UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A Regra dos Termos Duais:

Uma interpretação do método de Cramer no plano complexo.

Rafael Dantas Sobrinho

Instituto de Matemática

Maceió, Março de 2021

PROFMAT

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

A Regra dos Termos Duais:
Uma interpretação do método de Cramer no plano complexo.

Rafael Dantas Sobrinho

Maceió-AL
2021

Rafael Dantas Sobrinho

A Regra dos Termos Duais:
Uma interpretação do método de Cramer no plano complexo.

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: *Prof. Dr. André Luiz Flores*

Maceió-AL
2021

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

S677r Sobrinho, Rafael Dantas.
A regra dos termos duais: uma interpretação do método de Cramer no plano complexo / Rafael Dantas Sobrinho. – 2021.
131 f. : il. color.

Orientador: André Luiz Flores.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2021.

Bibliografia: f. 129-131.

1. Números complexos. 2. Sistemas lineares. 3. Regra de Cramer. I. Título.

CDU: 51

Ao Sagrado Coração de Jesus e ao Imaculado Coração de Maria.

AGRADECIMENTOS

Ao "*Senhor meu Jesus Cristo, Deus e homem verdadeiro, Criador e Redentor meu, por serdes Vós quem sois, sumamente bom e digno de ser amado, e porque Vos amo e estimo sobre todas as coisas*" (do Ato de Contrição). A Vós, Pai, entrego o que me destes,

Graças e louvores sejam dados a todo momento ao Santíssimo e Diviníssimo Sacramento.

À Santíssima Virgem Maria, Santa Mãe de Deus, e à São José, Seu Castíssimo Esposo. Não houve ocasião em que, tendo a Eles recorrido, me tenham deixado desamparado.

Aos meus pais, Erivalda Dantas Sobrinho e Severino Luiz Sobrinho (com todo amor), pela insistência em primar pela educação de seus filhos.

Ao meu amor, Dayanne Ferreira, que, em Cristo, é a presença mais doce e suave da minha vida. Ao lado de quem experimento as palavras de São João da Cruz segundo as quais "o amor não cansa nem se cansa".

Ao meu avô, Heleno Camilo Dantas (*in memoriam*), por conservar invariável confiança em mim. À minha avó, Josefa Marques, e à minha tia, Tereza Marques, pelo zelo que denotaram em favor da minha educação. A minhas irmãs Rafaela, Rafaele e Renally. Ao meu cunhado Alef de Carvalho e à minha querida sobrinha Aylis Maria.

Ao amigo e Prof. Cícero de Andrade Correia, o "Capitão", pela sabedoria com a qual orientou a mim e aos meus amigos ao longo do ensino médio e mesmo depois. A estes amigos Acarcio Gomes, Evaldo Cavalcante, Gilmar Souto, Maycon Ferreira e Wellis Eloi estendo o meu cordial agradecimento.

Ao amigo e Prof. MSc. José Elizângelo Lopes Luna, com quem aprendi que a voz do Cristo de Deus « *caminho, verdade e vida* » (Jo 14, 6) ressoa em cada teorema matemático.

Ao Prof. Dr. André Luiz Flores, pela generosidade com que me acolheu como orientando e pelas observações agudas que moldaram o aspecto final deste trabalho.

Aos colegas Adelson Ricardo, Edson Valdemar e Mario dos Santos, em razão de a Divina Providência ter nos disposto partilhar tantas viagens e boas ocasiões de estudo. Sou grato ainda a Thiago dos Santos e a Joelma Silvestre, por toda a ajuda durante o curso de verão.

Oxalá fossem tais o teu porte e a tua conversação que todos pudessem dizer, ao ver-te ou ouvir-te falar: "Este lê a vida de Jesus Cristo".

—SÃO JOSEMARIA ESCRIVÁ (Caminho, n. 2)

RESUMO

No Ensino Médio, sobressai a falta de aplicações interessantes relativas ao estudo dos números complexos, que se reflete, por vezes, em uma abordagem árida deste tópico, que lhe é, como que, característica. Neste trabalho, temos por objetivo fornecer ao professor aplicações não usuais da álgebra e da geometria dos complexos, por intermédio das quais ele possa motivar e ilustrar suas aulas ao ensiná-los, conectando-os à resolução e à discussão de sistemas lineares de pequeno porte sobre $\mathbb{R}$. Neste contexto, estabeleceremos uma interpretação do método de Cramer no plano complexo, à qual daremos o nome de "Regra dos Termos Duais". Isto requererá, por extensão, os atos de definir e explorar as "Translineadoras Horizontal e Vertical do Espaço $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$" que provaremos tratarem-se de automorfismos diagonalizáveis.

Palavras-chave: <APLICAÇÕES. NÚMEROS COMPLEXOS. SISTEMAS LINEARES.>

ABSTRACT

In High School, there is a lack of interesting applications related to the study of complex numbers, which is sometimes reflected in an arid approach to this topic, which is, almost, your characteristic. In this work, we aim to provide for the teacher unusual applications of algebra and geometry of complexes, through which he can motivate and illustrate his classes by teaching them, connecting them to the resolution and discussion of linear systems with small dimension over $\mathbb{R}$. In this context, we will establish an interpretation of Cramer's method in the complex plane, which we will call the "Rule of Dual Terms". This will require, by extension, the acts of defining and exploring the "Horizontal and Vertical Transliners of Space $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$" which we will prove to be diagonalizable automorphisms.

Keywords: <APPLICATIONS. COMPLEX NUMBERS. LINEAR SYSTEMS.>

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Na Educação Básica, é distinto o valor que possuem os sistemas de equações lineares. Com efeito, segundo Lima [16], eles

> constituem um tópico de grande interesse prático. Seu estudo é acessível aos estudantes, pois não requer o emprego de conceitos sutis ou complicados. Além disso, pode servir como ponto de partida para diversas teorias matemáticas relevantes e atuais (p. 99).

Dentre os métodos que se prestam à sua resolução, "a Regra de Cramer é o método consagrado" (idem, p. 106). De fato, completa Gulisz [8], ela "é um dos principais métodos de resolver sistemas lineares ensinados na escola e possui grande importância". Não bastasse, o método de Cramer ainda "apresenta a vantagem de fornecer explicitamente os valores das incógnitas como quocientes de dois determinantes" (Lima:[15], p. 247).

Por outro lado, os números complexos não gozam de um tal prestígio, quer a nível básico, quer a nível superior; porquanto, embora eles[1]

> [ocupem] uma posição singular no ensino de Matemática. Não merecem grande atenção nos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, por serem considerados como "assunto elementar" de nível médio. Já no Ensino Médio, são evitados, sendo taxados de estranhos, de compreensão difícil e, sobretudo, inúteis (Carneiro:[5]).

"Tradicionalmente, a Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos" (BRASIL:[3], p. 122). Sendo, portanto, incontornável esta introdução, a aparente inutilidade que a acompanha deve-se, sobretudo, à maneira com a qual ela inicia. Decerto,

> que utilidade poderiam ter objetos cuja existência é motivada, logo no primeiro contato, pela capacidade que possuem de fornecer uma solução "imaginária" para uma equação que "sabemos" que não tem solução, como nos foi antes demonstrado várias vezes? Pois é assim que quase sempre aprendemos e ensinamos os números complexos (Carneiro:[5]).

[1] Convencionamos indicar entre colchetes nossas alterações ou inclusões em citações diretas.

Não obstante, conforme Lima [17], a relevância dos números complexos é notável

> em várias situações nas quais, mesmo que se desejem estudar apenas questões relativas a números reais, é indispensável considerar números complexos para se obter a solução real desejada. [Sendo exemplo expoente os] trabalhos dos algebristas italianos Ferro, Tartaglia, Cardano e Ferrari, que culminaram com a descoberta das fórmulas de resolução das equações do terceiro e quarto grau (pp. 36-37).

Ademais, no âmbito escolar, é comum o apelo dos alunos para que

> a Matemática se torne mais "concreta", [e com isso] eles podem não querer dizer, somente, que desejem ver este conhecimento aplicado às necessidades práticas. Talvez eles queiram compreender os conceitos matemáticos em relação com algo que lhes dê sentido, ou seja, conectando-os a uma rede de significados e de relações com outras ideias, que podem ser ou não matemáticas (Roque e Carvalho:[22], p. IX).

Realmente, de acordo com BRASIL [3],

> [a]prender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação (p. 111).

Resulta daí que "[o] professor deve considerar como parte integrante e essencial de sua tarefa o desafio, a preocupação de encontrar aplicações interessantes para a matemática que está apresentando" (Lima:[16], p. 198). Tendo em mente que "[n]ão podemos insistir na contextualização de fatos isolados, um aqui, outro acolá: o que costuma ser mais interessante é a aplicação de vários fatos juntos" (Ávila:[1]).

Neste trabalho, pretende-se destacar "o papel central que exercem os números complexos" [5] ao conectá-los ao estudo de sistemas lineares, haja vista ser "natural [no atual estado de coisas] que o aluno pense que os complexos foram inventados apenas para resolver exercícios sobre números complexos" (idem). Nosso objetivo, então, é o de munir o professor de aplicações não usuais da álgebra e da geometria dos complexos, por meio das quais ele possa motivar e ilustrar suas aulas ao ensiná-los, exibindo o seu alcance e a sua utilidade ao interligá-los à resolução e à discussão de sistemas lineares de pequeno porte sobre $\mathbb{R}$ (Capítulo 6).

Para isto, dispomo-nos estabelecer a *Regra dos Termos Duais* (doravante, R.T.D.) por meio da qual torna-se possível exprimir os termos da solução

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^{\boldsymbol{t}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$$

de um sistema linear de ordem $n \geqslant 2$ sobre $\mathbb{R}$, cuja matriz dos coeficientes seja invertível, aos pares como o quociente de dois determinantes em $\mathbb{C}$, com o adendo de comportar um total de

$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ determinantes e não mais $n+1$, como o é na clássica Regra de Cramer (Capítulo 5).

Nesse sentido, os Capítulos 3 e 4 são prelúdio e preparação para o Capítulo 5. Neles, definimos, respectivamente, as *Translineadoras Horizontal e Vertical do Espaço* $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ e provamos tratarem-se, em suma, de automorfismos diagonalizáveis.

CAPÍTULO 1

NÚMEROS COMPLEXOS

As linhas que se seguem são devotadas ao estudo dos números complexos. Mais precisamente, elas dizem respeito aos aspectos principais de sua história e às propriedades que tocarão mais de perto o desenvolvimento dos próximos capítulos. Nesse sentido, suporemos conhecida a teoria básica de estruturas algébricas: anéis, corpos e homomorfismos. No mais, tomaremos como axioma a existência do corpo dos números reais $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

1.1 Aspectos Históricos

Os números complexos principiaram em matemática no século XVI. Seu pleno estabelecimento, porém, teve de esperar até o século XIX, de modo que, até aí, residiu sobre eles grande suspeita. Isto lhes rendeu o epíteto de "imaginários", introduzido por René Descartes (1596-1650) em seu livro *La Géométrie*, e que é usado mesmo hoje. Com efeito,

> [a] história dos complexos ilustra bem como um conceito matemático fundamental pode demorar muito até ser bem compreendido e aceito. É uma história longa de resistência, por parte de excelentes matemáticos, a admitirem a existência dos números complexos, mesmo quando os usavam (Morgado et al:[20], p. 149).

Presume-se que, em 1539, o matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576) tenha obtido o método de Tartaglia[1] para a resolução de uma equação do terceiro grau[2] do tipo $x^3 + \rho x = \eta$, tendo-o publicado em seu livro *Ars Magna*,[3] de 1545. Nesse contexto surgiu

> [a] real motivação para a introdução dos números complexos (...) quando [Cardano] descobriu que algumas equações do terceiro grau - chamadas por ele de caso irredutível - possuíam raízes reais, mas em cujas fórmulas resolventes não se conseguia evitar expressões envolvendo radicais quadráticos de números negativos (Hefez e Villela:[12], p. 54).

[1] Niccoló Tartaglia (1499-1557).

[2] Na notação atual, pois Cardano escreveu sua obra sem simbolismo algébrico.

[3] Nele há também o método de "resolução da equação do quarto grau devida ao seu discípulo Ludovico Ferrari" ([12], p. 177).

A exemplo, se tomarmos a equação

$$x^3 - 21x = 20, \tag{1.1}$$

as fórmulas de Cardano[4] fornecem, em particular, a raiz

$$\sqrt[3]{10+9\sqrt{-3}} + \sqrt[3]{10-9\sqrt{-3}}. \tag{1.2}$$

Mas, por inspeção, vê-se que as únicas raízes de (1.1) são -4, -1 e 5.

De que maneira, então, se poderia justificar[5] a raiz em (1.2)? Coube ao matemático italiano Rafael Bombelli (1526-1572) empreender uma tal tarefa em torno de 1550. Sendo

> discípulo de Cardano, [Bombelli] compreendeu melhor a álgebra dos números complexos. Ao retomar o estudo da equação do terceiro grau, ele introduziu sua quantidade “piu di meno”, que corresponde a $\sqrt{-1}$, e enunciou, sob forma de versos, as regras de operação com ela. Embora afirmasse que os números complexos [eram] inúteis e “sofísticos”, Bombelli operou livremente com eles ([20], pp. 150-151).

Seguindo, pois, Bombelli, se deve observar, em resposta à pergunta lançada, que[6]

$$\begin{aligned}
\left(-2+\sqrt{-3}\right)^3 &= (-2)^3 + 3\cdot(-2)^2\cdot\sqrt{-3} + 3\cdot(-2)\cdot(\sqrt{-3})^2 + (\sqrt{-3})^3 \\
&= -8 + 12\sqrt{-3} + 18 - 3\sqrt{-3} \\
&= 10 + 9\sqrt{-3}
\end{aligned}$$

e, de modo análogo,

$$\begin{aligned}
\left(-2-\sqrt{-3}\right)^3 &= (-2)^3 + 3\cdot(-2)^2\cdot(-\sqrt{-3}) + 3\cdot(-2)\cdot(-\sqrt{-3})^2 + (-\sqrt{-3})^3 \\
&= -8 - 12\sqrt{-3} + 18 + 3\sqrt{-3} \\
&= 10 - 9\sqrt{-3}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sqrt[3]{10+9\sqrt{-3}} + \sqrt[3]{10-9\sqrt{-3}} = (-2+\sqrt{-3}) + (-2-\sqrt{-3}) = -4.$$

A começar pelo século XVIII, o desenvolvimento dos números complexos esteve ligado, sobretudo, ao Teorema Fundamental da Álgebra (doravante, T.F.A.) segundo o qual[7]

[4] Cf. [12], pp. 173-178.

[5] Não se pode deixar de registrar que, “na época em que vivia [Cardano], só se conheciam os números reais e, portanto, as raízes quadradas de números negativos eram consideradas inexistentes, logo essas soluções eram tidas como absurdas” (ibid., p. 2).

[6] Note-se que Bombelli não dispunha, contudo, do simbolismo e notação atuais.

[7] A despeito do nome, o T.F.A. “é um teorema de Análise, não sendo conhecida nenhuma prova puramente algébrica dele” (ibid., p. 189).

Todo polinômio não constante a coeficientes complexos possui uma raiz complexa.

Dentre os matemáticos que se dedicaram a demonstrá-lo e que, com isso, deram algum contributo aos complexos, convém destacar, em especial, o francês Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) e o suíço Leonhard Euler (1707-1783).

A prova de D'Alembert é a primeira ao T.F.A. e data de 1746. No entanto, ela continha defeitos. De fato,

> a demonstração de D'Alembert não mostra nem que existem raízes da equação. Ele demonstra qual a forma das raízes, se elas existirem. O mérito do trabalho de D'Alembert foi o de divulgar os números complexos, pois nele encontra-se [uma] exposição da teoria dos números complexos e das funções complexas (idem, p. 152).

A prova de Euler remonta a 1749. Com ele há avanços notáveis em torno do T.F.A., dos quais sobressai o fato de que se $a+b\sqrt{-1}$ é raiz de um polinômio não constante, então o seu conjugado[8] $a-b\sqrt{-1}$ também o é. Seus estudos o[9] levaram, por conseguinte, a "estudar cuidadosamente as operações com números complexos, incluindo potências imaginárias, logaritmos de números complexos, funções trigonométricas de argumento complexo, etc." (idem, p. 153).

Todavia, os sérios esforços de D'Alembert e de Euler acerca do T.F.A. foram objeto de crítica por parte do matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) em sua tese de doutoramento, de 1799.[10] Nela, além das

> críticas às demonstrações anteriores do teorema [, Gauss] deu uma nova demonstração de cujas falhas ele tinha consciência. Ao longo da vida, Gauss, deu quatro provas do Teorema Fundamental da Álgebra, todas com alguma falha, dado o grau insuficiente do desenvolvimento da Matemática na época. (...) Hoje há uma grande quantidade de provas, sendo esse resultado corolário de "quase todo" teorema profundo de Análise ([12], p. 190).

Sob este prima, é "provável que a idéia de representar geometricamente os complexos tenha ocorrido a Gauss ao demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra, mesmo que ele não tenha utilizado isso na demonstração" ([20], p. 155). Além dele, dedicaram-se, de modo independente, a obter uma tal representação o norueguês Caspar Wessel (1745-1818), os franceses Lazare Carnot (1753-1823) e Adrian Quentin Buée (1748-1826), e o italiano Jean Robert Argand (1768-1822). Não obstante,

> com exceção de Carnot, os outros eram muito pouco conhecidos, e foi necessário o prestígio de Gauss para tornar conhecida e aceita a representação geométrica dos números complexos. Ele publicou suas idéias em 1831, referindo-se "à verdadeira metafísica das quantidades imaginárias" (idem, pp. 155-156).

Naquele mesmo ano, Gauss dará aos "números" com os quais, a princípio, Cardano se deparou o nome de ***números complexos***. Em verdade,

---

[8] Ide à Definição 1.2.

[9] Tendo sido ele quem, em 1777, denotou $\sqrt{-1}$ por i.

[10] Segundo ([20], p. 155), Gauss também analisou a prova de Foncenet, de 1759; bem como, a de Lagrange, de 1772.

> [a] associação dos números complexos aos pontos do plano é enfatizada por Gauss como por nenhum outro matemático antes dele. No entanto, (...) o passo decisivo para que o estatuto dos números complexos seja firmemente estabelecido é a construção de uma teoria algébrica para estes números, o que só foi possível com a introdução da noção de *vetor*. Este conceito-chave da Matemática surgiu, ainda no século XIX, com o trabalho de W. R. Hamilton[a] (Roque e Carvalho:[22], p. 325).
>
> [a] William Rowan Hamilton (1805-1865)

1.2 O Corpo $\mathbb{C}$

A fundamentação teórica dos números complexos que adotaremos aqui é aquela "devida ao matemático irlandês William R. Hamilton e apareceu em 1837" (Soares:[24], p. 4). Nisto consiste a

Definição 1.1. *Designa-se por $\mathbb{C}$ o conjunto $\mathbb{R}^2$ munido das seguintes operações de adição e multiplicação:*

(i) $(a,b)+(x,y)=(a+x,\, b+y)$.

(ii) $(a,b)\cdot(x,y)=(ax-by,\, ay+bx)$.

Dá-se a cada elemento de $\mathbb{C}$ o nome de ***número complexo***.

A sentença precedente torna imediata a identificação entre um número complexo, um ponto e um vetor do plano. Particularmente,

> a soma de dois números complexos é representada por um vetor cujas componentes são as somas das componentes dos vetores dados. Isto significa, como se vê pela [F]igura [1.1], que a soma é representada geometricamente pela diagonal do paralelogramo construído sobre os vetores dados ([20], p. 95).

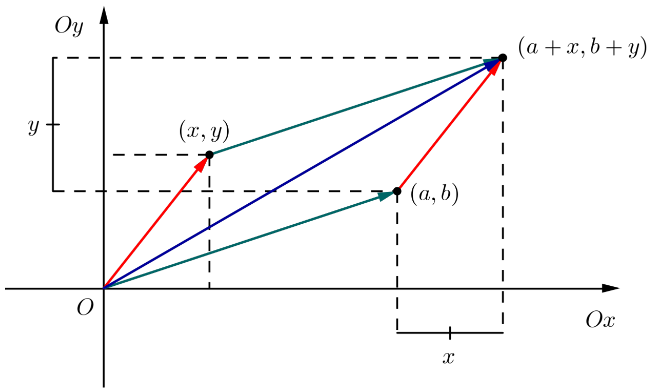

Figura 1.1 A adição de complexos geometricamente.

Não há dificuldade em constatar que $\mathbb{C}$ goza das propriedades comutativa e associativa para ambas as suas operações, bem como da propriedade distributiva da multiplicação com respeito à adição.[11] No mais, seja dado $(a,b) \in \mathbb{C}$. Tem-se que o elemento neutro da adição é $(0,0)$ e o da multiplicação é $(1,0)$. De fato,

$$(a,b)+(0,0) = (a+0,\, b+0) = (a,b),$$

$$(a,b)\cdot(1,0) = (a\cdot 1 - b\cdot 0,\, a\cdot 0 + b\cdot 1) = (a,b).$$

Mais ainda, o simétrico de (a,b) é o complexo $(-a,-b)$, pois

$$(a,b)+(-a,-b) = (a+(-a),\, b+(-b)) = (0,0).$$

Não é imediato, contudo, que todo complexo (a,b) não nulo[12] possui um inverso, a saber:

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right).$$

Com efeito,

$$(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{aa-b(-b)}{a^2+b^2}, \frac{a(-b)+ba}{a^2+b^2}\right) = (1,0).$$

Estas propriedades reunidas estabelecem, em suma, o

Teorema 1.1 (Hefez:[10], p. 174)**.** $\mathbb{C}$ *é um corpo.*

É útil observar que, dado $z=(a,b)\in\mathbb{C}$, vale

$$z = (a,0)+(0,b) = (a,0)+(b,0)\cdot(0,1). \tag{1.3}$$

Isto nos diz que "todo número complexo pode ser representado usando somente os números da forma $(x,0)$ e o número $(0,1)$" (idem, p. 175).

Tomado, pois, a função

$$\begin{array}{rcl} \rho : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & (x,0). \end{array}$$

Tem-se que

(i) $\rho(x+y) = (x+y,\, 0) = (x,0)+(y,0) = \rho(x)+\rho(y)$.

(ii) $\rho(x\cdot y) = (x\cdot y,\, 0) = (x,0)\cdot(y,0) = \rho(x)\cdot\rho(y)$.

(iii) $\rho(1) = (1,0)$.

[11] Para tanto, basta recordar as propriedades análogas das quais o corpo $\mathbb{R}$ dispõe.

[12] Isto significa que $a^2+b^2 \neq 0$.

Ademais, $\rho(x) = \rho(y) \Leftrightarrow (x,0) = (y,0) \Leftrightarrow x = y$.

Com isso, ρ "é um homomorfismo injetor de anéis", em presença do qual se pode "identificar $\mathbb{R}$ com o subcorpo" $\rho(\mathbb{R})$ do corpo $\mathbb{C}$ (idem, p. 175).

Pondo, então, $x = (x,0)$ e $i = (0,1)$, a igualdade (1.3) significa:

$$z = (a,0) + (b,0) \cdot (0,1) = a + b \cdot i.$$

À última igualdade dá-se o nome de ***forma normal*** do complexo z, a qual, por vezes, se escreve sob a forma $z = a + bi$.

Note agora que $i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$. Por conseguinte, vê-se que "acabamos de construir um corpo que contém o corpo $\mathbb{R}$ e no qual a equação $z^2 + 1 = 0$ admite uma raiz (o número i)" (idem, p. 175).

Neste ponto, em posse da forma normal de um complexo z, interessa-nos estabelecer propriedades elementares adicionais do corpo $\mathbb{C}$. Para isto, faz-se útil a

Definição 1.2 (Cf. [10], p. 179)**.** *Seja $z = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$. Define-se **conjugado** de z como sendo $\overline{z} = a - bi$ e o **módulo** de z como sendo o real não negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. A **parte real** e a **parte imaginária** de z são, respectivamente, os números reais $\mathfrak{Re}\,(z) = a$ e $\mathfrak{Im}\,(z) = b$.*

Perceba que $\overline{z}$ é o simétrico de z relativamente ao eixo Ox, enquanto que $|z|$ é a distância do ponto $z = (a,b)$ à origem $O = (0,0)$.

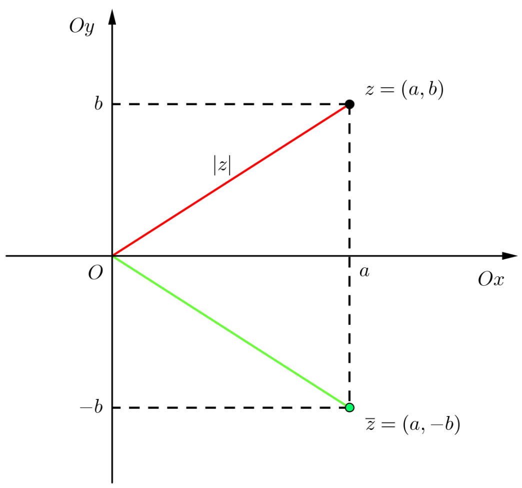

Figura 1.2 O módulo e o conjugado de z.

Há também um elo entre o módulo e o conjugado de um complexo z, qual seja:

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Por extensão, temos ainda a

Proposição 1.1 (Cf. [10], pp. 179-180)**.** *Sejam $z \in \mathbb{C}$ e $w \in \mathbb{C}$. São válidas as seguintes propriedades para a conjugação:*

(i) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.

(ii) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

(iii) *se* $z \neq 0$, *então* $\overline{\left(\dfrac{w}{z}\right)} = \dfrac{\overline{w}}{\overline{z}}$.

(iv) $\overline{z} = 0$ *se, e somente se,* $z = 0$.

(v) $\overline{\overline{z}} = z$.

(vi) z *é real se, e somente se,* $z = \overline{z}$.

Demonstração. Sejam dados $z = a + bi \in \mathbb{C}$ e $w = x + yi \in \mathbb{C}$.

(i) Sendo $\overline{z} = a - bi$ e $\overline{w} = x - yi$, temos

$$\overline{z} + \overline{w} = a + x - (b + y)i = \overline{(a+x) + (b+y)i} = \overline{z+w}.$$

(ii) Nas notações do item *(i)*, vale

$$\overline{z} \cdot \overline{w} = ax - by - (ay + bx)i = \overline{ax - by + (ay + bx)i} = \overline{z \cdot w}.$$

(iii) Como $z = a + bi \neq 0$, então $\overline{z} = a - bi \neq 0$. Portanto:

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} &= \overline{\left(\frac{x+yi}{a+bi}\right)} \\
&= \overline{\left(\frac{x+yi}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi}\right)} \\
&= \overline{\left(\frac{xa+yb+(ya-xb)i}{a^2+b^2}\right)} \\
&= \frac{xa+yb-(ya-xb)i}{a^2+b^2} \\
&= \frac{(x-yi)(a+bi)}{(a+bi)(a-bi)} \\
&= \frac{x-yi}{a-bi} \\
&= \frac{\overline{w}}{\overline{z}}.
\end{aligned}$$

(iv) Se $\bar{z} = a - bi = 0 = 0 - 0i$, então $a = 0$ e $b = 0$. Portanto, $z = a + bi = 0 + 0i = 0$. Reciprocamente, se $z = 0 = 0 + 0i$, então $\bar{z} = 0 - 0i = 0$.

