

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE TECNOLOGIA
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

HUGO VINÍCIUS FERREIRA AZEVEDO

**TÉCNICAS DE SIMULAÇÃO APLICADAS À ANÁLISE CONFIABILÍSTICA: O
DESAFIO DA OBTENÇÃO DE BAIXAS PROBABILIDADES DE FALHA**

Maceió/AL
2022

HUGO VINÍCIUS FERREIRA AZEVEDO

**TÉCNICAS DE SIMULAÇÃO APLICADAS À ANÁLISE CONFIABILÍSTICA: O
DESAFIO DA OBTENÇÃO DE BAIXAS PROBABILIDADES DE FALHA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas como parte dos requisitos para obtenção do título de Engenheiro Civil.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Toledo de Lima Junior

Coorientador: Msc. Luís Philipe Ribeiro Almeida

Maceió/AL
2022

Catálogo na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

A994t Azevedo, Hugo Vinícius Ferreira.
Técnicas de simulação aplicadas à análise confiabilística : o desafio da
obtenção de baixas probabilidades de falha / Hugo Vinícius Ferreira Azevedo. –
Maceió, 2022.

78 f. : il., grafs. e tabs. color.

Orientador: Eduardo Toledo de Lima Junior.

Co-orientador: Luís Philipe Ribeiro Almeida.

Monografia (Trabalho de conclusão de curso em Engenharia Civil) –
Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2022.

Bibliografia: f. 76-78.

1. Monte Carlo, Método de. 2. Amostragem assintótica. 3. Amostragem
melhorada. 4. Amostragem por hipercubo latino. 5. Confiabilidade (Engenharia) -
Métodos estatísticos. I. Título.

CDU: 624

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço aos meus pais, pela criação, encorajamento e por todo o apoio e incentivo aos estudos. Por todos os conselhos e companheirismo ao longo de minha vida.

À Joyce Tenório, por me encorajar e apoiar nos momentos mais estressantes e complicados, por me incentivar a sempre dar meu melhor ao longo dessa jornada.

Ao meu orientador, Eduardo Toledo, cujo apoio, comprometimento e parceria ao longo de toda minha graduação foi de fundamental importância para minha formação como engenheiro e pesquisador.

Ao meu coorientador, Luís Almeida, pelo apoio ao longo dos meus últimos anos no LCCV, por ter aceitado me ajudar a desenvolver este trabalho e pela amizade.

Ao Programa de Capacitação Discente (PEC), grupo pelo qual tenho muito carinho e orgulho. Por ter me fornecido várias amizades e ter me dado a experiência de crescer profissionalmente, de ser um melhor pesquisador e de conhecer mais sobre gestão de pessoas e projetos.

Ao Laboratório de Computação Científica e Visualização (LCCV), por ser sua excelência em produzir ciência aplicada de ponta e formar ótimos pesquisadores.

Ao Centro Acadêmico de Engenharia Civil (CAEC), especificadamente à chapa SuperAção, por ter sido um local em que fortaleci amizades e pude ter a experiência de lutar pela melhoria do curso fazendo parte do conselho do CTEC.

Aos meus queridos amigos Lucas Silva, Lucas Oliveira e Mariana Monteiro, por todo o apoio, incentivo, amizade e por sempre desfrutar das conquistas e ajudar a superar as derrotas uns dos outros. Que todo o empenho nessa nossa jornada de graduação venha a compensar e nos divertir com boas memórias daqui a alguns anos.

*Viver é enfrentar um problema atrás do outro.
O modo como você o encara é que faz a diferença.*

Benjamin Franklin

RESUMO

AZEVEDO, H. V. F. Técnicas de Simulação Aplicadas à Análise Confiabilística: O Desafio da Obtenção de Baixas Probabilidades de Falha. 2022. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Alagoas, Maceió.

Os avanços da análise de segurança na Engenharia de Estruturas são cada vez mais aprimorados pela ciência, uma vez que sua aplicação é notória em diversos ramos da engenharia, desde as estruturas mais convencionais presentes na construção civil até as estruturas mais arrojadas na engenharia aeroespacial. Dentre os requisitos aos quais uma estrutura deve seguir, garantir uma boa segurança dela é imprescindível no dia a dia de um engenheiro, de modo que a caracterização matemática dos estados limites deve garantir um limite entre o domínio de falha e o de segurança desta estrutura. Sendo assim, pode-se usar a Teoria da Confiabilidade Estrutural para analisar os requisitos de segurança de uma estrutura a partir da análise de seus parâmetros de projeto de modo probabilístico. As incertezas referentes a esses projetos são incorporadas no modelo, na tentativa de obter uma resposta mais precisa do comportamento previsto da estrutura e de uma estimativa de sua probabilidade de falha. Dentre as técnicas de análise de confiabilidade, o método FORM (*First Order Reliability Method*) é amplamente utilizado por ser um método semi-analítico capaz de resolver diversos problemas com baixo custo computacional, embora ele possua limitações na aplicação em problemas complexos e não-lineares. Assim, pode-se destacar o método de Simulação de Monte Carlo, uma poderosa técnica capaz de solucionar problemas complexos, grandes e não-lineares. Porém, o alto custo computacional associado pode se tornar um problema, especialmente em casos com baixas probabilidades de falha. Para contornar isso, técnicas de redução de variância (chamadas de Amostragem Inteligente) são propostas na literatura de modo a se obter uma boa estimativa de baixas probabilidades de falha, com um custo computacional que não seja proibitivo. Sendo assim, este trabalho objetiva explorar algumas dessas técnicas e avaliar o potencial dessa estimativa, dando destaque a: Amostragem Assintótica e Amostragem Melhorada. Busca-se explorar problemas *benchmark* da literatura em que a solução tende a ser complexa e, em alguns casos, de difícil obtenção via FORM, para evidenciar a necessidade de técnicas de simulação. Todas as análises são feitas com a linguagem de programação *Python* e os resultados obtidos são comparados em termos da eficácia da convergência das técnicas e da sua acurácia em relação à literatura.

Palavras-chave: Simulação de Monte Carlo; Amostragem Assintótica; Amostragem Melhorada; Amostragem por Hipercubo Latino; FORM.

ABSTRACT

Simulation Techniques Applied to Reliability Analysis: The Challenge of Obtaining Low Failure Probabilities. 2022. Thesis (Bachelor - Civil Engineering) - Federal University of Alagoas, Maceió.

The advances of safety analysis in Structural Engineering are increasingly improved by science, since its application is notorious in various branches of engineering, from the most conventional structures present in civil construction to the boldest structures in aerospace engineering. Among the requirements that a structure must follow, ensuring a good safety of the structure is essential in an engineer's daily life, so that the mathematical characterization of limit states must ensure a limit between the failure domain and the safety domain of this structure. Thus, one can use the Structural Reliability Theory to analyze the safety requirements of a structure from the analysis of its design parameters in a probabilistic way. The uncertainties related to these designs are incorporated into the model in an attempt to obtain a more accurate response to the predicted behavior of the structure and an estimate of its failure probability. Among the reliability analysis techniques, the FORM method (First Order Reliability Method) is widely used because it is a semi-analytical method capable of solving several problems with low computational cost, although it has limitations when applied to complex and non-linear problems. Thus, one can highlight the Monte Carlo Simulation method, a powerful technique capable of solving complex, large and non-linear problems. However, the associated high computational cost can become a problem, especially in cases with low failure probabilities. To circumvent this, variance reduction techniques (called Intelligent Sampling) are proposed in the literature in order to obtain a good estimate for low failure probabilities with a computational cost that is not prohibitive. Therefore, this paper aims to explore some of these techniques and evaluate the potential of this estimation, highlighting Asymptotic Sampling and Enhanced Sampling. It seeks to explore benchmark problems from the literature where the solution tends to be complex and, in some cases, difficult to obtain via FORM, to highlight the need for simulation techniques. All the analyses are done with the *Python* programming language and the results obtained are compared in terms of the effectiveness of the convergence of the techniques and their accuracy with respect to the literature.

Keywords: Monte Carlo Simulation; Asymptotic Sampling; Enhanced Sampling; Latin Hypercube Sampling; FORM.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Definição da função de falha bidimensional	21
Figura 2 – Definição geométrica de β	23
Figura 3 – Etapas de transformação do método FORM	24
Figura 4 – Superfície de falha no espaço reduzido e índice β	26
Figura 5 – Processo iterativo para calcular β	27
Figura 6 – Amostragem por Hipercubo Latino	32
Figura 7 – Hipercubo Latino para duas variáveis e cinco realizações.....	32
Figura 8 – Histogramas de densidade obtidos por Amostragem Simples, Amos- tragem por Variáveis Antitéticas e Amostragem por Hipercubo Latino	34
Figura 9 – Função de Falha - Exemplo 1	39
Figura 10 – Convergência do Monte Carlo Cru - Exemplo 1	40
Figura 11 – Análise do parâmetro f - Exemplo 1	41
Figura 12 – Convergência da Amostragem Assintótica - Exemplo 1	42
Figura 13 – Análise do parâmetro λ - Exemplo 1	43
Figura 14 – Convergência da Amostragem Melhorada - Exemplo 1	43
Figura 15 – Tempo Computacional na Amostragem Assintótica - Exemplo 1	44
Figura 16 – Tempo Computacional na Amostragem Melhorada - Exemplo 1	44
Figura 17 – Função de Falha - Exemplo 2.....	46
Figura 18 – Convergência do Monte Carlo Cru - Exemplo 2	47
Figura 19 – Análise do parâmetro f - Exemplo 2.....	48
Figura 20 – Convergência da Amostragem Assintótica - Exemplo 2	49
Figura 21 – Análise do parâmetro λ - Exemplo 2.....	50
Figura 22 – Convergência da Amostragem Melhorada - Exemplo 2	50
Figura 23 – Tempo Computacional na Amostragem Assintótica - Exemplo 2	51
Figura 24 – Tempo Computacional na Amostragem Melhorada - Exemplo 2	51
Figura 25 – Função de Falha - Exemplo 3.....	53
Figura 26 – Convergência do Monte Carlo Cru - Exemplo 3	54
Figura 27 – Análise do parâmetro f - Exemplo 3.....	55
Figura 28 – Convergência da Amostragem Assintótica - Exemplo 3	56
Figura 29 – Análise do parâmetro λ - Exemplo 3.....	57
Figura 30 – Convergência da Amostragem Melhorada - Exemplo 3	57
Figura 31 – Tempo Computacional na Amostragem Assintótica - Exemplo 3	58
Figura 32 – Tempo Computacional na Amostragem Melhorada - Exemplo 3	58
Figura 33 – Função de Falha - Exemplo 4.....	60
Figura 34 – Convergência do Monte Carlo Cru - Exemplo 4	61

Figura 35 – Análise do parâmetro f - Exemplo 4	62
Figura 36 – Convergência da Amostragem Assintótica - Exemplo 4	63
Figura 37 – Análise do parâmetro λ - Exemplo 4	64
Figura 38 – Convergência da Amostragem Melhorada - Exemplo 4	64
Figura 39 – Tempo Computacional na Amostragem Assintótica - Exemplo 4	65
Figura 40 – Tempo Computacional na Amostragem Melhorada - Exemplo 4	65
Figura 41 – Chapa Tracionada com Fissura Central.....	67
Figura 42 – Convergência do Monte Carlo Cru - Estudo de Caso	69
Figura 43 – Análise do parâmetro f - Estudo de Caso	70
Figura 44 – Convergência da Amostragem Assintótica - Estudo de Caso	70
Figura 45 – Análise do parâmetro λ - Estudo de Caso.....	71
Figura 46 – Convergência da Amostragem Melhorada - Estudo de Caso	72
Figura 47 – Tempo Computacional na Amostragem Assintótica - Estudo de Caso .	73
Figura 48 – Tempo Computacional na Amostragem Melhorada - Estudo de Caso .	73

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Estimativa de número de simulações para captar diferentes valores de P_f , a um nível de dispersão $\delta = 5\%$	29
Tabela 2 – Combinações Realizadas de Análise	38
Tabela 3 – Propriedades das Variáveis Aleatórias - Exemplo 1	40
Tabela 4 – Comparação Monte Carlo Cru e FORM - Exemplo 1	40
Tabela 5 – Propriedades das Variáveis Aleatórias - Exemplo 2	47
Tabela 6 – Comparação Monte Carlo Cru e FORM - Exemplo 2	47
Tabela 7 – Propriedades das Variáveis Aleatórias - Exemplo 3	54
Tabela 8 – Comparação Monte Carlo Cru e FORM - Exemplo 3	54
Tabela 9 – Propriedades das Variáveis Aleatórias - Exemplo 4	61
Tabela 10 – Comparação Monte Carlo Cru e FORM - Exemplo 4	61
Tabela 11 – Propriedades das Variáveis Aleatórias - Estudo de Caso	68
Tabela 12 – Comparação Monte Carlo Cru e FORM - Estudo de Caso	69

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

v.a.	Variável Aleatória
PDF	Função densidade de probabilidade
CDF	Função de distribuição acumulada
SMC	Simulação de Monte Carlo
FORM	<i>First-Order Reliability Method</i>
AS	Amostragem Assintótica
AM	Amostragem Melhorada
AVS	Amostragem por Variáveis Antitéticas
LHS	<i>Latin Hypercube Sampling</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

X	Variável Aleatória
x	Realização da variável aleatória X
μ_X	Média de X
σ_X	Desvio-padrão de X
σ_X^2	Variância de X
$f_X(x)$	PDF de X
$F_X(x)$	CDF de X
P_f	Probabilidade de Falha
β	Índice de Confiabilidade
f	Parâmetro chave da Amostragem Assintótica
λ	Parâmetro chave da Amostragem Melhorada

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Motivação	14
1.2	Objetivos.....	14
1.3	Metodologia	15
1.4	Organização do Conteúdo	15
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	16
3	CONCEITOS DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL	19
3.1	Introdução	19
3.2	Definição da Probabilidade de Falha	20
3.3	Problema Básico da Confiabilidade	21
3.4	FORM - Método de Confiabilidade de Primeira Ordem	23
3.4.1	Algoritmo de Hasofer, Lind, Rackwitz e Fiessler	26
4	MÉTODOS DE SIMULAÇÃO EM CONFIABILIDADE ESTRUTURAL	28
4.1	Método de Monte Carlo	28
4.2	Técnicas de Geração de Amostras Aleatórias.....	30
4.2.1	Amostragem simples	30
4.2.2	Amostragem por variáveis antitéticas	30
4.2.3	Amostragem por hipercubo latino	31
4.3	Técnicas de Amostragem Inteligente	34
4.3.1	Amostragem assintótica	34
4.3.2	Amostragem melhorada	35
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	38
5.1	Exemplo 1 - Equação de Estado Limite Altamente Não linear	39
5.2	Exemplo 2 - Equação de Estado Limite Côncava.....	46
5.3	Exemplo 3 - Equação de Estado Limite de Polinomial do Terceiro Grau	53
5.4	Exemplo 4 - Equação de Estado Limite de Polinomial do Quarto Grau	60
5.5	Estudo de Caso - Fratura	67
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	74
6.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	74
	REFERÊNCIAS	78

1 INTRODUÇÃO

Os avanços na engenharia de estruturas, nos modelos de análise e nos novos materiais empregados, viabilizam a concepção de estruturas cada vez mais complexas e arrojadas. Tais estruturas devem ser projetadas de modo a garantir alguns requisitos, como: de serviço, de robustez e principalmente de segurança. Estes requisitos podem ser explicitados por meio de equações matemáticas de estado limite, que garantem um limite entre o domínio de falha e o de segurança de uma estrutura. A segurança deve ser garantida principalmente pela intensidade da consequência de uma possível ruína.

O dimensionamento das estruturas a um nível adequado de segurança demanda um alto nível de conhecimento acerca de seus parâmetros de projeto. Evitar superdimensionar uma estrutura garante menores custos financeiros, baixo consumo de recursos e menos impactos ambientais na sua produção. Além disso, analisar as incertezas inerentes aos problemas de engenharia estrutural — a variabilidade dimensional dos elementos, das solicitações que a estrutura sofre e das propriedades mecânicas dos materiais que as compõem — leva a uma resposta mais precisa do comportamento previsto da estrutura, desde a fase de projeto.

Nesse contexto, pode-se utilizar de abordagens probabilísticas, adicionalmente aos métodos tradicionais de verificação determinística dos estados limites. Nesse tipo de abordagem, a Teoria da Confiabilidade Estrutural se apresenta como uma importante ferramenta para estudar o balanço entre custo e segurança dentro de um enfoque probabilístico, no qual as incertezas associadas às variáveis de projeto são quantificadas e incorporadas à análise estrutural. A partir da análise confiabilística de um projeto estrutural, é possível estimar a probabilidade de ocorrência de um modo de falha para um determinado estado limite, chamada de probabilidade de falha (P_f).

Há duas grandes classes de métodos que podem ser usados para achar a probabilidade de falha: Métodos de Transformação e Métodos de Simulação. O primeiro grupo usa formulações semi-analíticas que visam aproximar a equação de estado limite no ponto de projeto por um hiperplano ou uma hipersuperfície quadrática, que pode conduzir a erros, principalmente quando a equação de estado limite é fortemente não-linear (MELCHERS; BECK, 2018). Para evitar esses erros, pode-se estimar a P_f de um problema usando o segundo grupo de solução dos problemas de confiabilidade, a partir da simulação de Monte Carlo.

Métodos de simulação - como a simulação de Monte Carlo (MCS) - permitem a solução de problemas complexos, grandes e não-lineares de confiabilidade estrutural, embora o alto custo computacional associado pode se tornar um problema, especialmente em casos com baixas probabilidades de falha (SANTOS, 2014). MCS é uma técnica poderosa para estimar a P_f de um sistema estrutural e diferentes técnicas de amostragem inteligente são propostas na literatura para reduzir o número de simu-

lações e o custo computacional, como mostram Olsson, Sandberg e Dahlblom (2003), Bucher (2009), Naess, Leira e Batsevych (2009) e Naess, Maes e Dann (2013).

Um dos objetivos das técnicas de amostragem inteligente é estimar probabilidades de falha pequenas com o menor custo computacional possível. Dentre as principais técnicas, pode-se citar a Amostragem por Variáveis Antitéticas (HAMMERSLEY; MORTON, 1956), Amostragem por Hipercubo Latino (OLSSON; SANDBERG; DAHLBLOM, 2003), Amostragem Assintótica (BUCHER, 2009) e Amostragem Melhorada (NAESS; LEIRA; BATSEVYCH, 2009).

Sendo assim, este trabalho objetiva testar a performance de diferentes técnicas de amostragem inteligente para avaliar problemas de confiabilidade estrutural que apresentam baixas probabilidades de falha. Este trabalho também visa a difusão do conhecimento sobre tais técnicas, de modo a servir como material de referência sobre o tema, ajudando a comunidade acadêmico-científica e profissional na aplicação de tais metodologias.

1.1 Motivação

Visto que não é raro encontrar problemas em engenharia de estruturas em que a probabilidade de falha é demasiadamente pequena (na ordem de 10^{-5} a 10^{-7} , por exemplo), a técnica de simulação de Monte Carlo requer um alto custo computacional para sua solução.

Sendo assim, a motivação principal deste trabalho é explorar técnicas que viabilizem a estimativa de baixas probabilidades de falha usando técnicas de simulação, de modo a dar mais destaque a essas técnicas na literatura nacional, em nível de Graduação, e fornecer mais uma alternativa do uso de confiabilidade de estruturas em aplicações comerciais.

1.2 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é analisar e comparar diferentes técnicas de amostragem inteligente em problemas de confiabilidade estrutural.

Como objetivos específicos, pode-se listar:

1. Estudar e compreender algumas das técnicas modernas de amostragem inteligente;
2. Descrever as técnicas, suas diferenças e a lógica do algoritmo para sua aplicação computacional;
3. Programar as técnicas estudadas usando a linguagem de computação *Python*;

4. Apresentar um estudo comparativo das técnicas estudadas, em problemas que são críticos no que se refere à estimativa da probabilidade de falha.

1.3 Metodologia

A metodologia consiste em realizar inicialmente uma revisão de literatura, a fim de verificar as tendências de uso e o estado da arte das técnicas de amostragem inteligente em simulação de Monte Carlo. Destacam-se estudos que deram origem às técnicas e em quais problemas de confiabilidade estrutural elas foram aplicadas.

Em seguida, faz-se a implementação destas técnicas em linguagem computacional *Python*, validando-as com problemas da literatura que servirão como *benchmark*.

Por fim, realiza-se um estudo comparativo do desempenho das diferentes técnicas de amostragem inteligente, de modo a identificar as vantagens e desvantagens de cada uma delas.

Para a implementação computacional será utilizado um computador com processador Intel®Core™i7-7500U CPU 2.90 GHz 64 bits, com 16GB de memória RAM.

1.4 Organização do Conteúdo

Este trabalho está dividido de modo a garantir que as definições e conceitos necessários ao entendimento do tema sejam brevemente apresentados no decorrer dos capítulos.

O Capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica sobre o estado da arte dos tópicos abordados neste trabalho. O principal objetivo é descobrir como as técnicas estudadas foram aplicadas na literatura por outros autores ao longo dos anos.

O Capítulo 3 define o que é confiabilidade estrutural, probabilidade de falha e outros conceitos importantes, de maneira simples e objetiva, a fim de que seja possível realizar o bom entendimento da teoria por trás deste trabalho.

O Capítulo 4 traz conceitos de simulação de Monte Carlo assim como as diversas técnicas de amostragem, que são o foco do presente trabalho.

O Capítulo 5 traz os resultados e discussões sobre a aplicação das técnicas em diferentes problemas de confiabilidade de estruturas retirados da literatura.

O Capítulo 6 traz as conclusões do trabalho e sugestões de trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Proposto por Metropolis e Ulam (1949), o método de simulação de Monte Carlo (*Monte Carlo Simulation*, MCS) é uma técnica de simulação que envolve a geração de números aleatórios a serem avaliados em algum experimento. Seu nome faz referência ao distrito de Monte Carlo, bastante conhecido por seus cassinos, onde a aleatoriedade inerente aos jogos de azar se faz presente.

Aplicado em confiabilidade estrutural, o MCS consiste na geração de N cenários randômicos para serem avaliados na equação de estado limite do problema. Sua utilização na solução de problemas de confiabilidade é realizada, primeiramente, a partir da geração de amostras aleatórias de tamanho N . Analisa-se então o problema para cada realização i dentre as N geradas na etapa de amostragem, de modo que a equação de estado limite estudada é analisada N vezes.

Hammersley e Morton (1956) apresentam a técnica chamada Amostragem por Variáveis Antitéticas. Sua origem remota a implementação do MCS em problemas de transporte de partículas, com o objetivo de ser uma ferramenta para a redução de variância do estimador da probabilidade de falha e diminuir o custo computacional inerente do MCS. Há poucos relatos de aplicações bem sucedidas desta técnica, mas ela ainda é classicamente apresentada na literatura em estudos de comparação de técnicas.

McKay, Beckman e Conover (1979) apresentam o desenvolvimento da Amostragem por Hipercubo Latino (*Latin Hypercube Sampling*, LHS). Nesta técnica, o domínio de cada variável aleatória é dividido em bandas, de modo que cada uma delas deve ser amostrada apenas uma vez para que seja garantida uma cobertura homogênea do domínio das variáveis aleatórias do problema, de forma que este tipo de amostragem resulta numa grande dispersão dos pontos. Sendo assim, essa técnica de amostragem garante que todas as porções do espaço amostral sejam representadas (MCKAY; BECKMAN; CONOVER, 1979).

Outro trabalho que dá destaque à técnica LHS é o de Olsson, Sandberg e Dahlblom (2003), no qual é apresentado estudo comparativo entre diferentes técnicas de Amostragem por Importância combinadas ou não com LHS. Ao longo de três exemplos estudados, os autores concluem que é vantajoso usar LHS para gerar amostras de variáveis aleatórias, uma vez que mais de 50% do esforço computacional pode ser salvo usando LHS no lugar da amostragem simples feita no MCS (OLSSON; SANDBERG; DAHLBLOM, 2003).

