UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL CAMPUS A. C. SIMÕES INSTITUTO DE FÍSICA CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA LICENCIATURA

Estudo da propagação de luz em um meio Kerr utilizando um material fotorrefrativo

Rosália Luana de Oliveira Silva Melo

Maceió-AL 2022

ROSÁLIA LUANA DE OLIVEIRA SILVA MELO

Estudo de propagação de luz em meio Kerr utilizando um material fotorrefrativo

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Física Licenciatura, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, como requisito para a obtenção do grau de Licenciada em Física.

Orientador: Prof. Dr. Alceníso José de Jesus Silva

Catalogação na Fonte Universidade Federal de Alagoas Biblioteca Central Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto - CRB-4 - 1767

M528e Melo, Rosália Luana de Oliveira Silva. Estudo de propagação de luz em meio Kerr utilizando um material fotorrefrativo / Rosália Luana de Oliveira Silva Melo. – 2022. 29 f. : il.
Orientador: Alceníso José de Jesus Silva. Monografia (Trabalho de conclusão de curso em Física: licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2022.
Bibliografía: f. 29.
1. Luz - Autofocalização. 2. Teorias não-lineares. 3. Luz - Propagação. I. Título.

CDU: 535.3

Para as minhas mosqueteiras: Ana Paula, Ivonete, Maria Lia e Sandra Lúcia. Uma por todas e todas por uma!

AGRADECIMENTOS

Deixo aqui o meu agradecimento á todos que contribuíram de alguma forma para minha formação pessoal e profissional.

Agradeço à minha família e minhas amigas de longa data, Rhane e Victória.

Ao meu orientador, Professor Dr. Alcenísio José, por toda paciência que me conduziu neste trabalho.

Ao meu professor de física 4, Dr. Eduardo Jorge Fonseca, que me abriu os olhos e me mostrou o que é comprometimento e dedicação.

Ao professor Dr. Samuel Souza, que me fez ter o primeiro contato com o grupo de óptica e nanoscopia.

À CAPES, CNPq e PROPEP, pelo apoio financeiro.

E por último, e mais importante, à Deus, pelo fôlego de vida, saúde e discernimento.

RESUMO

Efeitos não lineares são discutidos desde o final do século passado com os avanços da física moderna, que permitiu a invenção do laser e a descoberta de cristais fotônicos. O ramo da óptica expandiu-se de tal modo que revolucionou os estudos sobre os fenômenos da luz. Propagandose a luz em cristais orgânicos e inorgânicos, percebeu-se comportamentos adversos, como a mudança linear do índice de refração (Efeito Pockles) e a mudança quadrática do índice de refração (Efeito Kerr), ambos dependentes do campo elétrico aplicado ao material de amostra. Efeito eletro-óptico, fotocondutor, fotorrefrativo, entre outros, sofrem influência do campo elétrico que produz uma variação no índice de refração e outras propriedades, como por exemplo difusão de elétrons, variação na absorção óptica e variação de temperatura. Foi executado um breve histórico da teoria eletromagnética da luz e a partir dela chegou-se na rigorosidade matemática que define a propagação de pulsos de luz em sistemas complexos: a equação não linear de Schrodinger. Ainda foi comentando sobre o split-step, um tipo de método numérico que soluciona sistemas ópticos complexos. Depois argumentou-se sobre as características e o comportamento da luz quando interage com meios não lineares, em específico, analisou-se o comportamento da luz sob os efeitos de autofocalização e desfocalização, causado pela variação do índice de refração resultante da aplicação de um campo elétrico estacionário e pelo efeito auto-induzido do campo óptico.

Palavras-chave: Efeitos não lineares, cristal fotorefrativo, autofocalização.

ABSTRACT

Nonlinear effects have been discussed since the end of the last century with the advances in modern physics, which enabled the invention of the laser and the discovery of photonic crystals. The branch of optics has expanded to such an extent that it has revolutionized the study of light phenomena. By propagating light in organic and inorganic crystals, adverse behaviors such as the linear change in refractive index (Pockles Effect) and the quadratic change in refractive index (Kerr Effect), both dependent on the electric field applied to the sample material, were noticed. Electro-optic, photoconductive, photorefractive effects, among others, are influenced by the electric field that produces a variation in the refractive index and other properties, such as electron diffusion, variation in optical absorption, and temperature variation. A brief history of the electromagnetic theory of light was performed, and from there we arrived at the mathematical rigor that defines the propagation of light pulses in complex systems: the non-linear Schrodinger equation. It was also commented on the split-step, a type of numerical method that solves complex optical systems. Then it was argued about the characteristics and behavior of light when it interacts with nonlinear media, in specific, it was analyzed the behavior of light under the effects of autofocusing and defocusing, caused by the variation of the refractive index resulting from the application of a stationary electric field and by the self-induced effect of the optical field.

Keywords: Nonlinear effects, photorefractive crystal, autofocusing.

LISTA DE FIGURAS

Dependência linear do índice de refração com o campo elétrico aplicado. Os		
meios que apresentam esse comportamento são chamados de meio Pockels.	10	
Dependência quadrática do índice de refração com o campo elétrico aplicado.		
Os meios que apresentam esse comportamento são chamados de meio Kerr.	10	
Etapas do processo fotorrefrativo a um padrão espacial de luz senoidal com		
período de oscilação Λ.	13	
Relação entre a polarização e o campo elétrico para meios lineares (a) e não		
lineares (b).	17	
Perfil transversal de um feixe Gaussiano ao longo de pequenas distâncias de		
propagação Δz .	22	
Focalizações sucessivas do feixe ao longo da propagação.	23	
Divergência do feixe ao longo da propagação.	24	
Amplitude do feixe Gaussiano incidido e propagado.	25	
Cintura do Feixe ao longo da distância z.	25	
Picos de amplitude ao longo da distância z.	26	
	Dependência linear do índice de refração com o campo elétrico aplicado. Os meios que apresentam esse comportamento são chamados de meio Pockels. Dependência quadrática do índice de refração com o campo elétrico aplicado. Os meios que apresentam esse comportamento são chamados de meio Kerr. Etapas do processo fotorrefrativo a um padrão espacial de luz senoidal com período de oscilação Λ . Relação entre a polarização e o campo elétrico para meios lineares (a) e não lineares (b). Perfil transversal de um feixe Gaussiano ao longo de pequenas distâncias de propagação Δz . Focalizações sucessivas do feixe ao longo da propagação. Divergência do feixe ao longo da propagação. Amplitude do feixe Gaussiano incidido e propagado. Cintura do Feixe ao longo da distância z.	