(v) É evidente que $z = a + bi = a - (-b)i = \overline{a + (-b)i} = \overline{a - bi} = \bar{\bar{z}}$.

(vi) Se $z = a$ é real, então $z = a = a + 0i = a - 0i = \bar{z}$. Reciprocamente, se

$$a + b\,i = z = \bar{z} = a - bi,$$

então $b = -b$ e, daí, $2b = 0$. Em suma: $b = 0$. Logo, $z = a + 0i = a$ é real. □

Nesta altura, passamos a introduzir

> uma outra representação, devida a Euler, dos números complexos não nulos (...). Esta representação é de fundamental importância, pois relaciona os números complexos com as funções trigonométricas, permitindo calcular com maior facilidade o produto de dois números complexos (...), bem como interpretar geometricamente [esta operação] ([12], p. 26).

Para começar, seja dado um complexo não nulo $z = a + bi$. Ao ângulo orientado $\theta \in [0, 2\pi)$, que o vetor (a, b) determina com o eixo Ox, dá-se o nome de ***argumento principal*** de z. Nessas condições,

$$\begin{cases} a = |z| \cos\theta \\ b = |z| \sin\theta. \end{cases}$$

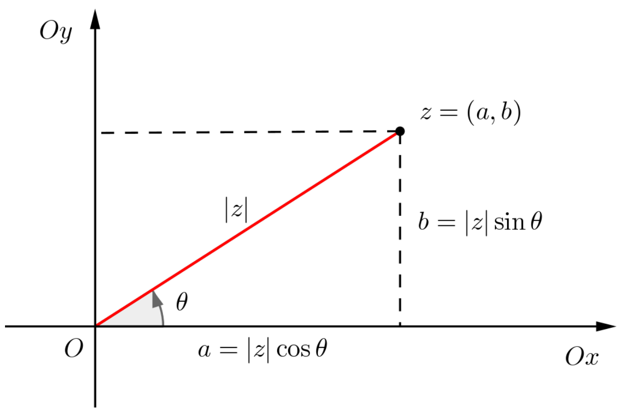

Figura 1.3 O argumento principal de z.

Pode-se, então, escrever

$$z = |z|(\cos\,\theta + i \sin\,\theta).$$

Nisto reside a representação prometida, chamada de ***forma polar*** do complexo z.[13]

[13] Naturalmente, $|z|(\cos\,\theta + i \sin\,\theta) = |w|(\cos\,\beta + i \sin\,\beta)$ se, e só se, $|z| = |w|$ e $\theta = \beta + 2n\pi$, para algum $n \in \mathbb{Z}$.

Proposição 1.2 (Cf. [10], p. 182)**.** *Sejam dados os complexos* $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ *e* $w = |w|(\cos\beta + i\sin\beta)$*. Tem-se que*

$$z \cdot w = |z||w|[\cos(\theta+\beta) + i\sin(\theta+\beta)].$$

Demonstração. Com efeito,

$$\begin{aligned} z\cdot w &= |z||w|[(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\beta + i\sin\beta)] \\ &= |z||w|[\cos\theta\cos\beta - \sin\theta\sin\beta + i(\cos\theta\sin\beta + \sin\theta\cos\beta)] \\ &= |z||w|[\cos(\theta+\beta) + i\sin(\theta+\beta)]. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Sendo (1.4) devido às fórmulas de adição do seno e do cosseno. □

O último resultado fornece uma interpretação geométrica para a multiplicação em $\mathbb{C}$. Nas suas notações, ***a obtenção do produto de*** z ***por*** w***, reduz-se a calcular o produto dos módulos de*** z ***e*** w ***e a somar os seus argumentos principais*** θ ***e*** β.

Exemplo 1.1. *Seja* $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C} - \{0\}$*. Afirmamos que* iz *é o resultado da rotação de* z *em torno da origem segundo um ângulo de* $\pi/2$ *radianos no sentido trigonométrico.*

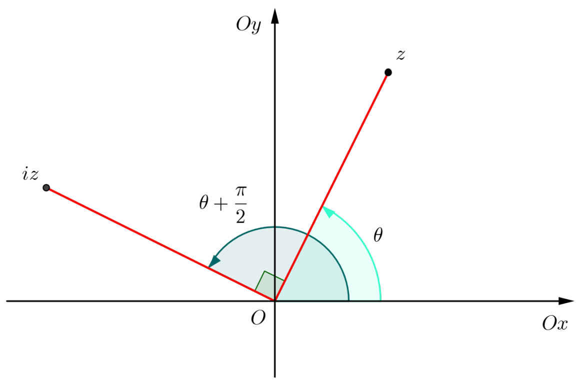

Figura 1.4 O produto iz.

Para ver isto, perceba que $i = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)$, *com* $|i| = 1$. *Então,*

$$iz = |z|\left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Logo, o módulo de iz *é igual a* $|z|$ *e o seu argumento principal é côngruo a* $\theta + \dfrac{\pi}{2}$. ■

CAPÍTULO 2

TÓPICOS DE ÁLGEBRA LINEAR E ARITMÉTICA

Neste capítulo, colecionamos os principais resultados da Álgebra Linear e da Aritmética de que lançaremos mão adiante. Para começar, tomaremos como axiomas a caracterização da função determinante, designada por det, segundo a qual ela é a única função n-linear alternada das colunas (ou linhas) de uma matriz $n \times n$ que assume o valor 1 na matriz identidade; bem como ambas as versões do Princípio de Indução Finita; e a existência do anel dos números inteiros $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Particularmente, definimos o conjunto dos números naturais por

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} : \ n \geqslant 1\}.$$

2.1 Congruências e a Função Parte Inteira

O par de conceitos que intitulam esta seção constitui o ferramental aritmético adequado às noções introduzidas nos capítulos posteriores, o qual passamos a desenvolver.

Definição 2.1 (Santos:[23], p. 3)**.** *Se a e b são inteiros, dizemos que a **divide** b se existir um inteiro q tal que $b = aq$. Denotamos isto por*

$$a \mid b.$$

*Nesse caso, dizemos ainda que b é **divisível** por a. Se a não divide b, escrevemos $a \nmid b$.*

Exemplo 2.1. *Tem-se que* $3 \mid 111$, *pois* $111 = 3 \cdot 37$. *Mas,* $3 \nmid 17$. ■

Proposição 2.1 (Hefez:[9], pp. 46-48)**.** *Sejam $a, b, c, x, y \in \mathbb{Z}$, tem-se que*

(i) $a \mid 0$.

(ii) *Se $a \mid b$, então $a \mid -b$.*

(iii) Se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$.

(iv) Se $a \mid b$ e $a \mid c$, então $a \mid (xb + yc)$.

Demonstração. *(i)* Basta ver que $0 = a \cdot 0$ e, daí, $a \mid 0$.

(ii) Ora, $a \mid b$ significa que existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $b = aq$. Então, $-b = a(-q)$ e, assim, $a \mid -b$.

(iii) Resulta de $b \mid c$ que $c = bq$, para algum $q \in \mathbb{Z}$. Analogamente, $a \mid b$ implica que $b = aq'$, para um certo $q' \in \mathbb{Z}$. Temos, então, que

$$c = bq = (aq')q = a(qq')$$

com $qq' \in \mathbb{Z}$. Logo, $a \mid c$.

(iv) A hipótese nos diz que $b = aq$ e $c = aq'$, para certos q e q' em $\mathbb{Z}$. Então,

$$xb + yc = x(aq) + y(aq') = a(xq + yq'). \tag{2.1}$$

Mas, $xq + yq' \in \mathbb{Z}$. Segue-se, pois, de (2.1) que $a \mid (xb + yc)$. □

Encontramo-nos agora em condições de enunciar a

Definição 2.2 (Cf. [23], p. 32)**.** *Seja $n \in \mathbb{N} - \{1\}$. Se a e b são inteiros, dizemos que a é **congruente** a b módulo n se $n \mid (a - b)$. Denotamos isto por*

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

*Se $n \nmid (a - b)$ dizemos que a é **incongruente** a b módulo n e denotamos $a \not\equiv b \pmod{n}$.*

É de todo útil o

Exemplo 2.2. *Dado $n \in \mathbb{Z}$. A divisão euclidiana[1] de n por 2 nos diz que existem únicos $q \in \mathbb{Z}$ e $r \in \mathbb{Z}$ tais que*

$$n = 2q + r, \quad \text{com} \quad r \in \{0, 1\}.$$

Logo,

$$n - r = 2q \Leftrightarrow 2 \mid (n - r) \Leftrightarrow n \equiv r \pmod{2}.$$

■

Nas notações do exemplo precedente, vê-se que n é ***par*** se, e só se, $n \equiv 0 \pmod{2}$; bem como, que n é ***ímpar*** se, e só se, $n \equiv 1 \pmod{2}$.

[1] Cf. [9], p. 53.

Proposição 2.2 (Muniz Neto:[21], p. 120)**.** *Dados inteiros a, b, c, d e n, sendo $n > 1$, temos:*

(i) $a \equiv a \pmod{n}$.

(ii) *Se* $a \equiv b \pmod{n}$, *então* $b \equiv a \pmod{n}$.

(iii) *Se* $a \equiv b \pmod{n}$ *e* $b \equiv c \pmod{n}$, *então* $a \equiv c \pmod{n}$.

(iv) *Se* $a \equiv b \pmod{n}$ *e* $c \equiv d \pmod{n}$, *então* $a + c \equiv b + d \pmod{n}$.

Demonstração. *(i)* Basta notar que $n \mid 0 = (a - a)$.

(ii) Temos que $n \mid (a - b)$, pois $a \equiv b \pmod{n}$. Então, $n \mid -(a - b) = (b - a)$ e $b \equiv a \pmod{n}$.

(iii) Por hipótese, $n \mid (a - b)$ e $n \mid (b - c)$. Logo,

$$n \mid (a - b) + (b - c) = (a - c).$$

e $a \equiv c \pmod{n}$.

(iv) Neste caso, $n \mid (a - b)$ e $n \mid (c - d)$. Assim,

$$n \mid (a - b) + (c - d) = ((a + c) - (b + d)).$$

E, daí, $a + c \equiv b + d \pmod{n}$. □

Segundo Santos [23], reside na próxima sentença "uma importante função em Teoria dos Números" (p. 76).

Definição 2.3. *Damos o nome de* ***Parte Inteira*** *à função*

$$\begin{array}{rccc} \lfloor\ \rfloor : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$$

para a qual $\lfloor x \rfloor$ *é o maior inteiro menor do que ou igual a* x.

Exemplo 2.3. $\lfloor 0 \rfloor = 0$, $\lfloor -0,1 \rfloor = -1$, $\lfloor 1/2 \rfloor = 0$ *e* $\lfloor 7,2 \rfloor = 7$. ■

É conveniente perceber que, se $n \in \mathbb{Z}$, então

$$\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \leqslant x < n + 1,$$

de acordo com Muniz Neto ([21], p. 5). Dito isto, a divisão euclidiana de $n \in \mathbb{Z}$ por $a \in \mathbb{N}$ garante que existem únicos $q \in \mathbb{Z}$ e $r \in \mathbb{Z}$ tais que

$$n = aq + r \quad \text{e} \quad 0 \leqslant r < a.$$

Somando-se, pois, o produto aq em toda a desigualdade precedente, temos

$$aq \leqslant aq + r < aq + a \quad \text{e} \quad aq \leqslant n < a(q+1).$$

Resulta, dividindo esta última desigualdade por a, que

$$q \leqslant \frac{n}{a} < q + 1 \quad \text{e} \quad q = \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor.$$

Com isto, provamos a

Proposição 2.3. *Se $n \in \mathbb{Z}$ e $a \in \mathbb{N}$, então o quociente da divisão de n por a é igual a $\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$.*

Em vista do último resultado, vale, de imediato, a

Proposição 2.4 (Cf. [23], p. 77)**.** *Se $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{N}$, então $\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$ é o número de inteiros do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ que são divisíveis por a.*

Ressaltamos que a proposição subsequente será indispensável mais tarde.

Proposição 2.5. *Se $n \in \mathbb{Z}$, então*

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \dfrac{n-1}{2} & \text{se } n \equiv 1 \pmod 2 \\ \\ \dfrac{n}{2} & \text{se } n \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}.$$

Demonstração. Seja $r \in \{0, 1\}$. Se $n \equiv r \ (mod\, 2)$, então $2 \mid (n-r)$, isto é, existe $q \in \mathbb{Z}$ de modo que $n - r = 2q$ e, daí,

$$q = (n-r)/2.$$

Não obstante, posto que $n - r = 2q$ implica $n = 2q + r$, com $r \in \{0, 1\}$, q é claramente o quociente da divisão de n por 2, donde a Proposição 2.3 garante que $q = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Logo,

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-r}{2} = \begin{cases} \dfrac{n-1}{2} & \text{se } r = 1 \\ \\ \dfrac{n}{2} & \text{se } r = 0 \end{cases}.$$

E o resultado segue. $\square$

2.2 Espaços Vetoriais, Bases e Aplicações Lineares

É do espírito matemático a atitude de reconhecer padrões e estruturas subjacentes a objetos aparentemente distintos. Em Álgebra Linear, este arcabouço generalizado corresponde à ideia de *espaço vetorial* que passamos a definir, em particular, sobre o corpo $\mathbb{K}$, em que $\mathbb{K}$ denotará o corpo $\mathbb{R}$ ou o corpo $\mathbb{C}$.

Definição 2.4 (Bueno:[2], pp. 1-2; Hefez e Fernandez:[11], pp. 3-4)**.** *Um conjunto* $\mathbb{V}$ *munido de uma operação, dita* ***adição***,

$$\begin{array}{rcl} + : \mathbb{V}\times\mathbb{V} & \longrightarrow & \mathbb{V} \\ (u,v) & \longmapsto & u+v \end{array}$$

e de uma ação, nomeada ***multiplicação por escalar***,

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{K}\times\mathbb{V} & \longrightarrow & \mathbb{V} \\ (\alpha,v) & \longmapsto & \alpha v \end{array}$$

tais que, para todos $u \in \mathbb{V}$, $v \in \mathbb{V}$, $w \in \mathbb{V}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ *e* $\beta \in \mathbb{K}$, *temos*

(i) $(u+v)+w = u+(v+w)$ *(associatividade);*

(ii) $u+v = v+u$ *(comutatividade);*

(iii) *existe* $\mathcal{O}_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V}$ $tal\ que$ $v+\mathcal{O}_{\mathbb{V}} = v$ *(elemento neutro);*

(iv) *existe* $-v \in \mathbb{V}$ $tal\ que$ $-v+v = \mathcal{O}_{\mathbb{V}}$ *(elemento oposto);*

(v) $\alpha(u+v) = \alpha u+\alpha v$ *(distributividade);*

(vi) $(\alpha+\beta)v = \alpha v+\beta v$ *(distributividade);*

(vii) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ *(associatividade);*

(viii) $1v = v$ *(regra da unidade),*

é chamado de ***espaço vetorial*** $(\mathbb{V}, +, \cdot)$ *sobre o corpo* $\mathbb{K}$ *e seus elementos serão ditos* ***vetores*** *do espaço, ao passo que os elementos de* $\mathbb{K}$ *serão chamados de* ***escalares****.*

Resulta da definição precedente algumas consequências que nos serão imprescindíveis adiante, as quais ora destacamos. Sejam, então, dados $v \in \mathbb{V}$, $w \in \mathbb{V}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$:

1) se $w+v = w$ então $v = \mathcal{O}_{\mathbb{V}}$;

2) $0 \cdot v = \mathcal{O}_{\mathbb{V}}$;

3) $\alpha \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{V}} = \mathcal{O}_{\mathbb{V}}$.

Para o item (1), basta ver que

$$v = \mathcal{O}_{\mathbb{V}}+v = (-w+w)+v = -w+(w+v) = -w+w = \mathcal{O}_{\mathbb{V}}.$$

Vale o item (2), porquanto

$$v + 0 \cdot v = 1 \cdot v + 0 \cdot v = (1+0) \cdot v = 1 \cdot v = v$$

e, daí, $0 \cdot v = \mathcal{O}_{\mathbb{V}}$, em face ao item (1).

Quanto ao item (3), temos

$$\alpha \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{V}} = \alpha \cdot (\mathcal{O}_{\mathbb{V}} + \mathcal{O}_{\mathbb{V}}) = \alpha \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{V}} + \alpha \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{V}},$$

e isto implica $\alpha \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{V}} = \mathcal{O}_{\mathbb{V}}$, novamente pelo item (1).

Definição 2.5 (Lima:[13], p. 3). *Dados $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}$. Uma **matriz** $n \times m$ $A = [a_{ij}]$ é uma lista de elementos $a_{ij} \in \mathbb{K}$ com índices duplos, em que $1 \leqslant i \leqslant n$ e $1 \leqslant j \leqslant m$. Costuma-se representar a matriz A como um quadro numérico com n linhas e m colunas, no qual o elemento a_{ij}, dito **termo** de A, por vezes, indicado por $[A]_{ij}$, situa-se no cruzamento da i-ésima linha com a j-ésima coluna:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

*Quando $n = m$, diz-se que A é uma **matriz quadrada**.*

A exemplo de Bueno ([2], p. 26), podemos ainda enxergar a matriz A em (2.2) segundo suas linhas ou colunas, escrevendo:

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}$$

com

$$v_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad l_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \end{bmatrix}.$$

Parafraseando Lima [13], é imediato constatar que o conjunto $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ de todas as matrizes $n \times m$ com termos em $\mathbb{K}$ torna-se um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{G}$, com $\mathbb{G}$ sendo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, quando nele se define as operações usuais de adição e multiplicação por escalar. Ademais, “a matriz nula $\mathbf{0}_{n\times m} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ é aquela formada por zeros e o inverso aditivo da matriz $A = [a_{ij}]$ é $-A = [-a_{ij}]$” (p. 3). Por fim, se $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, dizemos que A é uma ***matriz real***.

Definição 2.6 (Cf. [2], p.30). *Se $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ for uma matriz $m \times n$, definimos a **transposta** de A como a matriz $A^{\boldsymbol{t}} = [a^{\boldsymbol{t}}_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$, com $a^{\boldsymbol{t}}_{ij} = a_{ji}$.*

Definição 2.7. *Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$. Dá-se o nome de **matriz conjugada** de A à matriz $\overline{A} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ obtida de A tomando-se o conjugado em cada um dos seus termos.*

Proposição 2.6. *Sejam A e B em $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ e $\rho \in \mathbb{K}$, tem-se que*

(i) $\overline{\overline{A}} = A$.

(ii) $\overline{A+\rho B} = \overline{A} + \overline{\rho}\,\overline{B}$.

(iii) $\overline{A} = A$ *se, e somente se, A é uma matriz real.*

Demonstração. São imediatos os itens *(i)* e *(iii)*. A fim de constatar *(ii)*, sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$. Temos, então, que

$$\overline{A+\rho B} = \left[\overline{a_{ij}+\rho b_{ij}}\right] = \left[\overline{a_{ij}}+\overline{\rho b_{ij}}\right] = \left[\overline{a_{ij}}+\overline{\rho}\,\overline{b_{ij}}\right] = \left[\overline{a_{ij}}\right] + \left[\overline{\rho}\,\overline{b_{ij}}\right] = \overline{A} + \overline{\rho}\,\overline{B}.$$

□

Definição 2.8 (Cf. [11], p. 16)**.** *Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ e $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times r}(\mathbb{K})$. O **produto** de A por B, denotado por AB ou $A\cdot B$, é a matriz $C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times r}(\mathbb{K})$ tal que*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$$

para todo $1 \leqslant i \leqslant n$ e para todo $1 \leqslant j \leqslant r$.

Em tudo o que segue, denota-se por $\mathcal{I}_n$ a ***matriz identidade*** $n\times n$, definida por

$$[\mathcal{I}_n]_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Pode-se provar que valem[2] as seguintes propriedades quanto ao produto de matrizes, "desde que as operações sejam possíveis" ([11], p. 17):

1) $(AB)C = A(BC)$;

2) $A(B+C) = AB+AC$; $(A+B)C = AC+BC$;

3) $A\cdot\mathcal{I}_m = A$, $\mathcal{I}_n\cdot A = A$ se $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$;

4) $A(\eta B) = \eta(AB)$, com $\eta \in \mathbb{K}$.

[2]Cf. [13], p. 91.

Definição 2.9 (Cf. [2], p. 28). *Seja A uma matriz $n \times n$. Dizemos que A é* ***invertível****, se existir uma matriz B tal que*

$$AB = BA = \mathfrak{I}_n.$$

É fácil ver que existe no máximo uma matriz B com tal propriedade. Denotamos, portanto, $B = A^{-1}$ e chamamos A^{-1} de ***inversa*** *da matriz A.*

Aos capítulos posteriores será indispensável "o conceito de matriz em blocos. Uma matriz A é dita ser uma [***matriz particionada em blocos***] se A está subdividida em matrizes menores, chamadas ***blocos***. Esta subdivisão é, geralmente, apresentada por linhas horizontais e/ou verticais" ([11], pp. 18-19). Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 7 \end{array}\right].$$

Se pusermos ainda

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix},$$

podemos, então, escrever

$$A = \begin{bmatrix} M & S \end{bmatrix}.$$

Assim, diz-se que A está particionada segundo os blocos M e S.

Mas se pode ir além: "[u]ma propriedade interessante da partição em blocos é que os resultados das operações de adição e multiplicação com matrizes em blocos podem ser obtidos efetuando o cálculo com os blocos, como se eles fossem simplesmente elementos das matrizes" (idem, p. 19).

A exemplo, sejam dadas as matrizes particionadas em blocos[3]

$$P = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nm} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mr} \end{bmatrix}.$$

Segundo Callioli et al [4], "se o número de colunas de cada A_{ij} for igual ao número de linhas de cada B_{jk}, então

$$PQ = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nr} \end{bmatrix}$$

onde $C_{ik} = \sum_{j=1}^{m} A_{ij}B_{jk}$" (p. 273).

[3]Neste caso, os blocos que constituem uma mesma linha (resp. coluna) da partição de P possuem o mesmo número de linhas (resp. colunas). Idem para a matriz Q.

Nesta altura, introduz-se "[o]s espaços vetoriais de dimensão finita (...) [que] possuem uma estrutura algébrica extremamente simples, evidenciada pelas idéias de base e dimensão, que apresentaremos agora" ([13], p. 264).

Definição 2.10 (Cf. [2], p. 3). *Seja $\mathcal{R} \subset \mathbb{V}$ um subconjunto qualquer de um espaço vetorial $\mathbb{V}$. Uma **combinação linear** de elementos de $\mathcal{R}$ é uma soma (finita)*

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k$$

com $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ e $v_1, \ldots, v_k \in \mathcal{R}$.

*O conjunto $\mathcal{R}$ é **linearmente dependente** (L.D.), se existir um número finito de elementos*

$$v_1, \ldots, v_k \in \mathcal{R}$$

e escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$, não todos nulos, tais que

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = \mathcal{O}_{\mathbb{V}}.$$

*Caso contrário, o conjunto $\mathcal{R}$ é **linearmente independente** (L.I.).*

*O conjunto $\mathcal{R}$ **gera** o espaço $\mathbb{V}$ se, para todo $v \in \mathbb{V}$, existirem (finitos) elementos $v_1, \ldots, v_j \in \mathcal{R}$ e escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_j \in \mathbb{K}$ tais que $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_j v_j$.*

*Uma **base** de $\mathbb{V}$ é um subconjunto ordenado $\mathcal{B} \subset \mathbb{V}$ que é linearmente independente e gera $\mathbb{V}$. Um espaço vetorial $\mathbb{V}$ tem **dimensão finita**, se possuir uma base com um número finito de elementos. Caso contrário, ele tem **dimensão infinita**.*

Prova-se que "todas as bases de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ de dimensão finita possuem o mesmo número de elementos" ([2], p. 4). Em visto disso, se tem a

Definição 2.11 (Cf. [2], p. 5). *Se $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ for uma base do espaço vetorial $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{K}$, dizemos que $\mathbb{V}$ tem dimensão n e escrevemos*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = n.$$

Se $\mathbb{V} = \{\mathcal{O}_{\mathbb{V}}\}$, $\mathbb{V}$ tem dimensão finita igual a zero.

Goza de papel preponderante o

Exemplo 2.4. *Dados $i, j \in \mathbb{N}$, com $1 \leqslant i \leqslant n$ e $1 \leqslant j \leqslant m$.*

Seja $\mathcal{P}_{ij} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ a matriz definida por

$$\left[\mathcal{P}_{ij}\right]_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{se } (r,s) = (i,j) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Tem-se que o conjunto de $n \times m$ elementos

$$\mathcal{B}_{n\times m} = \{\mathcal{P}_{11}, \mathcal{P}_{12}, \ldots, \mathcal{P}_{1m}, \ldots, \mathcal{P}_{n1}, \mathcal{P}_{n2}, \ldots, \mathcal{P}_{nm}\}$$

*é a **base canônica** do espaço vetorial $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ sobre o corpo $\mathbb{C}$.*

Por conseguinte, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C}) = n \times m$. ■

De acordo com Hefez e Fernandez [11],

> [as aplicações] nas quais se está interessado na Álgebra Linear são [aquelas] cujos domínios e contradomínios são espaços vetoriais e que, além disso, preservam as operações de adição de vetores e de multiplicação de um vetor por um escalar (p. 110).

Nisto consiste a

Definição 2.12 (Cf. [2], p. 2)**.** *Sejam $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação*

$$\mathcal{T} : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$$

satisfazendo

$$\mathcal{T}(u+\eta v) = \mathcal{T}(u) + \eta\mathcal{T}(v)$$

*para quaisquer u e v em $\mathbb{V}$ e $\eta \in \mathbb{K}$ é chamada **transformação linear** ou **aplicação linear**. Se $\mathbb{V} = \mathbb{W}$, também chamamos $\mathcal{T}$ de **operador linear** ou simplesmente **operador**.*

Temos, pois, que, se $\mathcal{T} : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ é uma aplicação linear, então

$$\mathcal{T}(\mathcal{O}_{\mathbb{V}}) = \mathcal{T}(0 \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{V}}) = 0 \cdot \mathcal{T}(\mathcal{O}_{\mathbb{V}}) = \mathcal{O}_{\mathbb{W}}. \tag{2.3}$$

Definição 2.13 (Cf. [4], p. 114)**.** *Entende-se por **isomorfismo** do espaço vetorial $\mathbb{V}$ no espaço vetorial $\mathbb{W}$ uma aplicação linear $\mathcal{T} : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ que seja uma bijeção. Um isomorfismo $\mathcal{T} : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ é um **automorfismo** de $\mathbb{V}$.*

Definição 2.14 (Cf. [4], p. 246)**.** *Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e seja $\mathcal{T} : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ um operador linear. Um vetor $v \in \mathbb{V}$, $v \neq \mathcal{O}_{\mathbb{V}}$, é um **autovetor** de $\mathcal{T}$ se existe um escalar $\eta \in \mathbb{K}$ tal que $\mathcal{T}(v) = \eta v$. Neste caso, η é um **autovalor** de $\mathcal{T}$ associado a v.*

Prosseguindo com Bueno ([2], p. 80), ao conjunto dos autovalores de um operador linear $\mathcal{T} : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ dá-se o nome de ***espectro*** de $\mathcal{T}$ e denota-se por $\sigma(\mathcal{T})$.

