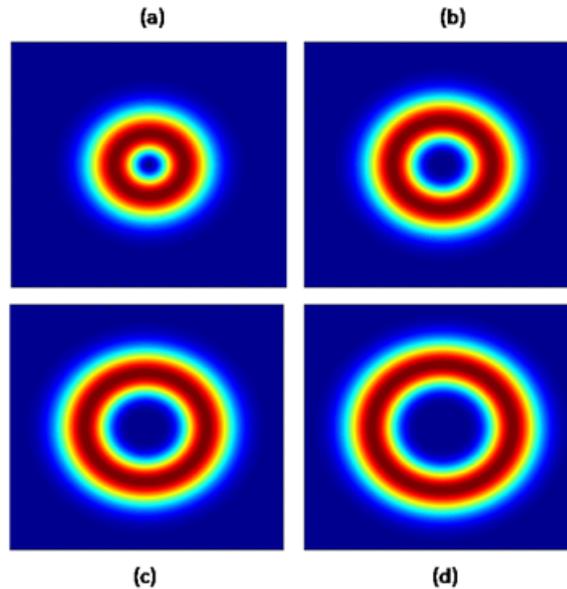
$$U_{p,m}(\rho, \phi, z) \propto (-1)^p \left( r \frac{\sqrt{2}}{\omega(z)} \right)^m \exp \left[ -\frac{r^2}{\omega^2(z)} \right] \exp \left[ -\frac{ikr^2}{2R(z)} \right] \exp(im\phi) \\ \times L_m^p \left( \frac{2r^2}{\omega^2(z)} \right) \exp \left[ -i(2p+m+1) \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_R} \right) \right], \quad (2.18)$$

de modo que  $w(z)$  é o raio do feixe,  $R(z)$  é o raio de curvatura da frente de onda no plano  $z$ ,  $z_R = kw_0^2/2$  é o comprimento de Rayleigh,  $\omega_0$  é a cintura mínima do feixe,  $L_p^m$  é o polinômio generalizado de Laguerre e o termo  $(2p+m+1)$  é a fase de Gouy do modo. O raio do feixe e o raio de curvatura da frente de onda são os mesmos que foram representados para o feixe Gaussiano.

Sendo assim, os índices  $p$  e  $m$  são inteiros que definem a ordem dos modos. Com isso, o  $p$  está associado ao número de anéis por meio da distribuição radial do campo. Logo, para modos Laguerre-Gauss com  $p = 0$  e qualquer valor de  $m \neq 0$ , o feixe possui o perfil especial com a forma de um anel luminoso que aumenta de tamanho à medida que se propaga no direção de propagação do eixo  $z$ . Porém, se for mantida uma distância  $z$  de propagação, é observando que o raio do anel cresce conforme  $m$  aumenta.

Dessa maneira, a Figura 2 mostra alguns padrões de intensidade do feixe Laguerre-Gauss, conforme suas respectivas cargas topológicas, ou seja, para diferentes valores de  $m$ :

Figura 2 – Padrões de Intensidade dos feixes Laguerre-Gauss e suas respectivas cargas topológicas: (a)  $m = 1$ , (b)  $m = 2$ , (c)  $m = 3$  e (d)  $m = 4$ .



Fonte: Autor, 2019

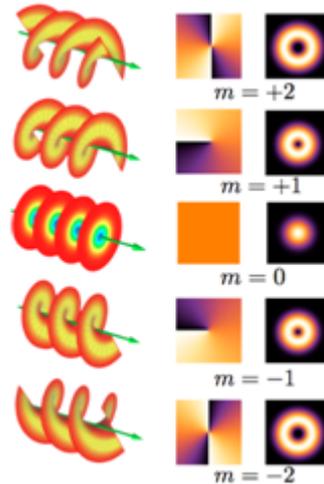
## 2.4 MOMENTO ANGULAR ORBITAL DA LUZ

Através das equações de Maxwell, sabe-se que a radiação eletromagnética transporta energia e momento [6]. Donde o momento fornece contribuições linear e angular. No entanto, a parte do momento angular pode apresentar duas componentes, o momento angular de spin (ou intrínseco) associado com os estados de polarização da luz, e o momento angular orbital que está associado com a distribuição espacial do campo eletromagnético.

Neste sentido, Allen e colaboradores [1] puderam identificar que feixes tendo uma estrutura de fase azimutal de  $\exp(im\phi)$ , onde  $\phi$  é a coordenada azimutal e  $m$  é um número inteiro referido como índice azimutal ou carga topológica, transportam momento angular orbital bem definido de  $m\hbar$  por fóton, com  $\hbar$  sendo a constante de Plank dividida por  $2\pi$ . Tal momento angular não depende dos estados de polarização, como é o caso do momento angular de spin. Os feixes que têm uma estrutura de fase azimutal possuem singularidade de fase; ou seja, no eixo do feixe a intensidade é nula e sua fase é indeterminada. No campo da ótica, tais singularidades são chamadas de vórtices ótico. Além disso, os feixes que transportam momento angular orbital se propagam descrevendo uma frente de onda helicoidal, definindo assim um perfil anelar.