Lista de Abreviaturas e Siglas

- FEM Força Eletromotriz
- EDP Equação Diferencial Parcial
- MDF Método por Diferenças Finitas
- EOQ Efeito Eletro-Óptico Quadrático
- BPM Beam Propagation Method

SUMÁRIO

1	Introdução			
	1.1	Princípios da eletro-óptica	9	
	1.2	Efeito fotorrefrativo	11	
2	Pro	pagação da luz em um meio Kerr		
	2.1	Equações de Maxwell	15	
	2.2	Equação da onda e a polarizabilidade do meio	17	
	2.3	Equação da onda e a propagação da luz.	20	
	2.4	Método split-step	21	
3	Pro	pagação de um feixe Gaussiano em um meio Kerr		
	3.1	Simulação	23	
4	Con	clusão		

5 Referências

1 Introdução

1.1 Princípios da eletro-óptica

A óptica não-linear é o estudo dos fenômenos que ocorrem como consequência da modificação das propriedades ópticas de um sistema material pela presença de luz. Normalmente, apenas a luz do laser é suficientemente intensa para modificar as especificidades ópticas de um sistema material, como por exemplo em certos materiais trasparentes que alteram essas propriedades quando sujeitos a um campo elétrico [1]. Isto é o resultado de forças que distorcem as posições, orientações, ou formas das moléculas que constituem o material. Como exemplo temos o efeito eletro-óptico, que é uma mudança no índice de refração que resulta da aplicação de um campo elétrico estacionário ou de baixa frequência. Um campo elétrico aplicado a um material óptico anisotrópico modifica os seus índices de refração e, consequentemente, o efeito que tem sobre a luz polarizada que o atravessa.

A dependência do índice de refração com o campo elétrico aplicado assume geralmente uma das duas formas seguintes: O índice de refração muda proporcionalmente ao campo elétrico aplicado, um efeito conhecido como efeito eletro-óptico linear ou efeito Pockels, e o índice de refração muda proporcionalmente ao quadrado do campo elétrico aplicado, conhecido como efeito quadrático eletro-óptico ou efeito Kerr.

O índice de refração do meio está em função do campo estacionário E por meio de n(E). Como a função n(E) tem uma pequena variação com E, a função n(E) pode ser expandida em série de Taylor em torno de E = 0:

$$n(E) = n + \alpha_1 E + \frac{1}{2} \alpha_2 E^2 + \dots$$
 (1)

Os termos n = n(0), $\alpha_1 = (dn/dE)|_{E=0}$ e $\alpha_2 = (d^2n/dE^2)|_{E=0}$ são os coeficientes de expansão, onde α_1 e α_2 podem ser reescritos por meio dos coeficientes eletro-ópticos, $r = -2a_1/n^3$ e $s = -a_2/n^3$. Logo, a variação do índice torna-se:

$$n(E) = n - \frac{1}{2}rn^{3}E - \frac{1}{2}sn^{3}E^{2} + \dots$$
⁽²⁾

Os termos de segunda e terceira ordem desta série possuem ordens de magnitude inferior a n. Os termos superiores à terceira podem ser negligenciados com segurança. Os valores dos coeficientes r e s dependem da direção do campo elétrico aplicado e da polarização da luz propagada.

Para o efeito Pockles, o termo de terceira ordem da equação (2) é desprezado, restando apenas:

$$n(E) = n - \frac{1}{2}rn^{3}E$$
 (3)

A equação (3) representa a dependência linear do índice de refração com o campo elétrico, onde

o termo r é chamado de coeficiente de Pockels ou coeficiente eletro-óptico linear. A Figura 1 ilustra o comportamento do índice nesse tipo de meio.

Figura 1: Dependência linear do índice de refração com o campo elétrico aplicado. Os meios que apresentam esse comportamento são chamados de meio Pockels.



Fonte: [11].

Se o material for centrossimétrico, como é o caso dos gases, líquidos, e certos cristais, n(E) deve ser uma função simétrica uniforme, uma vez que deve ser invariante à inversão de E. Com isso, a sua primeira derivada desaparece de modo que o coeficiente *r* deve ser zero, e então:

$$n(E) = n - \frac{1}{2}sn^{3}E^{2}$$
(4)

A equação (4) representa o comportamento quadrático do índice de refração com o campo elétrico aplicado, onde o termo *s* é chamado de coeficiente de Kerr ou coeficiente eletro-óptico quadrático. A Figura 2 ilustra o comportamento do índice nesse tipo de meio.

Figura 2: Dependência quadrática do índice de refração com o campo elétrico aplicado. Os meios que apresentam esse comportamento são chamados de meio Kerr.



Fonte: [11].

1.2 Efeito fotorrefrativo

Os materiais fotorefrativos exibem comportamento fotocondutor e eletro-óptico, e têm a capacidade de detectar e armazenar distribuições espaciais de intensidade óptica sob a forma de padrões espaciais de índice de refração alterado. As cargas foto-induzidas criam uma distribuição de carga espacial que produz um campo elétrico interno, que por sua vez altera o índice de refração por meio do efeito eletro-óptico.

Os materiais fotocondutores comuns são frequentemente bons isolantes no escuro. Sob iluminação, fótons são absorvidos e geram portadores de cargas livres (pares de elétrons e buracos), e a condutividade do material aumenta. Quando a luz é retirada, o processo de fotogeração da carga cessa e a condutividade volta ao seu valor inicial à medida que o excesso de elétrons e buracos se recombinam, como se estivesse no escuro.

Quando um material fotorefrativo é exposto à luz, os portadores de carga livre (elétrons ou buracos) são gerados por excitação dos níveis de energia de impureza para uma banda de energia, a uma taxa proporcional à potência óptica. Estes portadores difundem-se então para longe das posições de alta intensidade onde foram gerados, deixando para trás cargas fixas de sinal oposto (associadas aos íons de impureza). Os portadores livres podem ser aprisionados por impurezas ionizadas em outros locais, depositando aí a sua carga à medida que recombinam.

