Universidade Federal de Alagoas - UFAL
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática
em Associação com a Universidade Federal da Bahia

MARIA RANILZE DA SILVA

UMA INVESTIGAÇÃO DAS HIPERSUPERFÍCIES REAIS EM PRODUTOS DE FORMAS ESPACIAIS COMPLEXAS

MACEIÓ
2023

MARIA RANILZE DA SILVA

UMA INVESTIGAÇÃO DAS HIPERSUPERFÍCIES REAIS EM PRODUTOS DE FORMAS ESPACIAIS COMPLEXAS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório
Coorientador: Dr. Alexandre de Sousa Mota

Maceió
Março de 2023

Catalogação na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

S586i Silva, Maria Ranilze da.

Uma investigação das hipersuperfícies reais em produtos de formas espaciais complexas / Maria Ranilze da Silva. – 2023.

31 f.

Orientador: Feliciano Marcílio Aguiar Vitório.

Coorientador: Alexandre de Sousa Mota.

Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática, Maceió : UFAL ; Salvador : Universidade Federal da Bahia, 2023.

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Universidade Federal da Bahia.

Bibliografia: f. 30-31.

1. Curvatura seccional holomorfa. 2. Formas espaciais complexas. 3. Hipersuperfícies. I. Título.

CDU: 514.764.27

A Deus e a minha família.

Agradecimentos

Ao meu amado, Givanildo, por todo amor e compreensão.

Aos meus pais pelo apoio e pelas orações. Aos meus irmãos Ranilton e Ranilson, e minha cunhada, Ivanilda, por me apoiar e se orgulhar das minhas conquistas.

Aos meus orientadores, Professor Feliciano Vitório e Alexandre de Sousa, pela paciência e confiança.

Aos avaliadores, Professor Márcio Henrique Batista da Silva, Professor Cícero Tiarlos Nogueira Cruz, Professor Frederico Vale Girão e Professor Fernando Manfio pelas valiosas sugestões.

Ao Iury, pela disponibilidade.

Aos Professores do Instituto de Matemática - UFAL, por todo o aprendizado.

À todos os colegas da Pós-Graduação, em especial a Rodrigo, Gilberto e Pedro.

À todos os meus amigos, em especial ao Raphael que esteve presente nos últimos momentos do curso dando o apoio necessário.

A CAPES pelo apoio financeiro durante o doutorado.

À todos que, de perto ou de longe, até mesmo sem eu o saber, me apoiaram através de suas orações e incentivos, me dando forças para seguir em frente.

Por último, mas sendo o principal, agradeço a Deus por me dá muito mais do que mereço. Por me conceder mais uma conquista e por colocar cada uma das pessoas citadas acima em meu caminho a fim de tornar possível e mais suave o caminho até essa conquista.

Obrigada!

Grandes coisas fez o Senhor por nós, pelas quais estamos alegres.

Salmos 126:3

Resumo

Tashiro e Tachibana mostraram que não há hipersuperfícies totalmente umbílicas nas formas espaciais complexas com curvatura seccional holomorfa constante. Também foi provado que o operador de forma não pode ser paralelo. No produto de formas espaciais complexas, classificamos as hipersuperfícies umbílicas. Também mostramos que, quando uma hipersuperfície não é localmente produto, o operador de forma não pode ser paralelo.

Palavras-Chave: Curvatura seccional holomorfa, formas espaciais complexas, hipersuperfícies totalmente umbílicas.

Abstract

Tashiro and Tachibana showed that there are no totally umbilical hypersurfaces in complex space forms with constant holomorphic sectional curvature. It has also been proved that the shape operator cannot be parallel. In the product of complex space forms, we classify umbilical hypersurfaces. We also show that when a hypersurface is not locally product, the shape operator cannot be parallel.

Key Words: Holomorphic sectional curvature, complex space forms, totally umbilical hypersurfaces.

Sumário

Introdução

As formas espaciais reais e suas subvariedades têm sido amplamente estudadas por muitos pesquisadores. Também temos vários estudos considerando o produto de duas formas espaciais reais. B. Daniel [Dan09] dá condições necessárias e suficientes para uma variedade Riemanniana ser isometricamente imersa no produto $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. Kowalcsyk [Kow11] estendeu esse resultado de B.Daniel para o produto de duas formas espaciais. Também Lira, Tojeiro e Vitório [LTV10] provam um teorema de existência e unicidade de uma imersão isométrica de uma variedade semi-Riemanniana em um produto de formas espaciais semi-Riemannianas.

Considerando hipersuperfícies umbílicas, Souam e Van der Veken [SVdV12] dão condições de existência de hipersuperfícies totalmente umbílicas em produtos Riemannianos do tipo $M^n \times \mathbb{R}$ com uma descrição completa das mesmas. Mendonça e Tojeiro [MT14] dão uma classificação de subvariedades umbílicas de codimensão arbitrária, estendendo a classificação de Souam e Van der Veken em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. No produto de duas formas espaciais de dimensão 2, Nakad e Roth [NR22] dão uma caracterização das hipersuperfícies totalmente umbílicas.

Nas formas espaciais complexas, Niegerball e Ryan, Liu e Xiao, Yano e kon [NR97, LX19, YK84] fornecem material de apoio necessário para acessar o campo das hipersuperfícies. Niegerball e Ryan [NR97] também fazem uma construção detalhada dos exemplos importantes no espaço projetivo complexo e no espaço hiperbólico complexo. Eles trazem um teorema (3.1) que diz que o operador de forma de uma hipersuperfície em uma forma espacial complexa de curvatura seccional holomorfa constante não pode ser paralelo, também mostram que não existem hipersuperfícies totalmente umbílicas em $\mathbb{CP}^n$ ou $\mathbb{CH}^n$. Este último fato foi primeiramente mostrado por Tashiro-Tachibana [TT63] em 1963.

Inspirados nestes trabalhos, investigamos hipersuperfícies reais, em especial as hipersuperfícies umbílicas, em produtos de duas formas espaciais complexas. No primeiro capítulo, trazemos definições, notações e propriedades básicas das variedades complexas que serão úteis à compreensão deste trabalho. No segundo capítulo, trabalhamos com o produto de formas espaciais complexas, trazendo seu tensor curvatura e as equações fundamentais de uma hipersuperfície. No terceiro capítulo, mostramos que o operador de forma de uma hipersuperfície real, que não é localmente produto, em um produto de formas espaciais complexas não pode ser paralelo.

Teorema. *Seja M uma hipersuperfície real em $\overline{M} = \mathbb{C}\mathbb{Q}_1 \times \mathbb{C}\mathbb{Q}_2$, onde $\mathbb{C}\mathbb{Q}_i$ são formas espaciais complexas com $c_1 \neq 0$ ou $c_2 \neq 0$. Suponha que $||V||^2 \neq 0$. Então, o operador de forma A não pode ser paralelo.*

Em seguida, classificamos hipersuperfícies reais umbílicas no produto de formas espaciais complexas:

Teorema. *Seja M uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\overline{M} = \mathbb{C}\mathbb{Q}_1 \times \mathbb{C}\mathbb{Q}_2$ tendo uma estrutura local quase produto. Então, M é totalmente geodésica ou uma hiperesfera extrínseca.*

Teorema. *Seja M uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\overline{M} = \mathbb{C}\mathbb{Q}_1 \times \mathbb{C}\mathbb{Q}_2$, com $|V| \neq 0$ e $|c_1| = |c_2| \neq 0$. Então,*

1. *Para $c_1 = c_2$, M é totalmente geodésica ou uma hiperesfera extrínseca se, e somente se, $|V| = 1$.*

2. *Para $c_1 \neq c_2$, não existem hipersuperfícies umbílicas.*

Capítulo 1

Preliminares

Dedicamos este capítulo a uma introdução sobre as variedades complexas e para relembrar notações, definições e propriedades que são usados ao longo do texto. Damos prioridade as formas espaciais complexas que são o objeto de estudo deste trabalho.