A Fig. 3 apresenta, de forma ilustrativa o perfil da frente de onda, a fase e intensidade de feixes com momento angular orbital para alguns valores da carga topológica.

Figura 3 – Representação das Frentes de Onda, Fase e Amplitude de Feixes com Momento Orbital.



Fonte: Referido de [5, 7]

Neste sentido, fica necessário salientar que muitos métodos têm sido desenvolvidos para identificação da carga topológica de feixes que possuem momento angular orbital [8–10]. Um dos quais tem por finalidade gerar um padrão de interferência entre uma onda objeto e uma onda referência. Essa técnica recebe o nome de bifurcação [11, 12], podendo ser aplicada ao padrão de uma matriz de "spots" para tal finalidade [5].

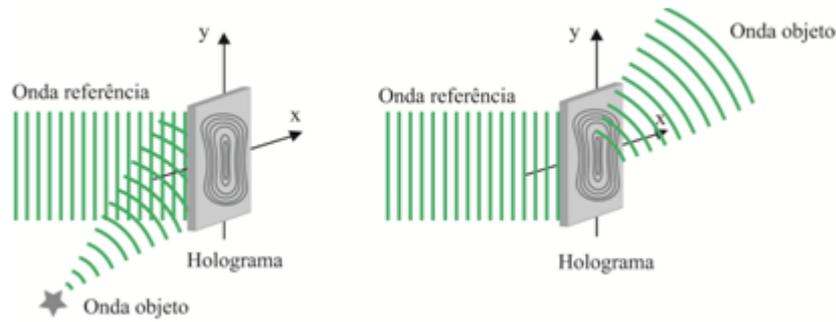
## 2.5 HOLOGRAFIA

A holografia, a princípio, consiste numa técnica cuja finalidade está em produzir uma reconstrução da imagem original. Essa técnica foi inventada por Denis Gabor em 1948 [13].

Dessa forma, o processo de gerar hologramas possui duas etapas fundamentais. A primeira consiste na gravação do padrão de interferência entre uma onda objeto  $U_0$ , a qual traz a informação que se deseja reproduzir, e uma onda referência  $U_r$ . Enquanto que a segunda parte consiste em incidir a onda referência no padrão de interferência gerado. O primeiro processo é feito em um filme fotográfico ou transparência que recebe o nome de holograma. Todo este discurso vai ser ilustrado na Fig. 4.

O processo de gerar hologramas difere da fotografia pelo fato desta oferecer apenas informação de intensidade, enquanto que processo holográfico pode gravar amplitude e fase de uma onda objeto.

Figura 4 – Processo de gravação e reconstrução de hologramas.



Fonte: Referido de [5]

Se for considerada a representação dos campos da objeto e referência, respectivamente, por :

$$U_0 = a(x,y)\exp[j\phi(x,y)] \quad (2.19)$$

e

$$U_r = A(x,y)\exp[j\psi(x,y)], \quad (2.20)$$

o padrão de interferência num plano de observação que consideramos em  $z = 0$ , tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} I(x,y) &\propto |U_0 + U_r|^2 \\ &= |a|^2 + |A|^2 + 2|a||A|\cos(\psi - \phi) \\ &= I_0 + I_r + 2\sqrt{I_0 I_r}\cos(\psi - \phi). \end{aligned} \quad (2.21)$$

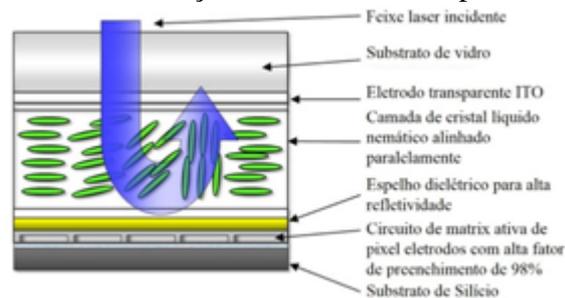
Com isso, o terceiro termo desta expressão fornece uma componente de fase relativa. Desta forma, está provado que a geração de hologramas apresenta informação de amplitude e fase.

Ao longo dos anos tem sido desenvolvidos vários métodos para geração hologramas, bem como a evolução do uso de mecanismos para tal. Ganhando destaque os ditos hologramas gerados por computador (CGH), os quais são produzidos por meio de cálculos numéricos e depois transferidos para um dispositivo de plotagem. Nos tempos modernos, esses mecanismos foram substituídos pelo uso do famoso modulador espacial de luz que cuja sigla é SLM (do inglês, Special Light Modulator). Com esse dispositivo, é possível ter capacidade de controlar

amplitude e fase do campo de luz incidente, e ser possível até fazer isso ao mesmo tempo, usando dois SLM [14].

Os SLMs podem ser classificados de acordo com seu princípio de funcionamento. Com isso, destaca-se um modelo que tem a capacidade de modular apenas a fase do campo incidente. Esse dispositivo é constituído de cristal líquido em Silício. A Fig. 5 faz ilustração a elementos que o constituem [15]. Seu processo de funcionamento é composto por circuito que gera tensões a pixel de eletrodos. Gerando uma alteração na configuração da camada de cristal líquido. Dessa forma, fase é modulada por essa camada, de modo que a quantidade de modulação de fase varia de acordo com o nível de tensão aplicada.

