UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

CAMPUS A.C SIMÕES

CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

CLEISIANE DA SILVA FERNANDES

FÓRMULA DE TAYLOR E APLICAÇÕES DA DERIVADA

Maceió - AL

2022

CLEISIANE DA SILVA FERNANDES

FÓRMULA DE TAYLOR E APLICAÇÕES DA DERIVADA

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao corpo docente do Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alagoas-UFAL, Campus A.C. Simões, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Anderson de Lima e Silva

Maceió - AL

2022

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

F363f Fernandes, Cleisiane da Silva.
Fórmula de Taylor e aplicações da derivada / Cleisiane da Silva Fernandes. – 2022.
35 f.

Orientador: José Anderson de Lima e Silva.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2022.

Bibliografia: f. 34.
Apêndice: f. 35.

1. Fórmula de Taylor. 2. Funções polinomiais. 3. Derivadas (Matemática). I. Título.

CDU: 517.2

Ao meu sobrinho, que é uma estrelinha no céu.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus, por ser comigo em todos os momentos, sem sua graça na minha vida eu nada seria.

Agradeço a minha família por todo apoio na minha vida, desde a educação básica até essa nova etapa que se conclui, em especial ao meu pai Dilson Fernandes e minha mãe Maria José, que são responsáveis pela pessoa que me tornei hoje. Sou eternamente grata por tudo.

Agradeço também a minha patroa e amiga Claudia Leite, obrigada por todo o incentivo, por me apoiar e não me deixar desistir. Na nossa vida encontramos pessoas que certamente nos colocam para frente e eu posso afirmar sem sombras de dúvidas que ela é uma dessas pessoas.

Ao professor Dr. José Anderson meus sinceros agradecimentos, por me orientar não só no TCC mas em toda minha tragetória universitária, agradeço sobretudo pela paciência que teve comigo e pelas palavras de apoio quando eu me sentia incapaz, em uma época em que não é fácil ser educador me ensinou que isso pode ser feito sim e com excelência.

Sou grata a todo corpo docente do Instituto de Matemática, cada um teve um papel primordial na minha formação. Em especial aos professores da banca, que disponibilizaram seu tempo para avaliarem esse trabalho de conclusão.

Às minhas amigas, Hemilly Marcela, Hellen Victória, Sarah Luíza e Gennifer Martins por todos os momentos de conversas e descontração, Nas horas que precisamos é que sabemos quem está conosco em todos os momentos.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram indiretamente na minha vida.

Tendo sido, pois, justificados pela fé, temos paz com Deus, por nosso Senhor Jesus Cristo; Pelo qual também temos entrada pela fé a esta graça, na qual estamos firmes, e nos gloriamos na esperança da glória de Deus. E não somente isto, mas também nos gloriamos nas tribulações; sabendo que a tribulação produz a paciência, E a paciência a experiência, e a experiência a esperança.

(Bíblia Sagrada, Romanos 5, 1-4.)

Resumo

A Fórmula de Taylor é um método de representar funções específicas como polinômios, afim de ter uma abordagem e análise mais concisa, afinal as funções polinomiais são mais simples de resolver. Este trabalho tem por objetivo apresentar a definição de derivadas, suas regras operacionais e crescimento e decrescimento de funções, tal qual analisar a Fórmula de Taylor , mostrar seus resultados e apresentar aplicações que a Fórmula possui, assim como as aplicações de derivadas e também estipular o erro dela, afinal a Fórmula de Taylor se trata de uma aproximação, logo o resultado é aproximado e não exato. Essas aplicações simplificam problemas matemáticos, auxiliam no entendimento do conteúdo e possibilitam uma resolução mais direta de alguns problemas.

Palavras-chave: Fórmula de Taylor; Derivada; Matemática; Aplicações; Funções Polinomiais.

Abstract

Taylor's formula is a method of representing specific functions such as polynomials, to have a more concise approach and analysis, after all the polynomial functions are more simple to solve. This work aims to present the definition of derivatives, their operational rules, and growth and decrease functions, such as analyzing the Taylor Formula, showing its results and presenting applications that the Formula has, as well as the applications of derivatives, and also stipulating her mistake, after all, Taylor's formula is an approximation, so the result is approximate and not exact. These applications simplify mathematical problems, help to understand the content, and allow a more direct resolution of some problems.

Keywords: Taylor's Formula; Derivative; Math; Applications; Polynomial Functions

Sumário

1 Noções de Derivada 10
1.1 Reta Tangente 10
1.2 Derivadas 11
1.3 Funções Crescentes e Decrescentes 16
2 Fórmula de Taylor 19
2.1 Polinômio de Taylor 19
2.2 Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange 21
2.3 Fórmula de Taylor Infinitesimal 23
3 Aplicações 25
3.1 Aproximação de Raízes 25
3.2 Problemas de Otimização 27
3.3 Método de Newton 29
4 Considerações Finais 33
Referências 34
Apêndice A 35

Introdução

Na Matemática muitas vezes nos deparamos com problemas que envolvem funções complexas, que possuem resolução não trivial. Usaremos então a Fórmula de Taylor para transformar essas funções em polinômios, que possuem uma solução simples e direta, é importante destacar que a Fórmula de Taylor se trata de uma aproximação, logo o resultado é aproximado e não exato, ela possui então um erro que pode ser estimado.

Polinômios são expressões algébricas formada pela adição e subtração de monômios. Sua expressão geral é definida por $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$, na qual $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0$ são os coeficientes do polinômio e $x^n, x^{n-1}, ..., x^2, x^1, x^0$ são as variáveis complexas do polinômio, com n sendo o maior grau do Polinômio.

O polinômio de Taylor é dado em torno da derivada de uma função, inicearemos com uma revisão sobre a reta tangente e sua inclinção, chegando então na definição de derivadas, que pode ser definida como a inclinação dessa reta que passa por uma curva ou como a taxa de variação instantânea de uma função. Ela possui um papel primordial na Fórmula de Taylor.

