

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE TECNOLOGIA
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

JOÃO FYLLIPY DE LIMA NUNES

**DESENVOLVIMENTO DE *SOFTWARE WEB* PARA ANÁLISE ESTRUTURAL NÃO
LINEAR GEOMÉTRICA DE PÓRTICOS PLANOS**

Maceió-AL

Maio de 2023

JOÃO FYLLIPY DE LIMA NUNES

**DESENVOLVIMENTO DE *SOFTWARE WEB* PARA ANÁLISE ESTRUTURAL NÃO
LINEAR GEOMÉTRICA DE PÓRTICOS PLANOS**

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao
colegiado do curso de engenharia civil do Centro
de Tecnologia da UFAL como requisito parcial
à obtenção do título de Bacharel em Engenharia
Civil.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Cordeiro Bar-
birato

Maceió-AL

Maio de 2023

Catálogo na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

N972d Nunes, João Fyllipy de Lima.

Desenvolvimento de *software web* para análise estrutural não linear
geométrica de pórticos planos / João Fyllipy de Lima Nunes. – Maceió, 2023.
75 f. : il., grafs. e tabs. color.

Orientador: João Carlos Cordeiro Barbirato.
Monografia (Trabalho de conclusão de curso em Engenharia Civil) –
Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2023.

Bibliografia: f. 74-75.

1. Análise estrutural (Engenharia). 2. Análise matricial. 3. Engenharia de
estruturas. 4. Análise funcional não-linear. 5. Desenvolvimento de aplicativos -
Engenharia. 6. Computação em nuvem. I. Título.

CDU: 624.07

Aos melhores professores: meus pais;
À quem eternamente me acompanhará em minha jornada: minha esposa;
Ao meu orientador: por sua sensatez, paciência e vontade de mudar o mundo e a educação;
E, por fim, aos problemas no caminho: que me fizeram aprender a transmutar o mal em bem.

*Minhas ambições são simples:
Se este trabalho te ajudou, de qualquer forma que seja, mesmo que pequena,
então atingi meu objetivo
João.*

RESUMO

Este trabalho desenvolveu um *software* de análise estrutural não linear geométrica de pórticos planos. Assim, buscou-se utilizar de métodos matriciais, mais precisamente o Método da Rigidez Direta, do Método dos Dois Ciclos Iterativos para a não linearidade geométrica e da teoria da mecânica dos sólidos para o cálculo a partir de um modelo inserido pelo usuário, determinando sua matriz de rigidez a partir dos parâmetros do material e seus esforços internos. Neste contexto, a aplicação será disponibilizada para os profissionais e estudantes que necessitem da análise não linear via *web* no modelo "*cloud computing*", utilizando o *framework React.JS* para o *front-end*. Seus resultados foram comparados com dados obtidos de exemplos resolvidos na literatura.

Palavras-chaves: Análise estrutural, Análise matricial de estruturas, Análise não linear geométrica, Desenvolvimento de aplicativo de Engenharia, Computação em nuvem.

ABSTRACT

This work developed a software for nonlinear geometric structural analysis of plane frames. Thus, it seeks to use matrix methods, more precisely the Direct Stiffness Method, the Two Cycle Iterative Method for the geometric nonlinearity and the theory of solid mechanics to calculate from a frame modeled by the user, determining its stiffness matrix from the material parameters entered and its internal forces. In this context, the application will be available for undergraduate and graduated student as for structural professionals in need of nonlinear analysis via web in the cloud computing model, using the React.JS framework for the front-end side. Its results were compared against data obtained from solved examples in the literature.

Keywords: Structural analysis, Matrix analysis of structures, Nonlinear geometric analysis, Engineering App development, Cloud Computing.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Caminho das cargas, mostrando a transferência de esforços para o solo. . . .	18
Figura 2 – Elementos estruturais em uma estação de metrô.	19
Figura 3 – Fluxo básico de um projeto estrutural.	20
Figura 4 – Exemplo de pórtico plano com carregamentos distribuídos, pontuais e suas reações de apoio.	22
Figura 5 – Modelagem de um pórtico com uma treliça, seus carregamentos e condições de vinculação, realizado no <i>software</i> FTool.	24
Figura 6 – Gráfico típico de tensão x deformação do aço.	27
Figura 7 – Exemplo de aplicação do princípio da superposição dos efeitos, considerando duas forças concentradas em uma viga isostática.	29
Figura 8 – Gráficos de deformação e trabalho realizado	30
Figura 9 – Forças representadas no vetor de forças $[F]$	34
Figura 10 – Graus de liberdade em uma barra engastada.	36
Figura 11 – Barra exemplo deformada.	37
Figura 12 – Sistemas de coordenadas.	39
Figura 13 – Condições de contorno para uma barra bi engastada de comprimento l	46
Figura 14 – Forças nodais equivalentes.	47
Figura 15 – Arquitetura da aplicação.	50
Figura 16 – Barra de ferramentas inferior.	51
Figura 17 – Modelo sendo escalonado	52
Figura 18 – Interface geral da aplicação.	53
Figura 19 – Exemplo de janela na aplicação.	54
Figura 20 – Janela de revisão e análise.	54
Figura 21 – Tabelas do relatório de análise de um exemplo genérico.	55
Figura 22 – Gráfico de momento fletor de uma barra qualquer.	55
Figura 23 – Interface do Ftool.	58
Figura 24 – Interface do AcadFrame.	59
Figura 25 – Pórtico não contraventado com carregamento modelado com o primeiro caso de carga.	61
Figura 26 – Mesmo pórtico modelado no 2Frame	62
Figura 27 – Gráfico de esforço normal fornecido pelo 2Frame após análise não linear para a barra 3.	64
Figura 28 – Gráfico de momento fletor fornecido pelo 2Frame após análise não linear para a barra 1.	66
Figura 29 – Pórtico modelado no 2Frame com o primeiro caso de carga	67
Figura 30 – Mesmo pórtico modelado no AcadFrame	68

Figura 31 – Deformada do pórtico no AcadFrame para o último caso de carga e com deslocamentos horizontais indicados por cor 69

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Elementos estruturais	19
Tabela 2 – Etapas do Método dos Dois Ciclos Iterativos	44
Tabela 3 – <i>Frameworks</i> utilizados.	49
Tabela 4 – Elementos da interface de usuário.	53
Tabela 5 – Características geométricas dos perfis metálicos do pórtico não contraventado.	60
Tabela 6 – Comparação dos deslocamentos horizontal em metros no nó 3	62
Tabela 7 – Erro percentual para os deslocamentos horizontais	63
Tabela 8 – Comparação dos esforços Normais em kN Para a Barra 3	63
Tabela 9 – Erro percentual para força normal na barra 3	64
Tabela 10 – Comparação dos esforços cortantes em kN para barra 1	64
Tabela 11 – Erro percentual para força cortante na barra 1 (%)	65
Tabela 12 – Comparação dos esforços fletores em kN.m para o nó 1	65
Tabela 13 – Erro Percentual Para os Momentos Fletores no Nó 1	65
Tabela 14 – Comparação dos deslocamentos horizontais (m) no AcadFrame e no 2Frame no nó 2	68
Tabela 15 – Erro percentual entre os deslocamentos horizontais no AcadFrame e no 2Frame	69
Tabela 16 – Comparação dos esforços normais (kN) no AcadFrame e no 2Frame no nó 2	70
Tabela 17 – Erro percentual entre os esforços normais no AcadFrame e no 2Frame . . .	70
Tabela 18 – Comparação dos esforços cortantes (kN) no AcadFrame e no 2Frame no nó 2	71
Tabela 19 – Erro percentual entre os esforços cortantes no AcadFrame e no 2Frame . .	71
Tabela 20 – Comparação dos momentos fletores (kN.m) no AcadFrame e no 2Frame no nó 2	72
Tabela 21 – Erro percentual entre os momentos fletores no AcadFrame e no 2Frame . .	72

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
EIS	Esforços Internos Solicitantes
PTV	Princípio dos Trabalhos Virtuais
GUI	Interface Gráfica (do inglês <i>Graphical User Interface</i>)
M2CI	Método dos Dois Ciclos Iterativos
MAES	Método da Amplificação dos Esforços Solicitantes
SPA	<i>Single Page Application</i>
UX	Experiência do Usuário (do inglês <i>User Xperience</i>)
UI	Interface do Usuário (do inglês <i>User Interface</i>)

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área
$[\beta]$	Matriz de Rotação
ϵ	Deformação
δ, Δ	Deslocamento
$[d]$	Matriz de Deformação
E	Módulo de Young
F, f	Força
G	Módulo de Elasticidade Transversal
I	Inércia
J	Constante de Torção
k	Coeficiente de Rigidez
K	Constante Elástica
$[K]$	Matriz de Rigidez Global
$[k], [k_L]$	Matriz de Rigidez Local
$[k_g]$	Matriz de Rigidez Geométrica
L	Comprimento do elemento
M	Momento
N	Força Normal
n	Número de Nós da Estrutura
σ	Tensão
T	Momento Torsor
θ	Rotação
u	Deslocamento horizontal
ν	Poisson

V	Cisalhamento
v	Deslocamento vertical
W	Trabalho
x, y, z	Eixos Cartesianos

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Objetivos Gerais	16
1.2	Objetivos Específicos	16
1.3	Organização da Monografia	17
2	CONCEITOS INICIAIS	18
2.1	Sistema Estrutural	18
2.2	Pórticos Planos	20
2.3	Análise Estrutural	21
2.3.1	Modelagem Estrutural	22
2.3.2	Análise de Esforços	24
2.3.3	Condições Para Análise	25
2.3.3.1	Condições de Equilíbrio	25
2.3.3.2	Condições de Compatibilidade	25
2.3.3.3	Leis Constitutivas	25
3	EMBASAMENTO TEÓRICO	26
3.1	Comportamento Elástico dos Materiais	26
3.2	Princípio da Superposição dos Efeitos	28
3.3	Energia de Deformação e Suas Implicações	29
3.4	Princípio dos Trabalhos Virtuais - PTV	31
3.5	Análise Matricial	32
3.6	Método da Rigidez Direta	33
3.6.1	Graus de Liberdade	35
3.6.2	Matriz de Rigidez	35
3.6.3	Sistemas de Coordenadas	38
3.6.4	Matriz de Transformação	39
3.6.5	Matriz de Rigidez Global	40
3.6.6	Técnica de Zeros e Um	41
3.6.7	Obtenção dos Deslocamentos e Reações de Apoio	42
3.7	Análise Não Linear Geométrica	42
3.8	Método dos Dois Ciclos Iterativos	43
3.9	Esforços Nodais Equivalentes e Gráficos de EIS	45
4	METODOLOGIA E ASPECTOS COMPUTACIONAIS	48
4.1	O Programa	48

4.2	Definições Para o Projeto	48
4.3	Computação em Nuvem	49
4.4	<i>Frameworks</i>	49
4.5	Arquitetura da Aplicação	50
4.6	Aspectos Gráficos	51
4.7	Interface do Usuário	52
4.8	Hospedagem	56
4.9	Metodologia dos Testes	56
4.10	Programas Utilizados Para Análise em Paralelo	57
4.10.1	Ftool	57
4.10.2	AcadFrame	58
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	60
5.1	Comparação Com Pórtico Não Contraventado	60
5.2	Comparação Com o AcadFrame	66
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	73
6.1	Trabalhos Futuros	73
	REFERÊNCIAS	75

1 INTRODUÇÃO

A análise estrutural é uma das principais atividades realizadas no projeto de estruturas civis e mecânicas. O objetivo da análise estrutural é determinar as forças e os esforços que atuam na estrutura, bem como sua resposta à carga aplicada. Com a evolução da tecnologia, o uso de ferramentas computacionais tem sido cada vez mais comum nesta área do conhecimento, permitindo que projetistas e engenheiros projetem estruturas mais eficientes e seguras.

Neste contexto, esta monografia tem como objetivo o desenvolvimento de um *software web* que permita ao usuário realizar a análise estrutural de pórticos planos, considerando a não linearidade da geometria da estrutura.

Na análise estrutural é de extrema importância que tanto o engenheiro quanto o aluno de graduação ou pós-graduação em estruturas tenha a capacidade de visualizar o comportamento da estrutura em estudo sob carregamentos. Apesar de existirem *softwares* voltados à análise, como o SAP2000, Robot ou até mesmo gratuitos, como o Ftool, ainda há a necessidade por parte dos profissionais e estudantes em utilizar um software que possibilite a análise estrutural não linear de pórticos de forma rápida e prática.

Assim, o desenvolvimento deste *software web* é uma contribuição para a análise estrutural, pois permite que os engenheiros projetem estruturas mais eficientes e seguras, levando em consideração o comportamento não linear geométrico, permitindo a obtenção de informações importantes sobre a capacidade de carga da estrutura de forma prática e rápida.

Indo além, este trabalho abre diversas possibilidades, visto que se pode acrescentar posteriormente, por exemplo, um módulo de dimensionamento para estruturas de aço, conforme NBR8800:2008.

1.1 Objetivos Gerais

Desenvolver um *software*, baseado em *web* (*cloud computing*), para a análise estrutural não linear geométrica, utilizando o Método da Rigidez Direta.

1.2 Objetivos Específicos

- Desenvolver uma interface com o usuário (*frontend*) utilizando o *ReactJS* e linguagem de programação o Javascript.
- Proporcionar a visualização gráfica dos elementos de barra dos pórticos.
- Oportunizar a difusão do *software* para uso dos estudantes de graduação e pós-graduação, bem como os professores das disciplinas da área de estrutura, em especial as disciplinas

que possuam análise de segunda ordem em suas ementas.

1.3 Organização da Monografia

Este texto, de maneira a facilitar sua compreensão, foi dividido e organizado da seguinte maneira:

O capítulo 2 exhibe os conceitos iniciais, onde ideias e etapas do processo de análise serão descritos, como introdução a carga teórica posterior.

O capítulo 3 aborda todo o arcabouço teórico aplicado ao desenvolvimento da aplicação, como elementos de mecânica dos sólidos e descrição dos métodos.

Em seguida, passa-se ao desenvolvimento da aplicação e descrição da maneira em que foram realizados os testes, no capítulo 4.

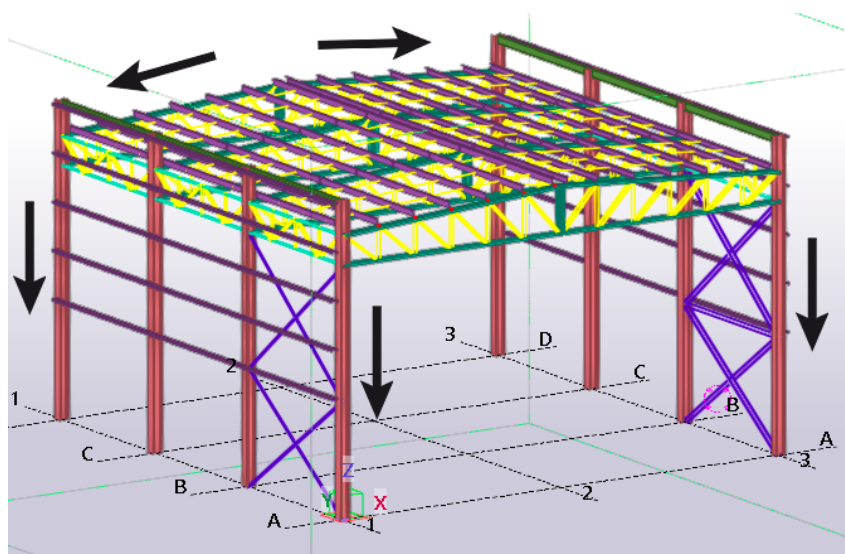
Por fim, o capítulo 5 expõe os resultados das comparações com exemplos da literatura, bem como com *softwares* já existentes, exibindo a confiabilidade do *software* aqui desenvolvido.

2 CONCEITOS INICIAIS

2.1 Sistema Estrutural

Um dos diversos projetos complementares que compõe uma edificação é o estrutural. Pode-se afirmar, sem qualquer receio, sua extrema importância, pois garante a rigidez e segurança, além de fornecer a base para todo o empreendimento. Constitui-se de peças interconectadas, denominadas elementos estruturais, que transferem as cargas da edificação, tendo o solo como destino final. Uma boa analogia é olhar os diversos elementos como uma avenida, que leva as cargas ao solo, regidos pela estática e mecânica dos sólidos. Usualmente os elementos estruturais podem ser classificados como vigas, pilares, tirantes, placas e cascas. (SANTOS, 2017). Todos os elementos têm sua capacidade de carga que depende, basicamente, de sua geometria, material e do tipo de carga aplicada. A tabela 1 traz uma breve descrição dos elementos estruturais mais usuais, enquanto a figura 2 apresenta um exemplo no mundo real de alguns desses elementos.

Figura 1 – Caminho das cargas, mostrando a transferência de esforços para o solo¹.



Fonte: Autor

Por conta do presente texto tratar apenas de pórticos planos, cujo conceito estará descrito na sessão 2.2, trabalhar-se-á apenas com elementos lineares: vigas, tirantes e Pilares.

¹ Galpão modelado no *software* Tekla pelo autor.

Tabela 1 – Elementos estruturais

Elemento	Descrição
Vigas	São elementos estruturais lineares que são utilizados para suportar esforços transversais em uma estrutura. Elas são comumente encontradas em pontes, edifícios e outras estruturas. As vigas podem ser retas ou curvas e podem ter seções transversais de diferentes formas, como retangulares, quadradas ou circulares.
Pilares	Constituem-se de elementos estruturais verticais que são utilizados para suportar cargas axiais e transversais em uma estrutura. Eles são geralmente encontrados em edifícios, pontes e outras estruturas. Os pilares podem ter seções transversais de diferentes formas, como retangulares, quadradas ou circulares.
Tirantes	Elementos estruturais lineares que são utilizados para suportar cargas axiais de tração em uma estrutura. Eles são geralmente feitos de aço ou outro material resistente à tração.
Placas	São elementos estruturais bidimensionais no espaço que são utilizados para suportar cargas transversais em uma estrutura. As placas também podem ter seções transversais de diferentes formas, como retangulares, quadradas ou circulares.
Chapas	Idem placas, porém suportam esforços no mesmo plano.
Cascas	Elementos estruturais tridimensionais que são utilizados para suportar cargas transversais em uma estrutura. Elas são comumente encontradas em estruturas como reservatórios, tanques e outros recipientes.