Figura 5 – Constituição do modulador espacial de luz.



Fonte: Referido de [5, 15]

### 3 DESCRIÇÃO DO HOLOGRAMA DE DUPLA FASE

#### 3.1 INTRODUÇÃO

É muito conveniente para processamento de dados e para propósitos de análise matemática representar uma função  $g(x, y)$  como uma matriz de seus valores de amostragem formando um conjunto de pontos discretos no plano  $xy$  [16]. Neste sentido, existe uma família de função conhecidas como funções de banda limitada, cuja transformadas de Fourier dessas funções não são nulas apenas para uma certa região.

Esses conceitos são a base para a construção do teorema do "sampling". Na área da ótica, esse teorema é aplicado no processo de reconstrução de imagens. De modo que, basta apenas representar pontos discretos do objeto. E ao ser aplicada uma transformada de Fourier, teremos no plano de observação a imagem reconstruída. As ideias apresentadas na próxima seção serão embasadas nesses conceitos.

#### 3.2 TEORIA DO HOLOGRAMA DE DUPLA-FASE

A aplicação de uma técnica para codificar um campo complexo  $U(x, y)$  [17], baseada no método de Holograma de Dupla Fase, cuja sigla em inglês é DHP, desenvolvida por Hsueh e Sawchuk [18], vai ser inserida na geração do elemento "fan-out". A princípio, o ponto crucial dessa técnica é que um campo complexo  $U(x, y)$ , cuja amplitude e fase são inicialmente dadas por  $A(x, y)$  e  $\phi(x, y)$ , ou seja,  $U(x, y) = A(x, y)e^{i\phi(x, y)}$ . Pode convenientemente ser expressa por  $U(x, y) = Be^{i\theta(x, y)} + Be^{i\theta_0(x, y)}$ . Onde os termos de fase mostrados acima são, respectivamente, dados por  $\theta(x, y) = \phi(x, y) + \cos^{-1}[A(x, y)/A_{max}]$  e  $\theta_0(x, y) = \phi(x, y) - \cos^{-1}[A(x, y)/A_{max}]$ . Como também, a  $B$  constante é escrita por  $B = A_{max}/2$  [17].

Antes de ser aplicada essa técnica na geração do elemento "fan-out", usando o somatório de ondas planas, será dada uma síntese do desenvolvimento teórico para estabelecer uma melhor compreensão da técnica de codificação do campo numa combinação de duas fases. Dessa forma, é primeiro conveniente considerar uma representação discreta do campo  $U(x, y)$  e em uma região limitada. Isso será expresso no plano do SLM. Dessa forma, cada pixel do modulador espacial de luz representa um ponto de amostragem.

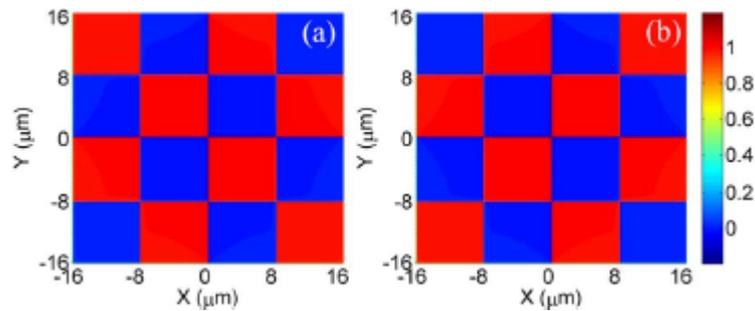
Como discutido anteriormente, um campo normalizado pode ser definido por uma combinação de duas fases. Sendo assim, o termo de fase que vai definir a função de codificação

pode ser expressa como matrizes de valores de amostragem, a qual é definida por

$$\alpha(x, y) = M_1(x, y)\theta(x, y) + M_2(x, y)\theta_0(x, y). \quad (3.1)$$

onde  $M_1$  e  $M_2$  matrizes no plano de pixels do SLM para cada fase. Neste sentido, fica controverso falar em inserir dois padrões de fase no SLM, mas a ideia aqui consiste em apresentar um campo de duas fases como padrão de xadrez, De modo que cada pixel adjacente apresenta uma alternância entre as fases  $\theta$  e  $\theta_0$ . A Fig. 6 ilustra esse fato.

Figura 6 – Ilustração do Padrão de Dupla-Fase para cada "Pixel" do SLM.



Fonte: Referido de [17]

Considerando que cada padrão acima representa cada uma das fases. De maneira que, quando essas figuras são sobrepostas, isso vai resultar na representação um campo com duas fase.