Demonstraremos o processo de derivação, bem como as regras operacionais que facilitam esse processo, as principais regras que servirão de base para os cálculos propostos são as regra da cadeia e regra da potência. Analisaremos também a relação da derivada com os intervalos de crescimento e decrescimento da função.

No capítulo subsequênte focaremos em analisar a Fórmula de Taylor em si, abordando sua estrutura e suas extensões, dentre as extensões vamos estipular o erro aproximado da Fórmula de Taylor, afinal a mesma se trata de uma aproximação e não de um valor exato.

No capítulo 3 abordaremos algumas aplicações da Fórmula de Taylor e Derivadas. O método de aproximações de raízes pode ser proposto usar no novo Ensino Médio, com a utilização de itinerários formativos o leque de possibilidades se apliou, pode-se então explorar ainda mais a matemática na educação básica, não precisando se limitar a cálculo de raízes exatas.

Ainda neste capítulo teremos outra aplicação essencial da Fórmula de Taylor que é o problema da Otimização. Esse problema em si se estende para diversas áreas das ciências exatas e também pode ser utilizado no novo Ensino Médio. Por fim a última aplicação proposta será o Método de Newton, pouco usado mas que facilita o cálculo de diversas funções.

1 Noções de Derivada

Neste capítulo revisaremos noções de derivadas, que serão essenciais para um melhor entendimento dos capítulos posteriores.

1.1 Reta Tangente

Dados $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in X$. O número

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

é a inclinação da reta secante ao gráfico de f que passa pelos pontos $P(a, f(a))$ e $Q(x, f(x))$. A reta que passa pelo ponto P(a,f(a)) e possui inclinação

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

é dita a reta tangente a curva $y = f(x)$ no ponto $P(a, f(a))$.

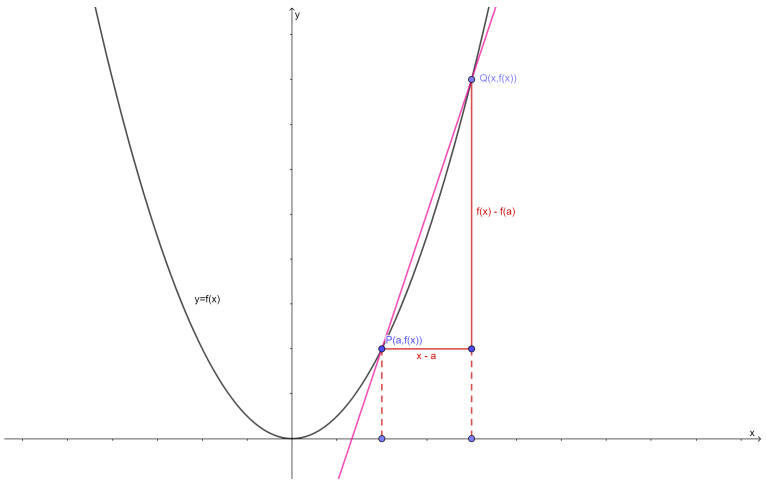


Imagem 1

É importante ressaltar que a equação da reta que passa por (x_1, y_1) com inclinação m é:

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

Exemplo 1.1. *A reta tangente à curva* $f(x) = x^2 + 2x + 1$, *tem inclinação*

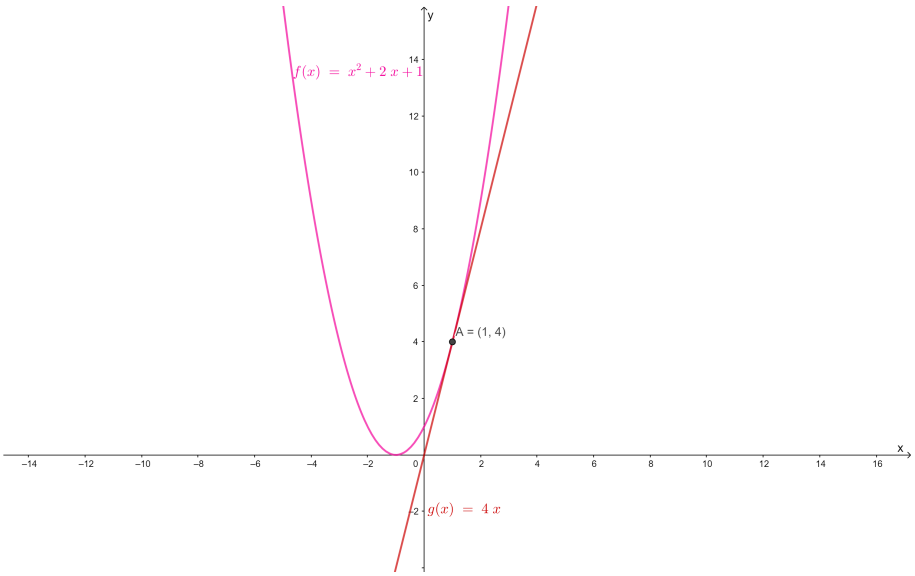
$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}. \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1}. \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1}. \\ &= \lim_{x\to 1} (x+3) = 1+3 = 4. \end{aligned}$$

Assim, encontramos que a tangente em $(1,4)$ *tem equação:*

$$y - 4 = 4(x-1)$$

ou seja

$$y = 4x.$$



Reta tangente a $y = f(x)$ *em* $(1,4)$

1.2 Derivadas

Um ponto $a \in \mathbb{R}$ *é dito ponto de acumulação de um conjunto* $X \subset \mathbb{R}$ *quando toda vizinhança* V *de* a *contém algum ponto de* X *diferente de* a*, denotaremos por* X' *o conjunto dos pontos de acumulação de* X*.*

Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $a \in X \cap X'$*. A derivada da função* f *no número* a*, é*

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Se tomarmos $h = x - a$*, então* $x = a + h$*, veja que* h *tende a 0, quando* x *tende a* a*. Assim sendo, podemos ter também*

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Quando existe f'(x) para todo $x \in X \cap X'$ *dizemos que* $f : X \cap \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é derivável no conjunto* X *e temos a função* $f' : X \cap X' \to \mathbb{R}$ *dado por*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(a)}{h}$$

chamada função derivável de f.