1.1 Variedades complexas

Seja M uma variedade diferenciável m-dimensional. A variedade M é dita *quase complexa* se existe uma aplicacão diferenciável $J : TM \to TM$ tal que $J^2 = -I$. A aplicação J é dita ser uma *estrutura quase complexa* de M. Observe que se M admite uma estrutura quase complexa então $(\det J)^2 = (-1)^m$, ou seja, é necessário que a dimensão real m de M seja par.

Uma variedade quase complexa M é chamada *variedade de Kaehler* se J é compatível com a métrica e $\nabla J = 0$, isto é, para todo $X, Y \in TM$,temos

$$\langle X, Y\rangle = \langle JX, JY\rangle \tag{1.1}$$

e

$$(\nabla_X J)Y = \nabla_X JY - J\nabla_X Y = 0 \tag{1.2}$$

Nas variedades de Kaehler definimos a curvatura seccional holomorfa:

Definição 1.1. *A curvatura seccional holomorfa é a curvatura seccional calculada nos planos holomorfos, isto é, em planos com base da forma $\{X, JX\}$, isto é,*

$$K(X, JX) = \frac{\langle R(X, JX)X, JX\rangle}{|X|^2|JX|^2 - \langle X, JX\rangle^2}. \tag{1.3}$$

Definição 1.2. *Uma forma espacial complexa é uma variedade de Kaehler com curvatura seccional holomorfa constante* $16c$.

Neste caso, denotamos por $\mathbb{CQ}_k^n$ uma forma espacial complexa de dimensão complexa n e curvatura seccional holomorfa constante $k = 16c$. Destacamos que o número 16 acima é apenas um fator estético.

O tensor curvatura de uma forma espacial complexa de curvatura seccional holomorfa $16c$ tem a forma

$$R(X, Y)Z = 4c(X \wedge Y + JX \wedge JY + 2\langle X, JY\rangle J)Z. \tag{1.4}$$

O tensor curvatura pode ser encontrado em [CR15] e é calculado a partir das equações fundamentais de uma submersão dadas por O'Neill em [O'N66].

Ao interagir com a estrutura quase complexa J, o tensor curvatura de uma forma espacial complexa tem as seguintes propriedades:

1. $R(X, Y) = R(JX, JY)$,
2. $R(X, JY) = -R(JX, Y)$,
3. $R(X, Y)J = JR(X, Y)$,
4. $\langle R(X, Y)JZ, JT\rangle = \langle R(X, Y)Z, T\rangle$,
5. $\langle R(X, Y)JZ, T\rangle = -\langle R(X, Y)Z, JT\rangle$.

As formas espaciais complexas são o $\mathbb{C}^n$, o espaço euclidiano complexo quando $c = 0$, $\mathbb{CP}^n$, o espaço projetivo complexo, quando $c > 0$, e $\mathbb{CH}^n$, o espaço hiperbólico complexo quando $c < 0$.

O *Espaço Complexo Euclidiano* $\mathbb{C}^n$ é dado com a métrica Euclidiana:

$$\langle X, Y\rangle = Re\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i\right),$$

onde $X = (x_1, ..., x_n), Y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n$.

O *Espaço Complexo Projetivo* pode ser definido por

$$\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\{p \sim \lambda p; \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$$

com a métrica Fubini-Study que é definida a seguir.

Seja $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^n$ a projeção natural e considere sua restrição a $\mathbb{S}^{2n+1}(1)$, isto é, considere $\pi : \mathbb{S}^{2n+1}(1) \subset \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^n$. Esta restrição é sobrejetiva e dois pontos quaisquer p e q têm a mesma imagem se pertencem ao mesmo grande círculo de $\mathbb{S}^{2n+1}(1)$, ou seja, $p = e^{it}q$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Em $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ consideramos a métrica Euclidiana. Note que o vetor posição P restrito a $\mathbb{S}^{2n+1}(1)$ é um vetor normal a $\mathbb{S}^{2n+1}(1)$, e temos que $\eta = iP$ é um vetor unitário bem definido em $\mathbb{S}^{2n+1}(1)$. Obtém-se que $(d\pi)_p$ é sobrejetiva e tem núcleo $span\{\eta_p\}$, $\eta_p = ip$, para qualquer $p \in \mathbb{S}^{2n+1}(1)$. Assim, para qualquer campo $X \in T\mathbb{CP}^n$ existe um único $\overline{X} \in T\mathbb{S}^{2n+1}(1)$, tal que $(d\pi)\overline{X} = X$ e $\overline{X}$ é ortogonal a η. O campo $\overline{X}$ é chamado de levantamento horizontal de X, e assim definimos a métrica Fubini-Study em $\mathbb{CP}^n$ por

$$\langle X, Y \rangle_{\mathbb{CP}^n} = \langle \overline{X}, \overline{Y} \rangle_{\mathbb{S}^{2n+1}}.$$

Para o *Espaço Hiperbólico Complexo* $\mathbb{CH}^n$ definimos $\mathbb{C}_1^{n+1} = (\mathbb{C}^{n+1}, \langle , \rangle)$ onde a métrica é dada por $\langle X, Y \rangle = Re(-x_0\overline{y}_0 + (\sum_{i=1}^n x_i\overline{y}_i))$. Daí, consideramos

$$H_1^{2n+1} = \{p \in \mathbb{C}_1^{n+1}; \langle p, p \rangle = -1\}.$$

Usando o mesmo raciocínio, com H_1^{2n+1} no lugar de $\mathbb{S}^{2n+1}(1)$, definimos $\mathbb{CH}^n$ como o conjunto das classes de equivalência de H_1^{2n+1} pela ação $p \mapsto \lambda p$. Daí encontramos a projeção $\pi : H_1^{2n+1} \to \mathbb{CH}^n$ e definimos a métrica da mesma forma que o fizemos para o espaço projetivo complexo.

Capítulo 2

Hipersuperfícies reais em produtos de formas espaciais complexas

2.1 Produtos de formas espaciais complexas

Dadas $\mathbb{CQ}^{n_1}_{k_1}$ e $\mathbb{CQ}^{n_2}_{k_2}$ variedades Riemannianas de curvatura seccional holomorfa constante $k_1 = 16c_1$ e $k_2 = 16c_2$ com estruturas complexas J_1 e J_2, respectivamente, consideramos a variedade Riemanniana $\overline{M} = \mathbb{CQ}^{n_1}_{k_1} \times \mathbb{CQ}^{n_2}_{k_2}$ munida da métrica produto. Denotamos por $\pi_i : \overline{M} \to \mathbb{CQ}^{n_i}_{k_i}$ a projeção natural sobre $\mathbb{CQ}_i := \mathbb{CQ}^{n_i}_{k_i}$, $i \in \{1, 2\}$. Consideramos em $\overline{M}$ a estrutura complexa definida por $J = (J_1, J_2)$ e a estrutura quase-produto dada pela aplicação $F : T\overline{M} \to T\overline{M}$ definida por

$$F = \pi_1 - \pi_2.$$

É de uso comum denotar $F = \pi_1 - \pi_2$ para o par $(\pi_1, -\pi_2)$.

Com isso, temos que $F \neq I$ e satisfaz $F^2 = I$ e $\langle FX, Y\rangle = \langle X, FY\rangle$, para qualquer $X, Y \in \Gamma(T\overline{M})$, onde I denota a aplicação identidade em $T\overline{M}$.

Com o objetivo de estudar o tensor de curvatura de $\overline{M}$, definimos os seguintes operadores auxiliares $\overline{L}_i = I + \varepsilon_i F : T\overline{M} \to \mathbb{CQ}_i$, com $\varepsilon_1 = 1$ e $\varepsilon_2 = -1$. A partir das propriedades da estrutura complexa J e da estrutura quase-produto F, obtemos a seguinte expressão para o tensor curvatura do produto de duas formas espaciais complexas.