Sendo assim, a representação no espectro de Fourier de  $e^{i\alpha(x,y)}$  é ilustrada por  $H(u, v)$ ,  
 donde

$$H(u, v) = F\{e^{i\alpha(x,y)}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\alpha(x, y)) \exp\left(-\frac{2\pi i(x'x + y'y)}{f\lambda}\right) \quad (3.2)$$

Após aplicar o teorema da convolução, o espectro  $H(u, v)$  pode ser expresso como

$$H(u, v) = \frac{1}{2}[H_1(x, y) + H_2(x, y)], \quad (3.3)$$

de forma que,

$$H_1(u, v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Lambda_1(n, m) \Psi\left(u - \frac{n}{p}, v - \frac{m}{p}\right) \quad (3.4)$$

e

$$H_2(u, v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Lambda_2(n, m) \Omega\left(u - \frac{n}{p}, v - \frac{m}{p}\right) \quad (3.5)$$

Dessa maneira que, nas Eqs. (3.5) e (3.6),  $\Psi(u, v) = F\{e^{i\theta(x,y)}\}$  e  $\Omega(u, v) = F\{e^{i\theta_0(x,y)}\}$ . A condição de banda limitada para o campo  $U(x, y)$  garante que o espectro  $H(u, v)$  é não-nulo sobre uma região finita do espaço de frequência. Portanto, se a distância entre os pontos de amostragem  $p$  das grades  $M_1$  e  $M_2$  forem suficientemente pequenas, a separação de frequência espacial  $1/p$  entre as ordens de difração não se sobrepõem. Nas Eqs. (3.4)-(3.5) podemos ver que se usarmos um filtro  $P(u, v)$  para bloquear todas as ordens de difração, exceto a ordem zero, o espectro é reduzido a seguinte expressão:

$$H(u, v)P(u, v) = \frac{1}{2}F\{U(x, y)\}, \quad (3.6)$$

onde

$$F\{U(x, y)\} = \Psi(u, v) + \Omega(u, v). \quad (3.7)$$

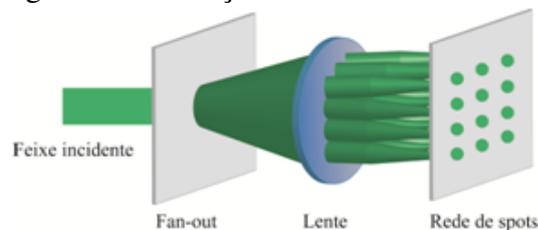
Sendo assim, as Eqs. (3.6) e (3.7) mostram que pelo uso da função de codificação para um único pixel dada pela Eq. (3.2) somos capazes de recuperar, exatamente, todo o espectro  $F\{U(x, y)\}$  do campo complexo  $U(x, y)$  no plano de Fourier, sobre a ordem de difração zero. Dessa forma, aplicaremos essa técnica de codificação do campo complexo na geração de um elemento "fan-out", que será mostrado adiante. [17]

## 4 GERAÇÃO DE UM ELEMENTO "FAN-OUT" USANDO UMA SOMA DE ONDAS PLANAS

### 4.1 INTRODUÇÃO

Elemento "fan-out" é um dispositivo ótico difrativo que divide um feixe de luz incidente em múltiplas réplicas de feixes propagando-se em várias direções [19], e por meio de uma lente, podem gerar uma matriz de "spots" luminosos num plano de observação, conforme na Fig.7.

Figura 7 – Ilustração do elemento fan-out.



Fonte: Referido de [5]

Esse dispositivo ótico constitui método efetivo para várias aplicações em ótica, tais como pinças óticas [20], processamento a laser [21, 22], dentre outros.

Neste capítulo focaremos nossa atenção, primeiramente, na técnica do somatório de ondas planas, desenvolvido por Lopes [5] e colaboradores, do Grupo de Óptica e Nanoscopia (GON) no Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas. Este método apresenta bons resultados na geração da estruturas de "spots" utilizando um Modulador Espacial de Luz (SLM). A essência da construção deste métodos, é dada pela utilização da fase resultante obtida pelo somatório das ondas planas. Esse padrão de fase é utilizado para a criação de elemento "fan-out", discutido na próxima seção.

### 4.2 GERAÇÃO DE UM ELEMENTO "FAN-OUT" UTILIZANDO SOMATÓRIO DE ONDAS PLANAS

Considerando o estudo e a verificação de alguns métodos utilizados para a obtenção do elemento "fan-out", será apresentado um que usa somatório de ondas planas desenvolvido por Lopes H. e colaboradores [5]. Esse método apresenta uma técnica bastante simples, sem a necessidade de algoritmos iterativos de transformadas discretas de Fourier.

Sendo assim, será resumidamente mostrado os princípios que constituem sua teoria.

Começando por considerar um campo complexo de uma onda plana

$$U = A \exp[-j(k_x x + k_y y + k_z z)] \quad (4.1)$$

de modo que  $j$  é a unidade imaginária,  $\mathbf{K} = (k_x, k_y, k_z)$  é o vetor de onda e cujo módulo quadrado é  $K = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ . Dessa forma, pode-se considerar agora o somatório de ondas planas ao longo da direção  $z$  dado por