2.3 Determinantes e Sistemas Lineares

Seja $A = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, expressa segundo suas colunas. A afirmação feita no prólogo deste capítulo quanto à função

$$\begin{array}{rccc} \det : & \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & A & \longmapsto & \det(v_1, \dots, v_n) \end{array}$$

diz respeito à "caracterização axiomática feita por Weierstrass [segundo a qual] todas as propriedades dos determinantes podem, em princípio, ser deduzidas das seguintes" ([13], p. 264):

1) $\det(v_1, \dots, v_k + \eta v_k', \dots, v_n) = \det(v_1, \dots, v_k, \dots, v_n) + \eta \det(v_1, \dots, v_k', \dots, v_n)$;

2) $\det(v_1, \dots, v_n) = 0$, sempre que $v_k = v_j$, para $k, j \in \{1, \dots, n\}$, com $k \neq j$;

3) $\det \mathcal{I}_n = 1$.

Por razões de brevidade, optamos por omitir as provas dos três próximos teoremas. Para vê-las, remetemos o leitor à obra da qual eles são consignados.[4]

Teorema 2.1 (Cf. [13], p. 265)**.** *Se* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ *e* $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, *então*

$$\det(BA) = \det B \cdot \det A.$$

Teorema 2.2 (Cf. [13], p. 265)**.** *Se* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, *então* $\det A \neq 0$ *se, e só se,* A *é invertível.*

Teorema 2.3 (Cf. [13], p. 268)**.** *Se* $D \in \mathcal{M}_{r\times r}(\mathbb{C})$, $N \in \mathcal{M}_{r\times (n-r)}(\mathbb{C})$, $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_{(n-r)\times r}(\mathbb{C})$ *e* $Y \in \mathcal{M}_{(n-r)\times(n-r)}(\mathbb{C})$ *então o determinante da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} D & N \\ \mathbf{0} & Y \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$$

é igual a $\det D \cdot \det Y$.

Tendo chegado a este ponto, cumpre tratarmos do segundo tópico ao qual devotamos esta seção, a começar pela

[4] Considere ainda o Cap. 21 no qual o autor estende os resultados dos capítulos precedentes a espaços vetoriais complexos.

Definição 2.15 (Cf. [4], p. 2). *Dados os escalares* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$ *em* $\mathbb{K}$, *à equação*

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = \beta \tag{2.4}$$

onde os x_i *são variáveis em* $\mathbb{K}$, *damos o nome de* ***equação linear sobre*** $\mathbb{K}$ ***nas incógnitas*** $x_1, \ldots, x_n$. *Se* $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ *são tais que*

$$\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n = \beta,$$

dizemos que a n-***upla*** $(b_1, \ldots, b_n)$ *é uma* ***solução*** *de* (2.4).

Podemos agora estabelecer a

Definição 2.16 (Cf. [4], pp. 2-3). ***Um sistema de*** m ***equações lineares com*** n ***incógnitas sobre*** $\mathbb{K}$ *é um conjunto de* m *equações lineares sobre* $\mathbb{K}$, *cada uma delas com* n *incógnitas, consideradas simultaneamente. Um sistema linear se apresenta do seguinte modo:*

$$\mathcal{S} : \left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha_{11}x_1 & + & \ldots & + & \alpha_{1n}x_n & = & \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 & + & \ldots & + & \alpha_{2n}x_n & = & \beta_2 \\ & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 & + & \ldots & + & \alpha_{mn}x_n & = & \beta_m. \end{array} \right.$$

Uma ***solução*** *de* $\mathcal{S}$ *é uma* n-*upla* $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ *que é solução de cada uma de suas equações. Se* $m = n$, *dizemos simplesmente que* $\mathcal{S}$ *é um* ***sistema linear de ordem*** n *sobre* $\mathbb{K}$.

Particularmente, se

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix},$$

então $\mathcal{S}$ escreve-se, equivalentemente, como

$$Ax = b,$$

em que à matriz A dá-se o nome de ***matriz dos coeficientes*** de $\mathcal{S}$.

Terminamos este capítulo, apresentando o método para o qual pretendemos dar uma interpretação alternativa no plano complexo. Trata-se do

Teorema 2.4 (A Regra de Cramer (Cf. [13], p. 265)). *Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ uma matriz invertível. Dado $b \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$, indiquemos com o símbolo $A[j;b]$ a matriz obtida de A quando se substitui sua j-ésima coluna por b. A solução do sistema linear $Ax = b$, de n equações a n incógnitas, é a matriz*

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^{\boldsymbol{t}} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$$

cujos termos são

$$x_j = \frac{\det A[j;b]}{\det A}, \quad j = 1,\dots,n.$$

Demonstração. Seja $A = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix}$, expressa segundo suas colunas. Então, a igualdade $Ax = b$ escreve-se sob a forma: $b = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k$. Fixo j em $\{1,\dots,n\}$, temos

$$\begin{aligned} \det A[j;b] &= \det(v_1, \dots, b, \dots, v_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \det(v_1, \dots, v_k, \dots, v_n) \\ &= x_j \cdot \det(v_1, \dots, v_j, \dots, v_n) \\ &= x_j \cdot \det A, \end{aligned}$$

já que $\det(v_1, \dots, v_k, \dots, v_n) = 0$, sempre que $k \neq j$. Logo, $x_j = \det A[j;b]/\det A$. $\square$

CAPÍTULO 3

TRANSLINEAÇÃO HORIZONTAL DE MATRIZES

3.1 Motivação

Sejam a, b, c, d, p e q números reais. Consideremos o sistema linear

$$\mathcal{S} : \begin{cases} ax + by = p \\ \\ cx + dy = q \end{cases}$$

o qual, matricialmente, pode ser expresso segundo o produto

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}.$$

Recordemos agora, consoante Hefez e Villela ([12], p. 57), o fato de que "a identificação do ponto (x, y) do plano $\mathbb{R}^2$ com o número complexo $z = x + iy$" estabelece, "recorrendo ao seu conjugado $\overline{z} = x - iy$", um modo segundo o qual se pode exprimir as coordenadas x e y em termos de z e $\overline{z}$; a saber:

$$x = \mathfrak{Re}\,(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{e} \quad y = \mathfrak{Im}\,(z) = \frac{i\overline{z} - iz}{2}. \tag{3.1}$$

Segue-se daí, completam os autores, que "uma equação com coeficientes reais nas variáveis x e y pode ser reescrita, no plano complexo[1] $\mathbb{C}$, como uma equação em z e $\overline{z}$ com coeficientes complexos" (p. 57).

Queremos, então, reescrever, equivalentemente, cada equação de $\mathcal{S}$ por meio das expressões

[1]Isto é, "o plano $\mathbb{R}^2$ enriquecido com a estrutura complexa" ([12], p. 56).

em (3.1). Nesse intento, para a primeira equação, observe que

$$\begin{aligned}
ax+by &= a\Big(\frac{z+\overline{z}}{2}\Big)+b\Big(\frac{i\overline{z}-iz}{2}\Big)\\
&= \frac{az+a\overline{z}+bi\overline{z}-biz}{2}\\
&= \frac{az-biz}{2}+\frac{a\overline{z}+bi\overline{z}}{2}\\
&= \Big(\frac{a-bi}{2}\Big)z+\Big(\frac{a+bi}{2}\Big)\overline{z}\\
&= \Big(\frac{a-bi}{2}\Big)(x+iy)+\Big(\frac{a+bi}{2}\Big)(x-iy).
\end{aligned}$$

Para a segunda equação, de modo análogo, obtém-se

$$cx+dy = \Big(\frac{c-di}{2}\Big)(x+iy)+\Big(\frac{c+di}{2}\Big)(x-iy).$$

Sendo assim, $\mathcal{S}$ pode ser reescrito sob a forma

$$\mathcal{S}:\begin{cases}\Big(\frac{a-bi}{2}\Big)(x+iy)+\Big(\frac{a+bi}{2}\Big)(x-iy)=p\\[2ex] \Big(\frac{c-di}{2}\Big)(x+iy)+\Big(\frac{c+di}{2}\Big)(x-iy)=q.\end{cases}$$

e, daí, matricialmente como:

$$\begin{bmatrix}\dfrac{a-bi}{2} & \dfrac{a+bi}{2}\\[2ex] \dfrac{c-di}{2} & \dfrac{c+di}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x+iy\\[1ex] x-iy\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p\\[1ex] q\end{bmatrix}.$$

Diante do exposto, é natural definir as aplicações

$$\begin{aligned}
\tau:\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})\\
\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} &\longmapsto \begin{bmatrix}\dfrac{a-bi}{2} & \dfrac{a+bi}{2}\\[2ex] \dfrac{c-di}{2} & \dfrac{c+di}{2}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{array}{rcl}\varphi : \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{C}) \\ \begin{bmatrix} x \\ \\ y \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} x+iy \\ \\ x-iy \end{bmatrix}\end{array}$$

a fim de haurir delas propriedades e invariantes que nos digam algo a respeito de $\mathcal{S}$, o qual passa a ser escrito do seguinte modo:

$$\tau(A)\cdot\varphi(\beta) = \eta \tag{3.2}$$

com $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ e $\eta = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$.

Neste ponto, observe que

$$\begin{aligned}\det\tau(A) &= \det\begin{bmatrix} \dfrac{a-bi}{2} & \dfrac{a+bi}{2} \\ \\ \dfrac{c-di}{2} & \dfrac{c+di}{2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\det\begin{bmatrix} a-bi & a+bi \\ \\ c-di & c+di \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\left((a-bi)(c+di)-(a+bi)(c-di)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(ac+adi-bci+bd-(ac-adi+bci+bd)\right) \\ &= \frac{1}{4}(2adi-2bci) \\ &= \frac{i}{2}(ad-bc) \\ &= \frac{i}{2}\det A.\end{aligned}$$

Nesse sentido, em face ao Teorema 2.2, $\tau(A)$ é invertível, desde que A seja invertível.

Seja agora $\mathcal{S}_\tau$ o sistema linear

$$\tau(A)\cdot z = \eta \tag{3.3}$$

com $z \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{C})$.

Supondo A invertível, temos que $\tau(A)$ também o é. Mais ainda, A ser invertível implica que $\mathcal{S}$ possui uma única solução $\beta \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$. Com isso, tendo em vista a igualdade (3.2), segue-se que $\varphi(\beta) \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{C})$ é solução de $\mathcal{S}_\tau$.

Por outro lado, $\tau(A)$ ser invertível implica que $\mathcal{S}_\tau$ também possui solução única $z \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{C})$, cujos termos, segundo a Regra de Cramer,[2] são

$$z_j = \frac{\det\ \tau(A)[j;\eta]}{\det\ \tau(A)} \qquad j = 1, 2.$$

Resulta, então, que

$$\varphi(\beta) = z,$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} x+yi \\ \\ x-yi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\det \tau(A)[1;\eta]}{\det \tau(A)} \\ \\ \dfrac{\det \tau(A)[2;\eta]}{\det \tau(A)} \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Particularmente, temos

$$x+yi = \frac{\det \tau(A)[1;\eta]}{\det \tau(A)}.$$

Por conseguinte,

$$\frac{\det \tau(A)[1;\eta]}{\det \tau(A)} = \frac{\det \begin{bmatrix} p & \dfrac{a+bi}{2} \\ \\ q & \dfrac{c+di}{2} \end{bmatrix}}{\frac{i}{2}\det A} = \frac{\frac{1}{2}\det \begin{bmatrix} p & a+bi \\ \\ q & c+di \end{bmatrix}}{\frac{i}{2}\det A} = \frac{\det \begin{bmatrix} p & a+bi \\ \\ q & c+di \end{bmatrix}}{i\det A}.$$

E podemos, por meio da identificação $x+yi = (x,y)$, escrever[3]

$$(x,y) = \frac{\det \begin{bmatrix} p & a+bi \\ \\ q & c+di \end{bmatrix}}{i\det A}.$$

E, com a discussão precedente, tem-se estabelecido o

Teorema 3.1. *Sejam a, b, c, d, p e q números reais. Dado o sistema linear*

$$\mathcal{S} : \begin{cases} ax+by = p \\ \\ cx+dy = q. \end{cases}$$

[2]Cf. Teorema 2.4.

[3]Posto que $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, em vista de serem termos de β, uma matriz real.

Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *é invertível, então a solução de* $\mathcal{S}$ *é dada por*

$$(x,y) = \frac{\det \begin{bmatrix} p & a+bi \\ \\ q & c+di \end{bmatrix}}{i \det A}.$$

Demonstração. Efetuada. □

Noutras palavras, o resultado precedente torna exequível a obtenção, a um só tempo, de ambos os termos da solução de um sistema linear de ordem 2 sobre $\mathbb{R}$ com matriz dos coeficientes invertível. Para tanto, ele nos impõe simplesmente o labor de desenvolver um quociente no qual constam dois determinantes em $\mathbb{C}$, dispensando-se o uso de um terceiro, como exige o método clássico de Cramer. Note ainda que este labor pode ser feito sem grande preocupação, porque ao final de tal desenvolvimento bastará olhar para as partes real e imaginária do que obtivemos, ao que se distingirá que incógintas do par (x,y) foram determinadas.

Para fins de ilustração, segue o

Exemplo 3.1. *Seja* $\mathcal{S} : \begin{cases} 2x & + & y & = & 1 \\ \\ 5x & + & 4y & = & 3. \end{cases}$

Perceba que $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ *é invertível, dado que* $\det A = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 1 = 3 \neq 0$.

O Teorema 3.1 nos diz, então, que

$$\begin{aligned} (x,y) &= \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ \\ 3 & 5+4i \end{bmatrix}}{3i} \\ &= \frac{5+4i-6-3i}{3i} \\ &= \frac{-1+i}{3i} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3i} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i. \end{aligned}$$

Portanto, o par $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ *é a solução de* $\mathcal{S}$*, como se pode facilmente verificar.* ■

Nesta altura, convém dizer que o Teorema 3.1 é, a menos de simplificações adicionais, um caso particular do que chamaremos de a *Regra dos Termos Duais*. Por isso, a fim de a externar em toda a sua generalidade, estendendo-a a sistemas lineares de ordem $n > 2$ sobre $\mathbb{R}$ cuja matriz dos coeficientes seja invertível, trataremos, primeiro, de generalizar as aplicações τ e φ para espaços matriciais quaisquer.

3.2 Translineadora Horizontal do Espaço $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$

Dado $m \in \mathbb{N}$. Para principiar a generalização da aplicação τ, de agora em diante, indicaremos por $\mathcal{N}_m$ o conjunto $\{x \in \mathbb{N} : x \leqslant m\}$; e, em particular, por $\mathcal{N}_0$ o conjunto vazio $\varnothing$. Nesse sentido, a definição seguinte é o início do nosso intento.

Definição 3.1. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Dado o espaço vetorial $\mathcal{M}_{1\times m}(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$. Dá-se o nome de **Translineadora do Espaço** $\mathcal{M}_{1\times m}(\mathbb{C})$ à aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \tau_{\langle m\rangle} : & \mathcal{M}_{1\times m}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{1\times m}(\mathbb{C}) \\ & [a_d] & \longmapsto & [\alpha_d] \end{array}$$

com $d \in \mathcal{N}_m$ definida por

$$\alpha_d = \begin{cases} \dfrac{a_d - ia_{(d+1)}}{2} & se \quad d \equiv 1 \pmod 2 \\ \\ \dfrac{a_{(d-1)} + ia_d}{2} & se \quad d \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$$

quando $m \equiv 0 \pmod 2$, e

$$\tau_{\langle m\rangle}([a_d]) = \begin{cases} [a_1] & se \quad m = 1 \\ \\ \left[\ \tau_{\langle m-1\rangle}([a_d] \setminus a_m) \ \middle|\ a_m\ \right] & se \quad m > 1 \end{cases}$$

caso contrário. Em que $[a_d] \setminus a_m$ denota a matriz $1 \times (m-1)$ obtida de $[a_d]$ pela eliminação do seu último termo.

*A que chamamos $\tau_{\langle m\rangle}([a_d])$ de a **Linha Translinear** de $[a_d]$.*

Para ilustrar, temos o

Exemplo 3.2. *Dadas as matrizes*

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{C}), \\ B &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 2}(\mathbb{C}), \\ C &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 3}(\mathbb{C}), \\ D &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 4}(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Segundo a Definição 3.1, devemos ter, conforme seja

(i) $m=1$*:*

$$\tau_{\langle 1\rangle}(A)=\tau_{\langle 1\rangle}([a_1])=[a_1]=A.$$

(ii) $2\equiv 0\ (mod\, 2)$*:*

$$\begin{aligned}\tau_{\langle 2\rangle}(B) &= \tau_{\langle 2\rangle}\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2\end{bmatrix}\right)\\ &= \begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\dfrac{a_1-ia_{(1+1)}}{2} & \dfrac{a_{(2-1)}+ia_2}{2}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\dfrac{a_1-ia_2}{2} & \dfrac{a_1+ia_2}{2}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(iii) $3\equiv 1\ (mod\, 2)$*:*

$$\begin{aligned}\tau_{\langle 3\rangle}(C) &= \begin{bmatrix}\tau_{\langle 3-1\rangle}\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2\end{bmatrix}\right) \mid a_3\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\tau_{\langle 2\rangle}\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2\end{bmatrix}\right) \mid a_3\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\dfrac{a_1-ia_2}{2} & \dfrac{a_1+ia_2}{2} & a_3\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(iv) $4\equiv 0\ (mod\, 2)$*:*

$$\begin{aligned}\tau_{\langle 4\rangle}(D) &= \tau_{\langle 4\rangle}\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4\end{bmatrix}\right)\\ &= \begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\dfrac{a_1-ia_{(1+1)}}{2} & \dfrac{a_{(2-1)}+ia_2}{2} & \dfrac{a_3-ia_{(3+1)}}{2} & \dfrac{a_{(4-1)}+ia_4}{2}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\dfrac{a_1-ia_2}{2} & \dfrac{a_1+ia_2}{2} & \dfrac{a_3-ia_4}{2} & \dfrac{a_3+ia_4}{2}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

■

Note que, fazendo $a_1=a$ e $a_2=b$ no item *(ii)* do último exemplo, temos

$$\tau_{\langle 2\rangle}\left(\begin{bmatrix} a & b\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\dfrac{a-bi}{2} & \dfrac{a+bi}{2}\end{bmatrix}.$$

Mais geralmente, seja

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{m-1} & a_m\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{1\times m}(\mathbb{C}).$$

Se $m = 1$, então o item *(i)* do Exemplo 3.2, nos diz que $\tau_{\langle 1\rangle}$ é o operador identidade do espaço $\mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{C})$.

Supondo, então, $m > 1$, há dois casos a considerar a depender da paridade de m.

Se $m \equiv 0 \ (mod\ 2)$, então

$$\begin{aligned}
\tau_{\langle m\rangle}(A) &= \tau_{\langle m\rangle}\left(\left[\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & \ldots & a_{m-1} & a_m \end{array}\right]\right) \\
&= \left[\begin{array}{ccccc} \dfrac{a_1 - ia_2}{2} & \dfrac{a_1 + ia_2}{2} & \ldots & \dfrac{a_{(m-1)} - ia_m}{2} & \dfrac{a_{(m-1)} + ia_m}{2} \end{array}\right]. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\tau_{\langle m\rangle}(A) &= \tau_{\langle m\rangle}\left(\left[\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & \ldots & a_{m-2} & a_{m-1} & a_m \end{array}\right]\right) \\
&= \left[\begin{array}{c|c} \tau_{\langle m-1\rangle}\left(\left[\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & \ldots & a_{m-2} & a_{m-1} \end{array}\right]\right) & a_m \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cccccc} \dfrac{a_1 - ia_2}{2} & \dfrac{a_1 + ia_2}{2} & \ldots & \dfrac{a_{(m-2)} - ia_{(m-1)}}{2} & \dfrac{a_{(m-2)} + ia_{(m-1)}}{2} & a_m \end{array}\right] \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

caso tenhamos $m \equiv 1 \ (mod\ 2)$.

No que se segue, já de posse da translineadora $\tau_{\langle m\rangle}$ do espaço $\mathcal{M}_{1\times m}(\mathbb{C})$, aplicaremos a noção de linha translinear a matrizes em geral a fim de, dada uma matriz A em $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$, estabelecer o que chamaremos de a *Matriz Translinear Horizontal* de A, a qual poderá ser determinada sob três aspectos distintos, conforme se perceberá no decorrer desta e das duas próximas seções. O primeiro deles é delineado pela definição a seguir.

Definição 3.2. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}$. Dado o espaço vetorial $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$. Damos o nome de* ***Translineadora Horizontal do Espaço*** $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ *à aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \tau_{\langle n\times m\rangle}: & \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C}) \\ & A & \longmapsto & \tau_{\langle n\times m\rangle}(A) \end{array}$$

tal que, para cada $j \in \mathbb{N}_n$, a j-ésima linha de $\tau_{\langle n\times m\rangle}(A)$ é a linha translinear da j-ésima linha de A.

A que chamamos $\tau_{\langle n\times m\rangle}(A)$ de a ***Matriz Translinear Horizontal*** *de A.*

Note que, de imediato, $\tau_{\langle 1\times m\rangle} = \tau_{\langle m\rangle}$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.3. *Seja*

$$A = \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}).$$

Pode-se, a partir da Definição 3.2, escrever

$$\tau_{\langle 2\times 2\rangle}(A) = \begin{bmatrix} \tau_{\langle 2\rangle}\left(\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}\right) \\ \\ \tau_{\langle 2\rangle}\left(\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a-bi}{2} & \frac{a+bi}{2} \\ \\ \frac{c-di}{2} & \frac{c+di}{2} \end{bmatrix}.$$

Particularmente, pondo acima $a = d = 1$ e $b = c = 0$, chega-se a

$$\tau_{\langle 2\times 2\rangle}(\mathcal{I}_2) = \begin{bmatrix} \frac{1-0i}{2} & \frac{1+0i}{2} \\ \\ \frac{0-1i}{2} & \frac{0+1i}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \\ -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}).$$

Relembrando a aplicação τ definida na Seção 3.1, temos que $\tau = \tau_{\langle 2\times 2\rangle}|_{\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})}$. ■

Mais geralmente, seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(m-1)} & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(m-1)} & a_{nm} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C}).$$

Procede da Definição 3.2 que

$$\tau_{\langle n\times m\rangle}(A) = \begin{bmatrix} \tau_{\langle m\rangle}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(m-1)} & a_{1m} \end{bmatrix}\right) \\ \vdots \\ \tau_{\langle m\rangle}\left(\begin{bmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(m-1)} & a_{nm} \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix}.$$

Perceba que, se $m = 1$, então

$$\tau_{\langle n\times 1\rangle}(A) = \begin{bmatrix} \tau_{\langle 1\rangle}([a_{11}]) \\ \vdots \\ \tau_{\langle 1\rangle}([a_{n1}]) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} = A$$

e $\tau_{\langle n\times 1\rangle}$ é o operador identidade do espaço $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$.

Seja $m > 1$. Tendo $m \equiv 0 \ (mod\ 2)$, vale

$$\tau_{\langle n\times m\rangle}(A) = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}-ia_{12}}{2} & \frac{a_{11}+ia_{12}}{2} & \dots & \frac{a_{1(m-1)}-ia_{1m}}{2} & \frac{a_{1(m-1)}+ia_{1m}}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{a_{n1}-ia_{n2}}{2} & \frac{a_{n1}+ia_{n2}}{2} & \dots & \frac{a_{n(m-1)}-ia_{nm}}{2} & \frac{a_{n(m-1)}+ia_{nm}}{2} \end{bmatrix}$$

para o que procedemos com cada linha de A como em (3.5).

Por outro lado, se $m \equiv 1 \ (mod\, 2)$, prosseguindo como em (3.6), chega-se a

$$\tau_{\langle n\times m\rangle}(A) = \begin{bmatrix} \tau_{\langle m-1\rangle}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1(m-2)} & a_{1(m-1)} \end{bmatrix}\right) & a_{1m} \\ \vdots & \vdots \\ \tau_{\langle m-1\rangle}\left(\begin{bmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n(m-2)} & a_{n(m-1)} \end{bmatrix}\right) & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{a_{11}-ia_{12}}{2} & \frac{a_{11}+ia_{12}}{2} & \ldots & \frac{a_{1(m-2)}-ia_{1(m-1)}}{2} & \frac{a_{1(m-2)}+ia_{1(m-1)}}{2} & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{a_{n1}-ia_{n2}}{2} & \frac{a_{n1}+ia_{n2}}{2} & \ldots & \frac{a_{n(m-2)}-ia_{n(m-1)}}{2} & \frac{a_{n(m-2)}+ia_{n(m-1)}}{2} & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

É útil notar em (3.7) que se pode escrever também

$$\tau_{\langle n\times m\rangle}(A) = \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} \tau_{\langle m-1\rangle}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1(m-2)} & a_{1(m-1)} \end{bmatrix}\right) \\ \vdots \\ \tau_{\langle m-1\rangle}\left(\begin{bmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n(m-2)} & a_{n(m-1)} \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix} & \begin{matrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{matrix} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \tau_{\langle n\times(m-1)\rangle}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1(m-2)} & a_{1(m-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n(m-2)} & a_{n(m-1)} \end{bmatrix}\right) & \begin{matrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{matrix} \end{array}\right]. \tag{3.8}$$

Nesse sentido, seja v_m a m-ésima coluna da matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$. Se $A \setminus v_m$ denota a matriz $n \times (m-1)$ obtida de A pela eliminação da sua última coluna, a igualdade (3.8) se escreve do seguinte modo:

$$\tau_{\langle n\times m\rangle}(A) = \left[\begin{array}{c|c} \tau_{\langle n\times(m-1)\rangle}(A\setminus v_m) & v_m \end{array}\right]. \tag{3.9}$$

Em palavras, se $m > 1$ e $m \equiv 1 \ (mod\, 2)$, para determinar a matriz translinear horizontal de A, basta-nos conhecer a matriz translinear horizontal de $A \setminus v_m$, uma vez que, ao aplicarmos a translineadora sobre a matriz A, a sua última coluna permanece inalterada.

3.3 Colunas de uma Matriz Translinear Horizontal

Seja $A = [a_{jd}] \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$. Interessa-nos agora estudar as colunas da matriz translinear horizontal de A em face às colunas de A. Dado $d \in \mathcal{N}_m$. Sejam, de agora em diante, v_d a d-ésima coluna de A e $\mathcal{V}_d$ a d-ésima coluna de $\tau_{\langle n\times m\rangle}(A)$.

É oportuno, ademais, definir o conjunto[4]

$$\mathbb{A}_m = \begin{cases} \mathcal{N}_{m-1} & \text{se } \ m \equiv 1 \ (mod\, 2) \\ \mathcal{N}_m & \text{se } \ m \equiv 0 \ (mod\, 2). \end{cases}$$

[4]Perceba que $\mathbb{A}_1 = \mathcal{N}_{1-1} = \mathcal{N}_0 = \varnothing$ e que $\mathbb{A}_m \neq \varnothing$ para todo $m \in \mathbb{N} - \{1\}$.