Proposição 2.1. *O tensor curvatura $\overline{\mathcal{R}} : T\overline{M} \times T\overline{M} \times T\overline{M} \to T\overline{M}$ de $\overline{M} = \mathbb{CQ}_1 \times \mathbb{CQ}_2$ tem a forma*

$$\overline{\mathcal{R}}(\overline{X}, \overline{Y})\overline{Z} = \sum_{i=1}^{2} \frac{c_i}{2} \left[\overline{L_i}\ \overline{X} \wedge \overline{L_i}\ \overline{Y} + J\overline{L_i}\ \overline{X} \wedge J\overline{L_i}\ \overline{Y} + 2\langle \overline{L_i}\ \overline{X}, J\overline{L_i}\ \overline{Y}\rangle J\right] \overline{L_i}\ \overline{Z} \qquad (2.1)$$

onde $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z} \in T\overline{M}$ *e* $\overline{L}_i = I + \varepsilon_i F$, *com* $\varepsilon_1 = 1$ *e* $\varepsilon_2 = -1$.

Demonstração. Seja $\overline{X} \in T\overline{M}$, denotamos por $\overline{X}_i := \pi_i \overline{X}$ a projeção de $\overline{X}$ em $\mathbb{CQ}_i$. Assim, sendo $\overline{R}_i$ o tensor curvatura da forma espacial $\mathbb{CQ}_i$, dados $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z} \in T\overline{M}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\overline{R}(\overline{X}, \overline{Y})\overline{Z} &= \overline{R_1}(\overline{X}_1, \overline{Y}_1)\overline{Z}_1 + \overline{R_2}(\overline{X}_2, \overline{Y}_2)\overline{Z}_2 \\
&= 4c_1(\overline{X}_1 \wedge \overline{Y}_1 + J_1\overline{X}_1 \wedge J_1\overline{Y}_1 + 2\langle \overline{X}_1, J_1\overline{Y}_1\rangle J_1)\overline{Z}_1 \\
&\quad +4c_2(\overline{X}_2 \wedge \overline{Y}_2 + J_2\overline{X}_2 \wedge J_2\overline{Y}_2 + 2\langle \overline{X}_2, J_2\overline{Y}_2\rangle J_2)\overline{Z}_2.
\end{aligned}$$

Note que pela definição dos operadores auxiliares $\overline{L}_1$ e $\overline{L}_2$, temos que

$$\begin{aligned}
\overline{L}_1\overline{X} &= \overline{X} + F\overline{X} = \overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \overline{X}_1 - \overline{X}_2 = 2\overline{X}_1, \\
\overline{L}_2\overline{X} &= \overline{X} - F\overline{X} = \overline{X}_1 + \overline{X}_2 - (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = 2\overline{X}_2,
\end{aligned}$$

ou seja, $\overline{L}_1 X = 2\overline{X}_1$ e $\overline{L}_2 X = 2\overline{X}_2$. Além disso, visto que $FJ = JF$ e

$$\begin{aligned}
J_1\overline{L}_1\overline{X} = 2J_1\overline{X}_1 = J\overline{X} + FJ\overline{X} = J(\overline{X} + F\overline{X}) = J\overline{L}_1\overline{X}, \\
J_2\overline{L}_2\overline{X} = 2J_2\overline{X}_2 = J\overline{X} - FJ\overline{X} = J(\overline{X} - F\overline{X}) = J\overline{L}_2\overline{X},
\end{aligned}$$

obtemos que

$$\begin{aligned}
\overline{R}(\overline{X}, \overline{Y})\overline{Z} &= \frac{c_1}{2}(\overline{L}_1\overline{X} \wedge \overline{L}_1\overline{Y} + J_1\overline{L}_1\overline{X} \wedge J_1\overline{L}_1\overline{Y} + 2\langle \overline{L}_1\overline{X}, J_1\overline{L}_1\overline{Y}\rangle J_1)\overline{L}_1\overline{Z} \\
&\quad +\frac{c_2}{2}(\overline{L}_2\overline{X} \wedge \overline{L}_2\overline{Y} + J_2\overline{L}_2\overline{X} \wedge J_2\overline{L}_2\overline{Y} + 2\langle \overline{L}_2\overline{X}, J_2\overline{L}_2\overline{Y}\rangle J_2)\overline{L}_2\overline{Z} \\
&= \frac{c_1}{2}(\overline{L}_1\overline{X} \wedge \overline{L}_1\overline{Y} + J\overline{L}_1\overline{X} \wedge J\overline{L}_1\overline{Y} + 2\langle \overline{L}_1\overline{X}, J\overline{L}_1\overline{Y}\rangle J)\overline{L}_1\overline{Z} \\
&\quad +\frac{c_2}{2}(\overline{L}_2\overline{X} \wedge \overline{L}_2\overline{Y} + J\overline{L}_2\overline{X} \wedge J\overline{L}_2\overline{Y} + 2\langle \overline{L}_2\overline{X}, J\overline{L}_2\overline{Y}\rangle J)\overline{L}_2\overline{Z},
\end{aligned}$$

e portanto segue o resultado enunciado. □

2.2 Hipersuperfícies reais e suas equações fundamentais

Agora, considere $\overline{M} = \mathbb{CQ}_1 \times \mathbb{CQ}_2$ com a conexão Levi-Civita $\overline{\nabla}$. Dada M uma hipersuperfície real orientável de $\overline{M}$, a conexão Levi-Civita ∇ da métrica induzida pela imersão $M \looparrowright \overline{M}$ e o operador de forma A se caracterizam por

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle AX, Y\rangle\nu$$

e

$$AX := -\overline{\nabla}_X \nu,$$

onde ν é o vetor normal unitário da imersão.

Definição 2.1. *Definimos a função curvatura média H como o traço do operador de forma normalizado, isto é,*

$$H = \frac{1}{2n-1} tr\ A.$$

Com isto definido, podemos trazer as seguintes definições:

Definição 2.2. *Uma hipersuperfície é dita totalmente umbílica se o operador de forma A é um múltiplo da identidade.*

Definição 2.3. *Uma hipersuperfície é dita totalmente geodésica se $A \equiv 0$.*

Definição 2.4. *Uma hipersuperfície é chamada uma esfera extrínseca se é uma hipersuperfície umbílica de curvatura média H constante e não-nula.*

A estrutura quase produto F induz a existência em M de um vetor $V \in \Gamma(TM)$, uma função $h : M \to \mathbb{R}$ e um endomorfismo $f : TM \to TM$ tal que, para todo $X \in \Gamma(TM)$,

$$FX = fX + \langle V, X \rangle \nu \qquad \text{e} \qquad F\nu = V + h\nu,$$

onde ν é um vetor normal unitário da imersão.

Para a estrutura complexa, temos

$$JX = \varphi X + \langle W, X \rangle \nu,$$

onde $W := -J\nu$ é o vetor estrutura e $\varphi : TM \to TM$ é antissimétrica. Da definição de J e F, encontramos que $FJ = JF$. Podemos facilmente ver que, para todo $X \in \Gamma(T\overline{M})$, valem

$$\langle V, W \rangle = 0, \quad \varphi^2 X = -X + \langle X, W \rangle W, \quad \langle W, W \rangle = 1, \quad \text{e} \quad \varphi W = 0. \tag{2.2}$$

Relembramos também que valem as seguintes propriedades (Ver [NR22]). Seja M uma hipersuperfície real de $\overline{M} = \mathbb{CQ}_1 \times \mathbb{CQ}_2$ e $X \in TM$, então

$$f \text{ é simétrica} \tag{2.3}$$

$$fV = -hV \tag{2.4}$$

$$h^2 + |V|^2 = 1 \tag{2.5}$$

$$f\varphi X + \langle W, X \rangle V = \varphi f X - \langle V, X \rangle W \tag{2.6}$$

$$fW = hW - \varphi V. \tag{2.7}$$

Da decomposição de F, é fácil ver que

$$\begin{aligned}
f^2X &= X - \langle V, X\rangle V, \\
\langle fX, Y\rangle &= \langle X, fY\rangle, \\
\langle fX, fY\rangle &= \langle X, Y\rangle - \langle V, X\rangle\langle V, Y\rangle.
\end{aligned}$$

Assim, se tomarmos $V = 0$, vemos que f satisfaz as mesmas propriedades de F em M, daí dizemos que f é uma estrutura quase produto de M. E, concluímos que, M tem uma estrutura local quase produto se, e somente se, $V = 0$.