O resultado é a criação de uma distribuição não homogênea de carga espacial que pode permanecer no lugar durante um período de tempo após a remoção da luz. Esta distribuição de carga cria um padrão de campo elétrico interno que modula o índice de refração local do material em virtude do efeito eletro-óptico (Pockels). O material pode ser trazido de volta ao seu estado original (apagado) por iluminação com luz uniforme, ou por aquecimento. Assim, o material pode ser utilizado para gravar e armazenar imagens [11].

Quando um material fotorefrativo é iluminado por uma luz de intensidade I(x) que varia na direção x, o índice de refração sofre uma variação em $\Delta n(x)$. O efeito fotorefrativo ocorre por etapas: primeiro há uma fotogeração, que é a absorção de um fóton na posição (x) que eleva um elétron ao nível do doador para a banda de condução. A taxa de fotoionização G(x) é proporcional tanto à intensidade óptica I(x) como à densidade do número de dadores não ionizados N_D e ionizado N_D^+ . Assim,

$$G(x) = s(N_D - N_D^+) I(x)$$
 (5)

onde s é conhecida como a constante de fotoionização da secção transversal.

Na segunda etapa ocorre a difusão. Quando a intensidade I(x) não é uniforme a densidade de elétrons excitados n(x) também não é uniforme. Como resultado, elétrons difundem-se de locais de alta concentração para locais de baixa concentração. Na terceira etapa ocorre uma recombinação dos elétrons a uma taxa R(x) proporcional a densidade numérica n(x) e a densidade numérica de doadores ionizados N_D^+ , definidos por:

$$R(x) = \gamma_R n(x) N_D^+ \tag{6}$$

onde γ_R é uma constante. No equilíbrio, a taxa de recombinação é igual a taxa de fotoionização, então, igualando as equações (5) e (6) teremos:

$$G(x) = R(x) \tag{7}$$

$$s(N_D - N_D^+) I(x) = \gamma_R n(x) N_D^+$$
 (7a)

$$n(x) = \frac{s}{\gamma_R} \frac{N_D - N_D^+}{N_D^+} I(x)$$
(7b)

Na quarta etapa é gerado um campo de carga espacial. Cada elétron fotogerado deixa para trás uma carga iônica positiva. Quando o elétron está aprisionado, a sua carga negativa é depositada num local diferente. Como resultado, forma-se uma distribuição não uniforme de carga espacial. Na quinta etapa é gerado um campo elétrico a partir da distribuição espacial não uniforme dessas cargas, que geram um campo eléctrico E(x) dependente da posição, que pode ser determinado observando, em estado estacionário, as densidades de desvio e difusão da corrente elétrica, que devem ser de igual magnitude e de sinal oposto, de modo que a densidade total da corrente desapareça, ou seja:

$$J = e \ \mu_e \ n(x) \ E(x) - kT \ \mu_e \frac{dn}{dx} = 0 \tag{8}$$

em que μ_e é a mobilidade dos elétrons, k é a constante de Boltzmann e T é a temperatura. Logo:

$$E(x) = \frac{kT}{e} \frac{1}{n(x)} \frac{dn}{dx}$$
(9)

Uma vez que o material é eletro-óptico, o campo elétrico interno E(x) modifica localmente o índice de refração, de acordo com a equação (3), o que resulta em:

$$\Delta n(x) = -\frac{1}{2}rn^3 E \tag{10}$$

onde *n* e *r* são os valores apropriados de índice de refração e coeficiente eletro-óptico para o material. A relação entre a intensidade da luz incidente I(x) e a resultante alteração do índice de refração n(x) pode ser facilmente obtida se assumirmos que a razão $(N_D/N_D^+ - 1)$ em (7b) é aproximadamente constante, independente de x. Nesse caso n(x) é proporcional a I(x), de modo que:

$$E(x) = \frac{kT}{e} \frac{1}{I(x)} \frac{dI}{dx}$$
(11)

Fazendo a substituição da equação (11) em (10), obtemos:

$$\Delta n(x) = -\frac{1}{2}rn^3 \frac{kT}{e} \frac{1}{I(x)} \frac{dI}{dx}$$
(12)

Esta equação nos mostra a variação do índice em função da intensidade do campo elétrico dependente da posição para o efeito eletro-óptico linear (efeito Pockles). Considerando uma distribuição de intensidade sob a forma de uma função senoidal com período Λ , contraste m, e intensidade média I_0 , substituímos nas equações (12) e (11) para obter seu respectivo campo elétrico e variação do índice de refração, conforme indica as equações (13), (13a) e (13b).

$$I(x) = I_0 \left(1 + m \cos \frac{2\pi x}{\Lambda} \right)$$
(13)

$$E(x) = E_{max} \frac{-\sin\left(\frac{2\pi x}{\Lambda}\right)}{1 + m\cos\left(\frac{2\pi x}{\Lambda}\right)}$$
(13a)

$$\Delta n(x) = \Delta n_{max} \frac{-\sin\left(\frac{2\pi x}{\Lambda}\right)}{1 + m\cos\left(\frac{2\pi x}{\Lambda}\right)}$$
(13b)

Os valores de E_{max} e Δn_{max} são, respectivamente, $E_{max} = 2\pi (kT/e\Lambda)m$ e $\Delta n_{max} = \frac{1}{2}rn^3 E_{max}$. A Figura 3 nos ilustra as etapas do processo de fotorefração para um material submetido a esta intensidade senoidal.

Figura 3: Etapas do processo fotorrefrativo a um padrão espacial de luz senoidal com período de oscilação Λ .



Fonte: [11].