De início, convém realizar tal estudo quando $m \equiv 0 \ (mod\, 2)$. Nesse caso, seja fixo d em $\mathcal{N}_m = \mathbb{A}_m$. Resulta das Definições 3.1 e 3.2 que

(i) $d \equiv 1 \ (mod\, 2)$ implica

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_d &= [\alpha_{jd}] \\ &= \left[\frac{a_{jd} - ia_{j(d+1)}}{2}\right] \\ &= \frac{[a_{jd} - ia_{j(d+1)}]}{2} \\ &= \frac{[a_{jd}] - i\,[a_{j(d+1)}]}{2} \\ &= \frac{v_d - iv_{d+1}}{2} \end{aligned} \tag{3.10}$$

(ii) $d \equiv 0 \ (mod\, 2)$ implica

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_d &= [\alpha_{jd}] \\ &= \left[\frac{a_{j(d-1)} + ia_{jd}}{2}\right] \\ &= \frac{[a_{j(d-1)} + ia_{jd}]}{2} \\ &= \frac{[a_{j(d-1)}] + i\,[a_{jd}]}{2} \\ &= \frac{v_{d-1} + iv_d}{2} \end{aligned} \tag{3.11}$$

em que $j \in \mathcal{N}_n$.

Seja qual for a paridade de m, é natural ainda definir os conjuntos

$$\mathbb{A}_m[1] = \{x \in \mathbb{A}_m : x \equiv 1 \ (mod\, 2)\}$$

e

$$\mathbb{A}_m[0] = \{x \in \mathbb{A}_m : x \equiv 0 \ (mod\, 2)\},$$

para os quais[5] se tem evidentemente a reunião disjunta

$$\mathbb{A}_m = \mathbb{A}_m[1] \cup \mathbb{A}_m[0].$$

E a discussão precedente permite provar o

[5] É claro que se tem $\mathbb{A}_m[1] \neq \varnothing$ e $\mathbb{A}_m[0] \neq \varnothing$ para cada $m \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Teorema 3.2. *Para cada $d \in \mathcal{N}_m$, temos que a d-ésima coluna da matriz translinear horizontal de $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ é dada por*

$$\mathcal{V}_d = \begin{cases} \dfrac{v_d - iv_{d+1}}{2} & \text{se} \quad d \in \mathbb{A}_m[1] \\[2em] \dfrac{v_{d-1} + iv_d}{2} & \text{se} \quad d \in \mathbb{A}_m[0] \end{cases}$$

quando $m \equiv 0 \pmod 2$, e

$$\mathcal{V}_d = \begin{cases} \dfrac{v_d - iv_{d+1}}{2} & \text{se} \quad d \in \mathbb{A}_m[1] \\[2em] \dfrac{v_{d-1} + iv_d}{2} & \text{se} \quad d \in \mathbb{A}_m[0] \\[2em] v_m & \text{se} \quad d = m \end{cases}$$

caso contrário.

Demonstração. Há dois casos a ponderar segundo a paridade de m.

(i) Se $m \equiv 0 \pmod 2$, o resultado segue do que fizemos para obter (3.10) e (3.11).

(ii) Seja, então, $m \equiv 1 \pmod 2$.

Para $m = 1$, temos $A = v_1$ e, daí, $\mathcal{V}_1 = \tau_{\langle n\times 1\rangle}(v_1) = v_1$.

Sendo $\mathcal{N}_1 = \{1\}$ e $\mathbb{A}_1 = \varnothing$, donde $\mathbb{A}_1[1] = \mathbb{A}_1[0] = \varnothing$, o resultado se verifica neste caso.

Para $m > 1$, basta-nos recordar a igualdade (3.9), na qual se pode aplicar o item *(i)* à matriz $\tau_{\langle n\times(m-1)\rangle}(A \setminus v_m)$, haja vista $m - 1 \equiv 0 \pmod 2$. Tal igualdade, então, nos dá

$$\mathcal{V}_d = \begin{cases} \dfrac{v_d - iv_{d+1}}{2} & \text{se} \quad d \in \mathbb{A}_{m-1}[1] \\[2em] \dfrac{v_{d-1} + iv_d}{2} & \text{se} \quad d \in \mathbb{A}_{m-1}[0] \\[2em] v_m & \text{se} \quad d = m \end{cases}.$$

Para terminar, perceba que $\mathbb{A}_{m-1} = \mathcal{N}_{m-1} = \mathbb{A}_m$. $\square$

Nesta altura, temos o seguinte quadro: por um lado, a Definição 3.2 nos ensina que a translineadora horizontal $\tau_{\langle n\times m\rangle}$ é uma aplicação que age sobre as linhas de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ dada; e, por outro, o Teorema 3.2 nos fornece uma reinterpretação desta translineadora dando-nos um meio adicional àquela definição para determinar a matriz translinear horizontal de A por meio, agora, das colunas de A. Nisto consiste o segundo aspecto a que aludimos no decurso da última seção.

Exemplo 3.4. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & i & -i & 8 \\ 2 & 2 & 7 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{C})$.

Perceba que

$$\mathbb{A}_4 = \mathcal{N}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$$

pois $4 \equiv 0 \ (mod\ 2)$.

Segue-se, então, do Teorema 3.2, que

$$d \in \mathbb{A}_4[1] \Rightarrow \mathcal{V}_d = \frac{v_d - iv_{d+1}}{2}$$

e

$$d \in \mathbb{A}_4[0] \Rightarrow \mathcal{V}_d = \frac{v_{d-1} + iv_d}{2}.$$

Posto que $\mathbb{A}_4[1] = \{1, 3\}$, *temos*

$$\mathcal{V}_1 = \frac{v_1 - iv_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - i\begin{bmatrix} i \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 2-2i \\ 1-6i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 1-i \\ \\ \frac{1}{2}-3i \end{bmatrix}$$

e

$$\mathcal{V}_3 = \frac{v_3 - iv_4}{2} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -i \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} - i\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -9i \\ 7-i \\ 3-2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{9i}{2} \\ \\ \frac{7-i}{2} \\ \\ \frac{3}{2}-i \end{bmatrix}.$$

Ao tempo que, como $\mathbb{A}_4[0] = \{2, 4\}$, *decorre*

$$\mathcal{V}_2 = \frac{v_1 + iv_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} i \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 2+2i \\ 1+6i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 1+i \\ \\ \frac{1}{2}+3i \end{bmatrix}$$

e

$$\mathcal{V}_4 = \frac{v_3 + iv_4}{2} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} -i \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7i \\ 7+i \\ 3+2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7i}{2} \\ \frac{7+i}{2} \\ \frac{3}{2}+i \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\tau_{\langle 3\times 4\rangle}(A) = \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 & \mathcal{V}_2 & \mathcal{V}_3 & \mathcal{V}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{9i}{2} & \frac{7i}{2} \\ 1-i & 1+i & \frac{7-i}{2} & \frac{7+i}{2} \\ \frac{1}{2}-3i & \frac{1}{2}+3i & \frac{3}{2}-i & \frac{3}{2}+i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{C}).$$

■

Queremos agora tornar mais prática a obtenção da matriz translinear horizontal de uma matriz A por meio das expressões do Teorema 3.2 para o caso em que A é uma matriz real, isto é, quando $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, com $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N} - \{1\}$. Mais precisamente, delinearemos o modo por meio do qual se poderá obter, pelo conhecimento de uma coluna de $\tau_{\langle n\times m\rangle}(A)$ cujo índice pertença a $\mathbb{A}_m$, a coluna vizinha imediata desta.

Para isso, seja dado $m \in \mathbb{N} - \{1\}$. Repare que $x \in \mathbb{A}_m[1] \Rightarrow x+1 \in \mathbb{A}_m[0]$. Para demonstrar, comecemos por perceber que

$$x \in \mathbb{A}_m[1] \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{A}_m \text{ e } x \equiv 1 \ (mod\, 2).$$

Seja, então, $m \equiv 0 \ (mod\, 2)$, donde $\mathbb{A}_m = \mathcal{N}_m$, com $m \geqslant 2$. Logo,

$$x \in \mathbb{A}_m[1] \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathcal{N}_m \text{ e } x \equiv 1 \ (mod\, 2).$$

Sendo x e m incongruentes módulo 2, é nítido que $x \neq m$. Isto garante que $1 \leqslant x \leqslant m-1$ e, daí, $2 \leqslant x+1 \leqslant m$, ou seja, $x+1 \in \mathcal{N}_m = \mathbb{A}_m$. Por outro lado, $x+1 \equiv 0 \ (mod\, 2)$, o que implica $x+1 \in \mathbb{A}_m[0]$.

Para o caso em que $m \equiv 1 \ (mod\, 2)$, basta lembrar que $\mathbb{A}_m = \mathbb{A}_{m-1}$, de modo que

$$\mathbb{A}_m[1] = \mathbb{A}_{m-1}[1] \quad \text{e} \quad \mathbb{A}_m[0] = \mathbb{A}_{m-1}[0]. \tag{3.12}$$

Recaímos, assim, no caso anterior, pois $m-1 \equiv 0 \ (mod\, 2)$ e $m-1 \in \mathbb{N} - \{1\}$, em vista de $m \geqslant 3$.

Para cada $m \in \mathbb{N} - \{1\}$, é natural, diante do exposto, definir a função

$$\begin{array}{rccc} \Lambda_m : & \mathbb{A}_m[1] & \longrightarrow & \mathbb{A}_m[0] \\ & x & \longmapsto & x+1 \end{array}$$

para a qual vale a

Proposição 3.1. *Λ_m é uma bijeção.*

Demonstração. De fato:

(i) Λ_m é uma injeção. Porquanto, dados $x \in \mathbb{A}_m[1]$ e $y \in \mathbb{A}_m[1]$, temos

$$\Lambda_m(x) = \Lambda_m(y) \Rightarrow x+1 = y+1 \Rightarrow x = y.$$

(ii) Λ_m é uma sobrejeção. Para começar, observemos que $z \in \mathbb{A}_m[0] \Rightarrow z-1 \in \mathbb{A}_m[1]$.

Em virtude de (3.12), basta fazer o caso em que $m \equiv 0 \ (mod\ 2)$. No qual se tem

$$z \in \mathbb{A}_m[0] \ \Leftrightarrow \ z \in \mathcal{N}_m \ \text{ e } \ z \equiv 0 \ (mod\ 2).$$

Segue-se, daí, que $2 \leqslant z \leqslant m$, donde $1 \leqslant z-1 \leqslant m-1$. Logo, $z-1 \in \mathcal{N}_m = \mathbb{A}_m$. Aliado a isto o fato de que

$$z-1 \equiv 0-1 \equiv 2-1 = 1 \ (mod\ 2),$$

chega-se a $z-1 \in \mathbb{A}_m[1]$.

Portanto, dado $z \in \mathbb{A}_m[0]$, tem-se $z-1 \in \mathbb{A}_m[1]$, de sorte que $\Lambda_m(z-1) = (z-1)+1 = z$. $\square$

Tendo, então, em mente a Proposição 2.6, estamos agora em condições de enunciar e provar o resultado prometido.

Corolário 3.1. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N} - \{1\}$. Se $\mathcal{V}_r$ é a r-ésima coluna da matriz translinear horizontal de $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, então*

(i) $\mathcal{V}_r = \overline{\mathcal{V}_{r+1}}$, *para todo $r \in \mathbb{A}_m[1]$.*

(ii) $\mathcal{V}_k = \overline{\mathcal{V}_{k-1}}$, *para todo $k \in \mathbb{A}_m[0]$.*

Demonstração. Para o item *(i)*, observe, em face à Proposição 3.1, que $r \in \mathbb{A}_m[1]$ se, e só se, $r+1 \in \mathbb{A}_m[0]$. O Teorema 3.2 então nos diz, a despeito da paridade de m, que

$$\mathcal{V}_{r+1} = \frac{v_{(r+1)-1} + iv_{r+1}}{2} = \frac{v_r + iv_{r+1}}{2}$$

e, daí,

$$\overline{\mathcal{V}_{r+1}} = \overline{\frac{v_r + iv_{r+1}}{2}} = \frac{\overline{v_r} + \overline{i}\,\overline{v_{r+1}}}{2} = \frac{v_r + (-i)v_{r+1}}{2} = \frac{v_r - iv_{r+1}}{2} = \mathcal{V}_r,$$

pois v_r e v_{r+1} são colunas de A, uma matriz real.

Para o que falta, dado que $k \in \mathbb{A}_m[0]$ se, e só se, $k-1 \in \mathbb{A}_m[1]$, o item *(i)* nos dá

$$\mathcal{V}_{k-1} = \overline{\mathcal{V}_{(k-1)+1}} = \overline{\mathcal{V}_k}.$$

Logo, $\mathcal{V}_k = \overline{(\overline{\mathcal{V}_k})} = \overline{\mathcal{V}_{k-1}}$. $\square$

Como aplicação imediata do Corolário 3.1, temos o

Exemplo 3.5. *Considere a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R}).$$

Posto que

$$\tau_{\langle 5\times 5\rangle}(A) = \left[\begin{array}{c|c} \tau_{\langle 5\times 4\rangle}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \end{array} \right]$$

porque $5 \equiv 1 \pmod 2$, *pelo que se tem também*

$$\mathbb{A}_5 = \mathcal{N}_{5-1} = \mathcal{N}_4 = \{1, 2, 3, 4\}.$$

O Teorema 3.2 nos diz, então, que

$$d \in \mathbb{A}_5[0] = \{2, 4\} \Rightarrow \mathcal{V}_d = \frac{v_{d-1} + iv_d}{2}.$$

Logo,

$$\mathcal{V}_2 = \frac{v_1 + iv_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 4i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathcal{V}_4 = \frac{v_3 + iv_4}{2} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 8i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4i \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Neste ponto, em vista de a matriz A *ser real, o item (i) do Corolário 3.1 nos dá*

$$\mathcal{V}_r = \overline{\mathcal{V}_{r+1}}$$

para cada $r \in \mathbb{A}_5[1] = \{1, 3\}$. *Quer dizer,*

$$\mathcal{V}_1 = \overline{\mathcal{V}_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathcal{V}_3 = \overline{\mathcal{V}_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -4i \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\tau_{\langle 5\times 5\rangle}(A) = \left[\begin{array}{ccccc} \overline{\mathcal{V}_2} & \mathcal{V}_2 & \overline{\mathcal{V}_4} & \mathcal{V}_4 & v_5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2i & 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4i & 4i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{C}).$$

■

Para uso posterior, estabelecemos a

Proposição 3.2. *Para todo $m \in \mathbb{N}$, temos*

$$\#\mathbb{A}_m[1] = \#\mathbb{A}_m[0] = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor.$$

Demonstração. Para começar, provaremos que $\#\mathbb{A}_m[0] = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

Para isto, recorde que $\mathbb{A}_m[0] = \{x \in \mathbb{A}_m : x \equiv 0 \ (mod\ 2)\}$.

Logo, se $m \equiv 0 \ (mod\ 2)$, então $\mathbb{A}_m[0] = \{x \in \mathcal{N}_m : x \text{ é divisível por } 2\}$.

E a Proposição 2.4 nos diz que $\#\mathbb{A}_m[0] = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$.

Para $m \equiv 1 \ (mod\ 2)$, há dois casos a considerar.

Primeiro, se $m = 1$, então

$$\#\mathbb{A}_1[0] = \#\varnothing = 0 = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Segundo, se $m > 1$, trazendo à tona (3.12), temos que $\mathbb{A}_m[0] = \mathbb{A}_{m-1}[0]$ e, daí,

$$\#\mathbb{A}_m[0] = \#\mathbb{A}_{m-1}[0] = \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor = \frac{m-1}{2} = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor.$$

Em que as duas últimas igualdades se devem à Proposição 2.5.

Para terminar, basta notar que $\#\mathbb{A}_m[1] = \#\mathbb{A}_m[0]$ para cada $m \in \mathbb{N}$; porquanto, $m = 1$ implica $\mathbb{A}_1[1] = \mathbb{A}_1[0] = \varnothing$ e vale a Proposição 3.1 para todo $m \in \mathbb{N} - \{1\}$. □

3.4 Matrizes de Translineação Horizontal

Para motivar os resultados subsequentes, considere a matriz

$$A = \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}).$$

Recorde, agora, o Exemplo 3.3 e observe a identidade que procede do produto

$$
\begin{aligned}
A\cdot\tau_{\langle 2\times 2\rangle}(\mathcal{I}_2) &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a\cdot\frac{1}{2}+b\left(-\frac{i}{2}\right) & a\cdot\frac{1}{2}+b\cdot\frac{i}{2} \\ c\cdot\frac{1}{2}+d\left(-\frac{i}{2}\right) & c\cdot\frac{1}{2}+d\cdot\frac{i}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{a-bi}{2} & \frac{a+bi}{2} \\ \frac{c-di}{2} & \frac{c+di}{2} \end{bmatrix} \\
&= \tau_{\langle 2\times 2\rangle}(A).
\end{aligned}
$$

Esta identidade é indício de algo geral. De fato, toda matriz translinear horizontal se exprime por meio de um produto de matrizes, de um modo a ser precisado e que se tornará gradualmente evidente no decorrer desta seção. Por ora, a verificação feita acima apenas destaca a matriz translinear horizontal da matriz identidade e a sugere, dentre todas as matrizes quadradas, para um estudo restrito.

Para principiar o estabelecimento do que afirmamos, de agora em diante, indicaremos por e_r a r-ésima coluna da matriz identidade $\mathcal{I}_m$, para cada $r\in\mathbb{N}_m$.

Lema 3.1. *Dado $d\in\mathbb{N}_m$. Se $\mathcal{E}_d$ é a d-ésima coluna da matriz translinear horizontal de $\mathcal{I}_m$, então*

$$
\mathcal{E}_d = \begin{cases} \dfrac{e_d - ie_{d+1}}{2} & \text{se} \quad d\in\mathbb{A}_m[1] \\[2ex] \dfrac{e_{d-1}+ie_d}{2} & \text{se} \quad d\in\mathbb{A}_m[0] \end{cases}
$$

se $m\equiv 0\ (mod\ 2)$, e

$$
\mathcal{E}_d = \begin{cases} \dfrac{e_d - ie_{d+1}}{2} & \text{se} \quad d\in\mathbb{A}_m[1] \\[2ex] \dfrac{e_{d-1}+ie_d}{2} & \text{se} \quad d\in\mathbb{A}_m[0] \\[2ex] e_m & \text{se} \quad d=m \end{cases}
$$

caso contrário.

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 3.2 à matriz $\mathcal{I}_m$. □

Podemos, tão logo, dispondo do Lema 3.1, realizar uma descrição simples da matriz translinear horizontal de $\mathcal{I}_m$ no que diz respeito aos seus termos. Para isto, atentemos que, a despeito da paridade de m, se tem

$$d \in \mathbb{A}_m[1] \Longrightarrow [\mathcal{E}_d]_j = \left[\frac{e_d - ie_{d+1}}{2}\right]_j = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{se} \quad j = d \\ -\dfrac{i}{2} & \text{se} \quad j = d+1 \\ 0 & \text{se} \quad j \notin \{d, d+1\} \end{cases}$$

e

$$d \in \mathbb{A}_m[0] \Longrightarrow [\mathcal{E}_d]_j = \left[\frac{e_{d-1} + ie_d}{2}\right]_j = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{se} \quad j = d-1 \\ \dfrac{i}{2} & \text{se} \quad j = d \\ 0 & \text{se} \quad j \notin \{d-1, d\} \end{cases}.$$

Nesse sentido, para $m \equiv 0 \ (mod\ 2)$, temos

$$\tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{C}). \tag{3.13}$$

Por outro lado, se $m > 1$ com $m \equiv 1 \ (mod\, 2)$, então

$$\tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{C}). \tag{3.14}$$

Com o adendo de, nesse caso, termos $\mathcal{E}_m = e_m$.

Seja qual for a paridade de $m \in \mathbb{N} - \{1\}$, percebamos que a matriz $\tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)$ é diagonal em blocos, com $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ blocos[6] do tipo

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix} = \tau_{\langle 2\times 2\rangle}(\mathcal{I}_2).$$

Porquanto cada bloco $\tau_{\langle 2\times 2\rangle}(\mathcal{I}_2)$ de $\tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)$ é o contributo de cada par de colunas consecutivas $(\mathcal{E}_d, \mathcal{E}_{d+1})$ com $d \in \mathbb{A}_m[1]$, as quais perfazem um total de $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ pares.[7]

Lema 3.2. *Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$. Para cada $d \in \mathcal{N}_m$, vale*

$$Ae_d = v_d.$$

Em que e_d é a d-ésima coluna de $\mathcal{I}_m$ e v_d, a d-ésima coluna de A.

---

[6]Sendo $m \equiv 1 \ (mod\, 2)$, tem-se, além desses, o bloco $[1]$ ao fim da diagonal de $\tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)$ como contributo de sua última coluna $\mathcal{E}_m$.

[7]Para ver isto perceba que, enquanto d percorre o conjunto $\mathbb{A}_m[1]$, seu sucessor $d+1$ percorre $\mathbb{A}_m[0]$ em face à bijeção Λ_m estabelecida na Proposição 3.1. E vale $\#\mathbb{A}_m[1] = \#\mathbb{A}_m[0] = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$, de acordo com a Proposição 3.2.

Demonstração. Fixo d em $\mathcal{N}_m$. Tomando $A = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_m \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$, expressa segundo suas colunas, e $e_d = [\rho_j] \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{C})$, temos

$$Ae_d = \sum_{j=1}^{m} v_j \cdot \rho_j = v_d$$

pois $\rho_d = 1$ e $\rho_j = 0$ para $j \neq d$. □

A afirmação feita ao início desta seção diz respeito ao teorema a seguir, cujo enunciado constitui o terceiro aspecto segundo o qual se poderá determinar a matriz translinear horizontal de uma matriz dada. Por meio dele, seremos ainda capazes de estabelecer fatos de singular importância quanto à translineadora $\tau_{\langle n\times m\rangle}$, situando-a, em particular, no cerne do estudo dos operadores *diagonalizáveis*.

Teorema 3.3. *Dados $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$, então*

$$\tau_{\langle n\times m\rangle}(A) = A \cdot \tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m).$$

*Ao que dizemos que a matriz $\tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)$ é a **m-ésima Matriz de Translineação Horizontal**.*

Demonstração. A prova consiste em mostrar que cada coluna do produto $A \cdot \tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)$ é expressa tal como descreve o Teorema 3.2.

Nesse sentido, dado $d \in \mathcal{N}_m$, seja $\mathcal{E}_d$ a d-ésima coluna da matriz $\tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)$.

Temos, então, que

$$\tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m) = [\mathcal{E}_1 \ldots \mathcal{E}_d \ldots \mathcal{E}_m]$$

e, daí,

$$A \cdot \tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m) = A \cdot [\mathcal{E}_1 \ldots \mathcal{E}_d \ldots \mathcal{E}_m] = [A\mathcal{E}_1 \ldots A\mathcal{E}_d \ \ldots A\mathcal{E}_m].$$

Fixemos o olhar sobre a d-ésima coluna do produto acima. Para isso, evoquemos o Lema 3.1, segundo o qual, a despeito da paridade de m, tem-se que

(i) $d \in \mathbb{A}_m[1]$ implica

$$\begin{aligned} A\mathcal{E}_d &= A\left(\frac{e_d - ie_{d+1}}{2}\right) \\ &= \frac{Ae_d - A(ie_{d+1})}{2} \\ &= \frac{Ae_d - i(Ae_{d+1})}{2} \\ &= \frac{v_d - iv_{d+1}}{2}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

(ii) $d \in \mathbb{A}_m[0]$ implica

$$\begin{aligned} A\mathcal{E}_d &= A\left(\frac{e_{d-1}+ie_d}{2}\right) \\ &= \frac{Ae_{d-1}+A(ie_d)}{2} \\ &= \frac{Ae_{d-1}+i(Ae_d)}{2} \\ &= \frac{v_{d-1}+iv_d}{2}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Em que em (3.15) e em (3.16) utilizamos o Lema 3.2, a partir do qual, para o caso particular em que $d = m \equiv 1 \pmod 2$, se tem

$$A\mathcal{E}_d = Ae_m = v_m.$$

Por conseguinte,

$$A\mathcal{E}_d = \begin{cases} \dfrac{v_d - iv_{d+1}}{2} & \text{se} \quad d \in \mathbb{A}_m[1] \\ \\ \dfrac{v_{d-1}+iv_d}{2} & \text{se} \quad d \in \mathbb{A}_m[0] \end{cases}$$

quando $m \equiv 0 \pmod 2$, e

$$A\mathcal{E}_d = \begin{cases} \dfrac{v_d - iv_{d+1}}{2} & \text{se} \quad d \in \mathbb{A}_m[1] \\ \\ \dfrac{v_{d-1}+iv_d}{2} & \text{se} \quad d \in \mathbb{A}_m[0] \\ \\ v_m & \text{se} \quad d = m \end{cases}$$

caso contrário.

Portanto, a d-ésima coluna do produto $A \cdot \tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)$ é, consoante o Teorema 3.2, a d-ésima coluna da matriz translinear horizontal de A para cada $d \in \mathcal{N}_m$, isto é,

$$A \cdot \tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m) = \tau_{\langle n\times m\rangle}(A).$$

Findando a prova. □

Convém observar que a designação dada à matriz $\tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)$ deve-se ao fato de que o labor de translinear uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ horizontalmente, como que, recai por inteiro sobre $\tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)$. Posto que podemos fazê-lo mediante a multiplicação à direita por $\tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)$, isto é, segundo o produto $A \cdot \tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)$.

Exemplo 3.6. *Considerando a matriz $A \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$ do Exemplo 3.5, o Teorema 3.3 nos dá*

$$
\begin{aligned}
\tau_{\langle 5\times 5\rangle}(A) &= A\cdot\tau_{\langle 5\times 5\rangle}(\mathcal{I}_5)\\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -2i & 2i & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -4i & 4i & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

■

Corolário 3.2. *Para todas $A \in \mathcal{M}_{n\times r}(\mathbb{C})$ e $B \in \mathcal{M}_{r\times m}(\mathbb{C})$, vale*

$$\tau_{\langle n\times m\rangle}(AB) = A\cdot\tau_{\langle r\times m\rangle}(B).$$

Demonstração. Basta notar que

$$\tau_{\langle n\times m\rangle}(AB) = (AB)\cdot\tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m) = A\cdot\left(B\cdot\tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)\right) = A\cdot\tau_{\langle r\times m\rangle}(B).$$

□

Os três resultados seguintes são consequências imediatas do Teorema 3.3 e tornam a translineadora horizontal $\tau_{\langle n\times m\rangle}$ mais manejável ao ser aplicada a matrizes particionadas em blocos. Cada um, a seu tempo, será indispensável adiante.