A relação entre as conexões $\overline{\nabla}$ e ∇ nos dá as equações de Gauss e Codazzi que são, respectivamente, a parte tangente e a parte normal do tensor curvatura.

Proposição 2.2. *As equações de Gauss e de Codazzi são dadas por:*

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \sum_{i=1}^{2} \frac{c_i}{2}\{(L_iX \wedge L_iY)L_iZ + (\varphi L_iX \wedge \varphi L_iY)L_iZ \\
&+\langle V, Z\rangle[\langle V, Y\rangle L_iX - \langle V, X\rangle L_iY \\
&+\langle L_iY, W\rangle(\varphi L_iX - \langle V, X\rangle W) - \langle L_iX, W\rangle(\varphi L_iY - \langle V, Y\rangle W)] \\
&+[(\langle V, X\rangle)\varphi L_iY - \langle V, Y\rangle\varphi L_iX) \wedge W]L_iZ \\
&+2(\langle L_iX, \varphi L_iY - \langle V, Y\rangle W\rangle + \varepsilon_i\langle L_iY, W\rangle\langle V, X\rangle)(\varphi L_iZ - \langle V, Z\rangle W)\} \\
&+(AX \wedge AY)Z
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
d_\nabla A(Y,X) &= (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X \\
&= \sum_{i=1}^{2} \frac{c_i}{2}[2\varepsilon_i L_i((Y \wedge X)V) + L_i\varphi L_i((Y \wedge X)L_iW) \\
&+(3\varepsilon_i\langle (Y \wedge X)V, L_iW\rangle + 2\langle X, L_i\varphi L_iY\rangle)L_iW],
\end{aligned}$$

onde $L_i = I + \varepsilon_i f$, *com* $\varepsilon_1 = 1$ *e* $\varepsilon_2 = -1$.

Demonstração. A demonstração dessa proposição é feita utilizando as propriedades da decomposição da estrutura complexa e da estrutura produto, que são dadas nas equações de (2.2) a (2.7) □

Temos a seguir um lema técnico que é utilizado no capítulo seguinte.

Lema 2.5. *Considere um conjunto de campos locais ortonormais* $\{e_j\}_{j=1}^{n-1}$ *em* $W^{\perp}$. *Afirmamos que o conjunto* $\{W, e_j, \varphi e_j\}_{j=1}^{n-1}$ *é um referencial local ortonormal. Assim, obtemos:*

$$\begin{aligned} d_{\nabla}A(W,e_j) &= \sum_{i=1}^{2}(4c_i(\varepsilon_i+h)\langle e_j,V\rangle W+\sum_k \frac{c_i}{2}\{[(7+\varepsilon_i h)\langle e_j,V\rangle\langle V,\varphi e_k\rangle \\ &\quad +(1-\varepsilon_i h)\langle \varphi e_j,V\rangle\langle V,e_k\rangle-(1+\varepsilon_i h)\langle L_i\varphi L_i e_j,e_k\rangle]e_k \\ &\quad +[-(7+\varepsilon_i h)\langle e_j,V\rangle\langle V,e_k\rangle+(1-\varepsilon_i h)\langle \varphi e_j,V\rangle\langle \varphi V,e_k\rangle \\ &\quad +(1+\varepsilon_i h)\langle \varphi L_i\varphi L_i e_j,e_k\rangle]\varphi e_k\}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{\nabla}A(W,\varphi e_j) &= \sum_{i=1}^{2}(4c_i(\varepsilon_i+h)\langle V,\varphi e_j\rangle W+\sum_k \frac{c_i}{2}\{[(7+\varepsilon_i h)\langle V,\varphi e_j\rangle\langle V,\varphi e_k\rangle \\ &\quad -(1-\varepsilon_i h)\langle V,e_j\rangle\langle V,e_k\rangle-(1+\varepsilon_i h)\langle L_i\varphi L_i\varphi e_j,e_k\rangle]e_k \\ &\quad +[-(7+\varepsilon_i h)\langle \varphi e_j,V\rangle\langle V,e_k\rangle-(1-\varepsilon_i h)\langle e_j,V\rangle\langle V,\varphi e_k\rangle \\ &\quad -(1+\varepsilon_i h)\langle L_i\varphi L_i\varphi e_j,\varphi e_k\rangle]\varphi e_k\}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d_{\nabla}A(e_j,\varphi e_l) &= \sum_{i=1}^{2}\{c_i[(3+\varepsilon_i h)(\langle V,\varphi e_l\rangle\langle V,\varphi e_j\rangle+\langle V,e_l\rangle\langle V,e_j\rangle \\ &\quad -(1+\varepsilon_i h)\langle L_i\varphi L_i\varphi e_l,e_j\rangle]W \\ &\quad +\sum_k \frac{c_i}{2}[2\varepsilon_i(\langle V,\varphi e_l\rangle\langle L_i e_j,e_k\rangle-\langle V,e_j\rangle\langle L_i\varphi e_l,e_k\rangle) \\ &\quad -\varepsilon_i(\langle V,e_l\rangle\langle L_i\varphi L_i e_j,e_k\rangle+\langle V,\varphi e_j\rangle\langle L_i\varphi L_i\varphi e_l,e_k\rangle) \\ &\quad +\varepsilon_i\langle V,\varphi e_k\rangle\,(3(\langle V,\varphi e_j\rangle\langle V,\varphi e_l\rangle+\langle V,e_j\rangle\langle V,e_l\rangle)-2\langle L_i\varphi L_i\varphi e_l,e_j\rangle)]e_k \\ &\quad +\sum_k \frac{c_i}{2}[2\varepsilon_i(\langle V,\varphi e_l\rangle\langle L_i e_j,\varphi e_k\rangle-\langle V,e_j\rangle\langle L_i\varphi e_l,\varphi e_k\rangle) \\ &\quad -\varepsilon_i(\langle V,e_l\rangle\langle L_i\varphi L_i e_j,\varphi e_k\rangle+\langle V,\varphi e_j\rangle\langle L_i\varphi L_i\varphi e_l,\varphi e_k\rangle) \\ &\quad -\varepsilon_i\langle V,e_k\rangle\,(3(\langle V,\varphi e_j\rangle\langle V,\varphi e_l\rangle+\langle V,e_j\rangle\langle V,e_l\rangle)-2\langle L_i\varphi L_i\varphi e_l,e_j\rangle)]\varphi e_k\} \end{aligned}$$