Análogo a equação (12), também podemos definir a variação do índice de refração em função da posição sob o efeito Kerr. Para isso, basta substituir a equação (11) em (4) e obtemos:

$$\Delta n(x) = -\frac{1}{2}sn^{3}E^{2} = -\frac{1}{2}sn^{3}\left(\frac{kT}{e}\frac{1}{I(x)}\frac{dI}{dx}\right)^{2}$$
(14)

$$\Delta n(x) = -\frac{1}{2}sn^3 \frac{k^2 T^2}{e^2} \frac{1}{I(x)^2} \left(\frac{dI}{dx}\right)^2$$
(14a)

Considerando a intensidade de um feixe Gaussiano, definida por $I = e^{\left(\frac{-x^2}{w_0^2}\right)}$, podemos obter a variação do índice para um meio kerr através de:

$$\left(\frac{dI}{dx}\right)^{2} = \frac{4x^{2}}{w_{0}^{4}} \left(e^{\frac{-2x^{2}}{w_{0}^{2}}}\right)$$
(15)

$$\Delta n(x) = -\frac{1}{2}sn^3 \frac{k^2 T^2}{e^2} \frac{4x^2}{w_0^4}$$
(15a)

que é a variação do índice no efeito Kerr para uma intensidade Gaussiana.

2 Propagação da luz em um meio Kerr

2.1 Equações de Maxwell

Na teoria eletromagnética da luz, conhecemos quatro grandezas vetoriais por meio das equações de Maxwell: Intensidade do campo elétrico E(V/m) densidade de fluxo elétrico D(C/m), intensidade de campo magnético H(A/m) e a densidade de fluxo magnético B(Wb/m). Escrevendo as equações de Maxwell na forma diferencial, teremos:

$$\nabla \cdot D = \rho_v \tag{16}$$

$$\nabla \cdot B = 0 \tag{17}$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{18}$$

$$\nabla \times H = J = J_c + \frac{\partial D}{\partial t}$$
(19)

onde $J_c(A/m)$ é a densidade de corrente e $\rho_v(C/m^3)$ é a densidade de carga elétrica, que são dependentes da fonte geradora. A equação (16) representa a lei de Gauss para campos elétricos, onde diz que o divergente do fluxo elétrico resulta na conservação total de cargas. A equação (17) representa a lei de Gauss para campos magnéticos, pois enuncia que o divergente do fluxo magnético é nulo. O que confirma que o fluxo magnético é conservado, já que monopolos magnéticos não existem. A equação (18) representa a lei da indução de Faraday, afirmando que a força eletromotriz induzida (FEM) em uma espira é igual à taxa de variação no tempo do fluxo magnético que passa pela área da espira. A (FEM) é induzida de tal forma que se opõe à variação do campo magnético, conforme indicado pelo sinal negativo na equação. Já a equação (19) representa a lei de Ampére para campos magnéticos [6].

Destas famosas equações vemos que um campo magnético variável no tempo produz um campo elétrico variável no tempo e, inversamente, um campo elétrico variável no tempo produz um campo magnético variável no tempo. É justamente esse acoplamento entre o campo elétrico e magnético que gera ondas eletromagnéticas capazes de se propagar por um meio, e a partir dessas grandezas podemos definir as relações entre fluxo e campo, por meio de:

$$D = \epsilon E \tag{20}$$

$$B = \mu H \tag{21}$$

onde ϵ denota a permissividade do meio (F/m) e μ a permeabilidade do meio. No vácuo temos $\epsilon = \epsilon_0$ e $\mu = \mu_0$. Para meios não magnéticos μ é uma constante, e para meios não

homogêneos ϵ é dependente da posição (x, y, z). Para meios dielétricos, o valor de ϵ é muito maior que ϵ_0 , e o valor do fluxo elétrico é composto pela parte no espaço livre e pela parte material, caracterizada pelo vetor polarizabilidade (ou densidade de momento dipolar):

$$P = \chi \epsilon_0 E \tag{22}$$

em que *P* é dado em (C/m) e χ é a suscetibilidade elétrica do meio, que indica a capacidade dos dipolos elétricos no dielétrico de se alinharem com o campo. *D* está relacionado com *E* e *P* por;

$$D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_0 (1 + \chi) E = \epsilon_0 \epsilon_r E$$
(23)

em que ϵ_r é a permissividade relativa. Logo:

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi) = \epsilon_0 \epsilon_r \tag{24}$$

O comportamento óptico não linear não é observado quando a luz viaja no espaço livre. A não linearidade reside no meio através do qual a luz viaja, e não na própria luz. Portanto, a presença de um campo óptico modifica as propriedades do meio, o que por sua vez provoca a modificação de outro campo óptico, ou mesmo do próprio campo original. As propriedades de um meio dielétrico através do qual uma onda eletromagnética óptica se propaga são descritas pela relação entre o vetor de polarização $\vec{P}(r,t)$ e o vetor do campo elétrico $\vec{E}(r,t)$, onde r é o vetor posição dependente de (x, y, z). De fato, é observável que $\vec{P}(r,t)$ é o resultado de um sistema cuja entrada é $\vec{E}(r,t)$.

O campo elétrico aplicado influencia o índice de refração devido ao seu vetor campo elétrico estar relacionado com o vetor polarizabilidade do meio. Um meio dielétrico se comporta de maneira não linear na presença de campos elétricos intensos. Este comportamento é regido pela relação entre \vec{P} e \vec{E} por meio da equação :

$$\vec{P} = \epsilon_0 [\chi + \chi^{(2)} \vec{E} + \chi^{(3)} \vec{E}^2 + ...] \vec{E}$$
(25)

Onde \vec{P} é o vetor polarizabilidade do meio, ϵ_0 é permissividade do vácuo, \vec{E} é o vetor campo elétrico e os termos $\chi, \chi^{(2)}$ e $\chi^{(3)}$ são as suscetibilidades do meio de primeira, segunda e terceira ordem, respetivamente. O termo de primeira ordem é o responsável pela resposta linear do meio e se relaciona com o índice de refração por $n^2 = 1 + \chi^1$; o termo de segunda ordem ($\chi^{(2)}$) é o responsável pelo efeito Pockels e geração do segundo harmônico; o termo de terceira ordem ($\chi^{(3)}$) é o responsável pela refração quadrática não linear que caracteriza o meio tipo Kerr. A relação matemática entre as funções vetoriais $\vec{P}(r, t)$ e $\vec{E}(r, t)$, que é regida pelas características do meio, define o sistema. Diz-se que o meio é não linear se esta relação for não linear, conforme ilustra a Figura 4. *P* é a polarização do meio e ε é o campo elétrico aplicado.