$$S = \sum_i^n \exp(j\phi_i) \exp[-j(k_{xi} + k_{yi})] \quad (4.2)$$

onde

$$w^2 = \frac{2K}{z} \quad (4.3)$$

e

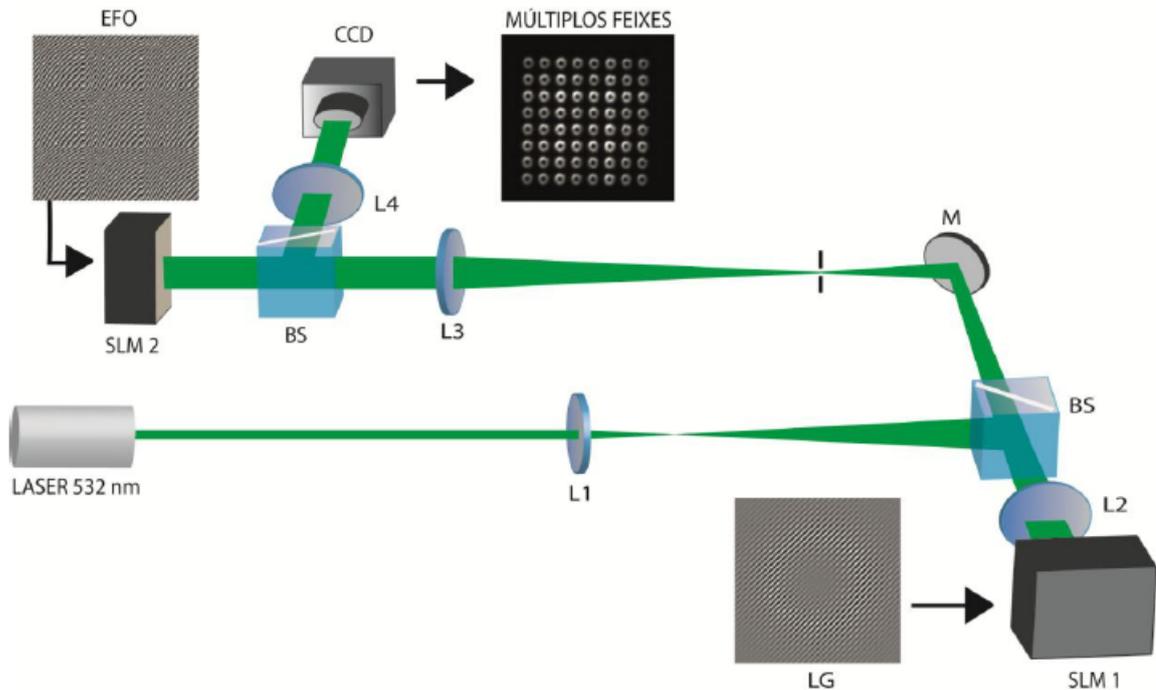
$$\phi_i = \frac{(k_{xi})^2 + (k_{yi})^2}{w^2} \quad (4.4)$$

Com a fase desse somatório foi possível gerar um holograma que possibilita a criação do elemento "fan-out", de modo a obter uma matriz de "spots" do feixe original. Dessa forma, repetimos o experimento com a utilização deste método e realizamos medidas onde foram criados 4 hologramas para a geração de feixes Lagurre-Gauss conforme os respectivos valores de suas cargas topológicas, sendo  $m = 1, 2$  e  $3$ , como também, para  $m = 0$  que corresponde ao feixe gaussiano. Contudo, para a geração do elemento "fan-out" foi necessário a criação de 12 hologramas, por levar em conta a geração das redes conforme o número de 'spots'; ou seja, a ordem das matrizes geradas, das quais os valores variam de  $5 \times 5$ ,  $10 \times 10$  e  $14 \times 14$ . Além disso, conforme mencionado antes, cada matriz foi medida de acordo com os considerados valores das cargas topológicas. Sendo importante, resultar que em nosso experimento, as matrizes de ordem mais elevada apresentavam um nível elevado de ruídos que desconfigurava boa parte dos "spots". É por isso que a extração dessas medidas só foi obtida para a ordem de até  $14 \times 14$ .

Através do método apresentado acima, seguiremos com as etapas necessárias para a obtenção dos resultados experimentais. Então, o primeiro passo consiste em efetuar a montagem do aparato experimental, conforme ilustrado na figura 8. Esse processo começa com o alinhamento do feixe de luz monocromático gerado por um laser MLS-FN-532-200mW de comprimento de onda igual a 532nm. Em seguida, o feixe passa através de duas lentes cujos

comprimentos focais são dados por  $L_1 = 31,7mm$  e  $L_2 = 500mm$ . A primeira serve para expandir o feixe, enquanto a segunda é usada para colimar a luz monocromática. Após a passagem por esses dois instrumentos óticos, o feixe é inserido no SLM1 (Modulador Espacial de Luz Hamamatsu, modelo X10468, que modula apenas fase), no qual foi inserido um holograma para a geração de modos Laguerre-Gauss com diferentes cargas topológicas.

Figura 8 – Aparato Experimental para para geração de um Elemento "Fan-out".

