

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE
CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

FRANCISCO AURELIANO VIDAL

**SEÇÕES CÔNICAS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA NO ENSINO MÉDIO
UTILIZANDO O GEOGEBRA**

Dissertação apresentada à banca examinadora como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática – Área de Concentração “Ensino de Matemática”, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Alagoas.

Orientador: Prof. Dr. Givaldo Oliveira dos Santos

Maceió, AL
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE
CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

FRANCISCO AURELIANO VIDAL

**SEÇÕES CÔNICAS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA NO ENSINO MÉDIO
UTILIZANDO O GEOGEBRA**

Dissertação apresentada à banca examinadora como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática – Área de Concentração “Ensino de Matemática”, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Alagoas.

Orientador: Prof. Dr. Givaldo Oliveira dos Santos

Maceió, AL
2013

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Fabiana Camargo dos Santos

V648s Vidal, Francisco Aureliano.
Seções cônicas : uma sequência didática no ensino médio utilizando o
GeoGebra / Francisco Aureliano Vidal. – 2013.
119 f. : il.

Orientador: Givaldo Oliveira dos Santos.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade
Federal de Alagoas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e
Matemática. Maceió, 2013.

Bibliografia: f. 98-100.

Apêndices: f. 101-119

1. Matemática – Ensino. 2. Ensino médio. 3. Cônicas – Aplicações didáticas.
4. Cônicas – História. 5. Software GeoGebra. I. Título.

CDU: 514.12:371.693

FRANCISCO AURELIANO VIDAL

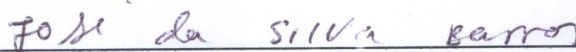
**SEÇÕES CÔNICAS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA NO ENSINO MÉDIO
UTILIZANDO O GEOGEBRA**

Dissertação apresentada à banca examinadora como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática – Área de Concentração “Ensino de Matemática”, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Alagoas, aprovada em 14 de junho de 2013.

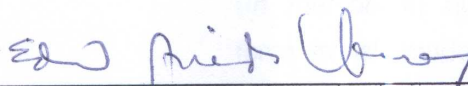
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Givaldo Oliveira dos Santos
(IFAL)
(Orientador e presidente)



Prof. Dr. José da Silva Barros
(Campus Arapiraca/UFAL)



Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra
(IM/UFAL)

Dedico este trabalho aos meus pais Luiz Vidal da Luz e minha mãe Raimunda Xavier da Luz (*In memoriam*) que sempre acreditaram na força transformadora da educação, educando com amor, dedicação e principalmente com seus exemplos de vida seus 15 filhos.

AGRADECIMENTOS

A Deus, autor de nossa existência.

A Valdineide, minha esposa, pelo indispensável incentivo e incansável apoio.

A Larissa, minha filha, minha inspiração.

Aos meus pais, que sempre acreditaram na importância do saber e a mim sempre depositaram dispensada confiança.

A todos os meus 15 irmãos pelo incentivo aos estudos desde a infância e por me ensinarem que, apesar das dificuldades, quando se acredita tudo é possível de se realizar.

A Givaldo, orientador, que, com profissionalismo, não mediu esforços para trilhar-me no fantástico caminho desta pesquisa.

A todos os colegas e professores do PPGEICIM que colaboraram, direta e indiretamente para a realização deste trabalho.

Ao professor Dr. Ediel Azevedo Guerra e o professor Dr. José da Silva Barros pelas contribuições e sábias sugestões.

A todos os colegas de trabalho da Escola Estadual Djanira Santos Silva que sempre me apoiaram durante todo o processo de estudos.

RESUMO

As cônicas são utilizadas como ferramentas em várias situações, tanto na Matemática como em outras áreas do conhecimento (Física, Engenharia, Arquitetura, Astronomia, etc.). É um tópico rico na sua constituição porque permite muitas aplicações práticas. Este trabalho tem por objetivo proporcionar ao professor de matemática do ensino médio uma sequência didática para o ensino de cônicas utilizando o software GeoGebra. Neste sentido construímos esta sequência levando em consideração as teorias de Mudança de Quadros de Régine Douady (1987) e da Transposição Didática de Yves Chevallard (1991) onde discutimos as interações entre os diferentes quadros, principalmente o algébrico e o geométrico, visualizados com o software e também a utilização da história das seções cônicas e de suas aplicações em outras áreas como fator de motivação dos alunos por este tema. A metodologia se deu através de levantamento bibliográfico, considerando obras nacionais e internacionais com especial atenção ao conteúdo cônicas, elaboração de questionário com a finalidade de diagnosticar se os alunos, do terceiro ano do ensino médio, já estudaram conteúdos de geometria analítica que são requisitos para o tema seções cônicas, abrangendo também o ponto de vista desses alunos em relação à importância das cônicas em outros campos do conhecimento. Além disso, foi feita uma análise de quatro livros didáticos aprovados pelo MEC com o intuito de verificar como trazem para a sala de aula as seções cônicas enquanto saber a ensinar e de que modo estas obras trabalham as aplicações deste conteúdo no cotidiano e em outras áreas do conhecimento. A pesquisa em sala de aula efetivou-se por meio da aplicação da sequência didática com alunos do terceiro ano do ensino médio de uma escola pública do interior de Alagoas, com a realização de dez encontros programados para a aplicação da mesma. Os resultados alcançados nos permitem afirmar que esta forma de se ensinar este conteúdo pode, de fato, contribuir para a efetivação da aprendizagem. Esperamos contribuir com professores de Matemática para tornar o ensino deste tema mais interessante.

Palavras-chave: Cônicas. Ensino. Aplicações. Contexto histórico. GeoGebra.

ABSTRACT

Conics are used as tools in various situations, both in mathematics and in other areas of knowledge (physics, engineering, architecture, astronomy, etc..). It's a rich topic in its constitution because it allows many practical applications. This work aims to provide the teacher of high school mathematics teaching sequence for teaching conic using the software GeoGebra. In this sense we construct this sequence considering theories Change Tables Régine Douady (1987) and the Didactic Transposition Yves Chevallards (1991) where we discuss the interactions between different frames, especially the algebraic and geometric, visualized with the software and also the use of the history of conic sections and their applications in other areas such as motivating factor for the students in this topic. The methodology was through literature, considering national and international works with special attention to the content conic, questionnaire design in order to diagnose whether students, the third year of high school, have studied the contents of analytic geometry that are required for the theme conic sections, covering also the point of view of these students about the importance of conic sections in other fields of knowledge. Furthermore, an analysis of four textbooks approved by the MEC in order to see how they bring to the classroom the conic sections as knowledge to be taught and how these applications work works in the daily contents of this and other areas knowledge. The research in the classroom was accomplished by applying the instructional sequence with students of the third year of high school in a public school in the interior of Alagoas, with the holding ten meetings scheduled for implementation. The results obtained allow us to state that this form of teaching this content can, in fact, contribute to effective learning. We hope to contribute to mathematics teachers to make the teaching of this subject more interesting.

Keywords: Conical. Education. Applications. Historical context. GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Esquema teórico representacional do processo didático proposto por Chevallard 1991.....	22
Figura 2 - Tela do GeoGebra 4.2 com as três zonas de trabalho	34
Figura 3 - Seções cônicas de Menaecmus	37
Figura 4 - Cone de duas folhas	41
Figura 5 - Trajetória parabólica do movimento dos projéteis.....	48
Figura 6 - Cônicas definidas por cinco pontos (elipse, parábola e hipérbole)	51
Figura 7 - Teorema do hexagrama místico de Pascal.....	52
Figura 8 - Teorema de Brianchon.....	56
Figura 9 - Parábola	58
Figura 10 - Elipse	59
Figura 11 - Elementos principais da elipse.....	60
Figura 12 - Hipérbole.....	61
Figura 13 - Elementos principais da hipérbole	61
Figura 14 - Trajetória elíptica dos planetas em torno do sol (1ª lei de Kepler)	63
Figura 15 - Representação da 2ª lei de Kepler.....	63
Figura 16 - Ponte Golden Gate, Califórnia - Estados Unidos	65
Figura 17 - Usina nuclear de Three Mile Island, nos EUA	65
Figura 18 - Antena parabólica	66
Figura 19 - Esquema de um telescópio refletor	66
Figura 20 - Esquema feito com o GeoGebra do sistema LORAN	67
Figura 21 - Parábola construída no GeoGebra	73
Figura 22 - Elipse construída no GeoGebra.....	74
Figura 23 - Hipérbole construída no GeoGebra	76

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Índice de respostas quanto ao estudo de geometria analítica	80
Tabela 2 - Índice de respostas quanto aos conteúdos estudados em geometria analítica	80
Tabela 3 - Índice de respostas quanto aos recursos para se aprender seções cônicas	82
Tabela 4 - Índice de respostas quanto ao uso de programas de computador para melhorar a aprendizagem sobre seções cônicas	83
Tabela 5 - Índice de respostas quanto ao desenvolvimento do espírito de curiosidade em relação à matemática do dia a dia.....	84
Tabela 6 - Índice de respostas quanto a relação entre a matemática aprendida sobre as seções cônicas e a realidade do aluno.....	84
Tabela 7 - Índice de respostas quanto a relação entre as seções cônicas e outras áreas do conhecimento	85

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Critérios selecionados para análise dos livros didáticos	28
Quadro 2 - Descrição dos códigos para classificação dos livros analisados.....	30
Quadro 3 - Comparativo quanto ao uso dos critérios adotados	31
Quadro 4 - Previsão para os 10 encontros	71
Quadro 5 - Atividade referente a parábola	88
Quadro 6 - Atividade referente a elipse	91
Quadro 7 - Atividade referente a hipérbole	93

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Respostas dos alunos na atividade 1	89
Gráfico 2 - Respostas dos alunos na atividade 2	92
Gráfico 3 - Respostas dos alunos na atividade 3	94

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
1 PROBLEMÁTICA	16
1.1 Justificativa.....	16
1.2 Problema	17
1.3 Hipóteses	18
1.4 Procedimentos metodológicos	18
1.5 Referenciais teóricos	20
2 ESTUDOS PRELIMINARES	23
2.1 Proposta dos PCNEM.....	23
2.2 Orientações curriculares para o Ensino Médio	25
2.3 Guia de livros didáticos: PNLD 2012	27
2.4 Análise de livros didáticos	28
2.5 O software GeoGebra.....	32
3 AS SEÇÕES CÔNICAS	36
3.1 A evolução histórica das seções cônicas.....	36
3.1.1 Seções cônicas na Grécia.....	36
3.1.2 A alta Idade Média	45
3.1.3 A Renascença	46
3.1.4 A Matemática Moderna	47
3.2 As três cônicas.....	57
3.2.1 A parábola.....	58
3.2.2 A elipse.....	59
3.2.3 A hipérbole	60
3.3 Aplicações das seções cônicas no cotidiano.....	62
4 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA	68
4.1 Definição de sequência didática	68
4.2 A sequência didática proposta	69

4.3	Proposta de ensino das seções cônicas com turmas do ensino médio ..	69
4.4	As sessões de ensino	72
4.4.1	Sessão 1: Construção da parábola	72
4.4.2	Sessão 2: Construção da elipse	74
4.4.3	Sessão 3: Construção da hipérbole	75
5	EXPERIMENTAÇÃO	78
5.1	O questionário	78
5.1.1	Análise do questionário: um diagnóstico inicial	79
5.1.2	Expectativas dos alunos quanto ao estudo das seções cônicas	81
5.2	Preparação para aplicação das sessões de ensino	86
5.3	Análise didática e matemática das atividades propostas.....	87
5.3.1	Aplicação e análise da sessão 1 - Parábola.....	
5.3.2	Aplicação e análise da sessão 2 - Elipse	90
5.3.3	Aplicação e análise da sessão 3 - Hipérbole.....	93
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	96
	REFERÊNCIAS	98
	APÊNDICE A - QUESTIONÁRIO APLICADO COM OS ALUNOS	101
	APÊNDICE B - CONSTRUÇÃO DE UMA PARÁBOLA	104
	APÊNDICE C - SUGESTÃO DE ATIVIDADE SOBRE A PARÁBOLA	106
	APÊNDICE D – CONSTRUÇÃO DE UMA ELIPSE.....	109
	APÊNDICE E - SUGESTÃO DE ATIVIDADE SOBRE A ELIPSE	112
	APÊNDICE F - CONSTRUÇÃO DE UMA HIPÉRBOLE	114
	APÊNDICE G - SUGESTÃO DE ATIVIDADE SOBRE A HIPÉRBOLE.....	117

INTRODUÇÃO

A educação nos dias de hoje tem um grande desafio a superar no que diz respeito à aprendizagem, pois, para que a mesma ocorra, é preciso que o conteúdo a ser ensinado para o aluno se torne atraente e, ao mesmo tempo, o motive a interessar-se pelo tema em estudo. Acreditamos que isso é possível na medida em que o educando percebe suas aplicações em outros campos do saber e sua importância enquanto conteúdo historicamente construído. De acordo com Agranonih (2001, p. 4):

O aprender e o ensinar são processos próprios do ser humano e, acontecem ao longo da vida, em contextos informais como a família, a natureza, a comunidade; no cultivo de tradições culturais e de valores; em contextos formais como a escola; e no contato com os conhecimentos clássicos construídos ao longo da história da humanidade.

Faz-se necessário valorizar esses aspectos e inserir essas discussões em sala de aula para proporcionar uma aprendizagem mais efetiva.

Nesse estudo tratamos das seções cônicas (elipse, hipérbole e parábola) que constituem um capítulo à parte da Geometria Analítica no terceiro ano do ensino médio. Segundo Sato (2004, p.1) “As seções cônicas são curvas obtidas pela interseção de um cone circular reto de duas folhas com um plano”. Nessa definição, dependendo da posição do plano que intersecta o cone, podem-se visualizar as cônicas. Para Boyer (1974, p. 107-108):

Foi Apolônio (talvez seguindo sugestão de Arquimedes) quem introduziu os nomes elipse e hipérbole para essas curvas. As palavras “elipse”, “parábola” e “hipérbole” não foram inventadas expressamente; foram adotadas de uso anterior, provavelmente pelos pitagóricos, na solução de equações quadráticas pela aplicação de áreas. Ellipsis (significando falta) tinha sido a palavra usada quando um retângulo de área dada era aplicado a um segmento e lhe faltava um quadrado (ou outra figura especificada), e hyperbola (um lançamento além) tinha sido a palavra usada quando a área excedia o segmento. A palavra parábola (indicando colocar ao lado ou comparação) não indicava nem excesso nem deficiência.

Esses nomes, segundo este autor, foram dados num contexto novo como nomes para as seções planas. A obra de Apolônio influenciou vários estudos importantes feitos posteriormente. Para Sato (2004, p. 4):

Foi a Matemática pura de Apolônio que permitiu, cerca de 1.800 anos mais tarde, os “Principia” de Sir Isaac Newton. A lei da gravitação de Newton

matematizou as descobertas empíricas de Kepler e, a partir do século dezessete, possibilitou o estudo analítico das cônicas e das suas aplicações aos movimentos no espaço, este, por sua vez, deu aos cientistas de hoje condições para que a viagem de ida e volta à Lua fosse possível.

Isto é um exemplo de como o conhecimento foi construído ao longo da história e suas aplicações foram surgindo com o tempo.

Nosso trabalho buscou oferecer uma alternativa diferente para o ensino das seções cônicas em que o software GeoGebra é utilizado para abordar este conteúdo de uma forma mais dinâmica. De um modo mais específico construímos uma sequência didática para o ensino de cônicas e utilizamos o software de geometria dinâmica GeoGebra como ferramenta na construção de uma sequência que constituiu nosso produto educacional.

No primeiro capítulo apresentamos a justificativa para a elaboração da pesquisa na qual fazemos algumas considerações acerca do ensino de matemática, em particular das seções cônicas. Os objetivos, as hipóteses, a problemática e os procedimentos metodológicos também são apresentados neste capítulo, por fim apresentamos a fundamentação teórica onde tomamos como referenciais teóricos as ideias de “Mudanças de Quadros” de Régine Douady (1987), e “Transposição Didática” de Yves Chevallard (1991).

No capítulo 2, realizamos alguns estudos preliminares para complementarmos as bases teóricas na qual analisamos algumas propostas oficiais oferecidas aos professores do ensino médio. A Proposta dos PCNEM, as Orientações curriculares para o ensino médio, e o Guia de livros didáticos: PNLD 2012. Alguns livros aprovados pelo MEC para o triênio 2012 – 2014 foram analisados em seu capítulo sobre as seções cônicas com o propósito de saber até que ponto estas obras se identificam com a nossa proposta. Finalmente apresentamos de modo sucinto o software GeoGebra, fundamental na nossa pesquisa.

Os estudos sobre as seções cônicas foram apresentados no terceiro capítulo no qual apresentamos a sua evolução histórica desde a Grécia antiga passando pela Idade Média, a Renascença até chegar a Matemática Moderna. Também foi feita uma apresentação dos conceitos matemáticos da parábola, da elipse e da hipérbole. Em seguida apresentamos algumas aplicações práticas das seções cônicas a fim de que o professor as conheça e as utilize em sala de aula como forma de motivar os alunos a estudarem este conteúdo.

A sequência didática, nosso produto educacional, foi apresentada no quarto capítulo. Em que discutimos a proposta e as sessões de ensino para cada uma das três cônicas, o que é preciso realizar para aplicá-las e também seus objetivos.

No quinto e último capítulo foi apresentada a experimentação da pesquisa no qual analisamos os resultados de cada um dos encontros realizados com os alunos a partir da aplicação do questionário para diagnóstico inicial, discussão acerca do contexto histórico das seções cônicas, aplicabilidade no cotidiano, apresentação e utilização do software GeoGebra até as análises feitas a respeito da aplicação das sessões de ensino.

Encerramos com as considerações finais, onde fazemos uma autoavaliação do nosso trabalho com críticas e sugestões de melhoria para obtenção de resultados mais satisfatórios.

1 PROBLEMÁTICA

Neste capítulo apresentamos a justificativa para escolha do nosso tema, as nossas hipóteses, a questão norteadora da pesquisa (problema), os procedimentos metodológicos adotados e, por fim, os nossos referenciais teóricos.

1.1 Justificativa

As cônicas são utilizadas como ferramentas em várias situações, tanto na Matemática como em outras áreas do conhecimento (Física, Engenharia, Arquitetura, Astronomia, etc.). É um tópico rico na sua constituição porque permite muitas aplicações práticas. Geralmente seu estudo acontece no 3º ano do ensino médio dentro do conteúdo de Geometria Analítica.

Desta forma, escolhemos este tema por considerar seu estudo em sala de aula fundamental não só para que o aluno perceba a aplicação da Matemática em outros campos do saber, como também devido ao que pode contribuir para tornar a Matemática mais dinâmica, significativa e atraente para os alunos.

A nossa proposta é que esse conteúdo seja trabalhado em sala de aula, como saber a ensinar abordando as interações entre diferentes quadros as quais podemos verificar e interagir no software de geometria dinâmica GeoGebra, conforme a teoria da Transposição Didática de Chevallard (1991) e de Mudança de Quadros de Douady (1987) utilizadas nesta pesquisa para fundamentar as nossas escolhas.

Elaboramos uma sequência didática para trabalhar o tema seções cônicas de um modo diferente do tradicional, com sessões de ensino nas quais os alunos utilizaram computadores com o software GeoGebra instalado, sendo feita uma discussão prévia antes da aplicação destas sessões envolvendo a evolução histórica e algumas aplicações tanto no cotidiano como em outras áreas do conhecimento para motivar o interesse desses alunos pelo tema.

Ao utilizar o software os alunos podem perceber as mudanças de quadros, principalmente o algébrico e o geométrico e, assim, compreender com mais facilidade os conceitos (equação, gráfico, entre outros) envolvidos em cada cônica e a relação existente entre eles.

Para D'Ambrósio (1996, p. 81): “O ideal é aprender com prazer ou o prazer de aprender e isso se relaciona com a postura filosófica do professor, sua maneira de ver o conhecimento e do aluno”. Buscamos ver que o ensino de cônicas pode proporcionar isso tanto ao professor quanto ao aluno. Acreditamos que este trabalho possibilitará um aperfeiçoamento da prática docente, no que se refere ao ensino de cônicas, constituindo uma melhor formação do professor de Matemática do ensino médio.

Esperamos contribuir com professores de Matemática para tornar o ensino deste tema mais interessante. Concordamos com os PCNEM (1999, p. 90) quando afirmam que “A Matemática ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, além de ser uma ferramenta para tarefas específicas em quase todas as atividades humanas”, e, assim, cremos que o ensino de cônicas da forma como propomos, fundamentado nas ideias de Régine Douady (1987) e de Yves Chevallard (1991), irá contribuir significativamente nesse sentido.

1.2 Problema

Esta pesquisa tem por objetivo proporcionar ao professor de matemática do ensino médio uma sequência didática para o ensino de cônicas utilizando o software GeoGebra. Assim, trabalhamos com uma sequência didática procurando responder a seguinte questão:

- Uma sequência didática para o ensino de seções cônicas desenvolvida por intermédio do GeoGebra pode proporcionar ao aluno a compreensão dos conceitos e regras envolvidos nas seções cônicas?

Essa problemática foi definida com base na prática docente vivenciada por professores da rede de ensino do estado de Alagoas, pois o tema cônicas, por se tratar de um tópico existente já no final do conteúdo de Geometria Analítica no 3º ano do ensino médio, nem sempre o tempo de lecioná-lo é suficiente e acaba-se deixando este tópico de lado. Sendo assim procuramos diagnosticar a forma como o conteúdo “seções cônicas” é encarado pelo aluno em sala de aula e trabalhar com a sequência didática utilizando o software GeoGebra.

Entendemos que esta pergunta foi respondida ao aplicar, com os alunos, a sequência que desenvolvemos.

1.3 Hipóteses

A proposta desta pesquisa é que o tema seções cônicas seja trabalhado no ensino médio de forma atraente para o aluno e motivadora para o professor, o que se pretende é provocar uma reflexão sobre a maneira de se ensinar o conteúdo seções cônicas em sala de aula e, para isso, buscar-se-á, também fora da Matemática, aplicações desse tema.

Os conceitos e regras envolvidos nas seções cônicas podem ser aprendidos se estudados de uma forma diferente da tradicional proposta pelos livros didáticos, trazendo o aluno para a construção dos conceitos e interagindo com eles através do software GeoGebra que proporciona uma nova visão para as dificuldades encontradas quando se pode visualizar seus conceitos e suas propriedades de uma forma dinâmica.

Acreditamos que o estudo deste tema em sala de aula com base na metodologia sugerida irá gerar novas possibilidades de aprendizagem para o aluno que poderá despertar mais interesse por seu estudo e, conseqüentemente, proporcionar a sua aprendizagem.

1.4 Procedimentos metodológicos

Com a intenção de validar as hipóteses levantadas, elaboramos uma sequência didática para o ensino das seções cônicas com atividades realizadas com o auxílio do software de geometria dinâmica GeoGebra e aplicamos as mesmas com alunos do terceiro ano do ensino médio de uma escola da rede estadual de ensino no interior de Alagoas. Esta é uma pesquisa etnográfica, pois foi realizada com a nossa participação direta junto aos alunos e tem aspectos de um estudo de caso, já que enfatiza o conhecimento particular de uma determinada escola, na qual já trabalhamos há sete anos e, portanto, o nosso acesso aos indivíduos pesquisados é facilitado por conhecermos tanto os membros da escola quanto o professor da turma.

Inicialmente foi feito um levantamento bibliográfico, considerando obras nacionais e internacionais com especial atenção ao conteúdo cônicas, as propostas dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), as

Orientações curriculares para o ensino médio, o Guia de livros didáticos PNLD 2012 e quatro livros didáticos de matemática do terceiro ano do ensino médio também foram analisados com a intenção de se observar até que ponto a nossa proposta está de acordo com a abordagem apresentada nestas obras, um estudo sobre o software GeoGebra foi realizado a fim de se conhecer suas principais funções e ferramentas que auxiliem no ensino e aprendizagem das seções cônicas.

Em seguida elaboramos um questionário com a finalidade de diagnosticar se os alunos de Matemática do terceiro ano do ensino médio, já estudaram conteúdos de geometria analítica que são requisitos para o tema *seções cônicas* e até mesmo este conteúdo. Esta coleta de dados abrange também o ponto de vista desses alunos em relação à importância das cônicas em outros campos do conhecimento.

Realizamos os 10 encontros programados para a aplicação da sequência didática proposta nos quais fizemos em cada um deles:

1. Aplicação de questionário referente ao tema *seções cônicas*. Leitura, comentários e questionamentos do texto histórico.
2. Comentários dos aportes históricos adquiridos em outras fontes.
3. Discussão a respeito das aplicações práticas das seções cônicas.
4. Apresentação do software GeoGebra e familiarização dos alunos com o programa.
5. Aplicação da sessão de ensino referente à parábola.
6. Resolução da atividade 1.
7. Aplicação da sessão de ensino referente à elipse.
8. Resolução da atividade 2.
9. Aplicação da sessão de ensino referente à parábola.
10. Resolução da atividade 3.

Utilizamos o software GeoGebra nas sessões de ensino que elaboramos. Os dados coletados no questionário serviram para a adequação das atividades aplicadas após cada sessão a fim de que os objetivos definidos por esse trabalho pudessem ser alcançados.

Finalmente as respostas de cada atividade foram analisadas para que a validação das hipóteses fosse feita e pudéssemos chegar às conclusões a respeito deste estudo.

1.5 Referenciais teóricos

Esta pesquisa fundamenta-se na teoria de Mudança de Quadros de Régine Douady (1987) e Transposição Didática de Yves Chevallard (1991).

Para Douady (1986, apud Almouloud, 2007, p. 65) “uma mudança de quadro é um meio de obter formulações diferentes para um problema que permite uma nova visão para as dificuldades encontradas” e, para ela, os jogos de quadros “são mudanças de quadros provocadas por iniciativa do docente, quando escolhe problemas convenientes para fazer avançar as fases de pesquisa e evoluir as concepções dos alunos”, sendo assim pretende-se com este trabalho auxiliar o professor na busca desses “problemas convenientes” citados pela autora. Segundo Almouloud (Ibid., p. 64):

A noção de jogos de quadros foi introduzida para explicar características importantes da matemática: a capacidade de mudar de ponto de vista, de traduzir um problema de um quadro para o outro, com a finalidade específica de mobilizar outras ferramentas na resolução, que não são inicialmente encaminhadas.

É neste contexto que pretendemos com o nosso trabalho, estudar as cônicas não só do ponto de vista matemático - no quadro numérico, no quadro algébrico, no quadro geométrico, no quadro de funções e no quadro da geometria analítica - como também na sua aplicabilidade em outras áreas o que, em nossa opinião, irá proporcionar ao aluno uma mudança de ponto de vista e facilitará a compreensão. Nas palavras de Almouloud (Ibid., p. 68) “As mudanças de quadros e as interações entre diferentes quadros constituem um poderoso instrumento para a criação de novos conhecimentos a partir de antigos”, isto é, os conhecimentos já apreendido pelo aluno serve como ferramenta para a compreensão de novos.

Para Chevallard (1992, apud Almouloud, Ibid., p. 197), “a transposição didática é a passagem de um saber científico (*strictu sensu*) para sua versão didática em uma instituição escolar” nesse sentido o autor conceitua transposição didática como o trabalho de fabricar um objeto de ensino. É isso que se propõe neste trabalho em relação ao conteúdo *seções cônicas*. Baseado em tais conceitos pretendemos criar uma sequência didática, utilizando o GeoGebra, que possa tornar as seções cônicas em saber ensinado, ou seja, fabricar um objeto de ensino sobre as mesmas.

De acordo com Henriques (2001, p. 29) “transposição didática é o conjunto de transformações que sofre um saber sábio com a finalidade de ser ensinado” o saber sábio é o saber científico e, para o autor (Ibid, p. 29) “antes de ser saber ensinado o saber sábio sofre um grande número de transformações e adaptações chamado de Transposição Didática”, nesse contexto essa transposição é importante porque permitirá que o conteúdo matemático em questão seja melhor assimilado pelos alunos.

Esta teoria estuda a trajetória dos saberes desde sua caracterização como saber científico até se tornar saber escolar, neste caminho o saber sofre uma série de influências que Chevallard descreve como *noosfera* da qual fazem parte: cientistas, professores, especialistas, políticos, autores de livros, associações de pais, alunos, órgãos públicos, enfim os agentes que interferem no processo educativo. A noosfera influencia todo o processo didático, não somente a escolha de conteúdos, mas os objetivos, métodos, valores também são determinantes que conduzem o sistema didático.

A noosfera é palco de conflitos e negociações, de produção e discussão de doutrinas sobre o que é necessário mudar ou fazer no sistema de ensino, uma vez que as relações entre o ambiente e o sistema de ensino nem sempre são harmoniosas. (AGRANONIH, 2001, p. 6).

Segundo a autora “a noosfera age como um filtro que promove a interação entre o sistema de ensino e o ambiente social” (Ibid., p.7). Nesse sentido propõe-se neste trabalho promover discussões a respeito das seções cônicas enquanto conteúdo de ensino e sua relevância em aplicações do cotidiano.