Nesses meios, geralmente isotrópicos, tais como cristais líquidos e fotorrefrativos, pode

Figura 4: Relação entre a polarização e o campo elétrico para meios lineares (a) e não lineares (b).



Fonte: [11].

existir uma birrefringência induzida pelo alinhamento das moléculas do meio [4]. Uma vez que os campos elétricos ópticos aplicados externamente são tipicamente pequenos em comparação com os campos interatômicos ou cristalinos característicos, mesmo quando é utilizada luz laser focalizada, a não linearidade é geralmente fraca. Então, a relação entre \vec{P} e \vec{E} é aproximadamente linear para pequenos valores de \vec{E} . A dispersão material, a não homogeneidade e a anisotropia não foram tidas em conta, tanto por uma questão de simplicidade como para nos permitir focar nas características essenciais do comportamento óptico não linear.

2.2 Equação da onda e a polarizabilidade do meio

A partir das equações (16), (17), (18) e (19), Maxwell encontrou a equação que descreve a propagação das ondas eletromagnéticas e que essas mesmas ondas viajam com velocidade $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ no vácuo. Esta equação depende das constantes $\mu e \epsilon$ do meio, e também depende das características da fonte, (J_c) e (ρ_v), e da intensidade do campo elétrico, como mostra a equação (26):

$$\nabla^2 E - \mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial J_c}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho_v \tag{26}$$

A densidade de corrente e o total de cargas estão ligados com a polarização do meio. A isotropia do meio assegura que os vetores P e E são sempre paralelos para que possam ser examinados componente a componente, que fornece uma equação da onda dependente da polarizabilidade do meio.

$$\nabla^2 E - \mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_o \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$
(27)

Escrevendo a densidade de polarização como uma soma de partes linear e não linear, equação (25), obtemos:

$$\nabla^2 E - \mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\mu_o \frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2}$$
(28)

A equação (25) pode ser reescrita na forma:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} + [\chi^{(2)} \vec{E}^2 + \chi^{(3)} \vec{E}^3 + ...] = P_L + P_{NL}$$
(29)

Ainda, uma segunda forma de expressar a polarização do meio é:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} + 2dE^2 + 4\chi^{(3)}E^3 + \dots$$
(30)

onde $d = \frac{1}{4}a_2$ e $\chi^{(3)} = \frac{1}{24}a_3$ são os coeficientes que descrevem as forças não lineares de segunda e terceira ordem, respectivamente. O termo $P_{NL} = 2dE^2$ descreve a não linearidade de segunda ordem e $P_{NL} = 4\chi^{(3)}E^3$ a não linearidade de terceira ordem. Considerando um campo elétrico E(t) oscilando com frequência ω e a componente estacionária E(0), obtemos:

$$E(t) = E(0) + Re[E(\omega) + exp(j\omega t)]$$
(31)

onde denotamos as componentes do campo como: E(0) é o campo elétrico e $E(\omega)$ é o campo óptico. Substituindo o valor desse campo na equação da polarizabilidade de segunda ordem, temos que:

$$P_{NL}(t) = P_{NL}(0) + Re[E(\omega) + exp(j\omega t)] + Re[E(2\omega) + exp(2j\omega t)]$$
(32)

Em que:

$$P_{NL}(0) = d[2E^2 + |E(\omega)|^2]$$
(33a)

$$P_{NL}(\omega) = 4dE(0)E(\omega) \tag{33b}$$

$$P_{NL}(2\omega) = dE^2(2\omega) \tag{33c}$$

A equação (33b) fornece a relação linear entre P_{NL} e $E(\omega)$, e escrevemos a polarização na forma $P_{NL} = \epsilon_0 \Delta \chi E(\omega)$ onde $\Delta \chi = (4d/\epsilon_0 E(0))$ representa um incremento de suscetibilidade proprocional ao campo elétrico E(0). O correspondente a mudança incremental do índice de refração é obtida pela diferenciação da relação $n^2 = 1 + \chi$ e obtemos $2n\Delta n = \Delta \chi$, no qual:

$$\Delta n = \frac{2d}{n\epsilon_0} E(0) \tag{34}$$

O meio é então efetivamente linear com um índice de refração $n + \Delta n$, que é controlado linearmente pelo campo elétrico E(0). A natureza não linear do meio cria um acoplamento entre o campo elétrico E(0) e o campo óptico $E(\omega)$, fazendo com que um controle o outro, de modo que o meio não linear exiba o efeito eletro-óptico linear (efeito Pockels). Este efeito é caracterizado pela relação descrita na equação (10), em que r é o coeficiente de Pockles. Igualando as equações (34) e (10) podemos relacionar o coeficiente de Pockles com o coeficiente não linear de segunda ordem por meio de:

$$r \approx -\frac{4}{\epsilon_0 n^4} d \tag{35}$$

Nos meios que possuem centrossimetria, o termo de segunda ordem não-linear está ausente, uma vez que a polarização deve ser invertida exatamente quando o campo elétrico é invertido. A polarização dominante é então descrita por $P_{NL} = 4\chi^{(3)}E^3$ com não linearidade de terceira ordem, e o material é chamado de meio Kerr. Os meios Kerr respondem a campos ópticos, gerando terceiros harmônicos e somas (ou diferenças) de frequências triplas. Para este meio, o coefiente de Kerr está relacionado com a não linearidade de terceira ordem por meio de:

$$s = -\frac{12}{\epsilon_0 n^4} \chi^{(3)}$$
(36)

Para um campo óptico monocromático de frequência ω descrito por:

$$E(t) = Re\{E(\omega) \exp(j\omega t)\}$$
(37)

Tem uma resposta não linear definida pelas polarizações $P_{NL}(t)$ que contém as frequências $\omega \in 3\omega$:

$$P_{NL}(\omega) = 3\chi^{(3)} |E(\omega)|^2 E(\omega)$$
(38a)

$$P_{NL}(3\omega) = \chi^{(3)}E^3(\omega)$$
(38b)