Denotaremos a derivada por:

$$f'(a),\ Df(a),\ \frac{df}{dx}(a)\ e\ \frac{df}{dx}\Big|_{x=a}$$

Teorema 1.1. *A fim de que* $f : X \to \mathbb{R}$ *seja derivável no ponto* $a \in X \cap X'$ *é necessário e suficiente que exista* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $a + h \in X$ *implica* $f(a+h) = f(a) + c.h + r(h)$, *onde* $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. *No caso afirmativo, tem-se* $c = f'(a)$.

Demonstração:

Seja $Y = \mathbb{R}$, *então* $0 \in Y \cap Y'$, *pois* $a \in X \cap X'$.

Suponha que f'(a) existe, defina

$$r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h$$

daí,

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$$

donde,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \lim_{h\to 0} f'(a)\\ &= f'(a) - f'(a) = 0.\end{aligned}$$

Logo, $c = f'(a)$ *e temos*

$$f(a+h) = f(a) + ch + r(h),\ \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Reciprocamente, se temos $f(a+h) = f(a)+ch+r(h)$, *com* $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$, *isso implica que*

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - c$$

como

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Então

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = c.$$

Exemplo 1.2. *A função $f(x) = \sqrt{9-x}$, tem derivada dada por.*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{9-x-h}-\sqrt{9-x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{9-x-h}-\sqrt{9-x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{9-x-h}+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x-h}+\sqrt{9-x}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{9-x-h-9+x}{h(\sqrt{9-x-h}+\sqrt{9-x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(\sqrt{9-x-h}+\sqrt{9-x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{\sqrt{9-x-h}+\sqrt{9-x}} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{9-x}+\sqrt{9-x}} \\
&= \frac{-1}{2\sqrt{9-x}}
\end{aligned}$$

Proposição 1.2. *(Regra da Potência). Dada uma função do tipo x^n, com n inteiro e positivo, teremos*

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+...+xa^{n-2}+a^{n-1})}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} (x^{n-1}+x^{n-2}a+...+xa^{n-2}+a^{n-1}) \\
&= a^{n-1}+a^{n-2}a+...+aa^{n-2}+a^{n-1} \\
&= na^{n-1}
\end{aligned}$$

Portanto, $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

Proposição 1.3. *(Regras de derivação).*

i) Multiplicação por Constante: Dada uma função f derivável e uma constante c, temos que:

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c.\frac{d}{dx}f(x);$$

ii) Regra da soma e da diferença: Dadas duas funções f e g, ambas deriváveis, vale que

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x);$$

iii) Regra do produto: Se f e g deriváveis, teremos

$$\frac{d}{dx}[f(x).g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x);$$

iv) Regra do quociente: Se f e g são deriváveis, com $g(x) \neq 0$*, então*

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}.$$

Demonstração:

i) Seja $g(x) = cf(x)$*, então*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[cf(c)] &= \frac{d}{dx}g(x) \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\left[c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] \\
&= c.\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] \\
&= cf'(x).
\end{aligned}$$

ii) Seja F(x)=f(x)+g(x), temos então

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] &= \frac{d}{dx}F(x) \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]+\lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\
&= f'(x)+g'(x)
\end{aligned}$$

Resultado análogo para $\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)]$*.*

iii) Seja F(x)= f(x).g(x), temos então

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] &= \frac{d}{dx}F(x) \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}+\frac{f(x+h)g(x)}{h}-\frac{f(x+h)g(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\left[(f(x+h))\frac{(g(x+h)-g(x)}{h}+(g(x))\frac{(f(x+h)-f(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h).\lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]+\lim_{h\to 0} g(x).\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] \\
&= f(x).\lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]+g(x).\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] \\
&= f(x)g'(x)+g(x)f'(x).
\end{aligned}$$

iv) Vejamos, por fim, $\left(\frac{f}{g}\right)'(a)$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x\to a}\left[\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{x-a}\right] \\
&= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}\cdot\frac{1}{g(x)g(a)}\right] \\
&= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)+(f(a)g(a)-f(a)g(a))}{x-a}\cdot\frac{1}{g(x)g(a)}\right] \\
&= \lim_{x\to a}\left[\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a)-f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)\frac{1}{g(x)g(a)}\right] \\
&= \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}
\end{aligned}$$

Teorema 1.4. *(Regra da Cadeia) Sejam* $f : X \to \mathbb{R}, g : Y \to \mathbb{R}, a \in X \cap X', b \in Y \cap Y', f(X) \subset Y e f(a) = b$. *Se* f *é derivável no ponto* a *e* g *é derivável no ponto* b *então* $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ *é derivável no ponto* a, *com* $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)).f'(a)$.

Demonstração:

Pelo Teorema 1.2, Temos $f(a+h)-f(a) = f'(a).h+r(h)$ *onde* $\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h} = 0$. *Temos também* $g(b+h_2)-g(b) = g'(b)h_2+\sigma(h_2), \lim_{h_2\to 0}\frac{\sigma(h_2)}{h_2} = 0$.