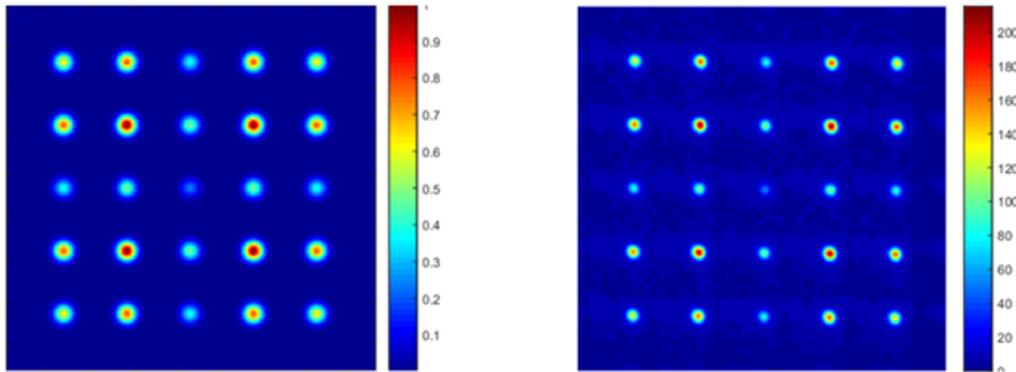


Fonte: Referido de [5]

Dessa forma, o feixe agora é submetido a um filtro espacial que seleciona a ordem de difração podendo, assim, eliminar a presença de ruídos indesejados. O feixe filtrado é colimado pela lente  $L_3 = 500mm$  e inserido no SLM2 (Modulador Espacial de Luz da marca Holoeye modelo Leto, que modula apenas fase) onde foi instalada as informações de fase do somatório de ondas planas e que constitui a geração de um elemento "fan-out", que produz réplicas do feixe incidente. Dessa forma, a rede de "spots" é formada no plano de Fourier da lente  $L_4 = 300mm$  e capturada por uma câmera Pixelink PL-B781F Monocromática, tendo assim a geração exposta na tela do computador.

Logo abaixo mostramos a simulação da rede de "spots" e as respectivas medidas obtidas no laboratório. Porém, para não tomar muito espaço com uma sequência numerosa de figuras, reduzimos aqui a apresentação das medidas e nos restringimos a matrizes  $5 \times 5$  e com feixes de carga topológica  $m = 0$  e  $m = 2$ . Segue abaixo o resultado teórico e experimental na Figura 9 para  $m = 0$ :

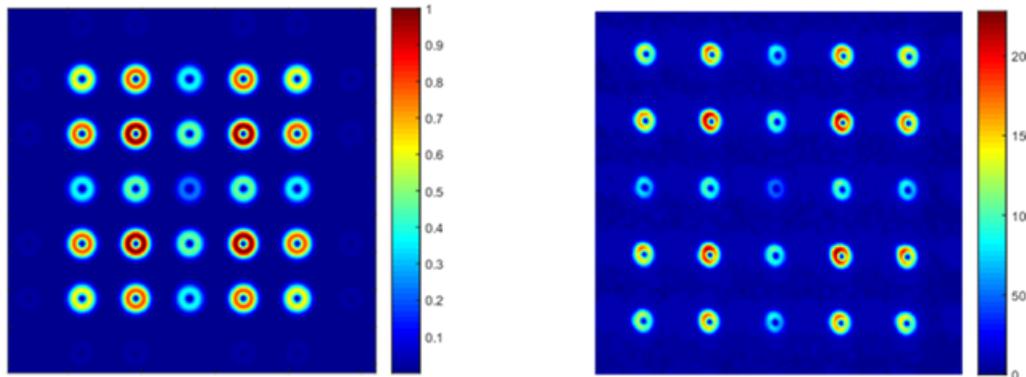
Figura 9 – Resultados Teórico e Experimental do padrão de "spots" para o Feixe Gaussiano.



Fonte: Autor 2019

Agora para  $m = 2$  temos a representação na Figura 10

Figura 10 – Resultados Teórico e Experimental do padrão de "spots" para para  $m = 2$ .



Fonte: Autor 2019

Observando o perfil dos "spots" gerados, o padrão de intensidade dos pontos luminosos é de uma matriz que não apresenta-se muito uniforme, visando que a maior parte dos pontos possuem intensidades diferentes.

#### 4.3 APLICAÇÃO DO HOLOGRAMA DE DUPLA-FASE AO SOMATÓRIO DE ONDAS PLANAS

Em caráter análogo ao procedimento experimental utilizando o método do somatório de ondas planas, foi inserido no SLM2 do mesmo arranjo experimental, para a geração do elemento "fan-out", um holograma que codifica a amplitude e fase do campo incidente. Após a realização de nosso experimento foi publicado um artigo por Leal e colaboradores, os quais desenvolveram um método para geração de um arranjo de "spots" utilizando uma superposição de múltiplas lentes, cujo campo complexo  $U(x, y)$  é representado como a somatória de  $N$  funções