A polarização na equação (38a) corresponde a um incremento na mudança da suscetibilidade $\Delta \chi$ na frequência ω , definido por:

$$\epsilon_0 \Delta \chi = \frac{P_{NL}(\omega)}{E(\omega)} = 3\chi^{(3)} |E(\omega)|^2 = 6\chi^{(3)} \eta I$$
(39)

onde $I = |E(\omega)|^2/2\eta$ é a intensidade óptica da onda inicial. Desde que $n^2 = 1 + \chi$, nós obtemos $2n\Delta n = \Delta \chi$, que é igual ao incremento no índice de refração $\Delta n = \Delta \chi/2\eta$:

$$\Delta n = \frac{3\eta}{\epsilon_0 n} \chi^{(3)} I = n_2 I \tag{40}$$

onde $n_2 = 3\eta_0 \chi^{(3)}/n^2 \epsilon_0$ é o coeficiente de Kerr óptico. Assim, a alteração do índice de refração é proporcional à intensidade óptica. O índice de refração global é, portanto, uma função linear da intensidade óptica I:

$$n(I) = n + n_2 I \tag{41}$$

Este efeito é conhecido como o efeito Kerr óptico devido à sua semelhança com o efeito Kerr electro-óptico, para o qual n é proporcional ao quadrado do campo elétrico estável. O efeito Kerr óptico é um efeito auto-induzido em que a velocidade de fase da onda depende da própria intensidade da onda. É um exemplo de refração não linear. Se um o feixe óptico intenso é transmitido através de um material não linear que exibe o efeito Kerr óptico, as mudanças de índice de refração imitam o padrão de intensidade no plano transversal. Se o feixe tiver a sua intensidade mais elevada no centro, por exemplo, a mudança máxima do índice de refração está também no centro. O meio atua então como um meio de índice graduado que transmite à onda uma mudança de fase, causando assim uma curvatura na frente de onda. Em certas condições, o meio pode atuar como uma lente com uma distância focal dependente da potência do feixe.

2.3 Equação da onda e a propagação da luz.

Como já mencionado, em meios não homogêneos, a constante ϵ é dependente da posição (x, y, z), e $\mu = \mu_0$. Considerando $\psi(x, y, z, t)$ como a função de onda complexa, propagando-se com frequência ω , teremos:

$$\psi(x, y, z, t) = \psi_p(x, y, z) exp(j_0 \omega t)$$
(42)

substituindo a equação (42) em (26), obtemos:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_0^2 \psi_p = 0, \ k_0 = \frac{\omega_0}{v}$$
(43)

que é a equação de Helmholtz, representando a equação da onda independente do tempo, em que k_0 é o vetor de onda, ou, constante de propagação da onda. Portanto, a equação (??) também representa a propagação da luz em meios lineares não homogêneos. Reescrevendo a equação (43) como:

$$\psi(x, y, z, t) = \psi_p(x, y, z) exp(j\omega_0 t) = \psi_e(x, y, z) exp[j(\omega_0 t - k_0 z)]$$
(44)

e sustituindo na equação (43), obtemos:

$$\nabla_t^2 \psi_e - 2jk_0 \frac{\partial \psi_e}{\partial z} - (k_0^2 - \mu_0 \epsilon \omega_0^2)\psi_e = 0$$
(45)

Essa é a equação Paraxial de Helmholtz para ondas se propagando em um meio não homogêneo com uma fase dependente de k_0 ao longo de z. Nela consideramos ψ se propagando na direção z, com um envelope complexo ψ_e , onde $\nabla_t^2 \psi_e$ é o laplaciano transverso de ψ_e , e consideramos $\left|\frac{\partial \psi_e}{\partial z}\right| \ll k_0 \psi_e$. Esta aproximação é feita supondo que, dentro de um comprimento de onda, ψ_e varia lentamente na distância de propagação z, com um ângulo de divergência menor que 4° e a mudança em $\frac{\partial \psi_e}{\partial z}$ é muito menor que ψ_e . Reajustando a equação paraxial, podemos escrevê-la na forma:

$$\frac{\partial \psi_e}{\partial z} = \frac{1}{2jk_0} \nabla_t^2 \psi_e - j\Delta n k_0 \psi_e \tag{46}$$

A quantidade Δn é a mudança no índice de refração do meio, cujo índice inicial é n_0 . Essa equação é uma equação diferencial parcial (EDP) que nem sempre apresenta soluções analíticas. Para resolvê-la é necessário aproximações numéricas que analisem sistemas complexos, como por exemplo o método por diferenças finitas (MDF) e o método split-step. Também podemos reescrever a equação (46) em função do operador de difração (\widehat{D}) e do operador não homogêneo (\widehat{S}) :

$$\frac{\partial \psi_e}{\partial z} = \frac{1}{2jk_0} \nabla_t^2 \psi_e - j \Delta n k_0 \psi_e = (\widehat{D} + \widehat{S}) \psi_e \tag{47}$$

onde $\widehat{D} = \frac{1}{2jk_0} e \widehat{S} = -j\Delta nk_0$. Esses operadores fornecem soluções para a difração de Fresnel e para a modulação de fase de modo independente. Para a propagação da luz em um meio não linear, procedemos da mesma maneira em (47) para o operador não-linear $\widehat{N} = -j\Delta nk_0$:

$$\frac{\partial \psi_e}{\partial z} = (\widehat{D} + \widehat{N})\psi_e \tag{48}$$

isso nos dá a base para a ocorrência de efeitos não lineares, que, como já citado, é dependente do índice de refração do meio. O efeito Kerr pode ser descrito pela seguinte dependência não linear do índice de refração com a intensidade do feixe de luz:

$$n = n_0 + n_2 |\psi_e|^2 \tag{49}$$

onde n_0 é o índice de refração do meio na ausência de luz, e o termo $n_2|\psi_e|^2$ é a variação não linear do índice, em que n_2 é a constante de Kerr em (m/V)². Com isso, fica determinado que:

$$\widehat{N} = -j\Delta nk_0 = -j\frac{n_2}{n_0}k_0|\psi_e|^2$$
(50)

logo, substituindo na equação (46):

$$\frac{\partial \psi_e}{\partial z} = \frac{1}{2jk_0} \nabla_t^2 \psi_e - j \frac{n_2}{n_0} k_0 |\psi_e|^2 \psi_e = (\widehat{D} + \widehat{N}) \psi_e \tag{51}$$

que é a equação não linear de Schrodinger para a propagação em z de um envelope complexo $\psi_e(x, y, z)$ em um meio não linear [6].