Tome

$$\begin{aligned}
k &= f(a+h)-f(a)(*) \\
&= f'(a).h+r(h) \\
&= [f'(a)+\rho].h, \rho = \frac{r(h)}{h}
\end{aligned}$$

De (*) temos

$$k = f(a+h) - f(a)$$
$$k = f(a+h) - b$$
$$f(a+h) = b + k$$

Veja que

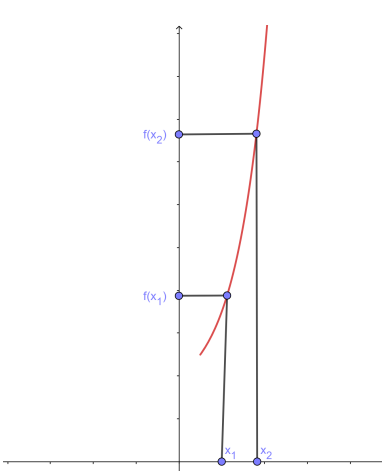
$$\begin{aligned}(g \circ f)(a+h) &= g[f(a+h)] - g(b+k) \\ &= g(b) + g'(b)k + \sigma(k) \\ &= g(b) + [g'(b) + \vartheta]k \\ &= g(b) + [g'(b) + \vartheta][f'(a) + \rho]h \\ &= g(b) + [g'(b).f'(a) + \theta]h\end{aligned}$$

onde, $\vartheta = \frac{\sigma(k)}{k}$ *e* $\theta = \theta(h) = \theta[f(a+h) - f(a)][f'(a) + \rho(h)] + g'(b).\rho.$

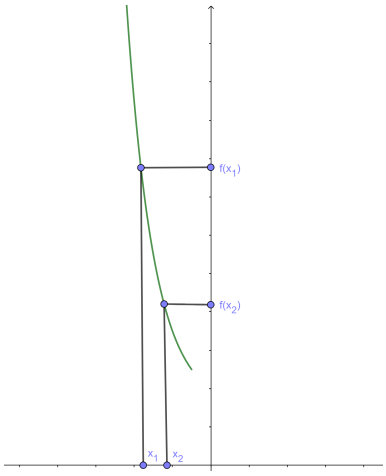
Como f é contínua em a e σ *é contínua em 0, temos* $lim_{h\to 0}\sigma(f(a+h) - f(a)) = 0 \Longrightarrow \lim_{h\to 0}\theta(h) = 0.$

1.3 Funções Crescentes e Decrescentes

Uma função é dita crescente quando tem-se $x_1 < x_2$*, em X tem-se* $f(x_1) < f(x_2)$*. De mesmo modo, ela é decrescente quando* $x_1 < x_2$*, em X tem-se* $f(x_1) > f(x_2)$*.*



Função Crescente



Função Decrescente

Definição 1.5. . *(Função Contínua) Uma função $f : X \to \mathbb{R}$, definida em $X \subset \mathbb{R}$, é dita contínua em $a \in X$ se, para todo $\epsilon > 0$ dado, pode-se ter $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Uma função diz-se contínua em $[a, b]$ quando é contínua em todos os pontos de $[a, b]$.*

Dada uma função f contínua em um intervalo $[a, b]$ e derivável em (a, b), temos que

i) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f será estritamente crescente em $[a, b]$;

ii) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f será estritamente decrescente em $[a, b]$.

Exemplo 1.3. *Vamos encontrar os intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x) = (x - 1)^2 \cdot (1 + x)^3$.*

Inicialmente vamos encontrar a derivada da função, usando a regra do produto e a regra da cadeia.

$f'(x) = 2(1 - x)(-1)(1 + x)^3 + (1 - x)^2 3(1 + x)^2 1$

$f'(x) = (1 - x)(1 + x)^2(-2 - 2x + 3 - 3x)$

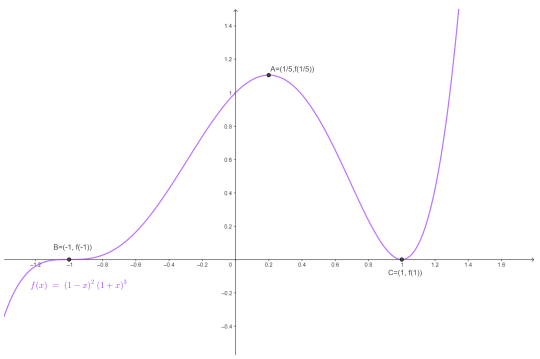
$f'(x) = (1 - x)(1 + x)^2(1 - 5x)$

Vamos fazer o estudo do sinal:

	-1	1/5	1	
(1-x)	+	+	+	-
$(1+x)^2$	+	+	+	+
(1-5x)	+	+	-	-
Sinal de f'(x)	+	+	-	+

Tabela dos sinais

É possível perceber então que a função é crescente no intervalo $(-\infty, -1) \cup (-\infty, 1/5) \cup (1, +\infty)$ e decrescente no intervalo $(1/5, +\infty)$. Observe o gráfico abaixo:



Exemplo 1.3

Definição 1.6. *(Máximo Local): Dada uma função $f : I \to \mathbb{R}$. A função f tem um máximo local em $a \in I$, quando existir $\delta > 0$, tal que $x \in I$ e $|x - a| < \delta$*

$$f(a) \geq f(x).$$

Analogamente f possui mínimo local quando existir $\delta > 0$, tal que $x \in I$ e $|x - a| < \delta$

$$f(a) \leq f(x).$$

2 Fórmula de Taylor

O polinômio de Taylor tem o intuito de aproximar uma função não trivial a um polinômio de grau n, em torno de um certo número a, definido em um intervalo I. Afinal as funções polinomiais são de fácil manuseio, possibilitando então que encontremos um valor muito próximo do desejado.

2.1 Polinômio de Taylor

Seja f uma função qualquer, a qual podemos representar como uma série de potências:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + ...$$

Observe que

$$f(a) = c_0$$

se derivarmos a função, teremos

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + ...$$

$$f''(x) = 2c_2 + 3.2c_3(x-a) + 4.3c_4(x-a)^2 + ...$$

$$f'''(x) = 3.2c_3 + 4.3.2c_4(x-a) + ...$$

então

$$f'(a) = c_1$$

$$f''(a) = 2c_2 = 2!c_2$$

$$f'''(a) = 3.2c_3 = 3!c_3.$$

Logo, para a n-ésima derivada n:

$$f^n(a) = n!c_n$$

$$c_n = \frac{f^n(a)}{n!}.$$

Definição 2.1. *(Polinômio de Taylor). Dado uma função $f : I \to \mathbb{R}$, derivável n vezes no ponto $a \in I$, o polinômio de Taylor, de ordem n de f, no ponto a é o polinômio:*

$$p(h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n.$$

Exemplo 2.1. *Dada a função* $f(x) = \sqrt{x}$.