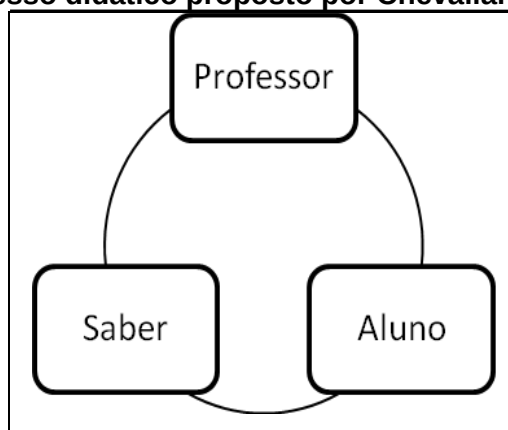
O *saber ensinado* é aquele registrado no plano de aula do professor depois de passado por várias transformações e adaptações desde *saber científico*, aquele dos artigos, teses, livros e relatórios, até se tornar *saber escolar*, apresentado em livros didáticos e programas de disciplinas.

Nas palavras do próprio Chevallard que diz “Para que o ensino de um determinado elemento de saber seja possível, esse elemento deverá ter sofrido certas deformações que o tornarão apto a ser ensinado” (CHEVALLARD, 1991, p. 16, tradução nossa). Aqui a metodologia de ensino, que está associada à análise dos valores e dos objetivos da aprendizagem, é um fator fundamental nesse processo, porém não há garantia de que o conteúdo ensinado pelo professor seja

exatamente o conteúdo aprendido pelo aluno, pode-se chegar a conclusões que não são as inicialmente encaminhadas.

O conteúdo escolar não pode ser encarado apenas como uma adaptação do conhecimento científico ao contexto professor/aluno. Há uma estreita e fundamental relação entre professor, aluno e saber (figura 1) que influencia de forma determinante o processo de ensino e aprendizagem, e pode modificar a proposta inicial do professor, pois ao contrário do saber científico que é validado pelos paradigmas da área, o saber escolar está sob o controle de um conjunto de regras que condiciona esta relação.

Figura 1 - Esquema teórico representacional do processo didático proposto por Chevallard 1991



Fonte: Autor, 2012

Nas palavras de D'Amore (2007, p. 221-222) no esquema acima ao explicitar o saber relacionado na tríade:

...“por “saber” entende-se aquele oficial, universitário, aquele que Chevallard chama de *Savoir Savant* e que, no caso específico da Matemática, foi chamado até aqui de “saber matemático”; trata-se de um saber da pesquisa matemática, aquele histórico, acadêmico.

Pretendemos trabalhar o conteúdo seções cônicas enquanto saber a ensinar, aquele que se pretende trabalhar em sala de aula com os alunos e é apresentado nos livros didáticos conforme Chevallard (1991), questionando-se e analisando-se a forma como esse tema é apresentado no livro didático e adaptando-o à sala de aula de acordo com a realidade da escola à luz dessas teorias.

2 ESTUDOS PRELIMINARES

Realizamos alguns estudos com a finalidade de analisar as propostas de ensino das seções cônicas no âmbito escolar e também o que os órgãos oficiais nacionais sugerem a respeito de tal ensino. A nossa intenção é ter uma visão geral das influências que este conteúdo sofre até chegar a sua versão didática “apto” a ser ensinado para os alunos, o que Chevallard descreve como noosfera.

Em primeiro lugar analisamos o que propõe os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) a respeito do ensino aprendizagem dentro da nossa pesquisa, em seguida fizemos um estudo das Orientações curriculares para o ensino médio da área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias para verificar qual a relação entre nosso trabalho e as orientações propostas pelos seus elaboradores. Também analisamos o Guia de livros didáticos PNLD 2012 a fim de observar se as obras aprovadas trabalham as seções cônicas.

Alguns dos livros aprovados, quatro deles, foram analisados com o intuito de verificar como trazem para a sala de aula as seções cônicas enquanto saber a ensinar e de que modo estas obras trabalham as aplicações deste conteúdo no cotidiano e em outras áreas do conhecimento. Finalmente apresentamos um estudo a respeito do software GeoGebra em sua versão 4.2 que será utilizada na pesquisa com os alunos.

2.1 Propostas dos PCNEM

Uma das propostas dessa pesquisa é verificar se o ensino das seções cônicas (parábola, elipse e hipérbole), por meio das suas aplicações em outras áreas do conhecimento pode facilitar a aprendizagem dos alunos.

Segundo os PCNEM (1999, p. 82):

No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no ensino médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas em outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional.

As cônicas podem ser consideradas, talvez, um desses instrumentos de múltiplas aplicações, devido as suas utilidades em outros campos do conhecimento

e isto pode ser utilizado pelos professores até mesmo como fator motivacional para suas aulas. Acreditamos que ao explorar as potencialidades práticas desse conteúdo no cotidiano, o professor irá despertar no aluno o interesse e a curiosidade em aprender sempre mais o assunto discutido.

Sobre a escolha de tópicos a serem ensinados em Matemática no ensino médio, para os PCNEM: (1999, p. 88).

O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.

O conteúdo seções cônicas atenderia a todos esses critérios se trabalhado adequadamente pelo professor, pois permite essa contextualização em muitos outros campos. Sua importância histórica e aplicabilidade por si só revelam a relevância cultural pertinentes desse tema.

A respeito dos objetivos do ensino médio, os PCNEM também sugerem a contextualização do que se aprende em sala de aula com as necessidades da vida real no qual relatam:

Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondem a uma cultura geral e a uma visão de mundo. (Ibid., p. 16).

Destaca uma formação geral como essencial e não um treinamento específico, isto é, a Matemática, assim como as outras disciplinas, deve estar relacionada com outros temas do cotidiano contribuindo para a formação de cidadãos capazes de inovar e aprender continuamente.

Ainda acrescenta que um dos pontos de partida para a condução de um aprendizado com pretensões formativas “é tratar, como conteúdo do aprendizado matemático, científico e tecnológico, elementos do domínio vivencial dos educandos, da escola e de sua comunidade imediata”, (Ibid. p. 18). Desta forma, pretende-se dar significado ao aprendizado ao se propor este trabalho em relação às seções cônicas.

As competências e habilidades a serem desenvolvidas em matemática no contexto sócio-cultural propostas pelo PCNEM (1999, p. 93) são:

- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.
- Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade.
- Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades.

A sequência didática desenvolvida neste trabalho busca atingir exatamente estas competências, pois nela discutimos o contexto histórico das seções cônicas, a sua aplicabilidade em situações reais como também em outras áreas do conhecimento e utilizamos o computador ao realizar as sessões de ensino no GeoGebra.

2.2 Orientações Curriculares para o Ensino Médio

Analizamos também as Orientações Curriculares para o Ensino Médio no seu volume 2, que trata de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias em seu capítulo 3, no qual discute os conhecimentos de matemática. Buscamos discutir aquelas orientações sobre geometria analítica focalizando as seções cônicas.

A respeito deste documento, em sua apresentação temos “Isto é um material que apresenta e discute questões relacionadas ao currículo escolar e a cada disciplina em particular” Brasil (2006, p. 9), e esta definição nos estimulou a fazermos uma análise sobre a discussão a respeito do nosso objeto de estudo.

Em consonância com os PCNEM e com as Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio estas orientações também destacam o aspecto formativo desta etapa da educação básica em relação à matemática onde se destaca:

Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (Ibid., p. 69).

Nossa proposta de ensino está em conformidade com estas características no que diz respeito às seções cônicas. Ao tratar das questões de conteúdo, este documento organiza a divisão dos mesmos em quatro blocos, a saber: Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade. Também orienta que no trabalho com funções “É importante destacar o significado da representação gráfica das funções, quando alteramos seus parâmetros” Brasil (2006, p. 72) e isto está proposto em nossa sequência didática também para o ensino de cônicas, onde procuramos fazer o aluno perceber essas alterações ao variar os parâmetros de cada uma das cônicas, exatamente em conformidade com a Noção de Jogo de Quadros proposta por Régine Douady (1987).

No que diz respeito à geometria analítica sugere-se que a caracterize como:

a) o estudo das propriedades geométricas de uma figura com base em uma equação (nesse caso, são as figuras geométricas que estão sob o olhar da álgebra); b) o estudo de pares ordenados de números (x, y) que são soluções de uma equação, por meio das propriedades de uma figura geométrica (nesse caso, é a álgebra que está sob o olhar da geometria). (Ibid., p. 76 e 77).

E ainda ressalta a importância de se trabalhar esses dois aspectos na escola. O que fazemos em nosso estudo.

Sobre as seções cônicas, ao se falar sobre os temas que podem servir para trabalhar as aplicações matemáticas:

Por exemplo, o estudo das curvas cônicas (elipse, parábola e hipérbole), acompanhado de suas equações. As mais simples, se bem escolhida a posição do sistema de coordenadas, geram um tópico interessante, pois trata-se de curvas que podem ser a solução de uma equação geral de grau dois em duas variáveis (vale lembrar que até então esse estudo estava restrito à reta, círculo e parábola). Podem-se, com isso, explicar os princípios de funcionamento de uma antena parabólica, dos espelhos hiperbólicos usados em telescópios e dos espelhos elípticos. (Ibid., p. 92).

Destaca-se que propriedades geométricas as quais explicam o funcionamento de certos materiais de uso cotidiano devem ser ressaltadas e isto também é feito em nosso estudo. De acordo com Douady (1987) onde estudaremos as cônicas, principalmente, explorando-as no quadro algébrico e no geométrico como também com Chevallard (1991), pois trataremos as cônicas trazida de um versão científica para a sua versão didática em uma instituição escolar de acordo com a teoria da Transposição Didática deste pesquisador.

2.3 Guia de livros didáticos: PNLD 2012

O guia do livro didático PNLD (Programa Nacional do Livro Didático) 2012 apresenta as resenhas das sete coleções de Matemática aprovadas no PNLD 2012 que buscam contribuir com o professor na escolha do livro didático a ser utilizado no triênio 2012, 2013 e 2014 no Ensino Médio. Nelas o professor irá encontrar “tanto uma descrição resumida quanto uma avaliação das características de cada uma das obras aprovadas” Brasil (2011, p. 7). O processo de elaboração deste guia foi feito conforme descrito a seguir:

Para o PNLD 2012, esse processo reuniu docentes de diversas instituições educacionais do país, todos com experiência nas questões de ensino e aprendizagem da matemática escolar, em diferentes níveis de ensino. Sob a coordenação de uma universidade pública, e tomando como base os critérios de avaliação expressos no Edital do PNLD 2012, esses profissionais realizaram um trabalho minucioso, do qual resultaram as resenhas ora apresentadas como auxílio à escolha que você é convidado a fazer. (Ibid., p. 7).

Analizamos a parte que trata do objeto de nosso estudo, geometria analítica, tópico que aborda as seções cônicas nas obras que tivemos acesso e verificamos sua abordagem em relação à elipse, a hipérbole e a parábola.

Em relação às características das obras aprovadas tem-se o seguinte relato sobre geometria analítica:

Dada a sua importância como uma conexão entre a geometria e a álgebra, a **geometria analítica** foi destacada em um campo específico, que compreende: retas, circunferências e cônicas no plano cartesiano; vetores; e transformações geométricas. (Ibid., p.18).

Das sete obras aprovadas, apenas em três delas comenta-se muito pouco o tema geometria analítica na 1ª série do ensino médio e somente em uma, na 2ª série, todas abordam este tema amplamente na 3ª série sendo, em cinco delas, o tópico mais discutido entre todos os conteúdos do livro. De modo geral “ocorre excesso de atenção a um determinado campo, em prejuízo dos demais” (Ibid., p. 21), fato que ocorre com geometria analítica na 3ª série cabendo ao professor em seu planejamento anual o cuidado neste aspecto para corrigir este problema.

Em relação às seções cônicas temos o seguinte comentário: “Para atribuir significado ao nome “cônicas”, é apropriado nos referirmos às seções planas de um superfície cônica” Brasil (2011, p. 34), é relatado também que em algumas das

obras há imprecisão na descrição do tipo de plano gerador da hipérbole e da parábola bem como há inadequações ao se procurar modelizar situações reais usando uma cônica, Brasil (2011). As resenhas de cada obra aprovada são apresentadas e têm-se comentários de cada campo, inclusive geometria analítica, o que discutiremos ao analisar as obras segundo critérios de nosso estudo à luz deste Guia no tópico a seguir.

2.4 Análise de livros didáticos

Para este estudo analisamos alguns livros de matemática do ensino médio relacionados no Guia de livros didáticos PNLD 2012 que serão utilizados pelos professores durante os anos de 2012, 2013 e 2014 para que pudéssemos identificar até que ponto estas obras se identificam com a nossa proposta. Analisamos apenas o tópico referente às seções cônicas, objeto do nosso estudo, que em todos os livros estudados encontram-se no volume 3 o qual é apresentado no 3º Ano do ensino médio. Para esta análise elaboramos alguns critérios os quais estão elencados no quadro seguinte.

Quadro 1 - Critérios selecionados para análise dos livros didáticos

CRITÉRIOS	DESCRIÇÃO DOS CRITÉRIOS
A	Verificar se utilizam a História da Matemática como recurso pedagógico.
B	Verificar se utilizam aplicações desses conteúdos em outras áreas do conhecimento, por exemplo, Astronomia, Óptica, Engenharia, Arquitetura e novas tecnologias, como recurso para motivar os alunos a despertarem o interesse em aprender esse conteúdo.
C	Verificar se trabalham com o uso de outros recursos como softwares, materiais concretos, etc., ao ensinar cônicas.
D	Verificar se fazem uma relação entre o conteúdo seções cônicas e as suas aplicações no cotidiano.

Fonte: Autor, 2012

Esses critérios estão em consonância com a proposta de nossa sequência didática apresentada no capítulo 4, o que pretendemos aqui é verificar até que ponto estas obras se apresentam em sintonia com a nossa proposta.

O critério **A** serve para mostrar o quanto estas obras valorizam a história das seções cônicas e sua evolução ao longo dos tempos, desde sua constituição enquanto conceito matemático até a sua apresentação como saber escolar.

Conforme Flemming (2005, p. 18) “O entendimento da evolução do conhecimento matemático permite aos educadores produzir estratégias para facilitar a construção do conhecimento dos alunos. O contexto histórico é, portanto, uma fonte de inspiração”. Acreditamos que o uso da história como recurso pedagógico pode proporcionar ao aluno uma motivação para que a aprendizagem ocorra de modo mais prazeroso e dinâmico.

O critério **B** serve para analisar o quanto essas obras utilizam a mudança de quadros para obter formulações diferentes para um problema permitindo novas visões para as dificuldades encontradas de acordo com a teoria de jogos de quadros de Douady (1986).

Aqui a intenção é saber até que ponto estas obras ajudam o professor a motivar seus alunos a se interessarem pelo tema cônicas, sabendo que não se trata de um conceito a ser estudado apenas por constar na matriz curricular, e sim por ser uma ferramenta útil também no desenvolvimento de outras áreas.

O critério **C** serve para mostrar o quanto esses livros ajudam o professor a enriquecer a metodologia trazendo a discussão sobre outras ferramentas didáticas que auxiliem o ensino desse tópico, uma vez que nossa proposta é proporcionar ao professor de Matemática uma sequência didática para o ensino de cônicas utilizando o software GeoGebra.

Quanto ao critério **D**, serve para mostrar se estas obras valorizam as aplicações cotidianas deste tema, sabe-se que essas aplicações são muitas e que ao colocar as aplicações das cônicas no cotidiano o aluno terá uma motivação a mais para aprender esse tema. Conforme Pavanello e Nogueira (2006, p. 31):

O conhecimento matemático não é auto-suficiente, isto é, não evolui unicamente em razão de necessidades internas, mas também de problemas impostos pelo meio social e pelo desenvolvimento de outros campos do conhecimento.

O que se pretende é verificar como as obras analisadas utilizam essas aplicações para motivar os alunos a despertarem o interesse pelo tema seções cônicas.

Com esses critérios, verificamos se os livros didáticos utilizam as sugestões dos PCNEM, adotadas pela nossa pesquisa, para que as competências e habilidades lá sugeridas, no contexto sócio-cultural sejam alcançadas. Elaboramos uma escala a qual atribuímos valores simbólicos para cada um desses quatro temas de acordo com a legenda apresentada no quadro 2:

Quadro 2 - Descrição dos códigos para classificação dos livros analisados

CÓDIGOS	DESCRIÇÃO
	não usa
	usa pouco
	usa regularmente
	usa muito

Fonte: Autor, 2012

As obras as quais analisamos os capítulos referentes ao nosso objeto de estudo foram os seguintes livros didáticos: “Matemática: ciência, linguagem e tecnologia” (1) de Jackson Ribeiro, Ed. Scipione e “Matemática: contexto e aplicações” (2) de Luiz Roberto Dante, Ed. Ática, “Matemática – Paiva” (3) de Manoel Paiva, Ed. Moderna; “Conexões com a Matemática” (4) de Juliane Matsubara Barroso, Ed. Moderna, todos estes livros fazem parte das coleções aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD 2012) e serão utilizados por professores do ensino médio brasileiro nos anos seguintes: 2012, 2013 e 2014.

A obra 1 faz uma pequena introdução a respeito da elipse, parábola e hipérbole com o cone e cita também Apolônio e sua obra *Seções cônicas*, Kepler e sua lei da trajetória elíptica dos planetas e, de forma tímida, algumas situações em que as cônicas estão presentes. Na definição dos conceitos das três cônicas faz um breve comentário sobre a maneira prática de se obter cada uma delas utilizando lápis, régua, pregos e barbante. Prioriza a definição dos elementos de cada cônica, a equação e, utilizando-se dela a resolução de exercícios, cita também algumas aplicações desses conteúdos em outras áreas do conhecimento como Física, Biologia e Astronomia o que é louvável.

A obra 2 começa com um breve relato histórico sobre as seções cônicas desde antes de Apolônio, e lhe dá os devidos créditos pelas denominações dos nomes elipse, parábola e hipérbole. Cita-o como o que mais se destacou no

desenvolvimento dos conceitos sobre seções cônicas, enfim, faz uma boa abordagem do contexto histórico. Faz uma breve introdução a respeito das aplicações de cada uma das três cônicas antes de iniciar o estudo propriamente dito das mesmas e comenta exemplos de utilização na arquitetura e na astronomia no final do capítulo. Utiliza recursos como lápis, alfinetes e barbante na construção das cônicas, embora de forma bastante simplificada.

A obra 3 inicia com um belo exemplo de aplicação na arquitetura, em seguida mostra as três cônicas no cone e faz um panorama acerca do contexto histórico das três seções cônicas. São feitas belas explanações do uso dessas curvas em outras áreas de modo adequado e útil para despertar a motivação e o interesse por este estudo bem ilustrado com fotografias e desenhos. São utilizados outros recursos como lápis, prego, barbante, régua e dobraduras na construção das cônicas e suas aplicações no cotidiano são bem trabalhadas.

A obra 4 faz apenas um comentário sobre o contexto histórico das cônicas, somente a respeito da extração das mesmas por meio da intersecção de um plano com dois cones simétricos pelo vértice e nada mais. As aplicações desses conteúdos em outras áreas do conhecimento são bem trabalhadas permitindo assim conexões entre a Matemática e esses outros campos. Apenas lápis, régua, barbante e pregos são citados como recursos diferentes na construção das cônicas. Utilizações no cotidiano são mostradas de forma satisfatória para despertar maior motivação no estudo do tema.

O quadro seguinte foi elaborado visando facilitar a comparação entre os critérios utilizados para análise de cada obra e está classificada de acordo com os códigos da página 30.

Quadro 3 - Comparativo quanto ao uso dos critérios adotados

CRITÉRIOS	OBRAS			
	1	2	3	4
A				
B				
C				
D				

Fonte: Autor, 2012



não usa



usa pouco



usa regularmente



usa muito

Pela análise dos resultados elencados na tabela acima concluímos que, conforme o critério A, apenas uma delas não valoriza a história das seções cônicas e sua evolução ao longo dos tempos para ajudar a motivar os alunos a estudarem o tema. Quanto ao critério B, apenas uma dessas obras utilizam pouco a mudança de quadros para obter formulações diferentes para um problema permitindo novas visões para as dificuldades encontradas e três delas consideram relevante o fato de as seções cônicas serem utilizadas como ferramentas no desenvolvimento de outras áreas. Porém apenas uma delas traz a baila a discussão sobre diferentes recursos como softwares para ajudar o professor a enriquecer a metodologia quando verificamos o resultado acerca do critério C. Finalmente o resultado da análise do critério D mostra que três das quatro obras valorizam as aplicações cotidianas deste tema, o que pode contribuir para favorecer a aprendizagem sobre seções cônicas.

Ao analisar estas obras, percebemos certas diferenças ao trabalhar o tema seções cônicas pelos autores em relação aos critérios adotados nesta pesquisa que se refere ao uso das aplicações práticas e da sua utilidade em outros campos do conhecimento como forma de motivar os alunos a despertarem interesse pelo conteúdo matemático. Em nossa opinião se trabalharmos adequadamente essas diferenças contribuiremos de forma significativa para a melhoria da aprendizagem deste conteúdo.

2.5 O software GeoGebra

A nossa proposta é proporcionar uma forma diferente da tradicional para o ensino e a aprendizagem, em especial, do conteúdo seções cônicas visando a aprendizagem a partir do interesse do aluno por este tema utilizando o software GeoGebra. Desta forma utilizaremos o potencial da ferramenta computador para que o aluno possa compreender e interpretar os conceitos envolvidos no nosso objeto de estudo.

Concordamos com Dowbor quando cita: “A educação já não pode funcionar sem se articular com dinâmicas mais amplas que extrapolam a sala de aula” (Dowbor, 2011, p. 4). E ainda acrescenta: “Por enquanto, as novas tecnologias são um instrumento, à espera do tipo de utilização que dele faremos” (Ibid., p. 4). Assim,

utilizaremos o software GeoGebra com a intenção de dinamizar as aulas buscando apresentar uma nova metodologia do ensino deste tópico da matemática.

Nossa intenção é que o aluno possa perceber, através dos recursos de animação do software GeoGebra, as propriedades e características de cada uma das três cônicas. Acreditamos que com o uso deste recurso a aprendizagem se torne mais fácil, pois o aluno pode executar tarefas que apenas com o uso das tecnologias tradicionais (papel, lápis, caderno, etc.) se tornariam muito difícil.

Henriques (2001, p. 5) relata que “As novas tecnologias proporcionam recursos informáticos capazes de produzir uma aprendizagem significativa, apontando, desse modo, novas diretrizes ou alternativas para o ensino e aprendizagem da matemática”. Sendo assim a construção da sequência didática para o ensino de cônicas, que se baseia nas potencialidades do GeoGebra para enriquecer a aprendizagem das mesmas, contribui significativamente como uma alternativa a mais para que a aprendizagem das seções cônicas ocorra de modo mais didático e compreensível.

Trata-se de um software de geometria dinâmica, isto é, pode-se criar objetos e interagir com os mesmos, que pode ser utilizado por qualquer pessoa sem custo algum por ser livre e de fácil acesso.

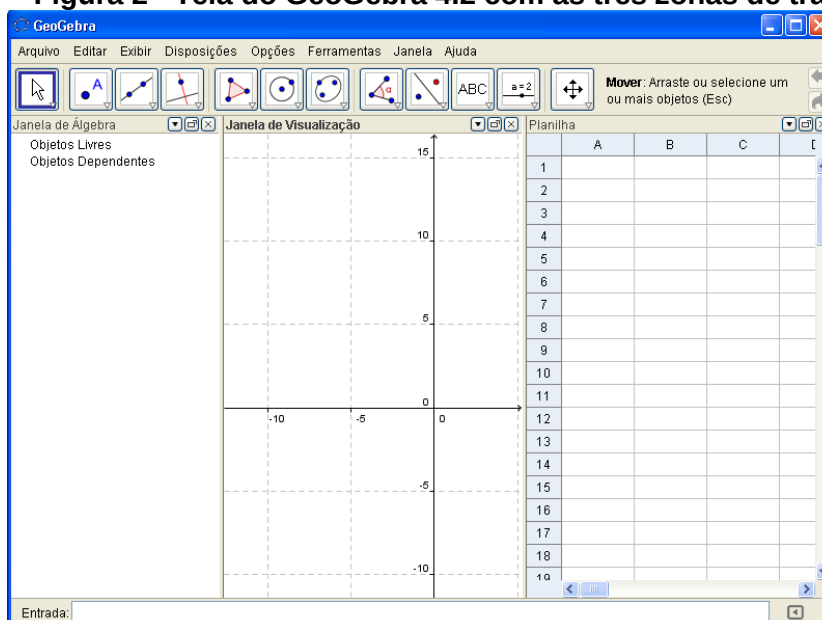
Para baixar este programa, basta acessar o site <http://www.geogebra.org/cms/>, clicar em baixar, caso faça a tradução da página que estará em inglês para o português selecionando a opção Português (Brasil), ou em download, caso a página permaneça em inglês. Uma mensagem informativa surgirá com os dizeres: “Você é livre para copiar, distribuir e transmitir o GeoGebra para fins não comerciais”, clica no programa que utiliza em seu computador: Windows, Mac OS X, Ubuntu, Debian (.deb) openSUSE, Fedora (.rpm) Other Unix e aguarda alguns minutos ou segundos, dependendo da velocidade da internet, até que o download do programa seja executado e o instala no computador. “Para executar o programa pode ser que seja necessário baixar a máquina virtual Java, que pode ser obtida a partir do site <http://www.java.com/getjava/>” (FANTI, 2010, p. 1). O GeoGebra também é disponibilizado para ser distribuído a quem não tem uma conexão com a internet, basta salvá-lo no pen drive, ou similar tipo CD, e instalá-lo na máquina desejada.

Sobre este software Hohenwarter (2009, p. 6), seu criador e professor da Universidade de Salzburg, escreve: “O GeoGebra é um software de matemática dinâmica que junta geometria, álgebra e cálculo”, para ele este software foi desenvolvido com o objetivo de aprender e ensinar matemática nas escolas. Ao utilizá-lo na construção de conceitos realmente aprendemos muito e interpretamos melhor algumas propriedades do conteúdo em questão, no nosso caso, seções cônicas.

O GeoGebra fornece três diferentes vistas dos objectos (sic) matemáticos: a *Zona Gráfica*, a *Zona Algébrica*, ou numérica, e a *Folha de Cálculo*. Elas permitem mostrar os objectos (sic) matemáticos em três diferentes representações (sic): graficamente (e.g., pontos, gráficos de funções), algebricamente (e.g., coordenadas de pontos, equações) e nas células da folha de cálculo. Assim, todas as representações do mesmo objecto (sic) estão ligadas dinamicamente e adaptam-se automaticamente às mudanças realizadas em qualquer delas, independentemente da forma como esses objectos (sic) foram inicialmente criados. Op. Cit. (2009, p. 6).

Na versão 4.2 a Folha de Cálculo é mostrada no menu Exibir e em seguida Planilha, a zona gráfica é a Janela de Visualização e a zona algébrica é a Janela de Álgebra como mostra a figura seguinte.

Figura 2 - Tela do GeoGebra 4.2 com as três zonas de trabalho



Fonte: Autor, 2013

É nessa interação entre álgebra e geometria que iremos trabalhar com as seções cônicas, na qual representaremos o mesmo objeto graficamente e algebricamente e discutiremos suas propriedades utilizando a capacidade do

GeoGebra de interligar diretamente expressões e coordenadas bem como manipular variáveis vinculadas a números.

Esses recursos tornam a aula mais dinâmica e o conteúdo estudado mais compreensível. Desta forma também podemos exercitar melhor o que propõe na teoria da Mudança de Quadros de Douady (1986) analisando simultaneamente o quadro algébrico e o quadro geométrico.

3 AS SEÇÕES CÔNICAS

Este capítulo é dedicado ao conceito matemático utilizado nesta pesquisa, seções cônicas, no qual mostraremos a sua evolução histórica desde a antiga Grécia, até a matemática moderna, em seguida trabalhamos com suas definições tratadas como saber a ensinar de acordo com Chevallard (1991), isto é, aquele que é apresentado nos livros didáticos e suas aplicações práticas. As definições aqui utilizadas são as mesmas tratadas na construção da sequência didática e foram retiradas da coleção Fundamentos de Matemática Elementar de Gelson Iezzi e outros da editora atual volume 7 Geometria analítica. Observamos que sempre que necessário, utilizaremos os recursos do software de *geometria dinâmica* GeoGebra como auxílio na ilustração de conceitos e na aprendizagem.

3.1 A evolução histórica das seções cônicas

Realizamos um estudo do desenvolvimento das seções cônicas ao longo da história. A maneira como esse tema se apresenta hoje, suas aplicações práticas, utilidade em outros campos bem como o interesse dos estudiosos em relação ao seu estudo variou bastante ao longo dos séculos. Numa primeira análise, enfocamos historicamente sobre o estudo das cônicas na antiguidade, também enfatizamos sobre os comentadores das obras antigas e sua importância na preservação das mesmas. Em seguida voltamos cerca de um milênio depois aos principais colaboradores para a continuidade e aperfeiçoamento deste tema que passou a ser estudado sob uma nova ótica até chegar a sua caracterização atual.