de lens, de modo que

$$U(x,y) = K_n(x,y) \exp(i\gamma_n(x,y)) \quad (4.5)$$

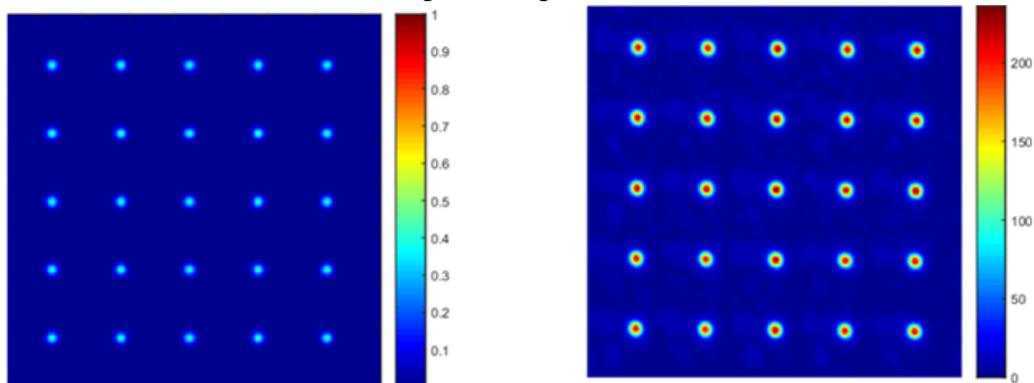
onde  $K_n(x,y)$  representa a amplitude de cada uma das lentes e  $\gamma_n(x,y)$  denota suas fases. Os autores desse artigo também fizeram uso da técnica de codificação do campo complexo.

Neste sentido, a única diferença da aplicação desta técnica de codificação do campo, em relação ao trabalho de Leal [23] e o nosso, está na representação do campo . De modo que, o primeiro utiliza uma superposição de múltiplas lentes, enquanto o segundo, ilustra o campo através do somatório de ondas planas.

Em relação ao experimento usando essa técnica de codificação, extraímos as mesmas quantidades dos padrões de uma redes de "spots", relacionadas a ordem da matriz gerada e o valor das cargas topológicas do feixe utilizado.

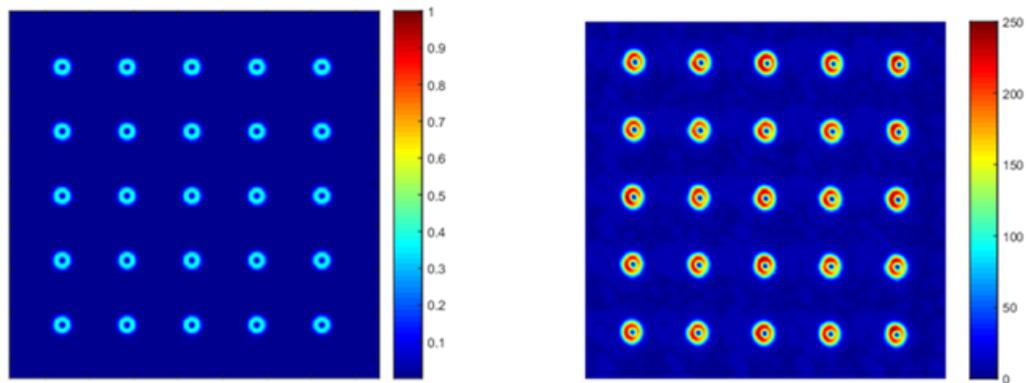
É fácil notar que os padrões redes de "spots" aqui produzidos apresentam um perfil diferente das primeiras medidas. Uma análise visual, pode revelar que o padrão de "spots" neste último resultado, apresenta um perfil mais uniforme de distribuição de intensidade entre os pontos luminosos . Então, concluímos que o uso da técnica de codificação do campo, atribui um aumento no padrão de uniformidade da matriz de "spots" gerados no método do somatório de ondas planas. Como se pode ver nas figuras 11 e 12 abaixo:

Figura 11 – Resultados Teórico e Experimental do padrão de "spots", com usado o Holograma de Dupla-Fase para Feixes Gaussianos.



Fonte: Autor 2019

Figura 12 – Resultados Teórico e Experimental do padrão de "spots", com usado o Holograma de Dupla-Fase para Feixes com  $m = 2$ .



Fonte: Autor 2019

#### 4.4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Realizamos o estudo de um elemento "fan-out" para a geração de um arranjo bidimensional de "spots", utilizando o somatório de ondas planas criando redes  $5 \times 5$  até  $14 \times 14$ , através do uso tanto de feixes gaussianos como de feixes Laguerre-Gauss, com seus valores de carga topológica variando entre 1 à 3. Repetimos o experimento, aplicando a técnica de codificação do campo complexo, onde este pode ser representado pela soma de dois campos com amplitudes iguais e fases distintas. Isso resultou em uma melhora na uniformidade das matrizes de pontos gerados, comparados com as primeiras medidas.

## 5 CONCLUSÃO

Para o desenvolvimento inicial deste trabalho, começamos fazendo um apanhado geral sobre o estudo de feixes óticos; dando uma ênfase maior nas famílias de feixes Laguerre-Gauss e também do feixe gaussiano. Além disso, citamos um dos métodos utilizados para detecção da carga topológica, de feixes que possuem Momento Angular Orbital (MAO). Em sequência, fizemos uma breve discussão sobre holografia.

No entanto, nosso foco maior esteve voltado a apresentação do elemento óptico "fan-out", onde citamos um exemplo do método que trata do somatório de ondas planas. Ilustramos uma síntese do desenvolvimento e também realizamos o experimento para comprovar sua validação. Dessa forma, fizemos várias medidas alterando a ordem das matrizes de "spots" gerado em  $5 \times 5$ ,  $10 \times 10$  e  $14 \times 14$ . Onde pudemos observar que o padrão de "spots" gerado não possui uma distribuição de intensidade muito uniforme.