Bucher (2009) apresenta uma outra técnica de amostragem inteligente, a qual ele chama de Amostragem Assintótica. Ela se baseia no comportamento assintótico da probabilidade de falha, a qual tende a zero à medida que os desvios-padrão das variáveis aleatórias tendem a zero. A ideia da técnica é causar uma excitação na análise da função de falha, forçando o MCS a ultrapassar a barreira do domínio de segurança.

Isso é alcançado a partir da parametrização dos desvios padrão das variáveis aleatórias do problema, com o objetivo de se obter mais amostras dentro do domínio de falha da equação de estado limite do problema.

Sichani, Nielsen e Bucher (2011a) apresentam diversas aplicações da Amostragem Assintótica em modelos estruturais dinâmicos, sujeitos à excitação aleatória. Os autores detalham uma técnica de calibração dos pontos de suporte para se obter um menor coeficiente de variação para a P_f estimada. Em seguida, a metodologia é aplicada em diferentes problemas lineares e não lineares, com grandes números de variáveis aleatórias focando em problemas dinâmicos. Os autores concluem que a Amostragem Assintótica é capaz de fornecer boas aproximações para eventos com baixas P_f .

Em outra publicação, os autores Sichani, Nielsen e Bucher (2011b) apresentam a Amostragem Assintótica para estimar valores baixos de P_f de sistemas não lineares de alta dimensão, chegando a resultados na ordem de 10^{-10} . Os autores mostram que a técnica é uma boa opção para emprego em problemas complicados, já que as não linearidades do modelo não dificultam a aplicação do método e nem levam a uma redução considerável da sua eficácia. Três sistemas não lineares conhecidos são estudados como *benchmark* e, em seguida, aplica-se Amostragem Assintótica para estimar a P_f de um modelo reduzido de um grau de liberdade de uma turbina eólica.

Naess, Leira e Batsevych (2009) apresentam a Amostragem Melhorada. Esta técnica foi originalmente proposta para estimar probabilidades de falhas pequenas em sistemas estruturais. Baseada na parametrização da função de estado limite, ela visa à redução do custo computacional do MCS mantendo suas principais vantagens, a partir da exploração da regularidade da P_f nas caudas das distribuições de probabilidade, de modo que seja possível usar um procedimento de aproximação para estimar probabilidades de falhas pequenas por extrapolação. Os autores conseguiram estimar a P_f de sistemas em série e em paralelo, com valores entre 10^{-5} e 10^{-7} .

Outras aplicações notórias da Amostragem Melhorada são a de Sichani, Nielsen e Naess (2012), em que os autores propõem o uso da técnica na estimativa da probabilidade de falha de turbinas eólicas exigida pelos códigos de prática para seu projeto, estimando P_f na ordem de 10^{-7} . Além disso, os autores Naess, Maes e Dann (2013) ampliam a abordagem da Amostragem Melhorada para otimizar o dimensionamento de parâmetros de projeto baseado em confiabilidade estrutural, ou seja, escolher os valores de projeto dos parâmetros de algum problema, de modo que este problema obedeça o critério de falha com base em uma P_f alvo. Para o caso em questão os autores calibraram dois exemplos com P_f alvo de 10^{-5} e 10^{-6} .

Destaca-se, também, o trabalho de Santos e Beck (2014). Os autores apresentam um estudo comparativo dentre diversas técnicas de amostragem inteligente que existem na literatura. Usando o MCS cru (ou seja, com uma simples forma de gerar amostras) e outras quatro técnicas modernas de amostragem inteligente combinadas com

três esquemas de geração de amostras aleatórias, os autores mostram um total de quinze diferentes estratégias combinando as diferentes técnicas de amostragem para estimar probabilidades de falha de problemas de confiabilidade estrutural.

3 CONCEITOS DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

3.1 Introdução

A avaliação da segurança de uma estrutura é muito relevante para garantir seu funcionamento adequado. Quando se avalia uma estrutura, as inúmeras incertezas presentes nas variáveis de projeto provocam alterações no seu comportamento real, que podem não ter sido incorporadas no modelo feito na fase de projeto. De acordo com Melchers e Beck (2018), as estruturas e elementos estruturais devem cumprir alguns requisitos básicos, que são:

- a) **Requisito de serviço:** uma estrutura deve manter-se em condições apropriadas para a execução da função à qual se destina durante todo o período de vida útil;
- b) **Requisito de segurança:** uma estrutura deve suportar carregamentos extremos esporádicos e carregamentos repetidos aos quais a mesma esteja sujeita dentro do período de vida previsto, sem entrar em colapso ou apresentar severos danos permanentes;
- c) **Requisito de robustez:** uma estrutura não deve ser danificada por eventos acidentais como incêndio, explosões, impactos, terremotos ou erros humanos de maneira desproporcional à severidade do evento causador do dano.

Quando alguns desses requisitos, em qualquer momento da vida útil da estrutura, é violado, há uma falha no sistema. Diante disso, os requisitos básicos podem ser equacionados em forma de estados limites.

Segundo Melchers e Beck (2018), o principal objetivo da confiabilidade estrutural é a avaliação da segurança das estruturas, que se baseia no cálculo da probabilidade de que um determinado estado limite seja violado. Avalia-se com mais atenção os estados limites últimos (ELU), como eventos extremos de colapso, mas os autores destacam que o conceito de confiabilidade também está relacionado aos estados limites de serviço (ELS), ou seja, os requisitos que as estruturas devem satisfazer. Cita-se como exemplos: deslocamentos inadmissíveis, tensões inadmissíveis, vibração excessiva, instabilidade e abertura inadmissível de fissuras.

O uso de modelos confiabilísticos em projetos de estruturas deve avaliar as incertezas relacionadas às variáveis de projeto, que são descritas de maneira estatísticas como variáveis aleatórias. Segundo Leonel (2009), na análise da confiabilidade estrutural cada critério pode ser entendido como um evento estatístico e suas consequências como cenários de falha, a verificação de cada critério significa a verificação de cada modo potencial de falha, e para isto, deve-se descrever e formular o problema considerando suas variáveis com suas devidas incertezas. Nesse sentido, a caracterização

das variáveis aleatórias (v.a.) é uma etapa crucial na análise probabilística, sendo feita a partir de técnicas de inferência estatística, para mais detalhes ver Ang e Tang (2008).

3.2 Definição da Probabilidade de Falha

De acordo com Gouveia (2014), a probabilidade de falha (P_f) de uma estrutura é estimada a partir de 3 pontos, que são:

- a) a caracterização estatística das variáveis de projeto, assim como seu comportamento individual e em conjunto;
- b) a definição de uma equação de estado limite;
- c) a definição de um método de análise de confiabilidade.

Na teoria da confiabilidade estrutural, a P_f é uma medida de muito importante na análise de segurança de estruturas ou sistemas estruturais. Esse parâmetro fornece um indicativo da probabilidade de que a capacidade resistente de uma estrutura seja ultrapassada pelas solicitações impostas durante sua vida útil.

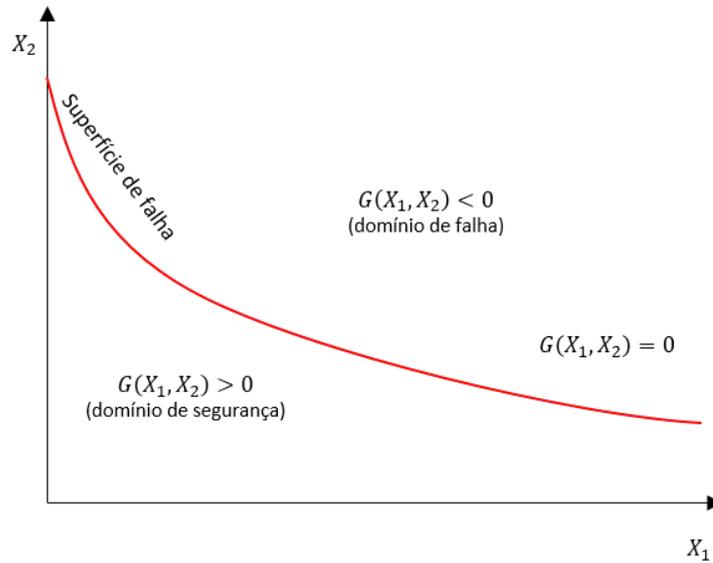
Assim, a caracterização estatística das variáveis de projeto é realizada a partir de um conjunto de dados colhidos de um experimento — lote de corpo de provas de concreto, por exemplo — que são representados por algum modelo de distribuição estatística.

Os modos de falha da estrutura são quantificados através das equações de estado limite (funções de falha), deduzidas a partir dos aspectos físicos do problema em análise. Por exemplo, o esforço normal resistente de uma barra é um estado limite que pode ser equacionado. Assim, sendo a função de falha $G(\mathbf{X})$, em que \mathbf{X} é um vetor de v.a., para cada modo de falha definido para a estrutura, a função em estudo define uma fronteira entre o domínio de falha Ω_f e segurança Ω_s . Desta forma, os eventos de falha e segurança são especificados como mostra a Eq. 1.

$$\begin{aligned} G(\mathbf{X}) > 0 &\rightarrow \text{Evento seguro,} \\ G(\mathbf{X}) \leq 0 &\rightarrow \text{Evento de falha.} \end{aligned} \tag{1}$$

O domínio de falha Ω_f pode ser caracterizado como o conjunto de todos os pontos de \mathbf{X} que levam à falha estrutural. Já o domínio de segurança Ω_s é o conjunto complementar a este. Uma função de falha bidimensional G representada pelas v.a. X_1 e X_2 pode ser vista na Figura 1. O limite entendido como superfície de falha é caracterizado por $G(X_1, X_2) = 0$. Em qualquer problema de confiabilidade, a P_f é calculada integrando-se a função densidade de probabilidade (PDF) conjunta das v.a. do problema sobre o domínio de falha, conforme Eq. Equação 2.

Figura 1 – Definição da função de falha bidimensional



Fonte: Autor (2022)

$$P_f = \int_{\Omega_f} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2)$$

Uma característica desta integral n-dimensional é sua difícil avaliação analítica, tendo em vista a complexidade inerente às PDF das distribuições estatísticas usuais. Faz-se necessário, portanto, a utilização de métodos de análise em confiabilidade estrutural para sua resolução. Esses métodos são classificados em: de transformação, como o método FORM (Seção 3.4); e de simulação, como o método Monte Carlo (apresentado no Capítulo 4).

3.3 Problema Básico da Confiabilidade

A função de falha mais simples é aquela independente do tempo e que possui apenas duas variáveis em sua formulação (MELCHERS; BECK, 2018). Via de regra, essas funções são formuladas por um problema de resistência (R) e solicitação (S), como demonstrada na Equação 3.

$$G(R, S) = R - S = 0 \quad (3)$$

Contudo, em problemas mais complexos de confiabilidade existem diversas v.a. envolvidas, em que a variável R é tratada como uma função das v.a. relacionadas à resistência da estrutura e a variável S como uma função de v.a. relacionadas à solicitação (GOUVEIA, 2014).

Assumindo que R e S são v.a. normais independentes, o problema básico de confi-

abilidade também pode ser resolvido por meio da variável margem de segurança (M), vide Equação 4.

$$M = R - S \quad (4)$$

A análise de M é idêntica à análise da função G , valores positivos da margem de segurança correspondem à segurança da estrutura, e a falha desta ocorre para valores negativos. Um valor nulo da margem de segurança representa a condição de estado limite a qual a estrutura estará sendo submetida. Como R e S são v.a. normais independentes, há de se considerar que M também será (MELCHERS; BECK, 2018), com média μ_M e desvio padrão σ_M , apresentados na Equação 5.

$$\begin{aligned} \mu_M &= \mu_R - \mu_S \\ \sigma_M &= \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Dessa forma, a P_f de M é calculada (Equação 6) como a probabilidade da margem de segurança assumir valores negativos.

$$P_f = P[R - S \leq 0] = P[M \leq 0] = \int_{-\inf}^0 f_M(m) dm = F_M(0) \quad (6)$$

Pode-se, então, transformar a variável M em uma v.a. normal padrão ($\mu = 0$ e $\sigma = 1$), denominada por Y , apresentado na Equação 7.

$$Y = \frac{M - \mu_M}{\sigma_M} \quad (7)$$

Sendo assim, pode-se usar a CDF normal padrão Φ para avaliar as P_f associadas à variável M , como mostra a Equação 8.

$$P_f = \Phi\left(\frac{0 - \mu_M}{\sigma_M}\right) = \Phi\left(-\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right) \quad (8)$$

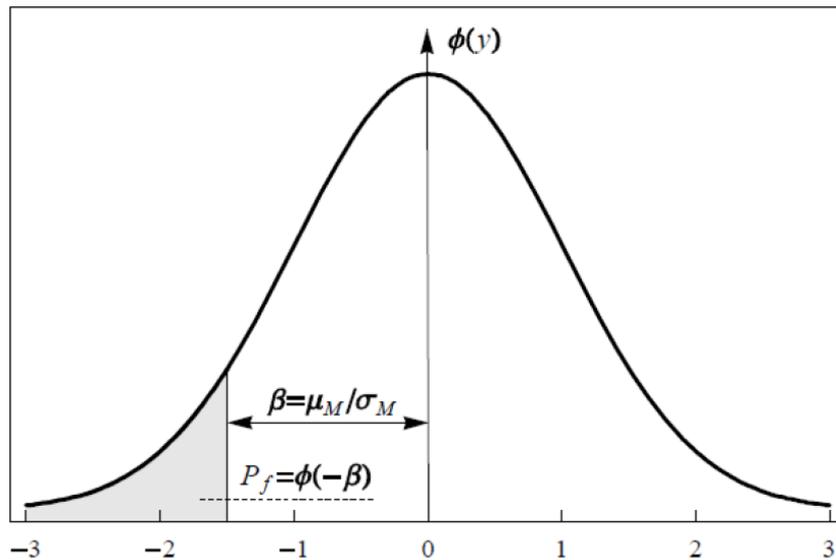
Pode-se então definir um parâmetro denominado índice de confiabilidade (β) (Equação 9), interpretado geometricamente como a distância entre a origem do espaço normal reduzido e o ponto correspondente a $m = 0$ (ponto de maior probabilidade de ocorrência no domínio da falha, denominado ponto de projeto).

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (9)$$

A probabilidade de falha pode ser reescrita, então, como mostrado na Equação 10.

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (10)$$

A Figura 2 mostra a interpretação geométrica de β para determinação da P_f .

Figura 2 – Definição geométrica de β 

Fonte: (BECK, 2019)

Destaca-se, ainda, que os problemas de engenharia, de maneira geral, apresentam diversas v.a., com distribuições quaisquer, nem sempre Gaussianas. Portanto, a função de falha do problema fundamental será aqui generalizada, conforme Equação 11, que será utilizada daqui em diante neste trabalho.

$$G(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2 \quad (11)$$

3.4 FORM - Método de Confiabilidade de Primeira Ordem

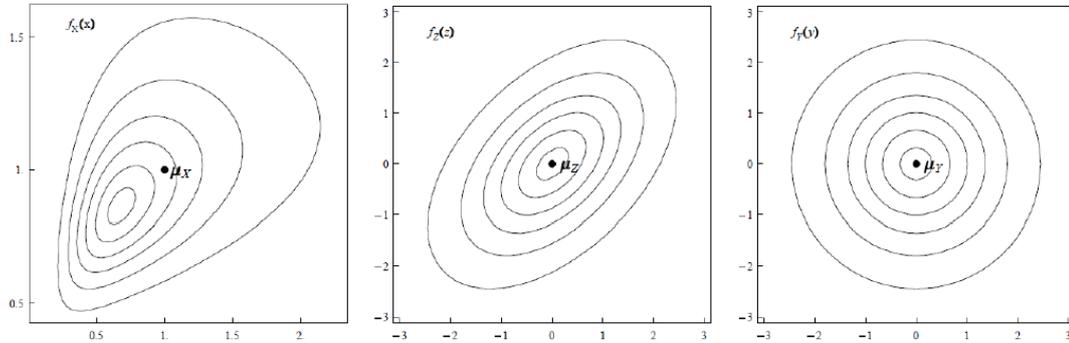
O *First Order Reliability Method* - FORM é um método semi-analítico que consiste na transformação das v.a. originais em normais equivalentes, e na linearização da função de falha do problema. Diante disso, seu grande diferencial consiste em sua capacidade de utilizar toda a informação estatística das v.a. do problema, sendo possível analisar distribuições estatísticas quaisquer, inclusive considerando correlação entre as variáveis.

Conforme apresentado na Seção 3.3, a interpretação geométrica do índice de confiabilidade β é desenvolvida no espaço das v.a. normais reduzidas independentes. Desta forma, além da transformação das v.a. em normais reduzidas, existe a necessidade de decorrelacioná-las. A solução de problemas via FORM deve seguir a metodologia proposta a seguir:

- a) transformação das distribuições originais em normais equivalentes reduzidas;
- b) determinação de coeficientes de correlação equivalentes para as distribuições marginais normais;

c) eliminação da correlação através de alguma técnica de decomposição.

Figura 3 – Etapas de transformação do método FORM



Fonte: (BECK, 2019)

A primeira transformação se dá por meio do modelo de Hasofer e Lind (1974), que consiste na redução das v.a. originais dependentes \mathbf{X} em v.a. reduzidas dependentes \mathbf{Z} . Na segunda etapa, calcula-se os coeficientes de correlação equivalentes da transformação de Nataf (1962), e em seguida a eliminação da correlação entre as v.a.. Neste ponto, há a transformação das v.a. reduzidas dependentes \mathbf{Z} em v.a. independentes, denominadas por \mathbf{Y} . Na grande maioria dos casos, a decomposição de Cholesky é utilizada para fatorar a matriz de correlação, obtendo-se uma matriz triangular inferior associada.

Para fins de ilustração, aplica-se o método no problema básico da confiabilidade estrutural visto na Seção 3.3. Como as variáveis são independentes, não há a necessidade de eliminar a correlação entre as variáveis, realizando a transformação de Hasofer-Lind de forma direta de \mathbf{X} para \mathbf{Y} .

$$Y_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \quad (12)$$

Obtem-se então as variáveis transformadas Y_1 e Y_2 , e a expressão da margem de segurança pode ser reescrita como demonstrada na Equação 13

$$m(y_1, y_2) = r - s = y_1\sigma_R + \mu_R - y_2\sigma_S - \mu_S \quad (13)$$

Na superfície de falha, $m(y_1, y_2) = 0$, obtém-se y_2 em função de y_1 , das médias e desvios-padrão.

$$y_2 = \frac{y_1\sigma_R + \mu_R - \mu_S}{\sigma_S} \quad (14)$$

A distância entre um ponto qualquer (y_1, y_2) e a origem é dada pela expressão $d^2 = y_1^2 + y_2^2$. A condição de mínimo é obtida derivando essa expressão em relação a y_1

e igualando a zero. Desse modo, obtém-se a coordenada y_1^* do ponto sobre $m(y_1, y_2)$ mais próximo da origem.

$$y_1^* = -\frac{\sigma_R(\mu_R - \mu_S)}{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (15)$$

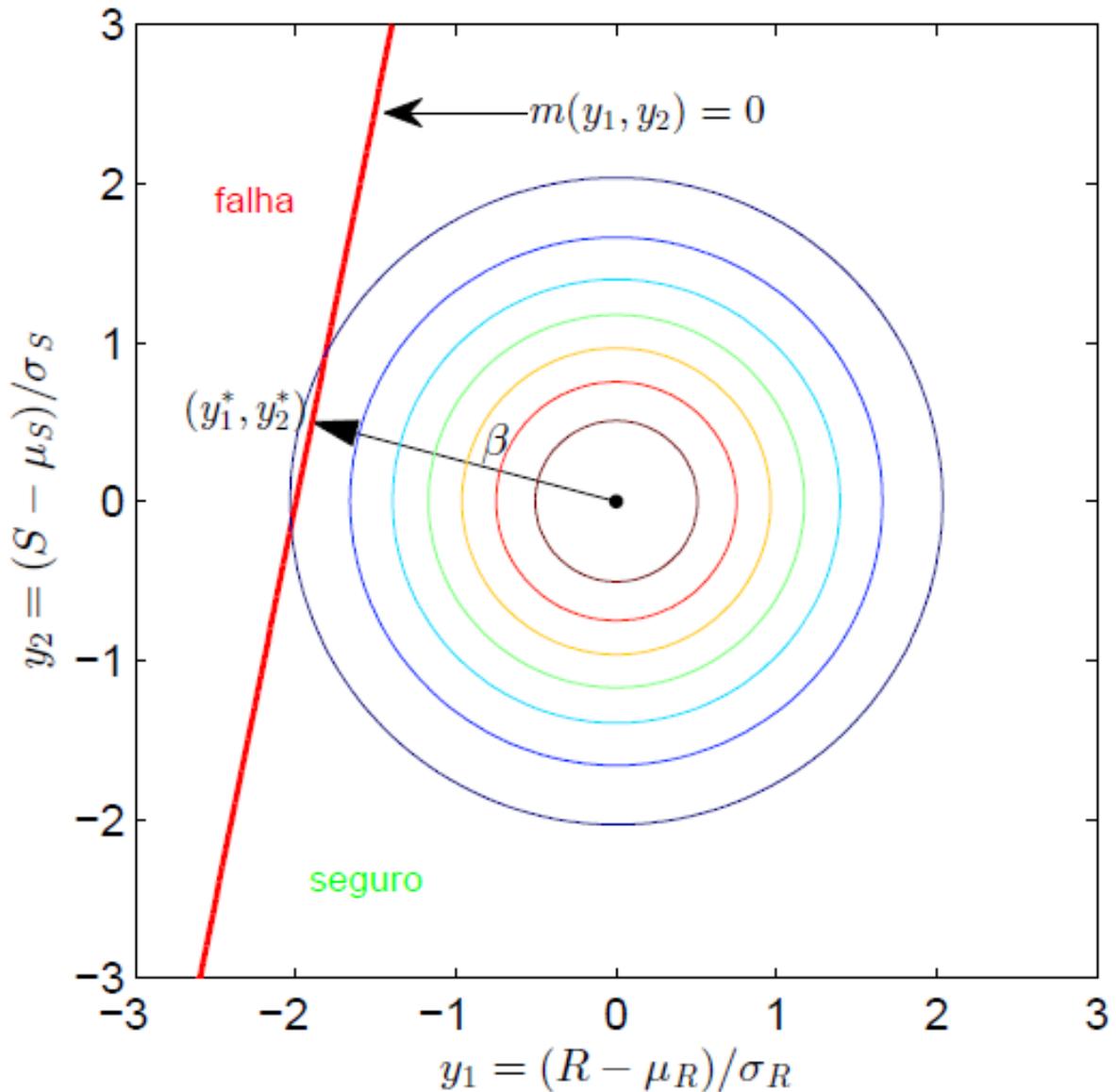
De forma análoga, faz-se os mesmos passos para a definição de y_2^* , derivando a expressão da distância do ponto ao eixo em relação a y_2 e igualando a zero, como segue:

$$y_2^* = -\frac{\sigma_S(\mu_R - \mu_S)}{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (16)$$

substituindo as expressões de y_1^* e y_2^* em $d^2 = y_1^2 + y_2^2$, resultará na mínima distância da superfície de falha à origem, demonstrado na Equação 17.

$$d_{min} = -\frac{\mu_R - \mu_S}{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (17)$$

Observa-se que a Equação 17 é idêntica ao índice de confiabilidade β , ratificando sua interpretação como a menor distância entre a superfície de falha e a origem. Na Figura 4 é representada a superfície de falha no espaço reduzido, tal como o índice β . O exemplo resolvido acima é para o caso de v.a. normais e independentes. Contudo, a maioria dos problemas de confiabilidade estrutural possui v.a. que não seguem a distribuição normal. Desse modo, é necessário fazer uma transformação da distribuição qualquer em uma distribuição normal equivalente.