Note que,

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}.$$

Donde,

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} P(h) &= f(1) + f'(1)h \\ &= \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}h \\ &= 1 + \frac{1}{2}h. \end{aligned}$$

É o polinômio de Taylor de ordem 1 de f *em 1.*

Definição 2.2. *(Série de Maclaurin). A Série de Maclaurin corresponde ao Polinômio de Taylor centrado em* $a = 0$.

$$p(h) = f(0) + f'(0).h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}h^n.$$

Exemplo 2.2. *Usando a Série de Maclaurin vamos encontrar o valor de* e, *onde* e *é o número de Euler dado por* $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, *com aproximação de duas casas decimais, usando a funçao* $f(x) = e^x$.

Como a derivada de $e^x = e^x$, *teremos que*

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = ... = f^n(0) = 1,$$

assim sendo, teremos que:

$$\begin{aligned} P(h) &= f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)h^2}{2!} + \frac{f''(0)h^3}{3!} \\ &= 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!}. \end{aligned}$$

Como queremos o valor de e, *vamos considerar* $h = 1$.

$$\begin{aligned} P(1) &= 1+1+\frac{1^2}{2!}+\frac{1^3}{3!} \\ &= 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6} \\ &= 2,67. \end{aligned}$$

2.2 Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange

Por ser uma aproximação, o Polinômio de Taylor possui um erro que pode ser estimado. Esse erro está associado à ordem superior a do polinômio. Seja, $R(x)$ o resto do Polinômio de Taylor, ele é definido por

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

onde z é um número compreendido entre x e a. Essa expressão recebe o nome de Resto de Lagrange. Vale ressaltar que

$$f(x) = P_n(x) + R(x)$$

Teorema 2.3. *(Teorema de Rolle). Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, com $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em (a,b) então existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração:

Por Weierstrass, temos que a função f possui um mínimo m e um máximo M em um intervalo $[a,b]$.

Se o mínimo e máximo forem os extremos, então teríamos $m = M$ e a função f seria constante, logo $f'(x) = 0$, para todo $x \in (a,b)$.

Se m ou M estiverem em (a,b), digamos $c \in (a,b)$, então $f'(c) = 0$.

Teorema 2.4. *(Fórmula de Taylor com resto de Lagrange). Dada uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ n vezes derivável em (a,b), com f^{n-1} contínua em $[a,b]$. Existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + ... + \frac{f^{n-1}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^n(c)}{n!}(b-a)^n.$$

Demonstração:

Defina $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ como

$$\varphi(x) = f(b) - f'(x)(b-a) - ... - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - \frac{K}{n!}(b-x)^n,$$

onde K é constante e definida de modo que $\varphi = 0$. Logo, φ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), com $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. É fácil ver que

$$\varphi'(c) = \frac{K - f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}.$$

Pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $\varphi'(c) = 0$. Ou seja $f^{(n)}(c)$.

Definição 2.5. *(Desigualdade de Taylor) Se $|f^{n+1}(x)| \leq M$ para $|x - a| \leq d$, então o resto da série de Taylor satisfaz a desigualdade*

$$|R(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}, |x-a| \leq d.$$

Exemplo 2.3. *Utilizando polinômio de Taylor de ordem 2, calcule um valor aproximado e avalie o erro de* $\ln 1,3$.

Solução:

Seja $f(x) = \ln x$, inicialmente vamos encontrar a derivada de f até a ordem 2.

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Como queremos encontrar $\ln 1,3$*, vamos fazer o Polinômio centrado em $a = 1$.*

$$\begin{aligned} P(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 \\ &= 0 + 1.(x-1) - \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) \\ &= x - 1 - \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} \\ &= 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Para $x = 1,3$, teremos

$$\begin{aligned} P(1,3) &= 2.1,3 - \frac{1,3^2}{2} - \frac{3}{2} \\ &= 2,6 - \frac{1,69}{2} - 1,5 \\ &= 2,6 - 0,845 - 1,5 \\ &= 0,255. \end{aligned}$$

Vamos avaliar o erro, como determinamos o Polinômio no grau 2, o erro está no grau superior, no caso grau 3. Veja que

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Temos então que o erro ou resto $R(x)$ será, centrando ainda em $a = 1$ e fazendo $x = 1,3$,

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{\frac{2}{1,3^3}}{3!}(1,3-1)^3 \\ &= \frac{2}{6.2,197}(0,3)^3 \\ &= \frac{2}{13,182}.0,027 \\ &= 0,00409. \end{aligned}$$

Observe que o resultado obtido é exato até duas casas decimais.

2.3 Fórmula de Taylor Infinitesimal

Lema 2.6. *Seja $r : J \to \mathbb{R}$, em que $J = \{h \in \mathbb{R}; a + h \in I\}$, n vezes derivável no ponto $0 \in J$, com $r(0) = r'(0) = ... = r^n(0)$ para $i = 0, 1, ..., n$, é necessário e suficiente que $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$.*

Demonstração:

Suponha que pata todo $i = 0, 1, ..., n$, temos $r^i(0) = 0$. Para $n = 1$, $r(0) = r'(0) = 0$. Então,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^1} &= \lim_{h\to 0} \frac{r(h) - r(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{r(0+h) - r(0)}{h} \\ &= r'(0) = 0. \end{aligned}$$

Para $n = 2$, temos $r(0) = r'(0) = r''(0) = 0$, logo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{r'(x)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{r(0+x)-r(0)}{x}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

Do Teorema do Valor Médio, temos que se $h \neq 0$*, para todo* $h \neq 0$*, existe* $x \in]0, h[$ *tal que*

$$\frac{r(h)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{r'(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{r'(x)}{x}\frac{x}{h} = 0,$$

já que $h \to 0$ *implica* $x \to 0$ *e* $|\frac{x}{h}| \leq 1$*. Do mesmo raciocício vale para n=2, n=3,...*