Corolário 3.3. *Sejam $n \in \mathbb{N}-\{1\}$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $r \in \mathbb{N}_{n-1}$ e $A = \begin{bmatrix} D\\ N \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$, em que $D \in \mathcal{M}_{r\times m}(\mathbb{C})$ e $N \in \mathcal{M}_{(n-r)\times m}(\mathbb{C})$, então*

$$\tau_{\langle n\times m\rangle}(A) = \begin{bmatrix} \tau_{\langle r\times m\rangle}(D)\\ \hline \tau_{\langle (n-r)\times m\rangle}(N) \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Basta ver que

$$\begin{aligned}
\tau_{\langle n\times m\rangle}(A) &= A\cdot\tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)\\
&= \begin{bmatrix} D\\ N\end{bmatrix}\cdot\tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)\\
&= \begin{bmatrix} D\cdot\tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)\\ \\ N\cdot\tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)\end{bmatrix}\\
&= \left[\begin{array}{c} \tau_{\langle r\times m\rangle}(D)\\ \hline \tau_{\langle (n-r)\times m\rangle}(N)\end{array}\right].
\end{aligned}$$

□

Dado $m\in\mathbb{N}-\{1,2\}$. Para uso imediato e futuro, definimos o conjunto[8]

$$\mathcal{J}_m=\{j\in\mathbb{N}_{m-1}: j\equiv 0\ (mod\ 2)\}.$$

Corolário 3.4. *Sejam $n\in\mathbb{N}$ e $m\in\mathbb{N}-\{1,2\}$. Se $j\in\mathcal{J}_m$ e $A=\begin{bmatrix} D & Y\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$, em que $D\in\mathcal{M}_{n\times j}(\mathbb{C})$ e $Y\in\mathcal{M}_{n\times(m-j)}(\mathbb{C})$, então*

$$\tau_{\langle n\times m\rangle}(A)=\left[\begin{array}{c|c}\tau_{\langle n\times j\rangle}(D) & \tau_{\langle n\times(m-j)\rangle}(Y)\end{array}\right].$$

Demonstração. Basta observar que

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{c|c}\tau_{\langle n\times j\rangle}(D) & \tau_{\langle n\times(m-j)\rangle}(Y)\end{array}\right] &= \left[\begin{array}{c|c} D\cdot\tau_{\langle j\times j\rangle}(\mathcal{I}_j) & Y\cdot\tau_{\langle (m-j)\times(m-j)\rangle}(\mathcal{I}_{m-j})\end{array}\right]\\
&= \begin{bmatrix} D & Y\end{bmatrix}\left[\begin{array}{c|c}\tau_{\langle j\times j\rangle}(\mathcal{I}_j) & \mathbf{0}_{j\times(m-j)}\\ \hline \mathbf{0}_{(m-j)\times j} & \tau_{\langle (m-j)\times(m-j)\rangle}(\mathcal{I}_{m-j})\end{array}\right]\\
&= A\cdot\tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)\\
&= \tau_{\langle n\times m\rangle}(A).
\end{aligned}$$

□

[8]Observe que $\mathcal{J}_m\neq\varnothing$, pois $2\in\mathcal{J}_m$ para todo $m\in\mathbb{N}-\{1,2\}$.

Corolário 3.5. *Sejam $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ e $m \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$. Se $A = \begin{bmatrix} D & Y \\ N & E \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$, com $D \in \mathcal{M}_{r\times j}(\mathbb{C})$, $Y \in \mathcal{M}_{r\times(m-j)}(\mathbb{C})$, $N \in \mathcal{M}_{(n-r)\times j}(\mathbb{C})$ e $E \in \mathcal{M}_{(n-r)\times(m-j)}(\mathbb{C})$, então*

$$\tau_{\langle n\times m\rangle}(A) = \left[\begin{array}{c|c} \tau_{\langle r\times j\rangle}(D) & \tau_{\langle r\times (m-j)\rangle}(Y) \\ \hline \tau_{\langle (n-r)\times j\rangle}(N) & \tau_{\langle (n-r)\times (m-j)\rangle}(E) \end{array}\right].$$

Em que $r \in \mathcal{N}_{n-1}$ e $j \in \mathcal{J}_m$.

Demonstração. Procede sucessivamente dos Corolários 3.4 e 3.3 que

$$\begin{aligned} \tau_{\langle n\times m\rangle}(A) &= \left[\begin{array}{c|c} \tau_{\langle n\times j\rangle}\left(\begin{bmatrix} D \\ N \end{bmatrix}\right) & \tau_{\langle n\times (m-j)\rangle}\left(\begin{bmatrix} Y \\ E \end{bmatrix}\right) \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \tau_{\langle r\times j\rangle}(D) & \tau_{\langle r\times (m-j)\rangle}(Y) \\ \hline \tau_{\langle (n-r)\times j\rangle}(N) & \tau_{\langle (n-r)\times (m-j)\rangle}(E) \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \tau_{\langle r\times j\rangle}(D) & \tau_{\langle r\times (m-j)\rangle}(Y) \\ \hline \tau_{\langle (n-r)\times j\rangle}(N) & \tau_{\langle (n-r)\times (m-j)\rangle}(E) \end{array}\right]. \end{aligned}$$

□

Naturalmente, o Teorema 3.3 nos fornece a

Proposição 3.3. *$\tau_{\langle n\times m\rangle}$ é um operador linear.*

Demonstração. Sendo a translineadora horizontal $\tau_{\langle n\times m\rangle}$ uma aplicação do espaço $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ em si mesmo; basta-nos notar, além disso, que

$$\tau_{\langle n\times m\rangle}(A+\eta B) = (A+\eta B)\cdot \tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m) \tag{3.17}$$

$$= A\cdot \tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m) + (\eta B)\cdot \tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m) \tag{3.18}$$

$$= A\cdot \tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m) + \eta\left(B\cdot \tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)\right)$$

$$= \tau_{\langle n\times m\rangle}(A) + \eta\,\tau_{\langle n\times m\rangle}(B) \tag{3.19}$$

quaisquer que sejam A e B em $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ e $\eta \in \mathbb{C}$.

Em que (3.17) e (3.19) se devem ao Teorema 3.3; e (3.18) se deve ao fato de o produto de matrizes ser distributivo à direita em relação à adição. □

Nesta altura, nos ocuparemos em delinear o modo mediante o qual se poderá expressar o determinante de uma matriz translinear horizontal quadrada em termos do determinante da matriz da qual ela procede. Para tanto, começaremos por obter o determinante da n-ésima matriz de translineação horizontal. Nesse intento, seguem os dois próximos lemas. Para o primeiro, é útil observar, em face a (2.3), que

$$\tau_{\langle n\times m\rangle}(\mathbf{0}_{n\times m}) = \mathbf{0}_{n\times m}$$

para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}$.

Lema 3.3. *Seja $n \in \mathbb{N} - \{1,2\}$. Se $n \equiv r \pmod 2$, com $r \in \{1,2\}$, então*

$$\tau_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n) = \left[\begin{array}{c|c} \tau_{\langle (n-r)\times(n-r)\rangle}(\mathcal{I}_{n-r}) & \mathbf{0}_{(n-r)\times r} \\ \hline \mathbf{0}_{r\times(n-r)} & \tau_{\langle r\times r\rangle}(\mathcal{I}_r) \end{array}\right].$$

Demonstração. Note, sendo $n > 2$, que se pode particionar a matriz $\mathcal{I}_n$ em blocos da seguinte forma:

$$\mathcal{I}_n = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{I}_{n-r} & \mathbf{0}_{(n-r)\times r} \\ \hline \mathbf{0}_{r\times(n-r)} & \mathcal{I}_r \end{array}\right].$$

Posto que $n-r \equiv 0 \pmod 2$ e $n-r \in \mathbb{N}_{n-1}$, temos $n-r \in \mathfrak{J}_n$.

O Corolário 3.5, então, nos dá

$$\begin{aligned}
\tau_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n) &= \left[\begin{array}{c|c} \tau_{\langle (n-r)\times(n-r)\rangle}(\mathcal{I}_{n-r}) & \tau_{\langle (n-r)\times r\rangle}\left(\mathbf{0}_{(n-r)\times r}\right) \\ \hline \tau_{\langle r\times(n-r)\rangle}\left(\mathbf{0}_{r\times(n-r)}\right) & \tau_{\langle r\times r\rangle}(\mathcal{I}_r) \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} \tau_{\langle (n-r)\times(n-r)\rangle}(\mathcal{I}_{n-r}) & \mathbf{0}_{(n-r)\times r} \\ \hline \mathbf{0}_{r\times(n-r)} & \tau_{\langle r\times r\rangle}(\mathcal{I}_r) \end{array}\right].
\end{aligned}$$

□

Lema 3.4. *Dado $n \in \mathbb{Z}$. Se $n \equiv r \pmod 2$, com $r \in \{1, 2\}$, então*

$$\left\lfloor \frac{n-r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

Demonstração. Sendo $n - r \equiv 0 \pmod 2$, temos, a partir da Proposição 2.5, que

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \frac{n-r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor &= \begin{cases} \dfrac{n-1}{2} + 0 & \text{se} \quad r = 1 \\[2ex] \dfrac{n-2}{2} + \dfrac{2}{2} & \text{se} \quad r = 2 \end{cases} \\[2ex]
&= \begin{cases} \dfrac{n-1}{2} & \text{se} \quad r = 1 \\[2ex] \dfrac{n}{2} & \text{se} \quad r = 2 \end{cases} \\[2ex]
&= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .
\end{aligned}$$

Findando a prova. □

Lema 3.5. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se*

$$\det \ \tau_{\langle n \times n \rangle}(\mathcal{J}_n) = \left(\frac{i}{2}\right)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} . \tag{3.20}$$

Demonstração (Indução completa sobre n).

Atentemos aos casos inicias.

Se $n = 1$, então

$$\det \ \tau_{\langle 1 \times 1 \rangle}(\mathcal{J}_1) = \det \mathcal{J}_1 = 1 = \left(\frac{i}{2}\right)^{\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor} .$$

Para $n = 2$, temos

$$\begin{aligned}
\det \tau_{\langle 2\times 2\rangle}(\mathcal{I}_2) &= \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{i}{2} - \left(-\frac{i}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{i}{4} + \frac{i}{4} \\
&= \frac{i}{2} \\
&= \left(\frac{i}{2}\right)^{\lfloor \frac{2}{2} \rfloor}.
\end{aligned}$$

Suponhamos agora que, para todo $s \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$, tenhamos

$$\det\ \tau_{\langle s\times s\rangle}(\mathcal{I}_s) = \left(\frac{i}{2}\right)^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor}.$$

Queremos mostrar a validade de (3.20) para $k \geqslant 3$. Seja, então, $k \equiv r \pmod 2$, com $r \in \{1, 2\}$.

Procede do Lema 3.3 que

$$\tau_{\langle k\times k\rangle}(\mathcal{I}_k) = \left[\begin{array}{c|c} \tau_{\langle (k-r)\times(k-r)\rangle}(\mathcal{I}_{k-r}) & \mathbf{0}_{(k-r)\times r} \\ \hline \mathbf{0}_{r\times(k-r)} & \tau_{\langle r\times r\rangle}(\mathcal{I}_r) \end{array}\right].$$

Logo, o Teorema 2.3, a hipótese de indução, os casos iniciais e o Lema 3.4 nos dizem, sucessivamente, que

$$\begin{aligned}
\det\ \tau_{\langle k\times k\rangle}(\mathcal{I}_k) &= \det\ \tau_{\langle (k-r)\times(k-r)\rangle}(\mathcal{I}_{k-r}) \cdot \det\ \tau_{\langle r\times r\rangle}(\mathcal{I}_r) \\
&= \left(\frac{i}{2}\right)^{\lfloor \frac{k-r}{2} \rfloor} \cdot \left(\frac{i}{2}\right)^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \\
&= \left(\frac{i}{2}\right)^{\lfloor \frac{k-r}{2} \rfloor + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \\
&= \left(\frac{i}{2}\right)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}.
\end{aligned}$$

Estabelecendo a validade de (3.20) para k e, daí, para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema 3.4. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, então*

$$\det \tau_{\langle n\times n\rangle}(A) = \left(\frac{i}{2}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \det A.$$

*Ao número $\left(\frac{i}{2}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ damos o nome de **Índice de Translineação** de $\tau_{\langle n\times n\rangle}$.*

Demonstração. De fato, porquanto

$$\begin{aligned}
\det \tau_{\langle n\times n\rangle}(A) &= \det\left(A\cdot \tau_{\langle n\times n\rangle}(\mathfrak{I}_n)\right) && (3.21)\\
&= \det A \cdot \det \tau_{\langle n\times n\rangle}(\mathfrak{I}_n) && (3.22)\\
&= \det \tau_{\langle n\times n\rangle}(\mathfrak{I}_n) \cdot \det A\\
&= \left(\frac{i}{2}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \det A. && (3.23)
\end{aligned}$$

Em que (3.21) é devido ao Teorema 3.3; (3.22), ao Teorema 2.1; e (3.23), ao Lema 3.5. $\square$

Exemplo 3.7. *Calculemos o determinante da matriz*

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -2i & 2i & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -4i & 4i & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Recordemos, para tanto, o Exemplo 3.6 a partir do qual se constata que $\mathcal{D} = \tau_{\langle 5\times 5\rangle}(A)$, em que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Desse modo, dado que

$$\det A = 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 2 = 768,$$

o Teorema 3.4 nos diz que

$$\det \mathcal{D} = \det \tau_{\langle 5\times 5\rangle}(A) = \left(\frac{i}{2}\right)^{\lfloor \frac{5}{2} \rfloor} \det A = \left(\frac{i}{2}\right)^{2} \cdot 768 = -192.$$

Como queríamos calcular. $\blacksquare$

Procede ainda do Lema 3.5 a

Proposição 3.4. *A n-ésima matriz de translineação horizontal é invertível para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Basta notar que

$$\det \tau_{\langle n \times n \rangle}(\mathcal{I}_n) = \left(\frac{i}{2}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \neq 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e, então, recordar o Teorema 2.2. □

Neste ponto, cabe ponderar que a relevância do Teorema 3.4 será vista, em sua máxima expressão, no Capítulo 5. Lá, este resultado será imprescindível. Por enquanto, extrairemos dele a seguinte consequência que nos será igualmente útil adiante.

Corolário 3.6. *Se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$, então $\tau_{\langle n \times n \rangle}(A)$ é invertível se, e só se, A é invertível.*

Demonstração. Recordando o Teorema 2.2, basta ver que

$$\det \tau_{\langle n \times n \rangle}(A) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{i}{2}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \det A \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \det A \neq 0.$$

□

3.5 Automorfismo Diagonalizável

De início, provaremos que a translineadora horizontal $\tau_{\langle n \times m \rangle}$ é um automorfismo do espaço $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$, a cujo propósito faz-se necessário o

Lema 3.6. *Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$, temos*

(i) $\tau_{\langle n \times m \rangle}(A) \cdot \left(\tau_{\langle m \times m \rangle}(\mathcal{I}_m)\right)^{-1} = A$.

(ii) $\tau_{\langle m \times m \rangle}\left(\left(\tau_{\langle m \times m \rangle}(\mathcal{I}_m)\right)^{-1}\right) = \mathcal{I}_m$.

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
A &= A \cdot \mathcal{I}_m \\
&= A \cdot \left(\tau_{\langle m \times m \rangle}(\mathcal{I}_m) \cdot \left(\tau_{\langle m \times m \rangle}(\mathcal{I}_m)\right)^{-1}\right) \\
&= \left(A \cdot \tau_{\langle m \times m \rangle}(\mathcal{I}_m)\right) \cdot \left(\tau_{\langle m \times m \rangle}(\mathcal{I}_m)\right)^{-1} \\
&= \tau_{\langle n \times m \rangle}(A) \cdot \left(\tau_{\langle m \times m \rangle}(\mathcal{I}_m)\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Ademais, $\mathcal{I}_m = \left(\tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)\right)^{-1} \cdot \tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m) = \tau_{\langle m\times m\rangle}\left(\left(\tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)\right)^{-1}\right)$. □

Teorema 3.5. *$\tau_{\langle n\times m\rangle}$ é um automorfismo de $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$.*

Demonstração. Basta-nos provar que $\tau_{\langle n\times m\rangle}$ é uma bijeção, dado que se trata de um operador. Para tanto, exibiremos a sua aplicação inversa,[9] a saber:

$$\begin{array}{rccc} \eta_{\langle n\times m\rangle} : & \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C}) \\ & A & \longmapsto & A \cdot (\tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m))^{-1} \end{array}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \left(\eta_{\langle n\times m\rangle} \circ \tau_{\langle n\times m\rangle}\right)(A) &= \eta_{\langle n\times m\rangle}\left(\tau_{\langle n\times m\rangle}(A)\right) \\ &= \tau_{\langle n\times m\rangle}(A) \cdot (\tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m))^{-1} \\ &= A \end{aligned}$$

em virtude do item *(i)* do Lema 3.6.

Mais ainda,

$$\begin{aligned} \left(\tau_{\langle n\times m\rangle} \circ \eta_{\langle n\times m\rangle}\right)(A) &= \tau_{\langle n\times m\rangle}\left(\eta_{\langle n\times m\rangle}(A)\right) \\ &= \tau_{\langle n\times m\rangle}\left(A \cdot (\tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m))^{-1}\right) \\ &= A \cdot \tau_{\langle m\times m\rangle}\left(\left(\tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)\right)^{-1}\right) \\ &= A \cdot \mathcal{I}_m \\ &= A \end{aligned}$$

haja vista o Corolário 3.2 e o item *(ii)* do Lema 3.6.

Portanto, $\eta_{\langle n\times m\rangle} = \tau^{-1}_{\langle n\times m\rangle}$. □

Decorre da prova do teorema precedente que

$$\tau^{-1}_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n) = \left(\tau_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)\right)^{-1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

[9] Em razão do fato simples de provar de que uma aplicação $f : X \to Y$ é uma bijeção se, e só se, existe f^{-1}.

Munidos das propriedades da translineadora horizontal $\tau_{\langle n\times m\rangle}$, provaremos que ela é *diagonalizável*. Ao que convém a

Definição 3.3 (Cf. [4], p. 254)**.** *Seja* $\mathbb{V}$ *um espaço vetorial de dimensão finita. Um operador* $\mathcal{T} : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ *se diz* ***diagonalizável*** *se existe uma base de* $\mathbb{V}$ *formada por autovetores de* $\mathcal{T}$*.*

Procede daí, consoante Hefez e Fernandez [11], que "se $\mathcal{T}$ é um operador linear em um espaço $\mathbb{V}$ de dimensão n, [então] $\mathcal{T}$ é diagonalizável se, e somente se, $\mathcal{T}$ tem n autovetores linearmente independentes" (p. 219).[10] Isto nos será extremamente útil, pois sabemos que a dimensão do espaço vetorial $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$ é[11] igual a $n\times m$.

Iniciamos o estabelecimento da nossa afirmação a começar pelo

Lema 3.7. $\tau_{\langle 2\rangle}$ *é diagonalizável.*

Demonstração. Recordando que

$$\begin{array}{rcl} \tau_{\langle 2\rangle} : \mathcal{M}_{1\times 2}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{1\times 2}(\mathbb{C}) \\ \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} \dfrac{a-bi}{2} & \dfrac{a+bi}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

com $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_{1\times 2}(\mathbb{C}) = 2$, basta-nos encontrar dois autovetores de $\tau_{\langle 2\rangle}$ linearmente independentes.

Queremos, a princípio, que

$$\tau_{\langle 2\rangle}\left(\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}\right) = \eta \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$$

para alguma matriz $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}_{1\times 2}$ e para um certo $\eta \in \mathbb{C}$.

Interessa-nos, equivalentemente, resolver o sistema

$$\begin{cases} (a-bi)/2 = \eta a \\ (a+bi)/2 = \eta b. \end{cases} \tag{3.24}$$

Mas (3.24) equivale a

$$\begin{cases} a-bi = 2\eta a \\ a+bi = 2\eta b \end{cases} \iff \begin{cases} (1-2\eta)a - bi = 0 \\ a + (i-2\eta)b = 0. \end{cases} \tag{3.25}$$

[10] Isto deve-se ao fato de que "se a dimensão de $\mathbb{V}$ é n, um conjunto com n vetores gera $\mathbb{V}$ se, e somente se, é L.I." (Cf. [13], p. 30).

[11] Recorde o Exemplo 2.4.

Perceba que $\eta \neq 1/2$, pois, caso contrário, teríamos $a = b = 0$. Nesse sentido, multiplicando a segunda equação em (3.25) por $-(1-2\eta) \neq 0$ e, em seguida, somando-a à primeira, obtemos

$$\begin{cases} (-(1-2\eta)(i-2\eta)-i)\,b = 0 \\ a+(i-2\eta)b = 0. \end{cases}$$

Isto é,

$$\begin{cases} \left(-4\eta^2+2(1+i)\eta-2i\right)b = 0 \\ a+(i-2\eta)b = 0. \end{cases} \tag{3.26}$$

Dividindo a primeira equação em (3.26) por 2, chega-se a

$$\begin{cases} \left(-2\eta^2+(1+i)\eta-i\right)b = 0 \\ a+(i-2\eta)b = 0. \end{cases} \tag{3.27}$$

Se $b = 0$ em (3.27), então $a = 0$. Portanto, devemos ter

$$-2\eta^2+(1+i)\eta-i = 0.$$

Resulta, então, da fórmula resolvente da equação do segundo grau[12] que

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{-(i+1)\pm\sqrt{(i+1)^2-4\cdot(-2)\cdot(-i)}}{2\cdot(-2)} \\ &= \frac{i+1\mp\sqrt{i^2+2i+1-8i}}{4} \\ &= \frac{i+1\mp\sqrt{-6i}}{4} \\ &= \frac{i+1\mp\left(\sqrt{3}-i\sqrt{3}\right)}{4} \\ &= \frac{1\mp\sqrt{3}+\left(1\pm\sqrt{3}\right)i}{4} \end{aligned}$$

em que $\sqrt{-6i} = \sqrt{3}-i\sqrt{3}$.

Logo, o espectro de $\tau_{\langle 2\rangle}$ é

$$\sigma\left(\tau_{\langle 2\rangle}\right) = \left\{\frac{1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)i}{4},\ \frac{1+\sqrt{3}+\left(1-\sqrt{3}\right)i}{4}\right\}.$$

[12]Cf. [12], pp. 170-171.

Se $\eta \in \sigma\left(\tau_{\langle 2\rangle}\right)$, então (3.27) resume-se a

$$a = (2\eta - i)b$$

e, daí, ao autovalor η de $\tau_{\langle 2\rangle}$ estão associados os autovetores

$$\begin{bmatrix} (2\eta - i)b & b \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 2\eta - i & 1 \end{bmatrix}$$

com $b \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Finalmente, se $\eta_1, \eta_2 \in \sigma\left(\tau_{\langle 2\rangle}\right)$, com $\eta_1 \neq \eta_2$, então o conjunto

$$\mathcal{B}\left(\tau_{\langle 2\rangle}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} 2\eta_1 - i & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2\eta_2 - i & 1 \end{bmatrix} \right\} \tag{3.28}$$

de autovetores de $\tau_{\langle 2\rangle}$ é L.I..

De fato, se $x \in \mathbb{C}$ e $y \in \mathbb{C}$ são tais que

$$x \begin{bmatrix} 2\eta_1 - i & 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2\eta_2 - i & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{1\times 2},$$

então

$$\left\{ \begin{array}{r} x(2\eta_1 - i) + y(2\eta_2 - i) = 0 \\ \\ x + y = 0. \end{array} \right. \tag{3.29}$$

A segunda equação em (3.29) nos diz que $y = -x$, em virtude do que a primeira significa

$$x(2\eta_1 - 2\eta_2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x(\eta_1 - \eta_2) = 0.$$

Logo, $x = 0$ e, assim, $y = 0$. $\square$

Note que a base obtida em (3.28) é[13]

$$\mathcal{B}\left(\tau_{\langle 2\rangle}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} \dfrac{1-\sqrt{3}-\left(1-\sqrt{3}\right)i}{2} & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dfrac{1+\sqrt{3}-\left(1+\sqrt{3}\right)i}{2} & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

No próximo lema, denota-se por $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ os elementos de $\mathcal{B}\left(\tau_{\langle 2\rangle}\right) \subset \mathcal{M}_{1\times 2}(\mathbb{C})$, na ordem em que foram apresentados.

[13]Nesse caso, tomamos

$$\eta_1 = \frac{1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)i}{4} \quad \text{e} \quad \eta_2 = \frac{1+\sqrt{3}+\left(1-\sqrt{3}\right)i}{4}.$$

Ao que é interessante perceber que $|\eta_1| = |\eta_2| = 1/2$.

Lema 3.8. $\tau_{\langle n\times 2\rangle}$ *é diagonalizável.*

Demonstração (Indução sobre n).

Sendo $\tau_{\langle 1\times 2\rangle}=\tau_{\langle 2\rangle}$, o caso base segue do Lema 3.7.

Suponhamos, então, que $\tau_{\langle k\times 2\rangle}$ seja diagonalizável para algum $k\in\mathbb{N}$, isto é, que exista uma base de $\mathcal{M}_{k\times 2}(\mathbb{C})$ formada por autovetores de $\tau_{\langle k\times 2\rangle}$, digamos

$$\mathcal{B}\left(\tau_{\langle k\times 2\rangle}\right)=\{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\ldots,\mathcal{A}_{2k}\}\subset\mathcal{M}_{k\times 2}(\mathbb{C}),$$

cujos autovalores relativos são respectivamente $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{2k}\in\mathbb{C}$.