3.1.1 Seções cônicas na Grécia

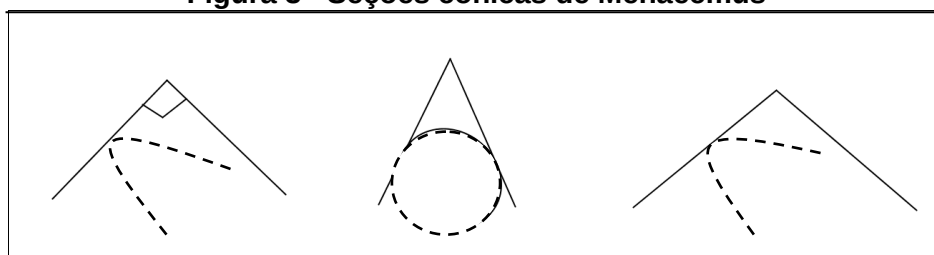
Ao pesquisarmos sobre a construção desse conceito percebemos a importância de compreendermos sobre a história de um conteúdo matemático e, assim, utilizarmos essas “descobertas” como recursos pedagógicos que irão permitir uma maior compreensão por parte de nossos alunos sobre o tema em questão a ser assimilado.

Seu estudo teve início ainda no período clássico (600 - 300 a. C.) em que ocorreram os registros matemáticos gregos, o outro período em questão trata-se do período alexandrino ou helenístico (300 a. C. - 600 d. C.), conforme Macena (2007). Segundo Boyer (1974, p. 41) Menaecmus foi quem “parece ter descoberto as curvas que mais tarde foram chamadas, elipse, parábola e hipérbole”, como veremos mais adiante Apolônio de Perga foi quem denominou essas seções com os nomes atuais. Boyer (Ibid., p. 70) ao falar sobre a duplicação do cubo relata:

É provável que Menaecmus soubesse que a duplicação também pode ser efetuada por meio de uma hipérbole retangular mais uma parábola. [...]. Menaecmus provavelmente conhecia muitas das propriedades hoje familiares das seções cônicas, inclusive as assíntotas da hipérbole, [...]. Proclus diz que Menaecmus foi um daqueles que “tornaram toda a geometria mais perfeita”; mas pouco sabemos do que fez realmente. Sabemos que Menaecmus ensinou Alexandre, o Grande, [...], há uma carta de Eratóstenes ao rei Ptolomeu Energetes, citada 700 anos depois por Eutocius, em que várias duplicações do cubo são mencionadas. Entre elas, uma com a desajeitada construção de Arquitas e outra “cortando o cone nas tríades de Menaecmus”.

De acordo com Macena (2007, p. 49) na carta acima citada o alexandrino Eratóstenes (275 - 194 a.C.), atribui a Menaecmus (380 - 320 a.C.) o descobrimento das seções cônicas que utilizou três tipos de cones (tendo, no vértice, ângulo reto, ângulo agudo ou ângulo obtuso) sendo cada cone cortado por um plano perpendicular a um elemento do cone (uma geratriz). Desta forma dependendo do ângulo obteremos a parábola, a elipse ou a hipérbole, respectivamente de acordo com a figura 3 a seguir.

Figura 3 - Seções cônicas de Menaecmus



Fonte: Autor, 2012

Para Eves (2011), Menaecmus inventou as seções cônicas com o propósito de resolver o problema da duplicação do cubo¹.

¹ Sobre a duplicação do cubo, um dos três famosos problemas da antiguidade, consultar Howard Eves (2011, p. 133 - 148).

Numa relação sobre a importância das obras de Euclides e Apolônio, Kline (1992, apud Macena 2007, p. 51) relata que: “Os *Elementos* de Euclides e as *Secções Cônicas* de Apolônio relata, resume e prolonga a matemática produzida no período clássico, mesmo que os autores dessas obras tenham vivido no período helenístico”.

Euclides que viveu por volta de 300 a.C. também escreveu uma obra denominada *Cônicas*, “um tratado em quatro livros que foi mais tarde completado e ampliado por Apolônio” Eves (2011, p. 138) dentre as cerca de uma dúzia de obras escritas por ele cobrindo tópicos variados como óptica, astronomia, música, mecânica, Boyer (1974), infelizmente mais da metade se perdeu, inclusive a obra sobre cônicas, provavelmente sem possibilidades de recuperação, talvez porque logo foi superado pelo trabalho de Apolônio mais extenso sobre o tema.

Relacionando o trabalho de Menaecmus com o de Euclides, Boyer (1974, p. 74) escreve:

Euclides considerava Aristeu, um geômetra contemporâneo, merecedor de grande crédito por ter escrito um trabalho mais antigo sobre Lugares Sólidos (o nome grego para secções cônicas, oriundo provavelmente da definição estereométrica das curvas na obra de Menaecmus).

Também o trabalho de Aristeu foi perdido e sem possibilidades de recuperação, segundo este autor pelo mesmo motivo do de Euclides.

Arquimedes (287 - 212 a.C.), também dedicou uma pequena parcela de sua grandiosa contribuição ao desenvolvimento da Matemática ao tema cônicas quando relacionou, pelo método da exaustão, a área de um segmento de parábola com um triângulo inscrito no mesmo. Em Boyer (Ibid., p. 94), temos:

Dos tratados que se ocupavam principalmente do método da exaustão (isto é, o cálculo da integral) o mais popular era a Quadratura da parábola. As secções cônicas eram conhecidas havia mais de um século quando Arquimedes escreveu, mas nenhum progresso fora feito no cálculo de suas áreas. Só o maior matemático da antiguidade conseguiu resolver a questão de quadrar uma secção cônica – um segmento de parábola – coisa que ele realizou na proposição 17 da obra em que o objetivo era a quadratura.

Arquimedes provou que “a área de um segmento de parábola é $\frac{4}{3}$ da área do triângulo que tem a mesma base e altura igual”, Boyer (1992, p. 6). Ele chegou a isso equilibrando entre si os segmentos que formam o triângulo com os segmentos que formam o segmento parabólico. Em relação a elipse e a hipérbole Arquimedes, em um importante tratado sobre conóides e esferóides achou a área da elipse inteira

Boyer (1974), no mesmo tratado mostrou como os volumes dos segmentos cortados de um elipsóide ou parabolóide ou hiperbolóide (de duas folhas) de revolução em torno do eixo principal. Grande foi a colaboração do maior matemático da Antiguidade para as seções cônicas.

Boyer (1974) relata que durante o primeiro século da Idade Helenística três matemáticos se destacaram a grande distância dos demais da época como também de seus predecessores e sucessores, está falando de Euclides, Arquimedes e Apolônio e conclui que é por causa deles que o período de 300 a 200 a. C. foi denominado de “Idade Áurea” da matemática grega.

Segundo este autor, o foco matemático do Ocidente durante todo o período helenístico permaneceu em Alexandria, mas Apolônio assim como Arquimedes não nasceu aí. Nasceu em Perga em Panfília (sul da Ásia Menor), mas pode ter sido educado em Alexandria e lá permanecido algum tempo e ensinado na universidade. Eves (2011) destaca Euclides, Arquimedes e Apolônio como os três gigantes da matemática do século III a.C. Sobre a vida de Apolônio em Boyer (Ibid., p. 104) temos:

Durante certo tempo estive em Pérgamo, onde havia uma universidade e uma biblioteca só inferiores às de Alexandria, graças ao apoio do general Alexandre, Lisímaco, e de seus sucessores. Como houve muitos homens chamados Apolônio na antiguidade (129 desses, com biografias, são mencionados em Pauly Wissowa, Real-Enzyklopadie der Klassischen Altertumswissenschaft) nosso matemático é distinguido dos demais pelo uso de seu nome completo, Apolônio de Perga. Não conhecemos as datas precisas de sua vida, mas diz-se que viveu durante os reinos de Ptolomeu Energetes e de Ptolomeu Filopater; um relato diz que foi o tesoureiro geral de Ptolomeu Filadelfo, e diz-se ainda que era vinte e cinco a quarenta anos mais jovem que Arquimedes. Sugeriu que viveu de 262 a 190 A. C., e pouco se sabe de sua vida. Parece ter-se considerado rival de Arquimedes; assim, ele tratou de vários dos assuntos que discutimos no capítulo anterior.

O capítulo anterior tratado acima se refere ao capítulo sobre Arquimedes de Siracusa. Muitas das obras escritas por Apolônio foram perdidas, várias delas tratam de assuntos que Euclides e também Arquimedes escreveram, segundo Boyer (Ibid., p. 104) “há mais perguntas não respondidas sobre Apolônio e sua obra do que sobre Euclides e Arquimedes, pois a maior parte de suas obras desapareceram” o autor cita os títulos de muitas delas na qual destacamos uma coleção chamada “Tesouros da Análise” onde seis obras de Apolônio que estavam incluídas com dois dos tratados mais avançados (hoje perdidos) de Euclides no qual, segundo Boyer (Ibid., p. 104), “Papus descreveu isso como uma coleção especial destinada aos que,

depois de adquirir os elementos usuais, queriam obter a capacidade de resolver problemas envolvendo curvas” e conclui dizendo que esse “Tesouro” o qual consistia em grande parte da obra de Apolônio, conseqüentemente deve ter incluído muito do que hoje chamamos de geometria analítica, sendo assim, destaca que foi com razão que Apolônio, não Euclides, mereceu dos antigos o nome de “o Grande Geômetra”.

Além disso, ele foi um astrônomo excepcional, o modelo matemático favorito da antiguidade para a representação do movimento dos planetas aparentemente deve-se a ele. Uma frase do matemático e historiador Otto Neugebauer (apud Boyer, 1974, p. 104) diz o seguinte “Parece-me que toda a evidência indica ter sido Apolônio o fundador da astronomia matemática grega”.

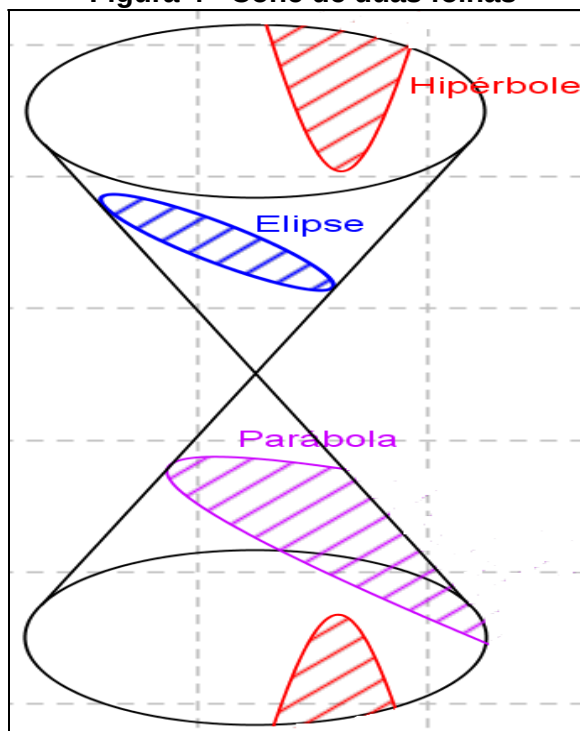
A obra prima de Apolônio, entre muitas de sua produção científica, certamente foi “*As Cônicas*” composta por oito livros dos quais, de acordo com Boyer (1974) só a metade (os quatro primeiros existem ainda em grego), mas um matemático árabe, Thâbit ibn Qorra, tinha traduzido os três seguintes, e essa versão se preservou. Em 1710 Edmund Halley deu uma tradução em latim dos sete livros e deu uma versão por inferência do oitavo livro. Boyer (Ibid., p. 106-107) resume bem essa obra ao escrever:

As secções cônicas eram conhecidas havia cerca de um século e meio quando Apolônio escreveu seu célebre tratado sobre essas curvas. Pelo menos duas vezes antes nesse intervalo tinham sido escritas exposições gerais – por Aristeu e por Euclides – mas assim como Os Elementos de Euclides substituíram textos elementares anteriores, assim em nível mais avançado o tratado sobre Cônicas de Apolônio derrotou todos os rivais no campo das secções cônicas, inclusive As cônicas de Euclides, e na antiguidade nenhuma tentativa parece ter sido feita para aperfeiçoá-lo. Se a sobrevivência é uma medida de qualidade, Os elementos de Euclides e As cônicas de Apolônio foram claramente as melhores obras em seus campos.

Além de escrever sobre o que já existia antes sobre cônicas, e não deixar de citar o mérito de seus autores, Apolônio aperfeiçoou e aprofundou muito esse tópico da matemática, foi ele que mostrou que é possível obter de um único cone a elipse, a hipérbole e a parábola apenas variando o ângulo de inclinação do plano de secção, provou também, Boyer (1974), que o cone não precisa ser reto para obtermos essas cônicas e suas propriedades não variam se mudarmos de um cone reto para um cone oblíquo, também foi ele que substituiu o cone de uma só folha por um cone de duas folhas e essa mudança fez da hipérbole a curva de dois ramos que

conhecemos hoje (figura 4). Grande foi sua parcela de colaboração para o conceito de cônicas que ainda permanecem até os dias de hoje.

Figura 4 - Cone de duas folhas



Fonte: Autor, 2013

Foi ele quem deu as designações elipse, parábola e hipérbole usadas até hoje para essas curvas devido as suas propriedades. Esses nomes foram dados num contexto novo para as secções planas e, de acordo com Boyer (1974, p. 107):

Na história da matemática os conceitos são mais importantes que a terminologia, mas a mudança de nome das secções cônicas devida a Apolônio teve significado mais profundo do que o usual. Durante cerca de um século e meio as curvas não tinham tido designações além de descrições banais do modo pelo qual tinham sido descobertas – secções de cone acutângulo (oxytome), secções de cone retângulo (orthotome) e secções de cone obtusângulo (amblytome).

Até mesmo o próprio Arquimedes havia continuado a usar esses nomes embora, segundo o autor, se diga que ele também usou o nome parábola como sinônimo para secção de cone retângulo.

No que diz respeito à utilidade de suas descobertas, as quais sabemos ser muitas, Apolônio não estudou as cônicas pensando em suas utilidades, ele mesmo ao falar sobre os teoremas do Livro IV afirmando sobre os resultados de seus teoremas disse que “Eles merecem aceitação pelas suas próprias demonstrações, assim como aceitamos muitas coisas na matemática por esta razão e nenhuma

outra” (Heath, apud Boyer, 1974, p. 111). Não só Apolônio, como também outros matemáticos da antiguidade não davam importância às aplicações práticas de suas descobertas. Até mesmo o engenhoso Arquimedes com todos os seus inventos não valorizava mais a utilidade de seus teoremas de que o produto de seus pensamentos “Mesmo quando lidava com alavancas e outras máquinas simples, ele estava muito mais interessado em princípios gerais que em aplicações práticas”, Boyer (Ibid., p. 89). Apesar disso, esses extraordinários matemáticos, como muitos outros de seu tempo, não imaginavam o quanto suas descobertas um dia viriam ser tão úteis para a humanidade, veja esse exemplo citado por Boyer:

Em particular, Apolônio conhecia as propriedades da hipérbole referida às assíntotas como eixos, dadas, para a hipérbole equilátera (sic), pela equação $xy = c^2$. Não podia saber é claro, que um dia essa relação, equivalente à lei de Boyle, seria fundamental no estudo dos gases, ou que seu estudo da elipse seria essencial para a moderna astronomia. (Ibid., 1974, p. 110).

Este autor também cita outras importantes aplicações das descobertas de Apolônio, por exemplo, os conhecimentos sobre as propriedades das tangentes a uma parábola para uma análise de trajetórias locais e as tangentes a uma elipse para o estudo das órbitas dos planetas.

Algumas propriedades das cônicas como as do foco e diretriz, por exemplo, não são tratadas em *As Cônicas* de Apolônio que se referia a eles apenas indiretamente (Boyer, 1974) e não há conceito numérico que corresponda à excentricidade, para este autor, é possível que essas e outras omissões possam ter sido tratadas em outras obras perdidas ou outros autores.

Pouco se sabe das realizações dos antigos devido a perda da maioria de suas obras, mas devido ao fato de não dispor de todo aparato tecnológico que dispomos hoje, podemos imaginar a grandiosidade de seus pensamentos e que seus teoremas e descobertas foram o princípio de tudo isso, o pontapé inicial para que o homem moderno pudesse desenvolver todas essas tecnologias que dispomos hoje, tudo isso não seria possível sem as extraordinárias contribuições desses matemáticos.

Leibniz (apud Boyer, Ibid., p. 114) ressalta a importância das contribuições de estudos anteriores para esse desenvolvimento ao citar: “Quem entende Arquimedes e Apolônio admirará menos as realizações dos homens mais célebres de épocas posteriores”. Em relação a isso, podemos ilustrar com este exemplo citado por Boyer

(1974, p. 114) "Os métodos de Apolônio, em *As Cônicas*, em muitos pontos são tão semelhantes aos modernos que às vezes se considera seu tratado como uma geometria analítica, antecipando a de Descartes por 1800 anos". Percebemos aqui a sua valorosa participação no desenvolvimento da Geometria Analítica que revolucionou o conhecimento geométrico e deu sentido a toda álgebra e geometria matemática.

Após a morte de Apolônio a geometria clássica não tinha achado um defensor, segundo Boyer (1974), com a possível exceção de Menelau. Mas durante o reino de Diocleciano (284-305), novamente em Alexandria, viveu um matemático que era movido pelo mesmo espírito de Euclides, Arquimedes e Apolônio. Papus de Alexandria que escreveu uma obra com o título *Coleção* (Synagoge) escrita em 320 a qual é importante por várias razões:

Em primeiro lugar fornece um registro histórico valioso de partes da matemática grega que de outro modo não conheceríamos. Por exemplo, é pelo livro V da *Coleção* que ficamos sabendo da descoberta por Arquimedes dos treze poliedros semi-regulares ou "sólidos arquimedianos". Além disso, a *Coleção* contém novas provas e lemas suplementares para proposição das obras de Euclides, Arquimedes, Apolônio e Ptolomeu. Finalmente, o tratado contém descobertas e generalizações novas, não encontradas em nenhuma obra anterior. (BOYER, *Ibid.*, p. 135).

A *Coleção* continha oito livros, dos quais o primeiro livro e a primeira parte do segundo se perderam. Dentre os seus oito livros, destacamos o livro VII que descreve os trabalhos que constituem o método da análise e uma coleção de obras conhecida como *Tesouro da Análise*, onde Papus menciona os tratados sobre cônicas de Aristeu, Euclides e Apolônio. Segundo Boyer (*Ibid.*, p. 138): "A *Coleção* de Papus é o último tratado matemático antigo realmente significativo, pois a tentativa do autor de ressuscitar a geometria não teve sucesso", para ele devido ao fato de os autores que vieram depois de Papus não terem chegado ao seu nível. Eves (2011, p. 212) comenta que:

A *Coleção matemática* de Papus é verdadeiramente uma mina rica em pepitas geométricas. Comparações, quando possíveis, têm mostrado que os comentários históricos contidos no trabalho são dignos de confiança. Devemos muito de nosso conhecimento da geometria grega a esse tratado, com suas citações ou referências a trabalhos de mais do que 30 matemáticos da Antiguidade. Poderíamos chamá-lo de réquiem ou canto do cisne da geometria grega.

Para Boyer (1974), as obras de Pappus têm quase exclusivamente a forma de comentários sobre tratados anteriores e que ele é responsável por comentários que surgiram depois sobre *Os Elementos* de Euclides, o *Almagesto* de Ptolomeu, dentre outros.

Este autor cita Teon de Alexandria, responsável por uma importante edição de os *Elementos* (preservada) e pai de Hipatia, uma jovem culta que escreveu comentários sobre Diofante, Ptolomeu e Apolônio. “Trata-se da primeira mulher a se dedicar a matemática cujo nome figura na história dessa ciência” (Eves 2011, p. 212). De acordo com Macena (2007, p. 54) “Seu trabalho sobre as cônicas facilitou a compreensão dos conceitos próprios do assunto”, foi cruelmente assassinada em 415 por ser devota da cultura pagã, e conforme Macena (Ibid., p. 55) “O estúpido episódio de sua morte é considerado como marco do fim de Alexandria como centro de ciências”.

Ainda foram escritas algumas obras sobre as cônicas antes do final do período helenístico. Eutocius (nascido por volta de 480) comentou vários tratados de Arquimedes e *As cônicas* de Apolônio. Segundo Boyer (Ibid., p. 140) “É a Eutocius que devemos a solução de Arquimedes de uma cúbica por cônicas que se cortam”. Seus comentários sobre *As cônicas* eram dedicados a Antemius de Trales (morreu em 534) que descreveu a construção da elipse com cordel, Boyer (1974). Ainda escreveu uma obra sobre espelhos que queimam onde são descritas as propriedades dos focos da parábola.

Isidoro de Mileto (viveu em 520) foi quem tornou conhecidos os comentários de Eutocius e, conforme Boyer (1974), promoveu um ressurgimento do interesse pelas obras de Arquimedes e Apolônio. Deve-se a ele a construção com cordel e régua T da parábola. Para este autor, talvez se deva a Eutocius a preservação das versões gregas de obras de Arquimedes e dos quatro primeiros livros de *As cônicas* de Apolônio.

O imperador Justiniano, em 529, fechou as portas da Academia Platônica de Atenas, da qual Isidoro de Mileto foi um dos seus últimos dirigentes, por julgar que a cultura pagã da Academia e de outras escolas filosóficas em Atenas seria uma ameaça ao cristianismo ortodoxo, Boyer (1974).

A data de 529 tem outro significado que pode ser considerado sintomático da mudança de valores – nesse ano foi fundado o venerável monastério de Monte Cassino. A matemática, é claro, não desapareceu de vez da Europa

em 529, (...). Mas o espírito matemático se apagou, enquanto os homens discutiam menos geometria e mais o caminho para a salvação. (Ibid., 1974, p. 141).

Assim, a história dá uma pausa no desenvolvimento matemático no que diz respeito ao nosso tema em questão. A escola de Alexandria ainda resistiu até 641, quando os árabes queimaram todo o resto e então “A longa e gloriosa história da matemática grega chegava ao fim” (EVES, 2011, p. 213). Desta forma, as cônicas voltarão a ser discutidas e aplicadas alguns séculos depois.

3.1.2 A alta Idade Média

Em relação ao nosso tema esse foi um período de poucas colaborações para o mesmo assim como para outros assuntos na matemática. De modo geral apenas os árabes contribuíram com as seções cônicas nas suas traduções sobre o tema que tiveram enorme importância nas preservações de obras antigas. Eves (Ibid., p. 261) destaca o trabalho de Tâbit ibn Qorra (826 - 901) em que relata sobre nosso matemático:

Deve-se a ele a primeira tradução árabe realmente satisfatória dos *Elementos*. Consta que suas traduções de Apolônio, Arquimedes, Ptolomeu e Teodósio figuram entre as melhores que já se fizeram. De importância especial são suas traduções dos Livros V, VI e VII das *Secções cônicas* de Apolônio, pois somente através delas esses Livros se preservaram. Ele escreveu também sobre astronomia, cônicas, álgebra elementar, quadrados mágicos e números amigáveis.

Como vimos sua obra foi decisiva para a manutenção das obras de Apolônio sobre seções cônicas no sentido de proporcionar aos seus sucessores o mais completo material sobre o tema.

No século XI Omar Khayyam (1048 - 1131) deu uma importante contribuição para a resolução de equações cúbicas, “a mais profunda e original contribuição algébrica árabe” (Eves, Ibid., p. 261), onde utilizou seções cônicas no método de resolução destas equações, “Estas eram classificadas sistematicamente e se obtinha uma de suas raízes como abscissa do ponto de intersecção de uma circunferência e uma hipérbole equilátera ou de duas hipérboles equiláteras” (Ibid., 2011, p. 263). Temos aqui uma importante aplicação do nosso tema para resolução de problemas matemáticos.

Boyer (1974) relata bem o que aconteceu no período em que o desenvolvimento matemático perdeu parte de seu impulso, segundo este autor houve algum progresso nesse período os quais ele cita a obra de Fibonacci e Oresme no século treze e no quatorze, porém “os esforços somados de todas as civilizações medievais não foram em nenhum sentido comparáveis as realizações matemáticas da Grécia antiga” (Boyer, *Ibid.*, p. 194). O autor afirma que “A história da matemática não relata um desenvolvimento contínuo e de ritmo uniforme” (*Ibid.*, p. 190) e isso é evidente também no estudo da história das seções cônicas.

3.1.3 A Renascença

Desde Pappus, o primeiro a se interessar pelas cônicas, na Europa, foi Johannes Werner (1468 - 1528) um dos representantes da geometria pura no século dezesseis. Nascido na Alemanha, Werner, entre outras obras suas, a de maior importância para a geometria foi uma em latim, em vinte e dois livros sobre *Elementos de cônicas*, impressa em Nuremberg em 1522. De acordo com Boyer (1974, p. 215) “Essa obra não pode ser favoravelmente comparada a *As cônicas* de Apolônio, quase inteiramente desconhecida no tempo de Werner, mas assinala um novo interesse pelas curvas quase pela primeira vez desde Pappus” ainda sobre essa obra este autor afirma:

Por que o autor estava preocupado com a duplicação do cubo, ele se concentrou na parábola e na hipérbole, derivando as equações no plano estereometricamente do cone, como o tinham feito seus predecessores na Grécia; mas parece haver alguma originalidade em seu método para marcar no plano os pontos de uma parábola com régua e compasso. (*Ibid.*, p. 215).

Depois de tanto tempo apareceu na Europa uma obra que se relacionava de perto com os estudos sobre cônicas da antiguidade. Werner foi uma exceção a utilização das propriedades elementares ensinadas em Euclides sobre geometria na primeira metade do século dezesseis, ele era um dos poucos que tinham conhecido a geometria de Arquimedes, Apolônio e Pappus, Boyer (1974) e a razão disso foi que as traduções latinas desses autores só se difundiram em meados do século.

Em 1537, quatro livros de *As cônicas* de Apolônio que se preservaram em grego e tinham sido traduzidos para o latim foram impressos em Veneza. Maurolico, fez uma tradução desses livros em 1548, mas a mesma só foi publicada em 1654,

junto com Commandino, que também fez outra tradução impressa em Bolonha em 1566 e traduziu também a Coleção matemática de Papus a qual foi impressa em 1588, os dois deram grandes contribuições neste campo.

Maurolico conhecia os vastos tesouros de geometria antiga que se estavam tornando disponíveis, pois lia grego, bem como latim. Na verdade, a partir de algumas indicações em Papus sobre a obra de Apolônio sobre máximos e mínimos – isto é, sobre normais às secções cônicas – Maurolico tentou reconstruir o então perdido livro V de As cônicas. Nisso ele representava uma voga que seria um dos principais estímulos à geometria antes de Descartes – a de reconstruir obras perdidas em geral e os quatro últimos livros de As cônicas em particular. Durante o intervalo entre a morte de Maurolico em 1575 e a publicação de La géométrie de Descartes em 1637, a geometria marcou passo até que o desenvolvimento da álgebra atingisse um nível que tornasse possível a geometria algébrica. (BOYER, 1974, p. 220).

Temos aqui um importante passo para o ressurgimento do espírito matemático no que diz respeito à geometria e, em especial, ao nosso tema secções cônicas. O ano da morte de Maurolico foi também o mesmo ano em que Commandino morreu, nessa época “a Europa Ocidental tinha recuperado a maior parte das principais obras matemáticas da antiguidade agora existentes” (Boyer, *Ibid.*, p. 222). Sendo assim, a Europa estava se preparando para o ressurgimento daquele mesmo espírito matemático da antiga Grécia.

3.1.4 A Matemática Moderna

Um dos primeiros estudiosos que utilizaram as secções cônicas como uma ferramenta prática na resolução de problemas foi Johann Kepler (1571 - 1630) que desde 1604 se envolveu com essas curvas em seus trabalhos sobre óptica e as propriedades dos espelhos parabólicos (Boyer, 1974). “Kepler necessitava de aplicações à astronomia, especialmente em relação às suas órbitas elípticas de 1609” (*Ibid.*, p. 236).