Dessa forma, sugerimos a aplicação de uma técnica de codificação do campo complexo, que pode ser representado como uma combinação de duas fases. De forma análoga ao caso anterior, obtivemos várias medidas para uma rede de pontos luminosos, alterando a ordem da matriz de "spots" e carga topológica dos feixes Laguerre-Gauss. Com isso, observamos que a rede de pontos de luz gerada, diferentemente do primeiro resultado experimental, tem mostrado uma distribuição de intensidade mais uniforme entre os "spots" gerados.

## REFERÊNCIAS

- [1] ALLEN, L. et al. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. **Physical Review A**, v. 45, n. 11, p. 8185, 1992
- [2] SALEH, B. E.; TEICH, M. C.; SALEH, B. E. **Fundamentals of photonics**. Wiley New York, 1991.
- [3] ERIKSEN, R. L.; MOGENSEN, P. C.; GLÜCKSTAD, J. Elliptical polarisation encoding in two dimensions using phase-only spatial light modulators. **Optics communications**, v. 187, n. 4, p. 325-336, 2001. ISSN 0030-4018.
- [4] HU, L. et al. Phase-only liquid-crystal spatial light modulator for wave-front correction with high precision. **Optics express**, v. 12, n. 26, p. 6403-6409, 2004. ISSN 1094-4087.
- [5] SILVA, José Henrique Lopes. **Elemento ‘fan-out’ para geração de uma rede ‘spots’ utilizando o modulador espacial de luz**. 2017. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2017.
- [6] JACKSON, J. D. **Electrodynamics**. Wiley Online Library, 1975. ISBN 3527600442.
- [7] PADGETT, M.; COURTIAL, J.; ALLEN, L. Light’s orbital angular momentum. **Physics Today**, v. 57, n. 5, p. 35-40, 2004. ISSN 0031-9228.
- [8] GHAI, D. P.; SENTHILKUMARAN, P.; SIROHI, R. Single-slit diffraction of an optical beam with phase singularity. **Optics and Lasers in Engineering**, v. 47, n. 1, p. 123-126, 2009. ISSN 0143-8166.
- [9] SZTUL, H.; ALFANO, R. Double-slit interference with Laguerre-Gaussian beams. **Optics letters**, v. 31, n. 7, p. 999-1001, 2006. ISSN 1539-4794.
- [10] ZHOU, H. et al. Double metal subwavelength slit arrays interference to measure the orbital angular momentum and the polarization of light. **Optics letters**, v. 39, n. 11, p. 3173-3176, 2014. ISSN 1539-4794.
- [11] SAITOH, K. et al. Measuring the orbital angular momentum of electron vortex beams using a forked grating. **Physical review letters**, v. 111, n. 7, p. 074801, 2013.
- [12] GUZZINATI, G. et al. Measuring the orbital angular momentum of electron beams. **Physical Review A**, v. 89, n. 2, p. 025803, 2014.

- [13] GUENTHER, R. *Modern Optics*. John Wiley Sons, Inc, Canada, 1990.
- [14] ZHU, L.; WANG, J. Arbitrary manipulation of spatial amplitude and phase using phase-only spatial light modulators. **Scientific reports**, v. 4, p. 7441, 2014. ISSN 2045-2322.
- [15] HAMAMATSU PHOTONICS, K. LCOS-SLM (Optical Phase Modulators).
- [16] GOODMAN, J. W. **Introduction to Fourier optics**. Roberts and Company Publishers, 2005. ISBN 0974707724.
- [17] O. M. Yero, G. M. Vega and J. Lancis. Encoding complex fields by using a phase-only optical element. **Optics Letters**, v. 39, n. 7, 2014.
- [18] C. K. Hsueh and A. A. Sawchuk. Computer-generated double-phase holograms. **Applied Optics**, v.17, n. 24, 1978.
- [19] HERZIG, H. P. **Micro-optics: elements, systems and applications**. CRC Press, 1997. ISBN 0748404813.
- [20] CURTIS, J. E.; KOSS, B. A.; GRIER, D. G. Dynamic holographic optical tweezers. **Optics communications**, v. 207, n. 1, p. 169-175, 2002. ISSN 0030-4018.
- [21] HAYASAKI, Y. et al. Variable holographic femtosecond laser processing by use of a spatial light modulator. **Applied Physics Letters**, v. 87, n. 3, p. 031101, 2005. ISSN 0003-6951.
- [22] TORRES-PEIRÓ, S. et al. Parallel laser micromachining based on diffractive optical elements with dispersion compensated femtosecond pulses. **Optics express**, v. 21, n. 26, p. 31830-31836, 2013. ISSN 1094-4087.
- [23] O.M. Yero, M. C. Leal, G. M. Vega and J. Lancis. Generation of multifocal irradiance patterns by using complex Fresnel holograms. **Optics Letters**, v. 43, n. 5, p. 1167-1170, 2018.