Teorema 2.7. *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função no ponto* $a \in I$*. Então*

(1) *Seja* $r : J \to \mathbb{R}$*, definida no intervalo* $J = h \in \mathbb{R}; a + h \in I$*,* r *cumpre* $lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^n} = 0$*;*

(2) *Se p(h) é um polinômio de grau* $\leq n$*, tal que* $r(h) = f(a + h) - p(h)$ *que satisfaz* (1)*, então* $p(h)$ *é o Polinômio de Taylor de ordem n no ponto a.*

Demonstração:

(1) *A função r é n vezes diferenciável no ponto 0 e* $f(0) = f'(0) = ... = f^{'(0)=0.}$ *Logo, pelo Lema 1, vale* $lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^n} = 0$*;*

(2) *Se* $r(h) = f(a+h)-p(h)$ *é tal que* $lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^n} = 0$ *então, do Lema 1,* $f(0) = f'(0) = ... = f^{(n)}(0) = 0$*, logo* $p^i(0) = f^i(a) > 0$*, para* $i = 0, 1, ..., n$*, logo p(h) é o Polinômio de Taylor de ordem n.*

3 Aplicações

Neste capítulo abordaremos as aplicações da Fórmula de Taylor e das Derivadas. Essas aplicações auxíliam na resolução de problemas matemáticos.

3.1 Aproximação de Raízes

É comum nos depararmos com raízes não exatas quando estamos resolvendo um problema matemático. Com a fórmula de Taylor podemos estimar um valor aproximado para essas raízes. É importante destacar que devemos fixar um valor de a próximo do valor pedido, assim o resultado fica com uma taxa de erro menor e conseguimos fazer uma aproximação melhor.

Exemplo 3.1. *Considere a função* $f(x) = \sqrt{x}$*, vamos encontrar o valor aproximado de* $\sqrt{4,1}$*.*

Como o valor procurado é $\sqrt{4,1}$ *vamos centrar o Polinômio de Taylor em* $a = 4$*. Como* 4 *está muito próximo de* $4,1$*, faremos a aplicação no Polinômio de grau 1, assim sendo*

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

então

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(4) + f'(4)(x-4) \\ &= \sqrt{4} + \frac{4}{2\sqrt{4}}(x-1) \\ &= 2 + \frac{1}{4}(x-1). \end{aligned}$$

Para x=4,1 teremos

$$\begin{aligned} P_1(4,1) &= 2 + \frac{1}{4}(4,1-4) \\ &= 2 + \frac{1}{4}(0,1) \\ &= 2 + 0,025 \\ &= 2,025. \end{aligned}$$

Vamos agora estimar o erro do Polinômio de Taylor, utilizando o Resto de Lagrange. Como calculamos o Polinômio de grau 1, o erro está associado ao grau 2, calculemos então a derivada de ordem 2 da função:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x^3}} \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}. \end{aligned}$$

Temos então que o erro $R(x)$ da função, centrado em $a = 4$ corresponde a

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{-\frac{1}{4\sqrt{4^3}}}{2!}(x-4)^2 \\ &= -\frac{1}{64}(x-4)^2. \end{aligned}$$

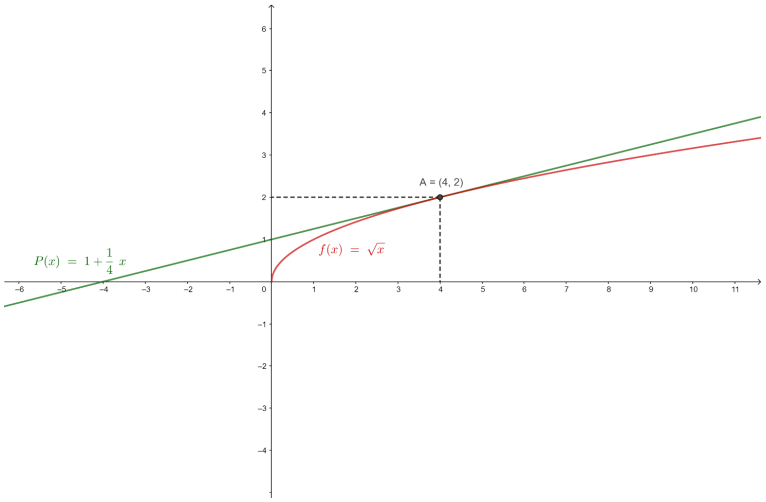
Em $x = 4,1$, temos que

$$\begin{aligned} R(4,1) &= -\frac{1}{64}(4,1-4)^2 \\ &= -\frac{1}{64}0,1^2 \\ &= -\frac{1}{64}0,01 \\ &= -0,00015625 \end{aligned}$$

Do Polinômio de Taylor com Resto de Lagrange teremos:

$$\begin{aligned} P(4,1) &= 2,025 - 0,00015625 \\ &= 2,02484375 \\ &= \sqrt{4,1} \approx 2,024 \end{aligned}$$

Usando a calculadora encontramos que $\sqrt{4,1} \approx 2,024$, oberve o gráfico abaixo:



Exemplo 3.1

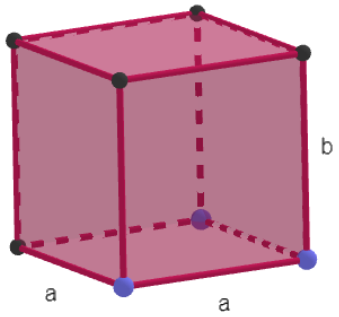
3.2 Problemas de Otimização

A otimização consiste em maximizar ou minimizar uma função. O método de otimização pode ser usado em problemas do dia-a-dia como cálculo de áreas, volumes, lucro, prejuízo, dentre outros.

Ela consiste em derivar uma função e iguala-la a 0, ou seja, dada uma função f, vamos fazer $f' = 0$ e resolver a equação. O maior valor encontrado é o máximo e o menor é o mínimo.