Figura 2 – Elementos estruturais em uma estação de metrô².

Fonte: Acervo fotográfico do autor

O projeto estrutural, responsável pela definição do sistema estrutural, bem como seus elementos, é composto, de acordo com Martha (2010), por inúmeros procedimentos. Pode-se agrupá-los em quatro grandes etapas: concepção, análise e dimensionamento (SANTOS, 2017):

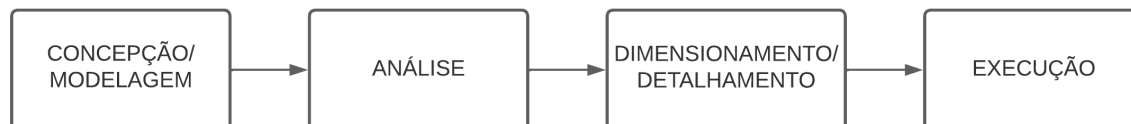
Concepção: Idealização da estrutura, por intermédio do conhecimento, experiência e criatividade do projetista, para garantir a máxima eficiência, segurança e economia ³.

Análise: momento em que o projetista relaciona tensões e deformações para verificar o comportamento da estrutura;

Dimensionamento: etapa que consiste em atribuir dimensões e arranjos que permitam aos elementos estruturais resistirem aos esforços e deformações determinados na etapa de análise. Neste momento é realizado o detalhamento das peças, que consiste na geração das pranchas com os desenhos de projeto e os memoriais de cálculo;

Execução: Quando as pranchas são, por fim, enviadas para a obra e são executadas de forma minuciosa, conforme o projeto.

Figura 3 – Fluxo básico de um projeto estrutural.



Fonte: Autor

Este trabalho terá foco na etapa de análise estrutural, que carrega extrema importância pois permite determinar as cargas e os esforços internos que atuam sobre a estrutura. Essa análise é essencial para garantir a segurança e a eficiência das estruturas, evitando falhas estruturais e acidentes.

2.2 Pórticos Planos

O modelo de análise adotado para este trabalho será o de pórtico plano, o qual está inserido dentro da categoria das estruturas reticuladas. De acordo com Freitas e Tiago (2022),

² Estação Keleti pályaudvar, Linha M4 do metrô de Budapeste, Hungria.

³ Na opinião do autor desta monografia, a concepção deveria estar contida dentro do processo de análise, visto que, atualmente, dada a extrema facilidade de cálculo e obtenção dos gráficos de esforços internos, torna-se um processo iterativo, onde os resultados da análise podem alterar, segundo entendimento do projetista, a concepção no mesmo instante, buscando a otimização da estrutura.

estruturas reticuladas são aquelas bi ou tridimensionais compostas por elementos de barra, que recebem os esforços, apoios, que podem ser entendidos como modelos idealizados de fundações ou suporte, e nós, que unem os elementos de barra entre si. Ainda é possível haver elementos que permitam deslocamentos relativos entre elementos de barra, como rótulas. A figura 4 traz um exemplo de um pórtico plano.

Elementos de barra ou prismático são elementos delgados que representam vigas, pilares ou elementos de contraventamento e são referenciados as coordenadas do sistema utilizado, admitindo-se que se possuam eixos retos⁴.

Já os nós podem, ou não, representar um elemento físico da estrutura, sendo sua função a de ligação virtual entre os elementos de barras, separando cada seção, visto a linearidade axial dessas últimas.

Existem diversos tipos de pórticos planos, que diferem em sua geometria e na forma como as cargas são aplicadas. Dois dos tipos mais comuns são:

Pórticos reticulados: São compostos por barras retas que se conectam em nós.

Pórticos treliçados: São compostos por barras retas que se conectam em nós, mas que formam estruturas triangulares. A figura 5 traz um exemplo deste tipo de pórtico.

Na análise de pórticos planos, admite-se, para análise de primeira ordem, o caráter elástico-linear dos materiais, ou seja, que as deformações são proporcionais às cargas aplicadas. Além disso, no caso da análise de pórticos treliçados, as barras podem ser consideradas como estruturas unidimensionais, significando que as deformações ocorrem apenas ao longo de seu eixo longitudinal.

A análise do pórtico, portanto, determina as reações nos apoios e os esforços internos nas barras. Esses esforços podem ser calculados por meio de equações de equilíbrio e equações de compatibilidade de deformações.

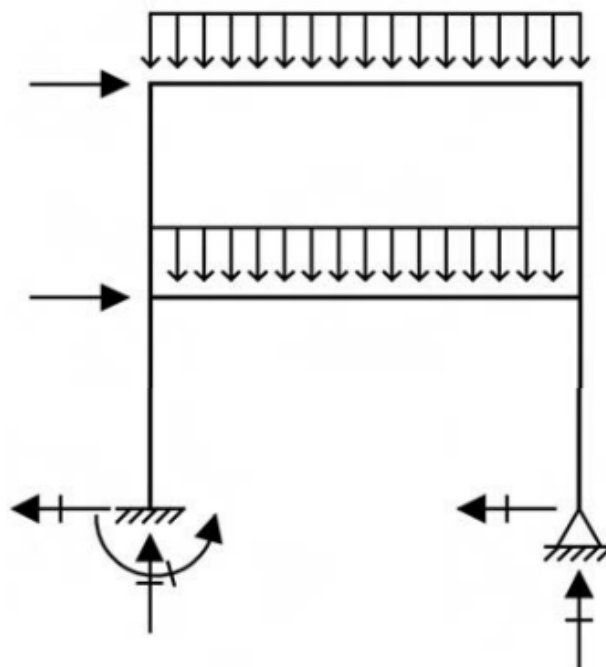
2.3 Análise Estrutural

Como qualquer estudo, é preciso sistematizar o processo de análise. Assim, divide-se o processo em subetapas, que serão apresentadas a seguir.

A análise estrutural se preocupa com o comportamento da estrutura, buscando conhecer as tensões (esforços internos e externos), deslocamentos e deformações atuantes. Sua análise reúne elementos da mecânica dos sólidos, da estática e da dinâmica. A estática busca compreender

⁴ Curvas podem ser aproximadas por diversos seguimentos de barra em sequência.

Figura 4 – Exemplo de pórtico plano com carregamentos distribuídos, pontuais e suas reações de apoio.



Fonte: Martha (2010)

as forças externas associadas ao elemento estrutural, expondo que para garantir que um elemento possa ser considerado em equilíbrio estático, sua resultante⁵ de forças externas aplicadas em um modelo simples de barras infinitesimais (com espessuras tendendo a zero), incluindo as reações dos apoios, deve ser nula (BEER, 2011).

"A análise estrutural é a fase do projeto estrutural em que é feita a idealização do comportamento da estrutura. Esse comportamento pode ser expresso por diversos parâmetros, como pelos campos de tensões, deformações e deslocamentos na estrutura. De maneira geral, a análise estrutural tem como objetivo a determinação de esforços internos e externos (cargas e reações de apoio), e das tensões correspondentes, bem como a determinação dos deslocamentos e as correspondentes deformações da estrutura que está sendo projetada." (MARTHA, 2010, p. 1)

2.3.1 Modelagem Estrutural

O primeiro passo na análise estrutural é a definição das cargas, que são as forças atuantes, podendo ser o peso próprio, carga de utilização, de vento, dentre outras. Estas são categorizadas

⁵ Ver sessão 2.3.3.1.

como **forças externas**. As cargas podem ser classificadas em estáticas e dinâmicas ⁶. As cargas estáticas são aquelas que atuam sobre a estrutura sem alteração com o tempo. As cargas dinâmicas são aquelas que variam com o tempo, como as cargas de tráfego em pontes e as cargas de terremoto. A definição correta das cargas é fundamental para a análise estrutural, pois afeta diretamente os esforços internos que atuam sobre a estrutura.

Após a definição das cargas, é necessário modelar a estrutura, isto é, definir a geometria e propriedades físico-geométricas dos elementos, para determinar os esforços internos. A modelagem estrutural pode ser feita de diversas formas: desde modelos simples de viga e pilar até modelos complexos tridimensionais constituídos de grelhas.

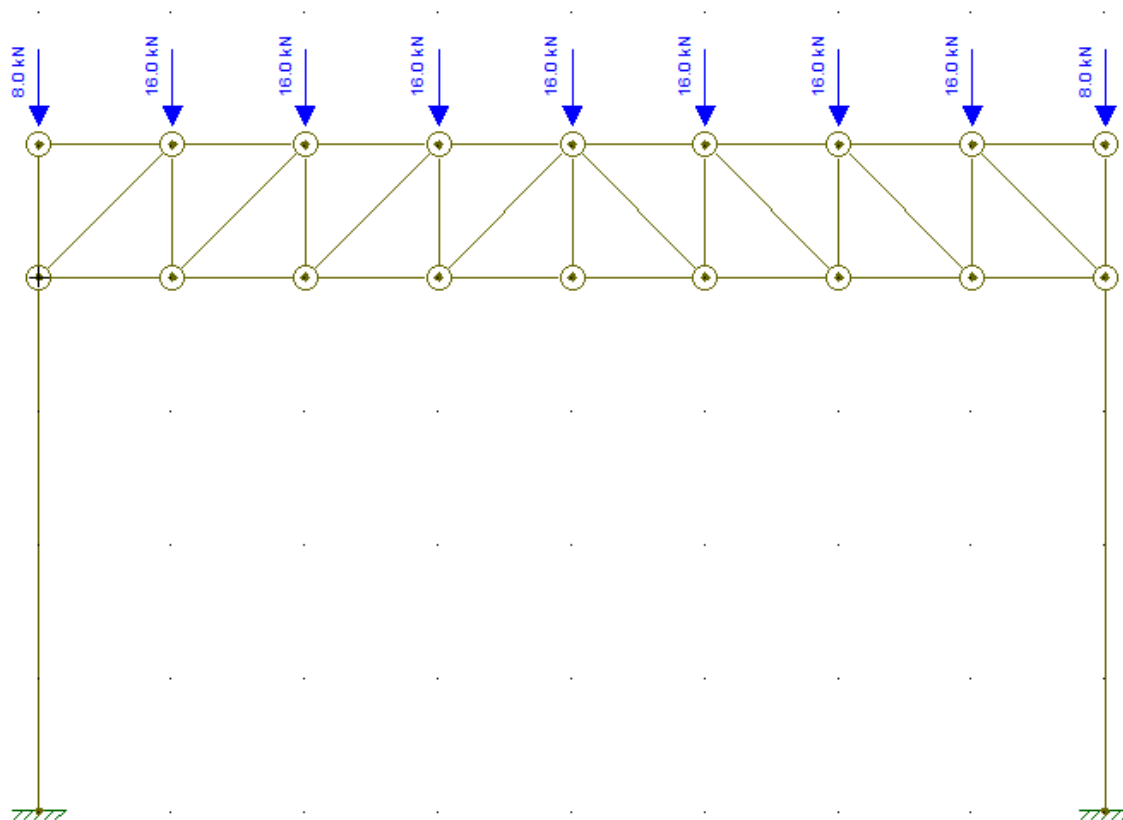
Os modelos de vigas e pilar são os mais simples e são utilizados para análise de estruturas lineares, como vigas e pórticos. Nesse tipo de modelo, a estrutura é representada por uma série de linhas retas que se conectam em nós em um plano. As forças e os momentos são calculados em cada nó para determinar os esforços internos.

Os modelos de grelha são mais complexos e são utilizados para análise de estruturas espaciais. Nesse tipo de modelo, a estrutura pode ser discretizada em elementos finitos que são conectados em vértices. As propriedades dos elementos são calculadas com base nas características do material e da geometria.

O objetivo fim, portanto, é a criação de uma hipótese, ou modelo, que seja a mais representativa possível da estrutura real, mas que possa ser trabalhada matematicamente.

⁶ Cargas dinâmicas não serão abordadas nesta monografia

Figura 5 – Modelagem de um pórtico com uma treliça, seus carregamentos e condições de vinculação, realizado no *software* FTool.



Fonte: Autor

2.3.2 Análise de Esforços

A análise de esforços é a etapa final da análise estrutural. Nessa etapa, os esforços internos são determinados com base nas cargas e na modelagem estrutural, usando para isso a mecânica dos sólidos.

De acordo com Philpot (2016), a mecânica dos sólidos busca entender as forças internas atuantes. Pelo fato de, no mundo real, não existirem peças estruturais com espessuras infinitesimais (barra idealizada) é necessário compreender como essas forças externas se comportam no interior do elemento estrutural. Assim, um modelo do comportamento do elemento precisa ser revisto, já que a carga não está mais aplicada em um ponto, mas em um elemento composto por inúmeras partículas, cada qual se comportando de uma maneira particular em resposta à carga. Por ser impossível quantificar o comportamento de um número de partículas virtualmente infinitos, a resultante do comportamento desses inúmeros elementos se torna o objeto de estudo, sendo os Esforços Internos Solicitantes (EIS) os esforços de tração e compressão que atuam na estrutura e que podem surgir oriundos de ações diretas: esforços de flexão, forças cisalhantes e os esforços de torção. Categoriza-se, por fim, os esforços internos como: Normal N , Momento

Fletor M , Cortante V e tissor T (MARTHA, 2010). Estes últimos são caracterizados como **forças internas**.

2.3.3 Condições Para Análise

Para que a análise possa ser realizada é necessário adotar hipóteses que respeitem algumas condições. Martha (2010) diz que as metodologias de cálculo da análise são procedimentos matemáticos que precisam obedecer condições de equilíbrio e condições de compatibilidade.

2.3.3.1 Condições de Equilíbrio

São as equações responsáveis por garantir o equilíbrio estrutural do ponto de vista estático. Em outras palavras, é necessário que as seguintes condições, para o estado plano, sejam satisfeitas:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum M = 0 \qquad (2.1)$$

Na qual F_x , F_y e M^7 são, respectivamente, Forças atuantes paralelas ao eixo X, Forças atuantes paralelas ao eixo Y e em torno do eixo Z. Tal garantia, apesar de imprescindível, não garante sozinha solução ao sistema.

2.3.3.2 Condições de Compatibilidade

São as condições que tratam dos campos de deslocamentos. Ou seja: são as equações que descrevem os deslocamentos dos nós produzidos pelas deformações, bem como o impacto provocado pelos apoios e restrições nodais nesses deslocamentos. Relacionam as leis constitutivas com as condições de equilíbrio.

2.3.3.3 Leis Constitutivas

A partir do comportamento elástico dos materiais, conforme será explicitado na sessão 3.1, relacionam-se as tensões com as deformações. Dessa forma, as propriedades do material definem o comportamento do elemento estrutural em sua resposta a ações externas.

⁷ O vetor momento M está apontado na direção z . Entretanto, como no caso plano só existem momentos paralelos a essa direção, pode-se suprimir o subíndice.

3 EMBASAMENTO TEÓRICO

3.1 Comportamento Elástico dos Materiais

A relação entre tensão e deformação é um conceito fundamental na mecânica dos sólidos e é uma medida da capacidade de um material para resistir as forças externas e se deformar sob carga. De acordo com Philpot (2016), os efeitos oriundos dessas cargas são melhor compreendidos ao se analisar sob a forma de tensão σ , que consiste nessas mesmas forças aplicadas sob uma superfície e é definida pela equação (3.1). Já a deformação ϵ é a medida da mudança de forma de um material sob cargas.

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (3.1)$$

Torna-se interessante trabalhar com o conceito de tensão pois permite que se faça uma análise do comportamento interno do material ao se observar um corte transversal do elemento estudado para análise de suas forças internas. Ao introduzir o conceito de tensão axial, por exemplo, pode-se perceber que uma força aplicada a um elemento de barra de modo a traciona-la provoca seu alongamento, tendo o efeito contrário caso o elemento seja comprimido (PHILPOT, 2016). Ou seja: existe uma relação entre tensão e deformação.