Demonstração. Podemos escrever

$$\begin{aligned}
d_\nabla A(W,e_j) &= \langle d_\nabla A(W,e_j),W\rangle\, W \\
&\quad +\textstyle\sum_k \left(\langle d_\nabla A(W,e_j),e_k\rangle\, e_k + \langle d_\nabla A(W,e_j),\varphi e_k\rangle\, \varphi e_k\right) \\
d_\nabla A(W,\varphi e_j) &= \langle d_\nabla A(W,\varphi e_j),W\rangle\, W \\
&\quad +\textstyle\sum_k \left(\langle d_\nabla A(W,\varphi e_j),e_k\rangle\, e_k + \langle d_\nabla A(W,\varphi e_j),\varphi e_k\rangle\, \varphi e_k\right) \\
d_\nabla A(e_j,\varphi e_l) &= \langle d_\nabla A(e_j,\varphi e_l),W\rangle\, W \\
&\quad +\textstyle\sum_k \left(\langle d_\nabla A(e_j,\varphi e_l),e_k\rangle\, e_k + \langle d_\nabla A(e_j,\varphi e_l),\varphi e_k\rangle\, \varphi e_k\right).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Usando as equações de (2.2) a (2.7) e, visto que

$$\langle L_iW,\varphi e_k\rangle = \langle W+\varepsilon_i fW,\varphi e_k\rangle = \varepsilon_i\langle hW-\varphi V,\varphi e_k\rangle = -\varepsilon_i\langle V,e_k\rangle, \tag{2.9}$$

$$\langle L_iW,e_k\rangle = \langle W+\varepsilon_i fW,e_k\rangle = \varepsilon_i\langle hW-\varphi V,e_k\rangle = \varepsilon_i\langle V,\varphi e_k\rangle, \tag{2.10}$$

pela equação de Codazzi, temos que

$$\begin{aligned}
\langle d_\nabla A(W,e_j),W\rangle &= \sum_{i=1}^{2}\frac{c_i}{2}[(7\varepsilon_i+h)\,\langle e_j,V\rangle\,\langle L_iW,W\rangle + (\varepsilon_i-h)\,\langle e_j,L_iW\rangle\,\langle V,W\rangle \\
&\quad -(1+\varepsilon_i h)\,\langle L_i\varphi L_i e_j,W\rangle] \\
&= \sum_{i=1}^{2}\frac{c_i}{2}\,[(7\varepsilon_i+h)(1+\varepsilon_i h)\,\langle e_j,V\rangle + (1+\varepsilon_h)(\varepsilon_i-h)\,\langle V,e_j\rangle] \\
&= \sum_{i=1}^{2}\frac{c_i}{2}\,[8(\varepsilon_i+h)\,\langle e_j,V\rangle] \\
&= \sum_{i=1}^{2} 4c_i(\varepsilon_i+h)\,\langle e_j,V\rangle\,,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
\langle d_\nabla A(W,e_j),e_k\rangle &= \sum_{i=1}^{2}\frac{c_i}{2}[(7\varepsilon_i+h)\langle e_j,V\rangle\langle L_iW,e_k\rangle+(\varepsilon_i-h)\langle e_j,L_iW\rangle\langle V,e_k\rangle\\
&\quad -(1+\varepsilon_i h)\langle L_i\varphi L_ie_j,e_k\rangle]\\
&= \sum_{i=1}^{2}\frac{c_i}{2}[(7\varepsilon_i+h)\langle e_j,V\rangle\langle W+\varepsilon_i fW,e_k\rangle\\
&\quad +(\varepsilon_i-h)\langle e_j,W+\varepsilon_i fW\rangle\langle V,e_k\rangle-(1+\varepsilon_i h)\langle L_i\varphi L_ie_j,e_k\rangle]\\
&= \sum_{i=1}^{2}\frac{c_i}{2}[(7\varepsilon_i+h)\langle e_j,V\rangle\langle \varepsilon_i fW,e_k\rangle+(\varepsilon_i-h)\langle e_j,\varepsilon_i fW\rangle\langle V,e_k\rangle\\
&\quad -(1+\varepsilon_i h)\langle L_i\varphi L_ie_j,e_k\rangle]\\
&= \sum_{i=1}^{2}\frac{c_i}{2}[(7\varepsilon_i+h)\varepsilon_i\langle e_j,V\rangle\langle hW-\varphi V,e_k\rangle\\
&\quad +(\varepsilon_i-h)\,\varepsilon_i\langle e_j,hW-\varphi V\rangle\langle V,e_k\rangle-(1+\varepsilon_i h)\langle L_i\varphi L_ie_j,e_k\rangle]\\
&= \sum_{i=1}^{2}\frac{c_i}{2}[(7+\varepsilon_i h)\langle e_j,V\rangle\langle V,\varphi e_k\rangle+(1-\varepsilon_i h)\langle \varphi e_j,V\rangle\langle V,e_k\rangle\\
&\quad -(1+\varepsilon_i h)\langle L_i\varphi L_ie_j,e_k\rangle]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle d_\nabla A(W,e_j),\varphi e_k\rangle &= \sum_{i=1}^{2}\frac{c_i}{2}[(7\varepsilon_i+h)\langle e_j,V\rangle\langle L_iW,\varphi e_k\rangle+(\varepsilon_i-h)\langle e_j,L_iW\rangle\langle V,e_k\rangle\\
&\quad -(1+\varepsilon_i h)\langle L_i\varphi L_ie_j,\varphi e_k\rangle]\\
&= \sum_{i=1}^{2}\frac{c_i}{2}[-(7+\varepsilon_i h)\langle e_j,V\rangle\langle V,e_k\rangle+(1-\varepsilon_i h)\langle \varphi e_j,V\rangle\langle \varphi V,e_k\rangle\\
&\quad +(1+\varepsilon_i h)\langle \varphi L_i\varphi L_ie_j,e_k\rangle].
\end{aligned}$$

Ao substituir na primeira equação de (2.8), isso nos dá a primeira equação do lema. Pela equação de Codazzi, também obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle d_\nabla A(W,\varphi e_j),W\rangle &= \sum_{i=1}^{2}\frac{c_i}{2}[(7\varepsilon_i+h)\langle \varphi e_j,V\rangle\langle L_iW,W\rangle+(\varepsilon_i-h)\langle \varphi e_j,L_iW\rangle\langle V,W\rangle\\
&\quad -(1+\varepsilon_i h)\langle L_i\varphi L_i\varphi e_j,\varphi W\rangle]\\
&= \sum_{i=1}^{2}\frac{c_i}{2}[(7\varepsilon_i+h)(1+\varepsilon_i h)\langle \varphi e_j,V\rangle+(1+\varepsilon_i h)\langle L_i\varphi L_i\varphi e_j,\varphi W\rangle]\\
&= \sum_{i=1}^{2}4c_i(\varepsilon_i+h)\langle V,\varphi e_j\rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle d_\nabla A(W,\varphi e_j),e_k\rangle &= \sum_{i=1}^{2}\frac{c_i}{2}[(7\varepsilon_i+h)\langle\varphi e_j,V\rangle\langle L_iW,e_k\rangle+(\varepsilon_i-h)\langle\varphi e_j,L_iW\rangle\langle V,e_k\rangle\\&\quad -(1+\varepsilon_ih)\langle L_i\varphi L_i\varphi e_j,e_k\rangle]\\&= \sum_{i=1}^{2}\frac{c_i}{2}[-(7\varepsilon_i+h)\varepsilon_i\langle\varphi e_j,V\rangle\langle\varphi V,e_k\rangle-(1-\varepsilon_ih)\langle e_j,V\rangle\langle V,e_k\rangle\\&\quad -(1+\varepsilon_ih)\langle L_i\varphi L_i\varphi e_j,e_k\rangle]\\&= \sum_{i=1}^{2}\frac{c_i}{2}[(7+\varepsilon_ih)\langle V,\varphi e_j\rangle\langle V,\varphi e_k\rangle-(1-\varepsilon_ih)\langle V,e_j\rangle\langle V,e_k\rangle\\&\quad -(1+\varepsilon_ih)\langle L_i\varphi L_i\varphi e_j,e_k\rangle]\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle d_\nabla A(W,\varphi e_j),\varphi e_k\rangle &= \sum_{i=1}^{2}\frac{c_i}{2}[(7\varepsilon_i+h)\langle\varphi e_j,V\rangle\langle L_iW,\varphi e_k\rangle\\&\quad +(\varepsilon_i-h)\langle\varphi e_j,L_iW\rangle\langle V,\varphi e_k\rangle-(1+\varepsilon_ih)\langle L_i\varphi L_i\varphi e_j,\varphi e_k\rangle]\\&= \sum_{i=1}^{2}\frac{c_i}{2}[-(7+\varepsilon_ih)\langle\varphi e_j,V\rangle\langle V,e_k\rangle-(1-\varepsilon_ih)\langle e_j,V\rangle\langle V,\varphi e_k\rangle\\&\quad -(1+\varepsilon_ih)\langle L_i\varphi L_i\varphi e_j,\varphi e_k\rangle].\end{aligned}\tag{2.12}$$