Exemplo 3.2. *Se* $1200cm^2$ *de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, para encontrar o maior volume possível da caixa.*

Suponha que a caixa possua as dimensões abaixo:



Caixa

Veja que:

$$A = a^2 + 4ab = 1200$$
$$b = \frac{1200 - a^2}{4a}.$$

Temos então que o volume será

$$\begin{aligned} V &= a^2 b \\ &= a^2(\frac{1200 - a^2}{4a}) \\ &= \frac{1200a - a^3}{4}. \end{aligned}$$

Como queremos maximizar o volume, vamos derivar a função e igualar a zero.

$$V' = \frac{1200 - 3a^2}{4} = 0.$$

Donde,

$$1200 - 3a^2 = 0$$
$$a^2 = 400$$
$$a = 20.$$

Agora vamos descobrir o valor da altura b da caixa:

$$\begin{aligned} b &= \frac{1200 - 20^2}{4.20} \\ &= \frac{800}{80} \\ &= 10. \end{aligned}$$

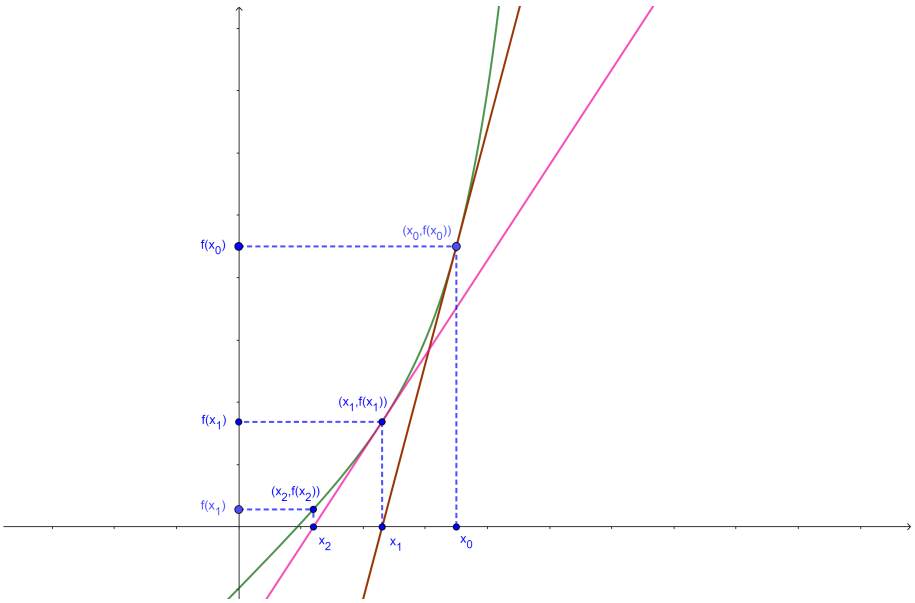
Logo o volume máximo da caixa será

$$\begin{aligned} V &= a^2 b \\ &= 20^2.10 \\ &= 4000cm^3. \end{aligned}$$

Este é um exemplo de aplicação de otimização, esse processo é muito útil tanto na matemática como em outras àreas das ciências exatas, como a engenharia.

3.3 Método de Newton

O Método de Newton é utilizado para determinar as raízes aproximadas de uma função f. Considere o gráfico abaixo:



Considerando que a inclinação da reta tangente m corresponde a derivada da função f, observe que escolhendo um x_0 qualquer e traçarmos a reta tangente ao ponto $(x_0, f(x_0))$, fazendo $y = 0$, temos

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ -f(x_0) &= f'(x_0)(x_1 - x_0) \\ -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} &= x_1 - x_0 \\ x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \end{aligned}$$

Tomando agora o ponto $(x_1, f(x_1))$ e passando a reta tangente nesse ponto, do mesmo raciocinio para encontrar x_1, teremos

$$\begin{aligned} -y_1 &= m(x_2 - x_1) \\ -f(x_1) &= f'(x_1)(x_2 - x_1) \\ -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} &= x_2 - x_1 \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \end{aligned}$$

De forma geral:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$
$$\vdots$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
$$\vdots$$

Essa expressão é chamada de Método de Newton. Se (x_n) convergir, seu limite será raíz da equação $f(x) = 0$, pois, fazendo $n \to \infty$ em

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

tem-se

$$a = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$
$$f(a) = 0.$$

Exemplo 3.3. *O número 1,0754 é um valor aproximado, com 4 algarismos decimais exatos, da raíz positiva da equação* $x^6 + 6x - 8 = 0$.

De fato;

Veja que temos $f(x) = x^6 + 6x - 8$ *e* $f'(x) = 6x^5 + 6$, *na qual a única raíz real de* $f'(x)$ *é em* $x = -1$. *Observe que* $f(1) = -1$, *logo vamos assumir* $x_0 = 1$ *e usar o método de Newton. Com*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{{x_n}^6 + 6x_n - 8}{6{x_n}^5 + 6}.$$

Dessa forma:

$$x_0 = 1$$
$$x_1 = 1 - \frac{-1}{12} = 1,083$$

$$x_2 = 1,083 - \frac{-0,111}{14,939} = 1,07554$$
$$x_3 = 1,07554 - \frac{0,00119}{14,6354} = 1,0754.$$

É possível notar que já no x_3 a função se estabiliza, concluindo então a aproximação com 3 dígitos. Desse fato podemos afirmar que o método de Newton converge rápido.