Essa relação advém do comportamento elástico dos materiais. Esta ideia tem sua semente na lei de Hooke. Essa lei física afirma que uma mola, com uma propriedade chamada de constante elástica K , ao sofrer a ação de uma força F se deforma com deslocamento x como expressa a equação (3.2).

$$F = Kx \quad (3.2)$$

Assim, por analogia do comportamento elástico do material com uma mola, pode-se relacionar a tensão σ com a deformação ϵ de forma proporcional a um fator elástico, chamado de Módulo de Young ou Módulo de elasticidade longitudinal E , que é uma propriedade intrínseca de cada material, através de (3.3) (PHILPOT, 2016).

$$\sigma = E\epsilon \quad (3.3)$$

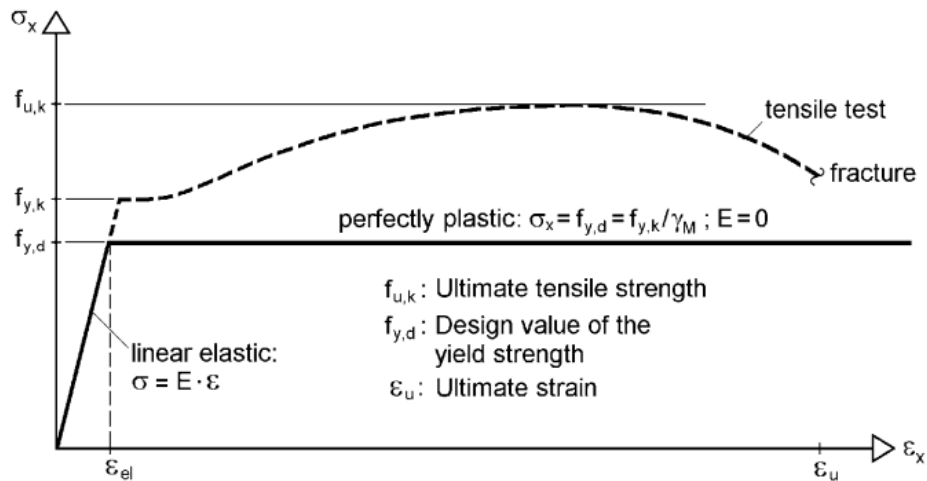
Essa relação origina o gráfico de **tensão x deformação**, exemplificado na figura 6, cujo coeficiente angular da curva aferido na origem é justamente o módulo de Young. Este gráfico representa a deformação¹ em função da tensão para um determinado material. É possível ver, na

¹ Usualmente medida em porcentagem.

figura supracitada, a reta do comportamento elástico saindo da origem. É possível perceber que o gráfico se transforma numa curva (saindo da linearidade) ao entrar na fase plástica. A análise elasto-plástica ou plástica não é abordada nesta monografia.

$$E = \frac{d\sigma}{d\epsilon} \quad (3.4)$$

Figura 6 – Gráfico típico de tensão x deformação do aço.



Fonte: Kindmann e Kraus (2011)

O diagrama tensão-deformação pode ser dividido em três² regiões principais: a região elástica, a região plástica e a ruptura. Este trabalho abordará apenas a região elástica, onde o material se deforma proporcionalmente à carga aplicada. Isso significa que, quando a carga é removida, o material volta à sua forma original. A relação entre a tensão e a deformação nesta região é linear e pode ser representada justamente pela equação (3.3).

Os Esforços Internos Solicitantes (EIS), também vistos como tensão, são relacionados com seus respectivos deslocamentos, a partir do estudo da mecânica dos sólidos, de acordo com as seguintes relações:

$$d\delta = \frac{N}{EA}dx \quad d\lambda = \frac{fsV}{GA}dx \quad d\theta = \frac{M}{EI}dx \quad d\phi = \frac{T}{GJ}dx \quad (3.5)$$

Nas quais:

$d\delta$ - Deslocamento devido as tensões normais;

² Materiais podem possuir, ainda, um patamar de escoamento, que é uma região da curva em que começa a ocorrer a plastificação do material.

$d\lambda$ - Deslocamento devido as tensões cisalhantes;

$d\theta$ - Deslocamento devido aos momentos fletores;

$d\phi$ - Deslocamento devido aos momentos torsores.

Os parâmetros de tensão e deformação, que são oriundos da etapa de análise, são imprescindíveis para o dimensionamento estrutural, visto que ao se analisar sua relação, evita-se chegar a tensão de ruptura. Na região de ruptura, o material se rompe devido a uma tensão crítica, que é aquela em que o material não consegue mais suportar a carga aplicada e falha.

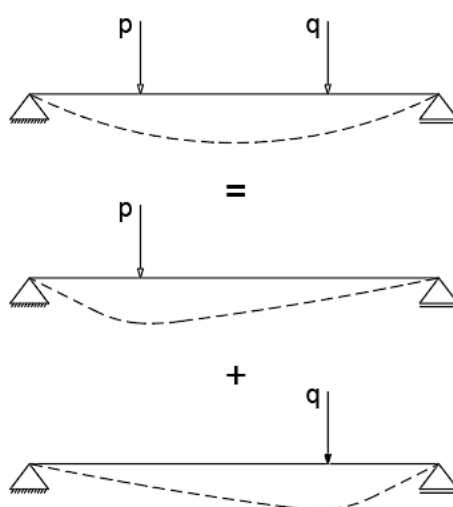
3.2 Princípio da Superposição dos Efeitos

A medida que se aumenta a complexidade dos modelos, torna-se difícil obter o resultado de diferentes cargas agindo em diferentes posições e direções. Para evitar tamanho trabalho, divide-se o modelo em quantos forem necessários, de modo que cada um apresente a resposta de uma carga isolada e suas somatórias - ou superposições - representam o comportamento das ações combinadas, ideia chamada de **Princípio da superposição dos efeitos**.

De forma breve, esse conceito implica que a resposta total de uma estrutura pode ser obtida somando-se as respostas das cargas ou deslocamentos individuais que atuam na estrutura, sendo baseado no fato de que a equação que governa o comportamento de uma estrutura é linear³. Isso significa que a resposta da estrutura a uma carga pode ser determinada a partir da resposta da estrutura a uma carga menor. Por exemplo, se uma estrutura é submetida a duas cargas diferentes, a resposta total da estrutura é a soma das respostas individuais das duas cargas. Estas afirmações podem ser melhor compreendidas observando a figura 7.

³ Em um material isotrópico, elástico-linear e dentro do regime de pequenas deformações.

Figura 7 – Exemplo de aplicação do princípio da superposição dos efeitos, considerando duas forças concentradas em uma viga isostática.



Fonte: Autor

Sua utilização permite que a resposta da estrutura seja determinada com grande precisão e eficiência. Além disso, o princípio da superposição é usado para determinar a resposta de uma estrutura sujeita a cargas variáveis no tempo, como terremotos ou ventos.

3.3 Energia de Deformação e Suas Implicações

Para a física, em mecânica clássica, se há deslocamento ocasionado por uma força, logo há trabalho sendo realizado. Como o conceito de energia é justamente o potencial para realizar trabalho, pode-se analisar e obter as deformações oriundas da aplicação de cargas em elementos estruturais utilizando o conceito de energia.

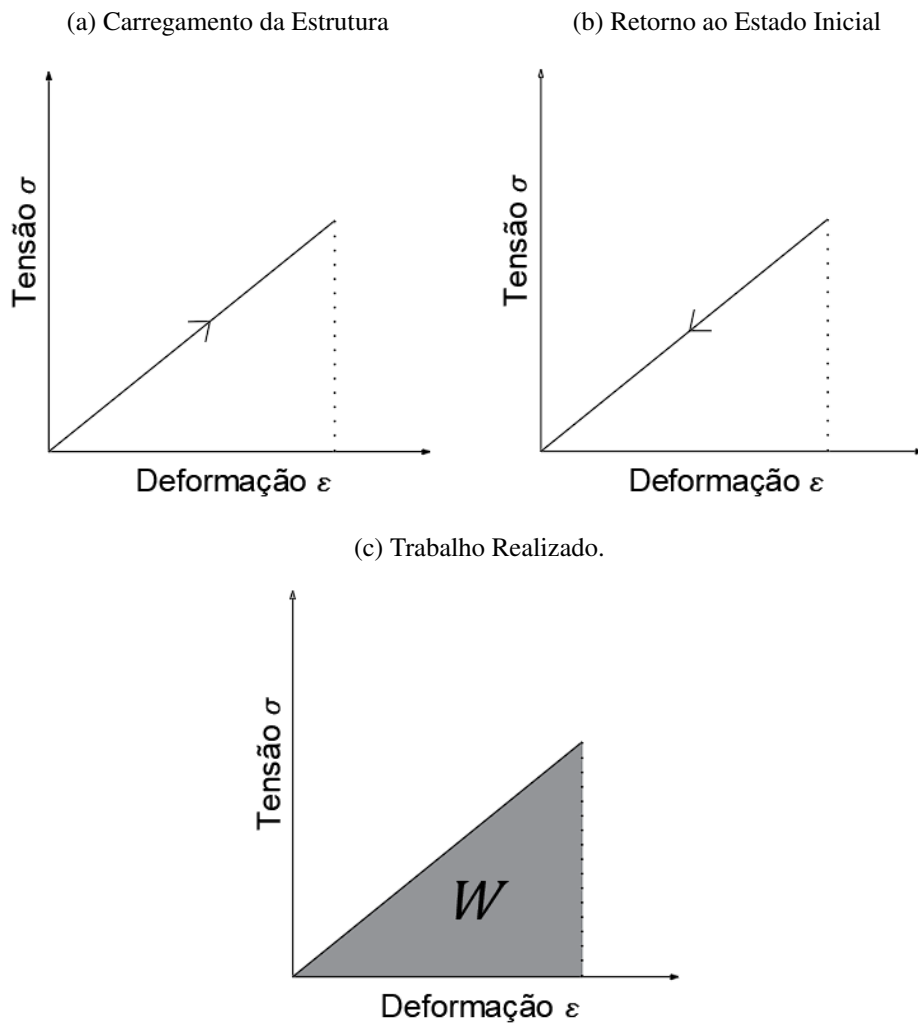
A figura 8a mostra, conforme discutido na seção 3.1, como o material se comporta ao se aplicar uma carga. É possível perceber que, dentro do regime elástico linear, ao se retirar a carga a estrutura volta ao seu estado inicial de deformação, conforme a figura 8b.

Logo, conforme Martha (2010) equaciona, pode-se expressar matematicamente a energia, oriunda da realização do trabalho atuante no sistema estrutural, por meio da seguinte expressão:

$$W = \int F d\Delta \quad (3.6)$$

Trabalhando dentro do regime elástico linear, como visto, entende-se que toda a energia mecânica aplicada ao elemento estrutural se conserva. Ou seja, toda energia mecânica aplicada

Figura 8 – Gráficos de deformação e trabalho realizado



Fonte: Autor

ao sistema se transforma em energia de deformação, reduzindo a expressão (3.6) a equação seguinte:

$$W_{\text{externo}} = W_{\text{interno}} \quad (3.7)$$

As equações 3.6 e 3.7 são melhor compreendidas ao observar o gráfico da figura 8c, em que a área sob a reta define o trabalho. Ora, se ao retirar a carga o elemento retorna ao estado inicial de deformação, logo não há dissipação de energia, acarretando que a energia é aproveitada integralmente.

Um expoente engenheiro, Alberto Castigliano⁴, fazendo o uso do conceito de energia de

⁴ Matemático e engenheiro italiano nascido em 1847, desenvolveu seu teorema em 1879.

deformação, desenvolveu o que ficou conhecido como "Teorema de Castigliano", que consiste em um conjunto de dois teoremas, onde o primeiro teorema, ou método do trabalho mínimo, foi um salto para a análise de estruturas estaticamente indeterminadas à época.

Martha (2010) explica que seu uso, pela necessidade de ser calcular cada força e/ou deslocamento atuante, torna-se dispendioso, sendo mais recomendado a aplicação de outros métodos para o mesmo fim. Um desses métodos é o Princípio dos trabalhos Virtuais.

3.4 Princípio dos Trabalhos Virtuais - PTV

O princípio dos trabalhos virtuais, ou PTV, se apoia nos conceitos de energia previamente descritos. McCormac (2007) sintetiza o PTV da seguinte maneira :

“Se um deslocamento for aplicado a um corpo deformável que esteja em equilíbrio sob a ação de uma carga ou várias cargas conhecidas, o trabalho externo realizado pela carga ou cargas existentes no corpo devido a esse novo deslocamento será igual ao trabalho interno realizado pelas tensões existentes no corpo que foram causadas pela carga ou cargas originais.”⁵ (MCCORMAC, 2007, p. 265)

Em suma, admite-se que um deslocamento real pode ser correspondente a uma força virtual (ou vice versa), o que imperiosamente acarreta, de acordo com a equação (3.6), que o trabalho na estrutura pode ser oriundo de uma força virtual $\bar{P}^6$ durante um deslocamento real (ou a partir de um carregamento real durante um deslocamento virtual) (WEAVER; GERE, 1990). A equação (3.8) mostram essa correspondência.

$$W = \frac{1}{2} \sum_i^n \bar{P}_i \delta_i \quad (3.8)$$

O conceito de ação virtual indica uma ação qualquer, que não existe na estrutura, ou seja: uma força ou deslocamento "imaginários". Geralmente, para efeitos de simplificação do cálculo, atribui-se uma ação unitária. Ou seja: $\bar{P} = 1$ e $\bar{\delta} = 1$.

Weaver e Gere (1990) explica que se a um corpo deformável, sujeito a deslocamentos reais provocados por forças reais, é aplicado forças virtuais, o trabalho virtual externo (produzido pelas forças virtuais externas quando ocorrem os deslocamentos reais) é igual ao trabalho virtual interno (produzido pelos esforços virtuais internos quando ocorrem as deformações reais).

⁵ Traduzido do original em inglês.

⁶ A barra acima da variável indica que se trata da parte virtual.

Recordando a equação (3.7), ao se tratar do trabalho interno, onde as ações são os EIS, faz-se a correspondência com seus respectivos deslocamentos e associando ações virtuais com deslocamentos reais, substituindo-os na equação (3.6) como segue:

$$W_{externo} = \int \bar{N}d\delta + \int \bar{V}d\lambda + \int \bar{M}d\theta + \int \bar{T}d\phi \quad (3.9)$$

Se o caro leitor estiver atento, poderá ter percebido que os deslocamentos ocasionados pelos EIS foram tratados na seção 3.1. É prático, portanto, trazer aquelas relações e as substituir na equação (3.9), fornecendo:

$$W_{externo} = \int \frac{\bar{N}N}{EA}dx + \int \frac{\bar{V}V}{GA}dx + \int \frac{\bar{M}M}{EI}dx + \int \frac{\bar{T}T}{GJ}dx \quad (3.10)$$

Volta-se a atenção ao primeiro membro da equação. Explorando o conceito do valor unitário, suscitado no início desta sessão, pode-se aplicar um carregamento externo unitário virtual P dado um deslocamento real Δ , acarretando que o primeiro membro da equação se reduz a:

$$W_{externo} = P\Delta = 1 \cdot \Delta = \Delta \quad (3.11)$$

Assim, substituindo 3.11 em 3.10, obtermos a equação clássica utilizada no PTV:

$$\Delta = \int \frac{\bar{N}N}{EA}dx + \int \frac{\bar{V}V}{GA}dx + \int \frac{\bar{M}M}{EI}dx + \int \frac{\bar{T}T}{GJ}dx \quad (3.12)$$

Em casos gerais, por representarem parcelas muito pequenas face o total, pode-se desprezar as parcelas relacionadas ao esforço normal e cortante. Entretanto, considera-se as mesmas em análise de treliças, tirantes e arcos. Além disso, por esta monografia tratar da análise no plano, não existe torção, podendo eliminar também esta parcela. Portanto, a equação 3.12 se reduz a:

$$\Delta = \frac{1}{EI} \int \bar{M}Mdx \quad (3.13)$$

Para simplificar ainda mais o processo, observa-se a existência de tabela, chamada de **tabela de Kurt Beyer**, que fornece soluções para a integral do produto dos momentos real e virtual para diferentes casos de carregamento.

3.5 Análise Matricial

Para Sennett (1994), dentre as diversas metodologias para a análise estrutural, a análise matricial se destacou e teve grande aceitação. Suas bases foram lançadas, como narra Kassimali

(2010), a partir dos trabalhos de James C. Maxwell, com seu Método das Deformações Consistentes e foram evoluindo desde então. Houve, a partir da popularização do computador, uma revolução na análise de estruturas, pois essas máquinas possibilitaram a solução de estruturas cada vez mais complexas graças ao seu poder de realizar diversos cálculos em segundos.

Para a aplicação computacional de análise de estruturas mais complexas, as equações lineares dos diversos métodos derivados desde então foram aplicados de forma matricial, originando a análise matricial de estruturas.

Isso acontece pois matrizes são, de maneira geral, uma forma simplificada de notação e padronização para equações lineares (ANTON; RORRES, 2012). Tal notação torna sua aplicação computacional mais fácil pela possibilidade de se trabalhar com *arrays*⁷ dentro do código e padronizar as operações matemáticas necessárias.

"Leitores que estão familiarizados com métodos clássicos de análise estrutural irão notar que ambos os métodos clássico e matricial são baseados nos mesmos princípios fundamentais - no entanto as relações fundamentais de equilíbrio, compatibilidade e rigidez são agora expressas na forma de equações matriciais, de forma que cálculos numéricos computacionais possam ser realizados de maneira eficiente."⁸(KASSIMALI, 2010, p. 3)

Assim, para este trabalho, adotar-se-á o **Método da Rigidez Direta**, uma aplicação matricial do método dos deslocamentos.

3.6 Método da Rigidez Direta

Como explicitado anteriormente, a deformação de um material mantém relação direta com a tensão aplicada proporcionalmente a uma constante elástica E . O método da rigidez direta faz o uso dessa estratégia ao calcular os esforços atuantes em cada barra do sistema estrutural, por meio da equação 3.14 e, por meio do Princípio da Superposição dos Efeitos, representar o comportamento da estrutura como um todo. É a aplicação matricial do método dos deslocamentos (KASSIMALI, 2010).

$$\{F\} = [k]\{d\} \quad (3.14)$$

A matriz $[k]$ contém os chamados *coeficientes de rigidez* k de cada elemento e possui ordem $3n$, sendo n a quantidade de nós. Estes são coeficientes de proporcionalidade para relacionar deslocamentos unitários com deslocamentos reais. Ou seja: é razoável entendê-los

⁷ Uma estrutura de dados que armazena e organiza uma coleção de elementos. Pode ser visto como um vetor ou como elemento de criação de matrizes de n dimensões.

⁸ Traduzido do original em inglês.

como sendo o efeito resultante de um deslocamento unitário que, ao se relacionar com o deslocamento real, leva à força externa aplicada⁹.

$$\beta_{i0} + \sum_{i=0}^n K_i D_i = 0 \quad (3.15)$$

A equação 3.15 descreve o método dos deslocamentos, reforçando a afirmação final da seção 3.5.