O século XVII teve importância considerável na história da matemática por ser essa uma época de avanços políticos, econômicos e sociais o que gerou uma atmosfera favorável para uma produção crescente da pesquisa matemática, de acordo com Macena (2007). Desse modo, as secções cônicas foram utilizadas como ferramentas auxiliares na resolução de questões práticas como Kepler as utilizou na

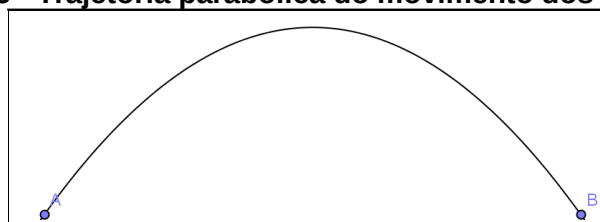
astronomia. A seguir vemos uma das contribuições de Kepler ao nosso tema em questão:

Ao passo que Apolônio se inclinara a pensar nas cônicas como sendo três tipos diferentes de curvas – elipses, parábolas e hipérboles – Kepler preferia pensar em cinco espécies de cônicas, todas pertencentes a uma só família ou genus. Com sua forte imaginação e um sentimento pitagórico da harmonia matemática, Kepler desenvolveu para as cônicas em 1604 (em seu *Ad Vitellionem paralipomena*, isto é, “Introdução á óptica de Vitello”) o que chamamos de princípio de continuidade. Da secção cônica que consiste de duas retas que se cortam, em que os dois focos coincidem no ponto de intersecção, passamos gradualmente por uma infinidade de hipérboles à medida que um foco se afasta cada vez mais do outro. Quando um foco está infinitamente longe, já não temos a hipérbole de dois ramos mas uma parábola. Se o foco móvel passa além do infinito e regressa pelo outro lado passamos por uma infinidade de elipses até que, quando os focos coincidem novamente, chegamos ao círculo. (BOYER, 1974, p. 236, 237 e 238).

Podemos perceber o quanto Kepler contribuiu para complementar o estudo feito por Apolônio, aliás, a palavra *focus* (latim para lareira) deve-se a ele. Suas duas primeiras leis de astronomia foram anunciadas em 1609 em sua obra *Astronomia nova*.

Galileu Galilei (1564 - 1642), em sua análise dos movimentos dos projéteis descobriu que a sua trajetória, desprezando-se a resistência do ar, é uma parábola. Conforme a figura 5 a seguir:

Figura 5 - Trajetória parabólica do movimento dos projéteis



Fonte: Autor, 2013

Também Descartes (1596 - 1650) em sua obra *La géométrie* que tornou a geometria analítica conhecida pelos seus contemporâneos, utilizou as cônicas para especificar uma classificação de problemas geométricos determinados, para ele, segundo Boyer (1974), a classificação é a seguinte:

Os que levam a equações quadráticas e podem, portanto ser construídos com régua e compasso, ele colocou na primeira classe; os que levam a equações cúbicas e quárticas, cujas raízes podem ser construídas por meio de secções cônicas, na classe número dois; os que levam equações de grau cinco ou seis podem ser construídos introduzindo uma cúbica como tridente ou a parábola superior $y = x^3$, e esses ele colocou na classe três. (Ibid., p. 250).

Descartes reconheceu como geométricas as curvas que ele chamou de algébricas como a reta, o círculo e as cônicas. A esse tipo de curva Descartes considerava como descritas exatamente, o outro tipo de curva que ele chamou de transcendentess² considerou como inexatamente descritas.

Só num caso Descartes examinou com detalhe um lugar, e isso foi em conexão com o problema do lugar das três e quatro retas de Pappus, para o qual Descartes derivou a equação $y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$. Essa é a equação geral de uma cônica passando pela origem; embora os coeficientes literais sejam supostos positivos, isto é de longe o ataque mais geral até então feito à análise da família das secções cônicas. Descartes indicou condições sobre os coeficientes sob as quais a cônica é uma reta, uma parábola, uma elipse, ou uma hipérbole, a análise num certo sentido sendo equivalente ao reconhecimento da característica da equação cônica. (BOYER, 1974, p.251).

Aqui vemos um pouco da contribuição de Descartes às secções cônicas, apesar de tê-la feito sem levar em consideração as aplicações práticas de seus estudos. Porém isso foi de uma utilidade extraordinária posteriormente assim como *As cônicas* de Apolônio, *La géométrie* de Descartes foi tanto um triunfo da teoria não-prática, Boyer (1974).

Um geômetra e físico de Paris, amigo íntimo de Descartes, Claude Mydorge (1585 - 1647), “Publicou alguns trabalhos sobre óptica e um tratamento sintético das secções cônicas em que simplificava muitas das demonstrações prolixas de Apolônio” Eves (2011, p. 400).

Pierre De Fermat (1601 - 1665) ao se dedicar à restauração de obras perdidas da antiguidade se propôs a reconstruir o *Lugares planos* de Apolônio, baseado em alusões contidas na *Coleção matemática* de Pappus. Em relação às cônicas Boyer (Ibid., p. 254) cita importantes colaborações dele ao relacioná-las algebricamente:

Fermat em seguida mostrou que $xy = k^2$ é uma hipérbole e que uma equação da forma $xy + a^2 = bx + cy$ pode ser reduzida a uma da forma $xy = k^2$ (por translação de eixos). A equação $x^2 = y^2$ ele considerava como uma só reta (ou semi-reta) pois operava só no primeiro quadrante, e reduziu outras equações homogêneas de segundo grau a essa forma. Depois ele mostrou que $a^2 \pm x^2 = by$ é uma parábola, que $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = c^2$ é um círculo, que $a^2 - x^2 = ky^2$ é uma elipse, e que $a^2 + x^2 = ky^2$ é uma hipérbole (da qual deu ambos os ramos). A equações quadráticas mais gerais, em que os vários termos de segundo grau aparecem, Fermat aplicou uma rotação de eixos para reduzi-las a uma das formas anteriores.

² Sobre esse tipo de curva ver Boyer (1974, p. 250);

Os trabalhos de Fermat eram mais didáticos que o de Descartes e sua geometria analítica se aproximava da atual. Laplace, segundo Boyer (1974) o considera como descobridor do cálculo diferencial³ bem como co-descobridor da geometria analítica. Em sua obra *Introdução aos lugares* Fermat acrescentou como apêndice “A solução de problemas sólidos por meio de lugares”, em que observa que equações determinadas cúbicas ou quárticas podem ser resolvidas através de cônicas (Boyer, 1974). Fermat publicou muito pouco em vida, devido a sua modéstia, contentava-se em escrever a Mersenne⁴ (1588 - 1648) e expor suas ideias.

Grégoire de St. Vicent (1584 - 1667) calcula, pela primeira vez, a área entre a hipérbole e as assíntotas, de acordo com Chasles (1837, apud Neto 2008, p. 20). Ele escreveu uma obra chamada *Opus geometricum quadraturae circule et sectionum conici* (obra geométrica sobre a quadratura do círculo e de secções cônicas) publicada em 1647, apesar de ter sido completada “antes de Fermat trabalhar com tangentes e áreas talvez em 1622-1625” conforme Boyer (Ibid., p. 257).

Evangelista Torricelli (1608 - 1647) discípulo de Galileu também contribuiu com as seções cônicas ao estudar as trajetórias parabólicas dos projéteis verificou que a envoltória das parábolas é outra parábola, Boyer (1974). Ele atacou novamente o problema da quadratura da parábola deu vinte e uma provas diferentes sobre isso em seu *De dimensione parabolae*.

Outro que se sentiu fortemente atraído pelas cônicas foi o arquiteto e engenheiro militar de Lyon, Girard Desargues (1591 - 1661), o qual ficou conhecido posteriormente como o *profeta da geometria projetiva*. Ele deu um tratamento projetivo nas seções cônicas, rompendo completamente com o passado e, por isso, suas ideias não foram aceitas em seu tempo Boyer (1974). Desargues escreveu um dos grandes livros menos bem sucedido de todos os tempos “*Brouillon projet d’ une atteinte aux événements des recontres d’ um cone avec un plan*”, em Paris no ano de 1639 o qual, Boyer (1974), traduziu como “Esboço tosco de uma tentativa de

³ Maiores detalhes sobre Fermat e o cálculo diferencial como também geometria analítica, veja Boyer (1974, p. 255-256).

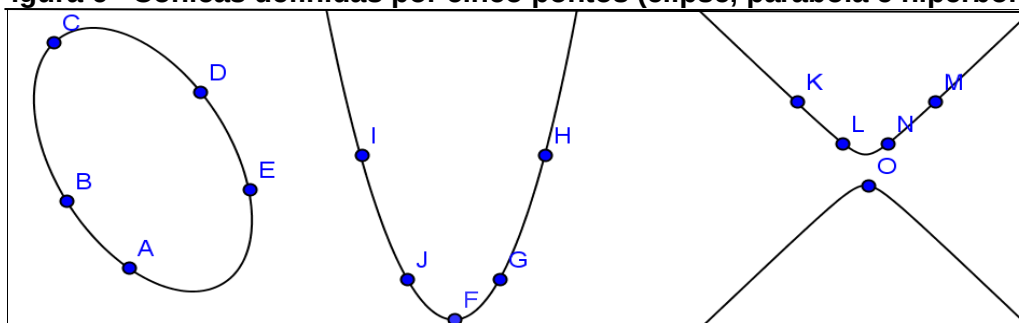
⁴ Sobre Mersenne e sua importância para a matemática no século dezessete veja Boyer (1974, p. 245) e Eves (2011, p. 400).

tratar o resultado de um encontro entre um cone e um plano” nessa obra ele trata de diferentes pontos de visão sobre uma cônica, por exemplo, a forma como enxergamos um círculo que observado obliquamente aparece como uma elipse, porém na projeção das sombras de círculos percebemos que as “formas e tamanhos mudam conforme o plano de incidência que corta o cone de raios visuais ou raios de luz; mas certas propriedades permanecem as mesmas em todas essas mudanças e forma essas propriedades que Desargues estudou” Boyer (1974, p. 262).

Segundo ele uma seção cônica continua sendo uma seção cônica não importando quantas vezes seja projetada. Em seu tempo seu trabalho não foi reconhecido, mas hoje “é considerado um clássico do desenvolvimento inicial da geometria projetiva sintética” Eves (2011, p. 359).

Um jovem adolescente de apenas quatorze anos, Blaise Pascal (1623 - 1662) ao participar das reuniões informais da Academia de Mersenne em Paris com seu pai Etienne Pascal conheceu as ideias de Desargues. Aos dezesseis anos publicou um *Essay pour les coniques* que era uma só página impressa, mas Boyer (Ibid., p. 264) a classifica como “uma das mais fecundas da história” e de acordo com Chasles (1837, p. 70, apud Neto 2008, p. 22), uma importante aplicação deste teorema é “qualquer cônica é completamente definida por cinco pontos”. Como podemos ver na figura 6, dependendo da posição de onde colocarmos os cinco pontos obteremos a cônica.

Figura 6 - Cônicas definidas por cinco pontos (elipse, parábola e hipérbole)



Fonte: Autor, 2013

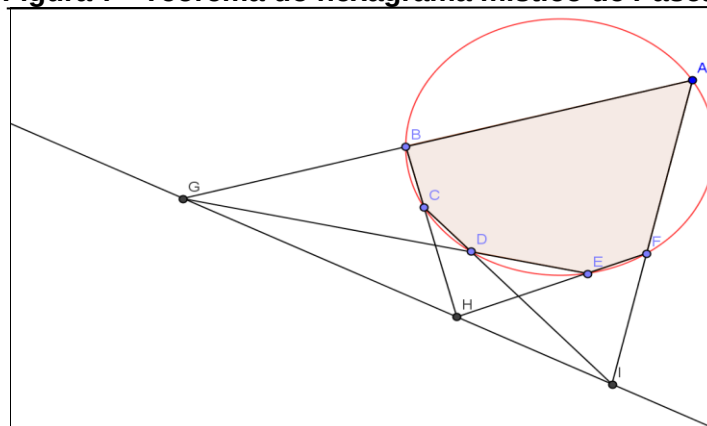
Conforme Eves (2011), em 1648 ele escreveu um manuscrito também sobre seções cônicas, mas não publicou. Devido ao interesse matemático de Pascal variar sempre, só aos trinta anos o pequeno *Essay* teve sua continuação quando ele trabalhou no projeto de uma *Obra completa sobre as cônicas* que não foi publicada e

não existe hoje “Leibniz viu uma cópia manuscrita e as notas que tomou são agora tudo o que resta da obra” Boyer (1974, p. 265). Sobre este fato tem-se:

O manuscrito de Pascal sobre as secções cônicas baseava-se no trabalho de Desargues e se perdeu, mas foi visto por Descartes e Leibniz. Nele figurava o famoso teorema do *hexagrama místico* de Pascal da geometria projetiva: *Se um hexágono está inscrito numa cônica, então os pontos de intersecção dos três pares de lados opostos são colineares e reciprocamente*. Eves (2011, p. 363).

Eves (Ibid., p. 363) comenta que Pascal possivelmente “demonstrou o teorema à maneira de Desargues, primeiro provando que ele é verdadeiro para uma circunferência e depois estendendo-o por projeção a qualquer secção cônica”. Na figura 7 temos a ilustração desse teorema.

Figura 7 - Teorema do hexagrama místico de Pascal



Fonte: Autor, 2013

Um discípulo de Desargues, Philippe de La Hire (1640 - 1718) escreveu três obras sobre as seções cônicas. De acordo com Boyer (Ibid., p. 270), sua primeira obra de 1673 “era sintética, mas ele não rompeu com a geometria analítica do futuro”, procurava um patrono e em sua obra *Nouveaux éléments des sections coniques* de 1679:

Os métodos de Descartes estavam em evidência. Os métodos são métricos e bidimensionais, partindo, no caso da elipse e da hipérbole, das definições em termos da soma e diferença dos raios focais e, no caso da parábola, da igualdade das distâncias ao foco e diretriz. Boyer (Ibid., p. 270).

Segundo este autor, La Hire também levou para a geometria analítica algo da linguagem de Desargues. Em 1685 voltou a métodos sintéticos numa obra intitulada simplesmente *Sectiones conicae* que conforme Boyer (1974, p. 270), “Esse poderia ser descrito como uma versão por La Hire de *As cônicas* de Apolônio traduzida para

o latim a partir da linguagem francesa de Desargues”. Eves (2011, p. 360) relata que com muito esforço La Hire, “procurou mostrar que todos os teoremas do *Secções cônicas* de Apolônio podiam ser deduzidos da circunferência pelo método da projeção central de Desargues”.

Jan De Witt (1629 - 1672) em sua obra *Elementa curvarum* de 1658 também aborda estas curvas. Segundo Boyer (1974), esta obra divide-se em duas partes onde a primeira dá várias definições cinemáticas e planimétricas das seções cônicas. Conforme este autor (Ibid., p. 272), “entre essas encontram-se as definições por razão foco-diretriz: nossa palavra “diretriz” deve-se a ele” e a finalidade de sua obra é reduzir todas as equações de segundo grau em x e y à forma canônica por translação e rotação de eixos. “Ele sabia reconhecer quando uma tal equação representava uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole, conforme a chamada característica fosse negativa, nula, ou positiva” (BOYER, Ibid., p. 272).

Outro nome ligado as seções cônicas é o de René Francois de Sluse (1622 - 1685) onde em sua obra muito popular *Mesolabum* (Dos meios) ele tratou do tópico das construções geométricas de raízes de equações e, segundo Boyer (Ibid., p. 274), “Mostrou que dada qualquer cônica, pode-se construir as raízes de qualquer cúbica ou quártica por intersecções da cônica com um círculo”.

Também Christiann Huygens (1629 - 1695) mostrou que a catenária de Galileu não era uma parábola e sim uma curva não-algébrica. Em 1656 “tinha aplicado uma análise infinitesimal as cônicas, reduzindo a retificação da parábola à quadratura da hipérbole (isto é, a achar um logaritmo)” conforme Boyer (Ibid., p. 278) e em 1657, “tornou-se o primeiro a achar a área da superfície de um segmento de um parabolóide de revolução (a “conóide” de Arquimedes), mostrando que o problema pode ser resolvido por meios elementares”.

John Wallis (1616 - 1703) aritmetizou as cônicas de Apolônio em sua obra *Tractatus de sectionibus conicis* publicada em 1655. Boyer (1974) comenta que esta obra junto com a obra de De Witt *Elementa curvarum* podem ser consideradas como uma complementação da aritmetização das seções cônicas iniciadas por Descartes.

As cônicas de Wallis começavam mencionando de leve a geração das curvas como secções de um cone, mas ele deduzia todas as propriedades familiares com métodos de coordenadas no plano a partir das três formas-padrão $e^2 = ld - ld^2/t$, $p^2 = ld$ e $h^2 = ld + ld^2/t$ onde e , p e h são as ordenadas da elipse, parábola e hipérbole respectivamente, correspondentes a

abscissas d medidas a partir de um vértice na origem, e onde l e t são o *lactus rectum* e o “diâmetro” ou eixo. Mais tarde ele tomou essas equações como definições das secções cônicas consideradas “absolutamente”, isto é, sem referência ao cone. (BOYER, 1974, p. 280).

Segundo este autor, Wallis se aproximou ainda mais do que Fermat da definição moderna de cônica como “lugar de pontos num plano, munido de sistema de coordenadas, cujas coordenadas satisfazem a uma equação do segundo grau em duas variáveis” (Ibid., p. 280). De acordo com Eves (2011, p. 431), “Wallis foi um dos primeiros a discutir as cônicas como curvas de segundo grau, em vez de considerá-las como secções de um cone”.

Isaac Barrow (1630 - 1677) também contribuiu com as secções cônicas quando em 1675 publicou uma edição com comentários dos quatro primeiros livros de *As cônicas* de Apolônio.

Um jovem escocês James Gregory (1638 - 1675), um predecessor de Newton, em uma obra intitulada *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, publicada em 1667 que continha resultados muito significativos em análise infinitesimal, “estendeu o algoritmo de Arquimedes à quadratura de elipses e hipérboles” Boyer (Ibid., p. 282).

Isaac Newton (1642 - 1727) em meio a tantas contribuições que fez à matemática também estudou as seções cônicas. Em 1687 na sua obra *Philosophiae naturalis principia mathematica* que trata de física, astronomia além de conter muita matemática pura em especial no que se refere as seções cônicas, Boyer (1974), por exemplo no Lema XIX do livro I Newton resolve o problema de Pappus das quatro retas⁵.

Em todo o tratado Newton deu preferência a métodos geométricos, provavelmente porque em suas mãos forneciam demonstrações elegantes e convincentes de linguagem universalmente familiar; mas vimos que onde achava conveniente fazê-lo, ele não hesitava em apelar para seu método de séries infinitas e para o Cálculo. A maior parte da Sec. II do livro II, por exemplo, é analítica. De outro lado, o tratamento que Newton dá às propriedades das cônicas é quase exclusivamente sintético, pois aqui Newton não precisava recorrer à análise. Após o problema de Pappus ele deu um par de gerações orgânicas de cônicas como intersecções de retas móveis, e depois usou-as em meia dúzia de proposições subseqüentes (sic) para mostrar como construir uma cônica satisfazendo a cinco condições – passando por cinco pontos, por exemplo, ou tangente a cinco retas, ou passando por dois pontos e tangente a três retas. As proposições XIX e XXIX do livro I formam praticamente um pequeno tratado sobre a descrição

⁵ Sobre o problema das quatro retas de Pappus consulte Boyer (1974, p. 237) e Eves (2011, p. 210-211).

orgânica das cônicas e incluem alguns belos teoremas. Na proposição XXVII, por exemplo, Newton relacionou as propriedades do quadrilátero completo com as cônicas. Usando o fato que os centros das cônicas tangentes a quatro retas jazem sobre uma reta (agora chamada reta de Newton) passando pelos pontos médios das três diagonais, ele chamou a cônica tangente a cinco retas. (BOYER, 1974, p. 299-300).

Principia é um tratado composto por três livros e é considerado “o mais admirado tratado científico de todos os tempos” Boyer (Ibid., p. 292) “apresenta os fundamentos da física e da astronomia na linguagem da geometria pura”. De acordo com Neto (2008, p. 22) Newton “interessado no movimento dos planetas, tem especial interesse na geração das cônicas a partir da reta tangente que representa a velocidade do planeta” e apresenta construções das cônicas a partir de retas sem se servir do cone.

Edmund Halley (1656 - 1742), “Restaurou, por inferência, o desaparecido Livro VIII da obra *Secções cônicas* de Apolônio” (Eves, 2011, p. 405) e também, em 1710, deu uma tradução em latim dos sete livros anteriores (Boyer, 1974).

O nome de James Stirling (1692 - 1770), um amigo de Newton, que em sua obra intitulada *Lineae tertii ordinis Newtonianae* de 1717 sobre seções cônicas “deu um tratamento completo em que os eixos, vértices e assíntotas são encontrados analiticamente a partir da equação geral de segundo grau em relação a eixos oblíquos de coordenadas”, Boyer (Ibid., p. 315). Segundo este autor esta é uma obra em que ele complementa a classificação das curvas cúbicas feitas por Newton em 1704 e acrescenta outras.

Colin Maclaurin (1698 - 1746) em seu tratado *Geometria orgânica* de 1720 “estendeu os resultados de Newton e Stirling sobre cônicas, cúbicas e curvas algébricas de grau superior” Boyer (Ibid., p. 315), conforme este autor esta obra contém proposições interessantes sobre cônicas e conclui-se que “uma cônica é univocamente determinada por cinco pontos” (Ibid., p. 315) e contém também o “teorema de Pascal sobre um hexágono inscrito numa cônica, deduzido das propriedades de um quadrilátero inscrito numa cônica” Boyer (Ibid., p. 315).

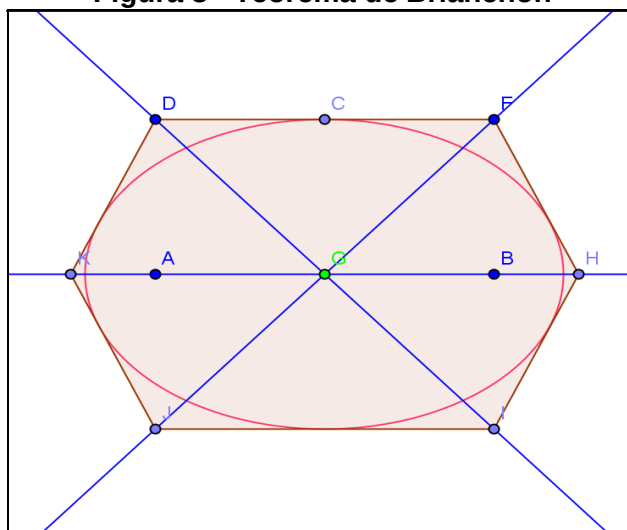
O Conde italiano G. C. Fagnano (1682 - 1766), “continuou o trabalho sobre a lemniscata de Bernoulli, mostrando, por volta de 1717-1718, que a retificação dessa curva leva a uma integral elítica (sic), como também o comprimento de arco da

elipse” e cujo nome “ainda está ligado à elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ que apresenta certas analogias com a hipérbole eqüilátera (sic) ou retangular” Boyer (1974, p. 321).

Leonhard Euler (1707 - 1783) “mostrou que o arco mais curto (geodésica) entre dois pontos de uma superfície cônica se transformaria num segmento de reta se a superfície fosse estendida sobre um plano” Boyer (Ibid., p. 338-339), de acordo com este autor, Euler percebia o significado de trabalhar de maneira geral “em vez de se concentrar em secções cônicas, Euler deu uma teoria geral de curvas, baseado no conceito de função” (Ibid., p. 339).

Charles Julien Brianchon (1785 - 1864) retomou o teorema de pascal e o exprimiu em linguagem moderna como “em todo hexágono inscrito numa cônica, os três pontos de intersecção dos lados opostos sempre estão sobre uma reta” e assim ele continuou com mais demonstrações e chegou a que tem seu nome “Em todo hexágono circunscrito a uma secção cônica as três diagonais se cortam num mesmo ponto”, Boyer (Ibid., p. 387) e relata que esses teoremas são “fundamentais no estudo projetivo das cônicas” (Ibid., p.387) e essas relações entre pontos e retas sobre cônicas foram mais tarde exploradas pelo verdadeiro fundador da geometria projetiva Jean Victor Poncelet (1788 - 1867), em relação a um de seus teoremas que diz que “todos os círculo têm em comum dois pontos imaginários no infinito, pois os pontos $(1, i, 0)$ e $(i, 1, 0)$ satisfazem ambos a equação $x^2 + y^2 + ax + by + ct^2 = 0$, quaisquer que sejam os valores a, b, c ” (Ibid., p. 393).

Figura 8 - Teorema de Brianchon



Fonte: Autor, 2013

Mais um matemático a se destacar no tema em questão foi Julius Plücker (1801 - 1868) o qual mostrou que: “os focos das cônicas tem a propriedade que as tangentes imaginárias por esses pontos à curva passam pelos dois pontos circulares citados acima; por isso ele definiu um foco de uma curva plana de ordem superior como um ponto tendo essa propriedade” Boyer (1974, p. 393-394).

Felix Klein (1849 - 1925) que fora assistente de Plücker na Universidade de Bonn, percebeu nas transformações da geometria projetiva que “uma cônica é transformada numa cônica” Boyer (Ibid., p. 401).

Com esta breve retrospectiva histórica percebemos como o conceito de cônicas se desenvolveu ao longo dos anos, cada período com suas características próprias da época influenciou, não só no estudo deste tema, como de outros na matemática.

Pretendemos mostrar que este conceito matemático não surgiu de uma hora para outra e, sim, é resultado de muitos anos de estudos e pesquisas para se chegar até sua caracterização atual, tanto enquanto conteúdo a ser ensinado como sua aplicação enquanto ferramenta de utilização prática em outras áreas do conhecimento.

O que buscamos foi provocar uma reflexão acerca do ensino deste conteúdo e incentivar o uso da história da matemática como recurso pedagógico no seu ensino. A seguir uma breve introdução do conceito de cada cônica é apresentada na sua versão didática da forma como aparece nos livros didáticos.

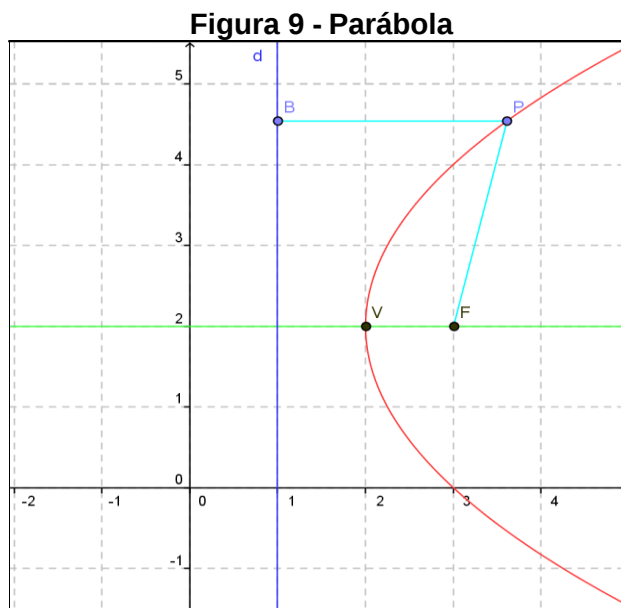
3.2 As três cônicas

Trataremos agora das três cônicas do nosso estudo enquanto saber a ensinar, aquele apresentado pelos livros didáticos de acordo com Chevallard (1991), a parábola, a elipse e a hipérbole. Apresentamos as definições, os elementos principais e a equação de cada uma delas conforme aparece nos livros didáticos para ser ensinado aos alunos com o propósito de discutir cada um desses tópicos na sequência didática que construímos. Todas as figuras foram construídas com o auxílio do GeoGebra.