Figura 4 – Superfície de falha no espaço reduzido e índice β 

Fonte: (SILVA, 2018)

Portanto, a estimativa da P_f via Método FORM baseia-se em um problema de otimização não linear com restrição, cujo objetivo é achar o ponto de projeto que define a menor distância entre a superfície de falha e a origem dos eixos. Usa-se, para este fim, o algoritmo HLRF (HASOFER; LIND, 1974; RACKWITZ; FLESSLER, 1978).

3.4.1 Algoritmo de Hasofer, Lind, Rackwitz e Fiessler

Sabe-se que a fórmula de recorrência do algoritmo HLRF fundamenta-se na aproximação de um ponto qualquer \mathbf{y} à superfície $g(\mathbf{y}) = 0$ e na perpendicularização entre o vetor \mathbf{y} e a tangente à superfície no ponto (MELCHERS; BECK, 2018).

Desse modo, admite-se \mathbf{y}_k como um ponto inicial qualquer — fora ou não da su-

perfície de falha — aproxima-se a função de falha como os termos de primeira ordem de sua expansão em série de Taylor em torno deste ponto, como mostra a Equação 18.

$$\tilde{g}(\mathbf{y}_{k+1}) = g(\mathbf{y}_k) + \nabla g(\mathbf{y}_k)^T \cdot (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k) = 0 \quad (18)$$

em que $\nabla g(\mathbf{y}_k)$ é o gradiente da função de falha, no espaço normal padrão, avaliado no ponto \mathbf{y}_k . Este gradiente é calculado utilizando-se o método das diferenças finitas.

Encontra-se, assim, um novo ponto \mathbf{y}_{k+1} sobre a equação linearizada, de modo que $\tilde{g}(\mathbf{y}_{k+1}) = 0$. O valor inicial do índice de confiabilidade é calculado como $\beta_k = \sqrt{\mathbf{y}_k^T \cdot \mathbf{y}_k}$ e o vetor de cossenos diretores da função de falha (\mathbf{ff}_k) é definido na Equação 19.

$$\alpha_k = \frac{g(\mathbf{y}_k)}{\|\nabla g(\mathbf{y}_k)\|} \quad (19)$$

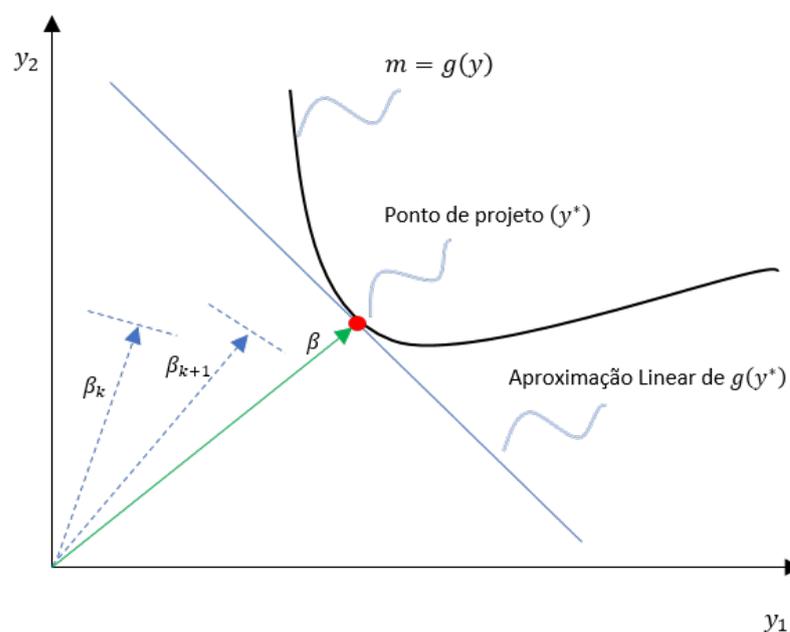
A partir desse vetor, define-se o fator de importância da i -ésima variável no cálculo da P_f como $I_i = \mathbf{ff}_{k_i}$.

Isolando o termo \mathbf{y}_{k+1} , segundo Melchers e Beck (2018), chega-se à expressão de cálculo do novo ponto do processo iterativo, definida a seguir:

$$\mathbf{y}_{k+1} = -\alpha_k \left[\beta_k + \frac{g(\mathbf{y}_k)}{\|\nabla g(\mathbf{y}_k)\|} \right] \quad (20)$$

A Equação 20 é utilizada de forma iterativa até que se atinja convergência em \mathbf{y} ou β . Esse processo pode ser visto na Figura 5.

Figura 5 – Processo iterativo para calcular β



Fonte: Autor (2022)

4 MÉTODOS DE SIMULAÇÃO EM CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

Em problemas muito complexos, em que a formulação do problema envolve diversas combinações de carregamento e de resistência dos modelos, além de ser fortemente não-linear (quando há mais de um ponto de projeto e também em sistemas com múltiplas equações de estado limite), o uso dos métodos de transformação, apresentados no Capítulo 3, podem não convergir ou apresentar um resultado insatisfatório.

Nesse sentido, outra abordagem muito utilizada é a utilização de simulações numéricas para observar estruturas em diferentes configurações de cargas e resistências. Trata-se de realizar experimentos, por meio de um computador, tomando como base um modelo que representa o sistema original a ser avaliado.

Neste capítulo serão abordadas algumas técnicas de simulação que são usadas na solução de problemas de confiabilidade estrutural.

4.1 Método de Monte Carlo

O Método de Monte Carlo é uma das técnicas de simulação que envolve a utilização de números aleatórios. Tem seu nome como referência ao distrito de Monte Carlo, no principado de Mônaco, onde tem como grande atrativo seus casinos. A técnica foi proposta por Metropolis e Ulam (1949) e seu caráter aleatório se assemelha ao experimento de girar uma roleta não viciada, que trabalha gerando número aleatórios.

O método tem como objetivo gerar N eventos randômicos para serem avaliados com base em um experimento. A solução de problemas de confiabilidade utilizando-o é realizada, primeiramente, a partir da geração de uma amostra aleatória de tamanho N . Analisa-se então o problema para cada realização i dentre as N geradas na etapa de amostragem, de modo que a equação de estado limite estudada é analisada N vezes. Em seguida, define-se uma função indicadora $I[\mathbf{x}]$, tal que:

$$\begin{aligned} I[\mathbf{x}] &= 1 \text{ se } \mathbf{x} \in \Omega_f, \\ I[\mathbf{x}] &= 0 \text{ se } \mathbf{x} \in \Omega_s, \end{aligned} \quad (21)$$

em que, Ω_f é o domínio de falha e Ω_s é o domínio de segurança. Estendendo-se os limites de integração sobre todo o domínio Ω das variáveis aleatórias, tem-se então a probabilidade de falha dada por:

$$P_f = \int_{\Omega} I[\mathbf{x}] f_{[\mathbf{x}]} d\mathbf{x} = E [I[\mathbf{x}]]. \quad (22)$$

Sendo a Equação 22 o valor esperado a função indicadora $I[\mathbf{x}]$, uma estimativa da probabilidade de falha \bar{P}_f para o problema considerado pode ser calculada por meio de um estimador para $E [I[\mathbf{x}]]$. Este estimador é definido tal que:

$$\bar{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[\mathbf{x}] = \frac{N_f}{N} \quad (23)$$

sendo N_f o número de vezes em que a amostra randômica gerada corresponde a um ponto sobre o domínio de falha. Tal estimador não tendencioso aproxima um valor exato para a P_f à medida em que N aumenta (MELCHERS; BECK, 2018).

Uma vez que essa estimativa da P_f é computada a partir de uma amostra de dimensão finita, pode-se definir um estimador que analisa um erro estatístico correspondente à variância da probabilidade de falha, tal que:

$$Var[\bar{P}_f] = \frac{1}{1 - N} \sum_{i=1}^N (I[\mathbf{x}] - \bar{P}_f)^2. \quad (24)$$

Pode-se analisar, a partir da Equação 24, que à medida que $N \rightarrow \text{inf}$, a variância converge para zero.

Diante disso, sabe-se que o coeficiente de variação δ de qualquer estimador é definido como uma razão entre a raiz quadrada da variância e seu valor estimado. Para o estimador da probabilidade de falha, tem-se que:

$$\delta[\bar{P}_f] = \frac{\sqrt{Var[\bar{P}_f]}}{E[\bar{P}_f]} \approx \frac{1}{\sqrt{NP_f}}. \quad (25)$$

A partir da Equação 25, pode-se ter uma noção do tamanho da amostra, e, consequentemente, o número de simulações necessário para estimar a ordem de grandeza da probabilidade de falha que se quer alcançar. Em termos numéricos, as aplicações deste trabalho adotam $\delta = 5\%$.

Tabela 1 – Estimativa de número de simulações para captar diferentes valores de P_f , a um nível de dispersão $\delta = 5\%$

Número de Simulações N	Ordem de Grandeza P_f	β
4×10^5	1×10^{-3}	3.0902
4×10^6	1×10^{-4}	3.7190
4×10^7	1×10^{-5}	4.2648
4×10^8	1×10^{-6}	4.7534
4×10^9	1×10^{-7}	5.1993
4×10^{10}	1×10^{-8}	5.6120

Devido ao grande avanço da capacidade dos computadores, o método de Monte Carlo tem conquistado mais espaço. Sua praticidade e robustez em resolver problemas é o grande atrativo do método, além de ter uma precisão muito grande em estimar valores de P_f , já que o resultado da simulação tende ao resultado exato quando $N \rightarrow$

∞ . No entanto, ele ainda é afetado, por exemplo, por erros estatísticos referentes ao modelo e pela qualidade da geração das amostras. Como os resultados dependem da qualidade dos números randômicos utilizados, técnicas de geração de amostragem serão estudadas neste trabalho, na tentativa de reduzir a variância do estimador da P_f e diminuir o custo computacional.

4.2 Técnicas de Geração de Amostras Aleatórias

O uso do método de simulação de monte carlo necessita da geração de amostras aleatórias das v.a. em questão, de modo que essas amostras sigam alguma distribuição estatística pré-definida. Para tal, cita-se aqui neste trabalho três metodologias comumente empregadas.

4.2.1 Amostragem simples

A Amostragem Simples consiste na aplicação direta do procedimento de Monte Carlo, com o mais básico tipo de geração de números aleatórios. Pode-se fazer com que números randômicos uniformemente gerados entre zero e um sejam modificados para respeitar uma determinada distribuição de probabilidades de uma variável aleatória qualquer. A metodologia para fazer isso é conhecida como Método da Transformada Inversa. Visto que uma variável aleatória é definida a partir de sua função de densidade de probabilidade, que por sua vez é definida a partir da função cumulativa de probabilidade $F_X(x)$, pode-se então:

- Gerar um número aleatório u_i com distribuição uniforme de probabilidade, no intervalo $[0, 1]$;
- Gerar a amostra a partir da inversa da função cumulativa de probabilidade do número aleatório gerado no item anterior, tal que:

$$x_i = F_X^{-1}(x)(u_i). \quad (26)$$

4.2.2 Amostragem por variáveis antitéticas

Esta técnica tem como fundamento gerar a simulação de dois conjuntos de números aleatórios, o primeiro sendo $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ de maneira usual; o segundo sendo um conjunto complementar de U , tal que, $\bar{U} = \{1 - u_1, 1 - u_2, \dots, 1 - u_n\}$.

Em termos de confiabilidade estrutural, a técnica tem como fundamento gerar um estimador não tendencioso P_f^c , formado por outros dois estimadores também não tendenciosos P_f^a e P_f^b a partir da seguinte relação matemática:

$$P_f^c = \frac{P_f^a + P_f^b}{2}. \quad (27)$$

Este estimador tem a seguinte variância:

$$\text{Var}[P_f^c] = \frac{1}{4}(\text{Var}[P_f^a] + \text{Var}[P_f^b] + 2\text{Cov}[P_f^a, P_f^b]) \quad (28)$$

Nesse sentido, fazendo $P_f^a = f(u_i)$ e $P_f^b = f(1 - u_i)$, com $i = 1, \dots, n$, impõe-se uma correlação negativa nestes dois estimadores através do uso de variáveis antitéticas. Sendo assim, a variância do estimador P_f^c é reduzida, uma vez que o último termo da Equação 28 é menor que zero. Sendo ainda os estimadores P_f^a e P_f^b independentes, o último termo da Equação 28 se anula. De qualquer modo, a variância de P_f^c será menor do que a variância combinada dos dois estimadores que a geram, reduzindo o erro associado com a simulação.

Esta técnica pode apresentar resultados um pouco mais relevantes quando utilizada em conjunto com outras técnicas (BECK, 2019).

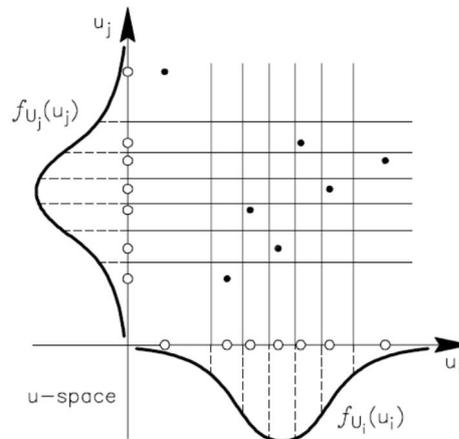
Propõe-se então o seguinte algoritmo para a geração das amostras por variáveis antitéticas:

1. Gerar um conjunto aleatório uniforme $U = \{u_i\}$, tal que $u_i \in [0, 1]$;
2. Em seguinte, gerar um conjunto aleatório $\bar{U} = \{1 - u_i\}$, também com $u_i \in [0, 1]$;
3. Gerar as variáveis aleatórias do problema, tal que $x_i^a = F_X^{-1}(u_i)$ para computar o valor de P_f^a e $x_i^b = F_X^{-1}(1 - u_i)$ para computar o valor de P_f^b
4. Estimar o valor de P_f^c , através da Equação 27

4.2.3 Amostragem por hipercubo latino

Nesta técnica o domínio de cada variável aleatória é dividido em faixas (MCKAY; BECKMAN; CONOVER, 1979) e (OLSSON; SANDBERG; DAHLBLOM, 2003). Na simulação cada faixa deve ser amostrada uma única vez de modo que seja garantida uma cobertura homogênea do domínio das variáveis aleatórias, já que esse tipo de amostragem resulta numa dispersão mais esparsa dos pontos (Figura 6).

Figura 6 – Amostragem por Hiper cubo Latino



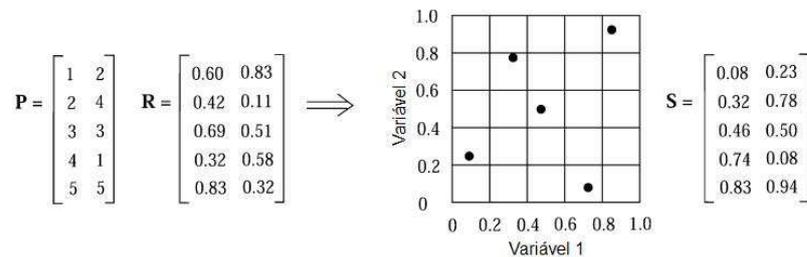
Fonte: (HURTADO; BARBAT, 1998)

Desse modo, seja n_{va} o número de variáveis aleatórias do problema e n o número de amostragens. O espaço de amostragem torna-se n_{va} -dimensional. Uma matriz \mathbf{P} , de dimensões $(n \times n_{va})$, é gerada, em que cada uma das n_{va} colunas é uma permutação aleatória de $1, \dots, n$. Outra matriz \mathbf{R} é gerada (dimensões $n \times n_{va}$), cujos componentes são números aleatoriamente distribuídos entre $(0, 1)$. A partir dessas matrizes, obtém-se a matriz \mathbf{S} (OLSSON; SANDBERG; DAHLBLOM, 2003):

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n}(\mathbf{P} - \mathbf{R}) \quad (29)$$

Exemplificando, considere as dimensões $(n \times n_{va}) = (5 \times 2)$ na Figura 7, tal que:

Figura 7 – Hiper cubo Latino para duas variáveis e cinco realizações



Fonte: (OLSSON; SANDBERG; DAHLBLOM, 2003)

Assim, as amostras são geradas a partir de \mathbf{S} , tal que:

$$x_{ij} = F_{X_j}^{-1}(s_{ij}) \quad (30)$$

onde $F_{X_j}^{-1}$ é a inversa da função de distribuição acumulada de probabilidade da variável X_j .

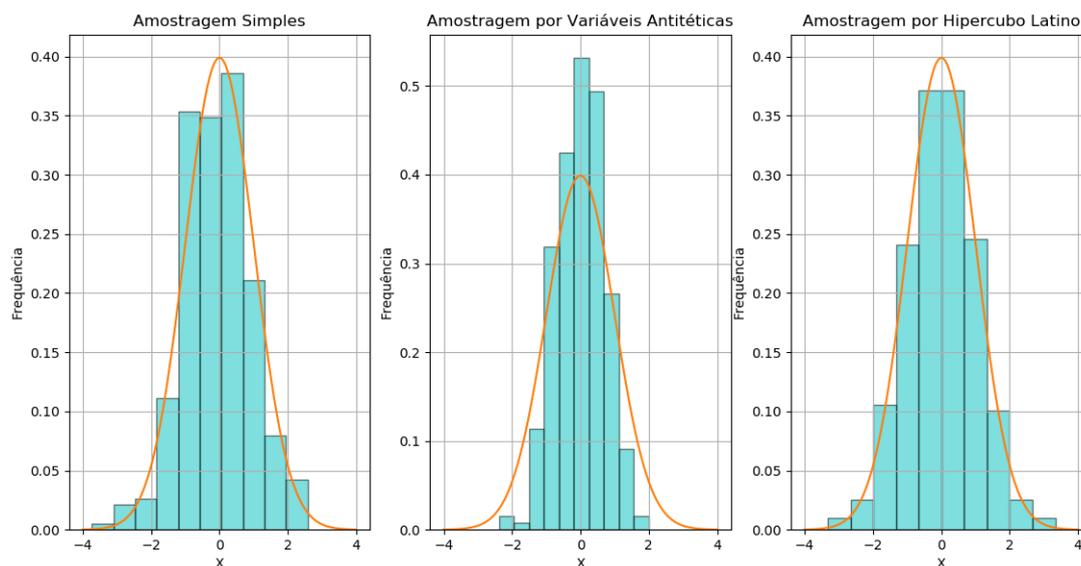
A geração das matrizes **S**, **P** e **R**, pode ser proibitiva quando se deseja uma amostra de tamanho N muito grande, uma vez que isso pode levar a um consumo excessivo de memória do computador.

O algoritmo proposto para essa técnica segue os passos explicitados por Santos (2014). Tal que:

1. Iniciar o *loop* para a variável aleatória j ;
2. Gerar um vetor, que é a primeira coluna da matriz **P**;
3. Iniciar o *loop* para o número de simulações i ;
4. Gerar um número aleatório entre 0 e 1, sem ser necessário gerar uma matriz **R** ou qualquer tipo de *Array*;
5. Calcular um escalar s , sem a necessidade de se criar uma matriz **S** e aplica-o na Equação 30 para calcular os elementos x_{ij} ;
6. Retornar ao passo 4 até $i = N$;
7. Retornar ao passo 2 até $j = n_{va}$

Desta forma, o histograma de frequência das realizações de cada variável aleatória adquire uma forma mais suave. Tal comportamento pode ser observado na Figura 8, onde se destacam os histogramas para a Amostragem Simples, para a Amostragem por Variáveis Antitéticas e para a Amostragem por Hipercubo Latino para uma variável aleatória normal com média 0 e desvio padrão de 1, em que todas as amostras geradas possuem o mesmo tamanho $N = 3 * 10^3$.

Figura 8 – Histogramas de densidade obtidos por Amostragem Simples, Amostragem por Variáveis Antitéticas e Amostragem por Hipercubo Latino



Fonte: Autor (2022)

4.3 Técnicas de Amostragem Inteligente

Apesar da grande capacidade das técnicas de simulação Monte Carlo de solucionar problemas complexos, grandes e não lineares, nos casos em que há a presença de uma pequena probabilidade de falha, estas técnicas exigem um elevado custo computacional. Neste contexto, é de suma importância reduzir esse peso de processamento por meio de técnicas de amostragem inteligente, implicando numa menor quantidade de número de simulações necessárias à resolução de problemas estruturais.

Essas técnicas inteligentes atuam no momento da geração da amostra ou após ela, de modo que ela funciona como uma modificação no casos já conhecidos de geração de amostras aleatórias. Tais metodologias são aplicadas em conjunto com alguma técnica de geração de amostras citadas na seção anterior. Este trabalho dará foco em duas técnicas de amostragem inteligente: amostragem assintótica e amostragem melhorada.

4.3.1 Amostragem assintótica

A técnica introduzida por Bucher (2009) para estimar baixas probabilidades de falha chama-se Amostragem Assintótica. Ela se baseia no comportamento assintótico da probabilidade de falha, à medida que os desvios-padrão das variáveis aleatórias e, conseqüentemente, a probabilidade de falha, tendem a zero.

A ideia da técnica é causar uma excitação na análise da função de falha, forçando o método Monte Carlo a ultrapassar a barreira do domínio de segurança.

Em sua formulação, introduz-se inicialmente um fator f que é inversamente proporcional ao desvio-padrão σ das v.a. do problema:

$$f = \frac{1}{\sigma} \quad (31)$$

Em seguida, sabe-se que o índice de confiabilidade β torna-se linearmente proporcional ao fator f , à medida que aumenta a dispersão do vetor \mathbf{X} e o próprio índice de confiabilidade β (BUCHER, 2009). Logo, aproxima-se a relação funcional entre β e f a partir da Equação 32 (BUCHER, 2009).

$$\beta = Af + \frac{B}{f} \quad (32)$$

em que A e B são constantes a serem determinadas, por meio de uma técnica convencional de ajuste (mínimos quadrados, por exemplo), utilizando pontos de suporte (f, β) . Com isso, à medida que $f \rightarrow \infty$, garante-se o comportamento assintótico.

Para o processo de ajuste, a Equação 32 é reescrita em termos da razão do índice de confiabilidade β e do fator f (BUCHER, 2009) como:

$$\frac{\beta}{f} = A + \frac{B}{f^2}. \quad (33)$$

capaz de atribuir pesos iguais a todos os pontos de suporte (BUCHER, 2009).

Finalmente, após encontrar os valores dos coeficientes da regressão A e B , o índice de confiabilidade para o problema original é estimado tomando $f = 1$, de modo que $\beta = A + B$.

Propõem-se então o seguinte algoritmo para a geração das amostras por variáveis antitéticas:

1. Escolher um valor inicial $f \in [0, 1]$;
2. Performar uma simulação Monte Carlo, utilizando a seguinte transformação para os desvios-padrão utilizados em estudo $\sigma_{sim} = \frac{\sigma}{f}$;
3. Computar P_f e β e armazene os valores de f e β .
4. Quando houver m pares (f, β) suficientes, performar uma análise de regressão (mínimos quadrados) e extrapolar o valor do índice de confiabilidade como $\beta = A + B$. Enquanto não houver pares suficientes, diminuir o valor de f e voltar ao passo 2.

4.3.2 Amostragem melhorada

Proposta por Naess, Leira e Batsevych (2009), esta técnica visa reduzir o custo computacional da simulação Monte Carlo mantendo suas principais vantagens, a par-

tir da exploração da regularidade das probabilidades de falha nas caudas das distribuições de probabilidade, de modo que seja possível usar um procedimento de aproximação para estimar probabilidades de falhas pequenas.