Cada deslocamento é calculado nos nós da estrutura e cada um deles possui, no caso plano, 3 graus de liberdade e 3 eixos de atuação de força, conforme ilustrado na figura 9. Ou seja: uma estrutura é composta por $3n$ ações, e uma igual quantidade de graus de liberdade. A matriz força $[F]$ e a matriz deslocamento $[u]$ são escritas como segue:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} f_x^i \\ f_y^i \\ m^i \\ f_x^j \\ f_y^j \\ m^j \end{Bmatrix} \quad \{d\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_f \\ v_f \\ \theta_f \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Figura 9 – Forças representadas no vetor de forças $[F]$.



Fonte: Autor

O subíndice na matriz $[u]$ e o superíndice na matriz $[F]$, ambos genéricos, denotam os nós de início i e fim da barra f , assumindo os índices correspondentes ao respectivo nó. Com relação ao vetor $[u]$ as variáveis u , v e θ são atribuídas, respectivamente, ao deslocamento horizontal, deslocamento vertical e rotação.

A matriz $[k]$ corresponde a *Matriz de Rigidez* da estrutura.

⁹ Essa ideia deriva do teorema da reciprocidade de Betti-Maxwell (KASSIMALI, 2010).

3.6.1 Graus de Liberdade

Os graus de liberdade são as possibilidades de deslocamento, provocados pelas deformações no elemento estrutural, dos nós. Como os deslocamentos estão ligados às ações pelas leis constitutivas, conforme visto anteriormente, é imprescindível suas corretas atribuições.

Essa observação se faz necessária pois existe a possibilidade (e até mesmo a necessidade, caso a estrutura seja hipostática) de restringir os graus de liberdade através de **apoios**. Os apoios são modelados conforme os apoios reais da estrutura. Beer, Johnston, Mazurek e Eisenberg (2011) cita 3 gêneros de apoio, restringindo apenas deslocamento vertical (1º gênero), restrição de deslocamento vertical e horizontal (2º gênero) e restrição total dos 3 graus de liberdade nodais (3º gênero). No entanto, é possível também restringir apenas horizontalmente ou apenas a rotação.

São os tipos de apoio e sua localização na estrutura que definem os deslocamentos prescritos. Se há, por exemplo, restrição de movimento vertical e horizontal em um nó n , os deslocamentos u_n e v_n da matriz $[d]$ serão nulos, enquanto θ_n , por estar livre, permanece como incógnita.

3.6.2 Matriz de Rigidez

A matriz de rigidez carrega a configuração geométrica e física global do sistema estrutural, em que cada elemento da matriz pode ser extraído da análise das deformações de cada elemento estrutural em relação aos esforços submetidos localmente, aos nós e aos graus de liberdade de cada nó.

Ao se tomar uma estrutura linear, conforme visto na seção 3.1, existe uma proporcionalidade entre os deslocamentos e as forças externas aplicadas. Pelo método das forças, esta proporcionalidade é garantida por um coeficiente de proporcionalidade δ , chamado de coeficiente de flexibilidade. Em outras palavras, δ corresponde ao deslocamento quando aplicado uma força unitária¹⁰. Mostra-se essa relação para o grau de liberdade 1 de uma barra através da equação 3.17 (KASSIMALI, 2010) (SORIANO, 2005).

$$d_1 = \sum_{i=1}^6 \delta_{1i} f_i \quad (3.17)$$

Somente nesta seção do texto se atribuirá δ e d a coeficiente de flexibilidade e deslocamento, respectivamente, para que essa dedução seja condizente aos termos usados nas literaturas disponíveis em relação ao método das forças.

¹⁰ O contrário do método dos deslocamentos, discutido na seção 3.6.

Ao aplicar a ideia anterior a todos os deslocamentos nodais livres da barra, obtém-se um sistema de equação linear que, matricialmente, escreve-se como:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} & \delta_{15} & \delta_{16} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} & \delta_{25} & \delta_{26} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & \delta_{34} & \delta_{35} & \delta_{36} \\ \delta_{41} & \delta_{42} & \delta_{43} & \delta_{44} & \delta_{45} & \delta_{46} \\ \delta_{51} & \delta_{52} & \delta_{53} & \delta_{54} & \delta_{55} & \delta_{56} \\ \delta_{61} & \delta_{62} & \delta_{63} & \delta_{64} & \delta_{65} & \delta_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

Ou, em forma compacta:

$$[\Delta]\{f\} = \{d\} \quad (3.19)$$

A obtenção dos coeficientes δ pode ser demonstrada tomando um dos graus de liberdade com um exemplo prático. Considere uma barra engastada, tendo 3 graus de liberdade e comprimento l , como a que se pode ver abaixo, junto de sua matriz de flexibilidade:

Figura 10 – Graus de liberdade em uma barra engastada.

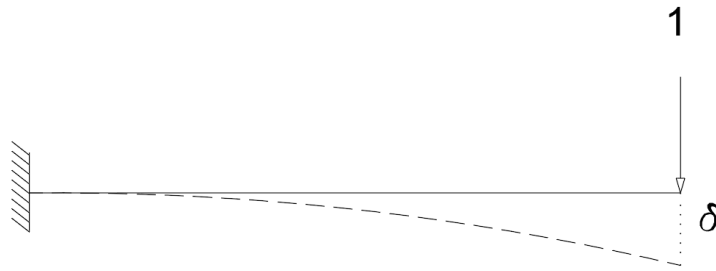


Fonte: Autor

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Ao analisar o comportamento do deslocamento d_3 quando uma força unitária nodal f_2 é aplicada, considerando que f_1 , f_2 e f_3 são, respectivamente, força horizontal, vertical e momento para esta configuração, vemos a seguinte deformação da barra:

Figura 11 – Barra exemplo deformada.



Fonte: Autor

Atribui-se um subíndice ij em que i considera o índice da força aplicada e j o índice do grau de liberdade deformado em estudo. Logo, para esse exemplo δ se torna δ_{22} . O Cálculo desse deslocamento pode ser obtido com o auxílio do PTV. Para a equação 3.13, calcula-se M e $\bar{M}$:

$$M(x) = -f_2 \cdot x \quad (3.21)$$

$$\bar{M}(x) = -1 \cdot x \quad (3.22)$$

Substituindo em 3.13:

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^l f_2 x^2 dx \quad (3.23)$$

$$\delta_{22} = \frac{f_2 l^3}{3EI} \quad (3.24)$$

Como se está lidando com uma ação unitária, então $f_2 = 1$, o que acarreta em:

$$\delta_{22} = \frac{l^3}{3EI} \quad (3.25)$$

A mesma lógica deve ser adotada para obter os demais coeficientes da matriz $[\Delta]$.

Pode-se perceber que a equação 3.19 possui semelhanças com a equação 3.14. Isso é fácil de observar ao verificar que o método das forças e o método dos deslocamentos possuem bases similares, sendo que o primeiro traz como solução as ações enquanto o último traz como solução os deslocamentos. Portanto, utilizando essa relação, pode-se reorganizar¹¹ a expressão 3.19 como:

¹¹ Só é verdadeiro quando as coordenadas são independentes. Caso haja dependências, não há inversa.

$$[\Delta^{-1}]\{d\} = \{f\} \quad (3.26)$$

Adotando-se a notação:

$$[K] = [\Delta]^{-1} \quad (3.27)$$

A matriz $[K]$ se denomina *Matriz de rigidez restringida*. Recebe o nome de restringida porque foi obtida a partir de deslocamentos restringidos. A matriz de rigidez $[k]$ pode ser obtida da anterior ao somar os elementos de mesmo índice de duas barras ligadas por um nó em comum.

Aplicando as ideias aqui desenvolvida, é possível obter a matriz de rigidez $[k]$ para qualquer caso. Abaixo encontra-se um exemplo da matriz de rigidez para um elemento de pórtico (que possui 2 nós e 6 graus de liberdade). Essa matriz de rigidez será utilizada no *software* aqui desenvolvido por se tratar justamente da generalização dos sistemas aporticadas para o caso plano.

$$[k] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Percebe-se, na matriz de rigidez $[k]$, que o comportamento físico e geométrico da estrutura é definido pela inercia da seção I , a constante elástica do material E , a área da seção transversal A e o comprimento do elemento L .

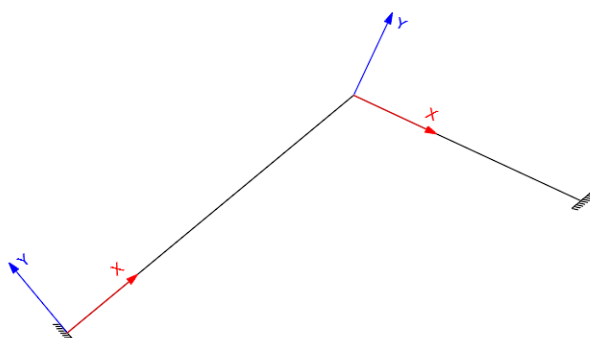
3.6.3 Sistemas de Coordenadas

Para um elemento isolado, é possível executar a modelagem utilizando um plano cartesiano independente para cada elemento estrutural, chamado **sistema de coordenadas local**. Isto se torna um problema quando existem diversos elementos na estrutura, pois é necessário que todos os elementos estruturais estejam obedecendo ao mesmo referencial, isto é, ao mesmo sistema de coordenadas, sob pena de não compatibilização geométrica.

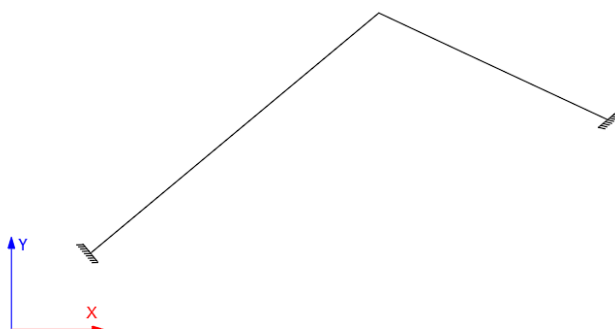
Para contornar este problema é necessário adotar um sistema de coordenadas que seja comum a todos os elementos. Pode-se, por exemplo, tomar um sistema de coordenadas de um elemento em particular e aplicar a todos os outros elementos. Uma maneira de realizar essa compatibilidade é a adoção de um **sistema de coordenadas global**, que é representativo do plano onde a estrutura está inserida.

Figura 12 – Sistemas de coordenadas.

(a) Sistema de coordenadas local.



(b) Sistema de coordenadas global.



Fonte: Autor

A transformação entre os dois sistemas de coordenadas pode ser realizada utilizando recursos da álgebra linear, como as transformações lineares e sua matriz de transformação.

3.6.4 Matriz de Transformação

Para realizar a conversão entre os sistemas de coordenadas é preciso que a matriz aponte na direção vetorial desejada. Para tal, pode-se empregar uma matriz unitária de rotação (ANTON;

RORRES, 2012). Recordando as matrizes de transformação lineares, a matriz de rotação é descrita como:

$$[\beta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

No qual θ representa a angulação do elemento em relação ao sistema global.

A transformação do sistema de coordenadas, por fim, fica a cargo da expressão seguinte, sendo $[X_l]$ a matriz de interesse nas coordenadas locais:

$$[X_g] = [\beta]^T [X_l] [\beta] \quad (3.30)$$

3.6.5 Matriz de Rigidez Global

A matriz de rigidez de cada elemento reflete o comportamento do elemento, mas não da estrutura como um todo. Para encontrarmos a matriz que representa comportamento total da estrutura, organizamos as matrizes de rigidez de cada elemento na chamada matriz de rigidez global $[K]$.

Caso a estrutura possua n nós a matriz global $[K]$ será de ordem $3n$ e sua organização é realizada da seguinte maneira: observa-se os nós associados ao elemento em questão e se enumera seus graus de liberdade. Por fim, colocam-se cada coeficiente de rigidez na posição ij ao seu índice correspondente na matriz global, ou seja, K_{ij}

De forma ilustrativa, observe a seguinte matriz de rigidez de uma barra m qualquer, que esta inserida num sistema com 3 nós:

$$[k_m] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & k_{1,5} & k_{1,6} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} & k_{2,5} & k_{2,6} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6} \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} & k_{4,5} & k_{4,6} \\ k_{5,1} & k_{5,2} & k_{5,3} & k_{5,4} & k_{5,5} & k_{5,6} \\ k_{6,1} & k_{6,2} & k_{6,3} & k_{6,4} & k_{6,5} & k_{6,6} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \end{matrix} \quad (3.31)$$

Esta barra esta associada aos nós 1 e 3, dentro os respectivos deslocamentos indicados nos índices acima e ao lado da matriz. Assim, ao atribuir os elementos na matriz global da estrutural $[K]$, os elementos da matriz $[k_m]$ ocuparão suas localizações devidas. A matriz $[K]$ com os elementos da matriz $[k_m]$ é mostrada a seguir:

$$[K] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & . & . & . & k_{1,4} & k_{1,5} & k_{1,6} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & . & . & . & k_{2,4} & k_{2,5} & k_{2,6} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & . & . & . & k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & . & . & . & k_{4,4} & k_{4,5} & k_{4,6} \\ k_{5,1} & k_{5,2} & k_{5,3} & . & . & . & k_{5,4} & k_{5,5} & k_{5,6} \\ k_{6,1} & k_{6,2} & k_{6,3} & . & . & . & k_{6,4} & k_{6,5} & k_{6,6} \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \end{matrix} \quad (3.32)$$

Ao realizar o cálculo da estrutura, de acordo com o descrito em 3.6 e 3.6.7 é a matriz $[K]$ que será utilizada.

3.6.6 Técnica de Zeros e Um

Soriano (2005) expõe que é necessário que se faça um reordenamento das equações de equilíbrio onde se manipula a renumeração dos deslocamentos e reordenação de todo o sistema de equação, sob pena da não solução da equação matricial. Isso se torna, no entanto, um trabalho hercúleo, visto a pouca praticidade de aplicação. Por isso, o autor supracitado sugere o uso da técnica de zeros e um.

Esta técnica consiste em zerar as linhas e colunas da matriz de rigidez global $[K]$ relacionadas a cada deslocamento prescrito e atribuindo 1 à diagonal principal. A equação 3.33 mostra um exemplo de aplicação a uma equação matricial de solução de uma estrutura com $3n$ graus de liberdade.

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \cdots & 0 & \cdots & K_{1,3n} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \cdots & 0 & \cdots & K_{2,3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{3n,1} & K_{3n,2} & \cdots & 0 & \cdots & K_{3n,3n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d_{3n-p} \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{3n-p} \\ \vdots \\ f_{3n} \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

Desta maneira, evita-se a singularidade da solução matricial, contornando o problema enunciado no início desta sessão.

3.6.7 Obtenção dos Deslocamentos e Reações de Apoio

A última etapa, por fim, é a aplicação da equação 3.14, de forma a obter o vetor deslocamento $\{d\}$, única incógnita restante. Assim, a equação 3.14 se transforma em:

$$\{d\} = [k]^{-1}\{F\} \quad (3.34)$$

Para as reações, Soriano (2005) mostra que podem ser obtidas, em cada nó, ao solucionar diretamente a equação 3.14, onde a incógnita passa a ser o vetor de reações $\{R\}$ já que os deslocamentos já são conhecidos, e subtrair qualquer força nodal atuante da equação. Esta afirmação se traduz na expressão seguinte:

$$\{R\} = [K]\{d\} - \{F\} \quad (3.35)$$

3.7 Análise Não Linear Geométrica

A análise estrutural, recordando o que foi posto anteriormente, busca compreender como as estruturas reagem a forças externas e essa análise deve ser feita da maneira mais rigorosa possível. Dessa forma, faz-se necessário compreender que há situações em que a estrutura não se comporta de acordo com a lei de Hooke, ou seja, obedecendo uma relação linear entre tensão (não linearidade física). Também é possível que deslocamentos laterais excessivos provoquem o aparecimento de momentos fletores não previstos inicialmente (Não linearidade geométrica). Ambas as situações, não linearidades físicas e/ou geométricas, ocorrem em edifícios altos, elementos com fissuração, inconsistências no material, dentre outras. A esse tipo de análise dar-se o nome de "análise não linear" e é de fundamental importância para o melhor entendimento do comportamento do sistema estrutural (PEREIRA, 2002). A análise não linear também é conhecida como análise de 2ª ordem.

Geralmente, diante de processos matemáticos complexos que os métodos rigorosos utilizam, é preferível utilizar métodos simplificados que, apesar de sua simplicidade comparada aos métodos rigorosos, a literatura mostra que possuem uma boa precisão.

Um desses métodos de análise não linear geométrica consiste, como Moura e Barbirato (2020) descrevem, em analisar as alterações que deslocamentos, ocasionados por forças externas, provocam nos EIS. Para tal, aplica-se uma carga horizontal fictícia, de modo a tirar a estrutura de sua condição não deslocada, e verificar como os carregamentos atuantes se comportam nesta nova configuração deslocada. O processo é, então, novamente realizado, desta vez com a figuração

deslocada anterior e novamente analisado. Ou seja: trata-se de um método iterativo, que busca a convergência ao equilíbrio da estrutura deslocada (SILVA; LAVALL, 2004).

A importância dessas metodologias simplificadas fica clara quando a NBR 8800 (2008) apresenta um modo simplificado similar, chamado de *Método da Amplificação dos Esforços Solicitantes (MAES)*¹² ou também chamado *Método B1, B2*, como forma de reduzir o esforço laboral do projetista.

Há métodos, entretanto, que levam em consideração a estrutura deformada de forma implícita em suas formulações, como é o caso do **Método dos Dois Ciclos Iterativos** (aqui chamado de M2CI).

Este trabalho levará em consideração apenas a não linearidade geométrica e, por conseguinte, graças a sua reduzida necessidade de esforço computacional, optou-se por adotar o M2CI.