3.2.1 A parábola

Dados um ponto F e uma reta d, pertencentes a um plano α , com $F \notin d$, seja p a distância entre F e d. Parábola é o conjunto dos pontos de α que estão a mesma distância de F e de d.

$$\text{Parábola} = \{ P \in \alpha / PF = Pd \}$$



Fonte: Autor, 2012

Seus principais elementos são:

Foco: F

Diretriz: d

Parâmetro: p (é o valor da distância do foco F à reta diretriz d)

Vértice: V

Eixo de simetria: reta VF

Relação notável: $VF = \frac{p}{2}$

A equação e o gráfico da parábola dependem do seu vértice e do seu foco conforme o segmento formado por estes dois pontos esteja paralelo aos eixos das abscissas ou das ordenadas, sendo assim temos:

Se uma parábola tem vértice no ponto $V(x', y')$ e o segmento VF é paralelo ao eixo x, sua equação é:

$$(y - y')^2 = 2p(x - x')^2$$

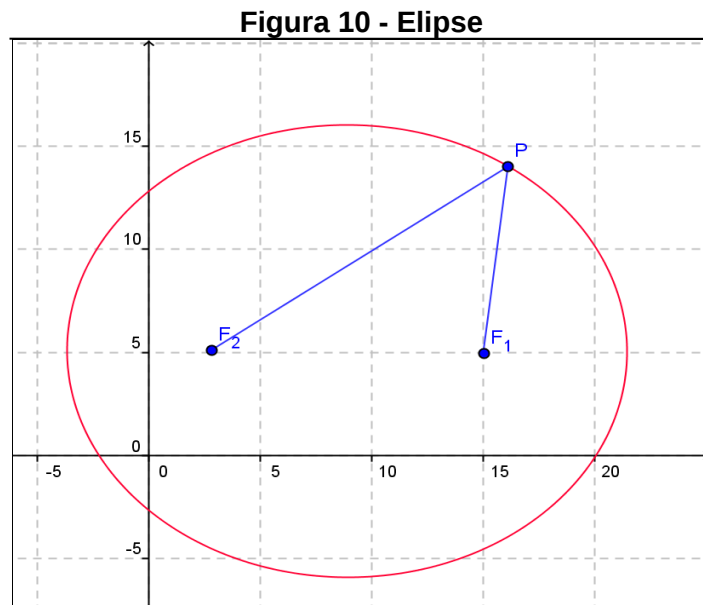
Analogamente, se uma parábola tem vértice no ponto $V(x',y')$ e o segmento VF é paralelo ao eixo y, sua equação é:

$$(x - x')^2 = 2p(y - y')^2.$$

3.2.2 A elipse

Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 , pertencentes a um plano α , seja $2c$ a distância entre eles, elipse é o conjunto dos pontos de α cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$ ($2a > 2c$).

$$Elipse = \{ P \in \alpha / PF_1 + PF_2 = 2a \}.$$



Fonte: Autor, 2012

Quanto aos seus principais elementos, temos:

Focos: F_1 e F_2

Centro: C

Eixo maior: A_1A_2

Eixo menor: B_1B_2

Distância focal: $2c$

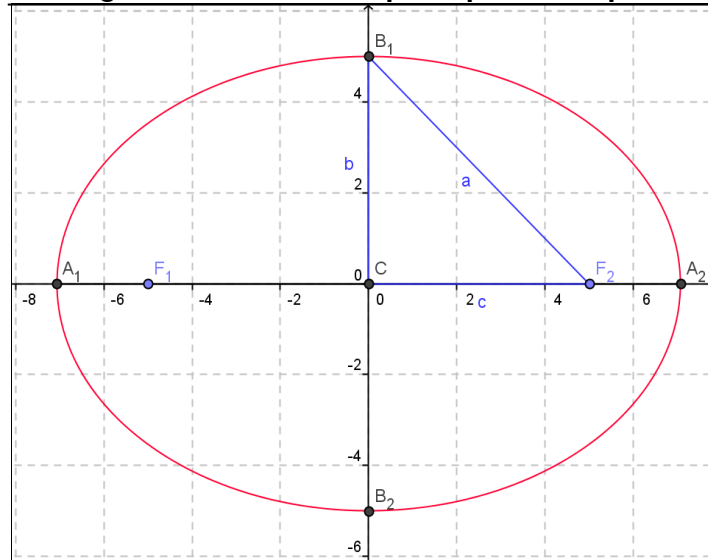
Medida do eixo maior: $2a$

Medida do eixo menor: $2b$

Excentricidade: $e = \frac{c}{a}$

Relação notável: $a^2 = b^2 + c^2$

Figura 11 - Elementos principais da elipse



Fonte: Autor, 2012

Sua equação e seu gráfico variam de acordo com a posição do eixo maior A_1A_2 se é paralelo ao eixo das abscissas ou das ordenadas, então:

Se uma elipse tem centro no ponto $C(x', y')$ e o segmento A_1A_2 é paralelo ao eixo x, sua equação é:

$$\frac{(x - x')^2}{a^2} + \frac{(y - y')^2}{b^2} = 1$$

Se uma elipse tem centro no ponto $C(x', y')$ e A_1A_2 é paralelo ao eixo y, sua equação é:

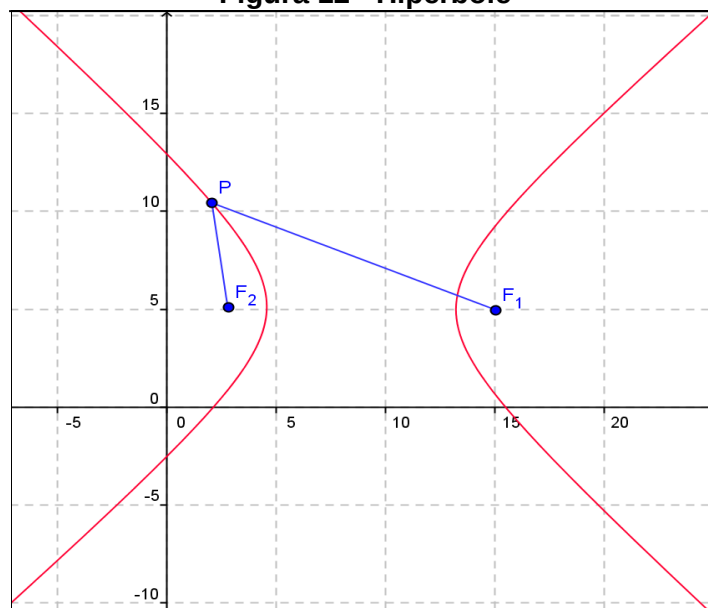
$$\frac{(y - y')^2}{a^2} + \frac{(x - x')^2}{b^2} = 1$$

3.2.3 A hipérbole

Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 , pertencentes a um plano α , seja $2c$ a distância entre eles. Hipérbole é o conjunto dos pontos de α cuja diferença (em valor absoluto) das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$ ($0 < 2a < 2c$).

$$\text{Hipérbole} = \{ P \in \alpha \mid |PF_1 - PF_2| = 2a \}$$

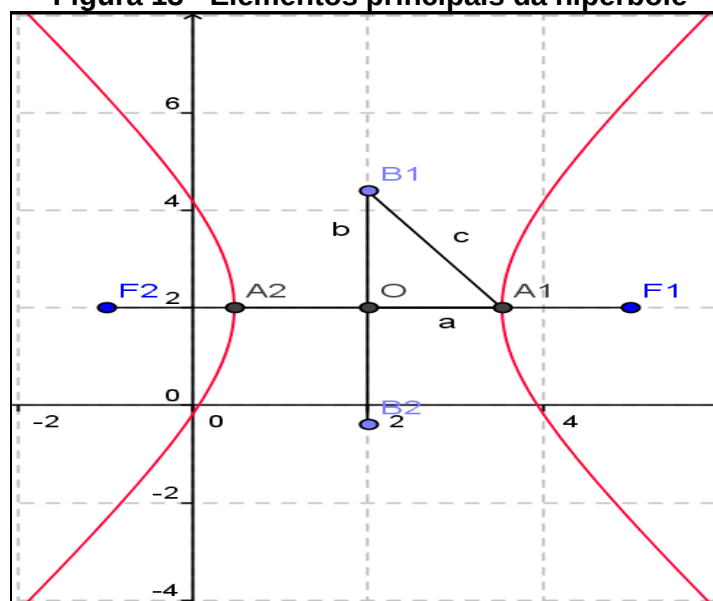
Figura 12 - Hipérbole



Fonte: Autor, 2012

Seus principais elementos são mostrados na figura 13 a seguir:

Figura 13 - Elementos principais da hipérbole



Fonte: Autor, 2013

Focos: F_1 e F_2

Centro: O

Eixo real ou transverso: A_1A_2

Eixo imaginário: B_1B_2

Distância focal: $2c$

Medida do eixo real: $2a$

Medida do eixo imaginário: $2b$

Excentricidade: $e = \frac{c}{a}$

Relação notável: $c^2 = a^2 + b^2$

Assim como na elipse sua equação e o seu gráfico também variam de acordo com a posição do eixo A_1A_2 , que aqui é chamado de eixo real, conforme seja paralelo ao eixo das abscissas ou das ordenadas, sendo assim:

Se uma hipérbole tem centro no ponto $C(x', y')$ e o segmento A_1A_2 é paralelo ao eixo x , sua equação é:

$$\frac{(x - x')^2}{a^2} - \frac{(y - y')^2}{b^2} = 1$$

Se uma hipérbole tem centro no ponto $C(x', y')$ e o segmento A_1A_2 é paralelo ao eixo y , sua equação é:

$$\frac{(y - y')^2}{a^2} - \frac{(x - x')^2}{b^2} = 1$$

Desta forma apresentamos os principais conceitos apresentados aos alunos do ensino médio sobre as seções cônicas, e será a partir deles que construiremos a nossa sequência didática para o seu ensino. No tópico seguinte abordaremos as suas aplicações no cotidiano.

3.3 Aplicações das seções cônicas no cotidiano

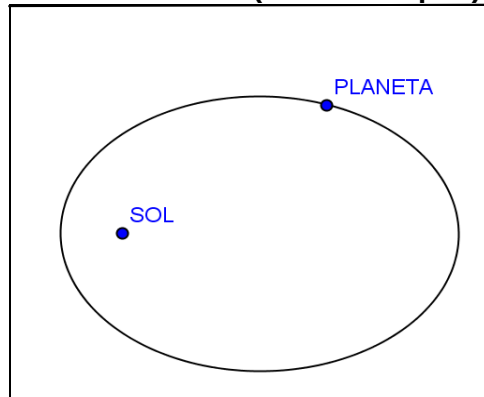
Passaremos agora a uma discussão a respeito das aplicações das seções cônicas no cotidiano. Estas curvas desempenham um importante papel em muitas situações reais e suas aplicações em outras áreas como física, astronomia, arquitetura, engenharia, economia e nas novas tecnologias podem servir como fonte de inspiração para despertar nos alunos mais interesse por este tema.

Johann Kepler (1571 - 1630), como citado anteriormente, foi um dos primeiros a utilizar as características e propriedades das seções cônicas em situações reais. Kepler começou a estudar e também propor aperfeiçoamentos às seções cônicas sob um novo ponto de vista, especialmente em relação ao contexto prático, isto é, às aplicações na resolução de problemas concretos e não somente pelo desenvolvimento intelectual por si só que o estudo desse tema pode proporcionar.

Em 1609 foram formuladas as duas primeiras leis de Kepler do movimento planetário e em 1619 a terceira, que são as seguintes, Eves (2011):

I. *Os planetas movem-se em torno do Sol em trajetórias elípticas com o Sol num dos focos.*

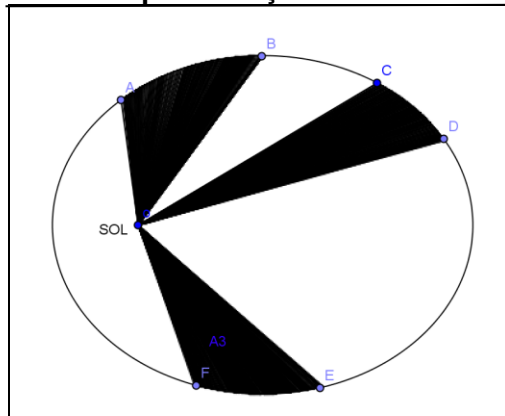
Figura 14 - Trajetória elíptica dos planetas em torno do Sol (1ª lei de Kepler)



Fonte: Autor, 2012

II. *O raio vetor que liga um planeta ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.*

Figura 15 - Representação da 2ª lei de Kepler



Fonte: Autor, 2012

Na figura 15, acima, a área das três figuras escuras serão iguais se os pontos de suas extremidades levarem o mesmo tempo para se coincidirem.

III. *O quadrado do tempo para que um planeta complete sua revolução orbital é diretamente proporcional ao cubo do semieixo maior da órbita.*

Depois de 1800 anos (aproximadamente) de estudos sobre as seções cônicas, finalmente encontra-se uma aplicação de suas propriedades e características num contexto prático e então percebemos a importância daqueles que precederam as mentes mais brilhantes como a de Kepler. Veja um relato sobre isto:

Nunca se sabe quando uma parte da matemática pura poderá receber uma aplicação inesperada. Como disse William Whewell uma vez: “Se os gregos não tivessem estudados as seções cônicas, Kepler jamais teria superado Ptolomeu”. É muito interessante que 1800 anos depois de os gregos terem desenvolvido as propriedades das cônicas, meramente para satisfazer seus pruridos intelectuais, viesse a ocorrer uma feliz aplicação prática delas. (EVES, 2011, p. 357).

Estas palavras valem também em muitos outros temas da matemática, em várias descobertas na física, astronomia, arquitetura, engenharia, etc. Mas o nosso estudo está se referindo somente ao contexto das seções cônicas.

Não só a trajetória dos planetas em torno do Sol, mas também os satélites artificiais enviados para o espaço percorrem trajetórias elípticas. Existem cometas que percorrem trajetórias hiperbólicas, os quais ao passarem perto de algum planeta com grande densidade, alteram a sua trajetória para outra hipérbole com um foco situado nesse planeta.

Outro que usou as seções cônicas em suas observações descobrindo, assim, as cônicas em situações reais foi Galileu Galilei (1564 - 1642). Em sua análise dos movimentos dos projéteis, descobriu que a sua trajetória, desprezando-se a resistência do ar, é uma parábola. Boyer (1974, p. 239) relata: “É um fato notável que as seções cônicas tivessem sido estudadas por mais de 2000 anos antes que duas delas, quase simultaneamente, encontrassem possibilidades de aplicação na ciência – a elipse na astronomia e a parábola na física”.

Este autor está se referindo às descobertas de Kepler e de Galileu que viveram em épocas contemporâneas. E assim surgem as primeiras das muitas aplicações práticas deste tema da matemática.

Devido as suas propriedades físicas e estéticas, os arcos de cônicas são utilizados em pontes, pórticos, cúpulas e na construção civil. Como exemplo pode-se citar os cabos de suspensão de uma ponte que têm a forma de uma parábola

quando o peso total é uniformemente distribuído segundo o seu eixo horizontal como podemos visualizar na figura 16 a seguir.

**Figura 16 - Ponte Golden Gate,
Califórnia - Estados Unidos**



Foto: Internet, 2012

Alguns auditórios, teatros e igrejas são construídos de modo a proporcionar condições acústicas especiais e para isso utilizam propriedades das cônicas, Sato (2005).

O formato do hiperbolóide de uma folha “é usado na construção de centrais de energia atômica, onde barras de aço retilíneas (que têm alta resistência) se cruzam para obter estruturas extremamente fortes”, Sato (2005, p. 40), isto explica o formato das torres das usinas nucleares devido a sua grande estabilidade e isso diminui consideravelmente os riscos dessas torres se danificarem veja figura 17 abaixo.

**Figura 17 - Usina nuclear de Three Mile Island,
Pensilvânia – EUA**



Foto: Internet, 2012

As propriedades refletoras das cônicas têm sido usadas na construção de telescópios, antenas, radares, faróis, ópticas dos carros, lanternas, óculos graduados, lupas, microscópios.

As antenas, como a da figura 18, e alguns espelhos dos telescópios astronômicos precisam ser parabólicos, pois os sinais que recebemos são muito fracos e “é necessário captá-los em uma área relativamente grande e concentrá-los em um único ponto para que sejam naturalmente amplificados”, Brasil (2004, p. 111), e neste ponto, que é o foco da parábola, deve estar o captador de sinais que o transmite ao receptor da antena.

Figura 18 - Antena parabólica



Foto: Internet, 2012

Os telescópios refletores além do refletor parabólico principal no fundo de um tubo usam um espelho hiperbólico secundário para redirecionar a luz do foco principal para um ponto mais conveniente onde a imagem será observada, como na figura 19.

Figura 19 - Esquema de um telescópio refletor

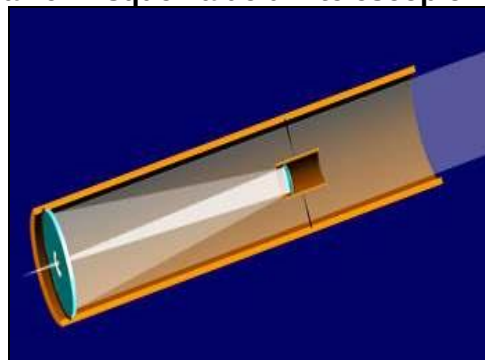


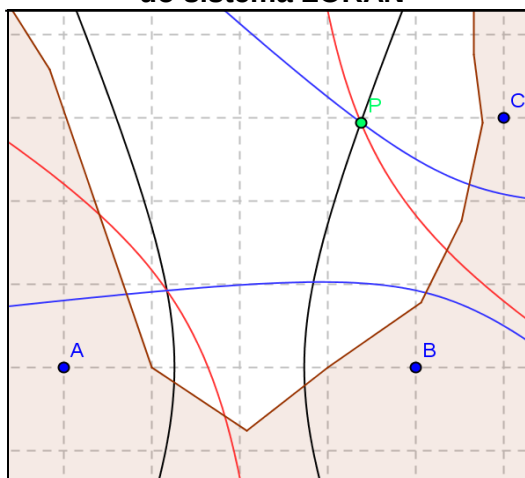
Foto: Internet, 2012

Refletores odontológicos usam um “espelho elíptico que possui a propriedade de concentrar os raios luminosos em um ponto, que é ajustado para iluminar o dente que está sendo tratado” Brasil (Ibid., p. 143), a luz é emitida em um ponto, foco da elipse, e concentrada em outro que é ajustado para ficar exatamente sobre o dente a ser tratado.

Da mesma forma o aparelho de radioterapia para tratamento médico emite raios com o objetivo de “destruir tecidos doentes sem afetar os tecidos sadios que se encontram ao redor”, Brasil (2004, p. 143), eles também se valem de espelhos elípticos para concentrar os raios em um determinado ponto.

Alguns sistemas de navegação utilizam linhas de posição hiperbólica para localizar um ponto em que se encontra um navio, por exemplo. Se um navio está localizado no ponto P na figura 20 abaixo e recebe sinais das estações A, B e C é possível saber sua localização medindo o tempo entre os sinais recebidos de cada estação e conforme seja a diferença entre eles tem-se uma hipérbole para cada par de estações que são os focos da mesma, então o ponto de interseção das três é exatamente onde está localizado o navio. Esse sistema é conhecido como o sistema LORAN (long range navigation) de localização em navegação de longa distância.

Figura 20 - Esquema feito com o GeoGebra do sistema LORAN



Fonte: Autor, 2012

Outras aplicações também são encontradas na Física e na Química como, por exemplo: Robert Boyle (1662) descobriu que, sob temperatura constante, a função que expressa a relação entre o volume de uma massa fixa de gás e a pressão exercida sobre ela é hiperbólica. “Rutherford usou órbitas hiperbólicas de partículas α irradiadas para explorar o núcleo do átomo”, (GIOVANNI, 2005, p.105). Acredita-se que ao utilizar de forma eficiente essas aplicações das seções cônicas o professor irá motivar os alunos a interessar-se por seu estudo.

4 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo apresentamos a definição de uma sequência didática e, em seguida, uma sequência didática para o ensino das seções cônicas, elaborada com o propósito de auxiliar o professor de matemática do ensino médio a promover uma alternativa para o ensino-aprendizagem deste tópico da geometria analítica para os alunos.

4.1 Definição de sequência didática

Esta pesquisa objetiva construir uma sequência didática para o ensino das seções cônicas a fim de promover a aprendizagem deste tópico da geometria analítica de forma diferente da tradicional apresentada nos livros didáticos, para isso fizemos alguns estudos preliminares a respeito deste tema e apresentamos nos capítulos anteriores seu contexto histórico e também algumas de suas aplicações em situações reais para que seja discutido previamente com os alunos para motivar seu interesse em estudar as cônicas e em seguida utilizar a sequência didática que apresentaremos neste capítulo.

De acordo com Henriques (2001, p. 61):

Uma sequência (sic) didática é um esquema experimental de situações problemas desenvolvido por sessões de ensino a partir de um estudo preliminar, caracterizando os objetivos específicos de cada problema, a análise matemática e a análise didática relativas às atividades propostas. A análise matemática destaca as resoluções possíveis, a forma de controle e os resultados esperados, enquanto que a análise didática se preocupa com as variáveis didáticas de situações, pré-requisitos e com a competência. Variáveis didáticas são elementos matemáticos que estão à disposição do professor e, que permitem a análise de situações didáticas durante uma investigação.

Sobre o desenvolvimento de uma sequência didática este autor sugere que deve ser aplicado através de sessões “o estudo preliminar realizado pelo pesquisador (professor) com base nos fundamentos que figuram o estudo em questão” (Ibid., p. 61), e acrescenta que isto caracteriza as atividades que serão desenvolvidas pelos alunos durante o trabalho.

4.2 A Sequência didática proposta

A sequência didática aqui exposta foi elaborada com o propósito de auxiliar o professor de matemática do ensino médio a promover uma alternativa diferente para a aprendizagem das seções cônicas. Propomos que o professor utilize esta sequência discutindo ao longo da construção as propriedades e características da cônica para tornar mais eficiente o processo de aprendizado. Acrescentamos que de maneira alguma a nossa pretensão é criar uma proposta inovadora e inusitada em relação ao seu ensino.

Desenvolvida por intermédio do software GeoGebra, esta sequência mostra de uma forma dinâmica as propriedades de cada uma das três cônicas (parábola, elipse e hipérbole) de modo que se possa visualizar por meio desse software as animações de algumas propriedades que as caracterizam. Pretendemos proporcionar ao professor mais uma ferramenta que pode contribuir com o aprendizado, por parte do aluno, das seções cônicas.

Essa sequência considera as seções cônicas como saber a ser ensinado, de acordo com a teoria da Transposição Didática proposta por Chevallard (1991), isto é, o saber contido nos livros didáticos, mas que precisam ainda passar pelo critério do professor que deve verificar e adequar esses conteúdos à sua sala de aula. Em relação à teoria de Mudança de Quadros proposta por Douady (1987), vários quadros são utilizados nessa sequência dos quais citamos o quadro geométrico, o quadro algébrico, o quadro numérico, o quadro de funções e o quadro da geometria analítica. Essas ideias serviram de referenciais teóricos para esta pesquisa.

4.3 Proposta de ensino das seções cônicas com turmas do ensino médio

O objetivo principal deste trabalho é proporcionar ao professor de matemática uma sequência didática para o ensino de cônicas utilizando o software GeoGebra.

Para se realizar esta proposta é preciso seguir alguns passos:

1. Investigar por meio de aplicação de questionário até que ponto o tema seções cônicas é importante, na visão do aluno, para o desenvolvimento das tecnologias;

2. Diagnosticar a forma como o conteúdo “seções cônicas” é encarado pelo aluno em sala de aula;
3. Discutir o contexto histórico das seções cônicas;
4. Observar a aplicabilidade das cônicas em outras áreas do conhecimento;
5. Apresentar aos alunos o software GeoGebra e ensiná-los a usar as ferramentas que serão utilizadas nestas atividades;
6. Fazer uma análise a priori do panorama dos conhecimentos disponíveis dos alunos;
7. Aplicar cada uma das sessões da sequência e realizar as atividades propostas, de acordo com o nível da turma, identificado no diagnóstico;
8. Fazer uma análise de cada seção cônica durante a realização das sessões.

Ao final da aplicação das sessões de ensino e das intervenções posteriores do professor da turma complementado com suas colocações e resolução de exercícios, espera-se que o aluno seja capaz de:

- ✓ Caracterizar as seções cônicas;
- ✓ Associar os diferentes tipos de gráficos de cada uma das seções cônicas com suas respectivas equações;
- ✓ Perceber a relação existente entre a equação e o gráfico de uma seção cônica;
- ✓ Determinar os elementos de uma cônica a partir de seu gráfico;
- ✓ Construir o gráfico de uma cônica a partir de seus elementos;
- ✓ Ser capaz de citar exemplos do cotidiano sobre cada cônica.

No ensino médio o aluno que possui essas habilidades mostra que compreendeu o assunto referente às “cônicas” neste nível de ensino. Ressaltamos, no entanto, que o aluno deve demonstrar as habilidades acima citadas, não só na tela do GeoGebra como também deve, ao final do processo, a partir de um problema, identificar o tipo de cônica e explorar todos os seus elementos também no caderno.

Deste modo as etapas de nossa investigação foram elaboradas buscando atingir os objetivos propostos acima.

Organizamos os encontros com os alunos de acordo com o quadro 4:

Quadro 4 - Previsão para 10 encontros

1º encontro	Aplicação de questionário referente ao tema seções cônicas. Leitura, comentários e questionamentos do texto histórico.
2º encontro	Comentários dos aportes históricos adquiridos em outras fontes.
3º encontro	Discussão a respeito das aplicações práticas das seções cônicas.
4º encontro	Apresentação do software GeoGebra e familiarização dos alunos com o programa.
5º encontro	Aplicação da sessão de ensino referente à parábola.
6º encontro	Resolução da atividade 1.
7º encontro	Aplicação da sequência didática envolvendo a elipse.
8º encontro	Resolução da atividade 2.
9º encontro	Aplicação da sequência didática envolvendo a parábola.
10º encontro	Resolução da atividade 3.

Fonte: Autor, 2012

Propomos que se trabalhe com alunos do terceiro ano do ensino médio, pois em geral é nesse período que os professores abordam este tema.

Também formulamos um questionário como sugestão para que se aplique com os alunos, o mesmo tem como propósito identificar a familiaridade dos alunos com as seções cônicas, suas expectativas em relação a este estudo e de se fazer uma análise a priori da situação didática. Claro que o professor da turma já deve saber até que ponto seus alunos estão aptos ou não para trabalhar este tema, desta forma sugerimos sua aplicação, mas o mesmo pode fazer algumas adaptações de acordo com o que achar necessário.

A aplicação deste questionário será importante para a obtenção de algumas informações que consideramos úteis para esta proposta: Investigar até que ponto o tema seções cônicas é importante, na visão do aluno, para o desenvolvimento das tecnologias; diagnosticar a forma como o conteúdo “seções cônicas” é encarado pelo aluno em sala de aula e observar a aplicabilidade das cônicas em outras áreas do conhecimento, conforme sugerimos nos passos a serem seguidos anteriormente.

Tal questionário, que se encontra no apêndice, objetiva apenas a obtenção de um diagnóstico inicial a respeito do panorama dos conhecimentos disponíveis dos alunos antes da aplicação da sequência didática. Com o propósito de planejarmos melhor a forma como serão abordados os próximos encontros baseados nas conclusões acerca das respostas dadas pelos alunos.

4.4 As sessões de ensino

De acordo com o quadro 4 da página 71, antes da aplicação das sessões de ensino no planejamento dos encontros deve ser incluído os comentários dos aportes históricos adquiridos em outras fontes a respeito das seções cônicas, a discussão a respeito das aplicações práticas das seções cônicas e também a apresentação do software GeoGebra e familiarização dos alunos com este programa.

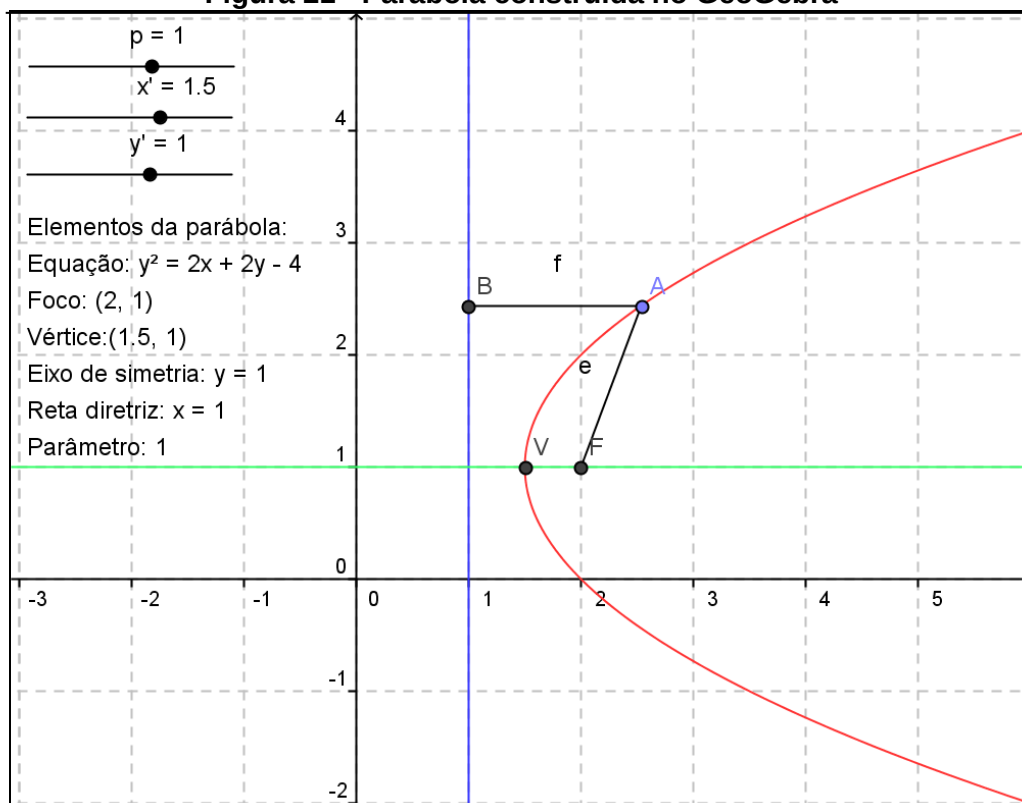
Após estes encontros discute-se cada cônica aplicando as sessões que definiremos abaixo. Vale lembrar que estas sessões são apenas introdutórias a cada cônica, depois de suas aplicações vêm os momentos de intervenção e complementação do professor com suas explicações e aplicação das atividades sugeridas nos livros didáticos para que, de fato, a aprendizagem se concretize. Sendo assim, de forma alguma, pretendemos que esta sequência substitua as aulas do professor, e sim que possa servir como ferramenta para auxiliar o trabalho de se ensinar este conteúdo.