A formulação da técnica toma a função de estado limite original $M = g(X)$ para criar uma classe de funções parametrizadas, definidas pelo parâmetro λ , da seguinte forma:

$$M(\lambda) = M - \mu_M(1 - \lambda) \quad (34)$$

em que o parâmetro λ satisfaz $0 \leq \lambda \leq 1$ e μ_M é a média da função margem de segurança.

Neste trabalho, acha-se μ_M por meio da aproximação de primeira ordem dos momentos de funções de muitas variáveis aleatórias. Seja $Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$, tem-se que:

$$E[Y] \approx g(\mu_{X_1}, \mu_{X_2}, \dots, \mu_{X_n}). \quad (35)$$

Logo, assume-se que a seguinte relação sobre a probabilidade de falha:

$$p_f(\lambda) \approx q(\lambda) \exp\{-a(\lambda - b)^c\} \text{ com } \lambda \rightarrow 1 \quad (36)$$

em que a função $q(\lambda)$ varia pouco em comparação com $\exp\{-a(\lambda - b)^c\}$ (NAESS; LEIRA; BATSEVYCH, 2009). Por causa disso, pode-se estimar um intervalo $\lambda_o \leq \lambda \leq 1$, de modo que a função $q(\lambda)$ seja constante, tal que:

$$p_f(\lambda) \approx q \times \exp\{-a(\lambda - b)^c\} \text{ com } \lambda_o \leq \lambda \leq 1. \quad (37)$$

Nesse sentido, de posse das duplas $[\lambda, p_f(\lambda)]$, pode-se utilizar de algum método de regressão não linear para estimar os parâmetros (q, a, b, c) . Assim, o valor da probabilidade de falha do problema é estimado para $\lambda = 1$, de modo que $p_f = p_f(1)$.

De acordo com Naess, Leira e Batsevych (2009), o problema de ajuste de curva é resolvido a partir de uma otimização no nível logarítmico, minimizando o erro médio quadrático,

$$F(q, a, b, c,) = \sum_{j=1}^M w_j (\log \bar{p}_f(\lambda_j) - \log q + a(\lambda_j - b)^c)^2 \quad (38)$$

Propõe-se então o seguinte algoritmo para a geração das amostras por amostragem melhorada:

1. Escolher um valor inicial para λ_o e $\lambda \in [\lambda_o, 1]$;
2. Performar uma simulação Monte Carlo, utilizando a seguinte transformação para

a função de estado limite em estudo $M(\lambda) = M - \mu_M(1 - \lambda)$;

3. Computar P_f e armazene o valor de λ e P_f ;
4. Diminuir o valor de λ e volte ao passo 2;
5. Quando houver pares $[\lambda, p_f(\lambda)]$ suficientes, performar uma análise de regressão (mínimos quadrados) e extrapolar o valor da probabilidade de falha como $p_f = p_f(1)$.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são estudados exemplos com a aplicação das técnicas de amostragem inteligente em problemas de confiabilidade estrutural. Em todos os exemplos foi utilizado um computador com processador Intel®Core™i7-7500U CPU 2.90 GHz 64 bits com 16 GB de memória RAM e as análises foram feitas utilizando a linguagem de programação *Python*.

O estudo consiste na análise comparativa entre as técnicas de amostragem inteligente, combinadas com as técnicas de geração de amostras aleatórias, de modo a verificar a eficácia de cada estratégia em relação à convergência da probabilidade de falha (P_f) de acordo com o aumento da amostra (N).

As técnicas básicas de geração de amostras aleatórias são combinadas com a Simulação de Monte Carlo Bruto (MCS no formato usual, sem nenhuma variação no desvio padrão das v.a. ou variação na função de falha), com a Amostragem Assintótica e com a Amostragem Melhorada. Sendo assim, todas as combinações são listadas na Tabela 2.

Tabela 2 – Combinações Realizadas de Análise

Amostragem Simples	por Variáveis Antitéticas	por Hipercubo Latino
MCS Bruto	MCS Bruto	MCS Bruto
Amostragem Assintótica	Amostragem Assintótica	Amostragem Assintótica
Amostragem Melhorada	Amostragem Melhorada	Amostragem Melhorada

Essas combinações serão usadas em problemas escolhidos de forma estratégica, que representam estados limites complexos que podem ocorrer na prática de engenharia. Tais complexidades são abordadas de modo a mostrar a limitação do FORM em resolver o problema de confiabilidade para tais funções de falha, exaltando a viabilidade das técnicas de simulação.

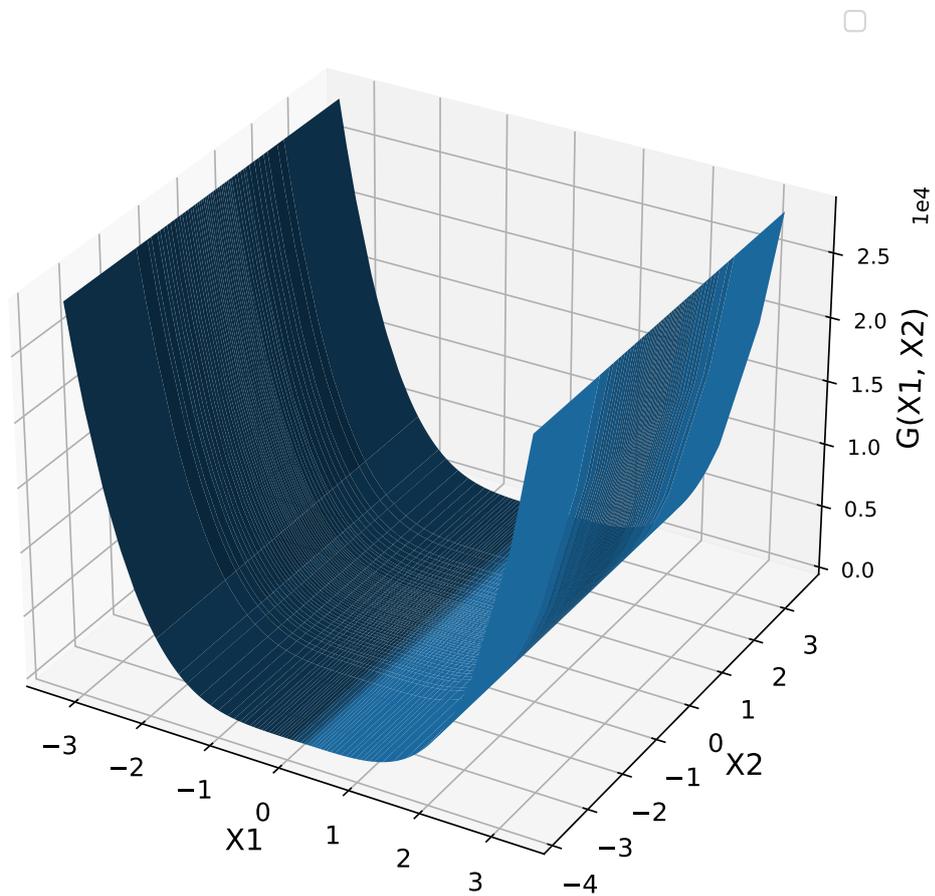
5.1 Exemplo 1 - Equação de Estado Limite Altamente Não linear

A função de falha estudada nesse exemplo possui a característica de possuir um limite de falha fortemente côncavo, que faz com que ela seja um problema para o método FORM. Tal função de falha é retirada do trabalho de Au e Beck (1999) e é exposta a seguir.

$$g(X_1, X_2) = 3 - X_2 + (4X_1)^4 \quad (39)$$

O comportamento desta função pode ser observado na Figura 9.

Figura 9 – Função de Falha - Exemplo 1



Fonte: Autor (2022)

As distribuições e propriedades das variáveis aleatórias utilizadas neste exemplo podem ser vistas na Tabela 3.

Tabela 3 – Propriedades das Variáveis Aleatórias - Exemplo 1

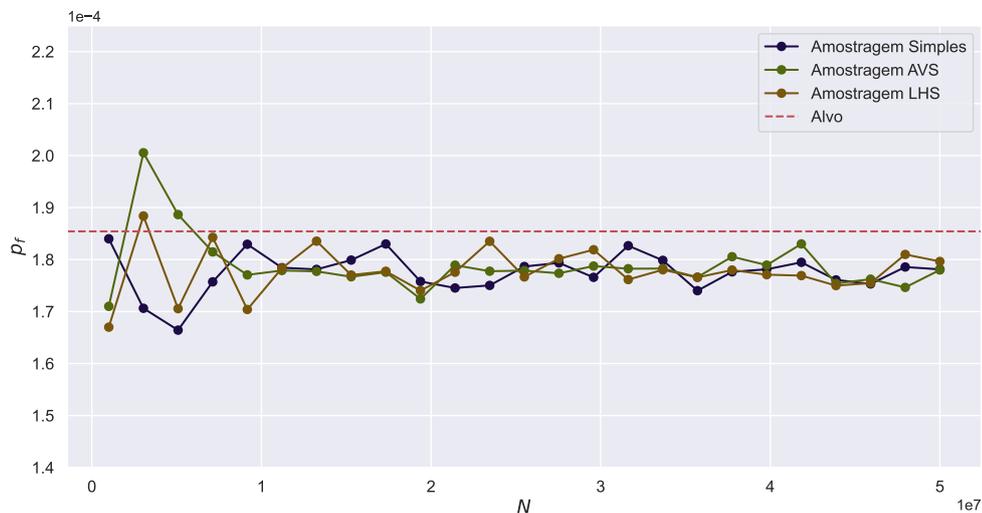
Variável Aleatória	Distribuição	Média	Desvio Padrão
X_1	Normal	0,00	1,00
X_2	Normal	0,00	1,00

O valor de referência para a probabilidade de falha desse problema foi obtida por meio de uma Simulação de Monte Carlo usando $N = 5 * 10^7$ simulações. Tal valor é de $1.80 * 10^{-4}$ (coeficiente de variação igual a 0.01), com um índice de confiabilidade igual a $\beta = 3.56$. Essa simulação demorou 20 segundos e a título de comparação, o FORM foi utilizado para resolver o problema de confiabilidade e ter sua eficácia comparada com a solução pelo MCS. O valor calculado da P_f utilizando o FORM foi de $1.35 * 10^{-3}$ ($\beta = 3.00$), o que mostra que a não linearidade da função impede o FORM de apresentar uma boa estimativa para a probabilidade de falha do problema. Os valores de comparação da resposta do estudo de confiabilidade via FORM e Monte Carlo podem ser vistas na Tabela 4 e o estudo de convergência usando a técnica de Monte Carlo Bruto combinada com os três métodos de geração de amostras aleatórias pode ser visto na Figura 10.

Tabela 4 – Comparação Monte Carlo Cru e FORM - Exemplo 1

Parâmetro	Monte Carlo	FORM
P_f	$1.80 * 10^{-4}$	$1.35 * 10^{-3}$
β	3.56	3.00
N	$5 * 10^7$	2

Figura 10 – Convergência do Monte Carlo Cru - Exemplo 1

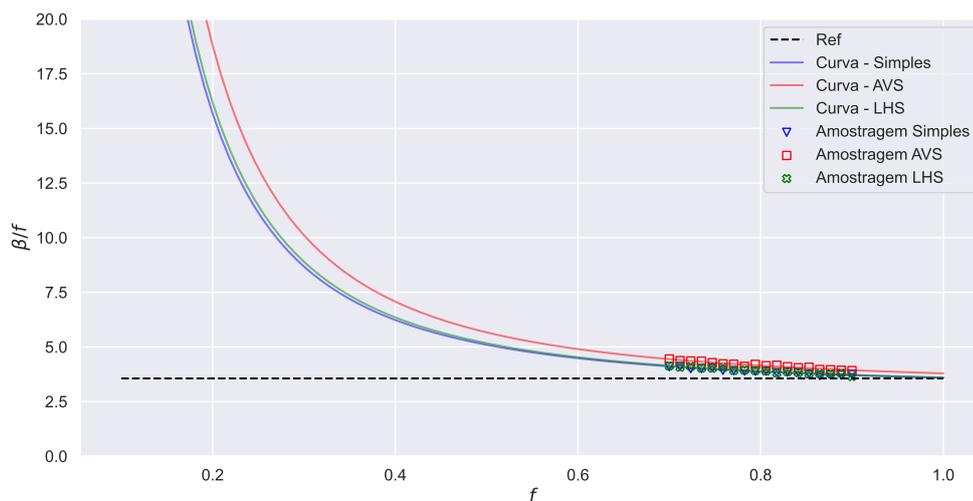


Fonte: Autor (2022)

A partir da análise de convergência do MCS Bruto, observa-se que todas as técnicas de geração de amostras conseguiu ter uma boa performance na estimativa da P_f alvo, de modo que a Amostragem por Hipercubo Latino apresentou um início de convergência na casa de $N = 0.5 * 10^7$ simulações, seguida pela Amostragem por Variáveis Antitéticas aproximadamente no mesmo valor de N . Já a Amostragem Simples começou a convergir um pouco após, a partir de $N = 1 * 10^7$, o que já é esperado dessa técnica (convergir após seus pares).

Realizou-se, então, um estudo da aplicação da técnica de Amostragem Assintótica, utilizando 18 pontos de suporte, com o parâmetro f variando de 0.7 a 0.9 e N variando de $1 * 10^3$ até $1.5 * 10^6$ simulações. Tais valores foram escolhidos por apresentarem um bom resultado na qualidade do ajuste da técnica, de modo que não será explorada neste trabalho uma análise paramétrica entre os limites adotados para o parâmetro f . O gráfico que mostra os pontos de suporte e a variação de f pode ser visto na Figura 11.

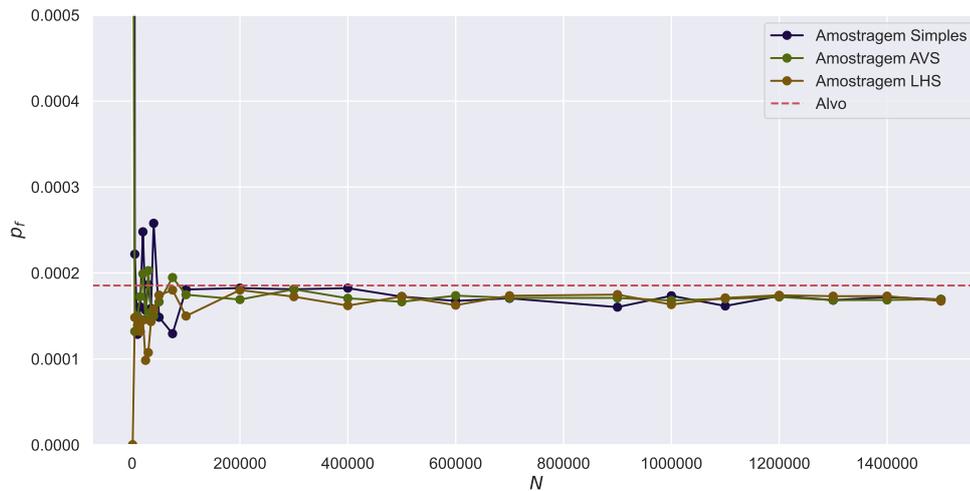
Figura 11 – Análise do parâmetro f - Exemplo 1



Fonte: Autor (2022)

Sendo assim, fez-se uma análise de convergência do problema, variando o tamanho da amostra a ser usada no Monte Carlo e fixando o intervalo de f nos valores escolhidos acima, de forma que o resultado dessa análise pode ser vista na Figura 12.

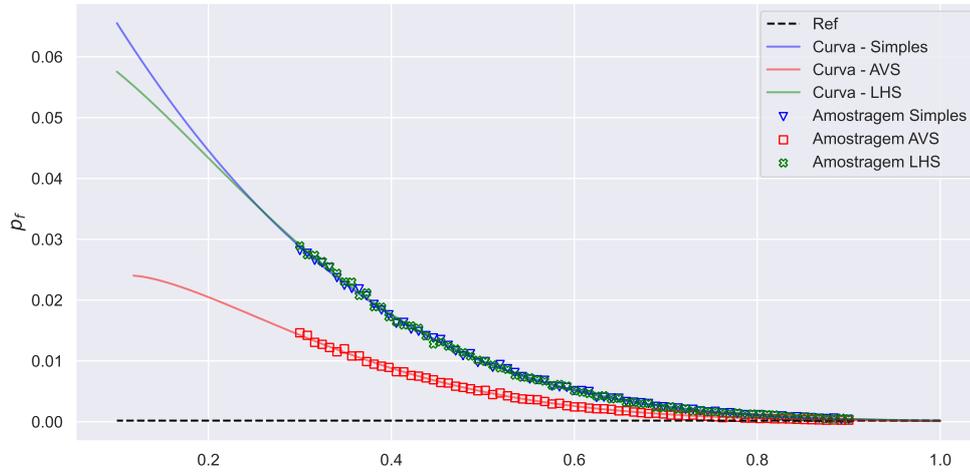
Figura 12 – Convergência da Amostragem Assintótica - Exemplo 1



Fonte: Autor (2022)

Pode-se perceber que há uma grande variação nos valores estimados da P_f para baixos valores de N , de modo que o gráfico começa a convergir de forma mais comportada a partir de $5 * 10^5$ simulações. Observa-se que a Amostragem Simples tende a convergir um pouco depois que as técnicas LHS e AVS, e todas as três técnicas conseguem chegar em um valor próximo do valor esperado. Destaca-se que entre AVS e LHS, a primeira tende a se aproximar mais da linha de referência em menores valores de N , o que indica, neste exemplo, que a técnica AVS foi a melhor geradora de amostras em combinação com a Amostragem Assintótica.

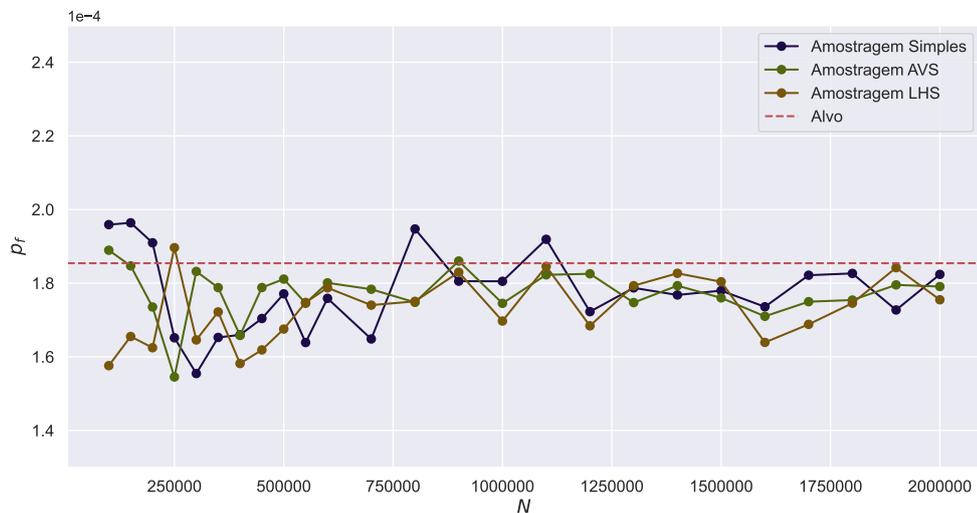
Já para a Amostragem Melhorada, foram utilizados 75 pontos de suporte, de modo que o parâmetro λ variou de 0.3 a 0.9 e o número de simulações N foi também de $1 * 10^3$ até $2 * 10^6$ simulações. Assim como na Amostragem Assintótica, estes valores foram escolhidos devido à boa resposta da qualidade do ajuste. A análise da escolha do intervalo do parâmetro λ e a regressão realizada pode ser vista na Figura 13.

Figura 13 – Análise do parâmetro λ - Exemplo 1

Fonte: Autor (2022)

Pode-se observar a análise de convergência da Amostragem Melhorada na Figura 14, em que N assume valores entre $1 * 10^3$ e $2 * 10^6$ e λ se mantém fixo no intervalo $[0.3, 0.9]$.

Figura 14 – Convergência da Amostragem Melhorada - Exemplo 1

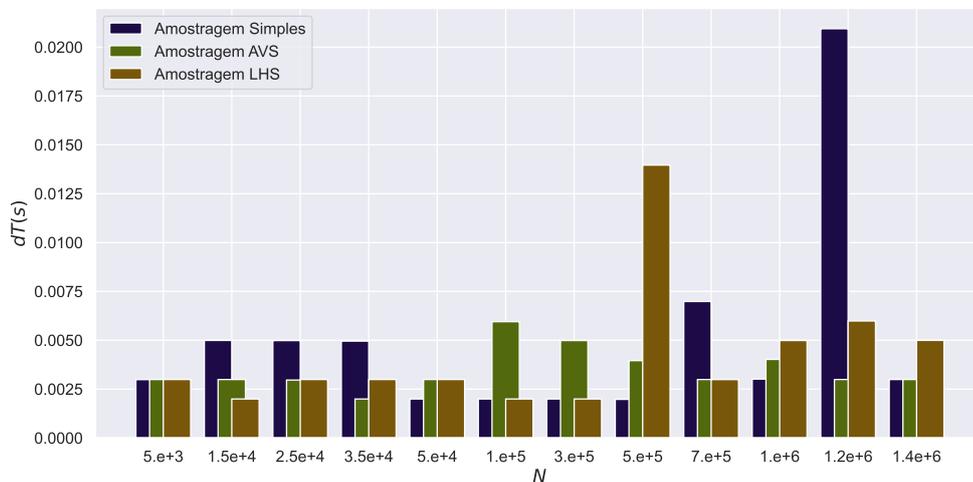


Fonte: Autor (2022)

Pode-se perceber, nesta aplicação, que os valores de N não foram suficientes para fornecer uma boa convergência usando a Amostragem Melhorada. Todos os valores estimados estão próximos da mesma ordem de grandeza da P_f alvo, porém ainda há muita dispersão entre os pontos, de modo que nenhuma técnica conseguiu convergir na estimativa da P_f . Espera-se que usando valores de N mais altos a estimativa pode melhorar e começar a convergir para um valor esperado.

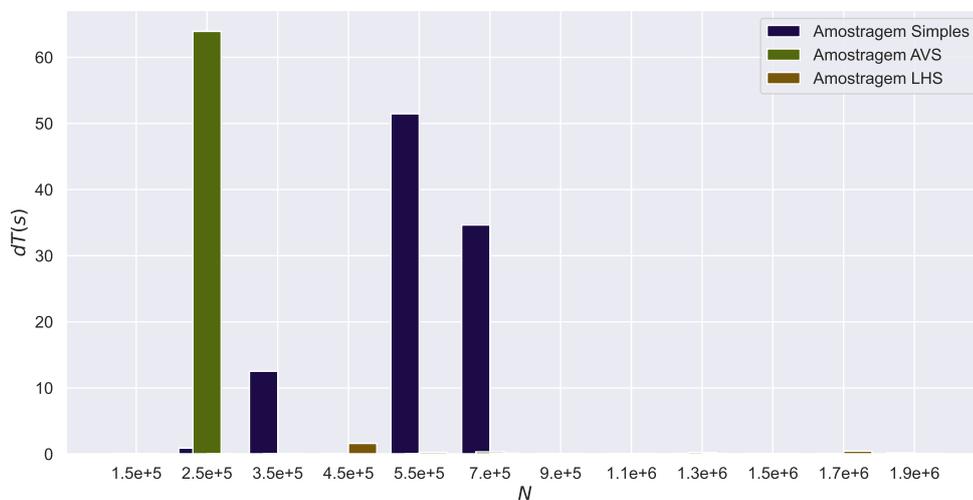
Sendo assim, as técnicas LHS e a AVS mostraram bons resultados quando combinadas com Monte Carlo Bruto e Amostragem Assintótica, seguida pela Amostragem Simples, que também apresentou resultados satisfatórios na estimativa da P_f , estando apenas um pouco atrás de seus pares. A principal vantagem no uso da Amostragem Assintótica foi no alcance de convergência em um número menor que Monte Carlo Bruto, usando apenas 500 mil simulações. Já a Amostragem Melhorada não apresentou convergência para o intervalo estudado, sendo necessário aumentar os valores de N para verificar a convergência. O tempo computacional gasto em ambas as técnicas de amostragem inteligente, para alguns valores de N , pode ser visto na Figura 15 e na Figura 16.