É importante salientar que a os efeitos de segunda ordem têm um impacto significativo em estruturas de grande altura, ou seja, aumentam conforme se adicionam mais pavimentos. A variação dos deslocamentos, dessa forma, mostra uma relação linear com a altura da edificação (KONAPURE; DHANSHETTI, 2015).

3.8 Método dos Dois Ciclos Iterativos

De forma a diminuir a carga computacional para o cálculo do esforço de segunda ordem, pode-se adotar metodologias simplificadas para cálculo. No desenvolvimento deste trabalho, dada a necessidade de diminuir o esforço computacional motivado pelo processamento ser desenvolvido no lado do *client*¹³, optou-se por seguir esta abordagem e, portanto, utilizar-se-á o método sugerido por Chen e Lui (1991), chamado Método dos Dois Ciclos Iterativos.

O método consiste em realizar dois ciclos de cálculo. O primeiro ciclo utiliza a metodologia descrita em 3.6, em que a matriz $[k]$ - que no contexto deste método se atribui a nomenclatura $[k_L]$ para diferenciar da matriz de rigidez atualizada - não sofre qualquer tipo de modificação de segunda ordem, ou seja, é realizada apenas uma análise de primeira ordem convencional.

Após a realização do primeiro ciclo e, conseqüentemente, a obtenção dos EIS, inclui-se os efeitos da não linearidade geométrica através da adoção de uma *matriz de rigidez geométrica* $[k_g]$, vista em 3.36, que depende desses esforços internos obtidos na análise do primeiro ciclo (Em que P na equação supracitada é o esforço axial na barra).

¹² O MAES consiste em calcular coeficientes, chamados *B1* e *B2*, e aplica-los as condições indeformada e deformada da estrutura.

¹³ Processamento realizado na máquina do próprio usuário. Para mais informações, ver capítulo 4.

$$[k_g] = \frac{P}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Inicia-se em seguida o segundo ciclo de cálculo em que a matriz de rigidez $[k_l]$ é somada a matriz de rigidez geométrica $[k_g]$, resultando em uma matriz de rigidez atualizada, como mostra a equação (3.37). Por fim, efetua-se o cálculo convencional, como se fosse uma análise linear, utilizando a matriz de rigidez atualizada.

$$[k] = [k_L] + [k_g] \quad (3.37)$$

A tabela 2 apresenta um quadro resumo das etapas do método.

Tabela 2 – Etapas do Método dos Dois Ciclos Iterativos

Primeiro Ciclo	Passo 1	Realizar uma análise linear da estrutura
	Passo 2	Utilizando os esforços obtidos no passo 1, calcula-se a matriz de rigidez geométrica $[k_g]$
Segundo ciclo	Passo 3	Soma-se a matriz $[k_g]$ com a matriz $[k_L]$ gerando uma matriz de rigidez atualizada
	Passo 4	Faz-se uma nova análise linear, mas utilizando a matriz de rigidez atualizada

Dentro do próprio método é possível a utilização de uma matriz de rigidez geométrica $[k_g]$ ainda mais complexa, utilizando os outros esforços internos além do axial, como a sugerida por Rodrigues (2017). Porém, como observado nos resultados obtidos, conforme disposto no capítulo 5, o aparato matemático apresentado por Chen e Lui (1991) apresentou resultados satisfatórios.

3.9 Esforços Nodais Equivalentes e Gráficos de EIS

O leitor já pode ter percebido que as ações externas são modeladas apenas nos nós das estruturas, gerando questionamentos sobre como modelar as forças distribuídas ao longo a barra. As forças distribuídas quando existentes são, obviamente, devidamente modeladas na estrutura, bastando as transformar em forças nodais, ou as chamadas **forças nodais equivalentes**.

Para obtenção das forças nodais equivalentes basta computar as reações que a força distribuída provoca na barra. Como as barras são ligadas umas as outras por ligações rígidas, ou seja, seus modelos individuais são modelos bi engastados e, portanto, modelos hiperestáticos, não é possível utilizar apenas as equações de equilíbrio de um elemento isostático. Assim, uma abordagem possível é o cálculo das reações de um elemento hiperestático usando a seguinte equação diferencial, onde q representa o valor da carga.

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x) = -q \quad (3.38)$$

Recordando a mecânica dos sólidos (PHILPOT, 2016), chega-se as equações que definem a equação do esforço cortante, equação do momento fletor, equação da rotação e equação da linha elástica por integração direta:

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = V(x) = -qx + C_1 \quad (3.39)$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x) = -\frac{qx^2}{2} + C_1 x + C_2 \quad (3.40)$$

$$EI \frac{dy}{dx} = EI\theta(x) = -\frac{qx^3}{6} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3 \quad (3.41)$$

$$EI y = -\frac{qx^3}{24} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4 \quad (3.42)$$

É possível solucionar o sistema de equações formados pelas equações 3.39, 3.40, 3.41 e 3.42 aplicando as condições de contorno para uma barra bi engastada para obtenção dos coeficientes de integração C_1, C_2, C_3 e C_4 .

Figura 13 – Condições de contorno para uma barra bi engastada de comprimento l .



Fonte: Autor

O que retorna:

$$C_1 = \frac{ql}{2} \quad C_2 = \frac{-ql^2}{12} \quad C_3 = 0 \quad C_4 = 0 \quad (3.43)$$

Realizando a substituição desses coeficientes nas equações anteriores, as funções para $M(x)$ e $Q(x)$, que definem os gráficos de EIS e que serão exibidos no relatório de cálculo do programa, são obtidas.

$$Q(x) = \frac{ql}{2} - qx \quad (3.44)$$

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} + \frac{ql}{2}x - \frac{ql^2}{12} \quad (3.45)$$

Para as forças nodais equivalentes, é realizado o cálculo das reações na barra ao solucionar as equações de cortante e momento fletor para os pontos $x = 0$ e $x = l$. Para a barra exemplificada, as reações verticais são definidas por:

$$Q(0) = \frac{ql}{2} - q \cdot 0 = \frac{ql}{2} \quad (3.46)$$

$$Q(l) = \frac{ql}{2} - ql = -\frac{ql}{2} \quad (3.47)$$

Já para os momentos fletores:

$$M(0) = -\frac{q \cdot 0^2}{2} + \frac{ql}{2} \cdot 0 - \frac{ql^2}{12} = -\frac{ql^2}{12} \quad (3.48)$$

$$M(l) = -\frac{ql^2}{2} + \frac{ql}{2}l - \frac{ql^2}{12} = -\frac{ql^2}{12} \quad (3.49)$$

Atribuem-se os valores para as suas respectivas posições no vetor $[F]$ da equação 3.16. Uma melhor visualização da barra com suas respectivas forças nodais equivalentes pode ser vista na figura 14.

Figura 14 – Forças nodais equivalentes.



Fonte: Autor

Interessante observar que os coeficientes k , deduzidos na seção 3.6.2, também podem ser deduzidos a partir das equações diferenciais acima.

4 METODOLOGIA E ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Apesar de engenharia e computação serem ciências que caminham, em certos aspectos, de maneira conjunta, por esta monografia se tratar de tema da engenharia civil e não de computação *per se*, o autor preferiu incluir esta breve definição sobre aspectos e conceitos computacionais.

Também neste capítulo será exposta a metodologia de testes comparativos, onde serão abordados os programas de análise que servirão de base para validar os resultados.

4.1 O Programa

O programa fruto deste trabalho foi pensado para suprir a necessidade de análise de engenheiros e estudantes de engenharia para o cálculo rápido, fácil e funcional de estruturas reticuladas planas. Seu uso e interpretação dos resultados é de inteira responsabilidade do usuário, resguardando o desenvolvedor de qualquer implicação. A função do programa é de servir como ferramenta de consulta e não de cálculo final do modelo, devendo o aluno, pesquisador ou engenheiro revisar e validar os resultados.

O programa é chamado **2Frame**. 2 (*two* em inglês) remete à preposição *to* do inglês, significando "para", enquanto *Frame* vem do inglês, em tradução aplicada a este contexto, "pórtico". Ou seja: é um programa "para pórticos". Além disso, o numeral 2 indica a possibilidade de realização de análises em segunda ordem.

Trata-se, por fim, de um resumo de parte do conhecimento adquirido pelo autor na área de estruturas durante a graduação em engenharia civil.

4.2 Definições Para o Projeto

Dentre as diversas opções de programação, a Linguagem **JavaScript** se destacou, pois é a sintaxe *de facto* para desenvolvimento *web*. Precisa ser, no entanto, aliada a linguagem de marcação **HTML** para desenvolver páginas *web*. Desta forma, utilizar-se-á a versão ECMAScript 6 do JavaScript.

Pensando na facilidade do *workflow* do projeto e na qualidade do código alguns *frameworks*¹ foram adotados, sendo estes devidamente citados e com suas licenças de uso expostas em suas respectivas documentações. Cabe salientar, entretanto, que todos os *frameworks* são livres.

¹ Ver seção 4.4

4.3 Computação em Nuvem

Com o avanço dos dispositivos móveis e da estrutura de rede da *internet*, os desenvolvedores de aplicativo têm se voltado para o desenvolvimento *web*. Isso possibilita a existência de aplicativos em nuvem, ou seja, aplicativos que estão armazenados por um servidor e podem ser acessados via *browser* de qualquer dispositivo conectado a *internet*. Esse modelo de produção em desenvolvimento de sistemas é chamado de *cloud computing*.

É possível compreender este tipo de arquitetura de *software* ao fazer analogia de uma corda com dois nós em cada extremidade. Em um nó o usuário entra e recebe dados, visualiza a aplicação e, geralmente, possui um **UX** (*User Experience*) mais amigável, chamado de *frontend*, enquanto o outro nó, chamado de *backend* processa as requisições, realiza os cálculos, dentre outras tarefas, de forma a centralizar o processamento, aliviando a carga computacional no lado do cliente. Toda essa comunicação é feita por meio da "corda" que, nesta analogia, é a própria *internet*.

Essa abordagem permite que o usuário possa interagir com a aplicação em qualquer momento e em qualquer lugar, bastando apenas o acesso à *internet*. Tal conceito foi considerado para esse trabalho por ter aplicações práticas tanto para estudantes de engenharia na área estrutural, quanto para profissionais que desejem visualizar o comportamento de alguma estrutura.

4.4 Frameworks

Um *framework* pode ser entendido como uma biblioteca de códigos genéricos que possibilita ao programador executar funções apenas com a chamada de um desses códigos desta biblioteca. Neste contexto, a tabela 3 traz um resumo dos *frameworks* utilizados para o desenvolvimento desta aplicação.

Tabela 3 – *Frameworks* utilizados.

<i>Framework</i>	Descrição
ReactJS	Responsável pela manipulação da página de forma dinâmica, de forma a propiciar o conceito de <i>Single Page Application</i>
Math.JS	Realiza a manipulação matemática
Plotly.JS	Faz a plotagem dos gráficos
Grommet	Responsável pela estilização da interface e ícones

Aqui cabe uma breve explicação sobre o conceito de SPA (do inglês *Single Page Application*). Este conceito consiste garantir que a página *web* seja dinâmica, mas sem a necessidade de carregar novas páginas. Ou seja: toda a aplicação e suas diferentes telas acontecem em uma única página, como em uma aplicação *desktop* padrão, renderizando apenas os componentes em que há mudanças, ao invés de todos os componentes. Se bem implementado também reduz a

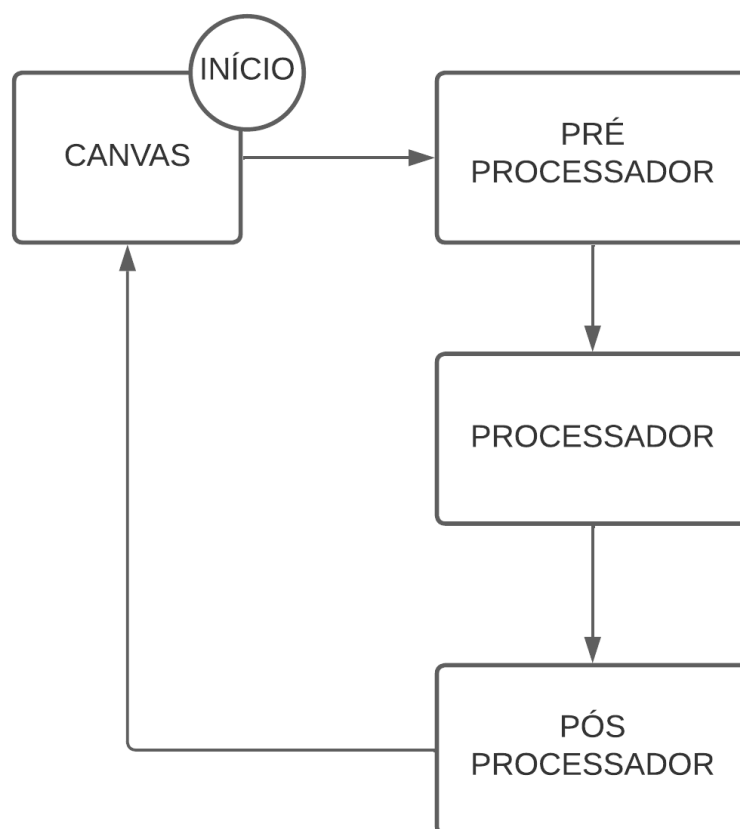
demanda de internet necessária para carregar a página/aplicação. Por essas vantagens, optou-se por utilizar este conceito neste projeto.

4.5 Arquitetura da Aplicação

A arquitetura de uma aplicação é a forma em que seus diferentes módulos, funções e dados são organizados, seguindo uma ordem lógica. Sua função principal é facilitar o desenvolvimento e manutenção do código.

A aplicação fruto deste trabalho está dividida, conforme a figura 15, em 4 grandes módulos: **Pós-processador**, **Processador**, **Pré-processador** e **Canvas**.

Figura 15 – Arquitetura da aplicação.



Fonte: Autor

O Módulo de Canvas armazena toda a lógica da interface gráfica do usuário. Por conta disso, ela faz o gerenciamento dos outros módulos realizando a troca de dados e supervisionando as requisições do usuário.

O Pré-processador faz o tratamento dos dados de entrada do usuário. É responsável por converter a entrada gráfica em *arrays* de coordenadas e forças, bem como a manipulação de dados geométricos e de materiais.

Para a solucionar o sistema matricial o módulo de processamento² recebe, gerenciado pelo Canvas, os dados tratados pelo Processador, e realiza os cálculos necessários.

Após a solução do modelo da estrutura, os resultados são geridos e organizados pelo Pós-processador, enviando os resultados tratados para a exibição pelo Canvas.

Todo o tratamento de dados é feito aproveitando o fato de o Javascript ser uma linguagem orientada a objetos. Dessa maneira, nós e barras são instanciados como objetos e sua manipulação se torna simplificada pelos diferentes módulos, sem a necessidade de funções e métodos complexos.

4.6 Aspectos Gráficos

Para possibilitar um maior controle do código sobre as funções de desenho, optou-se por não utilizar nenhum *framework* gráfico externo, preferindo a criação de uma *engine* 2D própria, batizada de ***Object Display on Canvas Engine*** ou **ODCE**. Essa decisão foi motivada devido ao maior controle que este autor teria em relação aos aspectos gráficos da aplicação e a não necessidade de depender de licenças externas.

Uma *engine* gráfica é um conjunto de funções que propiciam que gráficos, nesse caso 2D, sejam gerados, transformando as instruções lógicas em equações lineares para exibir as formas necessárias e requisitadas na tela.

A *engine* 2D aqui desenvolvida é rudimentar, utilizando os métodos de *canvas*³ do próprio Javascript. Por se tratar de algo bem simples e rudimentar, foi implementado apenas um espaço vetorial em metros e uma transformação de escala⁴.

Uma das características da ODCE é a possibilidade de escalonar o desenho e modificar o espaçamento entre as linhas de *grid*. Esse controle é possível com a barra de ferramentas inferior. Uma descrição da barra de ferramentas inferior é fornecida na tabela 4.

Figura 16 – Barra de ferramentas inferior.



Fonte: Autor

² Pensou-se em atribuir o nome de "Solver", mas Processador expressou melhor, em contexto com os outros módulos, o sentido deste módulo.

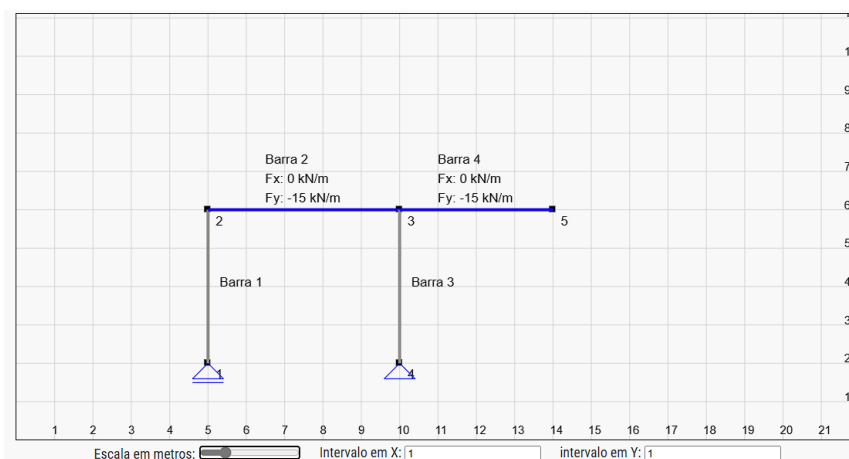
³ Motivo do nome do módulo que gerencia a interface do programa.

⁴ Controlados pela barra inferior da interface.