Substituindo em (2.8), obtemos o resultado da segunda equação. Por último, pela equação de Codazzi, também obtemos:

$$\begin{aligned}d_\nabla A(e_j,\varphi e_l) &= \sum_{i=1}^{2}\frac{c_i}{2}[2\varepsilon_iL_i((e_j\wedge\varphi e_l)V)+L_i\varphi L_i((e_j\wedge\varphi e_l)L_iW)\\&\quad +(3\varepsilon_i\langle(e_j\wedge\varphi e_l)V,L_iW\rangle+2\langle\varphi e_l,L_i\varphi L_ie_j\rangle)L_iW].\end{aligned}$$

Note que

$$L_i((e_j\wedge\varphi e_l)V) = L_i(\langle\varphi e_l,V\rangle e_j-\langle e_j,V\rangle\varphi e_l)=\langle\varphi e_l,V\rangle L_ie_j-\langle e_j,V\rangle L_i\varphi e_l,$$

daí

$$\begin{aligned}\langle(e_j\wedge\varphi e_l)V,L_iW\rangle &= \langle\varphi e_l,V\rangle\langle L_ie_j,W\rangle-\langle e_j,V\rangle\langle L_i\varphi e_l,W\rangle\\&= \langle\varphi e_l,V\rangle\langle e_j,L_iW\rangle-\langle e_j,V\rangle\langle\varphi e_l,L_iW\rangle\\&= \varepsilon_i(\langle\varphi e_l,V\rangle\langle V,\varphi e_j\rangle+\langle e_j,V\rangle\langle e_l,V\rangle),\end{aligned}$$

e

$$(e_j \wedge \varphi e_l)L_iW = \langle \varphi e_l, L_iW\rangle e_j - \langle e_j, L_iW\rangle \varphi e_l = -\varepsilon_i\langle V, e_l\rangle e_j + \varepsilon_i\langle \varphi V, e_j\rangle \varphi e_l.$$

Assim,

$$\begin{aligned} d_\nabla A(e_j, \varphi e_l) &= \sum_{i=1}^{2} \frac{c_i}{2}[2\varepsilon_i(\langle \varphi e_l, V\rangle L_ie_j - \langle e_j, V\rangle L_i\varphi e_l) - \varepsilon_i L_i\varphi L_i(\langle V, e_l\rangle e_j \\ &\quad +\langle V, \varphi e_j\rangle \varphi e_l) + (3\varepsilon_i^2(\langle \varphi e_l, V\rangle\langle V, \varphi e_j\rangle + \langle e_j, V\rangle\langle e_l, V\rangle) \\ &\quad +2\langle \varphi e_l, L_i\varphi L_ie_j\rangle)L_iW]. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Usando as equações (3.3), (2.2) a (2.7), (2.9) e (2.10), obtemos

$$\begin{aligned} \langle d_\nabla A(e_j, \varphi e_l), W\rangle &= \sum_{i=1}^{2} c_i[(3+\varepsilon_i h)(\langle V, \varphi e_l\rangle\langle V, \varphi e_j\rangle + \langle V, e_l\rangle\langle V, e_j\rangle) \\ &\quad -(1+\varepsilon_i h)\langle L_i\varphi L_i\varphi e_l, e_j\rangle]. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Substituindo (2.13) e (2.14) na última equação de (2.8), obtemos a última equação do lema.

□

Capítulo 3

Hipersuperfícies umbílicas em $\mathbb{CQ}^{n_1}_{c_1} \times \mathbb{CQ}^{n_2}_{c_2}$

Niegerball e Ryan em [NR97] trazem um teorema que mostra que não existem hipersuperfícies totalmente umbílicas em $\mathbb{CP}^n$ ou $\mathbb{CH}^n$, fato que foi primeiramente mostrado por Tashiro-Tachibana [TT63] em 1963. Também mostram que o operador de formas não pode ser paralelo:

Teorema 3.1 (Niegerball-Ryan)**.** *Seja M uma hipersuperfície em uma forma espacial complexa de curvatura seccional holomorfa constante $4c \neq 0$. Então, o operador de forma A não pode ser paralelo. Também não pode ocorrer que $A = \lambda I$, mesmo com λ não constante. Em particular, não existem hipersuperfícies totalmente umbílicas.*

A seguir apresentamos, para o produto de duas formas espaciais complexas, teoremas que chamamos de uma versão de Tashiro-Tachibana, pois eles foram os primeiros a provar que não existem hipersuperfícies totalmente umbílicas nas formas espaciais complexas de curvatura seccional holomorfa constante diferente de zero.

O primeiro destes teoremas mostra que a primeira parte do teorema (3.1) ainda vale para o produto de formas espaciais complexas, no caso em que M não é localmente produto.

Teorema 3.2. *Seja M uma hipersuperfície real em $\overline{M} = \mathbb{CQ}_1 \times \mathbb{CQ}_2$, onde $\mathbb{CQ}_i$ são formas espaciais complexas com $c_1 \neq 0$ ou $c_2 \neq 0$. Suponha que $|V|^2 \neq 0$. Então, o operador de forma A não pode ser paralelo.*

Demonstração. Vamos escrever a equação de Codazzi nas direções W e V e, daí, chegar em uma contradição.

Na equação de Codazzi tomamos $Y = W$, então temos que

$$(Y \wedge X)V = (W \wedge X)V = \langle X, V\rangle W - \langle W, V\rangle X = \langle X, V\rangle W \tag{3.1}$$

daí

$$L_i((Y \wedge X)V) = L_i(W \wedge X)V = \langle X, V\rangle L_i W. \tag{3.2}$$

Também

$$\langle (Y \wedge X)V, L_i W\rangle \;=\; \langle (W \wedge X)V, L_i W\rangle = \langle L_i(W \wedge X)V, W\rangle = \langle X, V\rangle\langle L_i W, W\rangle$$

e

$$\begin{aligned}\langle L_i W, W\rangle &= \langle W, (I + \varepsilon_i f)W\rangle = |W|^2 + \varepsilon_i\langle W, fW\rangle = 1 + \varepsilon_i\langle W, hW - \varphi V\rangle \\ &= 1 + \varepsilon_i h|W|^2 + \varepsilon_i\langle \varphi W, V\rangle = 1 + \varepsilon_i h, \end{aligned} \tag{3.3}$$

daí

$$\langle (Y \wedge X)V, L_i W\rangle \;=\; (1 + \varepsilon_i h)\langle X, V\rangle. \tag{3.4}$$