O passo de indução consiste em mostrar que o conjunto

$$\mathcal{B}\left(\tau_{\langle (k+1)\times 2\rangle}\right)=\{\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2,\ldots,\mathcal{D}_{2k},\mathcal{D}_{2k+1},\mathcal{D}_{2(k+1)}\}\subset\mathcal{M}_{(k+1)\times 2}(\mathbb{C})$$

para o qual se define

$$\mathcal{D}_j=\begin{cases}\begin{bmatrix}\mathcal{A}_j\\ \mathbf{0}_{1\times 2}\end{bmatrix} & \text{se}\quad 1\leqslant j\leqslant 2k\\[2ex] \begin{bmatrix}\mathbf{0}_{k\times 2}\\ \mathcal{F}_{j-2k}\end{bmatrix} & \text{se}\quad 2k+1\leqslant j\leqslant 2(k+1)\end{cases}$$

é constituído por autovetores de $\tau_{\langle (k+1)\times 2\rangle}$, bem como é L.I.. De fato:

(i) Para cada $1\leqslant j\leqslant 2k$, o Corolário 3.3 e a hipótese de indução nos dizem que

$$\begin{aligned}\tau_{\langle (k+1)\times 2\rangle}\left(\mathcal{D}_j\right) &= \begin{bmatrix}\tau_{\langle k\times 2\rangle}(\mathcal{A}_j)\\ \hline \tau_{\langle 1\times 2\rangle}(\mathbf{0}_{1\times 2})\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\rho_j\mathcal{A}_j\\ \hline \mathbf{0}_{1\times 2}\end{bmatrix}\\ &= \rho_j\begin{bmatrix}\mathcal{A}_j\\ \mathbf{0}_{1\times 2}\end{bmatrix}\\ &= \rho_j\mathcal{D}_j.\end{aligned}$$

Analogamente, se $j \in \{2k+1, 2(k+1)\}$, o Corolário 3.3 e o caso base fornecem

$$\begin{aligned}
\tau_{\langle (k+1)\times 2\rangle}\left(\mathcal{D}_j\right) &= \left[\begin{array}{c} \tau_{\langle k\times 2\rangle}(\mathbf{0}_{k\times 2}) \\ \hline \tau_{\langle 1\times 2\rangle}(\mathcal{F}_{j-2k}) \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c} \mathbf{0}_{k\times 2} \\ \hline \eta_{j-2k}\mathcal{F}_{j-2k} \end{array}\right] \\
&= \eta_{j-2k}\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{k\times 2} \\ \mathcal{F}_{j-2k} \end{bmatrix} \\
&= \eta_{j-2k}\mathcal{D}_j.
\end{aligned}$$

(ii) Sejam agora $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2(k+1)} \in \mathbb{C}$ tais que

$$\sum_{j=1}^{2(k+1)} \alpha_j \mathcal{D}_j = \mathbf{0}_{(k+1)\times 2}. \tag{3.30}$$

Perceba que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2(k+1)} \alpha_j \mathcal{D}_j &= \sum_{j=1}^{2k} \alpha_j \mathcal{D}_j + \sum_{j=2k+1}^{2(k+1)} \alpha_j \mathcal{D}_j \\
&= \sum_{j=1}^{2k} \alpha_j \begin{bmatrix} \mathcal{A}_j \\ \mathbf{0}_{1\times 2} \end{bmatrix} + \sum_{j=2k+1}^{2(k+1)} \alpha_j \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{k\times 2} \\ \mathcal{F}_{j-2k} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{2k} \alpha_j \mathcal{A}_j \\ \mathbf{0}_{1\times 2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{k\times 2} \\ \sum_{j=2k+1}^{2(k+1)} \alpha_j \mathcal{F}_{j-2k} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{2k} \alpha_j \mathcal{A}_j \\ \sum_{j=2k+1}^{2(k+1)} \alpha_j \mathcal{F}_{j-2k} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Particionando o membro direito de (3.30) convenientemente, temos

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{2k} \alpha_j \mathcal{A}_j \\ \\ \sum_{j=2k+1}^{2(k+1)} \alpha_j \mathcal{F}_{j-2k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{k\times 2} \\ \\ \mathbf{0}_{1\times 2} \end{bmatrix}.$$

Por conseguinte,

$$\sum_{j=1}^{2k} \alpha_j \mathcal{A}_j = \mathbf{0}_{k\times 2} \quad \text{e} \quad \sum_{j=2k+1}^{2(k+1)} \alpha_j \mathcal{F}_{j-2k} = \mathbf{0}_{1\times 2}.$$

Mas, sendo $\mathcal{B}\left(\tau_{\langle k\times 2\rangle}\right)$ e $\mathcal{B}\left(\tau_{\langle 2\rangle}\right)$ ambos L.I., conclui-se que

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_{2k} = \alpha_{2k+1} = \alpha_{2(k+1)} = 0.$$

Portanto, $\tau_{\langle (k+1)\times 2\rangle}$ é diagonalizável e, assim, $\tau_{\langle n\times 2\rangle}$ também o é para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Estamos agora em condições de estabelecer o

Teorema 3.6. *$\tau_{\langle n\times m\rangle}$ é diagonalizável.*

Demonstração (Indução completa sobre m).

Fixando arbitrariamente $n \in \mathbb{N}$, provaremos que $\tau_{\langle n\times m\rangle}$ é diagonalizável para todo $m \in \mathbb{N}$.

Comecemos por perceber que $\tau_{\langle n\times 1\rangle}$ é diagonalizável, pois se trata do operador identidade do espaço $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$. Neste caso, basta notar que cada elemento da base canônica de tal espaço é um autovetor de $\tau_{\langle n\times 1\rangle}$.

Se $m = 2$, o resultado segue do Lema 3.8.

Suponhamos agora que, para todo $s \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$, a translineadora $\tau_{\langle n\times s\rangle}$ é diagonalizável. Mostraremos que $\tau_{\langle n\times k\rangle}$ é diagonalizável para $k \geqslant 3$.

Sendo $k \equiv r \ (mod\ 2)$, com $r \in \{1, 2\}$, a hipótese de indução e os casos iniciais garantem que $\tau_{\langle n\times (k-r)\rangle}$ e $\tau_{\langle n\times r\rangle}$ são ambas diagonalizáveis. Sob este prisma, sejam

$$\mathcal{B}\left(\tau_{\langle n\times (k-r)\rangle}\right) = \{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_{n(k-r)}\} \subset \mathcal{M}_{n\times (k-r)}(\mathbb{C})$$

e

$$\mathcal{B}\left(\tau_{\langle n\times r\rangle}\right) = \{\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_{nr}\} \subset \mathcal{M}_{n\times r}(\mathbb{C})$$

as bases de $\mathcal{M}_{n\times (k-r)}(\mathbb{C})$ e $\mathcal{M}_{n\times r}(\mathbb{C})$ formadas por autovetores de $\tau_{\langle n\times (k-r)\rangle}$ e $\tau_{\langle n\times r\rangle}$, respectivamente.

Sejam ainda $\rho_j \in \mathbb{C}$ o autovalor de $\tau_{\langle n\times(k-r)\rangle}$ associado a $\mathcal{A}_j$ para cada $j \in \mathcal{N}_{n(k-r)}$ e $\gamma_q \in \mathbb{C}$ o autovalor de $\tau_{\langle n\times r\rangle}$ associado a $\mathcal{R}_q$ para todo $q \in \mathcal{N}_{nr}$.

Afirmamos que o conjunto

$$\mathcal{B}\left(\tau_{\langle n\times k\rangle}\right) = \{\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_{n(k-r)}, \mathcal{D}_{n(k-r)+1}, \ldots, \mathcal{D}_{nk}\} \subset \mathcal{M}_{n\times k}(\mathbb{C})$$

definido por

$$\mathcal{D}_j = \begin{cases} \left[\ \mathcal{A}_j \quad \mathbf{0}_{n\times r}\ \right] & \text{se} \quad 1 \leqslant j \leqslant n(k-r) \\ \\ \left[\ \mathbf{0}_{n\times(k-r)} \quad \mathcal{R}_{j-n(k-r)}\ \right] & \text{se} \quad n(k-r)+1 \leqslant j \leqslant nk \end{cases}$$

é constituído por autovetores de $\tau_{\langle n\times k\rangle}$, bem como é L.I.. Decerto:

(i) Para começar, perceba que $k-r \in \mathcal{J}_k$, posto que $k-r \equiv 0 \pmod 2$ e $k-r \in \mathcal{N}_{k-1}$.

Tão logo, para cada $1 \leqslant j \leqslant n(k-r)$, o Corolário 3.4 nos diz que

$$\begin{aligned} \tau_{\langle n\times m\rangle}\left(\mathcal{D}_j\right) &= \left[\ \tau_{\langle n\times(k-r)\rangle}\left(\mathcal{A}_j\right) \mid \tau_{\langle n\times r\rangle}\left(\mathbf{0}_{n\times r}\right)\ \right] \\ &= \left[\ \rho_j \mathcal{A}_j \mid \mathbf{0}_{n\times r}\ \right] \\ &= \rho_j \left[\ \mathcal{A}_j \quad \mathbf{0}_{n\times r}\ \right] \\ &= \rho_j \mathcal{D}_j. \end{aligned}$$

De modo análogo, se $n(k-r)+1 \leqslant j \leqslant nk$, então

$$\begin{aligned} \tau_{\langle n\times m\rangle}\left(\mathcal{D}_j\right) &= \left[\ \tau_{\langle n\times(k-r)\rangle}(\mathbf{0}_{n\times(k-r)}) \mid \tau_{\langle n\times r\rangle}(\mathcal{R}_{j-n(k-r)})\ \right] \\ &= \left[\ \mathbf{0}_{n\times(k-r)} \mid \gamma_{j-n(k-r)}\mathcal{R}_{j-n(k-r)}\ \right] \\ &= \gamma_{j-n(k-r)}\left[\ \mathbf{0}_{n\times(k-r)} \quad \mathcal{R}_{j-n(k-r)}\ \right] \\ &= \gamma_{j-n(k-r)}\mathcal{D}_j. \end{aligned}$$

(ii) Por outro lado, sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_{nk} \in \mathbb{C}$ tais que

$$\sum_{j=1}^{nk} \alpha_j \mathcal{D}_j = \mathbf{0}_{n\times k}. \tag{3.31}$$

Note agora que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{nk} \alpha_j \mathcal{D}_j &= \sum_{j=1}^{n(k-r)} \alpha_j \mathcal{D}_j + \sum_{j=n(k-r)+1}^{nk} \alpha_j \mathcal{D}_j \\
&= \sum_{j=1}^{n(k-r)} \alpha_j \begin{bmatrix} \mathcal{A}_j & \mathbf{0}_{n\times r} \end{bmatrix} + \sum_{j=n(k-r)+1}^{nk} \alpha_j \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n\times(k-r)} & \mathcal{R}_{j-n(k-r)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n(k-r)} \alpha_j \mathcal{A}_j & \mathbf{0}_{n\times r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n\times(k-r)} & \sum_{j=n(k-r)+1}^{nk} \alpha_j \mathcal{R}_{j-n(k-r)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n(k-r)} \alpha_j \mathcal{A}_j & \sum_{j=n(k-r)+1}^{nk} \alpha_j \mathcal{R}_{j-n(k-r)} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Particionando o membro direito de (3.31) adequadamente, chega-se a

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n(k-r)} \alpha_j \mathcal{A}_j & \sum_{j=n(k-r)+1}^{nk} \alpha_j \mathcal{R}_{j-n(k-r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n\times(k-r)} & \mathbf{0}_{n\times r} \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\sum_{j=1}^{n(k-r)} \alpha_j \mathcal{A}_j = \mathbf{0}_{n\times(k-r)} \quad \text{e} \quad \sum_{j=n(k-r)+1}^{nk} \alpha_j \mathcal{R}_{j-n(k-r)} = \mathbf{0}_{n\times r}.$$

Não obstante, o fato de $\mathcal{B}\left(\tau_{\langle n\times(k-r)\rangle}\right)$ e $\mathcal{B}\left(\tau_{\langle n\times r\rangle}\right)$ serem ambos L.I. implica que

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_{n(k-r)} = \alpha_{n(k-r)+1} = \ldots = \alpha_{nk} = 0.$$

Sendo assim, $\tau_{\langle n\times k\rangle}$ é diagonalizável e, daí, $\tau_{\langle n\times m\rangle}$ também o é para todo $m \in \mathbb{N}$. $\square$

CAPÍTULO 4

TRANSLINEAÇÃO VERTICAL DE MATRIZES

Nestas linhas, estabelecemos a *Translineadora Vertical do Espaço* $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$, na qual consiste a generalização da aplicação φ definida na seção que principia o capítulo anterior, e provamos tratar-se também de um automorfismo diagonalizável. No mais, as semelhanças entre a translineadora horizontal $\tau_{\langle n\times m\rangle}$ e a que estamos por definir são notáveis e tais que, embora uma não seja a aplicação inversa da outra, ambas culminam em uma relação de invertibilidade matricial que as interliga, conforme veremos.

4.1 Translineadora Vertical do Espaço $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$

A translineação vertical repousa sobre a noção de *Coluna Translinear*, que definimos a seguir.

Definição 4.1. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Dado o espaço vetorial $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$. Dá-se o nome de* ***Translineadora do Espaço*** $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$ *à aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{\langle n\rangle} : & \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}) \\ & [x_d] & \longmapsto & [z_d] \end{array}$$

com $d \in \mathcal{N}_n$ definida por

$$z_d = \begin{cases} x_d + ix_{(d+1)} & \text{se} \quad d \equiv 1 \ (mod\ 2) \\ \\ x_{(d-1)} - ix_d & \text{se} \quad d \equiv 0 \ (mod\ 2) \end{cases}$$

quando $n \equiv 0 \ (mod\ 2)$, e

$$\varphi_{\langle n\rangle}([x_d]) = \begin{cases} [x_1] & se \quad n=1 \\ \left[\begin{array}{c} \varphi_{\langle n-1\rangle}([x_d]\setminus x_n) \\ \hline x_n \end{array}\right] & se \quad n>1 \end{cases}$$

caso contrário. Em que $[x_d]\setminus x_n$ denota a matriz $(n-1)\times 1$ obtida de $[x_d]$ pela eliminação do seu último termo.

*A que chamamos $\varphi_{\langle n\rangle}([x_d])$ de a **Coluna Translinear** de $[x_d]$.*

Para fins de ilustração, segue o

Exemplo 4.1. *Seja $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{C})$. Sendo $2 \equiv 0 \pmod 2$, a Definição 4.1 nos permite escrever*

$$\varphi_{\langle 2\rangle}(X) = \begin{bmatrix} z_1 \\ \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + ix_{(1+1)} \\ \\ x_{(2-1)} - ix_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + ix_2 \\ \\ x_1 - ix_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{C}).$$

Pondo acima $x_1 = x$ e $x_2 = y$, temos

$$\varphi_{\langle 2\rangle}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+iy \\ \\ x-iy \end{bmatrix}.$$

Recordando a aplicação φ definida na Seção 3.1, vê-se que $\varphi = \varphi_{\langle 2\rangle}|_{\mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})}$. ■

Particularmente, é claro que $\varphi_{\langle 1\rangle} = \tau_{\langle 1\rangle}$ e que, dessa forma, $\varphi_{\langle 1\rangle}$ é o operador identidade do espaço $\mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{C})$. Nesse sentido, dado $n \in \mathbb{N}$, com $n > 1$, consideremos a matriz

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}).$$

Se $n \equiv 0 \pmod 2$, a Definição 4.1 nos diz que

$$\varphi_{\langle n\rangle}(X)=\begin{bmatrix} x_1+ix_2\\ x_1-ix_2\\ \vdots\\ x_{n-1}+ix_n\\ x_{n-1}-ix_n\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}).$$

Supondo, alternativamente, $n\equiv 1\ (mod\ 2)$, ela nos dá

$$\varphi_{\langle n\rangle}(X)=\left[\begin{array}{c} \varphi_{\langle n-1\rangle}\left(\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-2}\\ x_{n-1}\end{bmatrix}\right)\\ \hline x_n\end{array}\right]=\begin{bmatrix} x_1+ix_2\\ x_1-ix_2\\ \vdots\\ x_{n-2}+ix_{n-1}\\ x_{n-2}-ix_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}).$$

São também três os aspectos por meio dos quais se poderá determinar uma *Matriz Translinear Vertical*. A próxima sentença encerra o primeiro deles.

Definição 4.2. *Sejam $n\in\mathbb{N}$ e $m\in\mathbb{N}$. Dado o espaço vetorial $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$. Damos o nome de* ***Translineadora Vertical do Espaço*** *$\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ à aplicação*

$$\begin{array}{rcl}\varphi_{\langle n\times m\rangle}:\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})\\ X & \longmapsto & \varphi_{\langle n\times m\rangle}(X)\end{array}$$

tal que, para cada $j\in\mathbb{N}_m$, a j-ésima coluna de $\varphi_{\langle n\times m\rangle}(X)$ é a coluna translinear da j-ésima coluna de X.

A que chamamos $\varphi_{\langle n\times m\rangle}(X)$ de a ***Matriz Translinear Vertical*** *de X.*

Evidentemente, tem-se $\varphi_{\langle n\times 1\rangle}=\varphi_{\langle n\rangle}$, para todo $n\in\mathbb{N}$.

Exemplo 4.2. *Procede da Definição 4.2 que*

$$\begin{aligned}\varphi_{\langle 2\times 2\rangle}(\mathcal{I}_2) &= \left[\ \varphi_{\langle 2\rangle}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)\ \middle|\ \varphi_{\langle 2\rangle}\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\ \right]\\ &= \begin{bmatrix}1+i0 & 0+i1\\ \\ 1-i0 & 0-i1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & i\\ 1 & -i\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

■

Tendo alcançado este ponto, é oportuno considerarmos a matriz

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nm} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C}).$$

A Definição 4.2 nos diz que

$$\varphi_{\langle n\times m\rangle}(X) = \begin{bmatrix} \varphi_{\langle n\rangle}\left(\begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}\right) & \dots & \varphi_{\langle n\rangle}\left(\begin{bmatrix} x_{1m} \\ \vdots \\ x_{nm} \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix}.$$

Se $n = 1$, é imediato constatar que $\varphi_{\langle 1\times m\rangle}(X) = X$. Nesse caso, $\varphi_{\langle 1\times m\rangle}$ é o operador identidade do espaço $\mathcal{M}_{1\times m}(\mathbb{C})$.

Seja, pois, $n > 1$ com $n \equiv 1 \pmod 2$. Então,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\langle n\times m\rangle}(X) &= \left[\begin{array}{ccc} \varphi_{\langle n-1\rangle}\left(\begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{(n-1)1} \end{bmatrix}\right) & & \varphi_{\langle n-1\rangle}\left(\begin{bmatrix} x_{1m} \\ \vdots \\ x_{(n-1)m} \end{bmatrix}\right) \\ \cline{1-1}\cline{3-3} & \dots & \\ x_{n1} & & x_{nm} \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix} \varphi_{\langle n-1\rangle}\left(\begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{(n-1)1} \end{bmatrix}\right) & \dots & \varphi_{\langle n-1\rangle}\left(\begin{bmatrix} x_{1m} \\ \vdots \\ x_{(n-1)m} \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix}} \\ \hline x_{n1} & \dots & x_{nm} \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\varphi_{\langle (n-1)\times m\rangle}\left(\begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(n-1)1} & \dots & x_{(n-1)m} \end{bmatrix}\right)} \\ \hline x_{n1} & \dots & x_{nm} \end{array}\right].
\end{aligned}$$

Sendo ainda l_n a n-ésima linha da matriz $X \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ e $X \setminus l_n$ a matriz $(n-1)\times m$ obtida de X pela eliminação da sua última linha, podemos escrever:

$$\varphi_{\langle n\times m\rangle}(X) = \left[\begin{array}{c} \varphi_{\langle (n-1)\times m\rangle}(X\setminus l_n) \\ \hline l_n \end{array}\right]. \tag{4.1}$$

4.2 Linhas de uma Matriz Translinear Vertical

Tendo em vista o segundo aspecto de determinação de uma matriz translinear vertical, fixemos notação. Dado $r\in\mathcal{N}_n$. Sejam, doravante, l_r a r-ésima linha de uma matriz $X\in\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ e $\mathcal{L}_r$ a r-ésima linha da matriz translinear vertical de X.

Teorema 4.1. *Seja $r\in\mathcal{N}_n$. A r-ésima linha da matriz translinear vertical de $X\in\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ é dada por*

$$\mathcal{L}_r = \begin{cases} l_r + il_{r+1} & se \quad r\in\mathbb{A}_n[1] \\ \\ l_{r-1} - il_r & se \quad r\in\mathbb{A}_n[0] \end{cases}$$

quando $n\equiv 0 \pmod 2$, e

$$\mathcal{L}_r = \begin{cases} l_r + il_{r+1} & se \quad r\in\mathbb{A}_n[1] \\ \\ l_{r-1} - il_r & se \quad r\in\mathbb{A}_n[0] \\ \\ l_n & se \quad r = n \end{cases}$$

caso contrário.

Demonstração. Seja $X=[x_{rk}]\in\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$. Para $n\equiv 0 \pmod 2$, tem-se a reunião disjunta

$$\mathcal{N}_n = \mathbb{A}_n[1]\cup\mathbb{A}_n[0].$$

Nesse caso, as Definições 4.1 e 4.2 garantem, fixo $r\in\mathcal{N}_n$, que

(i) $r\in\mathbb{A}_n[1]$ implica

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r &= [z_{rk}] \\ &= \left[x_{rk} + ix_{(r+1)k}\right] \\ &= [x_{rk}] + i\left[x_{(r+1)k}\right] \\ &= l_r + il_{r+1} \end{aligned}$$

(ii) $r \in \mathbb{A}_n[0]$ implica

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_r &= [z_{rk}] \\ &= \left[x_{(r-1)k} - ix_{rk}\right] \\ &= \left[x_{(r-1)k}\right] - i\,[x_{rk}] \\ &= l_{r-1} - il_r\end{aligned}$$

em que $k \in \mathcal{N}_m$.

Por outro lado, se $n \equiv 1 \pmod 2$, há dois casos a considerar.

Para $n = 1$, temos $\mathbb{A}_1[1] = \mathbb{A}_1[0] = \varnothing$. Mais ainda, $X = l_1$ e, daí, $\mathcal{L}_1 = \varphi_{\langle 1\times m\rangle}(l_1) = l_1$.

Seja $n > 1$. Haja vista $n-1 \equiv 0 \pmod 2$, a matriz $\varphi_{\langle (n-1)\times m\rangle}(X \setminus l_n)$ em (4.1) situa-se no caso já provado. A igualdade (4.1), então, nos dá

$$\mathcal{L}_r = \begin{cases} l_r + il_{r+1} & \text{se} \quad r \in \mathbb{A}_{n-1}[1] \\ l_{r-1} - il_r & \text{se} \quad r \in \mathbb{A}_{n-1}[0] \\ l_n & \text{se} \quad r = n \end{cases}$$

Note, por fim, que $\mathbb{A}_{n-1} = \mathcal{N}_{n-1} = \mathbb{A}_n$. □

Se estivermos lidando com matrizes reais, é possível tornar a aplicação do Teorema 4.1 mais prática. A isto se presta o

Corolário 4.1. *Sejam* $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ *e* $m \in \mathbb{N}$. *Se* $\mathcal{L}_k$ *é a* k*-ésima linha da matriz translinear vertical de* $X \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, *então*

(i) $\mathcal{L}_k = \overline{\mathcal{L}_{k+1}}$, *para todo* $k \in \mathbb{A}_n[1]$.

(ii) $\mathcal{L}_q = \overline{\mathcal{L}_{q-1}}$, *para todo* $q \in \mathbb{A}_n[0]$.

Demonstração. A todo tempo, suporemos conhecida a Proposição 2.6.

Para o item *(i)*, sabe-se, a partir da Proposição 3.1, que $k \in \mathbb{A}_n[1]$ se, e só se, $k+1 \in \mathbb{A}_n[0]$.

Seja qual for a paridade de n, o Teorema 4.1 nos diz, então, que

$$\mathcal{L}_{k+1} = l_{(k+1)-1} - il_{k+1} = l_k - il_{k+1}.$$

Desse modo,
$$\overline{\mathcal{L}_{k+1}} = \overline{l_k + (-i)l_{k+1}} = \overline{l_k} + \overline{(-i)}\,\overline{l_{k+1}} = l_k + il_{k+1} = \mathcal{L}_k,$$
já que l_k e l_{k+1} são linhas de X, uma matriz real.

Para o que falta, dado que $q \in \mathbb{A}_n[0]$ se, e só se, $q-1 \in \mathbb{A}_n[1]$, o item *(i)* nos dá
$$\mathcal{L}_{q-1} = \overline{\mathcal{L}_{(q-1)+1}} = \overline{\mathcal{L}_q}.$$
Portanto, $\mathcal{L}_q = \overline{(\overline{\mathcal{L}_q})} = \overline{\mathcal{L}_{q-1}}$. □

4.3 Matrizes de Translineação Vertical

Para motivar o que se segue, seja $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{C})$. Note, evocando os Exemplos 4.1 e 4.2, que
$$\begin{aligned}
\varphi_{\langle 2\times 2\rangle}(\mathcal{I}_2)\cdot X &= \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x+iy \\ \\ x-iy \end{bmatrix} \\
&= \varphi_{\langle 2\rangle}(X).
\end{aligned}$$
Isto é o prenúncio de um resultado mais forte, para o qual se faz necessário o próximo lema.

Nele e em tudo o que há de porvir, dado $r \in \mathcal{N}_n$, denota-se por g_r a r-ésima linha de $\mathcal{I}_n$.

Lema 4.1. *Dado $r \in \mathcal{N}_n$. Se $\mathcal{G}_r$ é a r-ésima linha da matriz translinear vertical de $\mathcal{I}_n$, então*
$$\mathcal{G}_r = \begin{cases} g_r + ig_{r+1} & \text{se} \quad r \in \mathbb{A}_n[1] \\ \\ g_{r-1} - ig_r & \text{se} \quad r \in \mathbb{A}_n[0] \end{cases}$$
quando $n \equiv 0 \pmod 2$, e
$$\mathcal{G}_r = \begin{cases} g_r + ig_{r+1} & \text{se} \quad r \in \mathbb{A}_n[1] \\ \\ g_{r-1} - ig_r & \text{se} \quad r \in \mathbb{A}_n[0] \\ \\ g_n & \text{se} \quad r = n \end{cases}$$
caso contrário.

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 4.1 à matriz $\mathcal{I}_n$. $\square$

Busquemos, então, descrever a matriz $\varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)$ segundo seus termos. Nesse sentido, a despeito da paridade de n, temos

$$r \in \mathbb{A}_n[1] \Longrightarrow [\mathcal{G}_r]_j = [g_r + ig_{r+1}]_j = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad j = r \\ i & \text{se} \quad j = r+1 \\ 0 & \text{se} \quad j \notin \{r, r+1\} \end{cases}$$

e

$$r \in \mathbb{A}_n[0] \Longrightarrow [\mathcal{G}_r]_j = [g_{r-1} - ig_r]_j = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad j = r-1 \\ -i & \text{se} \quad j = r \\ 0 & \text{se} \quad j \notin \{r-1, r\} \end{cases} .$$

Com isto, para $n \equiv 0 \ (mod\ 2)$, tem-se

$$\varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n) = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & i & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}). \tag{4.2}$$

Por outro lado, se $n > 1$ com $n \equiv 1 \ (mod\ 2)$, então

$$\varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n) = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}). \tag{4.3}$$

Com o adendo de, nesse caso, termos $\mathcal{G}_n = g_n$.

Seja qual for a paridade de $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, constata-se[1] que $\varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)$ é diagonal em blocos, com $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ blocos[2] do tipo

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} = \varphi_{\langle 2\times 2\rangle}\left(\mathcal{I}_2\right).$$

Lema 4.2. *Seja $X \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$. Para cada $r \in \mathcal{N}_n$, vale*

$$g_r \cdot X = l_r.$$

Em que g_r é a r-ésima linha de $\mathcal{I}_n$ e l_r, a r-ésima linha de X.

Demonstração. Fixo r em $\mathcal{N}_n$. Tomando $X = \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$, expressa segundo suas linhas, e $g_r = [\beta_k] \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{C})$, temos

$$g_r \cdot X = \sum_{k=1}^{n} \beta_k l_k = l_r$$

pois $\beta_r = 1$ e $\beta_k = 0$ para $k \neq r$. □

No próximo resultado reside o aspecto final para obtenção de uma matriz translinear vertical.

Teorema 4.2. *Dados $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $X \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$, então*

$$\varphi_{\langle n\times m\rangle}(X) = \varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n) \cdot X.$$

*Ao que dizemos que a matriz $\varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)$ é a **n-ésima Matriz de Translineação Vertical**.*

Demonstração. Seja $\varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n) = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{G}_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, expressa segundo suas linhas.

Temos, então, que

$$\varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n) \cdot X = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{G}_n \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_1 \cdot X \\ \vdots \\ \mathcal{G}_n \cdot X \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C}).$$

[1] Procedendo semelhantemente às matrizes de translineação horizonal.

[2] Se $n \equiv 1 \pmod 2$, então, além desses, há o bloco $[1]$ ao final da diagonal de $\varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)$.