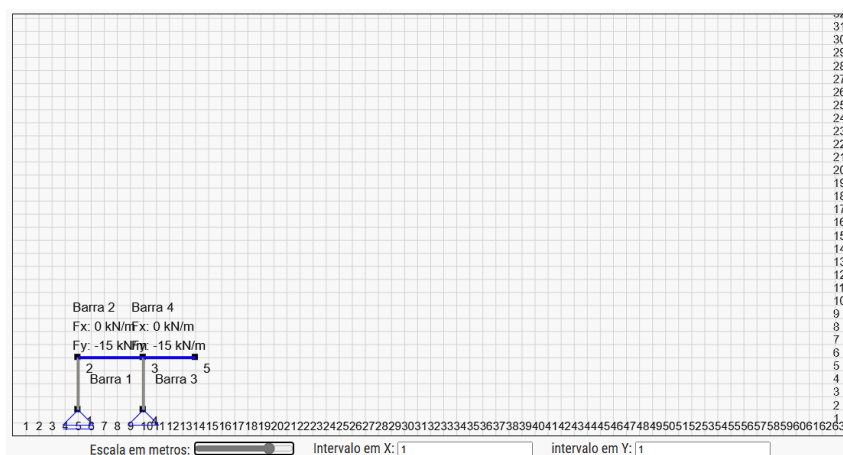
Ainda, graças a ODCE, o software permite a inserção de nós apenas na interseção das linhas de *grid*, garantido precisão ao usuário. A inserção de barras pelo usuário também é restringida pelo programa, permitindo o *click* no *grid* somente onde há nós.

Figura 17 – Modelo sendo escalonado

(a) Escala original



(b) Zoom out aplicado



Fonte: Autor

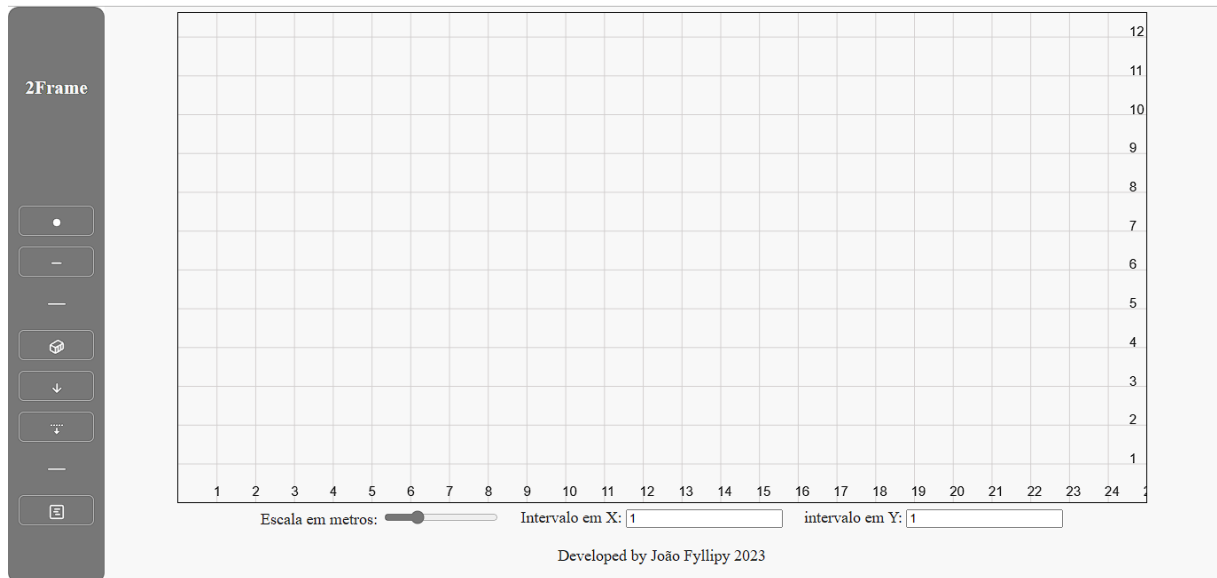
4.7 Interface do Usuário

A interface do usuário foi pensada levando em conta as seguintes diretrizes:

1. Experiência do usuário (UX);
2. Minimalismo;
3. Leveza.

Essas diretrizes foram seguidas sempre que possível, culminando com a interface padrão da aplicação (figura 18), a qual é dividida em 4 áreas principais: barra lateral, barra inferior, mesa de desenho e *pop-ups* (ou janelas).

Figura 18 – Interface geral da aplicação.



Fonte: Autor

A tabela 4 mostra a função de cada uma dessas áreas, aqui chamada de elementos de UI (*User Interface*).

Tabela 4 – Elementos da interface de usuário.

Elemento	Descrição
Barra lateral	Guarda as ferramentas para a inserção de dados, como a inserção de nós, barras, inserção de propriedades geométricas e de material, inserção de forças e a ferramenta de revisão e análise.
Barra inferior	Controla a visualização da área de desenho, como o espaçamento do <i>grid</i> e sua escala.
Área de desenho	Local, composto por um <i>grid</i> , onde o usuário faz o desenho da estrutura através de nós e barras.
Janelas	<i>pop-ups</i> que surgem ao selecionar algumas ferramentas com um formulário para sua manipulação. A área de revisão e análise também consiste em uma janela.

O conceito de janelas foi adotado (figura 19) pois facilita a interação do usuário com os dados, funcionando como assistentes com os campos, suas descrições e unidades. Este elemento foi possível graças ao conceito de SPA, já discutido anteriormente.

Figura 19 – Exemplo de janela na aplicação.

Propiedades das barras

Barra 1 ▼

Módulo de Young (kPa)

0

Inércia (m⁴)

0

Área (m²)

0

Atribuir à barra

Atribuir a todas as barras

intervalo em X: 1

Fonte: Autor

A janela de revisão e análise traz, ainda, o conceito de abas, onde é possível revisar cada elemento da estrutura em suas respectivas abas. Também é nesta janela que esta a seção de análise e resultados (mostrado somente após a realização da análise).

Figura 20 – Janela de revisão e análise.

Lista de Nós Lista de Barras Análise				
Nó	Apoio	x (m)	y (m)	deletar
1	Livre ▼	7	3	X
2	Livre ▼	10	5	X
3	Livre ▼	6	6	X
4	Livre ▼	16	6	X
5	Livre ▼	17	3	X
6	Livre ▼	13	6	X

Fonte: Autor

A seção de resultados traz um relatório completo, com tabelas de reações, bem como gráficos de esforços internos solicitantes de cada uma das barras.

Figura 21 – Tabelas do relatório de análise de um exemplo genérico.

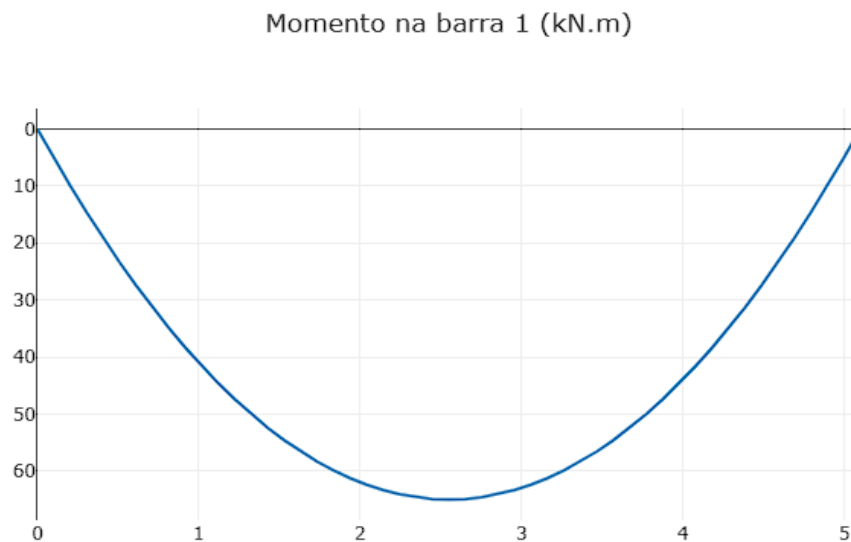
Reações			
Nó	X	Y	Mz
1	-10.00 kN	50.00 kN	0 kN.m
2	-10.00 kN	50.00 kN	-0.00 kN.m

Deslocamentos			
Nó	u	v	Theta
1	0.00000 m	0.00000 m	-0.13810 rad
2	0.00000 m	0.00000 m	0.13810 rad

Esforços Internos Solicitantes						
Barra	N1	V1	M1	N2	V2	M2
1	0.00 kN	50.99 kN	-0.00 kN.m	0.00 kN	-50.99 kN	-0.00 kN.m

Fonte: Autor

Figura 22 – Gráfico de momento fletor de uma barra qualquer.



Fonte: Autor

O conteúdo das figuras 21 e 22 estão contidas na mesma janela do programa, sendo dividida aqui apenas por questão de facilidade de visualização.

Fica claro, por tanto, a facilidade proporcionada pelo conceito de janelas, já que a visualização dos resultados oferece um fluxo contínuo e simplificado para o usuário.

É importante salientar, entretanto, que no atual estado do programa, não é possível mover e "arrastar" as janelas. Este recurso seria útil, por exemplo, caso o usuário desejasse ver a tela de resultados ao mesmo tempo em que observa a estrutura, bastando "arrastar" a janela de resultados para uma posição que não sobreponha o desenho no Canvas. Este recurso pode ser desenvolvido em edições posteriores do programa.

4.8 Hospedagem

O termo hospedagem, no meio da computação, significa "alocar um espaço na *web* para uma página", ou seja, é o ato de colocar no ar ao servidor da aplicação. A hospedagem pode ser realizada pelo próprio produto (neste caso, *software*, com a implantação de um servidor *in house*. Porém, por conta da praticidade e custo, sempre é preferível utilizar serviços⁵ que realizem a hospedagem de páginas.

No momento do desenvolvimento deste trabalho, o programa encontra-se hospedado em um *host* gratuito, ficando a mercê das políticas e cláusulas do serviço. Esta foi a principal dificuldade durante a elaboração do programa, pois recursos pensados para o **2Frame** tiveram que ficar fora da *web* por questões relacionadas ao serviço gratuito e suas limitações. Assim, o autor deste trabalho não pode garantir a sua permanência na rede, ficando reservado ao mesmo apenas o código fonte.

4.9 Metodologia dos Testes

Os testes foram realizados por comparação direta, isto é, modelos idênticos, onde um é oriundo da literatura ou de um *software* já existente e o outro foi modelado no **2Frame**, tiveram seus resultados comparados.

Assim, foram comparados 3 modelos. Um modelo adveio do artigo escrito por Silva, Menezes e Martha (2016), onde sugerem um modelo para análise não linear geométrica no Ftool, e que foi proposto um pórtico não contraventado e teve seu cálculo realizado por análise linear e não linear geométrica. Para a análise não linear geométrica, Silva, Menezes e Martha (2016) também utilizaram o M2CI.

O segundo modelo foi um pórtico genérico modelado com perfis metálicos calculado pelo *software* AcadFrame, onde tiveram os resultados de análise não linear comparados.

⁵ Empresas que oferecem o serviço de hospedagem são chamadas de *host*.

Todas as características dos modelos, cargas e peculiaridades, bem como dados comparativos e discussões serão abordadas no capítulo 5.

4.10 Programas Utilizados Para Análise em Paralelo

Para a realização de testes e cálculos, dois programas foram usados. Seus usos detalhados, dentro do escopo deste trabalho, serão abordados no capítulo 5. Nesta seção, aborda-se de maneira introdutória os *softwares* em questão.

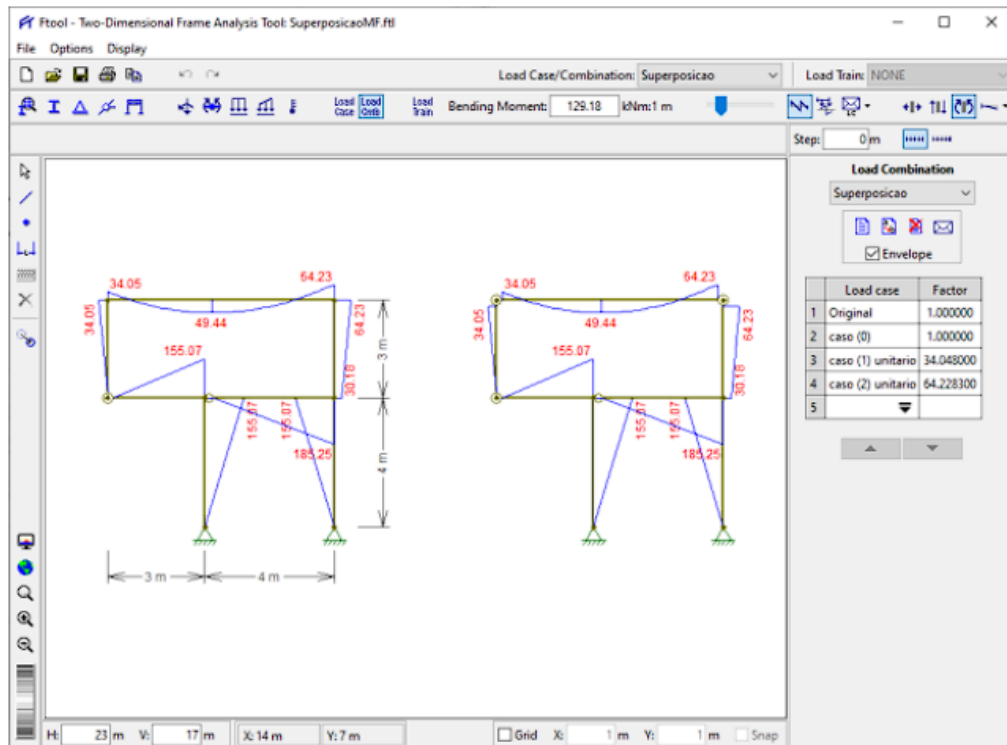
4.10.1 Ftool

O Ftool é um *software* gratuito de análise estrutural que permite a modelagem e análise de estruturas de forma fácil e intuitiva. Ele foi desenvolvido pelo professor Luiz Fernando Martha, da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), e se tornou uma ferramenta importante para a formação em engenharia e a engenharia de estruturas em si (MARTHA; RANGEL, 2022).

o Ftool tem sido amplamente utilizado em cursos de engenharia civil e também tem um impacto significativo para os profissionais de engenharia civil, permitindo a realização de análises estruturais de forma rápida e eficiente. Ele permite que os engenheiros realizem simulações e testem diferentes soluções para problemas estruturais, o que é especialmente útil em projetos de pequeno e médio porte.

Pelo fato de ser amplamente reconhecido pela sua eficiência, facilidade de uso e capacidade de realizar análises estruturais precisas e confiáveis, foi escolhido como *software* modelo para este programa, sendo aplicado no teste comparativo com o modelo proposto por Silva, Menezes e Martha (2016).

Figura 23 – Interface do Ftool.



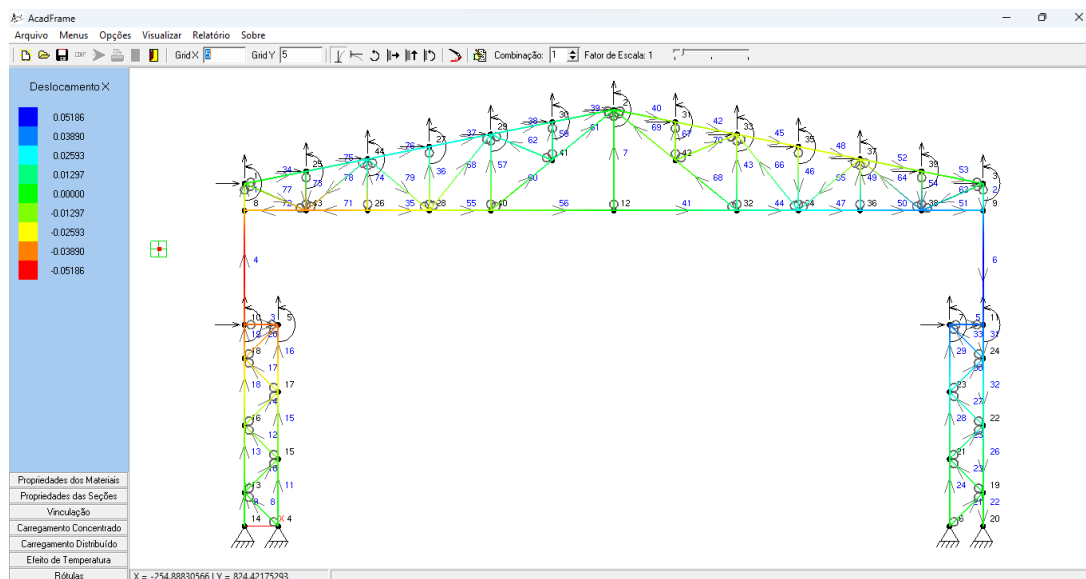
Fonte: Martha e Rangel (2022)

4.10.2 AcadFrame

O AcadFrame se trata de um *software* de análise, desenvolvido por Coda e Paccola (2006) dentro do Grupo de Mecânica Computacional - GMEC, da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo - USP.

Como diferencial, o AcadFrame utiliza o Método dos Elementos Finitos Posicional para análise de pórticos e treliças planas incluindo não linearidade geométrica. Portanto, como se trata de um método diferente para a análise não linear e por ser uma ferramenta gratuita, acadêmica de uma respeitável escola de engenharia, foi adotado para cálculo de um modelo comparativo de base para este trabalho.

Figura 24 – Interface do AcadFrame.



Fonte: Autor

Ambas as ferramentas computacionais aqui descritas podem ser acessadas em suas respectivas páginas. Além disso, os autores das ferramentas detêm o direito exclusivo sobre as mesmas, resumindo a este autor apenas o uso das ferramentas para fins de pesquisa, como devidamente apresentado nesta monografia.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para a devida validação dos cálculos realizados pelo programa elaborado, foram utilizados exemplos oriundos da literatura e resultados fornecidos por outro *software* (AcadFrame).