Figura 15 – Tempo Computacional na Amostragem Assintótica - Exemplo 1



Fonte: Autor (2022)

Figura 16 – Tempo Computacional na Amostragem Melhorada - Exemplo 1



Fonte: Autor (2022)

Observa-se que o baixo custo computacional é um destaque muito positivo. O uso de vetorização na solução computacional é de extrema importância para garantir um menor tempo gasto. É imprescindível otimizar o código, feito na linguagem *Python*, para garantir cada vez mais uma melhor performance computacional em problemas de simulação. A Amostragem Assintótica apresentou como maior tempo computacional algo próximo de 0.02 segundo, oferecendo uma resposta praticamente instantânea ao problema de confiabilidade. Já a Amostragem Melhorada apresentou um maior custo, uma vez que o ajuste não linear feito para estimar as constantes da Equação 36 é grande, a função é complexa e necessita de mais pontos de suporte para achar um bom ajuste. Sendo assim, o grau de complexidade e a maior quantidade de pontos requeridas são dois fatores que explicam o maior custo computacional da AM.

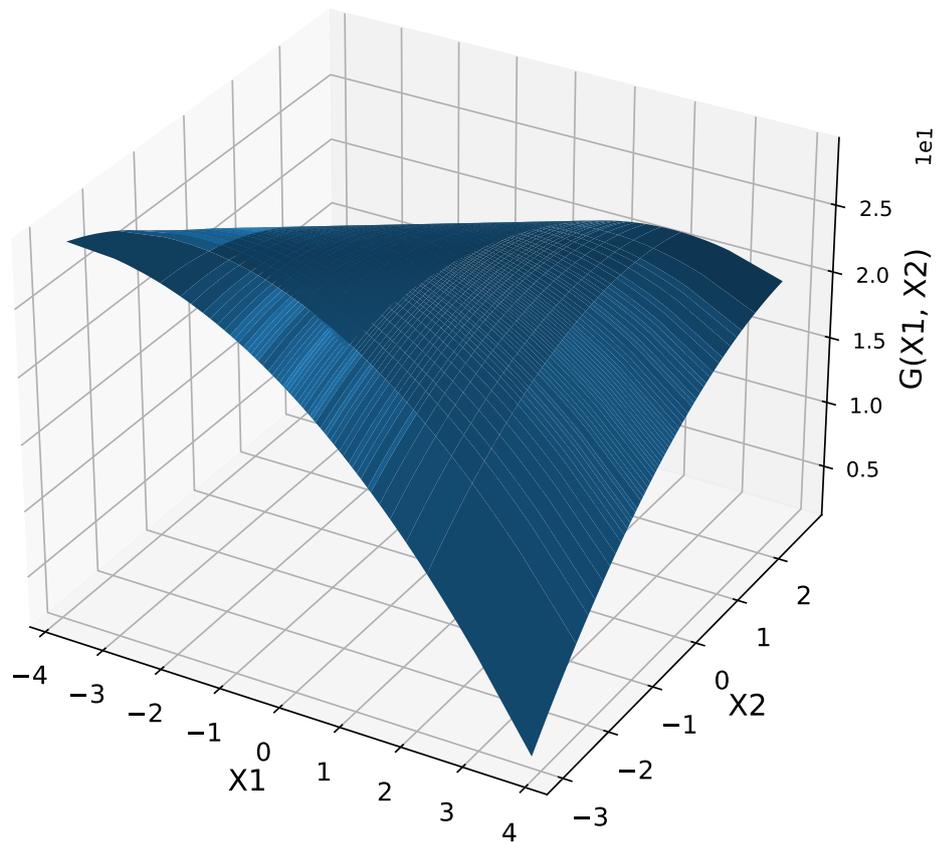
5.2 Exemplo 2 - Equação de Estado Limite Côncava

A função de falha estudada nesse exemplo também possui um comportamento côncavo e espera-se que o FORM, assim como no exemplo anterior, possua problemas para resolver o problema de confiabilidade desse estado limite (GROOTEMAN, 2011). Essa função de falha é adaptada do trabalho de Borri e Speranzini (1997), de modo que a alteração na função de falha serve para diminuir mais a P_f .

$$g(X_1, X_2) = -0.5 * (x_1 - x_2)^2 - \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}} + 25 \quad (40)$$

A não linearidade desta função pode ser observada na Figura 17.

Figura 17 – Função de Falha - Exemplo 2



Fonte: Autor (2022)

As distribuições e propriedades das variáveis aleatórias utilizadas neste exemplo podem ser vistas na Tabela 5.

Tabela 5 – Propriedades das Variáveis Aleatórias - Exemplo 2

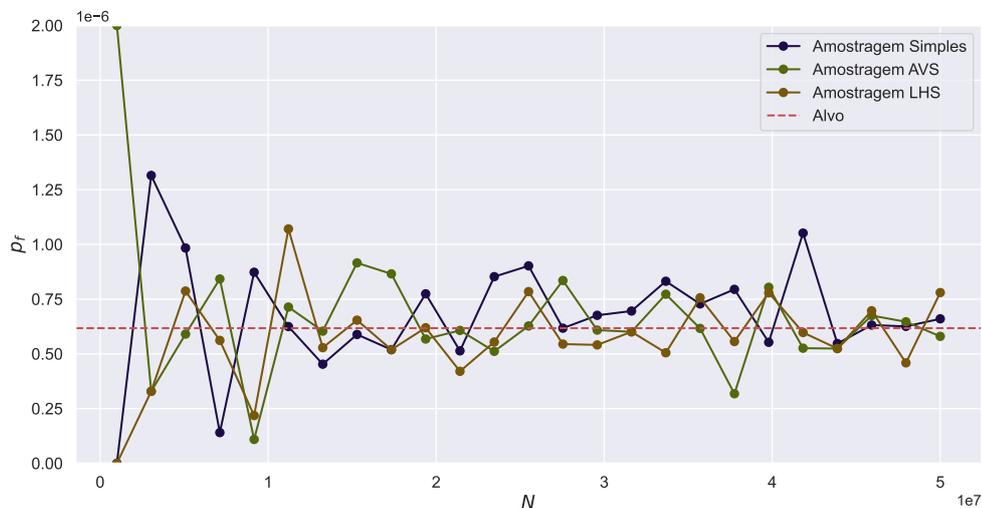
Variável Aleatória	Distribuição	Média	Desvio Padrão
X_1	Normal	0,00	1,00
X_2	Normal	0,00	1,00

O valor de referência para a probabilidade de falha desse problema foi obtido por meio de uma Simulação de Monte Carlo usando $N = 1 * 10^8$ simulações. Tal valor é de $6.30 * 10^{-7}$ (coeficiente de variação igual a 0.12), com um índice de confiabilidade igual a $\beta = 4.85$. Essa simulação demorou 9.28 segundos e para título de comparação, o FORM foi utilizado para resolver o problema de confiabilidade e ter sua eficácia comparada com a solução pelo MCS. O valor calculado da P_f utilizando o FORM foi de $3.06 * 10^{-138}$ ($\beta = 25.00$), um resultado absurdamente diferente do esperado, a pronunciada concavidade desta função de falha impede o FORM de resolver bem o problema. Os valores de comparação da resposta do estudo de confiabilidade via FORM e Monte Carlo podem ser vistas na Tabela 6 e o estudo de convergência usando a técnica de Monte Carlo Bruto combinada com os três métodos de geração de amostras aleatórias pode ser visto na Figura 18.

Tabela 6 – Comparação Monte Carlo Cru e FORM - Exemplo 2

Parâmetro	Monte Carlo	FORM
P_f	$6.30 * 10^{-7}$	$3.06 * 10^{-138}$
β	4.85	25.00
N	$1 * 10^8$	2

Figura 18 – Convergência do Monte Carlo Cru - Exemplo 2

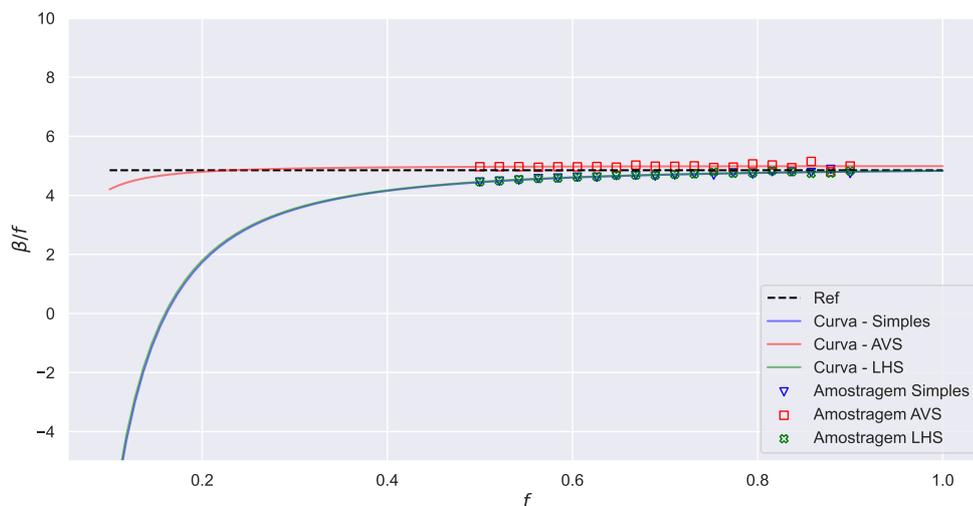


Fonte: Autor (2022)

A partir da análise de convergência do MCS Bruto, observa-se que apenas a LHS aparenta demonstrar um início de convergência a partir de $N = 2 * 10^7$ simulações, as outras duas técnicas apresentam muitas oscilações durante maior parte do intervalo observado, com uma possível convergência apenas a partir de $N = 4 * 10^7$ para AVS e Amostragem Simples. Uma razão para essa maior dificuldade, quando comparada à convergência do Exemplo 1, é o fato da P_f ter um valor muito baixo, na ordem de 10^{-7} . Para estimar com precisão uma probabilidade de falha dessa ordem, seriam necessárias $4 * 10^9$ simulações usando o Monte Carlo Bruto (ver Tabela 1).

Realizou-se, então, um estudo da aplicação da técnica de Amostragem Assintótica, utilizando 20 pontos de suporte, com o parâmetro f variando de 0.5 a 0.9 e N variando de $1 * 10^6$ até $1.5 * 10^6$ simulações. Tais valores foram escolhidos por apresentarem um bom resultado na qualidade do ajuste da técnica, de modo que não será explorada neste trabalho uma análise paramétrica entre os limites adotados para o parâmetro f . O gráfico que mostra os pontos de suporte e a variação de f pode ser visto na Figura 19.

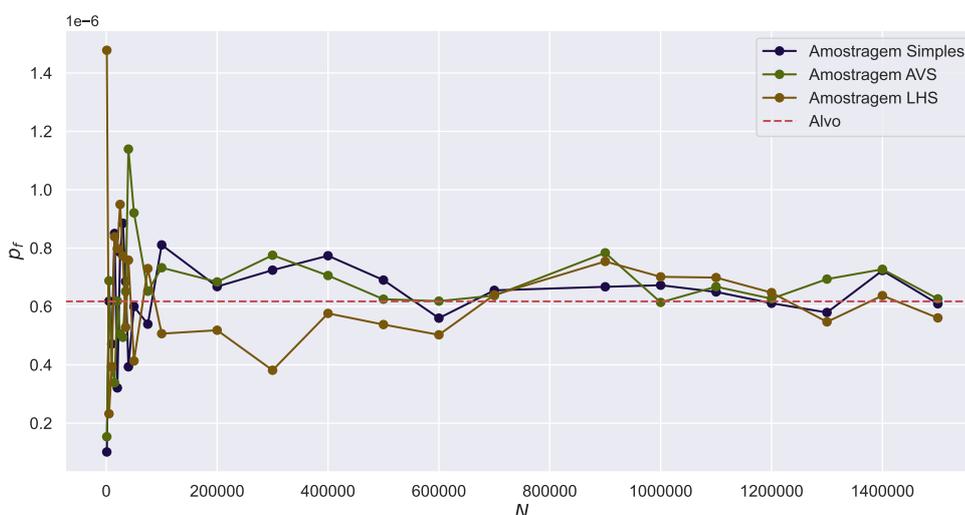
Figura 19 – Análise do parâmetro f - Exemplo 2



Fonte: Autor (2022)

Sendo assim, fez-se uma análise de convergência do problema, variando o tamanho da amostra a ser usada no Monte Carlo e fixando o intervalo de f nos valores escolhidos acima, de forma que o resultado dessa análise pode ser visto na Figura 20, em que N assume valores entre $1 * 10^6$ e $1.5 * 10^6$.

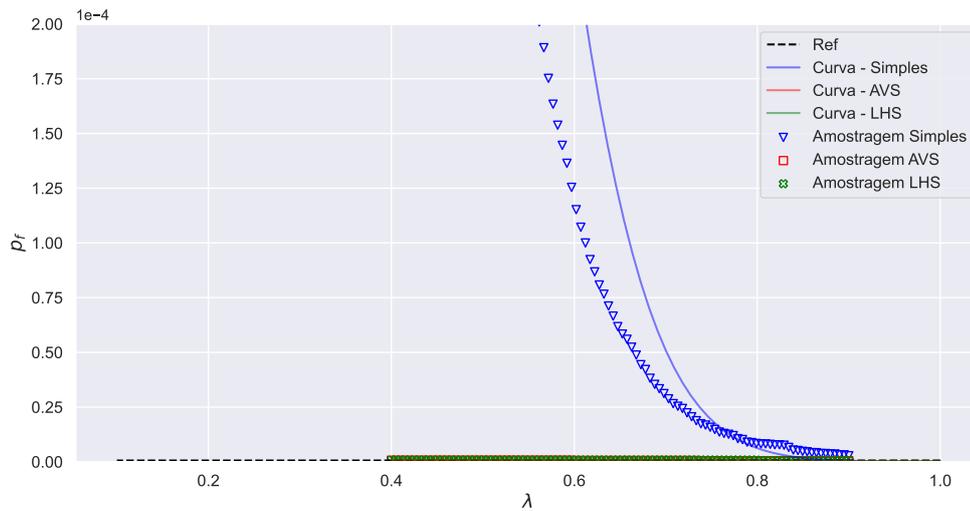
Figura 20 – Convergência da Amostragem Assintótica - Exemplo 2



Fonte: Autor (2022)

Novamente pode-se perceber a grande variação usando baixos valores de N , mas que a partir de 8×10^5 simulações todas as técnicas aparentam começar a convergir. A Amostragem simples começa a ficar mais próxima do valor alvo a partir de 9×10^5 , além de ser a técnica que menos apresenta oscilações significativas a partir desse número de simulações. Em seguida, a técnica LHS também tem uma boa tendência de chegar próximo do valor de referência, sendo a AVS talvez a técnica que mais oscile próximo do final do intervalo de N estudado, mas sem prejudicar o valor da estimativa (uma vez que a ordem de grandeza dos valores representados no gráfico é de 10^{-6}). De maneira geral, a Amostragem Assintótica teve uma performance melhor que o Monte Carlo Bruto, visto que apresenta convergência usando as três técnicas de geração de amostras com um número menor de simulações.

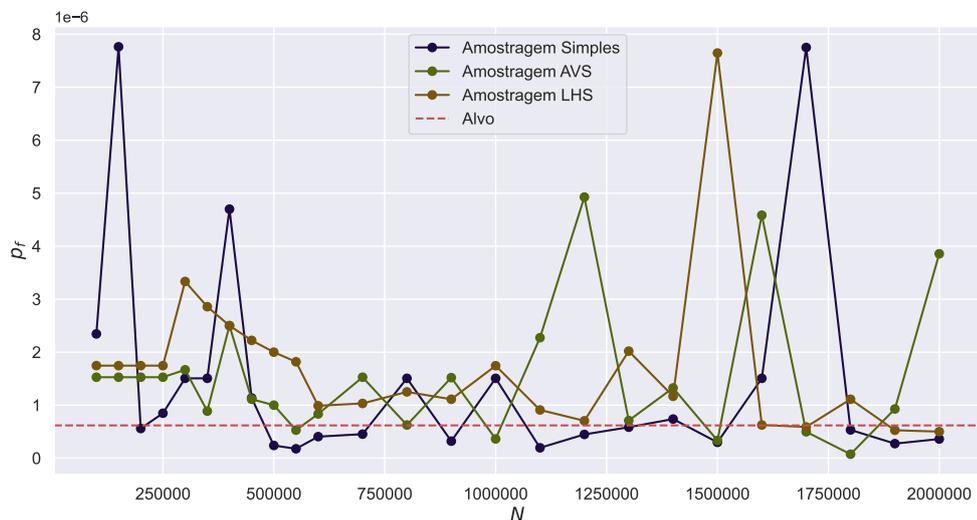
Já para a Amostragem Melhorada, foram utilizados 50 pontos de suporte, de modo que o parâmetro λ variou de 0.4 a 0.7 e o número de simulações N foi de 1×10^5 até 2×10^6 simulações. Assim como na Amostragem Assintótica, estes valores foram escolhidos devido à boa resposta da qualidade do ajuste. A análise da escolha do intervalo do parâmetro λ e a regressão realizada podem ser vistas na Figura 21.

Figura 21 – Análise do parâmetro λ - Exemplo 2

Fonte: Autor (2022)

Pode-se observar a análise de convergência da Amostragem Melhorada na Figura 22, em que N assume valores entre $1 * 10^5$ e $2 * 10^6$ e λ se mantém fixo no intervalo $[0.4, 0.7]$.

Figura 22 – Convergência da Amostragem Melhorada - Exemplo 2



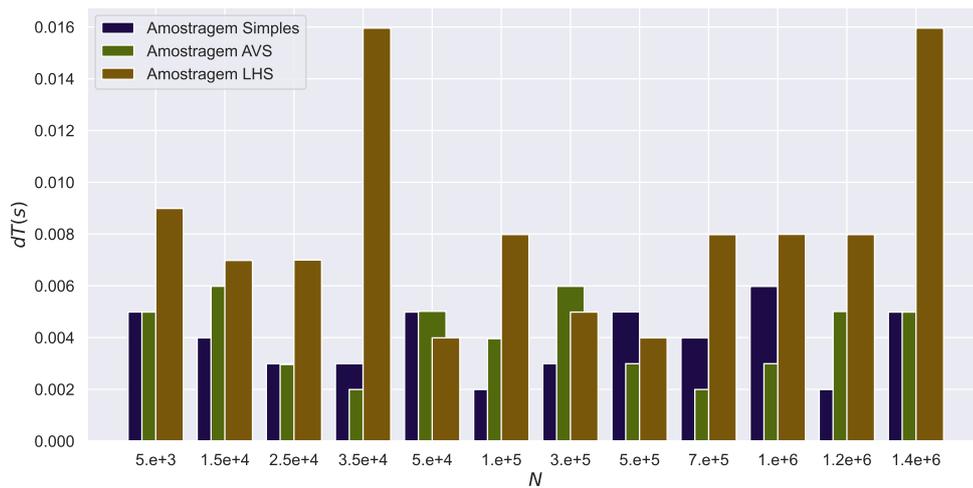
Fonte: Autor (2022)

Observando os resultados da Amostragem Melhorada, pode-se perceber que a Amostragem Simples apresentou as maiores oscilações na estimativa da P_f alvo, principalmente por apresentar mais picos ao longo do intervalo, de grande intensidade e significativa. as técnicas LHS e AVS também não apresentaram uma boa convergência, por mais que muitos pontos estejam próximos da linha de referência, ambas apresentam em valores específicos de N picos muito significativos, indo de valores próximos

de $1 * 10^{-6}$ até $8 * 10^{-6}$ em valores altos de N . Sendo assim, a Amostragem Melhorada não se apresentou como boa estimadora da P_f .

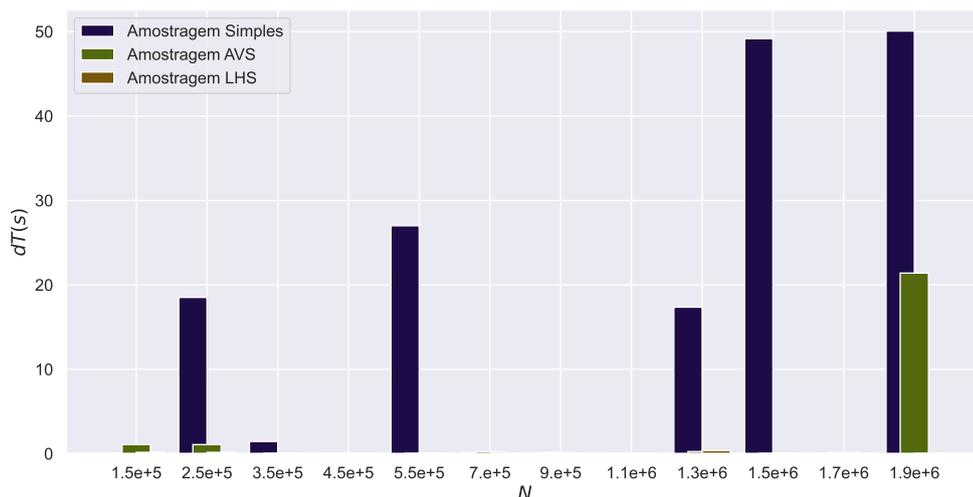
De modo geral, a técnica de Amostragem Simples se mostrou boa quando combinadas com MC Bruto e AS, seguida pelas combinações LHS e AVS com MC Bruto e AS. O tempo computacional gasto em ambas as técnicas de amostragem inteligente, para alguns valores de N , pode ser visto na Figura 23 e na Figura 24.

Figura 23 – Tempo Computacional na Amostragem Assintótica - Exemplo 2



Fonte: Autor (2022)

Figura 24 – Tempo Computacional na Amostragem Melhorada - Exemplo 2



Fonte: Autor (2022)

Observa-se que o baixo custo computacional é um destaque muito positivo. A Amostragem Assintótica apresentou como maior tempo computacional algo próximo de 0.016 segundo, oferecendo uma resposta praticamente instantânea ao problema de

confiabilidade. Já a Amostragem Melhorada apresentou custo mais alto, chegando a valores próximos de 50 segundos de custo computacional.