4.4.1 Sessão 1: Construção da parábola

Nesta etapa buscamos apresentar as propriedades da parábola e seus elementos, ao mesmo tempo em que se percebem as mudanças ocorridas quando variamos os valores numéricos do parâmetro e das coordenadas do vértice, mudanças essas que acontecem desde sua equação até a concavidade da parábola e sua abertura. Pode-se visualizar também a propriedade que caracteriza a parábola em relação ao foco e a reta diretriz quando analisamos um ponto sobre a mesma e sua distância a esses elementos.

Ao longo de sua realização sugerimos que o professor discuta outras questões que achar relevantes relacionadas às características da parábola bem como suas propriedades. A figura 21 foi construída utilizando o GeoGebra 4.2 seguindo os passos sugeridos na sessão de ensino sobre a parábola que se encontra no apêndice. Nela podemos observar todos os elementos da parábola e, no GeoGebra podemos interagir fazendo as mudanças que sugerimos na atividade final, porém o professor poderá, ao seu critério sugerir outras mudanças que achar pertinentes.

Figura 21 - Parábola construída no GeoGebra



Fonte: Autor, 2012

A seguir apresentamos a estrutura dessa sessão de ensino que trata da parábola:

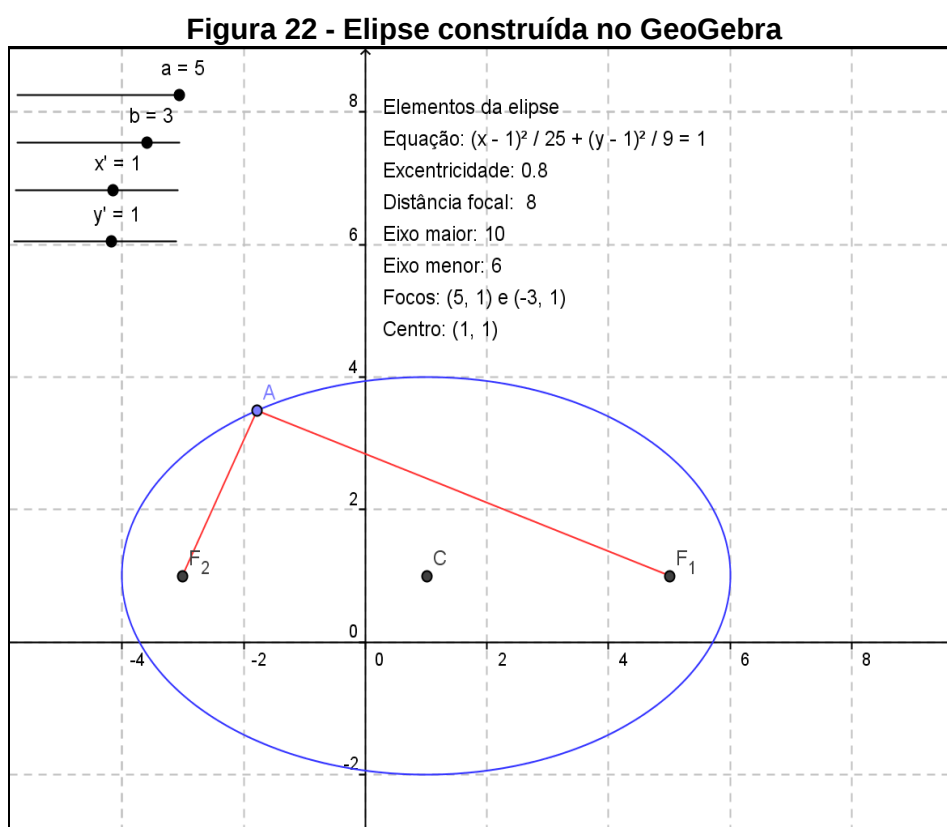
- **OBJETIVO:** Proporcionar a aprendizagem sobre a parábola, tais como sua equação algébrica, seu gráfico e seus principais elementos.
- **TEMPO PREVISTO:** 2 aulas de 50 minutos.
- **PÚBLICO ALVO:** Alunos do 3º ano do ensino médio que tenham estudado em geometria analítica o ponto, a reta e a circunferência.
- **ETAPAS:** Utilizando a versão 4.2 do GeoGebra, o aluno seguirá as etapas sugeridas no apêndice para a parábola.
- **AVALIAÇÃO:** Esperamos que os alunos associem a parábola com sua respectiva equação, também com seu gráfico, entendam quais são seus principais elementos e caracterizem suas propriedades.

Ao final dessa sessão o professor da turma poderá complementar com suas explicações e resolver os exercícios do livro didático ou outro meio para uma melhor compreensão por parte do aluno a respeito da parábola e até mesmo solicitar outras ações que considerar úteis para a discussão do tema.

4.4.2 Sessão 2: Construção da elipse

Aqui apresentamos algumas das propriedades, os elementos principais e buscamos mostrar como a equação da elipse varia quando se modifica alguns de seus elementos. Discute-se também a propriedade da distância de um ponto aos focos que caracteriza a elipse. Ao construir a elipse no GeoGebra propomos que o professor ressalte outras questões que achar pertinente enquanto realiza esta atividade com os alunos.

Apresentamos na figura 22 a construção da elipse utilizando o GeoGebra 4.2 que seguiu os passos sugeridos na sessão de ensino 2 a respeito elipse, a qual se encontra no apêndice. Outras mudanças nas equações da elipse, também podem ser efetuadas de acordo com o que o professor da turma considerar útil para a aprendizagem de seus alunos.



Fonte: Autor, 2012

Esta sessão tem a seguinte estrutura:

- **OBJETIVO:** Proporcionar a aprendizagem sobre a elipse, tais como sua equação algébrica, seu gráfico, seus principais elementos, suas propriedades e a relação entre o seu gráfico e sua equação.
- **TEMPO PREVISTO:** 2 aulas de 50 minutos.
- **PÚBLICO ALVO:** Alunos do 3º ano do ensino médio que tenham estudado em geometria analítica o ponto, a reta e a circunferência.
- **ETAPAS:** Utilizando a versão 4.2 do GeoGebra, o aluno seguirá as etapas sugeridas no apêndice para a elipse.
- **AValiação:** Espera-se que os alunos associem a elipse com sua equação e com seu gráfico, compreendam seus principais elementos, caracterizem suas propriedades e relacionem o seu gráfico com a sua equação.

Da mesma forma que na parábola, também sugerimos que o professor complemente com suas intervenções, colocações e explicações para que a aprendizagem se efetive, claro o mesmo também deve complementar o ensino deste conceito para haver uma melhor compreensão, pois esta sequência por si só não é suficiente para a concretização da aprendizagem que passa pelas mãos do professor da turma.

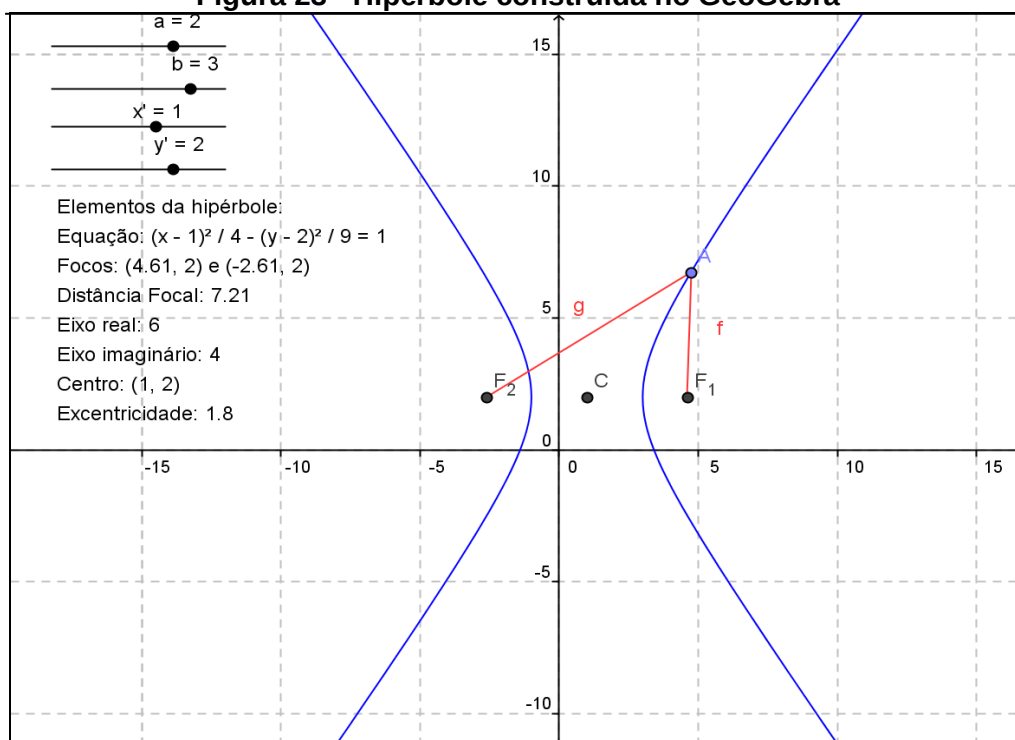
4.4.3 Sessão 3: Construção da Hipérbole

Nesta sessão, assim como na parábola e na elipse, também apresentamos algumas das propriedades, os elementos principais e buscamos mostrar como a equação da hipérbole muda quando variamos alguns de seus elementos. Discutimos também a propriedade da distância de um ponto da hipérbole aos focos que a caracteriza.

O professor, ao construir a hipérbole no GeoGebra, pode discutir outras questões pertinentes a este conteúdo durante a realização desta atividade com os alunos.

A construção da hipérbole utilizando o GeoGebra 4.2 seguindo os passos que se encontram no apêndice sugeridos na sessão de ensino 3 que trata dessa cônica é apresentada na figura 23. Que na tela do GeoGebra pode ser modificada devido a interação que é possível se realizar com o programa.

Figura 23 - Hipérbole construída no GeoGebra



Fonte: Autor, 2012

A estrutura dessa sessão é a seguinte:

- **OBJETIVO:** Proporcionar a aprendizagem sobre a hipérbole, tais como sua equação algébrica, seu gráfico, seus principais elementos, suas propriedades e a relação entre o seu gráfico e sua equação.
- **TEMPO PREVISTO:** 2 aulas de 50 minutos.
- **PÚBLICO ALVO:** Alunos do 3º ano do ensino médio que tenham estudado em geometria analítica o ponto, a reta e a circunferência.
- **ETAPAS:** Utilizando a versão 4.2 do GeoGebra, o aluno seguirá as etapas do apêndice para a hipérbole.
- **AVALIAÇÃO:** Espera-se que os alunos associem a hipérbole com sua respectiva equação, também com seu gráfico, entendam quais são seus principais elementos, caracterizem suas propriedades e relacionem o seu gráfico com a sua equação.

Aqui também sugerimos que seja feito um complemento por parte do professor com suas explicações e resoluções de exercícios para que os objetivos propostos sejam alcançados.

Ao trabalhar desta forma iremos mobilizar outras ferramentas na visualização das cônicas de acordo com a teoria da Noção de Jogo de Quadros proposta por

Régine Douady (1987) explorando-as, ao mesmo tempo, no quadro algébrico e no geométrico. E ao permitir que as propriedades e características dessas seções sejam mais bem assimilados pelos alunos através do GeoGebra, estamos, de certo modo, realizando algumas transformações e adaptações a qual Chevallard (1991) chama de Transposição Didática.

5 EXPERIMENTAÇÃO

A fim de pesquisar como esta sequência didática pode ajudar o aluno a compreender melhor as seções cônicas, aplicamos a mesma com uma turma do terceiro ano do ensino médio de uma escola estadual na cidade de Palmeira dos Índios no interior de Alagoas. Esses encontros foram planejados para serem trabalhados em dupla e, no máximo, trios em virtude de não existirem computadores suficientes para cada aluno. Porém, dependendo da situação, o ideal seria uma máquina por aluno.

Os encontros aconteceram na própria escola, na sala de multimeios onde estão localizados os computadores que utilizamos na realização das sessões propostas. Conforme combinado com o professor da turma, usamos as aulas de matemática para realizar a pesquisa, devido ser uma escola de difícil acesso tanto para os alunos como para os seus funcionários e tendo em vista o fato de a maior parte deles residir em localidades distantes e necessitarem de transporte escolar para se deslocar até a escola.

Segundo os professores, este é um dos obstáculos que, talvez, influenciam até na aprendizagem quando se leva em consideração a realização de eventos extraclasse proporcionados pela escola com o objetivo de melhorar o ensino. Cada encontro, assim como as aulas ministradas pelos professores, tem duração de 50 minutos. A seguir uma análise do que aconteceu em cada encontro e dos resultados da aplicação das sessões.

5.1 O questionário

Ao trabalhar com os alunos procuramos verificar seus conhecimentos prévios a respeito das seções cônicas na forma de um questionário de 18 questões (em apêndice) elaboradas cada qual com um objetivo específico como também obter um panorama dos conhecimentos disponíveis dos alunos acerca do conteúdo seções cônicas e ainda suas expectativas sobre o estudo dessas seções.

No primeiro encontro, trabalhamos com os alunos para realizar o primeiro passo que esta proposta sugere, onde aplicamos um questionário com o propósito

de investigar a importância do tema seções cônicas para o desenvolvimento das tecnologias, diagnosticar a forma como o conteúdo “seções cônicas” é encarado por eles em sala de aula e ainda se fazer uma análise a priori da situação didática em que nos incluiríamos ao longo desses encontros.

Este encontro ocorreu no dia 03/12/2012 no qual foi discutido os objetivos da nossa pesquisa e o que faríamos durante o período em que estaríamos com eles, que se tratava de aulas normais de matemática sobre seções cônicas abordadas de maneira diferente da tradicional.

5.1.1 Análise do questionário: um diagnóstico inicial

No dia da aplicação do questionário apenas 29 alunos, dos 35 matriculados, estavam presentes na sala de aula desses apenas 5 (17,25%) são do sexo masculino, 23 (79,30%) são do sexo feminino e 1 (3,45%) não se identificou como masculino ou feminino. Apenas 11 (37,95%) desses alunos quiseram colocar o nome no questionário já que foi esclarecido para os mesmos os objetivos da pesquisa e ainda que a sua identificação não era obrigatória. Essas questões (de 1 até a 4) objetivavam apenas a identificação do aluno que respondeu ao questionário e, ao nosso ver, não influenciam de modo a ser considerado os resultados da pesquisa.

As questões 5 e 6 têm como objetivo verificar se o aluno possui algum conhecimento sobre geometria analítica e que conhecimento é este, inclusive as seções cônicas, caso o mesmo já tivesse estudado este tema, com o propósito de identificarmos se esses alunos possuem os conhecimentos considerados pré-requisitos para o estudos das seções cônicas.

A questão 5 indaga o aluno a respeito do estudo da geometria analítica se ele está estudando ou já estudou este conteúdo em sala de aula, já que estes estudos são pré-requisitos para o estudo das seções cônicas. De modo geral consideramos os resultados dessa questão dentro do esperado já que a maioria dos alunos respondeu sim a pergunta indicando que os mesmos já estudaram geometria analítica conforme a tabela a seguir.

Tabela 1 - Índice de respostas quanto ao estudo de geometria analítica

SITUAÇÃO: Os alunos responderam ao questionário referente ao estudo da geometria analítica.	ALUNOS	
	Nº	%
SIM	16	55,17
NÃO	6	20,68
NÃO SEI	7	24,15

Fonte: Ficha de resolução dos alunos referente ao questionário

Nota: Participaram desta atividade 29 alunos

De acordo com a tabela, a maioria dos alunos confirmou a afirmação de que os mesmos já estudaram geometria analítica, apenas pouco mais de 20% respondeu que não estudou este assunto confrontando a resposta da maioria, ao responder que não sabia se tinham estudado ou não o tema nada se pode concluir a respeito do assunto, desta forma levando-se em consideração apenas as respostas conclusivas têm-se o seguinte resultado: 22 alunos foram contundentes em suas respostas, desses 16 disseram que sim o que nos dá 72,73% e 6 disseram que não e assim temos 27,27%. Indicando que realmente o assunto geometria analítica foi trabalhado, pois apesar de o aluno ser solicitado a responder a questão 6 apenas em caso afirmativo na questão 5, todos eles responderam esta questão, sendo assim, pode-se ter melhores conclusões a respeito deste estudo.

O propósito da questão 6 é saber quais conteúdos de geometria analítica o aluno já estudou para, assim, trabalharmos o tema seções cônicas de modo adequado.

Tabela 2 - Índice de respostas quanto aos conteúdos estudados em geometria analítica

SITUAÇÃO: Os alunos responderam ao questionário referente aos conteúdos estudados em geometria analítica.	ALUNOS	
	Nº	%
ESTUDO DO PONTO	15	51,72
ESTUDO DA RETA	13	44,83
ESTUDO DA CIRCUNFERÊNCIA	15	51,72
SEÇÕES CÔNICAS	2	6,90
NÃO SEI	13	44,83
OUTRO	0	0,00

Fonte: Ficha de resolução dos alunos referente ao questionário

Nota: Participaram desta atividade 29 alunos, mas os mesmos podiam assinalar mais de um item

Os resultados obtidos pela análise das respostas dos alunos não foram exatamente o que esperávamos devido ao fato de alguns alunos responderem apenas um ou dois itens, em apenas alguns questionários encontramos a resposta esperada assinalada em três opções – estudo do ponto, estudo da reta e estudo da circunferência – a resposta dada por 6,90% dos alunos dizendo que já estudaram seções cônicas não era esperada por nós.

Levando em consideração que ao responder pelo menos um item já é um indicativo do estudo da geometria analítica concluímos que os alunos tiveram contato com a geometria analítica mesmo aqueles que assinalaram o item não sei podem ser considerados no rol dos alunos que estudaram o tema. Deste modo consideramos que a turma possui os requisitos necessários para a aplicação de nossa sequência didática para o ensino das seções cônicas.

5.1.2 Expectativas dos alunos quanto ao estudo das seções cônicas

As questões 7 a 18 procuram retratar as expectativas dos alunos em relação ao tema seções cônicas. Essa aplicação também nos ajudará a tirar conclusões mais detalhadas a respeito do nosso tema.

Na questão 7 verifica-se se o aluno sabe quais conteúdos são estudados em cônicas com o propósito de identificar até que ponto eles estão familiarizados com o tema. Todos os 29 (100%) alunos responderam não indicando que este assunto ainda não foi trabalhado pelo professor, ao menos da forma que se pretende neste estudo.

A questão 8 é de interesse fundamental para a nossa pesquisa pois nela procurou-se saber a importância das cônicas, na visão do aluno, para o desenvolvimento das tecnologias e este é um dos objetivos deste trabalho, observar a aplicabilidade das cônicas em outras áreas do conhecimento como nas tecnologias, por exemplo. Na análise das respostas percebemos que a grande maioria dos alunos 22 (75,86%) deles não sabem dessa importância enquanto 4 (13,79%) consideram este tema importante e 2 (6,90%) não consideram as cônicas importante para o desenvolvimento das tecnologias e 1 (3,45%) não respondeu a esta pergunta.

Na questão 9 deseja-se saber se o aluno conhece alguma aplicação das cônicas no seu dia a dia e, em caso afirmativo quais aplicações são essas. Esta pergunta visa atender a um dos objetivos da pesquisa que é fazer uma relação entre o conteúdo seções cônicas e as suas aplicações no cotidiano. Apenas um (3,45%) aluno respondeu sim a esta pergunta, mas não citou qual aplicação era esta, dois (6,90%) alunos não quiseram responder e a grande maioria 26 (89,65%) dos alunos respondeu que não conhecem aplicações das cônicas no seu dia a dia.

Na questão 10 verifica-se o conhecimento aluno sobre algum tipo de recursos que pode ser utilizado na aprendizagem das seções cônicas e, em caso afirmativo, citar os mesmos. Esta questão é particularmente interessante para o nosso estudo, pois traz a baila a discussão a respeito do uso de outros recursos no ensino de cônicas discutidos na análise feita dos livros didáticos anteriormente. A tabela abaixo mostra os resultados obtidos.

Tabela 3 - Índice de respostas quanto aos recursos para se aprender seções cônicas

SITUAÇÃO: Os alunos responderam ao questionário referente aos conhecimentos sobre recursos que podem ser utilizados para se aprender seções cônicas.	ALUNOS	
	Nº	%
EXPERIMENTOS	7	24,15
SOFTWARES	2	6,90
DOBRADURAS	3	10,30
BARBANTE, RÉGUA, LÁPIS E PREGOS	5	17,25
OUTROS	1	3,45
NÃO SEI	2	6,90
NÃO RESPONDEU	9	31,05

Fonte: Ficha de resolução dos alunos referente ao questionário

Nota: Participaram desta atividade 29 alunos, mas os mesmos podiam assinalar mais de um item

Percebe-se, pelos resultados da tabela acima, que um bom percentual de alunos, 31,05%, preferiu não responder a esta questão e 6,90% dos mesmos não sabem se estes tipos de recursos podem ser utilizados para aprender seções cônicas, o que dá 37,95% dos alunos e os demais 62,05% consideram algum desses recursos como possíveis instrumentos para ajudar na aprendizagem desse tema. Apesar de poderem assinalar mais de um item nenhum dos 29 alunos citou dois ou mais como resposta, por isso os resultados na tabela acima ser exatamente igual a 100%, o que sugere certo desconhecimento dos mesmos sobre o tema.

Na questão 11 pretende-se saber se o aluno conhece algum experimento sobre cônicas com o propósito de utilizá-lo como motivação para despertar o interesse do aluno pelo tema. Apesar de na questão anterior 24,15% dos alunos citar experimentos como recurso para aprender seções cônicas nenhum deles (0%) assinalou o item sim nesta pergunta, isto é, consideram experimentos importante para aprender este tema mas não conhecem nenhum. A maioria, 19 (65,52%) alunos, respondeu que não sabe, 9 (31,05%) alunos respondeu que não conhece e 1 (3,45%) não respondeu esta questão.

Na questão 12 deseja-se saber a opinião do aluno a respeito das atividades com as seções cônicas utilizando experimentos, se elas podem contribuir para sua aprendizagem e, desta forma, verificar até que ponto eles compreendem esses experimentos como recursos didáticos que irão ajudá-los a aprender. Na análise das respostas 10 alunos (34,50%) respondeu sim, 1 aluno (3,45%) respondeu não, a maioria 17 (58,62%) não sabe e 1 (3,45%) não respondeu esta questão.

Na questão 13 pretende-se observar, na opinião do aluno, se as atividades de seções cônicas utilizando programas de computador podem contribuir para melhorar sua aprendizagem sobre este conteúdo.

Tabela 4 - Índice de respostas quanto ao uso de programas de computador para melhorar a aprendizagem sobre seções cônicas

SITUAÇÃO: Os alunos responderam a questão referente ao uso de programas de computador para melhorar a aprendizagem sobre seções cônicas.	ALUNOS	
	Nº	%
SEMPRE	2	6,90
NA MAIORIA DAS VEZES	10	34,50
RARAMENTE	3	10,30
NUNCA	7	24,15
NÃO RESPONDEU	7	24,15

Fonte: Ficha de resolução dos alunos referente ao questionário

Nota: Participaram desta atividade 29 alunos

As respostas sempre e na maioria das vezes juntas 41,40% dos 29 alunos indica a opinião positiva dos alunos em relação ao uso de programas de computador para a melhoria da aprendizagem, a maior parte dos alunos (58,60%) têm uma atitude considerada não positiva se levarmos em consideração aqueles que se recusaram a responder esta pergunta.

Quanto à visão do aluno sobre a contribuição do estudo das seções cônicas para desenvolver o espírito de curiosidade em relação à matemática do dia a dia foi analisado na questão 14 e os resultados estão na tabela abaixo.

Tabela 5 - Índice de respostas quanto ao desenvolvimento do espírito de curiosidade em relação à matemática do dia a dia

SITUAÇÃO: Os alunos responderam a questão referente ao desenvolvimento do espírito de curiosidade em relação à matemática do dia a dia.	ALUNOS	
	Nº	%
SEMPRE	4	13,77
NA MAIORIA DAS VEZES	5	17,25
RARAMENTE	7	24,15
NUNCA	6	20,68
NÃO RESPONDEU	7	24,15

Fonte: Ficha de resolução dos alunos referente ao questionário

Nota: Participaram desta atividade 29 alunos

Os resultados mostram que a maioria dos alunos (44,83%) acha que a matemática vista em seções cônicas raramente ou nunca contribui para desenvolver o espírito de curiosidade em relação ao tema contra 31,02% deles que responderam sempre ou na maioria das vezes.

Com respeito a relação entre a matemática aprendida sobre as seções cônicas e a realidade do aluno, investigados na questão 15 obteve-se os seguintes resultados.

Tabela 6 - Índice de respostas quanto a relação entre a matemática aprendida sobre as seções cônicas e a realidade do aluno

SITUAÇÃO: Os alunos responderam a questão referente a relação entre a matemática aprendida sobre as Seções Cônicas e a realidade do aluno.	ALUNOS	
	Nº	%
SEMPRE	3	10,30
NA MAIORIA DAS VEZES	8	27,63
RARAMENTE	4	13,77
NUNCA	7	24,15
NÃO RESPONDEU	7	24,15

Fonte: Ficha de resolução dos alunos referente ao questionário

Nota: Participaram desta atividade 29 alunos

Analisando as respostas obtidas percebemos os alunos estão bem divididos nesta questão, retirando-se aqueles que não responderam (24,15%), 7 deles, temos 11 (37,93%) que consideram que sempre ou na maioria das vezes as seções

cônicas têm relação com a sua realidade e o mesmo número considera que raramente ou nunca isto acontece.

A questão 16 investiga algo fundamental para a esta pesquisa que é a utilização das cônicas em outras áreas do conhecimento como física, engenharia, arquitetura, astronomia, óptica, etc., o que se pretende é saber se os alunos consideram este tema útil nesses campos para que possamos utilizar estas informações como motivação para despertar, no aluno, o interesse pelo tema. Os resultados obtidos foram os seguintes.

Tabela 7 - Índice de respostas quanto a relação entre as seções cônicas e outras áreas do conhecimento

Situação: Os alunos responderam a questão referente a relação entre as seções cônicas e outras áreas do conhecimento.	ALUNOS	
	Nº	%
FÍSICA	8	27,63
ENGENHARIA	5	17,25
ARQUITETURA	2	6,90
ASTRONOMIA	3	10,30
ÓPTICA	2	6,90
OUTRAS	2	6,90
NÃO SEI	3	10,30
NÃO RESPONDEU	7	24,15

Fonte: Ficha de resolução dos alunos referente ao questionário

Nota: Participaram desta atividade 29 alunos, mas os mesmos podiam assinalar mais de um item

A análise dos resultados na tabela acima nos leva a concluir que a maioria dos alunos considera o tema seções cônicas útil na aplicação em outros campos, porém apenas um aluno citou as cinco áreas como possíveis utilidades do conhecimento adquirido no estudo das seções cônicas e os dois alunos que citaram outras não escreveram qual ou quais áreas seriam essas. Apesar deles nunca terem estudado o tema, podemos concluir de acordo com os resultados, que a sua aplicabilidade em outras áreas pode ser útil para motivá-los a interessar-se por este estudo.

As questões 17 e 18 procuram saber a opinião dos alunos a respeito dos seus conhecimentos anteriores, se estes são suficientes para acompanhar o conteúdo seções cônicas e também se a organização dada aos mesmos pode facilitar a compreensão sobre este tema, com o objetivo de diagnosticar se os esses alunos já

tiveram algum contato com este conteúdo. A grande maioria dos alunos 23 (79,32%) deles respondeu que não sabia indicando que os mesmos não estudaram este tema anteriormente, enquanto que apenas 3 (10,30%) respondeu sim a questão 17 sobre conhecimentos anteriores e 6 (20,68%) respondeu sim a 18ª questão sobre a organização dos conteúdos, os demais 3 alunos responderam não a questão 17.

Este questionário objetivou apenas a obtenção de um diagnóstico inicial a respeito do panorama dos conhecimentos disponíveis dos alunos antes da aplicação da sequência didática. Com o propósito de planejarmos melhor a forma como abordaríamos os próximos encontros baseados nas conclusões acerca das respostas dadas pelos alunos.

Algumas modificações foram feitas devido ao nível de conhecimento dos alunos a respeito do tema como, por exemplo, o fato de não utilizarmos as questões finais na atividade sugerida ao término de cada sessão de ensino que são aquelas específicas sobre a abordagem matemática propriamente dita. Deixamos isto para outro momento com o professor da turma já que 10 encontros foram insuficientes para explorarmos o tema satisfatoriamente, vale lembrar que estas sessões são apenas introdutórias a cada cônica, depois de suas aplicações vêm os momentos de intervenção e complementação do professor com suas explicações e aplicação das atividades sugeridas nos livros didáticos para que, de fato, a aprendizagem se concretize.