Ainda utilizando as propriedades de φ, f e W, obtemos

$$\begin{aligned} L_i\varphi L_i Y &= L_i\varphi L_i W = L_i\varphi(W + \varepsilon_i f W) = \varepsilon_i L_i\varphi f W = \varepsilon_i L_i\varphi(hW - \varphi V) \\ &= -\varepsilon_i L_i\varphi^2 V = -\varepsilon_i L_i(-V + \langle W, V\rangle W) = \varepsilon_i L_i V = \varepsilon_i(V + \varepsilon_i f V) \\ &= \varepsilon_i(V - \varepsilon_i h V) = (\varepsilon_i - h)V. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Também temos

$$(Y \wedge X)L_i W \;=\; (W \wedge X)L_i W = \langle X, L_i W\rangle W - \langle W, L_i W\rangle X = \langle X, L_i W\rangle W - (1 + \varepsilon_i h)X$$

e

$$\begin{aligned} L_i\varphi L_i((Y \wedge X)L_i W) &= L_i\varphi L_i((W \wedge X)L_i W) = \langle X, L_i W\rangle L_i\varphi L_i W - (1 + \varepsilon_i h)L_i\varphi L_i X \\ &= \langle X, L_i W\rangle(\varepsilon_i - h)V - (1 + \varepsilon_i h)L_i\varphi L_i X. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d_\nabla A(W, X) &= \sum_{i=1}^{2}\frac{c_i}{2}\{[2\varepsilon_i\langle X, V\rangle + 3\varepsilon_i(1 + \varepsilon_i h)\langle X, V\rangle + 2(\varepsilon_i - h)\langle X, V\rangle]L_i W \\ &\quad + \langle X, L_i W\rangle(\varepsilon_i - h)V - (1 + \varepsilon_i h)L_i\varphi L_i X\} \qquad (3.7) \\ &= \sum_{i=1}^{2}\frac{c_i}{2}[(7\varepsilon_i + h)\langle X, V\rangle L_i W + \langle X, L_i W\rangle(\varepsilon_i - h)V - (1 + \varepsilon_i h)L_i\varphi L_i X]. \end{aligned}$$

A equação (3.7) é a equação de Codazzi nos planos que contêm o vetor W. Agora, podemos tomar $X = V$, e obter

$$\begin{aligned} d_\nabla A(W,X) &= \sum_{i=1}^{2} \frac{c_i}{2}[(7\varepsilon_i + h)\langle V,V\rangle L_iW + \langle V, L_iW\rangle(\varepsilon_i - h)V - (1+\varepsilon_i h)L_i\varphi L_iV] \\ &= \sum_{i=1}^{2} \frac{c_i}{2}[(7\varepsilon_i + h)(1-h^2)L_iW \\ &\quad -(1+\varepsilon_i h)((1-\varepsilon_i h)^2\varphi V - (\varepsilon_i - h)(1-h^2)W)], \end{aligned}$$

pois $L_iV = (I + \varepsilon_i f)V = (1-\varepsilon_i h)V$.

Logo,

$$\begin{aligned} L_i\varphi L_iV &= (1-\varepsilon_i h)L_i\varphi V = (1-\varepsilon_i h)(\varphi V + \varepsilon_i f\varphi V) \\ &= (1-\varepsilon_i h)(\varphi V + \varepsilon_i(\varphi f V - \langle V,V\rangle W - \langle V,W\rangle V)) \\ &= (1-\varepsilon_i h)(\varphi V - \varepsilon_i h\varphi V - \varepsilon_i|V|^2W) \\ &= (1-\varepsilon_i h)^2\varphi V - (\varepsilon_i - h)|V|^2W \qquad (3.8) \\ &= (1-\varepsilon_i h)^2\varphi V - (\varepsilon_i - h)(1-h^2)W \qquad (3.9) \end{aligned}$$

e

$$\langle V, L_iW\rangle = \langle V, W + \varepsilon_i fW\rangle = \varepsilon_i\langle V, fW\rangle = \varepsilon_i h\langle V,W\rangle - \varepsilon_i\langle V,\varphi V\rangle = 0.$$

Fazendo as contas:

$$\begin{aligned} (1+\varepsilon_i h)(1-\varepsilon_i h)^2 &= (1-h^2)(1-\varepsilon_i h) \\ (1+\varepsilon_i h)(\varepsilon_i - h) &= \varepsilon_i(1-h^2) \\ L_iW = W + \varepsilon_i fW &= W + \varepsilon_i(hW - \varphi V) = (1+\varepsilon_i h)W - \varepsilon_i\varphi V, \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
d_\nabla A(W,V) &= \sum_{i=1}^{2}\frac{c_i}{2}(1-h^2)[(7\varepsilon_i+h)\left((1+\varepsilon_i h)W-\varepsilon_i\varphi V\right)\\
&\quad -(1-\varepsilon_i h)\varphi V+\varepsilon_i(1-h^2)W]\\
&= \sum_{i=1}^{2}\frac{c_i}{2}(1-h^2)[\big((7\varepsilon_i+h)(1+\varepsilon_i h)+\varepsilon_i(1-h^2)\big)W\\
&\quad -\left((7\varepsilon_i+h)\varepsilon_i+(1-\varepsilon_i h)\right)\varphi V]\\
&= \sum_{i=1}^{2}\frac{c_i}{2}(1-h^2)[8(\varepsilon_i+h)W-8\varphi V]
\end{aligned}$$

Logo,

$$(\nabla_V A)W-(\nabla_W A)V \;=\; d_\nabla A(W,V)=\sum_{i=1}^{2}4c_i(1-h^2)[(\varepsilon_i+h)W-\varphi V].$$

Suponha que $\nabla A=0$, então, sendo $|V|^2=1-h^2\neq 0$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{2}c_i[(\varepsilon_i+h)W-\varphi V]=0. \tag{3.10}$$

Sendo $\{W,V,\varphi V\}$ um conjunto ortogonal, obtemos

$$\sum_{i=1}^{2}c_i(\varepsilon_i+h)=0 \tag{3.11}$$

$$\sum_{i=1}^{2}c_i=0 \tag{3.12}$$

De (3.12), obtemos $c_1+c_2=0\Rightarrow c_2=-c_1$. De (3.11),

$$c_1(1+h)+c_2(-1+h)=0\Rightarrow c_1(1+h)-c_1(-1+h)=0\Rightarrow 2c_1=0\Rightarrow c_1=0,$$

voltando para (3.12), obtemos

$$c_1=c_2=0,$$

contradição. Logo, $\nabla A=0$ não pode acontecer. $\square$

A seguir, caracterizamos hipersuperfícies totalmente umbílicas no produto de formas espaciais complexas. Antes, trazemos um lema indispensável para a demonstração dos teoremas.

Lema 3.3. *Seja M uma hipersuperfície real totalmente umbílica de $\overline{M} = \mathbb{C}\mathbb{Q}_1 \times \mathbb{C}\mathbb{Q}_2$. Então,*

$$\nabla H = 4\left(\sum_{i=1}^{2} c_i(\varepsilon_i + h)\right)V. \tag{3.13}$$

Demonstração. Note que sendo M^{2n-1} uma hipersuperfície real de $\overline{M}^{2n}$, onde $2n$ é a dimensão real de $\overline{M}$, e ν o vetor normal de M em $\overline{M}$, tomamos a base considerada no Lema 2.5 da forma $\{W, e_j, \varphi e_j\}_{j=1}^{n-1}$ para M sendo $\{\nu, W, e_j, \varphi e_j\}_{j=1}^{n-1}$ uma base para $\overline{M}$. Da equação de Codazzi, sendo $A = \lambda I$, temos que

$$\begin{aligned} d_\nabla A(W, e_j) &= (\nabla_{e_j} A)W - (\nabla_W A)e_j = (e_j\lambda)W - (W\lambda)e_j \\ d_\nabla A(W, \varphi e_j) &= (\nabla_{\varphi e_j} A)W - (\nabla_W A)\varphi e_j = (\varphi e_j\lambda)W - (W\lambda)\varphi e_j. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Comparando com as equações do lema 2.5, obtemos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} e_j\lambda &= \sum_{i=1}^{2} 4c_i(\varepsilon_i + h)\langle V, e_j\rangle && (3.15) \\ (W\lambda)\delta_{jk} &= \sum_{i=1}^{2} \frac{c_i}{2}[(7 + \varepsilon_i h)\langle e_j, V\rangle \langle V, \varphi e_k\rangle + (1 - \varepsilon_i h)\langle \varphi e_j, V\rangle \langle V, e_k\rangle \\ &\quad -(1 + \varepsilon_i h)\langle L_i\varphi L_i e_j, e_k\rangle] && (3.16) \\ 0 &= \langle d_\nabla A(W, e_j), \varphi e_k\rangle \\ (\varphi e_j)\lambda &= \sum_{i=1}^{2} 4c_i(\varepsilon_i + h)\langle V, \varphi e_j\rangle && (3.17) \\ 0 &= \langle d_\nabla A(W, \varphi e_j), e_k\rangle \\ (W\lambda)\delta_{jk} &= \sum_{i=1}^{2} \frac{c_i}{2}[-(7 + \varepsilon_i h)\langle \varphi e_j, V\rangle \langle V, e_k\rangle - (1 - \varepsilon_i h)\langle e_j, V\rangle \langle V, \varphi e_k\rangle \\ &\quad +(1 + \varepsilon_i h)\langle \varphi L_i\varphi L_i\varphi e_j, e_k\rangle]. && (3.18) \end{aligned}$$