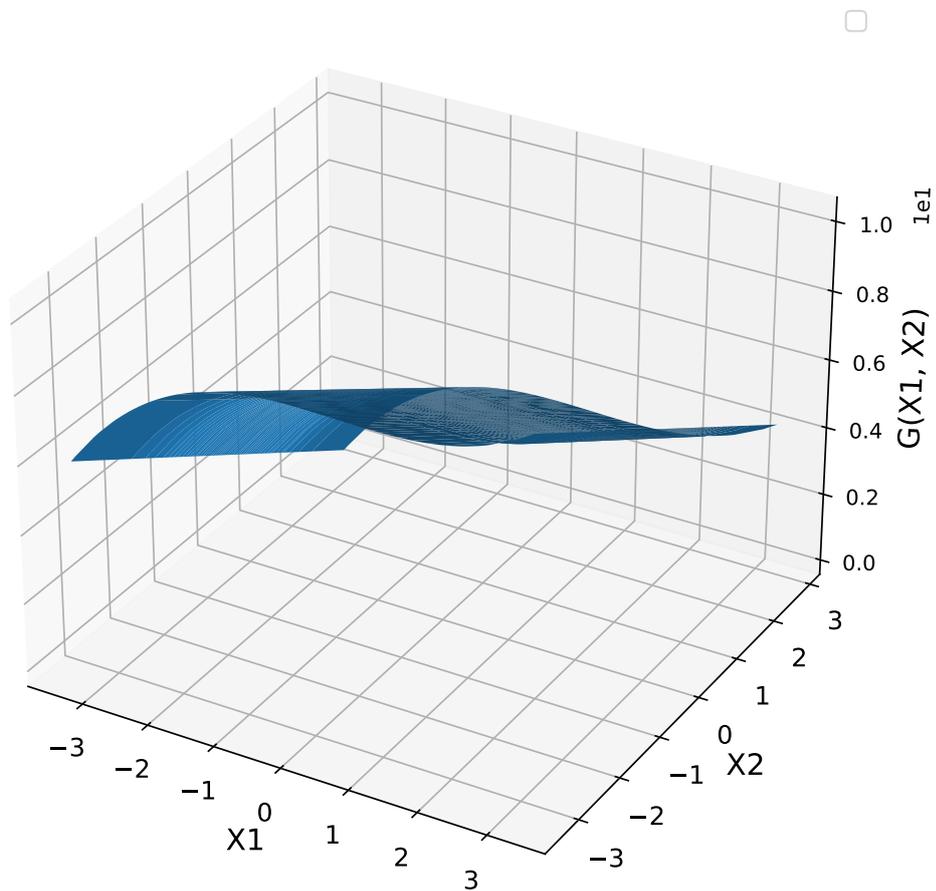
5.3 Exemplo 3 - Equação de Estado Limite de Polinomial do Terceiro Grau

A função de falha estudada nesse exemplo possui um comportamento cúbico e sua não linearidade pode causar problemas no resultado obtido usando o método FORM. Essa função de falha é adaptada do trabalho de Kiureghian, Lin e Hwang (1987), de modo que a alteração na função de falha serve para diminuir mais a P_f .

$$g(X_1, X_2) = 6 - x_2 - 0.1 * x_1^2 + 0.06 * x_1^3 \quad (41)$$

A não linearidade desta função pode ser observada na Figura 25.

Figura 25 – Função de Falha - Exemplo 3



Fonte: Autor (2022)

As distribuições e propriedades das variáveis aleatórias utilizadas neste exemplo podem ser vistas na Tabela 7.

Tabela 7 – Propriedades das Variáveis Aleatórias - Exemplo 3

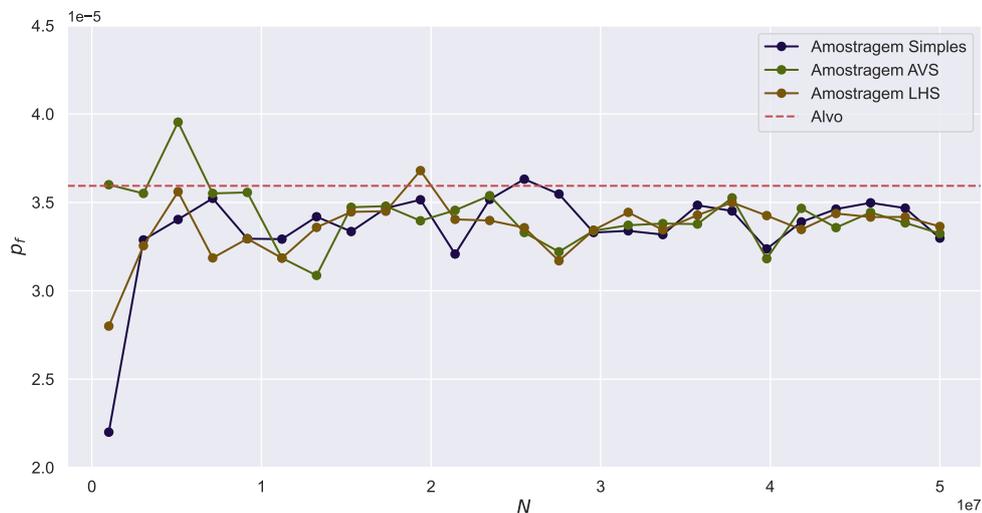
Variável Aleatória	Distribuição	Média	Desvio Padrão
X_1	Normal	0,00	1,00
X_2	Normal	0,00	1,00

O valor de referência para a probabilidade de falha desse problema foi obtida por meio de uma Simulação de Monte Carlo usando $N = 1 * 10^8$ simulações. Tal valor é de $3.55 * 10^{-5}$ (coeficiente de variação igual a 0.02), com um índice de confiabilidade igual a $\beta = 3.97$. Essa simulação demorou 13.51 segundos e a título de comparação, o FORM foi utilizado para resolver o problema de confiabilidade e ter sua eficácia comparada com a solução pelo MCS. O valor calculado da P_f utilizando o FORM foi de $9.87 * 10^{-10}$ ($\beta = 6.00$), o que mostra que a não linearidade da função impede o FORM de apresentar uma boa estimativa para a probabilidade de falha do problema. Os valores de comparação da resposta do estudo de confiabilidade via FORM e Monte Carlo podem ser vistas na Tabela 8 e o estudo de convergência usando a técnica de Monte Carlo Bruto combinada com os três métodos de geração de amostras aleatórias pode ser visto na Figura 26.

Tabela 8 – Comparação Monte Carlo Cru e FORM - Exemplo 3

Parâmetro	Monte Carlo	FORM
P_f	$3.55 * 10^{-5}$	$9.87 * 10^{-10}$
β	3.97	6.00
N	$1 * 10^8$	2

Figura 26 – Convergência do Monte Carlo Cru - Exemplo 3

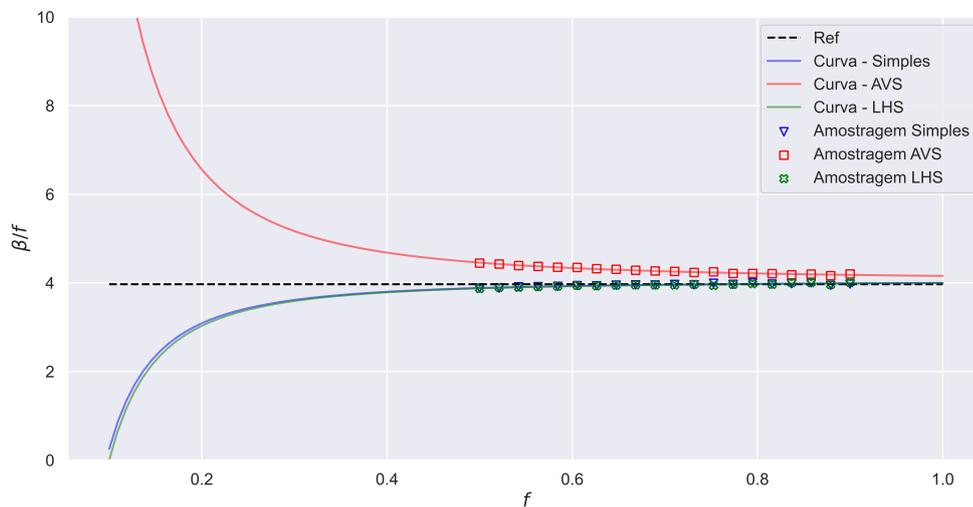


Fonte: Autor (2022)

A partir da análise de convergência do MCS Bruto, observa-se que a técnica AVS apresentou diversas oscilações ao longo do intervalo estudado, de modo que sua convergência a um valor próximo da P_f alvo pode ser melhor garantida somente a partir de $N = 3 * 10^7$ simulações. A técnica LHS aparenta garantir uma convergência a partir de $2 * 10^7$ simulações, ponto onde começa a apresentar menos oscilações no valor da estimativa. Vale ressaltar que por mais que a técnica apresente oscilações visuais, como a P_f é muito pequena (ordem de 10^{-5}), e gráfico está centralizado em um intervalo muito próximo da probabilidade de falha alvo, essas oscilações não são significativas em termos de erros percentuais. Por fim, a Amostragem Simples também conseguiu convergir para o valor alvo, de modo que essa convergência aparenta começar a partir de $3 * 10^7$ simulações.

Sendo assim, realizou-se um estudo da aplicação da técnica de Amostragem Assintótica, utilizando 20 pontos de suporte, com o parâmetro f variando de 0.5 a 0.9 e N variando de $1 * 10^3$ até $1.5 * 10^6$ simulações. Tais valores foram escolhidos por apresentarem um bom resultado na qualidade do ajuste da técnica, de modo que não será explorada neste trabalho uma análise paramétrica entre os limites adotados para o parâmetro f . O gráfico que mostra os pontos de suporte e a variação de f pode ser visto na Figura 27.

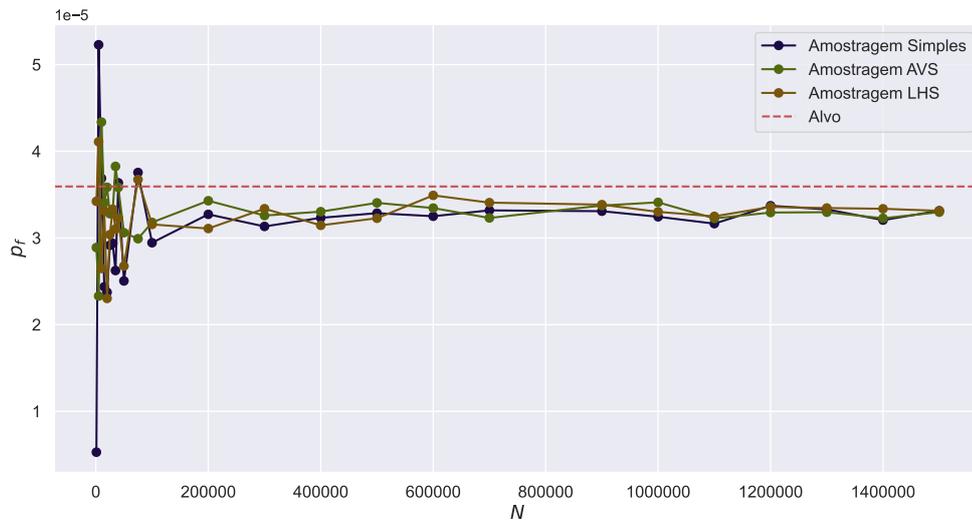
Figura 27 – Análise do parâmetro f - Exemplo 3



Fonte: Autor (2022)

Fez-se uma análise de convergência do problema, variando o tamanho da amostra a ser usada no Monte Carlo e fixando o intervalo de f nos valores escolhidos acima, de forma que o resultado dessa análise pode ser visto na Figura 28, em que N assume valores entre $1 * 10^3$ e $1.5 * 10^6$.

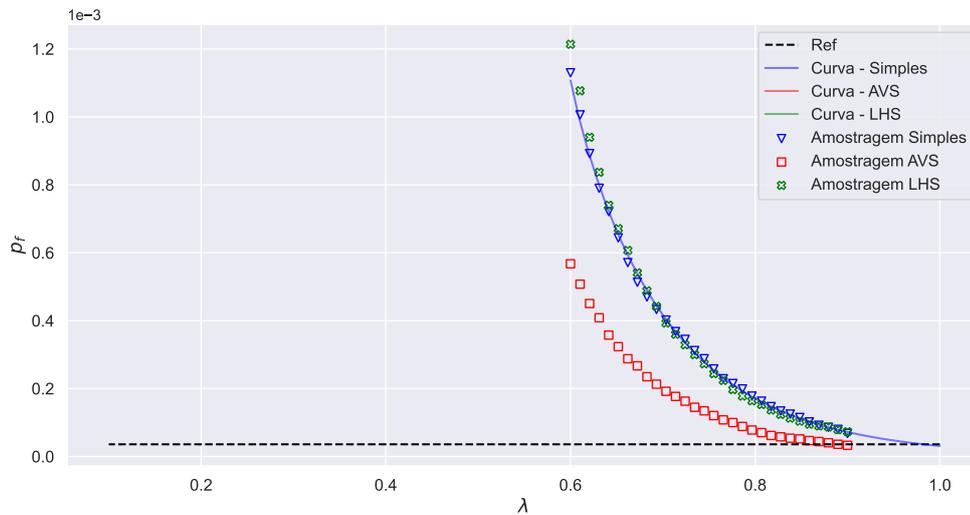
Figura 28 – Convergência da Amostragem Assintótica - Exemplo 3



Fonte: Autor (2022)

Novamente todas as técnicas de geração de amostras tiveram uma boa performance, conseguindo chegar próximo do valor alvo de referência. Destaca-se que o início de convergência para todas aparenta ser em torno de $2 * 10^5$ simulações, sendo a Amostragem Simples a que apresenta melhor comportamento em relação às pequenas oscilações nos seus valores, seguida pela LHS, que consegue chegar mais próximo do valor alvo. Sendo assim, a Amostragem Assintótica obtém uma boa estimativa para a solução deste problema, destacando a diferença da ordem de grandeza do número de simulações necessárias em comparação ao Monte Carlo Bruto, uma vez que AVS, LHS e Amostragem Simples convergiram com uma ordem de 10^5 simulações, contra 10^7 no MC Bruto.

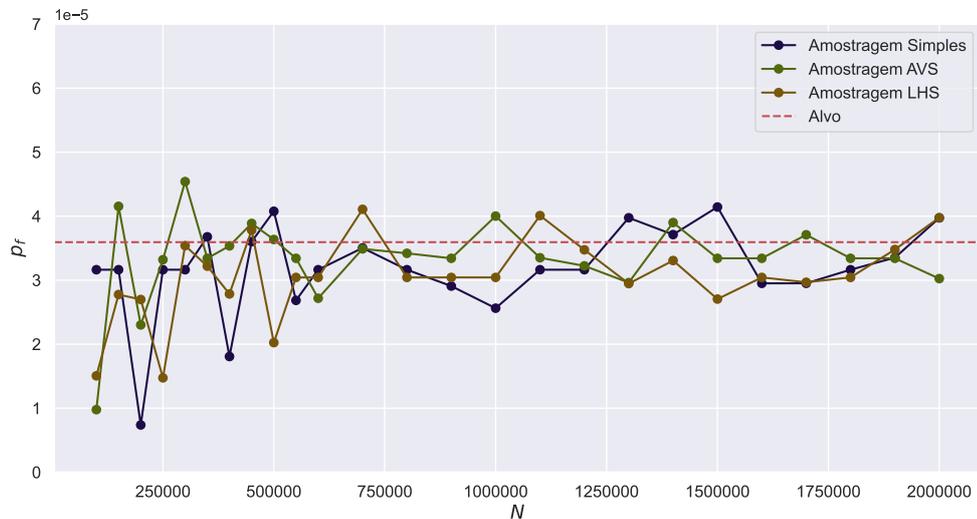
Já para a Amostragem Melhorada, foram utilizados 30 pontos de suporte, de modo que o parâmetro λ variou de 0.6 a 0.9 e o número de simulações N foi de $1 * 10^5$ até $2 * 10^6$ simulações. Assim como na Amostragem Assintótica, estes valores foram escolhidos devido à boa resposta da qualidade do ajuste. A análise da escolha do intervalo do parâmetro λ e a regressão realizada pode ser vista na Figura 29.

Figura 29 – Análise do parâmetro λ - Exemplo 3

Fonte: Autor (2022)

Pode-se observar a análise de convergência da Amostragem Melhorada na Figura 30.

Figura 30 – Convergência da Amostragem Melhorada - Exemplo 3



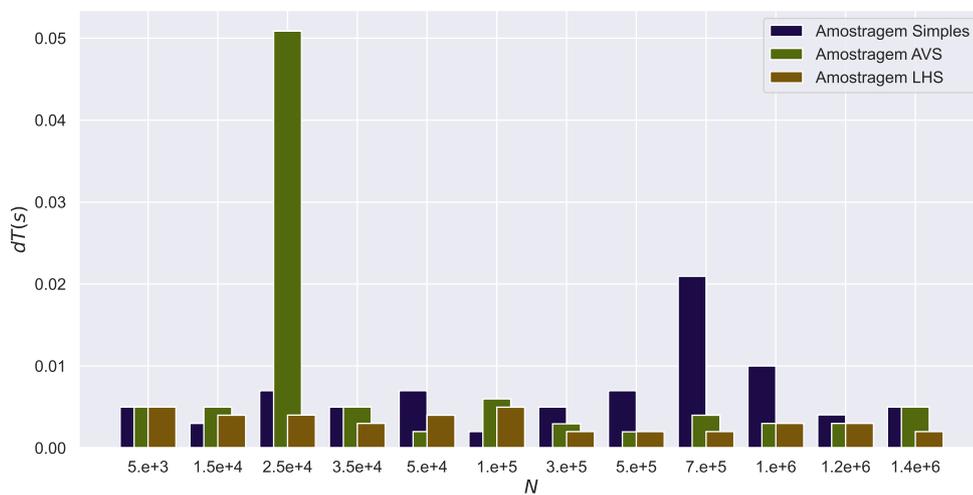
Fonte: Autor (2022)

O desempenho das técnicas de geração de amostras combinadas com a Amostragem Melhorada apresentou um bom índice de convergência para o valor de referência. Nota-se, como já visto, uma maior dispersão das estimativas feitas com valores baixos de N , mas em valores mais próximos de 2×10^6 o comportamento das estimativa aparenta começar a convergir, de modo que com um pouco mais de simulações poderia ser possível verificar essa hipótese. As técnicas AVS e LHS apresentam um comportamento parecido nesse intervalo final do estudo, sendo também próximas dos

valores observados usando a Amostragem Simples.

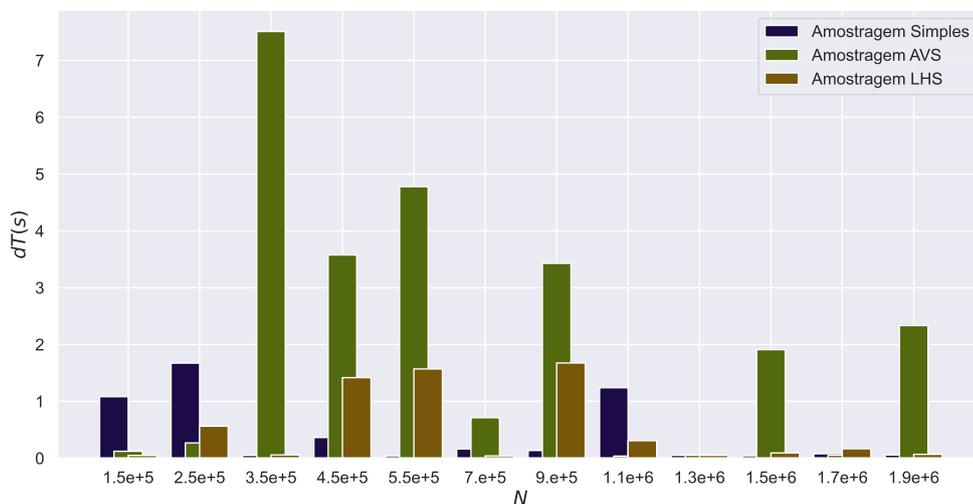
A Amostragem Melhorada, quando comparada com a Amostragem Assintótica, necessita de mais simulações para garantir uma convergência (N com ordem de 10^6 em comparação com 10^5 na Assintótica) e ficaria no mesmo nível que o Monte Carlo Bruto. Seu desempenho em estimar baixas P_f com um número de simulação menor que o Monte Carlo Bruto não foi significativo, de modo que a Amostragem Assintótica teve uma performance melhor para realizar essa função, sendo suas combinações com Amostragem Simples e por Hipercubo Latino tendo destaques positivos. O tempo computacional gasto em ambas as técnicas de amostragem inteligente, para alguns valores de N , pode ser visto na Figura 31 e na Figura 32.

Figura 31 – Tempo Computacional na Amostragem Assintótica - Exemplo 3



Fonte: Autor (2022)

Figura 32 – Tempo Computacional na Amostragem Melhorada - Exemplo 3



Fonte: Autor (2022)

Observa-se que o baixo custo computacional é um destaque muito positivo. A Amostragem Assintótica apresentou como maior tempo computacional algo próximo de 0.01 segundo, oferecendo uma resposta praticamente instantânea ao problema de confiabilidade, de modo que a técnica LHS foi a que mais demorou na maioria dos casos. Já a Amostragem Melhorada apresentou uma quantidade maior de tempo computacional, destacando a Amostragem por Variáveis Antitéticas como a técnica geradora de amostras mais demorada, seguida pela LHS.

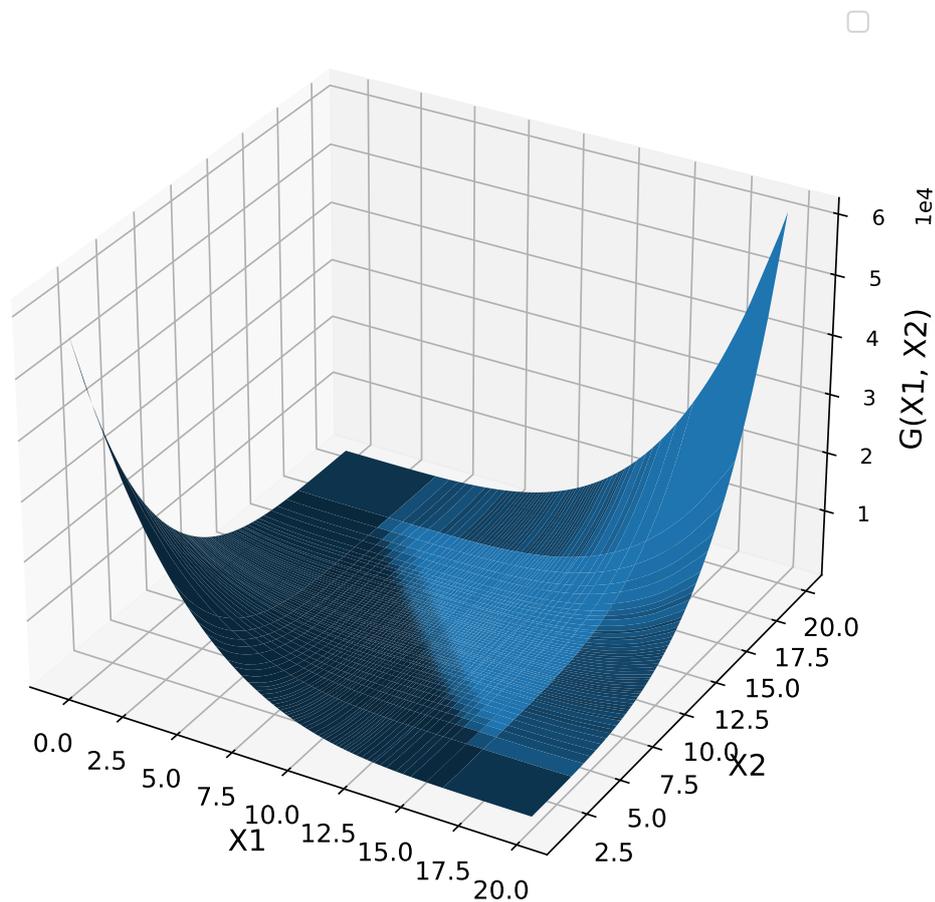
5.4 Exemplo 4 - Equação de Estado Limite de Polinomial do Quarto Grau

A função de falha estudada nesse exemplo se caracteriza por ser uma função polinomial de quarto grau, de modo que essa não linearidade pode causar problemas no resultado obtido usando o método FORM. Essa função de falha é adaptada do trabalho de Grandhi e Wang (1999), de modo que a alteração na função de falha serve para diminuir mais a P_f .

$$g(X_1, X_2) = 6 - 0.3 * (x_1 - x_2) + 0.4 * (x_1 + x_2 - 20)^4 \quad (42)$$

A não linearidade desta função pode ser observada na Figura 33.

Figura 33 – Função de Falha - Exemplo 4



Fonte: Autor (2022)

As distribuições e propriedades das variáveis aleatórias utilizadas neste exemplo podem ser vistas na Tabela 9.