5.2 Preparação para aplicação das sessões de ensino

No segundo encontro foi discutido o contexto histórico das seções cônicas com o intuito de motivar os alunos a despertarem o interesse por este tema. Na oportunidade trabalhamos com a história das seções cônicas através de leituras, comentários e questionamentos de textos históricos com o objetivo de mostrar que o tema seções cônicas não surgiu de maneira tão simples, mas que se trata de um conhecimento, como muitos outros da matemática, construído ao longo de anos e para chegar a sua caracterização atual passou por um processo de aperfeiçoamento onde cada época, dependendo da proposta de seu estudo, contribuiu de forma bastante significativa para seu desenvolvimento. Foi enfatizado principalmente os trabalhos de Menaecmus, Apolônio de Perga e Johann Kepler onde discutimos o

surgimento dessas curvas, seu aperfeiçoamento e o início de suas aplicações em outras áreas.

No terceiro encontro discutimos as aplicações práticas das seções cônicas no cotidiano, no qual destacamos algumas delas como a utilização de suas propriedades refletoras na construção das antenas parabólicas, dos faróis e dos refletores também se destacou a sua utilidade na construção civil graças as suas propriedades físicas e estéticas, suas propriedades acústicas também foram discutidas na construção de auditórios, igrejas e teatros, mostrou-se também o modo de funcionamento do sistema LORAN que utiliza linhas de localização hiperbólicas para se localizar um navio que se encontra em alto mar.

No quarto encontro foi feita uma apresentação do software GeoGebra com os alunos onde os mesmos tiveram a oportunidade de utilizá-lo. Pudemos perceber que alguns alunos ficaram empolgados com a ideia de aprender matemática utilizando um software como este, ouvimos comentários como “quero este programinha para mim” outros, talvez pelo fato de não ter muito contato com a ferramenta computador, mantiveram-se indiferentes em relação a essa nova perspectiva.

5.3 Análise didática e matemática das atividades propostas

Os próximos seis encontros aconteceram para aplicar os últimos dois passos desta sequência didática nos quais aplicamos as três sessões de ensino sobre cada uma das três cônicas discutidas neste trabalho, com o objetivo de analisar suas propriedades, seus elementos, a relação entre o gráfico e a equação e o que acontece quando variamos os elementos que compõe cada cônica.

5.3.1 Aplicação e análise da sessão 1 - Parábola

No quinto encontro, exibimos um vídeo, gravado por nós e com a nossa voz, de treze minutos ensinando a utilizar a sequência didática sobre a parábola com o GeoGebra para facilitar a aplicação da mesma, optamos por iniciar com a parábola por considerá-la a sequência mais simples das três curvas e, sendo assim, facilitar esse primeiro contato do aluno com o programa e, em alguns casos, com o computador.

Em seguida distribuimos a sequência de passos impressa a cada um dos alunos para que os mesmos construíssem a parábola e seus elementos no GeoGebra, no final da sequência tinha uma atividade que propunha que os alunos reconstruíssem a sequência mudando a forma da equação, seus focos e sugerindo que observassem as diferenças entre as parábolas construídas e o que acontecia ao realizar cada passo com o propósito de discutir as principais propriedades da parábola o que foi realizado no encontro seguinte.

Durante a realização desta sequência observamos que aqueles alunos que já possuíam certa habilidade com o computador levaram vantagem sobre os demais, alguns não chegaram nem mesmo a concluir a atividade proposta devido à perda de tempo durante a realização da tarefa.

Como ponto positivo destacamos a participação daqueles alunos desmotivados nas aulas tradicionais onde muitos deles participaram ativamente da atividade sugerida. O que afetou negativamente foi a qualidade das máquinas onde até mesmo o mouse de uma delas não funcionava adequadamente, este fato atrapalhou o bom andamento da atividade além de, em duas delas, o GeoGebra instalado não ser a versão 4.2 e algumas ferramentas não estarem de acordo com a escrita na sequência como, por exemplo, a ferramenta Controle Deslizante que na versão instalada era Seletor mas a figura era a mesma e facilitou a compreensão quando o aluno nos chamava para esclarecer a dúvida.

Como as tarefas foram realizadas em dupla por causa do número de máquinas não corresponder ao total de alunos da turma, alguns alunos não participaram da tarefa da forma como gostaríamos, o ideal seria uma máquina por aluno o que não foi possível. A atividade que os alunos responderam e nos entregaram para analisarmos os resultados ao final da aplicação da sessão 1 sobre a parábola foi a seguinte:

Quadro 5 - Atividade referente a parábola

Atividade 1

1- Repita o procedimento utilizando o ponto do passo 4 como $F=(x', y'+ p / 2)$ e a equação do passo 6 como $(x - x')^2=2*p*(y - y')$, que mudanças devemos efetuar na reta do passo 7 para que continue sendo a reta diretriz da parábola? Que

diferença você observa entre as duas parábolas construídas?

2- Ao efetuar o passo 16 o que acontece com a concavidade da parábola? E quando o valor de p se anula ($p=0$)? E quando p se distancia do zero?

3- E no passo 17 o que acontece com os valores de e e f ? Por que isto acontece?

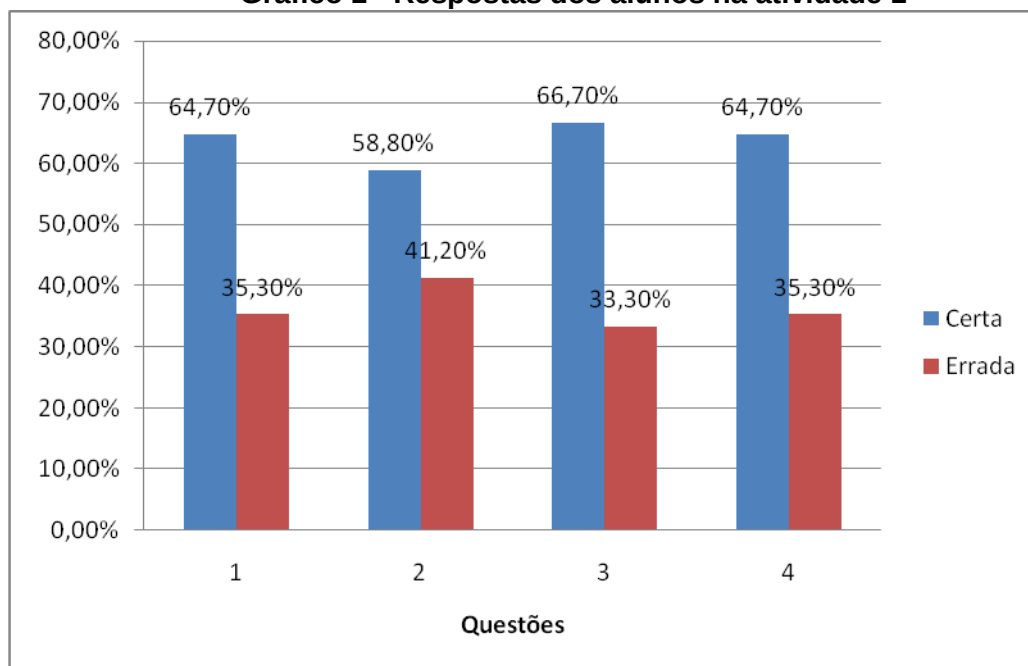
4- Quais elementos da parábola se alteram quando realizamos o passo 16? E o passo 17?

Fonte: Autor, 2012

A atividade sugerida no apêndice possui 10 questões, porém optamos por retirar aquelas cujo objetivo é o conteúdo propriamente dito (parábola), pois estas devem ser complementadas por intervenções diretas do professor e com um tempo maior, já que apenas dois encontros são insuficientes. Todavia acreditamos que a partir deste ponto o aluno está mais preparado para discutir as características e propriedades da parábola e compreendê-la com mais facilidade bem como resolver questões relativas ao seu estudo.

Apresentamos a seguir a análise das respostas dos alunos na atividade 1. No dia da realização desta tarefa estavam presentes 24 alunos dos quais 17 participaram efetivamente, três não a concluíram e, por isso, não nos entregaram e 4 não quiseram responder.

Gráfico 1 - Respostas dos alunos na atividade 1



Fonte: Respostas dos alunos na atividade sobre a parábola

A análise do gráfico 1 nos permite afirmar que a maioria dos alunos compreendeu a proposta da atividade, porém acrescentamos que é pertinente que o professor auxilie de forma mais direta sua resolução para não perdermos a oportunidade de discutir com os alunos as características e propriedades da parábola.

De modo geral consideramos esse encontro satisfatório em relação a metodologia proposta nesta pesquisa, porém percebemos que dez encontros são insuficientes para apresentarmos de forma satisfatória as três cônicas da forma como planejamos já que a maioria dos alunos não têm acesso e nem estão familiarizados com esta ferramenta.

5.3.2 Aplicação e análise da sessão 2 - Elipse

No sétimo encontro trabalhamos com a elipse e também sugerimos aos alunos que fizessem a atividade proposta no final da sequência, anotasse em uma folha de papel A4 e nos entregasse no final para que pudéssemos analisar os resultados. Percebemos já certa habilidade por parte de alguns alunos com o software GeoGebra, onde os mesmos manusearam as ferramentas com maior facilidade que nos encontros anteriores o que ajudou de certa forma na realização da atividade proposta. A sequência didática foi distribuída aos alunos que, em duplas e trios, construíram no computador a elipse seguindo os passos sugeridos.

A atividade sugerida no final da sequência didática (elencada no quadro 6 e também com modificações em relação a tarefa original sugerida no apêndice) solicita do aluno uma nova construção mudando apenas a equação da elipse inserida em um dos tópicos, o que propositadamente deixaria o eixo maior na posição vertical e o eixo menor na posição horizontal e pergunta quais mudanças que devem ser efetuadas nos seus focos para que continuem como focos da nova elipse no sentido de fazê-los perceber a relação entre os focos e o valor de c .

Também solicita do aluno responder sobre o que acontece com cada elemento da elipse ao realizar os passos de animação dos valores a , b e do ponto A , sugere também que o aluno observe quando se altera os valores de a e de b , o que acontece com o valor de e e com seus focos e, ao mesmo tempo, neste instante qual outra figura geométrica a elipse se assemelha.

Finalmente solicita que o aluno observe os elementos da janela de álgebra e da janela de visualização e tire suas conclusões sobre a relação existente entre cada um deles com o propósito de fazê-los perceber que cada um desses elementos construídos tem sua representação algébrica e ao mesmo tempo geométrica, o que nos leva a teoria da mudança de quadros de Douady (1987) adotada neste trabalho como fundamentação teórica.

Quadro 6 - Atividade referente a elipse

Atividade 2

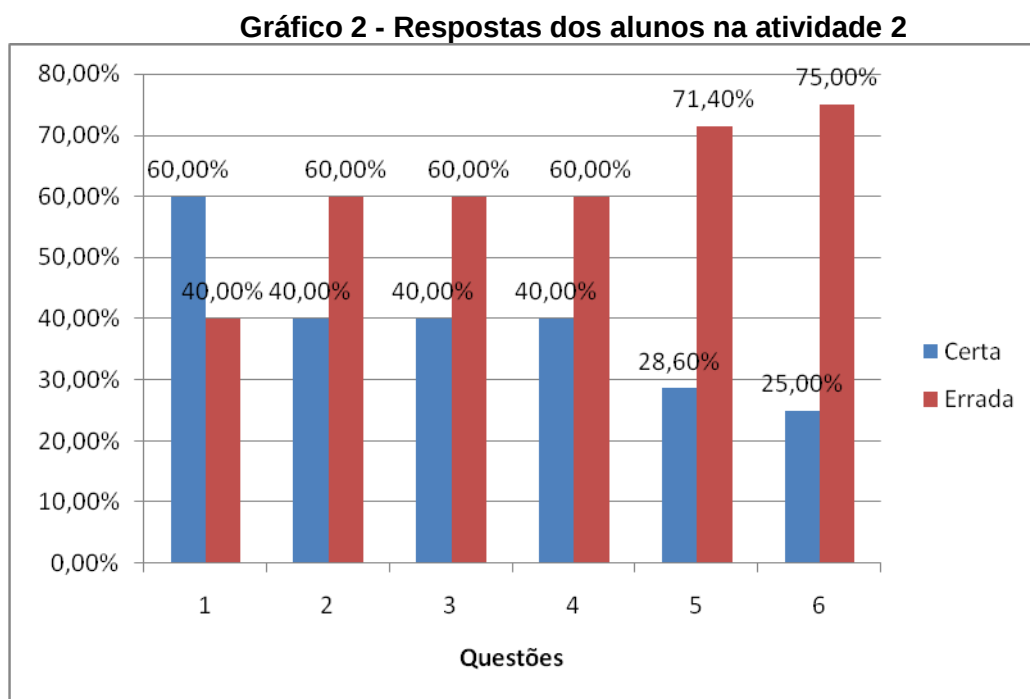
- 1- Repita o procedimento utilizando a equação do passo 6 como $(y-y')^2/a^2+(x-x')^2/b^2 = 1$, que mudanças devemos efetuar nos pontos do passo 7 como F_1 e F_2 para que continuem sendo os focos da elipse? Que diferença você observa entre as elipses?
- 2- O que acontece com os elementos da elipse quando se realiza o passo 21? Em sua opinião, por que isso acontece?
- 3- O que acontece com os elementos da elipse quando se realiza o passo 22? Por que isso ocorre?
- 4- No passo 23 o que acontece com os valores de f , g e s ?
- 5- Ao efetuar os passos 21 e 22 em determinado momento temos $a=b$, o que acontece com o valor de e na elipse nesse instante e com os focos da mesma? Que outra figura geométrica temos que se parece com a elipse nesse instante?
- 6- Observe os elementos da Janela de Visualização e os mesmos na Janela de Álgebra, que conclusões podemos tirar da relação que existe entre cada um deles?

Fonte: Autor, 2012

Aqui também tivemos algumas dificuldades tais como, desmotivação por parte de alguns alunos e pouca habilidade com o computador, porém consideramos de maneira geral os resultados positivos quando levamos em consideração o total geral de alunos da turma presentes nesta aula, dos 25 que estavam presentes, 21 participaram ativamente da atividade e, destes, 18 entregaram as respostas ao final da construção os outros três não conseguiram terminar a tarefa devido ao tempo que eles consideraram insuficiente para a conclusão da mesma. Dos 4 alunos que

não participaram ativamente desta tarefa, 4 apesar de estarem presentes na sala o tempo todo se recusaram a fazê-la em dupla e por isto não participaram.

A análise das respostas dadas pelos alunos nos faz perceber que, em alguns casos, houve confusão na interpretação dos mesmos em relação a resposta esperada. Percebe-se que o aluno ficou preso apenas a certos casos isolados sem levar em consideração o todo e, sendo assim, tiveram uma interpretação errada das questões. Alguns deles conseguiram interpretar adequadamente a pergunta e deram respostas satisfatórias conforme podemos observar no gráfico 2. Observamos que para que a resposta seja considerada correta é necessário que a percepção seja condizente com o que se espera mesmo se escrita com outras palavras.



Fonte: Respostas dos alunos na atividade sobre a elipse

Levando-se em conta o fato dos alunos nunca terem contado com este conteúdo antes, consideramos como positivo a atividade sobre a elipse, porém aconselhamos que em sala de aula seja reforçado pelo professor e explicado por ele os conceitos da elipse e aplique-se outras atividades para complementar este conteúdo, apesar de ser útil a atividade com o GeoGebra no computador, ela não pode de maneira alguma substituir o professor, até mesmo por que não devemos esquecer daqueles alunos que não participaram ou não participam deste tipo de atividade, talvez com a forma trabalhada pelo professor em sua sala de aula eles possam ser conquistados e levados a aprender.

5.3.3 Aplicação e análise da sessão 3 - Hipérbole

No nono encontro trabalhamos com a hipérbole, nele mais uma vez os alunos foram convidados a participar fazendo a construção da hipérbole solicitada na sequência didática onde trabalhando em dupla e utilizando os computadores da escola eles atenderam ao solicitado. Assim como foi feito com a parábola e a elipse os alunos responderam a atividade sugerida ao final da sequência em uma folha de papel A4 e nos entregaram para que pudéssemos analisar os resultados. O quadro 7 mostra a atividade aplicada no final da sessão 3 sobre a hipérbole.

Quadro 7 - Atividade referente a hipérbole

Atividade 3

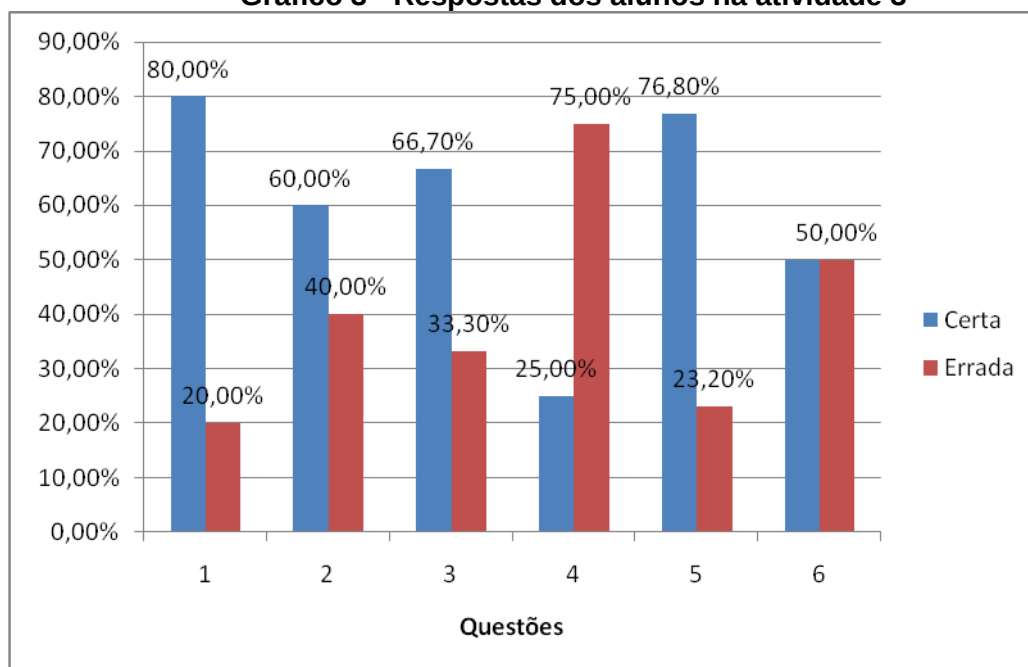
- 1- Repita o procedimento utilizando a equação do passo 5 como $(y-y')^2/a^2 - (x-x')^2/b^2 = 1$, que mudanças devemos efetuar nos pontos do passo 6 como F_1 e F_2 para que continuem sendo os focos da hipérbole? Que diferença você observa entre as hipérboles?
- 2- O que acontece com os elementos da hipérbole quando se realiza o passo 20? Em sua opinião, por que isso acontece?
- 3- O que acontece com os elementos da hipérbole quando se realiza o passo 21?
- 4- No passo 22 o que acontece com os valores de f , g e s ? Por que isso ocorre?
- 5- Faça o que se pede no passo 20 agora com os valores de x' e, em seguida, faça com y' . Observe quais elemento da hipérbole varia e preencha o quadro abaixo.

Elementos da hipérbole	Varia	Não varia
Equação		
Focos		
Distância focal		
Eixo real		
Eixo imaginário		
Centro		
Excentricidade		

- 6- Observe os elementos da janela de Visualização e os mesmos na Janela de Álgebra, que conclusões podemos tirar da relação que existe entre cada um deles?

Nesta aula estavam presentes 26 alunos dos quais apenas 20 deles participaram da atividade e destes 16 concluíram a tempo de entregarem a atividade por escrito para que pudéssemos analisar seus resultados os outros 4 alegaram pouco tempo e defeitos no mouse que não funcionava direito e atrasou a realização da tarefa. Dos 6 alunos que não realizaram a atividade 4 se retiraram da sala e 2 ficaram fazendo trabalhos de outros professores sem participarem da nossa pesquisa. O gráfico 3 ilustra as respostas dadas pelos alunos nesta atividade.

Gráfico 3 - Respostas dos alunos na atividade 3



Fonte: Respostas dos alunos na atividade sobre a hipérbole

Apesar das dificuldades nesta atividade se repetirem como nos encontros anteriores consideramos positivos os resultados obtidos no sentido de os alunos perceberem as características da hipérbole e seus elementos e relacioná-las com sua equação, porém eles ainda precisam de mais esclarecimentos a respeito deste conteúdo para estarem aptos a resolver questões sobre o mesmo, o que fizemos foi apenas uma introdução a respeito do assunto, ainda há um caminho a ser percorrido, tanto pelos alunos quanto pelo professor para os tornarem conhecedores do tema.

As mudanças efetuadas nas atividades ocorreram devido a alguns fatores: após a análise dos questionários, chegamos à conclusão de que os encontros não seriam suficientes para a realização de todas as questões originalmente propostas

na construção das sessões e percebermos pela análise das respostas, certo desconforto por parte dos alunos para o estudo deste tema e, em alguns casos, para utilizar o software GeoGebra. Chevallard (1991) justifica estes acontecimentos em sua teoria que estuda a trajetória dos saberes, e neste caminho o saber sofre uma série de influências que ele descreve como *noosfera*. A noosfera influencia todo o processo didático, não somente a escolha de conteúdos, mas os objetivos, métodos, valores também são determinantes que conduzem o sistema didático. O professor também é um dos que fazem parte dela e, por isso, pode realizar mudanças no saber a ensinar de acordo com o nível da turma que, aqui, é identificado no questionário inicial.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa apresentamos uma proposta de ensino-aprendizagem para as seções cônicas utilizando o software GeoGebra. O nosso estudo indicou para a necessidade de buscar respostas para a seguinte pergunta: Uma sequência didática para o ensino de seções cônicas desenvolvida por intermédio do GeoGebra pode proporcionar ao aluno a compreensão dos conceitos e regras envolvidos nas seções cônicas?

Diante disso, formulamos a seguinte hipótese: Os conceitos e regras envolvidos nas seções cônicas podem ser aprendidos se estudados de uma forma diferente da tradicional proposta pelos livros didáticos, trazendo o aluno para a construção dos conceitos e interagindo com eles através do software GeoGebra que proporciona uma nova visão para as dificuldades encontradas quando se pode visualizar seus conceitos e suas propriedades de uma forma dinâmica.

Percebemos que os alunos despertaram mais interesse pelo tema abordado quando trabalhamos logo nos primeiros encontros tanto a sua evolução histórica quanto as suas aplicações em outras áreas e, assim, as aulas se tornaram mais atraentes e motivadoras em relação ao nosso assunto.

Ao analisar os resultados desenvolvidos pelos alunos no período da aplicação da sequência didática, acreditamos que a metodologia contribuiu e contribuirá significativamente para a aprendizagem dos alunos sobre as seções cônicas. Apesar da maioria das respostas dadas pelos mesmos não estarem exatamente da maneira esperada, o raciocínio está condizente com o esperado na maioria dos casos.

Neste trabalho realizamos de um modo bem específico uma proposta para as seções cônicas, mas cremos que o mesmo pode ser utilizado com outros conteúdos da matemática e com a utilização de outros softwares além do GeoGebra como o Winplot, o Cabri Géomètre e o Tabulae.

A opção pela utilização do software deveu-se ao fato do mesmo além de ser livre e de fácil acesso para o professor, constatamos também em nossa análise das quatro obras do ensino médio aprovadas pelo MEC para o triênio 2012-2014, ao observar o critério sobre a utilização de outros recursos para o ensino de cônicas, verificamos que três delas usam pouco e apenas uma usa regularmente algum

recurso para ensinar cônicas e nenhuma cita algum software como possibilidade didática para seu ensino.

Partindo do referencial teórico adotado para realização desta pesquisa e considerando a sequência didática construída, consideramos que esta metodologia pode contribuir satisfatoriamente para obtenção de resultados positivos no que diz respeito à aprendizagem das seções cônicas. No entanto acreditamos que é preciso capacitar o professor para trabalhar com o software GeoGebra e com as novas tecnologias, no nosso caso, o computador.

Percebemos que esses alunos têm muitas dificuldades em relação ao contato com os computadores, apesar dos mesmos existirem na escola já há algum tempo, porém, segundo eles, os professores não costumam utilizar estas máquinas nem os recursos que ela oferece.

Poderíamos aperfeiçoar o nosso trabalho ampliando o tempo de aplicação das sessões, promovendo discussões acerca do conteúdo em si, complementando com explicações e resolução de exercícios e resolvendo as demais questões de cada atividade ao final da aplicação, assim, teríamos uma avaliação melhor acerca do alcance dos objetivos propostos.

Sugerimos que esta sequência seja utilizada como parte integrante das aulas durante o ensino deste conteúdo, pois assim é possível, se planejadas adequadamente, atingir os objetivos definidos ao dispor do tempo necessário para o bom andamento dos levantamentos e discussões das questões pertinentes para a aprendizagem deste conteúdo. Acreditamos que a inserção destas sessões junto às aulas sobre seções cônicas com as complementações do professor pode proporcionar a aprendizagem de forma mais significativa.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos de Didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

AGRANONIH, N.T. A teoria da transposição didática e o processo de didatização dos conteúdos matemáticos. In **EDUCERE – Revista da Educação**. Toledo-PR, vol.1, n. 1: jan./jun. 2001.

BARROSO, J. M. **Conexões com a matemática**. São Paulo: Moderna, 2010. V. 3.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

_____. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula: Cálculo**. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. V. 6.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. PCNEM, 3. Brasília: Ministério da Educação; Secretaria da Educação Média e Tecnológica, 1999.

_____. **Matemática: ensino médio / organização Suely Druck; seleção de textos Ana Catarina P. Hellmeister, Cláudia Monteiro Peixoto**. Coleção Explorando o ensino. Brasília: Ministério da Educação; Secretaria da Educação Básica, 2004. V. 3.

_____. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação; Secretaria da Educação Básica, 2006. V. 2.

_____. **Guia de livros didáticos: PNLD 2012: Matemática**. Brasília: Ministério da Educação; Secretaria da Educação Básica, 2011.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado**. Tradução Claudia Gilman. Madri, 1991.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática: da teoria a prática**. 10 ed. Campinas: Papiros, 1996.

D'AMORE, B. **Elementos de didática da matemática**. Tradução: Maria Cristina Bonome. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, 2010.

DOWBOR, L. **Tecnologias do conhecimento: os desafios da educação**. São Paulo: Vozes, 2001.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FANTI, E. L. C.; Utilizando o software geogebra no ensino de certos conteúdos matemáticos. In **V Bienal da SBM** - Sociedade Brasileira de Matemática. UFPB - Universidade Federal da Paraíba. 18 a 22 de outubro de 2010.

FLEMMING, D. M.; LUZ, E. F.; MELLO, A. C. C.. **Tendências em educação matemática**. Instrucional designer Elisa Flemming Luz. - 2. ed. - Palhoça : UnisulVirtual, 2005.

GIOVANNI. J. R.; BONJORNO. J. R.. **Matemática completa**. - 2. ed. renov. - São Paulo, FTD, 2005.

HENRIQUES, A.. **Dinâmica dos elementos da geometria plana em ambiente computacional cabri-géométri II**. Ilhéus: Editus, 2001.

HOHENWARTER, M.; HOHENWARTER, J. **Ajuda GeoGebra: Manual Oficial da Versão 3.2**. Tradução e adaptação para português de Portugal António Ribeiro. Lisboa, 2009.

IEZZI, G. et. al; **Fundamentos de matemática elementar**. São Paulo: Atual, 1977-78.

LAKATOS, E. M. Fundamentos de Metodologia Científica. São Paulo: Atlas, 2006.

LAVILLE, C., DIONNE, J. **A construção do saber: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas**. Porto Alegre; Editora Artes Médicas Sul Ltda.; Belo Horizonte: Editora UFMG, 1999.

MACENA, M. M. M. **Contribuições da investigação em sala de aula para uma aprendizagem das secções cônicas com significado**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2007.

MOREIRA, M. A. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006.

NETO, F. Q. **Tradução Comentada da Obra “Novos Elementos das Seções Cônicas” (Philippe de La Hire - 1679) e sua relevância para o Ensino de Matemática**. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Rio de Janeiro, 2008.

PAIVA, M. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2009. V. 3.

PAVANELLO, R. M. NOGUEIRA, C. M. I. Avaliação em Matemática: algumas considerações. In **Estudos em Avaliação Educacional**, v. 17, n. 33, jan./abr. 2006.

RIBEIRO, J. **Matemática: ciência, linguagem e tecnologia**. São Paulo: Scipione, 2010. V. 3

SATO, J. **As Cônicas e suas Aplicações**. Faculdade de Matemática – FAMAT. Universidade Federal de Uberlândia – UFU, Uberlândia – MG: 2004.
Disponível em: <<http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/index.html>>. Acesso em 12 de Junho de 2011.

APÊNDICE A - QUESTIONÁRIO APLICADO COM OS ALUNOS



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA – PPGEICIM

QUESTIONÁRIO

Caro(a) Aluno(a):

Este questionário faz parte da pesquisa de mestrado que objetiva proporcionar ao professor de Matemática uma sequência didática para o ensino de cônicas utilizando o software GeoGebra para que este conteúdo seja abordado de forma mais interativa interpretando o panorama histórico dos problemas envolvendo cônicas e suas aplicações. Para tanto, precisamos da sua colaboração, por meio das respostas ao questionário.