A despeito da paridade de $n \in \mathbb{N}$, procede dos Lemas 4.1 e 4.2 que

(i) $r \in \mathbb{A}_n[1]$ implica

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_r \cdot X &= (g_r + i g_{r+1}) \cdot X \\ &= g_r \cdot X + i\,(g_{r+1} \cdot X) \\ &= l_r + i l_{r+1}. \end{aligned}$$

(ii) $r \in \mathbb{A}_n[0]$ implica

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_r \cdot X &= (g_{r-1} - i g_r) \cdot X \\ &= g_{r-1} \cdot X - i\,(g_r \cdot X) \\ &= l_{r-1} - i l_r. \end{aligned}$$

No caso de $r = n \equiv 1 \ (mod\ 2)$, temos $\mathcal{G}_n \cdot X = g_n \cdot X = l_n$.

Basta agora notar, de posse do Teorema 4.1, que cada linha do produto $\varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n) \cdot X$ é, em verdade, igual à linha de posição correspondente em $\varphi_{\langle n\times m\rangle}(X)$. Isto estabecele a igualdade de interesse. □

Corolário 4.2. *Para todas* $X \in \mathcal{M}_{n\times k}(\mathbb{C})$ *e* $Y \in \mathcal{M}_{k\times m}(\mathbb{C})$, *vale*

$$\varphi_{\langle n\times m\rangle}(XY) = \varphi_{\langle n\times k\rangle}(X) \cdot Y.$$

Demonstração. De fato,

$$\varphi_{\langle n\times m\rangle}(XY) = \varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n) \cdot (XY) = \big(\varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n) \cdot X\big) \cdot Y = \varphi_{\langle n\times k\rangle}(X) \cdot Y.$$

□

Os três resultados seguintes referem-se a matrizes particionadas em blocos e figurarão com frequência adiante.

Corolário 4.3. *Sejam* $n \in \mathbb{N}$ *e* $m \in \mathbb{N} - \{1\}$. *Se* $k \in \mathcal{N}_{m-1}$ *e* $X = \begin{bmatrix} D & Y \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$, *em que* $D \in \mathcal{M}_{n\times k}(\mathbb{C})$ *e* $Y \in \mathcal{M}_{n\times(m-k)}(\mathbb{C})$, *então*

$$\varphi_{\langle n\times m\rangle}(X) = \left[\ \varphi_{\langle n\times k\rangle}(D) \ \middle|\ \varphi_{\langle n\times(m-k)\rangle}(Y)\ \right].$$

Demonstração. Basta observar que

$$\begin{aligned}
\varphi_{\langle n\times m\rangle}(X) &= \varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)\cdot X \\
&= \varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)\cdot \begin{bmatrix} D & Y \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{c|c} \varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)\cdot D & \varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)\cdot Y \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} \varphi_{\langle n\times k\rangle}(D) & \varphi_{\langle n\times (m-k)\rangle}(Y) \end{array}\right].
\end{aligned}$$

□

Para o que segue, recorde-se que

$$\mathcal{J}_n = \{j \in \mathcal{N}_{n-1} : j \equiv 0 \ (mod\ 2)\}$$

para cada $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$.

Corolário 4.4. *Sejam $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $j \in \mathcal{J}_n$ e $X = \begin{bmatrix} D \\ N \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$, em que $D \in \mathcal{M}_{j\times m}(\mathbb{C})$ e $N \in \mathcal{M}_{(n-j)\times m}(\mathbb{C})$, então*

$$\varphi_{\langle n\times m\rangle}(X) = \left[\begin{array}{c} \varphi_{\langle j\times m\rangle}(D) \\ \hline \varphi_{\langle (n-j)\times m\rangle}(N) \end{array}\right].$$

Demonstração. Basta ver que

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{c} \varphi_{\langle j\times m\rangle}(D) \\ \hline \varphi_{\langle (n-j)\times m\rangle}(N) \end{array}\right] &= \left[\begin{array}{c} \varphi_{\langle j\times j\rangle}(\mathcal{I}_j)\cdot D \\ \hline \varphi_{\langle (n-j)\times (n-j)\rangle}(\mathcal{I}_{n-j})\cdot N \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} \varphi_{\langle j\times j\rangle}(\mathcal{I}_j) & \mathbf{0}_{j\times (n-j)} \\ \hline \mathbf{0}_{(n-j)\times j} & \varphi_{\langle (n-j)\times (n-j)\rangle}(\mathcal{I}_{n-j}) \end{array}\right] \begin{bmatrix} D \\ N \end{bmatrix} \\
&= \varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)\cdot X \\
&= \varphi_{\langle n\times m\rangle}(X).
\end{aligned}$$

□

Corolário 4.5. *Sejam $n \in \mathbb{N} - \{1,2\}$ e $m \in \mathbb{N} - \{1\}$. Se $X = \begin{bmatrix} D & Y \\ N & E \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times m}$, com $D \in \mathcal{M}_{j\times k}(\mathbb{C})$, $Y \in \mathcal{M}_{j\times(m-k)}(\mathbb{C})$, $N \in \mathcal{M}_{(n-j)\times k}(\mathbb{C})$ e $E \in \mathcal{M}_{(n-j)\times(m-k)}(\mathbb{C})$, então*

$$\varphi_{\langle n\times m\rangle}(X) = \left[\begin{array}{c|c} \varphi_{\langle j\times k\rangle}(D) & \varphi_{\langle j\times(m-k)\rangle}(Y) \\ \hline \varphi_{\langle (n-j)\times k\rangle}(N) & \varphi_{\langle (n-j)\times(m-k)\rangle}(E) \end{array}\right].$$

Em que $k \in \mathcal{N}_{m-1}$ e $j \in \mathcal{J}_n$.

Demonstração. Segue-se dos Corolários 4.3 e 4.4 que

$$\begin{aligned}
\varphi_{\langle n\times m\rangle}(X) &= \left[\begin{array}{c|c} \varphi_{\langle n\times k\rangle}\left(\begin{bmatrix} D \\ N \end{bmatrix}\right) & \varphi_{\langle n\times (m-k)\rangle}\left(\begin{bmatrix} Y \\ E \end{bmatrix}\right) \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \varphi_{\langle j\times k\rangle}(D) \\ \hline \varphi_{\langle (n-j)\times k\rangle}(N) \end{array} & \begin{array}{c} \varphi_{\langle j\times(m-k)\rangle}(Y) \\ \hline \varphi_{\langle (n-j)\times(m-k)\rangle}(E) \end{array} \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} \varphi_{\langle j\times k\rangle}(D) & \varphi_{\langle j\times(m-k)\rangle}(Y) \\ \hline \varphi_{\langle (n-j)\times k\rangle}(N) & \varphi_{\langle (n-j)\times(m-k)\rangle}(E) \end{array}\right].
\end{aligned}$$

□

Proposição 4.1. *$\varphi_{\langle n\times m\rangle}$ é um operador linear.*

Demonstração. Sendo a translineadora vertical $\varphi_{\langle n\times m\rangle}$ uma aplicação do espaço $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ em si mesmo, é suficiente constatar, ademais, que

$$\begin{aligned}
\varphi_{\langle n\times m\rangle}(X+\eta Y) &= \varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)\cdot(X+\eta Y) \\
&= \varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)\cdot X + \varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)\cdot(\eta Y) \\
&= \varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)\cdot X + \eta\left(\varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)\cdot Y\right) \\
&= \varphi_{\langle n\times m\rangle}(X) + \eta\,\varphi_{\langle n\times m\rangle}(Y)
\end{aligned}$$

para quaisquer X e Y em $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ e $\eta \in \mathbb{C}$. $\square$

4.4 O Elo entre as Translineadoras

As semelhanças entre as translineadoras horizontal e vertical sugerem que ambas compartilham algum tipo de relação. E há, decerto, algo que as une. Particularmente, vale

$$\begin{aligned}
\varphi_{\langle 2\times 2\rangle}(\mathcal{I}_2)\cdot\tau_{\langle 2\times 2\rangle}(\mathcal{I}_2) &= \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1\cdot\frac{1}{2}+i\cdot\left(-\frac{i}{2}\right) & 1\cdot\frac{1}{2}+i\cdot\frac{i}{2} \\ 1\cdot\frac{1}{2}+(-i)\cdot\left(-\frac{i}{2}\right) & 1\cdot\frac{1}{2}+(-i)\cdot\frac{i}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \mathcal{I}_2.
\end{aligned}$$

No mais,

$$\varphi_{\langle 1\times 1\rangle}(\mathcal{I}_1)\cdot\tau_{\langle 1\times 1\rangle}(\mathcal{I}_1) = \mathcal{I}_1\cdot\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_1.$$

As semelhanças, de fato, culminam em uma invertibilidade matricial. Nesse sentido, a fim de a externar em toda a sua generalidade, destacamos os dois próximos lemas.

Lema 4.3. *Seja $n \in \mathbb{N} - \{1,2\}$. Se $n \equiv r \pmod 2$, com $r \in \{1,2\}$, então*

$$\varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n) = \left[\begin{array}{c|c} \varphi_{\langle (n-r)\times(n-r)\rangle}(\mathcal{I}_{n-r}) & \mathbf{0}_{(n-r)\times r} \\ \hline \mathbf{0}_{r\times(n-r)} & \varphi_{\langle r\times r\rangle}(\mathcal{I}_r) \end{array}\right].$$

Demonstração. Note, sendo $n > 2$, que se pode particionar a matriz $\mathcal{I}_n$ em blocos sob a forma:

$$\mathcal{I}_n = \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{I}_{n-r} & \mathbf{0}_{(n-r)\times r} \\ \hline \mathbf{0}_{r\times(n-r)} & \mathcal{I}_r \end{array}\right].$$

Repare ainda que $n-r \equiv 0 \pmod 2$ e $n-r \in \mathcal{N}_{n-1}$, donde $n-r \in \mathfrak{J}_n$.

Satisfeita a hipótese do Corolário 4.5, temos

$$\begin{aligned}
\varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n) &= \left[\begin{array}{c|c} \varphi_{\langle (n-r)\times(n-r)\rangle}\left(\mathcal{I}_{n-r}\right) & \varphi_{\langle (n-r)\times r\rangle}\left(\mathbf{0}_{(n-r)\times r}\right) \\ \hline \varphi_{\langle r\times(n-r)\rangle}\left(\mathbf{0}_{r\times(n-r)}\right) & \varphi_{\langle r\times r\rangle}\left(\mathcal{I}_r\right) \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} \varphi_{\langle (n-r)\times(n-r)\rangle}\left(\mathcal{I}_{n-r}\right) & \mathbf{0}_{(n-r)\times r} \\ \hline \mathbf{0}_{r\times(n-r)} & \varphi_{\langle r\times r\rangle}\left(\mathcal{I}_r\right) \end{array}\right].
\end{aligned}$$

□

Lema 4.4. *Dado $n \in \mathbb{N} - \{1,2\}$. Se $n \equiv r \pmod 2$, com $r \in \{1,2\}$, então*

$$\varphi_{\langle n\times n\rangle}\left(\mathcal{I}_n\right)\cdot\tau_{\langle n\times n\rangle}\left(\mathcal{I}_n\right) = \left[\begin{array}{c|c} \varphi_{\langle j\times j\rangle}\left(\mathcal{I}_j\right)\cdot\tau_{\langle j\times j\rangle}\left(\mathcal{I}_j\right) & \mathbf{0}_{j\times r} \\ \hline \mathbf{0}_{r\times j} & \varphi_{\langle r\times r\rangle}\left(\mathcal{I}_r\right)\cdot\tau_{\langle r\times r\rangle}\left(\mathcal{I}_r\right) \end{array}\right].$$

Em que $j = n-r$.

Demonstração. Evocando os Lemas 3.3 e 4.3, temos, pondo $j = n-r$, que

$$\begin{aligned}
\varphi_{\langle n\times n\rangle}\left(\mathcal{I}_n\right)\cdot\tau_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n) &= \left[\begin{array}{c|c} \tau_{\langle j\times j\rangle}\left(\mathcal{I}_j\right) & \mathbf{0}_{j\times r} \\ \hline \mathbf{0}_{r\times j} & \tau_{\langle r\times r\rangle}\left(\mathcal{I}_r\right) \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \varphi_{\langle j\times j\rangle}\left(\mathcal{I}_j\right) & \mathbf{0}_{j\times r} \\ \hline \mathbf{0}_{r\times j} & \varphi_{\langle r\times r\rangle}\left(\mathcal{I}_r\right) \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} \varphi_{\langle j\times j\rangle}\left(\mathcal{I}_j\right)\cdot\tau_{\langle j\times j\rangle}\left(\mathcal{I}_j\right) & \mathbf{0}_{j\times r} \\ \hline \mathbf{0}_{r\times j} & \varphi_{\langle r\times r\rangle}\left(\mathcal{I}_r\right)\cdot\tau_{\langle r\times r\rangle}\left(\mathcal{I}_r\right) \end{array}\right].
\end{aligned}$$

□

Encontramo-nos agora em posição de provar o elo prometido.

Teorema 4.3. *A n-ésima matriz de translineação vertical é a inversa da n-ésima matriz de translineação horizontal para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Iniciemos por provar que

$$\varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathfrak{I}_n)\cdot\tau_{\langle n\times n\rangle}(\mathfrak{I}_n)=\mathfrak{I}_n \tag{4.4}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Procederemos por indução completa sobre n. Para a qual os casos iniciais em que $n \in \{1, 2\}$ já têm sua validade atestada.

Suponhamos, então, que

$$\varphi_{\langle s\times s\rangle}(\mathfrak{I}_s)\cdot\tau_{\langle s\times s\rangle}(\mathfrak{I}_s)=\mathfrak{I}_s$$

para todo $s \in \{1,2,\ldots,k-1\}$.

Interessa-nos mostrar a validade de (4.4) para $k \geqslant 3$. Seja, pois, $k \equiv r \pmod 2$, com $r \in \{1, 2\}$.

Pondo $j = k-r$, o Lema 4.4, a hipótese de indução e os casos iniciais fornecem

$$\begin{aligned}
\varphi_{\langle k\times k\rangle}(\mathfrak{I}_k)\cdot\tau_{\langle k\times k\rangle}(\mathfrak{I}_k) &= \left[\begin{array}{c|c} \varphi_{\langle j\times j\rangle}(\mathfrak{I}_j)\cdot\tau_{\langle j\times j\rangle}(\mathfrak{I}_j) & \mathbf{0}_{j\times r} \\ \hline \mathbf{0}_{r\times j} & \varphi_{\langle r\times r\rangle}(\mathfrak{I}_r)\cdot\tau_{\langle r\times r\rangle}(\mathfrak{I}_r) \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} \mathfrak{I}_j & \mathbf{0}_{j\times r} \\ \hline \mathbf{0}_{r\times j} & \mathfrak{I}_r \end{array}\right] \\
&= \mathfrak{I}_k.
\end{aligned}$$

Tem-se, desse modo, estabelecida a validade de (4.4) para $k \geqslant 3$ e, daí, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Evocando agora o Teorema 3.3, vê-se que (4.4), em verdade, significa:

$$\tau_{\langle n\times n\rangle}\left(\varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathfrak{I}_n)\right)=\mathfrak{I}_n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\tau_{\langle n\times n\rangle}\left(\varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathfrak{I}_n)\right)=\mathfrak{I}_n=\tau_{\langle n\times n\rangle}\left(\tau^{-1}_{\langle n\times n\rangle}(\mathfrak{I}_n)\right).$$

Mas $\tau_{\langle n\times n\rangle}$ é uma injeção. Assim,

$$\varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathfrak{I}_n)=\tau^{-1}_{\langle n\times n\rangle}(\mathfrak{I}_n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. □

As translineadoras horizontal e vertical são ainda tais que vale a

Proposição 4.2. *$\tau_{\langle n\times m\rangle}$ e $\varphi_{\langle n\times m\rangle}$ comutam entre si.*

Demonstração. Se $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$, então

$$\begin{aligned}
\left(\tau_{\langle n\times m\rangle} \circ \varphi_{\langle n\times m\rangle}\right)(A) &= \tau_{\langle n\times m\rangle}\left(\varphi_{\langle n\times m\rangle}(A)\right)\\
&= \varphi_{\langle n\times m\rangle}(A)\cdot \tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)\\
&= \left(\varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)\cdot A\right)\cdot \tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)\\
&= \varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)\cdot \left(A\cdot \tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)\right)\\
&= \varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)\cdot \tau_{\langle n\times m\rangle}(A)\\
&= \varphi_{\langle n\times m\rangle}\left(\tau_{\langle n\times m\rangle}(A)\right)\\
&= \left(\varphi_{\langle n\times m\rangle} \circ \tau_{\langle n\times m\rangle}\right)(A).
\end{aligned}$$

□

4.5 Automorfismo Diagonalizável

A esta altura, para provarmos que a translineadora $\varphi_{\langle n\times m\rangle}$ trata-se de um automorfismo do espaço $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$, convém o

Lema 4.5. *Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ e $X \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$, temos*

(i) $\tau_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)\cdot \varphi_{\langle n\times m\rangle}(X) = X$.

(ii) $\varphi_{\langle n\times n\rangle}\left(\tau_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)\right) = \mathcal{I}_n$.

Demonstração. Repare que

$$\begin{aligned}
X &= \mathcal{I}_n\cdot X\\
&= \left(\tau_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)\cdot \varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)\right)\cdot X\\
&= \tau_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)\cdot \left(\varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)\cdot X\right)\\
&= \tau_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)\cdot \varphi_{\langle n\times m\rangle}(X).
\end{aligned}$$

Ademais, $\mathcal{I}_n = \varphi_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)\cdot\tau_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n) = \varphi_{\langle n\times n\rangle}\left(\tau_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)\right)$. □

Teorema 4.4. *$\varphi_{\langle n\times m\rangle}$ é um automorfismo de $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$.*

Demonstração. Sendo $\varphi_{\langle n\times m\rangle}$ um operador, a fim de lhe conferir o título de automorfismo de $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$, basta-nos exibir a sua aplicação inversa, qual seja:

$$\begin{array}{rccc} \beta_{\langle n\times m\rangle} : & \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C}) \\ & X & \longmapsto & \tau_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)\cdot X \end{array}$$

Com efeito,

$$\left(\beta_{\langle n\times m\rangle}\circ\varphi_{\langle n\times m\rangle}\right)(X) = \beta_{\langle n\times m\rangle}\left(\varphi_{\langle n\times m\rangle}(X)\right) = \tau_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)\cdot\varphi_{\langle n\times m\rangle}(X) = X$$

em virtude do item *(i)* do Lema 4.5.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left(\varphi_{\langle n\times m\rangle}\circ\beta_{\langle n\times m\rangle}\right)(X) &= \varphi_{\langle n\times m\rangle}\left(\beta_{\langle n\times m\rangle}(X)\right) \\ &= \varphi_{\langle n\times m\rangle}\left(\tau_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)\cdot X\right) \\ &= \varphi_{\langle n\times n\rangle}\left(\tau_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)\right)\cdot X \\ &= \mathcal{I}_n\cdot X \\ &= X \end{aligned}$$

haja vista o Corolário 4.2 e o item *(ii)* do Lema 4.5.

Logo, $\beta_{\langle n\times m\rangle} = \varphi^{-1}_{\langle n\times m\rangle}$. □

As próximas linhas são devotadas à prova de que a translineadora vertical $\varphi_{\langle n\times m\rangle}$ é diagonalizável.

Lema 4.6. *$\varphi_{\langle 2\rangle}$ é diagonalizável.*

Demonstração. Sabendo que

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{\langle 2\rangle} : & \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{C}) \\ & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} x+iy \\ x-iy \end{bmatrix} \end{array}$$

com $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{C}) = 2$, é suficiente determinarmos dois autovetores de $\varphi_{\langle 2\rangle}$ que sejam linearmente independentes.

Queremos, pois, encontrar uma matriz $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}_{2\times 1}$ e $\eta \in \mathbb{C}$ tais que $\varphi_{\langle 2\rangle}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \eta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Isto reduz-se a resolver o sistema

$$\begin{cases} x + iy = \eta x \\ \\ x - iy = \eta y. \end{cases} \tag{4.5}$$

Mas (4.5) equivale a

$$\begin{cases} (1-\eta)x + iy = 0 \\ \\ x - (i+\eta)y = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Note que $\eta \neq 1$. Do contrário, teríamos $x = y = 0$.

Multiplicando-se, então, a segunda equação em (4.6) por $-(1-\eta) \neq 0$ e, após, somando-a à primeira, chega-se a

$$\begin{cases} ((1-\eta)(i+\eta) + i)\,y = 0 \\ \\ x - (i+\eta)y = 0. \end{cases}$$

Isto é,

$$\begin{cases} \left(-\eta^2 + (1-i)\eta + 2i\right) y = 0 \\ \\ x - (i+\eta)y = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Se $y = 0$ em (4.7), então $x = 0$. Só se pode ter, portanto,

$$-\eta^2 + (1-i)\eta + 2i = 0.$$

A fórmula resolvente da equação do segundo grau, então, fornece

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{-(1-i) \pm \sqrt{(1-i)^2 - 4\cdot(-1)\cdot 2i}}{2\cdot(-1)} \\ &= \frac{1 - i \mp \sqrt{1 - 2i + i^2 + 8i}}{2} \\ &= \frac{1 - i \mp \sqrt{6i}}{2} \\ &= \frac{1 - i \mp (\sqrt{3} + i\sqrt{3})}{2} \\ &= \frac{1 \mp \sqrt{3} + (-1 \mp \sqrt{3})i}{2} \end{aligned}$$

em que $\sqrt{6i} = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$.

Logo, o espectro de $\varphi_{\langle 2 \rangle}$ é

$$\sigma\left(\varphi_{\langle 2 \rangle}\right) = \left\{ \frac{1-\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})i}{2}, \ \frac{1+\sqrt{3}-(1-\sqrt{3})i}{2} \right\}.$$

Se $\eta \in \sigma\left(\varphi_{\langle 2 \rangle}\right)$, o sistema (4.7) resume-se a

$$x = (i+\eta)y.$$

Então, ao autovalor η de $\varphi_{\langle 2 \rangle}$ estão associados os autovetores

$$\begin{bmatrix} (i+\eta)y \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} i+\eta \\ 1 \end{bmatrix}$$

com $y \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Sendo, pois, $\eta_1, \eta_2 \in \sigma\left(\varphi_{\langle 2 \rangle}\right)$, com $\eta_1 \neq \eta_2$, o conjunto

$$\mathcal{B}\left(\varphi_{\langle 2 \rangle}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} i+\eta_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i+\eta_2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \tag{4.8}$$

de autovetores de $\varphi_{\langle 2 \rangle}$ é L.I..

Para ver isto, sejam $u \in \mathbb{C}$ e $v \in \mathbb{C}$ tais que

$$u \begin{bmatrix} i+\eta_1 \\ 1 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} i+\eta_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{2\times 1}.$$

Segue-se disto que

$$\begin{cases} u(i+\eta_1) + v(i+\eta_2) = 0 \\ \\ u + v = 0. \end{cases} \tag{4.9}$$

Como $v = -u$, a primeira equação de (4.9) nos dá $u(\eta_1 - \eta_2) = 0$.

Portanto, $u = 0$ e, daí, $v = 0$. $\square$

Atente que a base obtida em (4.8) é[3]

$$\mathcal{B}\left(\varphi_{\langle 2 \rangle}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} \left(1-\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i\right)/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \left(1+\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i\right)/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

---

[3]Nesse caso, tomamos

$$\eta_1 = \frac{1-\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})i}{2} \quad \text{e} \quad \eta_2 = \frac{1+\sqrt{3}-(1-\sqrt{3})i}{2}.$$

No mais, $|\eta_1| = |\eta_2| = 2$.

Para o próximo lema, designamos por $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ os elementos de $\mathcal{B}\left(\varphi_{\langle 2\rangle}\right) \subset \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{C})$, segundo a ordem em que foram exibidos.

Lema 4.7. *$\varphi_{\langle 2\times m\rangle}$ é diagonalizável.*

Demonstração (Indução sobre m).

Para $m = 1$, basta ver que $\varphi_{\langle 2\times 1\rangle} = \varphi_{\langle 2\rangle}$.

Suponhamos agora que $\varphi_{\langle 2\times k\rangle}$ seja diagonalizável para algum $k \in \mathbb{N}$.

Seja, então, $\mathcal{B}\left(\varphi_{\langle 2\times k\rangle}\right) = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_{2k}\} \subset \mathcal{M}_{2\times k}(\mathbb{C})$, uma base do espaço $\mathcal{M}_{2\times k}(\mathbb{C})$ formada por autovetores de $\varphi_{\langle 2\times k\rangle}$, com $\rho_j \in \mathbb{C}$ sendo o autovalor de $\varphi_{\langle 2\times k\rangle}$ associado a $\mathcal{A}_j$, para $j = 1, 2, \ldots, 2k$.

Mostraremos que o conjunto

$$\mathcal{B}\left(\varphi_{\langle 2\times(k+1)\rangle}\right) = \{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_{2k}, \mathcal{D}_{2k+1}, \mathcal{D}_{2(k+1)}\} \subset \mathcal{M}_{2\times(k+1)}(\mathbb{C})$$

definido por

$$\mathcal{D}_j = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_j & \mathbf{0}_{2\times 1} \end{bmatrix} & \text{se} \quad 1 \leqslant j \leqslant 2k \\ \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times k} & \mathcal{V}_{j-2k} \end{bmatrix} & \text{se} \quad 2k+1 \leqslant j \leqslant 2(k+1) \end{cases}$$

é constituído por autovetores de $\varphi_{\langle 2\times(k+1)\rangle}$, bem como é L.I.. É o que se faz a seguir.

(i) Para $1 \leqslant j \leqslant 2k$, o Corolário 4.3 e a hipótese de indução fornecem

$$\begin{aligned} \varphi_{\langle 2\times(k+1)\rangle}\left(\mathcal{D}_j\right) &= \left[\ \varphi_{\langle 2\times k\rangle}\left(\mathcal{A}_j\right) \,\middle|\, \varphi_{\langle 2\times 1\rangle}\left(\mathbf{0}_{2\times 1}\right)\ \right] \\ &= \left[\ \rho_j \mathcal{A}_j \,\middle|\, \mathbf{0}_{2\times 1}\ \right] \\ &= \rho_j \begin{bmatrix} \mathcal{A}_j & \mathbf{0}_{2\times 1} \end{bmatrix} \\ &= \rho_j \mathcal{D}_j. \end{aligned}$$

Analogamente, se $j \in \{2k+1, 2(k+1)\}$, o Corolário 4.3 e o caso base nos dizem que

$$\begin{aligned} \varphi_{\langle 2\times(k+1)\rangle}\left(\mathcal{D}_j\right) &= \left[\ \varphi_{\langle 2\times k\rangle}\left(\mathbf{0}_{2\times k}\right) \,\middle|\, \varphi_{\langle 2\times 1\rangle}\left(\mathcal{V}_{j-2k}\right)\ \right] \\ &= \left[\ \mathbf{0}_{2\times k} \,\middle|\, \eta_{j-2k} \mathcal{V}_{j-2k}\ \right] \\ &= \eta_{j-2k} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2\times k} & \mathcal{V}_{j-2k} \end{bmatrix} \\ &= \eta_{j-2k} \mathcal{D}_j. \end{aligned}$$

(ii) Para o que falta, seja

$$\sum_{j=1}^{2(k+1)} \beta_j \mathcal{D}_j = \mathbf{0}_{2\times(k+1)} \tag{4.10}$$

com $\beta_j \in \mathbb{C}$.