2.4 Método split-step

Também chamado de método de propagação de feixes (beam propagation method - BPM), o split-step é um método numérico que analisa a propagação de feixes e pulsos de luz em sistemas complexos como as fibras ópticas e o meio Kerr [6]. Para melhor compreender este método, precisamos tomar os operadores definidos na equação (47) juntamente com o envelope complexo ψ_e propagado ao longo de uma distância $z + \Delta z$. Estes operadores tem como solução:

$$\psi_e(x, y, z + \Delta z) = exp[(\widehat{D} + \widehat{S})\Delta z]\psi_e(x, y, z)$$
(52)

Como estes operadores não são comutáveis, consideramos as interações de primeira ordem em Δz e obtemos:

$$exp[(\widehat{D} + \widehat{S})\Delta z] \simeq exp(\widehat{D}\Delta z)exp(\widehat{S}\Delta z)$$
(53)

o que nos indica que os operadores $\widehat{D} \in \widehat{S}$ podem ser tratados de forma independente, já que não são comutáveis. E assim:

$$\psi_e(x, y, z + \Delta z) = exp(\widehat{S}\Delta z)exp(\widehat{D}\Delta z)\psi_e(x, y, z)$$
(54)

o operador \widehat{S} é melhor compreendido no domínio da frequência, já o operador \widehat{D} é compreendido no domínio espacial com a sua função de transferência, e sua solução é dada por:

$$exp(\widehat{D}\Delta z)\psi_e = \mathcal{F}^{-1}\left\{exp\left[\frac{j(k_x^2 + k_y^2)\Delta z}{2k_0}\right]\mathcal{F}(\psi_e)\right\}$$
(55)

com isso obtemos os operadores atuando no envelope complexo a uma distância Δz como:

$$\psi_e(x, y, z + \Delta z) = exp(-j\Delta nk_0\Delta z)\mathcal{F}^{-1}\left\{exp\left[\frac{j(k_x^2 + k_y^2)\Delta z}{2k_0}\right]\mathcal{F}(\psi_e)\right\}$$
(56)

Em outras palavras, o método consiste em: 1°) encontrar a solução da função ψ_e e fazer a transformada de Fourier, $\mathcal{F}(\psi_e)$, desta função; 2°) Aplicar o operador de difração \widehat{D} para uma distância Δz utilizando a sua transformada de Fourier, que corresponde a função de transferência, e depois extrair a transformada inversa, \mathcal{F}^{-1} ; 3°) Aplicar o operador \widehat{S} para uma distância Δz na função inversa. A Figura 1 ilustra a popagação do feixe de luz ao longo de pequenas distâncias Δz . Para cada passo Δz , aplica-se o método repetidas vezes até se chegar na distância total de propagação [6].

Figura 5: Perfil transversal de um feixe Gaussiano ao longo de pequenas distâncias de propagação Δz .



Fonte: [8].

3 Propagação de um feixe Gaussiano em um meio Kerr

3.1 Simulação

Utilizando ferramentas de simulação, como o programa MATLAB, podemos analisar de forma minuciosa o comportamento de feixes focalizados e desfocalizados dentro de um meio tipo Kerr, que pode ser tanto um cristal fotorrefrativo como uma fibra óptica. Para desenvolver essa simulação foi aplicado o método split-step (ou BPM) no algoritmo de propagação do feixe de amplitude complexa. Diante dessas condições, devemos levar em consideração duas grandezas essenciais para o comportamento do feixe durante a propagação: A Potência crítica P_{cr} , que é a potência necessária para aprisionar o feixe e mantê-lo focalizado, e a potência inicial do feixe P_0 , que é a potência total contida no perfil transversal do feixe. A potência P_0 está ligada ao índice de refração inicial do material, já a potência P_{cr} depende, tanto do índice de refração $n_0 e n_2 I$, como do comprimento de onda do feixe.

Partindo disso, a simulação foi realizada propagando-se um feixe Gaussiano de cintura igual a 1 μ m com comprimento de onda de 514nm. Os parâmetros de propagação foram de 24 mm, com um passo dz de 0,025 mm. Para um feixe obter sucessivas focalizações, consideramos a sua amplitude de propagação (A) máxima, que é igual a 1. Em A = 1 o efeito de autofocalização é visto, pois corresponde a $P_0 > P_{cr}$. Para A = 0,3 percebemos o efeito de divergência do feixe, em vez de focalização, pois, A = 0,3 corresponde a $P_0 < P_{cr}$. As Figuras 6 e 7 nos mostra o comportamento do feixe ao longo da propagação [6].

Figura 6: Focalizações sucessivas do feixe ao longo da propagação.



Fonte: [6].

Os picos presentes na Figura 6 indicam a amplitude máxima do feixe, que situa-se na altura entre y = 1000 e y = 1500. Percebemos que ao longo da distância z a amplitude alterna seus valores entre a faixa de y = 500 (valor mínimo) e y > 1000 (valor máximo). Na Figura 7 não percebemos essas oscilações de amplitude, e sim uma diminuição suave ao longo da propagação. A amplitude inical estava em torno de y = 150 e diminuiu, chegando bem próximo de y = 100.



Figura 7: Divergência do feixe ao longo da propagação.

Fonte: [6].

Podemos dizer que na Figura 7 ocorreu uma difração do feixe devido as alterações no meio e a amplitude do feixe ser mínima, o que não favorece a sua potência total P_0 . Então, P_0 não supera e nem se iguala à potência crítica P_{cr} , e por isso o efeito de difração é dominante nessa situação.