Exemplo 3.4. *Defina $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ pondo $f(x) = 2^{\frac{-x}{2}}$. Mostre que f é uma contração (Ver [4], página 108) e que, se a é seu ponto fixo, -a é a raíz negativa da equação $x^2 = 2^x$. Use o método de Newton para obter o valor de a com 8 algarismos decimais exatos.*

Derivando a função

$$f'(x) = \frac{-\ln(2)2^{\frac{-x}{2}}}{2}$$

observamos que $|f'(x)| \leq 2^0 = 1$ e $2^{\frac{x}{2}}$ é crescente. Daí

$$\frac{\ln(2)}{2} < 2^{\frac{x}{2}} \Longrightarrow |f'(x)| = \frac{\ln(2)}{2.2^{\frac{x}{2}}} < 1.$$

Logo f é uma contração. Temos então que f possui um único ponto fixo a

$$2^{\frac{-a}{2}} = a \Longrightarrow 2^{-a} = a^2$$

e $-a$ é a raíz negativa de $2^x = x^2$.

Tomando $x_0 = 0$, temos

$$x_1 = 2^{\frac{-x_0}{2}} = 1$$
$$x_2 = 2^{\frac{-x_1}{2}} = 0,70710678$$
$$x_3 = 2^{\frac{-x_2}{2}} = 0,78265402$$
$$x_4 = 2^{\frac{-x_3}{2}} = 0,76247990$$
$$x_5 = 2^{\frac{-x_4}{2}} = 0,76779123$$
$$x_6 = 2^{\frac{-x_5}{2}} = 0,76636542$$
$$x_7 = 2^{\frac{-x_6}{2}} = 0,76674421$$
$$x_8 = 2^{\frac{-x_7}{2}} = 0,76664356$$
$$x_9 = 2^{\frac{-x_8}{2}} = 0,76666031$$
$$x_{10} = 2^{\frac{-x_9}{2}} = 0,76666320$$

$$x_{11} = 2^{\frac{-x_1 0}{2}} = 0,76666509$$
$$x_{12} = 2^{\frac{-x_1 1}{2}} = 0,76666459$$
$$x_{13} = 2^{\frac{-x_1 2}{2}} = 0,76666472$$
$$x_{14} = 2^{\frac{-x_1 3}{2}} = 0,76666469$$
$$x_{15} = 2^{\frac{-x_1 4}{2}} = 0,766664698.$$

O valor de a com 8 algarismos exatos é $0,76666469$.

4 Considerações Finais

A Fórmula de Taylor está na grade de Cálculo e de Análise Real, ainda assim em grande parte dos casos o conteúdo nao é abordado, isto porque o curso possui uma grade extensa e um período de aulas curto, impossibilitando então discorrer o conteúdo ou abordando de maneira insuficiente.Sendo assim, o interesse em pesquisar e entender esse Polinômio deve partir do aluno

O embasamento teórico deste trabalho foi, em suma, através de livros de Cálculo que possibilita uma abordagem direta da Fórmula, juntamente com diversas aplicações, e também de livros de análise, o qual apresenta uma abordagem analítica da Fórmula.

O objetivo deste trabalho era definir a Fórmula de Taylor e sugerir aplicações, tanto para ela quanto para as derivadas em si. O primeiro passo foi apresentar a derivada, as diversas maneiras de escrevê-la e suas regras operacionais. Uma regra importante, a qual utiliza-se muito no decorrer dos capítulos foi a regra da potência e a regra da cadeia.

Após introduzir o conceito de derivada, a segunda parte do trabalho foi apresentar a Fórmula de Taylor, sua definição formal e estabelecer que ela se trata de uma aproximação, logo o resultado obtivo não é exato. Estabelecemos também o Erro dessa Fórmula, conhecido com Resto de Lagrange, que quando somado à Fórmula de Taylor resulta no valor mais aproximado ainda da função.

Por fim, o trabalho abordou diversas aplicações da Fórmula de Taylor e da derivada, conseguindo então atender o objetivo principal.

Esse método ainda não é muito utilizado no Ensino Superior, porém algumas abordagens do mesmo podem ser inseridos no Novo Ensino Médio, fazendo com que os alunos abram mais a mente na área da Matemática.

Referências

[1] DIEDERICHSEN, J. *Taylor, Brook (1685-1731).* FEM. Disponível em: http://www.fem.unicamp.br/ em313/paginas/person/taylor.htm. Acesso em 15 de outubro de 2022.

[2] GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo: Volume 1.* Brasil, Rio de Janeiro: LTC, 2013.

[3] LIMA, E. L. *Curso de Análise: Volume 1.* Brasil, Rio de Janeiro: Impa, 2014.

[4] LIMA, E. L. *Análise Real: Funções de Uma Variável.* Brasil, Rio de Janeiro: IMPA, 2020.

[5] STEWART, J. *Cálculo: Volume 1.* Brasil, São Paulo: Trilha, 2014.

[6] STEWART, J. *Cálculo: Volume 2.* Brasil, São Paulo: Trilha, 2016.

[7] NEVES, W. *Uma Introdução à Análise Real.* Brasil, Rio de Janeiro: UFRJ, 2014.

Apêndice A

Neste apêndice enunciaremos e demonstraremos o Teorema de Weierstrass, usado para demonstrar o Teorema de Rolle na seção 2.2. Também enuniaremos e demonstraremos o Teorema do Valor Médio de Lagrange, usado para demonstrar a Fórmula de Taylor Infinitesimal, na seção 2.3.

Definição A.1. *Todo conjunto $X \subset \mathbb{R}$ compacto contém um elemento mínimo e um elemento máximo. Ou seja, se X é compacto, então existem x_0 e $x_1 \in X$ tais que $x_0 \leq x \leq x_1$.*

Teorema A.2. *(Teorema de Weierstrass): Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua no conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$. Existem $x_0, x_1 \in X$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in X$.*

Demonstração:

X compacto $\Longrightarrow$ f(X) compacto.

Logo, $f(X)$ possui um elemento mínimo $f(x_0)$ e um elemento máximo $f(x_1)$, ou seja existem $x_0, x_1 \in X$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1), \forall x \in X$.

Teorema A.3. *(Teorema do Valor Médio de Lagrange) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a, b), existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demonstração:

Considere a função auxiliar $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = f(x) - dx,$$

sendo

$$d = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$, ou seja,

$$f'(c) = d = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$