Tabela 9 – Propriedades das Variáveis Aleatórias - Exemplo 4

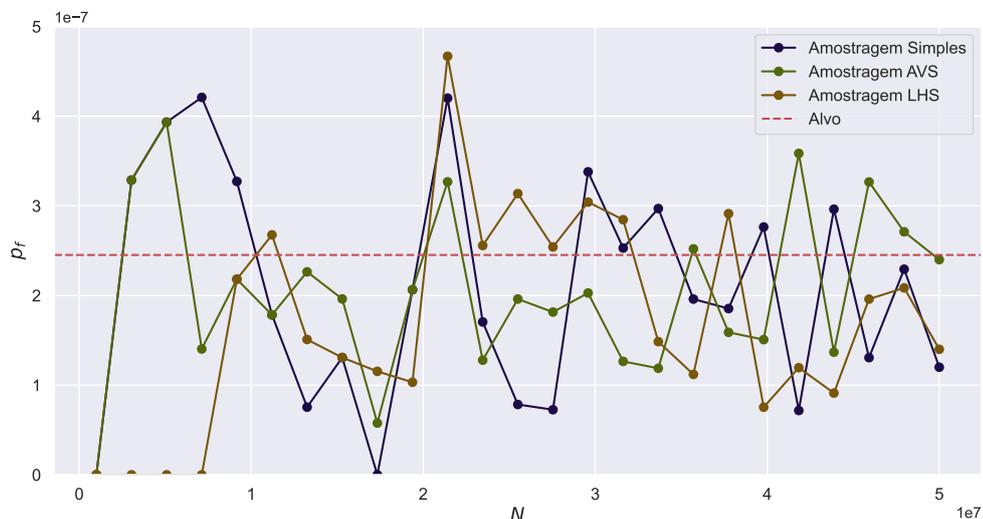
Variável Aleatória	Distribuição	Média	Desvio Padrão
X_1	Normal	10.00	3.00
X_2	Normal	10.00	3.00

O valor de referência para a probabilidade de falha desse problema foi obtida por meio de uma Simulação de Monte Carlo usando $N = 1 * 10^8$ simulações. Tal valor é de $2.4 * 10^{-7}$ (coeficiente de variação igual a 0.19, de modo que por limitação computacionais não se pode realizar mais simulações de modo a se obter valores menores de COV), com um índice de confiabilidade igual a $\beta = 5.01$. Essa simulação demorou 19.97 segundos e para título de comparação, o FORM foi utilizado para resolver o problema de confiabilidade e ter sua eficácia comparada com a solução pelo MCS. O valor calculado da P_f utilizando o FORM foi de $1.21 * 10^{-6}$ ($\beta = 4.71$), o que mostra que a não linearidade da função impede o FORM de apresentar uma boa estimativa para a probabilidade de falha do problema. Os valores de comparação da resposta do estudo de confiabilidade via FORM e Monte Carlo podem ser vistas na Tabela 10 e o estudo de convergência usando a técnica de Monte Carlo Bruto combinada com os três métodos de geração de amostras aleatórias pode ser visto na Figura 34.

Tabela 10 – Comparação Monte Carlo Cru e FORM - Exemplo 4

Parâmetro	Monte Carlo	FORM
P_f	$2.4 * 10^{-7}$	$1.21 * 10^{-6}$
β	5.03	4.71
N	$1 * 10^8$	2

Figura 34 – Convergência do Monte Carlo Cru - Exemplo 4

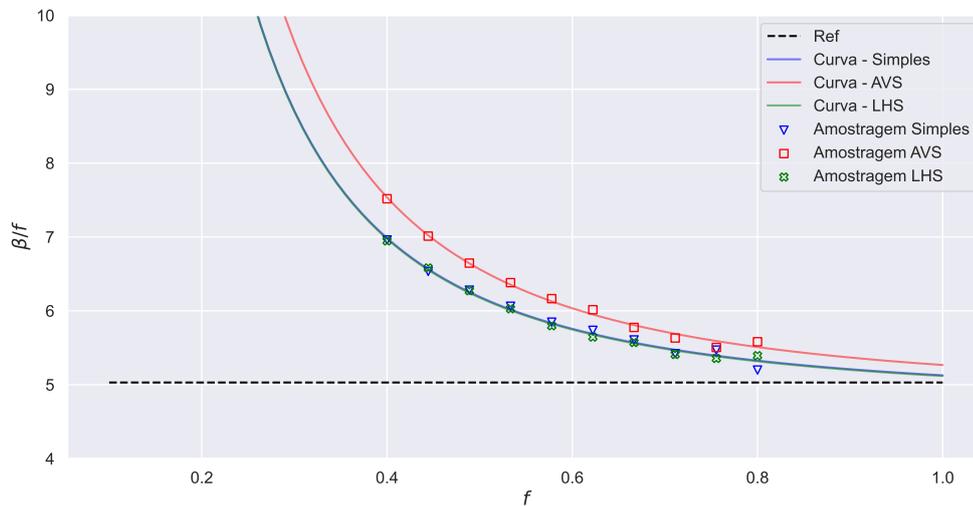


Fonte: Autor (2022)

Pode-se perceber que todas as técnicas de geração de amostras aleatórias tiveram uma má performance nessa função de falha. O fato da probabilidade de falha ser muito pequena (ordem 10^{-7}) faz com que sejam necessárias mais simulações para o Monte Carlo Bruto começar a apresentar alguma convergência na estimativa da P_f .

Fez-se, então um estudo da aplicação da técnica de Amostragem Assintótica, utilizando 10 pontos de suporte, com o parâmetro f variando de 0.4 a 0.8 e N variando de $1 * 10^3$ até $2 * 10^6$ simulações. Tais valores foram escolhidos por apresentarem um bom resultado na qualidade do ajuste da técnica, de modo que não será explorada neste trabalho uma análise paramétrica entre os limites adotados para o parâmetro f . O gráfico que mostra os pontos de suporte e a variação de f pode ser visto na Figura 35.

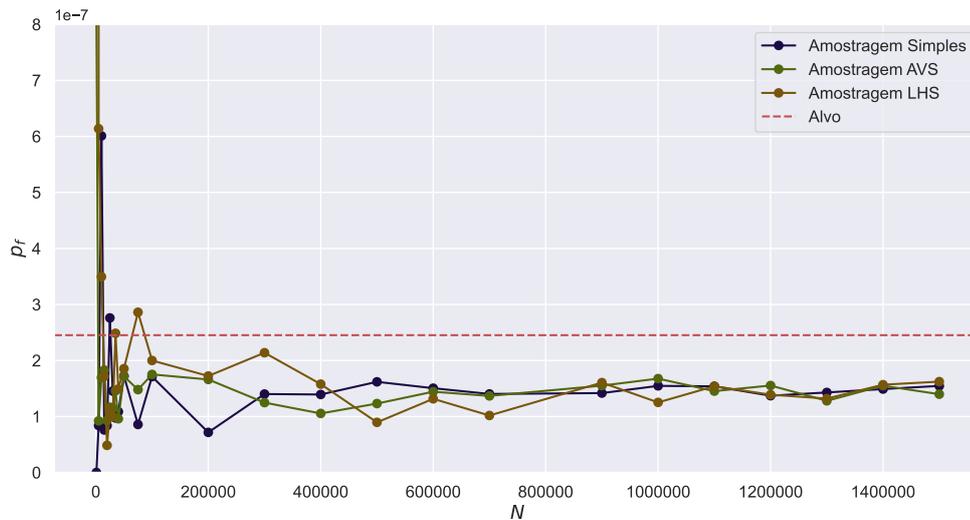
Figura 35 – Análise do parâmetro f - Exemplo 4



Fonte: Autor (2022)

Pode-se observar a análise de convergência da Amostragem Assintótica na Figura 36.

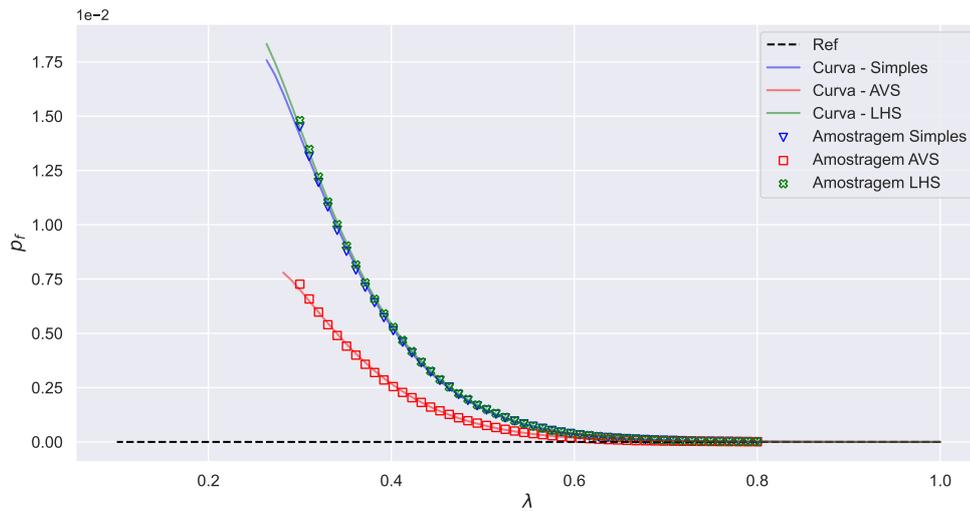
Figura 36 – Convergência da Amostragem Assintótica - Exemplo 4



Fonte: Autor (2022)

O que se pode notar é que, por mais que todas as técnicas de geração de amostras tenham convergido para algum valor de P_f na mesma ordem de grandeza que a probabilidade de falha alvo, nenhuma delas foi capaz de convergir com precisão. As três técnicas apresentam muitas oscilações ao longo dos diferentes valores de N , de modo que AVS e LHS apresentam um início de convergência ao redor de $1 * 10^6$ simulações e Amostragem Simples ao redor de $4 * 10^5$ simulações. Portanto, as combinações de Amostragem Assintótica tiveram uma pequena acurácia nessa estimativa, espera-se que uma melhor calibragem no intervalo escolhido para o parâmetro f possa melhorar a qualidade da estimativa da P_f alvo.

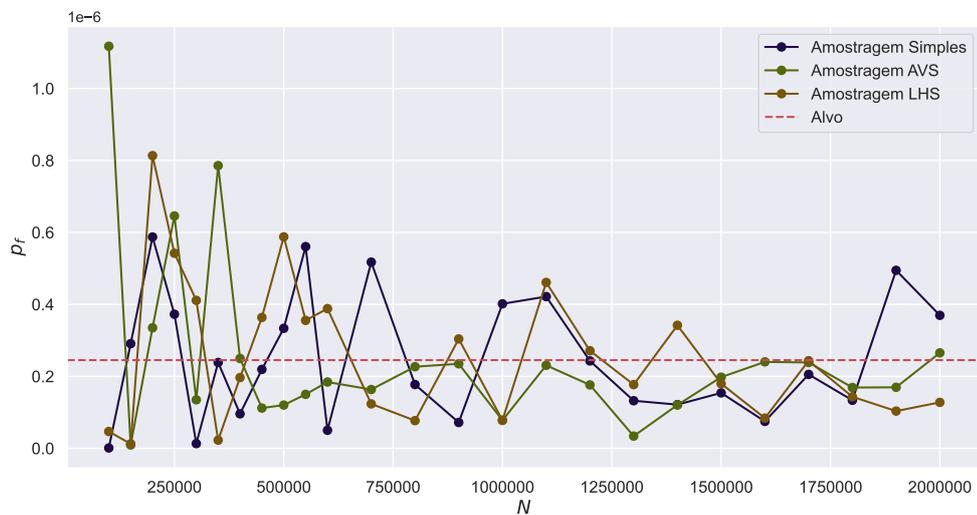
Já para a Amostragem Melhorada, foram utilizados 50 pontos de suporte, de modo que o parâmetro λ variou de 0.3 a 0.8 e o número de simulações N foi de $1 * 10^5$ até $2 * 10^6$ simulações. Assim como na Amostragem Assintótica, estes valores foram escolhidos devido à boa resposta da qualidade do ajuste. A análise da escolha do intervalo do parâmetro λ e a regressão realizada pode ser vista na Figura 37.

Figura 37 – Análise do parâmetro λ - Exemplo 4

Fonte: Autor (2022)

Pode-se observar a análise de convergência da Amostragem Melhorada na Figura 38.

Figura 38 – Convergência da Amostragem Melhorada - Exemplo 4



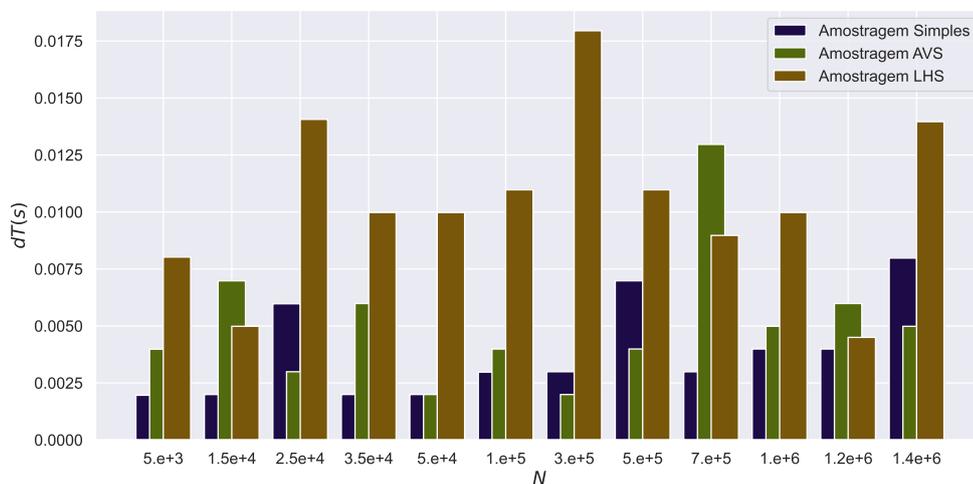
Fonte: Autor (2022)

O desempenho das técnicas de geração de amostras combinadas com a Amostragem Melhorada apresentou uma boa estimativa do valor alvo, visto que a ordem de grandeza dessa P_f é de 10^{-7} . Desde o menor valor de $N = 1 * 10^5$ simulações, a estimativa ficou próximo da ordem de grandeza, mas apresentando grandes oscilações no início do intervalo analisado. Observa-se uma tendência melhor de convergência a partir de $1.5 * 10^6$ por parte da LHS e AVS, sendo a Amostragem Simples a única que apresenta ainda uma performance inferior e não comportada. De maneira geral,

espera-se que para maiores valores de N a Amostragem Melhorada possa apresentar valores que convergem para o valor esperado da P_f alvo.

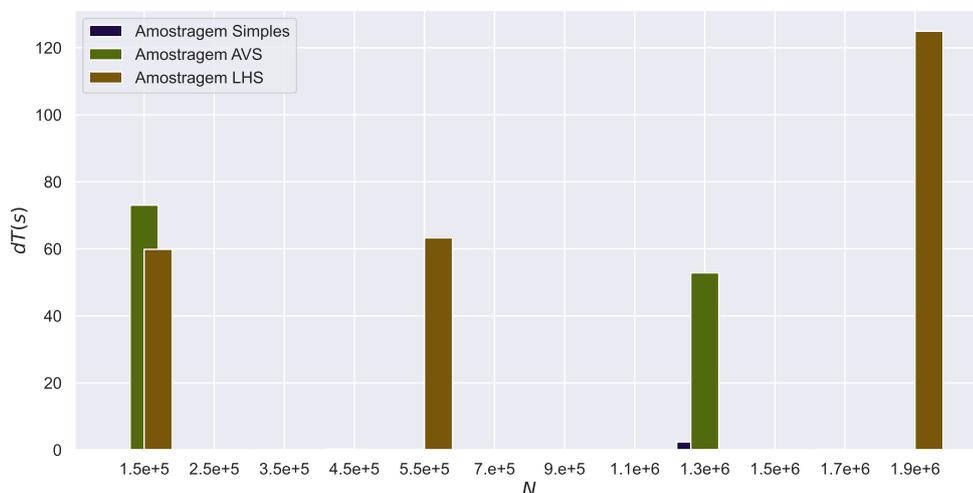
Dessa forma, ambas Amostragem Assintótica e Melhorada não conseguiram estimar bem o valor esperado da probabilidade de falha, assim como o Monte Carlo Bruto também apresentou um desempenho ruim dentre seu intervalo de análise. Por mais que as técnicas de amostragem inteligente tenham desempenhado uma má estimativa, a Amostragem Assintótica pelo menos se mostrou comportada, com os valores convergindo sem grandes oscilações, diferente da Amostragem Melhorada. O tempo computacional gasto em ambas as técnicas de amostragem inteligente, para alguns valores de N , pode ser visto na Figura 39 e na Figura 40.

Figura 39 – Tempo Computacional na Amostragem Assintótica - Exemplo 4



Fonte: Autor (2022)

Figura 40 – Tempo Computacional na Amostragem Melhorada - Exemplo 4



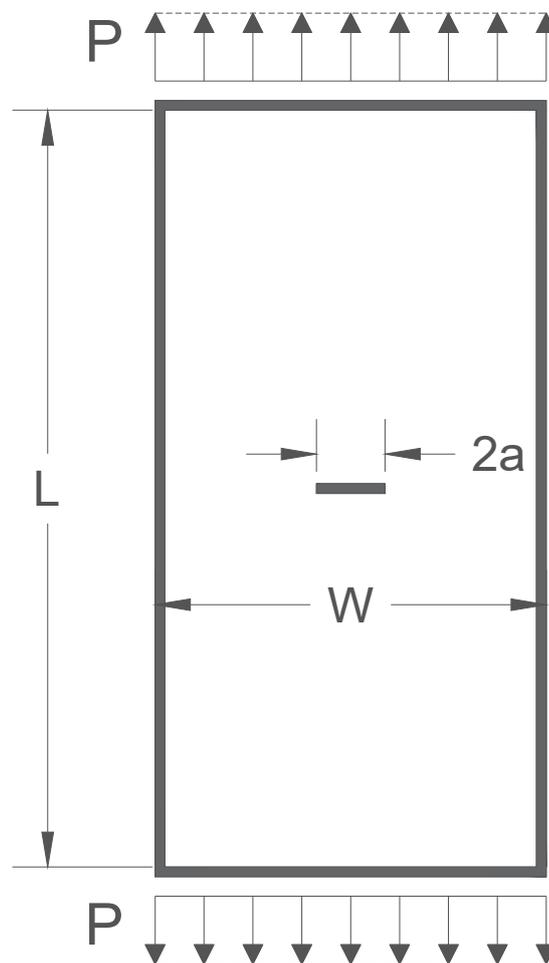
Fonte: Autor (2022)

Observa-se que o baixo custo computacional é um destaque muito positivo. A Amostragem Assintótica apresentou como maior tempo computacional algo próximo de 0.0175 segundo, oferecendo uma resposta praticamente instantânea ao problema de confiabilidade, de modo que a técnica LHS foi a que mais demorou na maioria dos casos. Já a Amostragem Melhorada apresentou uma quantidade maior de tempo computacional, destacando a LHS chegando a demorar mais de 120 segundos na solução do problema de confiabilidade.

5.5 Estudo de Caso - Fratura

Para finalizar, objetiva-se nesse estudo de caso aplicar as técnicas estudadas neste trabalho em um problema da Mecânica da Fratura Elástico Linear já explorado na literatura e de vasta relevância dentro da engenharia de estruturas para entender como se dá a propagação das fissuras em estruturas planas. O problema aqui abordado tem como referência o trabalho de Leonel (2009) e trata de uma chapa tracionada com fissura central. Tal estrutura pode ser vista na Figura 41

Figura 41 – Chapa Tracionada com Fissura Central



Fonte: Autor (2022)

A escolha desse problema se dá tanto pela presença de uma solução analítica para o cálculo do fator de intensidade de tensão (K_I), para o modo I, explicitado no trabalho de Broek (1982) e também por ele já ser explorado na literatura, servindo como *benchmark*. A expressão para o fator de intensidade de tensão em função do carregamento atuante na chapa é apresentada na Equação 43.

$$K_I = P * \sqrt{\pi * a} * \left[1 + 0.256 * \left(\frac{a}{w} \right) - 1.152 * \left(\frac{a}{W} \right)^2 + 12.2 * \left(\frac{a}{W} \right)^3 \right] \quad (43)$$

em que w é a largura da chapa (em metros), $2 * a$ é a extensão da fissura (também em metros) e P é a força de superfície aplicada (em kN/m). De modo que o fator de intensidade de tensão possui unidade $kN/m^{\frac{3}{2}}$

Sendo assim, faz-se a equação de estado limite considerando o problema escrito como termos das forças de superfície resistente e solicitante (LEONEL, 2009):

$$G = P_R - P_S \quad (44)$$

sendo P_R a força de superfície resistente e P_S a força de superfície solicitante. Pode-se então reescrever a função de falha como segue.

$$G(a, K_c, P) = \frac{K_c}{\sqrt{\pi \cdot a} \cdot \left[1 + 0.256 \cdot \left(\frac{a}{W} \right) - 1.152 \cdot \left(\frac{a}{W} \right)^2 + 12.2 \cdot \left(\frac{a}{W} \right)^3 \right]} - P \quad (45)$$

As distribuições e propriedades das variáveis aleatórias utilizadas neste exemplo podem ser vistas na Tabela 11.

Tabela 11 – Propriedades das Variáveis Aleatórias - Estudo de Caso

Variável Aleatória	Distribuição	Média	Desvio Padrão
a	Normal	0.10	0.01
Kc	Normal	50.00	5.00
Ps	Normal	50.00	4.00

O valor de referência para a probabilidade de falha desse problema foi retirada do trabalho de Leonel (2009), sendo igual a $1.07 * 10^{-8}$, com um índice de confiabilidade igual a $\beta = 5.60$, sendo esse resultado obtido utilizando o método FORM. Na prática da engenharia civil, pode ser difícil achar problemas em que a probabilidade de falha seja pequena e que não tenha solução pelo método FORM, esta aplicação específica objetiva mais alcançar uma boa estimativa de uma P_f pequena, ao invés de substituir o uso do método FORM, visto que o estudos das técnicas de amostragem inteligente aplicadas na solução de baixas probabilidades de falha é objetivo geral do trabalho.

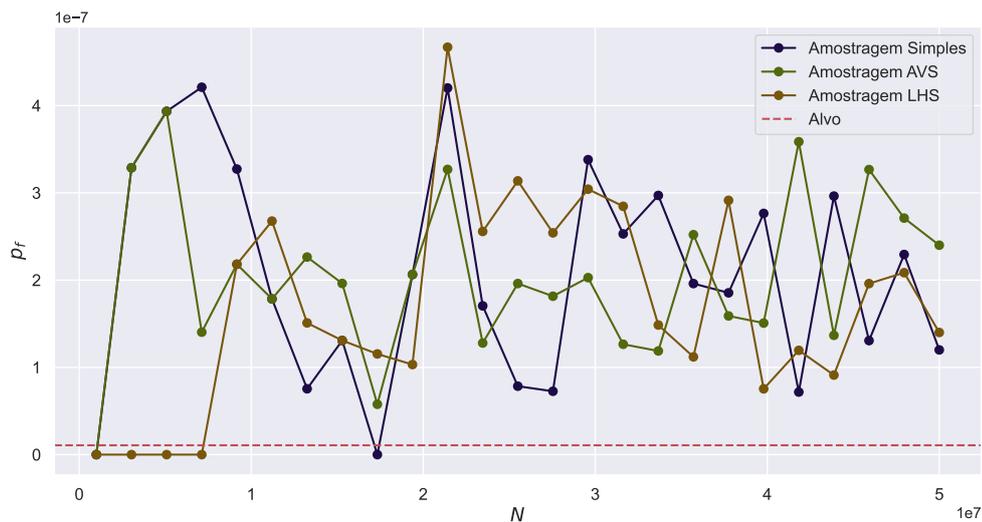
Fez-se uma tentativa de estimar a probabilidade de falha utilizando o Monte Carlo Bruto utilizando $N = 10^7$, o que resultou em uma P_f de $2 * 10^{-8}$ (coeficiente de variação igual a 0.70, de modo que por limitação computacionais não se pode realizar mais simulações de modo a se obter valores menores de COV) com um índice de confiabilidade $\beta = 5.49$, esta simulação demorou 27.06 segundos. Também é feita uma análise a

partir do método FORM, de modo a verificar a compatibilidade com o resultado apresentado por Leonel (2009), em que o valor calculado da P_f é de $1.01 * 10^{-8}$ ($\beta = 5.61$). Os valores de comparação da resposta do estudo de confiabilidade via FORM e Monte Carlo podem ser vistas na Tabela 12 e o estudo de convergência usando a técnica de Monte Carlo Bruto combinada com os três métodos de geração de amostras aleatórias pode ser visto na Figura 42.