Comparando a amplitude dos feixes incididos e propagados também fica evidente os efeitos de focalização e desfocalizão pela largura da cintura de cada feixe. Na Figura 8(a) temos a amplitude do feixe incidido no meio Kerr. Na Figura 8(b) temos a amplitude do feixe propagado no meio Kerr, que nos mostra um pico de amplitude bem definido e uma largura central muito menor do que a amplitude na Figura 8(a). Com essas características é fácil perceber que o feixe focalizou da Figura 8(a) para a Figura 8(b). Nas Figuras 8(c) e 8(d) percebemos uma diferença mais destacada nos picos de cada amplitude. O pico de amplitude inicial (c) é maior que o final (d), além disso, a cintura do gráfico (d) é muito mais alargada que no gráfico (c), o que nos indica que a amplitude do feixe diminuiu drasticamente de (c) para (d), caracterizando assim a divergência e a desfocalização do feixe no meio Kerr.

Támbém podemos comparar a largura do feixe no plano xz, como ilustra a Figura 9.



(c) Amplitude inicial do feixe divergente



(b) Amplitude do feixe propagado e focalizado



(d) Amplitude do feixe divergente propagado



Figura 9: Cintura do Feixe ao longo da distância z.

Figura 8: Amplitude do feixe Gaussiano incidido e propagado.

Fonte: [6].

Na Figura 9 (à esquerda) é visualizado o comportamento do feixe durante as sucessivas focalizações no plano XZ, onde percebemos um estreitamento na cintura do feixe e logo após um alargamento, resultando em um gráfico com comportamento caracterísitico mostrado à esquerda. É importante ressaltar que durante esse estreitamento da cintura do feixe a amplitude dele torna-se maior devido a sua alta concentração nessa região, enquanto que, no alargamento, a sua amplitude diminui um pouco. Esse comportamento repete-se ao longo de toda propagação por conta das condições do meio, que favorecem esse fenômeno.

Já na Figura 9 da direita é visualizado o comportamento do feixe no plano XZ durante a difração, onde vemos que a cintura do feixe alargou drásticamente em comparação ao tamanho inicial, e quanto maior a cintura do feixe, menor é sua amplitude. Esta alteração da amplitude torna-se mais evidenciada na Figura 10.



Figura 10: Picos de amplitude ao longo da distância z.

Fonte: [6].

Enquanto na Figura 10(a) a amplitude do feixe aumenta e diminui subsequentemente, na Figura 10(b) a amplitude decai quase que linearmente com a propagação, o que nos indica um alargamento da cintura do feixe e uma divergência total do perfil propagado. Todos esses parâmetros serviram para demonstrar teoricamente o comportamento do feixe em um meio tipo Kerr utilizando o método split-step, não sendo necessariamente os parâmetros físicos reais, porém, represetaram satisfatoriamente as condições reais do fenômeno, sendo este um meio indicado para simular propagação de feixes em fibras e cristais.

4 Conclusão

A óptica não linear é um área inovadora e possui diversas aplicações tecnológicas. Por meio dos estudos avançados nesse ramo capturamos um ponto de vista completamente diferente do habitual no que diz respeito ao estudo da luz e seus fenômenos. Como consequência, conhecemos os efeitos Pockles e Kerr que são imprescindíveis para a transmissão, manipulação e aplicação de feixes ópticos e pulsos de luz em meios não lineares, como por exemplo em cristais fotônicos.

O efeito eletro-óptico e fotocondutor, por exemplo, é de grande valia para esses meios porque evidencia as características mais importantes, tanto da luz quanto do meio, como por exemplo a intensidade, potência e índice de refração. E essas características resultam em efeitos como o fotorrefrativo (visto em cristais), autofocalização. Além deles, também está em grandes avanços efeitos como autolimpeza de feixes em fibras ópticas, conjugação e modulação de fase, amplificação de imagem e guia de ondas óptico.

Por isso, é importante ser conhecedor dos efeitos Pockles e Kerr, e de toda sua teoria, que surgiu da equação paraxial de Helmholtz, e mais tarde, da equação não linear de Schrodinger, que descreve a propagação de pulsos de luz nesse tipo de meio e leva em consideração os efeitos difrativos e não lineares para explicar o seu comportamento. Ainda, é necessário ser conhecedor de alguns métodos númericos que auxiliem na solução de sistemas ópticos complexos, como por exemplo o método split-step.

5 Referências

[1] BOYD, R. W. Nonlinear Optics, Third Edition. 3rd. ed. USA: Academic Press, Inc., 2008. ISBN 0123694701.

[2] EFEITO KERR. gas.wiki, 2010, Disponível em: https://gaz.wiki/wiki/pt/Kerreffect; Acessado em: 15/06/2022.

[3] FEINBERG, J., 1983. In: Fisher, R.A. (Ed.), Optical Phase Conjugation. Academic Press, New York.

[4] FREJLICH, J.; Photorefractive Materials: Fundamental Concepts, Holographic Recording and Materials Characterization (Wiley, 2007).

[5] GESUALDI, M. R. R.; "Estudos de Materiais Fotorrefrativos e suas Aplicações no Processamento Óptico Holográfico de Informação". São Paulo (2005).

[6] KIM, T.; POON, T. **Engineering optics with MATLAB**, 1° ed. Danver -USA. World Scientific Publiching, 2006.

[7] KISHAR, Y. S.; AGRAWAL, G. P. **Optical Solitons: From fibrers to photonic crystal**. Academic press. 2003.

[8] LIFANTE, Ginés. Beam propagation method for design of optical waveguide device. Universidad Autónoma de Madrid, SPain.2016. ISBN 978-1-119-08337-5

[9] PHOTOREFRACTIVES, **oregonstate.edu**; Disponível em http://sites.science.oregonstate.edu. Acessado em: 20/06/2022.

[10] ROJAS, G. A. Q. Polarização eletrotérmica de vidros e fibras ópticas,247 f. Tese (Doutorado em Física) - Rio de Janeiro : PUC, Departamento de Física, 2005.

[11] SALEH, B. E. A.; TEICH, M. c. **FUNDAMENTALS OF PHOTONICS**. 2° ed. New Jersey. Wiley: 2007.

[11] TRONCO, T.; AVILA, L. de. Fundamentos de comunicações ópticas. 1º ed. 2007.

[13] ZILIO, Sérgio C. Óptica Moderna: Fundamentos e aplicações. Instituto de Física de São Carlos. Universidade de São Paulo. 2009.