Em todos os casos foram usados apenas resultados do programa, sem utilização de nenhuma outra correção ou implementação externa, de modo a fazer com que os testes não tenham qualquer tipo de interferência.

Para comparação serão utilizadas tabelas com os valores dos esforços, bem como tabelas com os respectivos erros percentuais. As tabelas comparativas dos esforços, deslocamentos e seus erros percentuais são ferramentas fundamentais para verificar a precisão e confiabilidade dos resultados obtidos a partir do método de cálculo. A comparação é importante para avaliar o desempenho de uma possível estrutura e verificar a eficiência do modelo matemático utilizado neste trabalho.

5.1 Comparação Com Pórtico Não Contraventado

Silva, Menezes e Martha (2016), em seu artigo, propõem a adoção do M2CI como método simplificado para análise de não linearidade geométrica no *software* FTool. Para tanto, os autores testam e comparam o resultado de alguns modelos, sendo um deles o pórtico proposto nesta seção, e comparam com outra metodologia bem como com outros *softwares*.

Os autores apresentam um pórtico não contraventado, de um único andar e um único vão. As vigas e colunas são modeladas em aço, como módulo de elasticidade $E = 205000$ MPa, Poisson $\nu = 0,3$.

A viga possui um vão de 10 metros enquanto os pilares possuem altura de 5 metros. Os pilares e viga são compostos por perfis metálicos tabelados, sendo CS 400x137 o perfil dos pilares e CVS 500x217 o perfil da viga.

As características geométricas desses perfis são descritas no quadro abaixo:

Tabela 5 – Características geométricas dos perfis metálicos do pórtico não contraventado.

Elemento	Perfil	I	A
Pilares	CS 400x137	0,000524 m ⁴	0,0174 m ²
Viga	CVS 500x217	0,001158 m ⁴	0,0276 m ²

O pórtico foi carregado com cargas verticais, aplicadas nos nós superiores e uma carga horizontal, aplicada apenas no nó superior esquerdo com magnitude de 10% daquelas aplicadas às cargas verticais. A figura 25 mostra o pórtico bem como o local de aplicação das cargas.

Figura 25 – Pórtico não contraventado com carregamento modelado com o primeiro caso de carga.



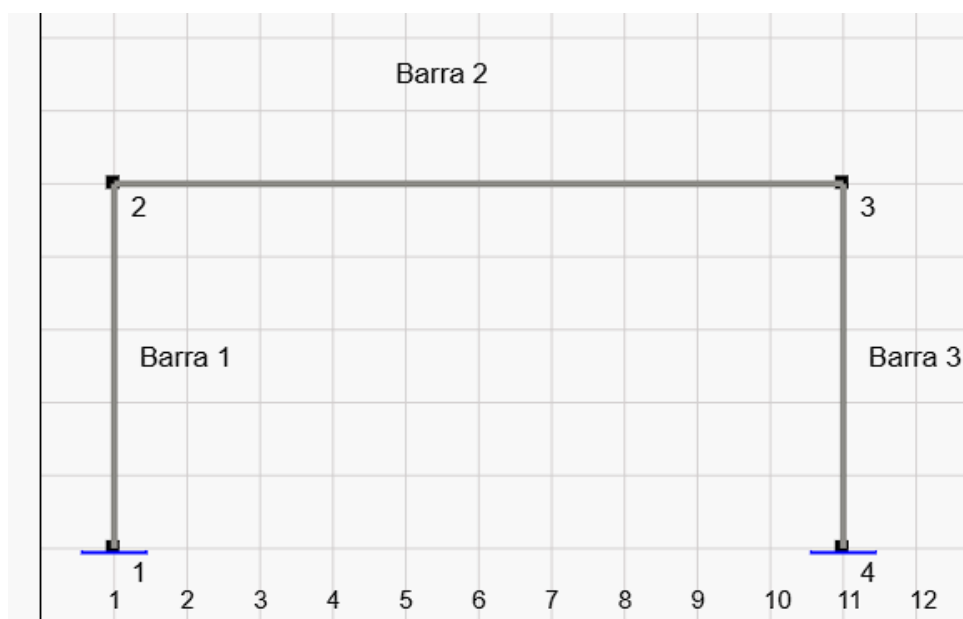
Fonte: Silva, Menezes e Martha (2016)

Observando a figura 25, os nós foram enumerados no sentido horário iniciando pelo nó inferior esquerdo.

Foram implementando casos de carregamento, com o máximo de 18270 kN para as cargas verticais e 1820 kN para a carga horizontal, seguindo metodologia descrita no artigo analisado.

Os autores comparam seus resultados ao método de Newton-Raphson e aos programas Robot e STAAD¹. Como os resultados obtidos pelos autores já foram validados com o método e os programas citados no artigo em questão, os detalhes comparativos desses casos, visto que se há correspondência entre os valores encontrados pelo **2Frame** e pela análise não linear proposta naquele artigo, logicamente há também validação com o método e os programas citados.

¹ Desenvolvidos pela Autodesk e Bentley, respectivamente.

Figura 26 – Mesmo pórtico modelado no **2Frame**.

Fonte: Autor

Os resultados para deslocamento horizontal, força normal, força cortante e momento fletor obtidos pelo **2Frame**, bem como os erros percentuais, são expostos nas tabelas 6 a 13. Também são mostradas as análises lineares, para comparação. A carga de referência P_{ref} é aquela definida anteriormente como o limite de carga. Entretanto, como os autores utilizaram aproximações para a relação P/P_{ref} , não fornecendo o carregamento exato para cálculo, suprimiu-se todos os outros casos com exceção do primeiro caso, definido na figura 25 e o último caso. Isso foi necessário para garantir que não exista uma influência ainda maior das aproximações numéricas nos resultados. A tabela 6 mostra o deslocamento horizontal u para o nó 3. A coluna "Linear" e "Não Linear" na tabela 6 representam os resultados obtidos por Silva, Menezes e Martha (2016).

Tabela 6 – Comparação dos deslocamentos horizontal em metros no nó 3

P/P_{ref}	Linear	Linear 2Frame	Não Linear	Não Linear 2Frame
0,07	0,00830	0,00854	0,00862	0,0089
1,00	0,12440	0,12238	0,26380	0,2800

A tabela 7 representa o erro, em porcentagem, entre os resultados obtidos por Silva, Menezes e Martha (2016) e o **2Frame**.

Tabela 7 – Erro percentual para os deslocamentos horizontais

P/P_{ref}	Linear	Não Linear
0,07	2,89%	3,25%
1,00	1,62%	6,14%

Observam-se valores semelhantes com relação aos deslocamentos, com um erro tolerável, onde o maior erro percentual foi de 6,14%. Esse erro pode advir de aproximações numéricas utilizadas pelo processador do **2Frame**, visto a ordem reduzida dos resultados (10^{-2}). Também é possível visualizar um aumento substancial no deslocamento ao comparar a análise linear com a não linear, evidenciando o caráter incremental da não linearidade.

Adentrando na análise dos esforços internos solicitantes, as análises a seguir fazem a comparação entre as forças normais, cortante e fletor. A tabela 8 mostra os valores para o esforço normal na barra 3.

Tabela 8 – Comparação dos esforços Normais em kN Para a Barra 3

P/P_{ref}	Linear	Linear 2Frame	Não Linear	Não Linear 2Frame	P- Δ (Robot e STAAD)
0,07	1244,43	1244,26	1240,24	1245,68	
1,00	18666,50	18664,95	14190,70	19255,36	19153,00

Nota-se que, para cargas altas, os resultados divergiram do apresentado por Silva, Menezes e Martha (2016). Porém, quando confrontados contra os resultados fornecidos pelos *softwares* comerciais Robot e STAAD (utilizando a metodologia P- Δ), os resultados fornecidos pelo **2Frame** são muito mais representativos do que os obtidos pelos autores citados. Os autores ainda fornecem o resultado após 10 ciclos de cálculo, chegando ao resultado de 18862,40 kN para $P/P_{ref} = 1$, mas ainda com um erro maior do que o obtido pelo **2Frame** em relação aos *softwares* comerciais citados. Além disso, a execução de 10 ciclos de cálculo fugiria do escopo deste trabalho no que condiz a reduzir o esforço computacional sempre que possível, daí a comparação com os resultados fornecidos pelos autores citados para apenas 1 ciclo de cálculo. Isso pode acontecer pelo fato de que a matriz de rigidez geométrica $[k_g]$ utilizada leva em conta apenas forças axiais, ou seja, esforços normais, aproximando os resultados. Por serem amplamente utilizados pela indústria, o que demonstra sua aceitação dos resultados, para esse caso a comparação de erro para $P/P_{ref} = 1$ será o apresentado pelos *softwares* em questão.

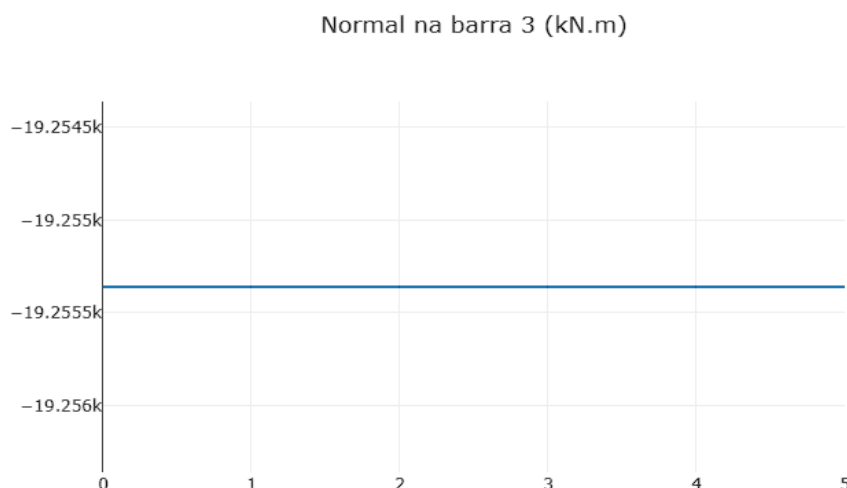
A tabela 9 apresenta o erro, em porcentagem, entre os resultados obtidos por Silva, Menezes e Martha (2016), Robot/STAAD e o **2Frame**.

Tabela 9 – Erro percentual para força normal na barra 3

P/P_{ref}	Linear	Não Linear	Robot & STAAD
0,07	0,0136%	0,43%	-
1,00	0,0083%	-	0,5344%

Tanto no limite inferior ($P/P_{ref} = 0,07$) quanto no limite superior ($P/P_{ref} = 1$) de carga, vê-se na tabela 9 que os resultados são bastante condizentes aos apresentados no artigo e nos *softwares*, visto que o maior erro obtido foi de pouco mais de meio por cento (0,5344%).

Figura 27 – Gráfico de esforço normal fornecido pelo **2Frame** após análise não linear para a barra 3.



Fonte: Autor

Já para os esforços cortantes e de momento fletor, as tabelas 10 e 12 expõem os resultados obtidos e comparados com o artigo em questão.

Tabela 10 – Comparação dos esforços cortantes em kN para barra 1

P/P_{ref}	Linear	Linear 2Frame	Não Linear	Não Linear 2Frame
0,07	61,19	60,78	61,22	63,15
1,00	917,79	914,27	938,79	935,64

Observa-se, para o esforço cortante, que há, também, uma similaridade de valores. Para a análise linear há uma diferença proporcional menor para cargas mais altas ($P/P_{ref} = 1$). Já para a análise não linear, também para cargas altas há um erro muito pequeno, como pode ser visto na tabela 11 na análise não linear geométrica.

É interessante recordar que, conforme explicitado na seção 3.8, mesmo a matriz de rigidez geométrica $[k_g]$ adotada para este trabalho dependendo apenas de esforços axiais, ainda há uma ótima aproximação numérica para o esforço cortante, que possui direção (paralela ao vetor unitário $\hat{j}$) perpendicular ao esforço normal (paralelo ao vetor unitário $\hat{i}$).

Abaixo, encontra-se uma tabela comparativa contendo os erros em porcentagem para as análises da força cortante.

Tabela 11 – Erro percentual para força cortante na barra 1 (%)

P/P_{ref}	Linear	Não Linear
0,07	0,6700%	3,15%
1,00	0,3835%	0,33%

Este resultado acarreta em um dimensionamento seguro da peça para cortante próximo aos nós da estrutura, local onde geralmente se encontram os apoios da estrutura real, que concentram os maiores esforços cisalhantes. Por fim, tanto para as análises lineares quanto para as análises não lineares, os resultados são satisfatórios.

Abaixo, vê-se o comparativo de resultados para os esforços fletores.

Tabela 12 – Comparação dos esforços fletores em kN.m para o nó 1

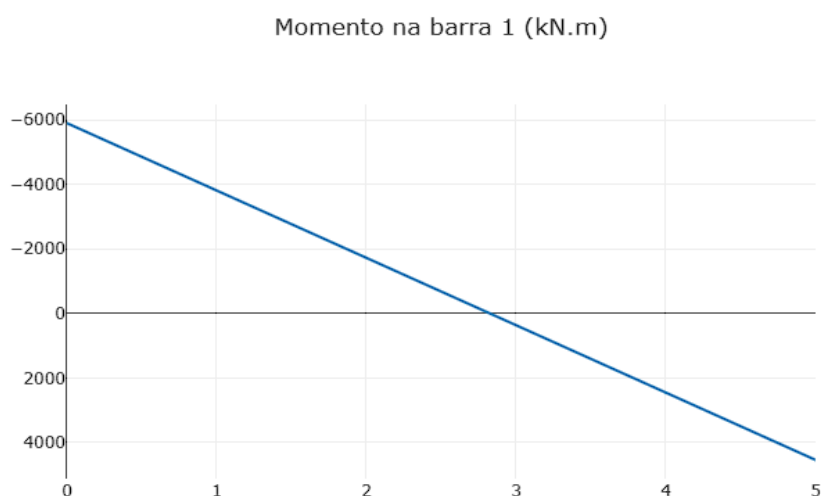
P/P_{ref}	Linear	Linear 2Frame	Não Linear	Não Linear 2Frame	P-Δ (Robot e STAAD)
0,07	173,28	172,14	178,69	178,82	
1,00	2599,20	2589,23	4973,44	5897,27	5325,18/5325,75

Vê-se, novamente, uma maior aproximação dos resultados, principalmente para cargas menores. No entanto, assim como o esforço normal, há uma maior semelhança entre os resultados obtidos de análise não linear pelo **2Frame** e os resultados fornecidos por *softwares* comerciais. Para a análise linear, houve pouquíssima variação nos resultados. Os erros percentuais estão representados na tabela 13, onde também haverá comparação com os resultados dos *softwares* comerciais, da mesma forma que para a análise dos erros do esforço normal.

Tabela 13 – Erro Percentual Para os Momentos Fletores no Nó 1

P/P_{ref}	Linear	Não Linear	Robot & STAAD
0,07	0,6578%	0,0727%	-
1,00	0,3835%	-	9,70%/9,69%

Figura 28 – Gráfico de momento fletor fornecido pelo **2Frame** após análise não linear para a barra 1.



Fonte: Autor

Com um resultado abaixo de 9,7% em relação ao Robot/STAAD, os resultados para a não linearidade se mostraram razoáveis.

Em suma, em relação aos resultados obtidos por Silva, Menezes e Martha (2016), há uma semelhança e proximidade entre o *output* da análise não linear fornecido pelo **2Frame** e os *softwares* Robot e STAAD em relação ao esforço normal e cisalhante e um erro aceitável no que concerne os esforços fletores.

Com relação a análise linear, os resultados obtidos pelo **2Frame** foram satisfatórios em comparação com os resultados dos autores citados, nos quais os pequenos desvios podem ser frutos de aproximações numéricas realizadas pelo processador do **2Frame**.

5.2 Comparação Com o AcadFrame

Os resultados obtidos com o **2Frame** também foram comparados com os resultados de outro *software* acadêmico para análise estrutural: O AcadFrame. Essa comparação é importante pois ambos os softwares nasceram com premissas similares: a análise não linear geométrica. Torna-se ainda mais interessante esta comparação pelo fato de o AcadFrame usar outra metodologia de cálculo para a não linearidade.

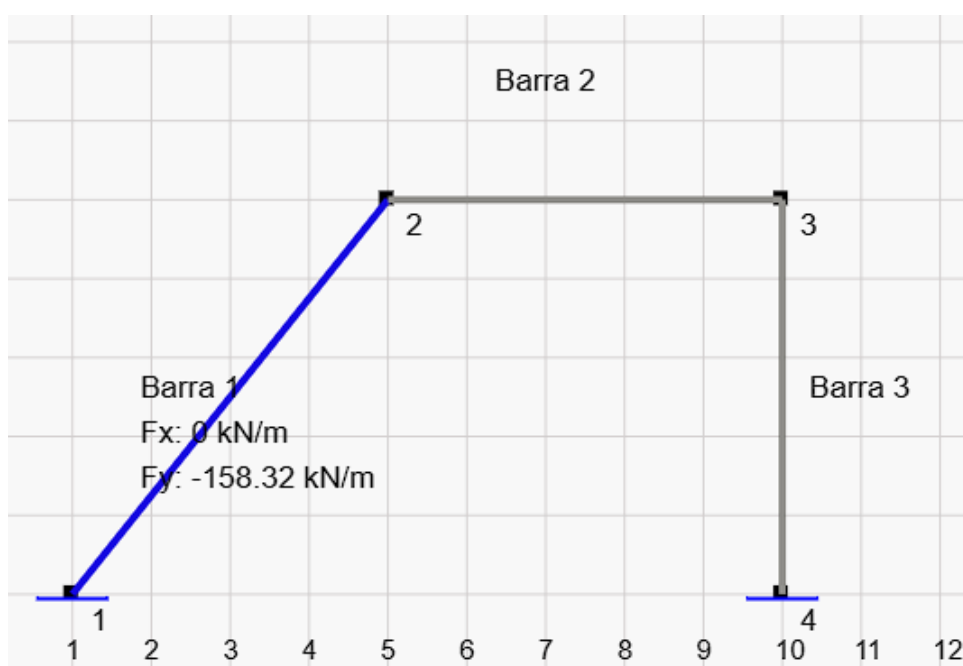
Como exposto anteriormente, o AcadFrame utiliza o Método dos Elementos Finitos Posicionais, diferente do M2CI. No entanto, a convergência de resultados entre os dois métodos é garantida pela natureza física do problema.