Sua participação é muito importante para a pesquisa e, por isso, agradecemos antecipadamente pela valiosa contribuição e nos comprometemos com o anonimato na divulgação dos resultados.

Cordialmente:

Francisco Aureliano Vidal

<http://lattes.cnpq.br/5128319746340814>

aurelianovidal@hotmail.com

(82) 9638-0426 ou (82) 8147-7803

1. Nome: _____

2. Sexo: () Masculino () Feminino

3. Escola: _____

4. Município: _____

5. Você está estudando ou já estudou geometria analítica?

() Sim () Não () Não sei

6. Em caso afirmativo, que conteúdos de geometria analítica você já estudou?

() Estudo do ponto () Estudo da reta

() Estudo da circunferência () Seções cônicas

() Não sei () Outro _____

7. Você sabe quais conteúdos são estudados em cônicas?

() Sim () Não

Caso afirmativo diga qual(is):

8. Você considera o tema cônicas importante para o desenvolvimento das tecnologias?

() Sim () Não () Não sei

9. Você conhece alguma aplicação das cônicas no seu dia a dia?

() Sim () Não

Caso afirmativo diga qual(is):

10. Que tipo de recursos você acha que pode ser utilizado para se aprender às seções cônicas?

() Experimentos () Softwares () Dobraduras

() Barbante, régua, lápis e pregos () Outros: _____

11. Você conhece algum experimento sobre cônicas?

() Sim () Não () Não sei

12. Você acha que as atividades de Seções Cônicas utilizando experimentos podem contribuir para sua aprendizagem?

☐ Sim ☐ Não ☐ Não sei

13. Você acha que as atividades de Seções Cônicas utilizando programas de computador podem contribuir para melhorar sua aprendizagem sobre este conteúdo?

☐ Sempre ☐ Na maioria das vezes ☐ Raramente ☐ Nunca

14. A matemática vista no estudo das Seções Cônicas pode contribuir para desenvolver o espírito de curiosidade em relação à matemática do dia a dia?

☐ Sempre ☐ Na maioria das vezes ☐ Raramente ☐ Nunca

15. Você considera que a matemática aprendida sobre as Seções Cônicas tem relação com a sua realidade?

☐ Sempre ☐ Na maioria das vezes ☐ Raramente ☐ Nunca

16. Qual(is) áreas do conhecimento você considera que pode(m) ser utilizado(s) o conhecimento adquirido no estudo das seções cônicas?

☐ Física ☐ Engenharia ☐ Arquitetura
☐ Astronomia ☐ Óptica ☐ Outra(s) _____

17. Você acha que os seus conhecimentos anteriores são suficientes para acompanhar o conteúdo de Cônicas?

☐ Sim ☐ Não ☐ Não sei

18. Você considera que a organização dada aos conteúdos de Cônicas podem facilitar a sua compreensão?

☐ Sim ☐ Não ☐ Não sei

Muito Obrigado pela contribuição!

APÊNDICE B - CONSTRUÇÃO DE UMA PARÁBOLA

FERRAMENTAS NECESSÁRIAS:



Novo ponto



Reta definida por Dois Pontos



Controle Deslizante



Interseção de Dois Objetos



Reta Perpendicular



Segmento definido por Dois Pontos



Inserir Texto

1 – Abra um novo arquivo no GeoGebra;

2 – Selecione a ferramenta **Controle Deslizante** , clique na **Zona Gráfica** chame o deslizante de '**p**', defina o intervalo de **-5** a **5** e o incremento **0,1**, clique em **Aplicar**;

3 – Repita o passo 2, mudando somente o nome do deslizante para '**x**' e novamente faça o mesmo mudando o nome do deslizante para '**y**';

4 – Clique no campo de **Entrada Algébrica**, digite **$F=(x'+p/2,y')$** e tecele **enter**, este será o foco da parábola;

5 – Clique no campo de **Entrada Algébrica**, digite **$V=(x',y')$** e tecele **enter**, este será o vértice da parábola;

6 – No campo de **Entrada Algébrica** e digite **$(y-y')^2=2*p*(x-x')$** esta curva é uma parábola com vértice no ponto **(x', y')** ;

7 – No campo de **Entrada Algébrica** e digite o **$x=x'-p/2$** , esta será a reta diretriz da parábola;

8 – Selecione a ferramenta **Reta definida por Dois Pontos** , clique no ponto **F** e em seguida no ponto **V**, este é o eixo de simetria da parábola;

9 – Mude a cor da parábola clicando na mesma com o botão direito do mouse e escolha **Propriedades**, escolha a **cor** de sua preferência ainda em propriedades clique na reta **a** que é a diretriz e escolha outra cor, faça o mesmo com reta **b** que é o eixo de simetria;

10 – Escolha a ferramenta **Inserir Texto** , clique na **Janela de Visualização** e digite '**Elementos da parábola:**' tecle enter e digite '**Equação:**', ainda na janela escolha o objeto **c**, tecle enter e digite '**Foco:**' escolha o objeto **F** tecle enter e digite '**Vértice:**' escolha o objeto **V** tecle enter e digite '**Eixo de simetria:**' escolha o objeto **b**, tecle enter e digite '**Reta diretriz:**', escolha o objeto **a**, tecle enter e digite '**Parâmetro:**', escolha o objeto **p**, clique em **OK**;

11 – Selecione a ferramenta **Novo Ponto** , clique na parábola e terá o ponto **A**;

12 – Selecione a ferramenta **Reta Perpendicular** , clique no ponto **A** e em seguida na reta diretriz da parábola;

13 – Selecione a ferramenta **Interseção de Dois Objetos** , clique na reta diretriz da parábola e em seguida clique na reta perpendicular e terá o ponto **B**, esconda a reta perpendicular clicando na bolinha ao lado da reta **d** na janela algébrica;

14 – Selecione a ferramenta **Segmento definido por Dois Pontos** , clique no ponto **F** e em seguida no ponto **A** e novamente clique em **A** e depois em **B** e teremos os segmentos **AF** e **AB** cujos valores serão **e** e **f**;

15 – Com o botão direito clique no segmento **AF** e selecione **Exibir Rótulo** e aparecerá a letra **f** que representa o segmento, faça o mesmo com o segmento **AB** e aparecerá a letra **e**;

16 – Com o botão direito do mouse clique em **p** na janela algébrica, escolha **Animar** e observe o que acontece com a parábola enquanto os valores de **p** variam. Repita este procedimento para parar a animação;

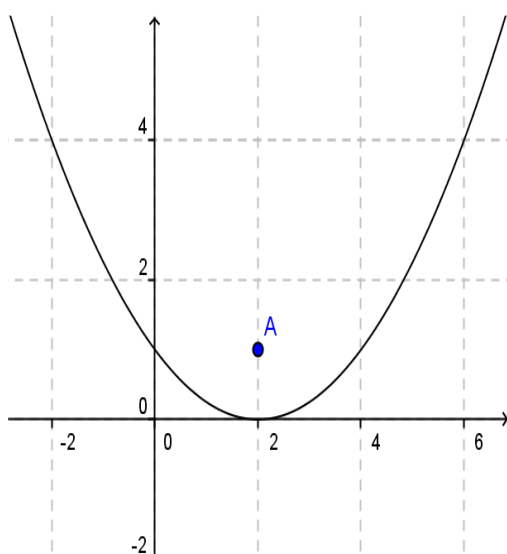
17 – Com o botão direito do mouse clique no ponto **A** e escolha **Animar** e observe os valores de **e** e **f**. Repita este procedimento para parar a animação;

18 – Faça o mesmo com **x'** e **y'** e observe o que acontece com cada elemento da parábola.

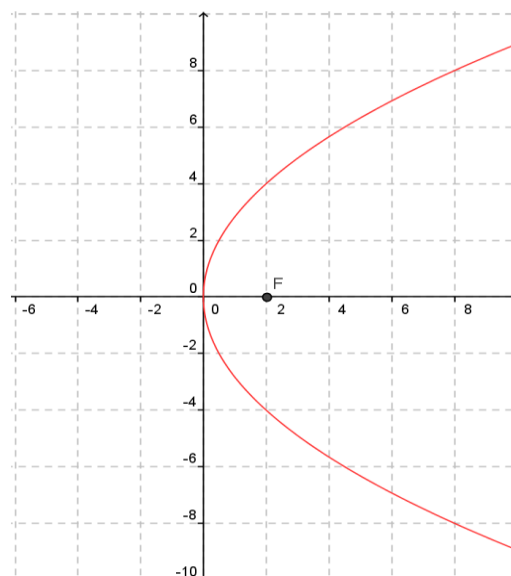
APÊNDICE C – SUGESTÃO DE ATIVIDADE SOBRE A PARÁBOLA

- 1- Repita o procedimento utilizando o ponto do passo 4 como $F=(x', y'+ p / 2)$ e a equação do passo 6 como $(x - x')^2=2*p*(y - y')$, que mudanças devemos efetuar na reta do passo 7 para que continue sendo a reta diretriz da parábola? Que diferença você observa entre as duas parábolas construídas?
- 2- Ao efetuar o passo 16 o que acontece com a concavidade da parábola? E quando o valor de p se anula ($p=0$)? E quando p se distancia do zero?
- 3- E no passo 17 o que acontece com os valores de d e e ? Por que isto acontece?
- 4- Quais elementos da parábola se alteram quando realizamos o passo 16? E o passo 17?
- 5- Determine as equações reduzidas das parábolas a seguir:

a)



b)



- 6- Em cada parábola do exercício anterior determine cada um de seus elementos preenchendo o quadro a seguir:

Elementos	Parábola
Equação	
Foco	
Eixo de simetria	
Reta diretriz	
Parâmetro	

7- Uma parábola tem foco $F(-1, 8)$ e diretriz dada pela equação $y = 5$. Determinar as coordenadas do vértice e a equação dessa parábola. Construa, no caderno, o gráfico dessa parábola.

8- Olhando ao seu redor e observando atentamente o ambiente que o cerca, procure lembrar de outros lugares e situações, e cite objetos do cotidiano que lembram a parábola, se necessário, circule por diversos ambientes da escola e relate esses objetos.

9- Qual(is) áreas do conhecimento você considera que pode(m) ser utilizado(s) o conhecimento adquirido no estudo das seções cônicas?

- ☐ Física ☐ Engenharia ☐ Arquitetura
☐ Astronomia ☐ Óptica ☐ Tecnologias
☐ Outra(s) _____

10- Cite alguns exemplos de acordo com a aplicação da parábola nessas áreas.

Áreas	Exemplo(s) de aplicação da parábola
Física	
Astronomia	
Engenharia	
Arquitetura	
Óptica	
Tecnologias	
Outras	

11- Relacione a segunda coluna de acordo com a primeira:

- (1) Menaecmus () Em sua análise dos movimentos dos projéteis descobriu que a sua trajetória, desprezando-se a resistência do ar, é uma parábola.

 (2) Apolônio () Propôs aperfeiçoamentos às seções cônicas sob um novo ponto de vista, especialmente em relação ao contexto prático, demonstrou que os planetas movem-

se em torno do Sol em trajetórias elípticas com o Sol num dos focos.

(3) Tâbit ibn Qorra

() Descobriu as seções cônicas e utilizou três tipos de cones (tendo, no vértice, ângulo reto, ângulo agudo ou ângulo obtuso) sendo cada cone cortado por um plano perpendicular a um elemento do cone (uma geratriz). Desta forma dependendo do ângulo obteremos a parábola, a elipse ou a hipérbole.

(4) Johann Kepler

() Recebeu dos antigos o nome de “o grande Geômetra”, autor de “As Cônicas” uma obra composta por oito livros na qual aperfeiçoou e aprofundou muito este tema, mostrou que é possível obter de um único cone a elipse, a hipérbole e a parábola apenas variando o ângulo de inclinação do plano de secção, também substituiu o cone de uma só folha por um cone de duas folhas e essa mudança fez da hipérbole a curva de dois ramos que conhecemos hoje, deu as designações elipse, parábola e hipérbole usadas até hoje para essas curvas devido as suas propriedades.

(5) Galileu Galilei

() Sua obra foi decisiva para a manutenção das obras de Apolônio sobre seções cônicas no sentido de proporcionar aos seus sucessores o mais completo material sobre o tema. De importância especial são suas traduções dos Livros V, VI e VII das *Secções cônicas* de Apolônio, pois somente através delas esses Livros se preservaram. Ele escreveu também sobre astronomia, cônicas, álgebra elementar, quadrados mágicos e números amigáveis.

12- Cite outros nomes históricos relacionados às seções cônicas.

APÊNDICE D - CONSTRUÇÃO DE UMA ELIPSE

FERRAMENTAS NECESSÁRIAS:



Mover



Novo ponto



Controle Deslizante



Interseção de Dois Objetos



Reta Perpendicular



Segmento definido por Dois Pontos



Inserir Texto



Mediatriz



Mover Janela de Visualização

1 – Abra um novo arquivo no GeoGebra;

2 – Selecione a ferramenta **Controle Deslizante** , clique na **Zona Gráfica** chame o deslizante de '**a**', defina o intervalo de **-5** a **5** e o incremento **0,1**, clique em **Aplicar**;

3 – Repita o passo 2, mudando somente o nome do deslizante para '**b**', faça o mesmo para '**x**' e '**y**';

4 – Adéque a janela a uma melhor visualização utilizando a ferramenta **Mover** , faça variar os valores de **a** para 5 e de **b** para 3 e com a ferramenta **Mover Janela de Visualização** , depois clique na área gráfica com o botão direito e escolha **Visualização Padrão**;

5 – No campo de **Entrada Algébrica** digite **$c = \sqrt{a^2 - b^2}$** tecele **Enter**;

6 – No campo de **Entrada Algébrica** digite o seguinte código: **$(x-x')^2/a^2 + (y-y')^2/b^2 = 1$** , tecele **Enter**, mude o tipo de equação da elipse clicando na mesma com o botão direito do mouse e escolhendo **Equação**, mude também a cor da elipse clicando na mesma com o botão direito do mouse, escolhendo **Propriedades**, depois **Cor** e escolha a cor de sua preferência;

7 – No campo de **Entrada Algébrica** digite **$F_1 = (x'+c, y')$** tecele **Enter** e **$F_2 = (x'-c, y')$** tecele **Enter**, estes serão os focos da elipse;

8 – No campo de **Entrada Algébrica** digite $C=(x',y')$ tecla **Enter**, este ponto **C** será o centro da elipse;

9 – No campo de **Entrada Algébrica** digite $e=c/a$ tecla **Enter** que será a excentricidade da elipse;

10 – Selecione a ferramenta **Novo Ponto** , clique na elipse e terá um ponto **A** pertencente a mesma;

11 – Selecione a ferramenta **Segmento definido por Dois Pontos** , clique no ponto **F₂** e depois clique no ponto **A**;

12 – Repita o passo 11, mudando somente o ponto **F₂** por **F₁**, mude a cor desses dois segmentos clicando no mesmo com o botão direito do mouse, escolhendo **Propriedades**, depois **Cor** e escolha a cor de sua preferência;

13 – No campo de **Entrada Algébrica** e digite $s=f+g$ tecla **Enter**;

14 – Selecione a ferramenta **Segmento definido por Dois Pontos** , clique no ponto **F₂** e depois clique no ponto **F₁** cujo valor é **h**;

15 – Selecione a ferramenta **Reta Perpendicular** , clique no ponto **C**, depois clique no segmento **h**, agora selecione a ferramenta **Interseção de Dois**

Objetos , clique na reta **i** e na **elipse** e surgirão os pontos **B** e **D**;

16 – Selecione a ferramenta **Segmento definido por Dois Pontos** , clique no ponto **B** e depois clique no ponto **D**;

17 – Selecione a ferramenta **Mediatriz** , clique no ponto **B** e depois clique no **D**

e em seguida selecione a ferramenta **Interseção de Dois Objetos** , clique na reta **k** e na **elipse** e surgirá os pontos **E** e **F**;

18 – Selecione a ferramenta **Segmento definido por Dois Pontos** , clique no ponto **E** e depois clique no ponto **F**;

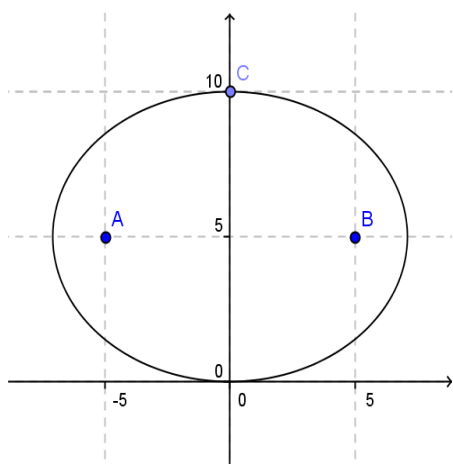
19 – Esconda as retas **i** e **k**, os segmentos **h**, **j** e **l** e os pontos **B**, **D**, **E** e **F**, clicando na bolinha ao lado dos mesmos na janela de álgebra;

- 20 – Escolha a ferramenta **Inserir Texto** , e digite '**Elementos da elipse:**' tecle enter e digite '**Equação:**', ainda na janela escolha o objeto **d** tecle enter e digite "**Focos:**" e escolha objeto "**F_1**" e "**F_2**" tecle enter e digite "**Distância focal:**" e escolha objeto "**h**" tecle enter e digite "**Eixo menor:**" e escolha objeto "**j**" tecle enter e digite "**Eixo maior:**" e escolha objeto "**l**" tecle enter e digite "**Centro:**" e escolha objeto "**C**" tecle enter e digite "**Excentricidade:**" e escolha objeto "**e**" e em seguida clique em **OK**;
- 21 – Com o botão direito do mouse clique no controle deslizante **a**, escolha **Animar** e observe o que acontece com a elipse. Repita este procedimento para parar a animação;
- 22 – Faça o mesmo com o controle deslizante **b**. Repita este procedimento para parar a animação;
- 23 – Com o botão direito do mouse clique em **A** e escolha **Animar** e observe os valores de **f**, **g** e **s**. Repita este procedimento para parar a animação.

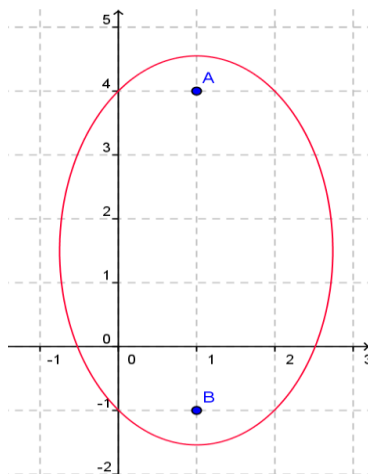
APÊNDICE E – SUGESTÃO DE ATIVIDADE SOBRE A ELIPSE

- 1- Repita o procedimento utilizando a equação do passo 6 como $(y-y')^2/a^2 + (x-x')^2/b^2 = 1$, que mudanças devemos efetuar nos pontos do passo 7 como F_1 e F_2 para que continuem sendo os focos da elipse? Que diferença você observa entre as elipses?
- 2- O que acontece com os elementos da elipse quando se realiza o passo 21? Em sua opinião, por que isso acontece?
- 3- O que acontece com os elementos da elipse quando se realiza o passo 22? Por que isso ocorre?
- 4- No passo 23 o que acontece com os valores de **f**, **g** e **s**?
- 5- Ao efetuar os passos 21 e 22 em determinado momento temos $a=b$, o que acontece com o valor de **e** na elipse nesse instante e com os focos da mesma? Que outra figura geométrica temos que se parece com a elipse nesse instante?
- 6- Observe os elementos da Janela de Visualização e os mesmos na Janela de Álgebra, que conclusões podemos tirar da relação que existe entre cada um deles?
- 7- Determine as equações reduzidas de cada cônica a seguir:

a)



b)



- 8- Em cada cônica do exercício anterior determine cada um de seus elementos preenchendo o quadro a seguir:

Elementos	Elipse
Equação	
Focos	
Centro	

Excentricidade	
Distância focal	
Eixo maior	
Eixo menor	

9- Dada a elipse $\frac{(x + 2)^2}{100} + \frac{(y + 1)^2}{36} = 1$, determinar:

- a) o centro
- b) o eixo real
- c) os vértices
- d) o eixo imaginário
- e) os focos
- f) o gráfico da elipse

10- Olhando ao seu redor e observando atentamente o ambiente que o cerca, procure lembrar de outros lugares e situações, e cite objetos do cotidiano que lembram a elipse, se necessário, circule por diversos ambientes da escola.

11- Cite alguns exemplos de acordo com a aplicação da elipse em outras áreas do conhecimento.

Áreas	Exemplo(s) de aplicação da elipse
Física	
Astronomia	
Engenharia	
Arquitetura	
Óptica	
Tecnologias	
Outras	

12- Qual grande nome histórico está relacionado a aplicação da elipse, em especial na astronomia? _____

APÊNDICE F - CONSTRUÇÃO DE UMA HIPÉRBOLE

FERRAMENTAS NECESSÁRIAS:



Mover



Novo ponto



Controle Deslizante



Interseção de Dois Objetos



Reta Perpendicular



Segmento definido por Dois Pontos



Inserir Texto



Mediatriz



Segmento com Comprimento Fixo

1 – Abra um novo arquivo no GeoGebra;

2 – Selecione a ferramenta **Controle Deslizante** , clique na **Zona Gráfica** chame o deslizante de '**a**', defina o intervalo de **-5** a **5** e o incremento **0,1**, clique em **Aplicar**;

3 – Repita o passo 2, mudando somente o nome do deslizante para '**b**', faça o mesmo para '**x**' e '**y**';

4 – No campo de **Entrada Algébrica** digite **$c = \sqrt{a^2 + b^2}$** ;

5 – No campo de **Entrada Algébrica** digite o seguinte código: **$(x-x')^2/a^2 - (y-y')^2/b^2 = 1$** , mude o tipo de equação da hipérbole clicando na mesma com o botão direito do mouse e escolhendo **Equação**;

6 – No campo de **Entrada Algébrica** digite **$F_1 = (x' + c, y')$** tecele enter e em seguida digite **$F_2 = (x' - c, y')$** e tecele enter, estes serão os focos da hipérbole;

7 – No campo de **Entrada Algébrica** digite **$C = (x', y')$** , este ponto **C** será o centro da hipérbole;

8 – No campo de **Entrada Algébrica** digite **$e = c/a$** que será a excentricidade da hipérbole;

9 – Selecione a ferramenta **Novo Ponto** , clique na hipérbole e marca o ponto **A**;

10 – Selecione a ferramenta **Segmento definido por Dois Pontos** , clique no ponto **F₁** e em seguida no ponto **A**, clique novamente no ponto **A** depois no ponto **F₂** e teremos os segmentos **F₁A** e **AF₂**, cujos valores são **f** e **g**;

11 – No campo de **Entrada Algébrica** digite **s=abs(f-g)**; mude a cor dos segmentos **f** e **g** e da constante **s** clicando em um deles com o botão direito do mouse, escolhendo **Propriedades**, depois **Cor** e escolha a cor de sua preferência, para mudar a cor dos outros dois objetos basta selecioná-los e escolher a mesma cor mude também a cor da hipérbole clicando na mesma e escolhendo a cor de sua preferência;

12 – Selecione a ferramenta **Segmento definido por Dois Pontos** , clique no ponto **F₂** e depois clique no ponto **F₁**, cujo valor é **h**;

13 – Selecione a ferramenta **Interseção de Dois Objetos** , clique no segmento **h** e na **hipérbole** e surgirão os pontos **B** e **D**;

14 – Selecione a ferramenta **Segmento definido por Dois Pontos** , clique no ponto **B** e depois clique no ponto **D** e teremos o segmento **i**;

15 – Selecione a ferramenta **Mediatriz** , clique no ponto **F₁** e depois clique no **F₂** e terá a reta **j**, em seguida selecione a ferramenta **Segmento com Comprimento**

Fixo , clique em **C** digite **b** clique em **OK**, selecione a ferramenta **Mover** e arraste o ponto **E** noventa graus no sentido anti-horário, repita este procedimento e terá o ponto **F**, arraste-o noventa graus no sentido horário.

16 – Esconda a reta **j** clicando na bolinha ao lado da letra **j** na janela algébrica, faça o mesmo com os segmentos **k** e **l**;

17 – Selecione a ferramenta **Segmento definido por Dois Pontos** , clique no ponto **E** e depois clique no ponto **F** e teremos o segmento **m**;

18 – Esconda os segmentos **h**, **i** e **m** e os pontos **B**, **D**, **E** e **F** clicando na bolinha ao lado dos mesmos na janela algébrica;

- 19 – Selecione a ferramenta **Inserir Texto** , clique área gráfica e digite '**Elementos da hipérbole:**' tecle enter e digite '**Equação:**' e escolha objeto '**d**' tecle enter e digite '**Focos:**' e escolha objeto '**F₁**' e '**F₂**' tecle enter e digite '**Distância focal:**' e escolha objeto '**h**' tecle enter e digite '**Eixo real:**' e escolha objeto '**m**' tecle enter e digite '**Eixo imaginário:**' e escolha objeto '**i**' tecle enter e digite '**Centro:**' e escolha objeto '**C**' tecle enter e digite '**Excentricidade:**' e escolha objeto '**e**' e clique em **OK**;
- 20 – Com o botão direito do mouse clique no controle deslizante **a**, escolha **Animar** e observe o que acontece com a hipérbole. Repita este procedimento para parar a animação;
- 21 – Faça o mesmo com o controle deslizante **b**. Repita este procedimento para parar a animação;
- 22 – Com o botão direito do mouse clique em **A** e escolha **Animar** e observe os valores de **f**, **g** e **s**. Repita este procedimento para parar a animação.

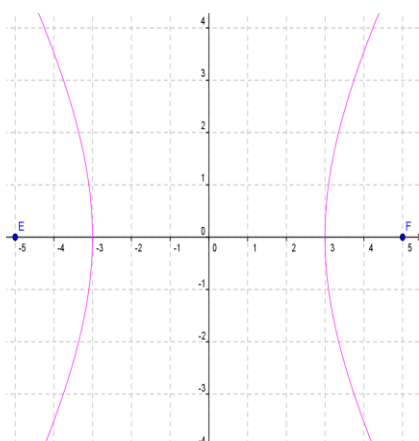
APÊNDICE G – SUGESTÃO DE ATIVIDADE SOBRE A HIPÉRBOLE

- 1- Repita o procedimento utilizando a equação do passo 6 como $(y-y')^2/a^2 - (x-x')^2/b^2 = 1$, que mudanças devemos efetuar nos pontos do passo 7 como F_1 e F_2 para que continuem sendo os focos da hipérbole? Que diferença você observa entre as hipérbolas?
- 2- O que acontece com os elementos da hipérbole quando se realiza o passo 20? Em sua opinião, por que isso acontece?
- 3- O que acontece com os elementos da hipérbole quando se realiza o passo 21?
- 4- No passo 22 o que acontece com os valores de f , g e s ? Por que isso ocorre?
- 5- Faça o que se pede no passo 20 agora com os valores de x' e, em seguida, faça com y' . Observe o quais elemento da hipérbole varia e preencha o quadro abaixo.

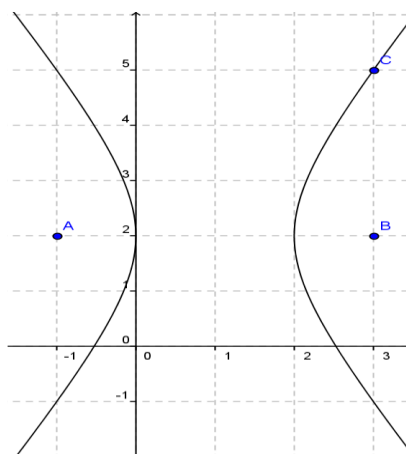
Elementos da hipérbole	Varia	Não varia
Equação		
Focos		
Distância focal		
Eixo real		
Eixo imaginário		
Centro		
Excentricidade		

- 6- Observe os elementos da janela de Visualização e os mesmos na Janela de Álgebra, que conclusões podemos tirar da relação que existe entre cada um deles?
- 7- Determine as equações reduzidas de cada cônica a seguir:

a)



b)



8- Em cada cônica do exercício anterior determine cada um de seus elementos preenchendo o quadro a seguir:

Elementos	Hipérbole
Equação	
Focos	
Centro	
Excentricidade	
Distância focal	
Eixo real	
Eixo imaginário	

9- Dada a hipérbole $\frac{(x + 2)^2}{100} - \frac{(y + 1)^2}{36} = 1$, determinar:

- o centro
- o eixo real
- os vértices
- o eixo imaginário
- os focos
- o gráfico da hipérbole

10- Olhando ao seu redor e observando atentamente o ambiente que o cerca, procure lembrar de outros lugares e situações, e cite objetos do cotidiano que lembram a hipérbole, se necessário, circule por diversos ambientes da escola.

11- Cite alguns exemplos de acordo com a aplicação da hipérbole em outras áreas do conhecimento.

Áreas	Exemplo(s) de aplicação da hipérbole
Física	
Astronomia	
Engenharia	
Arquitetura	

Óptica	
Tecnologias	
Outras	

12- Quais grandes nomes históricos estão relacionados a hipérbole?