Tabela 12 – Comparação Monte Carlo Cru e FORM - Estudo de Caso

Parâmetro	Monte Carlo	FORM
P_f	$2.00 * 10^{-8}$	$1.01 * 10^{-8}$
β	5.49	5.61
N	$5 * 10^7$	2

Figura 42 – Convergência do Monte Carlo Cru - Estudo de Caso



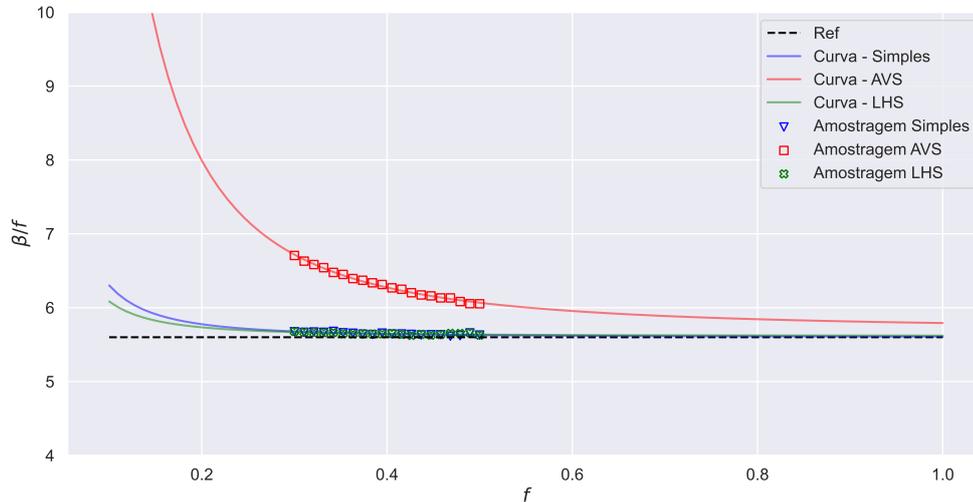
Fonte: Autor (2022)

Como a probabilidade de falha é muito pequena (ordem 10^{-8}), já se espera que o Monte Carlo Bruto não apresente uma boa convergência. Isso é evidenciado no estudo apresentado na Figura 42. Nenhuma das três técnicas de geração de amostras aleatórias apresentou uma boa performance, devido aos baixos valores de N para a ordem da probabilidade de falha alvo. Para esta ordem de P_f , espera-se que sejam necessárias mais de 10^{10} simulações para o início da convergência do Monte Carlo Bruto (ver Tabela 1).

Fez-se, então um estudo da aplicação da técnica de Amostragem Assintótica, utilizando 20 pontos de suporte, com o parâmetro f variando de 0.3 a 0.5 e N variando de $1 * 10^3$ até $2 * 10^6$ simulações. Tais valores foram escolhidos por apresentarem um bom

resultado na qualidade do ajuste da técnica, de modo que não será explorada neste trabalho uma análise paramétrica entre os limites adotados para o parâmetro f . O gráfico que mostra os pontos de suporte e a variação de f pode ser visto na Figura 43.

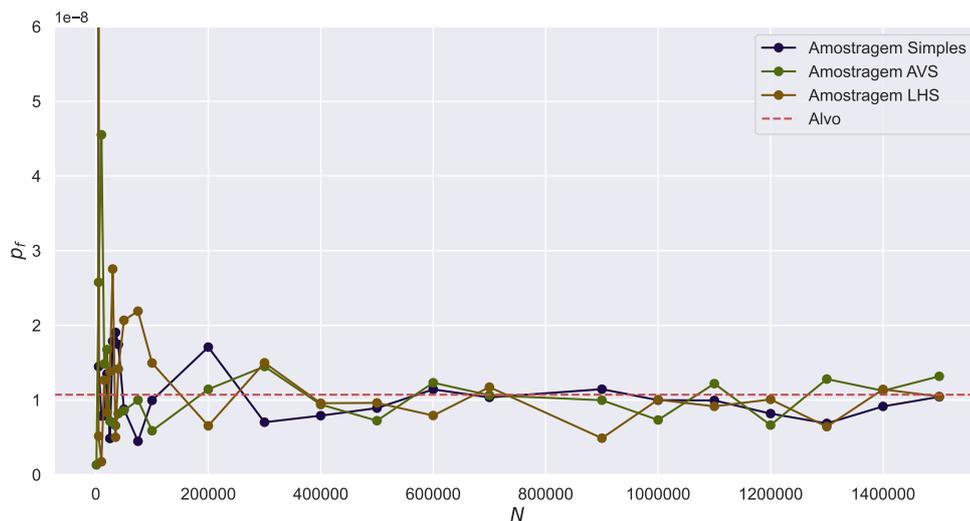
Figura 43 – Análise do parâmetro f - Estudo de Caso



Fonte: Autor (2022)

Pode-se observar a análise de convergência da Amostragem Assintótica na Figura 44.

Figura 44 – Convergência da Amostragem Assintótica - Estudo de Caso



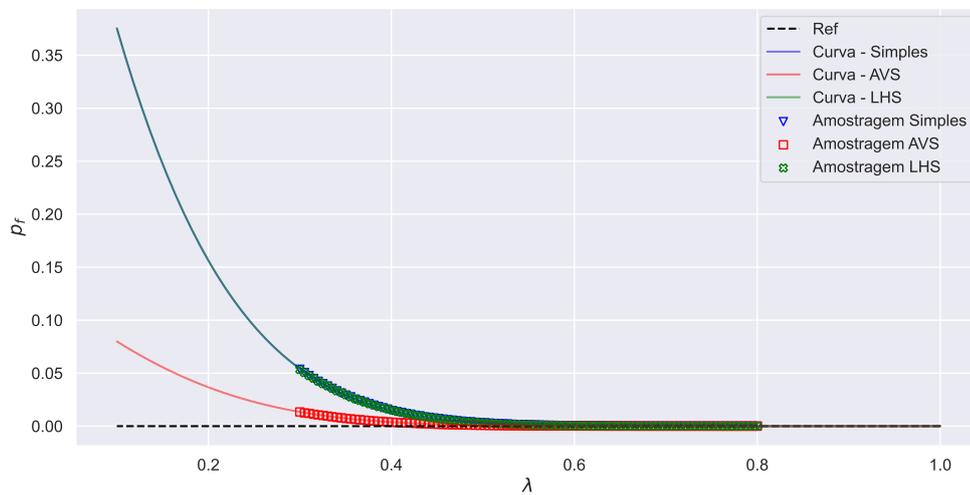
Fonte: Autor (2022)

Na análise da Amostragem Assintótica, todas as técnicas geradoras de amostras conseguiram convergir para o valor da P_f alvo. A Amostragem Simples aparenta ter sido a que menos sofreu oscilações ao longo do intervalo, apresentando um início

de convergência próximo de $N = 5 * 10^5$ simulações. Observa-se também a boa performance da técnica LHS, alcançando valores muito próximos do valor de referência, mesmo que tenha sofrido algumas oscilações de intensidade não significativa (devido à ordem de grandeza da P_f). De modo geral, a Amostragem Assintótica teve uma boa performance neste estudo de confiabilidade.

Já para a Amostragem Melhorada, foram utilizados 100 pontos de suporte, de modo que o parâmetro λ variou de 0.3 a 0.8 e o número de simulações N foi de $1 * 10^5$ até $2 * 10^6$ simulações. Assim como na Amostragem Assintótica, estes valores foram escolhidos devido à boa resposta da qualidade do ajuste. A análise da escolha do intervalo do parâmetro λ e a regressão realizada pode ser vista na Figura 45.

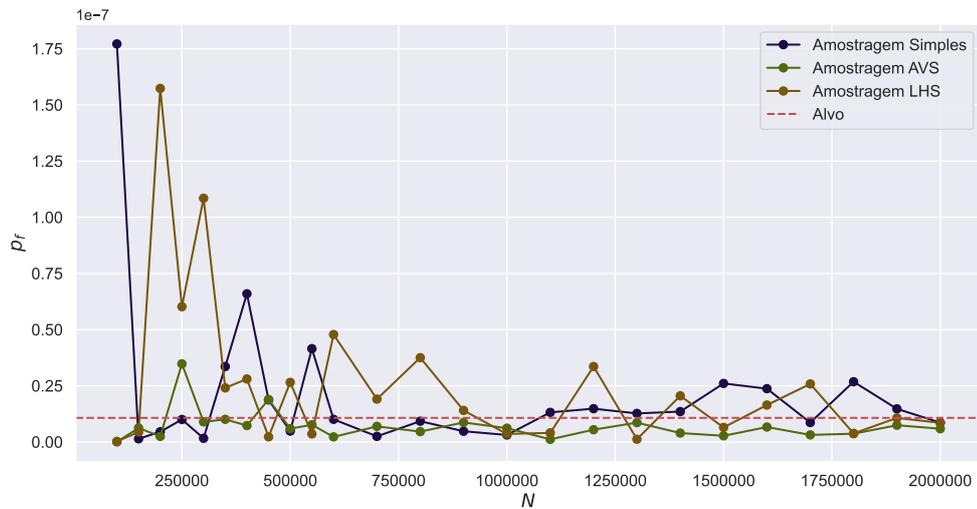
Figura 45 – Análise do parâmetro λ - Estudo de Caso



Fonte: Autor (2022)

Pode-se observar a análise de convergência da Amostragem Melhorada na Figura 46.

Figura 46 – Convergência da Amostragem Melhorada - Estudo de Caso

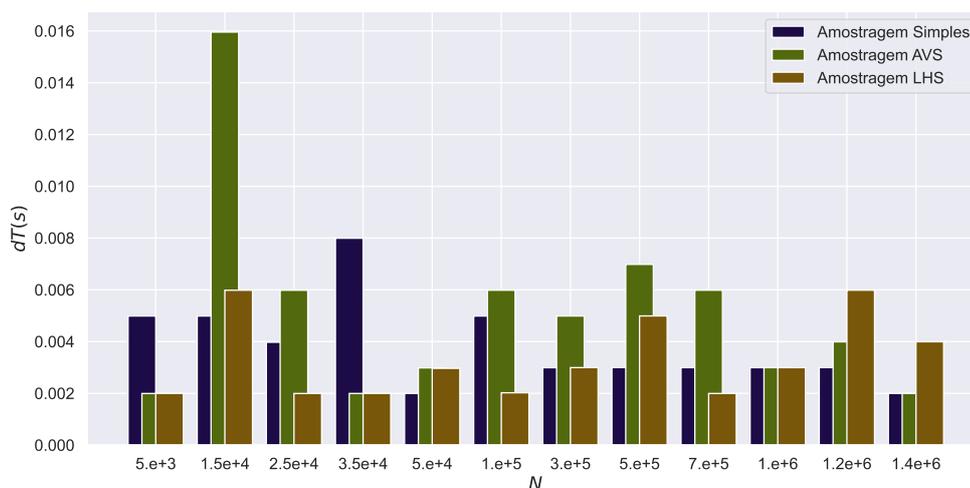


Fonte: Autor (2022)

O emprego da Amostragem Melhorada levou a resultados satisfatórios da estimativa da P_f alvo. A técnica AVS tem grande destaque, apresentando início de convergência antes do que seus pares, em torno de $N = 5 * 10^5$ simulações. Além disso, a AVS também foi a que menos demonstrou oscilações ao longo de seus valores, sendo então a melhor técnica geradora de amostras quando combinada com a Amostragem Melhorada. A LHS apresentou diversos picos no início do estudo e se mantém assim mesmo no final do intervalo analisado. Já a Amostragem Simples chegou próxima do comportamento da AVS, de forma que uma boa convergência pode ser observada a partir de $N = 1 * 10^6$ simulações.

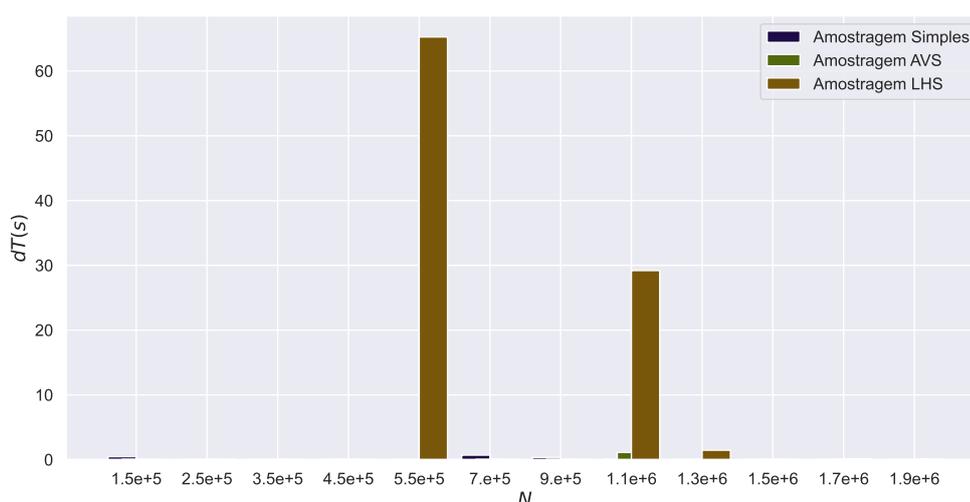
Portanto, ambas Amostragem Assintótica e Amostragem Melhorada se apresentaram como boas estimadoras da baixa P_f (na ordem de 10^{-8}). O tempo computacional gasto em ambas as técnicas de amostragem inteligente, para alguns valores de N , pode ser visto na Figura 47 e na Figura 48.

Figura 47 – Tempo Computacional na Amostragem Assintótica - Estudo de Caso



Fonte: Autor (2022)

Figura 48 – Tempo Computacional na Amostragem Melhorada - Estudo de Caso



Fonte: Autor (2022)

Observa-se que o baixo custo computacional é um destaque muito positivo. A Amostragem Assintótica apresentou como maior tempo computacional algo próximo de 0.016 segundo, oferecendo uma resposta praticamente instantânea ao problema de confiabilidade, de modo que a técnica AVS foi a que mais demorou na maioria dos casos. Já a Amostragem Melhorada apresentou uma quantidade maior de tempo computacional, destacando a LHS, a qual chegou a demorar mais de 60 segundos na solução do problema de confiabilidade.

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

O presente trabalho teve como foco estudar diferentes combinações de técnicas geradoras de amostras aleatórias (Amostragem Simples, Amostragem por Hipercubo Latino e Amostragem por Variáveis Antitéticas) com métodos de amostragem inteligente (Amostragem Assintótica e Amostragem Melhorada) para resolver problemas de confiabilidade estrutural que apresentem baixas probabilidades de falha. Foram realizadas quatro aplicações em funções de falha *benchmark* da literatura, além de um estudo de caso da Mecânica da Fratura Elástico Linear.

Dos resultados obtidos, pode-se destacar que a Amostragem Assintótica apresentou melhores resultados quando comparada à Amostragem Melhorada. De modo geral, o uso das técnicas AVS e LHS demandou um menor número de simulações, com valor mais satisfatório quando comparadas com a Amostragem Simples. A Amostragem Melhorada apresentou bons resultados para a maioria dos casos, porém ela aparenta demandar uma maior quantidade de simulações para atingir convergência em P_f baixas, seu custo tende a ser um pouco maior do que o da Amostragem Assintótica. Além disso, a escolha do parâmetro λ tende a ser mais difícil de ser realizado sem um bom estudo de otimização, para garantir bons intervalos e melhorar a performance da técnica.

Em relação ao tempo computacional, pode-se observar que a Amostragem Assintótica apresentou valores pequenos em relação à Amostragem Melhorada. Por mais que a Amostragem Melhorada tenda a ser mais rápida em relação a análise dos pares $[P_f, \lambda]$ — visto que as amostras não precisam ser geradas outras vez à medida que λ muda de valor dentro do seu intervalo, diferente do funcionamento do parâmetro f da Amostragem Assintótica, em que a cada novo valor é necessário realizar uma nova amostragem — o que faz sua aplicação demorar mais é a análise feita para achar os valores das constantes da Equação 36. Sendo assim, melhorar a forma de ajuste não linear é imprescindível para o uso dessa técnica em fase de projeto, para garantir estimativas cada vez mais rapidamente.

Ainda sobre o tempo computacional, é notório que a técnica LHS demora mais que seus pares, mas que na Amostragem Assintótica isso não apresentou uma diferença significativa, visto que a técnica fornece resultados em centésimos de segundos.

6.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

Destaca-se como sugestões para trabalhos futuros:

- Estudar a influência dos parâmetros de entrada f e λ , de forma a verificar o grau de variabilidade da resposta final à medida que o intervalo escolhido mude;
- Aplicar outras técnicas de geração de amostras, como Sobol e Halton;

- Estudar outras técnicas de amostragem inteligente junto do Método de Monte Carlo, tal como *Subset Simulation*;
- Aumentar o intervalo de N para a solução usando Amostragem Melhorada;
- Buscar aplicações da engenharia que sejam complexas o suficiente para o FORM não conseguir resolver e aplicar as técnicas aqui citadas neles.

REFERÊNCIAS

ANG, A. H.-S.; TANG, W. H. *Probability concepts in engineering: emphasis on applications to civil and environmental engineering*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008. v. 4. 413–414 p. ISSN 1573-2479.

AU, S.; BECK, J. A new adaptive importance sampling scheme for reliability calculations. *Structural Safety*, v. 21, n. 2, p. 135–158, 1999. ISSN 0167-4730. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167473099000144>>.

BECK, A. T. *Confiabilidade e Segurança das Estruturas*. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier Brasil, 2019. 448 p. ISBN 9788535286885.

BORRI, A.; SPERANZINI, E. Structural reliability analysis using a standard deterministic finite element code. *Structural Safety*, v. 19, n. 4, p. 361–382, 1997. ISSN 0167-4730. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167473097000179>>.

BROEK, D. *Elementary engineering fracture mechanics*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1982. ISBN 978-94-010-8425-3. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/978-94-009-4333-9>>.

BUCHER, C. Asymptotic sampling for high-dimensional reliability analysis. *Probabilistic Eng. Mech.*, Elsevier Ltd, v. 24, n. 4, p. 504–510, 2009. ISSN 02668920. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.probengmech.2009.03.002>>.

GOUVEIA, L. P. D. *Avaliação da Confiabilidade em Tubos de Revestimento de Poços de Petróleo*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Alagoas, 2014.

GRANDHI, R. V.; WANG, L. Higher-order failure probability calculation using non-linear approximations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 168, n. 1-4, p. 185–206, 1999.

GROOTEMAN, F. An adaptive directional importance sampling method for structural reliability. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Elsevier, v. 26, n. 2, p. 134–141, 2011.

HAMMERSLEY, J. M.; MORTON, K. W. A new monte carlo technique: antithetic variates. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Cambridge University Press, v. 52, n. 3, p. 449–475, 1956.

HASOFER, A. M.; LIND, N. C. Exact and invariant second-moment code format. *Journal of the Engineering Mechanics division*, ASCE, v. 100, n. 1, p. 111–121, 1974.

HURTADO, J. E.; BARBAT, A. H. Monte Carlo Techniques in Computational stochastic Mechanics. *Arch. Comput. Methods Eng.*, v. 5, n. 1, p. 3–29, 1998. ISSN 11343060.

KIUREGHIAN, A. D.; LIN, H.-Z.; HWANG, S.-J. Second-order reliability approximations. *Journal of Engineering mechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 113, n. 8, p. 1208–1225, 1987.

LEONEL, E. D. *Modelos Não Lineares do Método dos Elementos de Contorno para Análise de Problemas de Fratura e Aplicação de Modelos de Confiabilidade e Otimização em Estruturas Submetidas à Fadiga*. 421 p. p. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2009.

MCKAY, M. D.; BECKMAN, R. J.; CONOVER, W. J. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, v. 42, n. 1, p. 55–61, 1979. ISSN 15372723.

MELCHERS, R. E.; BECK, A. T. *Structural Reliability Analysis and Prediction*. Third edition. [S.l.]: John Wiley & Sons Ltd, 2018. 514 p. ISBN 9781119266075.

METROPOLIS, N.; ULAM, S. The Monet Carlo Method. *J. Am. Stat. Assoc.*, v. 44, n. 247, p. 335–341, 1949.

NAESS, A.; LEIRA, B. J.; BATSEVYCH, O. System reliability analysis by enhanced Monte Carlo simulation. *Struct. Saf.*, Elsevier Ltd, v. 31, n. 5, p. 349–355, 2009. ISSN 01674730. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.strusafe.2009.02.004>>.

NAESS, A.; MAES, M.; DANN, M. R. Enhanced Monte Carlo for Reliability-Based Design and Calibration. *Comput. Methods Appl. Sci.*, v. 26, n. May, p. 149–159, 2013. ISSN 18713033.

NATAF, A. Détermination des distributions de probabilités dont les marges sont données. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*, v. 225, p. 42–43, 1962.

OLSSON, A.; SANDBERG, G.; DAHLBLOM, O. On latin hypercube sampling for structural reliability analysis. *Structural Safety*, Elsevier, v. 25, n. 1, p. 47–68, 2003. ISSN 0167-4730.

RACKWITZ, R.; FLESSLER, B. Structural reliability under combined random load sequences. *Comput. Struct.*, v. 9, n. 5, p. 489–494, 1978. ISSN 00457949.

SANTOS, K.; BECK, A. T. A benchmark study on intelligent sampling techniques in Monte Carlo simulation. *Lat. Am. J. Solids Struct.*, p. 25, 2014.

SANTOS, K. R. M. dos. *Técnicas de amostragem inteligente em simulação de Monte Carlo*. São Carlos: Dissertação de Mestrado - Universidade de São Paulo, 2014. 193 p.

SICHANI, M. T.; NIELSEN, S. K.; NAESS, A. Failure probability estimation of wind turbines by enhanced monte carlo method. *J. Eng. Mech.*, v. 138, n. 4, p. 379–389, 2012. ISSN 07339399.

SICHANI, M. T.; NIELSEN, S. R.; BUCHER, C. Applications of asymptotic sampling on high dimensional structural dynamic problems. *Struct. Saf.*, Elsevier Ltd, v. 33, n. 4-5, p. 305–316, 2011. ISSN 01674730. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.strusafe.2011.05.002>>.

SICHANI, M. T.; NIELSEN, S. R.; BUCHER, C. Efficient estimation of first passage probability of high-dimensional nonlinear systems. *Probabilistic Eng. Mech.*, Elsevier Ltd, v. 26, n. 4, p. 539–549, 2011. ISSN 02668920. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.probengmech.2011.05.013>>.

SILVA, T. B. da. *Contribuição À Análise De Integridade Em Sistemas De Revestimento Via Confiabilidade Estrutural*. Maceió: [s.n.], 2018.