Para a comparação dos resultados foi modelado um pórtico com 3 barras, sendo uma destas inclinada, e carregamento linearmente distribuído nesta barra, conforme visto na figura 29. O vão vencido pela viga (barra 2) é de 5 metros e a altura do pavimento é também de 5 metros. Os apoios são do tipo engaste.

Foi utilizada uma única geometria de seção para todas as barras, atribuindo o perfil CVS 500x217, idêntica a viga da seção anterior. O módulo de elasticidade adotado foi de $E = 205000$ MPa.

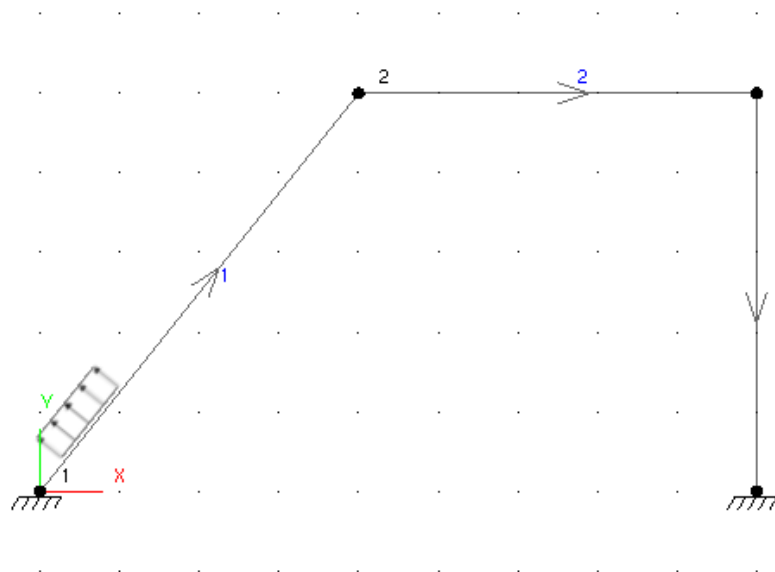
A análise foi realizada com 8 casos de carregamento, com incrementos de 12,5% na carga até o limite de 1266,56 kN/m. Portanto, o carregamento do primeiro caso equivale a 158,32 kN/m. Salienta-se que os resultados apresentados são oriundos da análise não linear geométrica apenas. Todos os resultados comparados foram os referentes ao nó 2 da estrutura, conforme indicado na figura 29.

Figura 29 – Pórtico modelado no **2Frame** com o primeiro caso de carga



Fonte: Autor

Figura 30 – Mesmo pórtico modelado no AcadFrame



Fonte: Autor

As tabelas 14 a 21 mostram os resultados, comparativos e os erros obtidos pelos programas. Inicia-se com os resultados para deslocamentos, passando, em seguida, para cada um dos esforços solicitantes.

A tabela 14 mostra os resultados obtidos pelo AcadFrame e **2Frame** para os deslocamentos do nó 2.

Tabela 14 – Comparação dos deslocamentos horizontais (m) no AcadFrame e no **2Frame** no nó 2

P/P_{ref}	Deslocamento AcadFrame	Deslocamento 2Frame
0,125	0,01248	0,0121
0,250	0,02497	0,0242
0,375	0,03746	0,0364
0,500	0,04996	0,0486
0,625	0,06246	0,0608
0,750	0,07497	0,0731
0,875	0,08748	0,0854
1,000	0,09999	0,0977

Os resultados apresentam uma boa aproximação entre os valores obtidos pelo AcadFrame e pelo **2Frame**, mostrando que a diferença entre as metodologias de cálculo pouco influenciam no resultado final que, como dito, deve ser similar, dado a natureza física do problema.

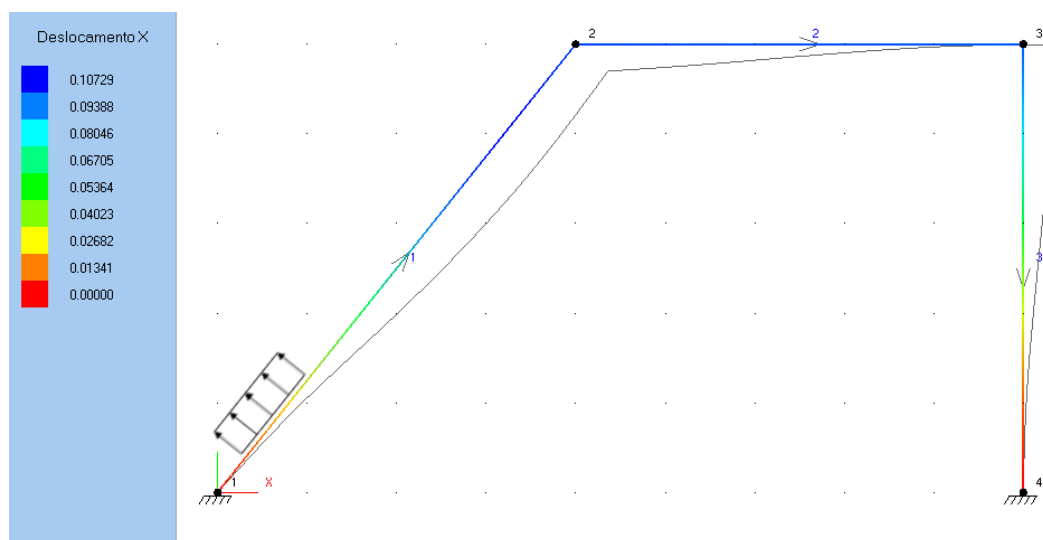
Para uma análise mais detalhada, a tabela 15 apresenta o erro percentual entre cada um dos resultados.

Tabela 15 – Erro percentual entre os deslocamentos horizontais no AcadFrame e no **2Frame**

P/P_{ref}	Erro
0,125	3,04%
0,250	2,92%
0,375	2,82%
0,500	2,72%
0,625	2,65%
0,750	2,49%
0,875	2,37%
1,000	2,23%

Nota-se que, a medida em que a carga aumenta, chegando ao limite $P/P_{ref} = 1$, o erro diminui, chegando a 2,23% para a carga P/P_{ref} . Considerando que cargas maiores exigem maior confiabilidade, um erro cada vez menor à medida em que se aumenta a carga, considerando apenas o AcadFrame como referência, a segurança também está aumentando, pois se converge a um resultado cada vez mais similar. Isso mostra a segurança do **2Frame** para o cálculo de flechas, por exemplo.

Figura 31 – Deformada do pórtico no AcadFrame para o último caso de carga e com deslocamentos horizontais indicados por cor



Fonte: Autor

As próximas tabelas mostram as comparações e o erro obtido para os esforços internos solicitantes: esforço normal, esforço cortante e momento fletor.

Tabela 16 – Comparação dos esforços normais (kN) no AcadFrame e no **2Frame** no nó 2

P/P_{ref}	Normal AcadFrame	Normal 2Frame
0,125	224,06	224,53
0,250	446,8	448,77
0,375	668,19	672,71
0,500	888,21	896,35
0,625	1106,85	1119,69
0,750	1324,07	1342,73
0,875	1539,85	1565,47
1,000	1754,18	1787,91

Tabela 17 – Erro percentual entre os esforços normais no AcadFrame e no **2Frame**

P/P_{ref}	Erro
0,125	0,21%
0,250	0,44%
0,375	0,67%
0,500	0,91%
0,625	1,16%
0,750	1,41%
0,875	1,66%
1,000	1,92%

As tabelas acima (tabelas 16 e 17) mostram a comparação e os erros obtidos para o esforço normal. Observa-se que, para esforços reduzidos, os valores são próximos, onde a diferença se restringe a casa das dezenas decimais, sempre superiores aos obtidos pelo AcadFrame. O maior erro, por tanto, observando a tabela 17, reside no último caso de carga (carga limite P_{ref}), ficando próximo aos 2%, mostrando que os erros são bastante reduzidos, mostrando uma confiabilidade do método para o esforço normal.

A seguir, serão apresentadas as duas tabelas (tabelas 18 e 19) que mostram uma comparação dos valores obtidos para o esforço cortante, bem como os erros percentuais obtidos dessa comparação.

Tabela 18 – Comparação dos esforços cortantes (kN) no AcadFrame e no **2Frame** no nó 2

P/P_{ref}	Cortante AcadFrame	Cortante 2Frame
0,125	159,18	158,66
0,250	318,98	317,02
0,375	479,38	475,06
0,500	640,37	632,8
0,625	801,96	790,22
0,750	964,14	947,33
0,875	1126,91	1104,12
1,000	1290,24	1260,6

Tabela 19 – Erro percentual entre os esforços cortantes no AcadFrame e no **2Frame**

P/P_{ref}	Erro
0,125	0,32%
0,250	0,61%
0,375	0,90%
0,500	1,18%
0,625	1,46%
0,750	1,74%
0,875	2,02%
1,000	2,29%

No primeiro caso de carga, observa-se que a diferença entre os valores obtidos é muito pequena, figurando na casa da unidade. Essa variação muito pequena também é um indicativo de que o **2Frame** apresenta um resultado confiável e preciso, baseando-se no AcadFrame. Conforme a carga aplicada é aumentada, os valores obtidos pelos dois métodos apresentam uma variação um pouco maior, mas ainda dentro de uma faixa aceitável de diferença.

Com relação aos erros obtidos, o fato mais importante que pode ser destacado na tabela 19 é que o erro máximo obtido, no último caso de carga, ficou abaixo dos 2,5% (2,2972%). Esse resultado indica, assim como os demais, que a diferença entre os valores obtidos pelos dois métodos de cálculo é relativamente baixa e aceitável.

Por fim, as comparações de resultados e os erros percentuais obtidos para os esforços fletores são apresentados nas tabelas 20 e 21.

Tabela 20 – Comparação dos momentos fletores (kN.m) no AcadFrame e no **2Frame** no nó 2

P/P_{ref}	Fletor AcadFrame	Fletor 2Frame
0,125	272,19	271,74
0,250	546,89	545,12
0,375	824,1	820,17
0,500	1103,81	1096,87
0,625	1386,04	1375,25
0,750	1670,78	1655,3
0,875	1958,03	1937,04
1,000	2247,8	2220,46

Tabela 21 – Erro percentual entre os momentos fletores no AcadFrame e no **2Frame**

P/P_{ref}	Erro (%)
0,125	0,16%
0,250	0,32%
0,375	0,47%
0,500	0,62%
0,625	0,78%
0,750	0,92%
0,875	1,07%
1,000	1,21%

Os momentos fletores, como observado na tabela 20 e percentualmente, mostrado na tabela 21), são os que apresentam, para o último caso de carga, a menor diferença, tendo um erro de apenas 1,21% para a carga limite P_{ref} . Importante ressaltar que, para a carga mais baixa, houve um erro também muito pequeno, de 0,16%.

Esses resultados mostram, como os demais, a confiabilidade do **2Frame** quando comparado ao AcadFrame.

Em suma, os resultados comparativos apresentados demonstram a confiabilidade dos cálculos realizados pelo *software* desenvolvido. As tabelas de comparação de esforços cortantes e erros percentuais mostraram que, mesmo em cargas elevadas, a diferença entre os resultados obtidos pelo *software* e os demais métodos de cálculo é muito pequena.

Esses resultados são satisfatórios, uma vez que garantem a uma relativa precisão para análises estruturais, ao menos em comparação ao AcadFrame.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise estrutural é um campo de estudo importante para engenheiros civis, pois é fundamental para garantir a segurança e estabilidade de estruturas. Nesse contexto, o desenvolvimento de *software* para a análise estrutural tem sido um desafio constante, devido à complexidade dos cálculos envolvidos. O objetivo desta monografia foi desenvolver um *software* web para a análise estrutural não linear geométrica de pórticos planos e comparar os resultados obtidos com outros métodos de cálculo.

Nesta monografia foram apresentados conceitos básicos sobre análise estrutural, seguidos por questões teóricas mais complexas, abordando aspectos como o comportamento elástico e inelástico dos materiais, além de detalhar os principais métodos de cálculo utilizados na análise estrutural, a não linearidade geométrica e apresentar o Método dos Dois Ciclos Iterativos (M2CI). Em seguida, foram apresentados aspectos computacionais e de informática, incluindo a linguagem de programação utilizada e a metodologia de desenvolvimento do *software*.

O desenvolvimento do *software* web, nomeado de **2Frame** foi apresentado em detalhes, descrevendo as funcionalidades e recursos disponíveis para os usuários, além de destacar as principais vantagens e desafios enfrentados durante o desenvolvimento. Em seguida, foram realizadas análises comparativas entre os resultados obtidos pelo *software* desenvolvido e outros métodos de cálculo, incluindo um exemplo da literatura e outro *software* acadêmico (AcadFrame).

Os resultados obtidos demonstraram que o **2Frame** apresentou resultados satisfatórios, comparáveis com os demais métodos de cálculo. Além disso, foi possível destacar a vantagem do *software* em relação à facilidade de uso, acessibilidade e praticidade, uma vez que pode ser acessado por qualquer dispositivo com conexão à internet.

Conclui-se, por fim, que o *software* desenvolvido é uma ferramenta valiosa para os profissionais da área e alunos de graduação e pode contribuir para o entendimento do comportamento de estruturas, tanto em análises lineares quanto em análises não lineares.

6.1 Trabalhos Futuros

Para trabalhos posteriores, sugere-se que sejam abordadas, com desenvolvimento de uma solução, as seguintes problemáticas:

- Não linearidade física;
- Desenvolvimento da *engine* gráfica para se trabalhar em ambientes 3D;
- Cálculo de grelhas;

- Pré dimensionamento de elementos estruturais;
- Rotulação de nós;
- Aplicação de elementos finitos para discretização de elementos;
- Linhas de influência e
- Carga móvel.

REFERÊNCIAS

- ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. 10. ed. [S.l.]: Bookman, 2012.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8800**: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. Rio de Janeiro, 2008. 247 p.
- BEER, F. P. et al. **Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática**. [S.l.]: AMGH, 2011.
- CHEN, W.-F.; LUI, E. M. **Stability Design of Steel Frames**. [S.l.]: CRC Press, 1991.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. **Software Acadêmico para análise de pórticos e treliças planas**. 2006. Acesso em 18/05/2023. Disponível em: <http://web.set.eesc.usp.br/software_depto/acadframe/>.
- FREITAS, J. A. T. de; TIAGO, C. **Análise Elástica de Estruturas Reticuladas**. Lisboa: Universidade de Lisboa, 2022.
- KASSIMALI, A. **Matrix Analysis of Structures**. 2. ed. [S.l.]: Cengage, 2010.
- KINDMANN, R.; KRAUS, M. **Steel Structures Design using FEM**. Berlin: Wilhelm Ernst & Sohn, 2011.
- KONAPURE, C. G.; DHANSHETTI, P. V. Effect of p-delta action on multi-storey buildings. **International Journal of Engineering Research & Technology**, v. 4, 2015.
- MARTHA, L. F. **Análise de Estruturas: Conceitos e Métodos Básicos**. [S.l.]: Elsevier, 2010.
- MARTHA, L. F.; RANGEL, R. L. Ftool: Three decades of success as an educational program for structural analysis. In: **43rd Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (XLIII CILAMCE)**, Foz do Iguaçu, PR. [S.l.: s.n.], 2022.
- MCCORMAC, J. C. **Structural Analysis: Using Classical and Matrix Approach**. 4. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2007.
- MOURA, B. C. de A.; BARBIRATO, J. C. C. Contribuição para análise não linear de pórticos planos de edifícios utilizando o p-delta com a técnica das cargas laterais fictícias. **XLII CILAMCE**, 2020.
- PEREIRA, A. **Projeto ótimo de pórticos planos com restrição à flambagem**. 99 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002.
- PHILPOT, T. A. **Mechanics of Materials: An Integrated Learning System**. 4. ed. [S.l.]: Wiley, 2016.
- RODRIGUES, M. **Soluções integradas para as formulações do problema de não linearidade geométrica**. Tese (Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.
- SANTOS, J. S. dos. **Desconstruindo o Projeto Estrutural de Edifícios: Concreto Armado e Protendido**. [S.l.]: Oficina de Textos, 2017.

SENNETT, R. E. **Matrix Analysis Of Structures**. [S.l.]: Waveland Press, 1994.

SILVA, M. F. D.; MENEZES, I. F.; MARTHA, L. F. Um método simplificado para análise não-linear geométrica no ftool. **Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia**, v. 2, n. 24, p. 286–306, 2016.

SILVA, R. G. L. da; LAVALL, A. C. C. Utilização de análises elásticas estimadas ou aproximadas de 2ª ordem para o dimensionamento de pórticos planos de aço. **XXXI Jornadas Sud-Americanas de Ingeniería Estructural**, 2004.

SORIANO, H. L. **Análise de Estruturas: Formulação Matricial e Implementação Computacional**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2005.

WEAVER, W.; GERE, J. M. **Matrix Analysis of Framed Structures**. 3. ed. [S.l.]: Van Nostrand Reinhold, 1990.