Haja visto que os operadores varphi e Li são anti simétrico e simétrico, respectivamente, segue que:

$$\begin{aligned} \langle L_i\varphi L_i e_j, e_j\rangle &= -\langle L_i\varphi L_i e_j, e_j\rangle \Rightarrow \langle L_i\varphi L_i e_j, e_j\rangle = 0 \\ \langle \varphi L_i\varphi L_i\varphi e_j, e_j\rangle &= -\langle \varphi L_i\varphi L_i\varphi e_j, e_j\rangle \Rightarrow \langle \varphi L_i\varphi L_i\varphi e_j, e_j\rangle = 0. \end{aligned}$$

Logo, tomando $k = j$ nas identidades (3.16) e (3.18), obtemos:

$$\begin{aligned} W\lambda &= \sum_{i=1}^{2} \frac{c_i}{2}[(7+\varepsilon_i h)\langle e_j, V\rangle \langle V, \varphi e_j\rangle + (1-\varepsilon_i h)\langle \varphi e_j, V\rangle \langle V, e_j\rangle, \\ W\lambda &= \sum_{i=1}^{2} \frac{c_i}{2}[-(7+\varepsilon_i h)\langle \varphi e_j, V\rangle \langle V, e_j\rangle - (1-\varepsilon_i h)\langle e_j, V\rangle \langle V, \varphi e_j\rangle. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Somando as equações, obtêm-se

$$2(W\lambda) = 0 \Rightarrow W\lambda = 0. \tag{3.20}$$

Note que

$$\left(\sum_{i=1}^{2} 4c_i(\varepsilon_i + h)\right) V = \left(\sum_{i=1}^{2} 4c_i(\varepsilon_i + h)\right) \sum_{j=1}^{n-1} (\langle V, e_j\rangle e_j + \langle V, \varphi e_j\rangle \varphi e_j + \langle V, W\rangle W)$$

Sabendo que $\langle V, W\rangle = 0$ e utilizando as equações (3.15) e (3.17), obtemos

$$\left(\sum_{i=1}^{2} 4c_i(\varepsilon_i + h)\right) V = \sum_{j=1}^{\frac{n-2}{2}} ((e_j\lambda)e_j + (\varphi e_j \lambda)\varphi e_j) = \nabla\lambda, \tag{3.21}$$

pois $W\lambda = 0$.

Como M é uma hipersuperfície totalmente umbílica, temos que $\lambda = H$, daí

$$\nabla H = \left(\sum_{i=1}^{2} 4c_i(\varepsilon_i + h)\right) V,$$

□

Teorema 3.4. *Seja M uma hipersuperfície real orientada totalmente umbílica de $\overline{M} = \mathbb{CQ}_1 \times \mathbb{CQ}_2$ tendo uma estrutura local quase produto. Então, M é totalmente geodésica ou uma hiperesfera extrínseca.*

Demonstração. Seja M uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\mathbb{CQ}_1 \times \mathbb{CQ}_2$. Desde que M tem uma estrutura local quase produto, temos $V = 0$ (ver página 17), daí, pelo Lema 3.3, segue que $\nabla H = 0$, logo temos que H é constante. Assim, se H é constante igual a 0, temos que M uma hipersuperfície totalmente geodésica, se é constante diferente de 0, temos que M é uma esfera extrínseca. □

Vamos analisar o caso complementar, isto é, quando $|V| \neq 0$, ou seja, quando M não tem estrutura local quase produto.

Teorema 3.5. *Seja M uma hipersuperfície real orientada em $\overline{M} = \mathbb{CQ}_1 \times \mathbb{CQ}_2$ sem estrutura local produto ($V \neq 0$) . Se M é totalmente umbílica, então M não tem curvatura média constante, ou seja, não é totalmente geodésica nem hiperesfera extrínseca.*

Demonstração. Seja M uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\mathbb{CQ}_1 \times \mathbb{CQ}_2$, isto é, $A = HI$. Suponha que $H \equiv cte$, então $\nabla A \equiv 0$. Isso contradiz o teorema 3.2. Então, se M é umbílica, H não pode ser constante. Portanto, não pode se totalmente geodésica nem uma esfera extrínseca. □

Corolário 3.1. *Seja M uma hipersuperfície real orientada em $\overline{M} = \mathbb{CQ}_1 \times \mathbb{CQ}_2$ sem estrutura local produto ($V \neq 0$). Então, se M é CMC, então M não é umbílica.*

Demonstração. Esse corolário é obtido pela contrapositiva do teorema acima. □

Referências Bibliográficas

[CR15] Thomas E. Cecil and Patrick J. Ryan, *Geometry of hypersurfaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2015. MR 3408101

[Dan09] Benoît Daniel, *Isometric immersions into* $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ *and* $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ *and applications to minimal surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), no. 12, 6255–6282. MR 2538594

[Kow11] Daniel Kowalczyk, *Isometric immersions into products of space forms*, Geom. Dedicata **151** (2011), 1–8. MR 2780734

[LTV10] J. H. Lira, R. Tojeiro, and F. Vitório, *A Bonnet theorem for isometric immersions into products of space forms*, Arch. Math. (Basel) **95** (2010), no. 5, 469–479. MR 2738866

[LX19] Xingda Liu and Bang Xiao, *Minimal submanifolds in certain types of Kaehler product manifold*, Southeast Asian Bull. Math. **43** (2019), no. 1, 79–100. MR 3964978

[MT14] Bruno Mendonça and Ruy Tojeiro, *Umbilical submanifolds of* $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, Canad. J. Math. **66** (2014), no. 2, 400–428. MR 3176148

[NR97] Ross Niebergall and Patrick J. Ryan, *Real hypersurfaces in complex space forms*, Tight and taut submanifolds (Berkeley, CA, 1994), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 32, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, pp. 233–305. MR 1486875

[NR22] Roger Nakad and Julien Roth, *Characterization of hypersurfaces in four-dimensional product spaces via two different* Spin^c *structures*, Ann. Global Anal. Geom. **61** (2022), no. 1, 89–114. MR 4367902

[O'N66] Barrett O'Neill, *The fundamental equations of a submersion*, Michigan Math. J. **13** (1966), 459–469. MR 200865

[SVdV12] Rabah Souam and Joeri Van der Veken, *Totally umbilical hypersurfaces of manifolds admitting a unit Killing field*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), no. 7, 3609–3626. MR 2901226

[TT63] Yoshihiro Tashiro and Shun-ichi Tachibana, *On Fubinian and C-Fubinian manifolds*, Kodai Math. Sem. Rep. **15** (1963), 176–183. MR 157336

[YK84] Kentaro Yano and Masahiro Kon, *Structures on manifolds*, Series in Pure Mathematics, vol. 3, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1984. MR 794310