Temos, então, que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2(k+1)} \beta_j \mathcal{D}_j &= \sum_{j=1}^{2k} \beta_j \mathcal{D}_j + \sum_{j=2k+1}^{2(k+1)} \beta_j \mathcal{D}_j \\
&= \sum_{j=1}^{2k} \beta_j \left[\begin{array}{cc} \mathcal{A}_j & \mathbf{0}_{2\times 1} \end{array}\right] + \sum_{j=2k+1}^{2(k+1)} \beta_j \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0}_{2\times k} & \mathcal{V}_{j-2k} \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cc} \sum_{j=1}^{2k} \beta_j \mathcal{A}_j & \mathbf{0}_{2\times 1} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0}_{2\times k} & \sum_{j=2k+1}^{2(k+1)} \beta_j \mathcal{V}_{j-2k} \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cc} \sum_{j=1}^{2k} \beta_j \mathcal{A}_j & \sum_{j=2k+1}^{2(k+1)} \beta_j \mathcal{V}_{j-2k} \end{array}\right].
\end{aligned}$$

Neste ponto, (4.10) significa:

$$\left[\begin{array}{cc} \sum_{j=1}^{2k} \beta_j \mathcal{A}_j & \sum_{j=2k+1}^{2(k+1)} \beta_j \mathcal{V}_{j-2k} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0}_{2\times k} & \mathbf{0}_{2\times 1} \end{array}\right].$$

Procede daí que

$$\sum_{j=1}^{2k} \beta_j \mathcal{A}_j = \mathbf{0}_{2\times k} \quad \text{e} \quad \sum_{j=2k+1}^{2(k+1)} \beta_j \mathcal{V}_{j-2k} = \mathbf{0}_{2\times 1}.$$

Mas, $\mathcal{B}\left(\varphi_{\langle 2\times k\rangle}\right)$ e $\mathcal{B}\left(\varphi_{\langle 2\rangle}\right)$ são ambos L.I., donde

$$\beta_1 = \ldots = \beta_{2k} = \beta_{2k+1} = \beta_{2(k+1)} = 0.$$

Logo, $\varphi_{\langle 2\times(k+1)\rangle}$ é diagonalizável e, assim, $\varphi_{\langle 2\times m\rangle}$ também o é para todo $m \in \mathbb{N}$. □

Estamos, pois, em condições de efetuar a prova do

Teorema 4.5. *$\varphi_{\langle n\times m\rangle}$ é diagonalizável.*

Demonstração (Indução completa sobre n).

Fixando arbitrariamente $m \in \mathbb{N}$, provaremos que $\varphi_{\langle n\times m\rangle}$ é diagonalizável para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$, basta notar que $\varphi_{\langle 1\times m\rangle}$ é o operador identidade do espaço $\mathcal{M}_{1\times m}(\mathbb{C})$, de modo que cada elemento da base canônica de tal espaço é um autovetor de $\varphi_{\langle 1\times m\rangle}$.

Tendo sido firmado o Lema 4.7, segue dele o caso $n = 2$.

Supondo que a translineadora $\varphi_{\langle s\times m\rangle}$ é diagonalizável para todo $s \in \{1,2,\ldots,k-1\}$, mostraremos que $\varphi_{\langle k\times m\rangle}$ também o é para $k \geqslant 3$.

Seja $k \equiv r \ (mod\, 2)$, com $r \in \{1, 2\}$. Tem-se que $\varphi_{\langle (k-r)\times m\rangle}$ e $\varphi_{\langle r\times m\rangle}$ são ambas diagonalizáveis, tendo em vista a hipótese de indução e os casos iniciais.

Digamos, então, que as bases de $\mathcal{M}_{(k-r)\times m}(\mathbb{C})$ e $\mathcal{M}_{r\times m}(\mathbb{C})$ formadas por autovetores de $\varphi_{\langle (k-r)\times m\rangle}$ e $\varphi_{\langle r\times m\rangle}$ sejam

$$\mathcal{B}\left(\varphi_{\langle (k-r)\times m\rangle}\right) = \{\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_{(k-r)m}\} \subset \mathcal{M}_{(k-r)\times m}(\mathbb{C})$$

e

$$\mathcal{B}\left(\varphi_{\langle r\times m\rangle}\right) = \{\mathcal{R}_1,\ldots,\mathcal{R}_{rm}\} \subset \mathcal{M}_{r\times m}(\mathbb{C}).$$

Sejam ainda $\rho_j \in \mathbb{C}$ o autovalor de $\varphi_{\langle (k-r)\times m\rangle}$ associado a $\mathcal{A}_j$ para cada $j \in \mathcal{N}_{(k-r)m}$ e $\omega_q \in \mathbb{C}$ o autovalor de $\varphi_{\langle r\times m\rangle}$ associado a $\mathcal{R}_q$ para todo $q \in \mathcal{N}_{rm}$.

Interessa-nos provar que o conjunto

$$\mathcal{B}\left(\varphi_{\langle k\times m\rangle}\right) = \{\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_{(k-r)m},\mathcal{D}_{(k-r)m+1},\ldots,\mathcal{D}_{km}\} \subset \mathcal{M}_{k\times m}(\mathbb{C})$$

definido por

$$\mathcal{D}_j = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_j \\ \\ \mathbf{0}_{r\times m} \end{bmatrix} & \text{se} \quad 1 \leqslant j \leqslant (k-r)m \\ \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(k-r)\times m} \\ \\ \mathcal{R}_{j-(k-r)m} \end{bmatrix} & \text{se} \quad (k-r)m+1 \leqslant j \leqslant km \end{cases}$$

é constituído por autovetores de $\varphi_{\langle k\times m\rangle}$, bem como é L.I..

De fato:

(i) Iniciemos por perceber que $k-r \in \mathcal{J}_k$, posto que $k-r \equiv 0 \ (mod\, 2)$ e $k-r \in \mathcal{N}_{k-1}$.

Dito isto, para $1 \leqslant j \leqslant 2k$, decorre do Corolário 4.4 que

$$\varphi_{\langle k\times m\rangle}\left(\mathcal{D}_j\right) = \begin{bmatrix} \varphi_{\langle (k-r)\times m\rangle}(\mathcal{A}_j) \\ \hline \varphi_{\langle r\times m\rangle}(\mathbf{0}_{r\times m}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_j\mathcal{A}_j \\ \hline \mathbf{0}_{r\times m} \end{bmatrix} = \rho_j \begin{bmatrix} \mathcal{A}_j \\ \\ \mathbf{0}_{r\times m} \end{bmatrix} = \rho_j\mathcal{D}_j.$$

Semelhantemente, se $(k-r)m+1 \leqslant j \leqslant km$, então

$$\begin{aligned}
\varphi_{\langle k\times m\rangle}\left(\mathcal{D}_j\right) &= \left[\begin{array}{c} \varphi_{\langle (k-r)\times m\rangle}\left(\mathbf{0}_{(k-r)\times m}\right) \\ \hline \varphi_{\langle r\times m\rangle}\left(\mathcal{R}_{j-(k-r)m}\right) \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c} \mathbf{0}_{(k-r)\times m} \\ \hline \omega_{j-(k-r)m}\mathcal{R}_{j-(k-r)m} \end{array}\right] \\
&= \omega_{j-(k-r)m}\left[\begin{array}{c} \mathbf{0}_{(k-r)\times m} \\ \mathcal{R}_{j-(k-r)m} \end{array}\right] \\
&= \omega_{j-(k-r)m}\mathcal{D}_j.
\end{aligned}$$

(ii) Para terminar, seja

$$\sum_{j=1}^{km} \beta_j \mathcal{D}_j = \mathbf{0}_{k\times m} \tag{4.11}$$

com $\beta_j \in \mathbb{C}$. Resulta, desenvolvendo a soma à esquerda e particionando a matriz à direita, que

$$\left[\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{j=1}^{(k-r)m} \beta_j \mathcal{A}_j \\ \displaystyle\sum_{j=(k-r)m+1}^{km} \beta_j \mathcal{R}_{j-(k-r)m} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0}_{(k-r)\times m} \\ \mathbf{0}_{r\times m} \end{array}\right].$$

Isto nos dá

$$\sum_{j=1}^{(k-r)m} \beta_j \mathcal{A}_j = \mathbf{0}_{(k-r)\times m} \quad \text{e} \quad \sum_{j=(k-r)m+1}^{km} \beta_j \mathcal{R}_{j-(k-r)m} = \mathbf{0}_{r\times m}.$$

Tendo, pois, em vista que $\mathcal{B}\left(\varphi_{\langle (k-r)\times m\rangle}\right)$ e $\mathcal{B}\left(\varphi_{\langle r\times m\rangle}\right)$ são ambos L.I., temos

$$\beta_1 = \ldots = \beta_{(k-r)m} = \beta_{(k-r)m+1} = \ldots = \beta_{km} = 0.$$

Portanto, $\varphi_{\langle k\times m\rangle}$ é diagonalizável e, daí, $\varphi_{\langle n\times m\rangle}$ também o é para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

CAPÍTULO 5

A REGRA DOS TERMOS DUAIS

Em que pese o desenvolvimento teórico das translineadoras $\tau_{\langle n\times m\rangle}$ e $\varphi_{\langle n\times m\rangle}$ realizado anteriormente, a este ponto, lançaremos mão de tal aporte a fim de estudarmos o *Sistema Translinear Associado* a um sistema linear dado. Nesse sentido, do primeiro, extrairemos fatos relevantes a respeito do segundo relativamente, de início, ao seu número de soluções e, logo após, à sua solução em si, quando esta existir e for única.

5.1 Sistemas Translineares

O resultado a seguir leva adiante e encerra o elo entre as translineadoras horizontal e vertical denotado, a princípio, no Teorema 4.3.

Teorema 5.1. *Se $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ e $X \in \mathcal{M}_{m\times k}(\mathbb{C})$, então*

$$\tau_{\langle n\times m\rangle}(A)\cdot\varphi_{\langle m\times k\rangle}(X) = AX.$$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
AX &= A\cdot\mathcal{I}_m\cdot X \\
&= A\cdot\Big(\tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)\cdot\tau^{-1}_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)\Big)\cdot X \\
&= \big(A\cdot\tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)\big)\cdot\Big(\tau^{-1}_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)\cdot X\Big) \\
&= \big(A\cdot\tau_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)\big)\cdot\big(\varphi_{\langle m\times m\rangle}(\mathcal{I}_m)\cdot X\big) \qquad (5.1)\\
&= \tau_{\langle n\times m\rangle}(A)\cdot\varphi_{\langle m\times k\rangle}(X). \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

Em que em (5.1) lançamos mão do Teorema 4.3; e, em (5.2), usamos os Teoremas 3.3 e 4.2. □

Mais do que o teorema anterior nos será importante, em breve, a seguinte consequência dele, a qual, de resto, é de todo natural.

Corolário 5.1. *Se $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ e $x \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{C})$, então*

$$\tau_{\langle n\times m\rangle}(A)\cdot\varphi_{\langle m\rangle}(x) = Ax.$$

Demonstração. Basta fazer $k = 1$ no Teorema 5.1 e usar o fato de que, para cada $m \in \mathbb{N}$, se tem $\varphi_{\langle m\times 1\rangle} = \varphi_{\langle m\rangle}$. □

Guiados por (3.3), estabelecemos a

Definição 5.1. *Dado o sistema linear $Ax = b$, designado por $\mathcal{S}$, para o qual $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$, $x \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{C})$ e $b \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$. Ao sistema linear*

$$\tau_{\langle n\times m\rangle}(A)\,z = b$$

com $z \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{C})$ dá-se o nome de ***Sistema Translinear Associado*** *a $\mathcal{S}$ e denota-se por $\mathcal{S}_\tau$.*

Munidos do Corolário 5.1 e evocando as notações da definição precedente, gostaríamos, a tal ponto, de estudar o número de soluções do sistema linear $\mathcal{S}$ em relação ao número de soluções do seu sistema translinear associado.

Para isso, é útil perceber que se $x \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{C})$ é solução de $\mathcal{S}$, então

$$b = Ax = \tau_{\langle n\times m\rangle}(A)\cdot\varphi_{\langle m\rangle}(x)$$

e $\varphi_{\langle m\rangle}(x)$, isto é, a coluna translinear de x, é solução de $\mathcal{S}_\tau$.

Reciprocamente, se $z \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{C})$ é solução de $\mathcal{S}_\tau$, então, sendo a translineadora $\varphi_{\langle m\rangle}$, em particular, uma sobrejeção, segue-se que existe $x \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{C})$ tal que $z = \varphi_{\langle m\rangle}(x)$ e, daí,

$$b = \tau_{\langle n\times m\rangle}(A)\,z = \tau_{\langle n\times m\rangle}(A)\cdot\varphi_{\langle m\rangle}(x) = Ax$$

e x, isto é, a matriz da qual z é a coluna translinear, é solução de $\mathcal{S}$.

Mais precisamente, vale o

Teorema 5.2. *Para cada sistema linear $\mathcal{S}$, são válidas as seguintes sentenças:*

(i) *$\mathcal{S}$ possui uma única solução se, e somente se, $\mathcal{S}_\tau$ possui uma única solução.*

(ii) *$\mathcal{S}$ não possui solução se, e somente se, $\mathcal{S}_\tau$ não possui solução.*

(iii) *$\mathcal{S}$ possui infinitas soluções se, e somente se, $\mathcal{S}_\tau$ possui infinitas soluções.*

Demonstração. Por simplicidade, lancemos mão das notações estabelecidas na Definição 5.1. Sejam ainda

$$\mathbb{W} = \{x \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{C}) : \ Ax = b\}$$

o conjunto solução de $\mathcal{S}$ e

$$\mathbb{P} = \{z \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{C}) : \ \tau_{\langle n\times m\rangle}(A)\, z = b\}$$

o conjunto solução de $\mathcal{S}_\tau$.

Comecemos pelo item *(ii)*. Queremos, então, provar que

$$\mathbb{W} = \varnothing \ \Leftrightarrow \ \mathbb{P} = \varnothing.$$

Não obstante, isto segue do que se discorreu nos parágrafos que antecedem este teorema, pois do que lá foi feito se pode concluir que

$$\mathbb{W} \neq \varnothing \ \Leftrightarrow \ \mathbb{P} \neq \varnothing.$$

Suponhamos, pois, $\mathbb{W} \neq \varnothing$ e $\mathbb{P} \neq \varnothing$. Para demonstrar os itens *(i)* e *(iii)*, exibiremos uma bijeção[1] entre $\mathbb{W}$ e $\mathbb{P}$.

Nesse sentido, posto que $x \in \mathbb{W} \Rightarrow \varphi_{\langle m\rangle}(x) \in \mathbb{P}$ e, além disso, $\varphi_{\langle m\rangle}(x)$ é único para cada $x \in \mathbb{W}$; é natural definir, para cada $m \in \mathbb{N}$, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \Upsilon_m : & \mathbb{W} & \longrightarrow & \mathbb{P} \\ & x & \longmapsto & \varphi_{\langle m\rangle}(x). \end{array}$$

Queremos agora mostrar que Υ_m é uma bijeção. Com efeito,

(a) Υ_m é uma injeção. Porquanto, dados $x \in \mathbb{W}$ e $y \in \mathbb{W}$, se tem

$$\Upsilon_m(x) = \Upsilon_m(y) \Rightarrow \varphi_{\langle m\rangle}(x) = \varphi_{\langle m\rangle}(y) \Rightarrow x = y.$$

Em que a última implicação deve-se ao fato de a translineadora $\varphi_{\langle m\rangle}$ ser uma injeção em particular.

(b) Υ_m é uma sobrejeção. Isto também vem do que discorremos anteriormente. Porque, dado $z \in \mathbb{P}$, já sabemos que existe $x \in \mathbb{W}$ tal que $z = \varphi_{\langle m\rangle}(x)$ e, portanto, $z = \Upsilon_m(x)$.

Sendo assim, em vista da bijeção Υ_m, tem-se que $\mathbb{W}$ é unitário se, e somente se, $\mathbb{P}$ também o é; bem como, $\mathbb{W}$ é infinito se, e somente se, $\mathbb{P}$ também o é. $\square$

5.2 A Regra dos Termos Duais

Sabe-se desde o Teorema 5.2 que um sistema linear $\mathcal{S}$ possui solução única se, e somente se, $\mathcal{S}_\tau$ também o possui. Sob este prisma, o lema a seguir descreve o modo segundo o qual a solução de $\mathcal{S}$ relaciona-se com a solução do seu sistema translinear associado. Nele ainda está o fundamento da *Regra dos Termos Duais*, a cujo estabelecimento ora damos início.

[1] Porquanto pode-se provar, veja Lima ([14], Cap. 1), que se $f : X \to Y$ é uma bijeção, então X é finito se, e só se, Y é finito; tal como X é infinito se, e só se, Y é infinito. No primeiro caso, X e Y possuem o mesmo número de elementos.

Lema 5.1. *Seja $\mathcal{S}$ a designação do sistema linear $Ax = b$, em que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ é invertível e $b \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$. Se $x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$ é a solução de $\mathcal{S}$ e $z \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$ é a solução do seu sistema translinear associado, então*

$$\varphi_{\langle n\rangle}(x) = z. \tag{5.3}$$

Ao que dizemos que z é a ***Solução Dual*** *de $\mathcal{S}$.*

Demonstração. Evoquemos a bijeção estabelecida na prova do Teorema 5.2, pondo $m = n$:

$$\begin{aligned} \Upsilon_n : \mathbb{W} &\longrightarrow \mathbb{P} \\ x &\longmapsto \varphi_{\langle n\rangle}(x), \end{aligned}$$

em que $\mathbb{W} = \{x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}) : Ax = b\}$ e $\mathbb{P} = \{z \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}) : \tau_{\langle n\times n\rangle}(A)\, z = b\}$.

Percebamos agora que, sendo A invertível, a matriz $x = A^{-1} \cdot b \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$ é a única solução de $\mathcal{S}$. Por conseguinte, o Teorema 5.2 nos garante que $\#\mathbb{W} = \#\mathbb{P} = 1$. Portanto, se $\mathbb{W} = \{x\} \subset \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$ e $\mathbb{P} = \{z\} \subset \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$, então $\Upsilon_n(x) = z$, isto é, $\varphi_{\langle n\rangle}(x) = z$. $\square$

Os dois próximos lemas enxergam (5.3) termo a termo.[2] A começar, à esquerda, com o

Lema 5.2. *Se z_d é o d-ésimo termo da coluna translinear de $x = [x_d] \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$, então*

$$z_d = \begin{cases} x_d + ix_{d+1} & \text{se} \quad d \in \mathbb{A}_n[1] \\ \\ x_{d-1} - ix_d & \text{se} \quad d \in \mathbb{A}_n[0] \end{cases}$$

se $n \equiv 0 \ (mod\ 2)$, e

$$z_d = \begin{cases} x_d + ix_{d+1} & \text{se} \quad d \in \mathbb{A}_n[1] \\ \\ x_{d-1} - ix_d & \text{se} \quad d \in \mathbb{A}_n[0] \\ \\ x_n & \text{se} \quad d = n \end{cases}$$

caso contrário.

Demonstração. Trata-se apenas de um caso particular do Teorema 4.1 quando se deseja olhar para as linhas da matriz translinear vertical de uma matriz coluna. Aqui, sendo $\varphi_{\langle n\times 1\rangle} = \varphi_{\langle n\rangle}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, estamos, na verdade, olhando para os termos da coluna translinear de x. $\square$

[2] A exemplo do que se vê em (3.4).

Antes de prosseguirmos, fixemos notação. Dado $n \in \mathbb{N} - \{1\}$. Sejam u e w em $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$ e $k \in \mathcal{N}_{n-1}$. Em tudo o que há de porvir, com o símbolo

$$A\big[k|\,(u;w)\big]$$

denotaremos a matriz obtida de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ quando se substitui sua k-ésima coluna por u e sua $(k+1)$-ésima coluna por w.

Tão logo, sendo $\mathcal{S}$ tal como no Lema 5.1, enxergando (5.3) à direita, temos o

Lema 5.3. *Dado $j \in \mathcal{N}_n$. Seja v_j a j-ésima coluna de A. A solução dual de $\mathcal{S}$ é a matriz $z = [z_d] \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$ cujos termos são*

$$z_d = \begin{cases} \dfrac{i\det A\big[d|\,(v_d + iv_{d+1};b)\big]}{\det A} & se \quad d \in \mathbb{A}_n[1] \\ \\ \dfrac{i\det A\big[d-1|\,(b;v_{d-1} - iv_d)\big]}{\det A} & se \quad d \in \mathbb{A}_n[0] \end{cases}$$

quando $n \equiv 0 \pmod 2$, e

$$z_d = \begin{cases} \dfrac{i\det A\big[d|\,(v_d + iv_{d+1};b)\big]}{\det A} & se \quad d \in \mathbb{A}_n[1] \\ \\ \dfrac{i\det A\big[d-1|\,(b;v_{d-1} - iv_d)\big]}{\det A} & se \quad d \in \mathbb{A}_n[0] \\ \\ \dfrac{\det A[n;b]}{\det A} & se \quad d = n \end{cases}$$

caso contrário.

Demonstração. Inicialmente, sendo A invertível, a matriz translinear horizontal de A também o é, em virtude do Corolário 3.6. A Regra de Cramer[3] nos diz, então, que a solução dual de $\mathcal{S}$, solução do sistema

$$\tau_{\langle n\times n\rangle}(A)\,z = b,$$

é a matriz $z = [z_d] \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$ cujos termos são

$$z_d = \frac{\det\ \tau_{\langle n\times n\rangle}(A)[d;b]}{\det\ \tau_{\langle n\times n\rangle}(A)} \tag{5.4}$$

com $d \in \mathcal{N}_n$.

[3]Cf. Teorema 2.4.

Nosso trabalho resume-se, portanto, a desenvolver o quociente (5.4) no sentido de obtermos as expressões do enunciado.

Por ora, trataremos dos casos em que $n \in \{1,2\}$, de modo que, à parte, faremos a prova do caso $n \geqslant 3$.

Mas, de agora, deve-se observar que (5.4) significa:

$$z_d = \frac{\det\ \tau_{\langle n\times n\rangle}(A)[d;b]}{\left(\frac{i}{2}\right)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \det A} \tag{5.5}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, em face ao Teorema 3.4.

Em razão disso, quer agora, quer depois, despenderemos esforços para desenvolver o numerador em (5.5).

(i) Para $n = 1$, temos $\mathbb{A}_1[1] = \mathbb{A}_1[0] = \varnothing$. No mais, como $\tau_{\langle 1\times 1\rangle}$ é o operador identidade do espaço $\mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{C})$, decorre, mesmo de (5.4), que

$$z_1 = \frac{\det A[1;b]}{\det A}.$$

(ii) Se $n = 2$, então $\mathbb{A}_2[1] = \{1\}$ e $\mathbb{A}_2[0] = \{2\}$. Tomando-se, pois, $A = [v_1\ v_2] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$, expressa segundo suas colunas, temos

$$\tau_{\langle 2\times 2\rangle}(A) = [\mathcal{V}_1\ \mathcal{V}_2]$$

em que $\mathcal{V}_1 = (v_1 - iv_2)/2$ e $\mathcal{V}_2 = (v_1 + iv_2)/2$, de acordo com o Teorema 3.2.

Procede de (5.5) que

$$z_1 = \frac{\det\ [b\ \mathcal{V}_2]}{\frac{i}{2}\det A} = \frac{\frac{1}{2}\det\ [b\ \ v_1 + iv_2]}{\frac{i}{2}\det A} = \frac{-i\det\ [b\ \ v_1 + iv_2]}{\det A} = \frac{i\det\ [v_1 + iv_2\ \ b]}{\det A}$$

com $[v_1 + iv_2\ \ b] = A\big[1|\,(v_1 + iv_2; b)\big]$.

Mais ainda,

$$z_2 = \frac{\det\ [\mathcal{V}_1\ \ b]}{\frac{i}{2}\det A} = \frac{\frac{1}{2}\det\ [v_1 - iv_2\ \ b]}{\frac{i}{2}\det A} = \frac{-i\det\ [v_1 - iv_2\ \ b]}{\det A} = \frac{i\det\ [b\ \ v_1 - iv_2]}{\det A}$$

em que $[b\ \ v_1 - iv_2] = A\big[1|\,(b; v_1 - iv_2)\big]$. □

Definição 5.2. *Dado $j \in \mathbb{N}_n$. Seja v_j a j-ésima coluna da matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Para cada $d \in \mathbb{A}_n[1]$, definimos*

$$\eta_d = v_d + iv_{d+1}.$$

Tendo alcançado este ponto, estamos em posição de enunciar e provar o âmago do presente trabalho. Nele, concentramos nossa atenção aos sistemas lineares de ordem $n \geqslant 2$ sobre $\mathbb{R}$, cuja matriz dos coeficientes é invertível.

Teorema 5.3 (A Regra dos Termos Duais)**.** *Seja $n \in \mathbb{N} - \{1\}$. Dado o sistema linear $Ax = b$, designado por $\mathcal{S}$, com $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertível e $b \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Se a matriz*

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^{t} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$$

é a solução de $\mathcal{S}$, então

$$(x_d, x_{d+1}) = \frac{i \det A\big[d|\,(\eta_d; b)\big]}{\det A}$$

para todo $d \in \mathbb{A}_n[1]$.

Demonstração. Seja $\varphi_{\langle n\rangle}(x) = [z_j] \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$. Fixo d em $\mathbb{A}_n[1]$. O Lema 5.2 assegura que

$$z_d = x_d + ix_{d+1}. \tag{5.6}$$

Por outro lado, o Lema 5.1 garante que a matriz $[z_j]$ é a solução dual de $\mathcal{S}$; em face ao que, o Lema 5.3 nos dá

$$z_d = \frac{i \det A\big[d|\,(v_d + iv_{d+1}; b)\big]}{\det A}. \tag{5.7}$$

Mas,

$$x_d + ix_{d+1} = (x_d, x_{d+1}), \tag{5.8}$$

pois $x_d \in \mathbb{R}$ e $x_{d+1} \in \mathbb{R}$, em vista de serem termos de x, uma matriz real.

Aliado a (5.6), (5.7) e (5.8) o fato de que $\eta_d = v_d + iv_{d+1}$, chega-se a

$$(x_d, x_{d+1}) = \frac{i \det A\big[d|\,(\eta_d; b)\big]}{\det A}.$$

Conforme queríamos demonstrar. $\square$

Na Regra dos Termos Duais (doravante, R.T.D.), perceba que, se $n \equiv 0 \ (mod\ 2)$, então os pares de termos consecutivos (x_d, x_{d+1}), com $d \in \mathbb{A}_n[1]$, cobrem todos os termos de x. Caso contrário, deixam de cobrir apenas o seu n-ésimo termo.[4] Neste caso, uma vez obtidos os

[4]Recorde que $d \in \mathbb{A}_n[1] \Rightarrow d+1 \in \mathbb{A}_n[0]$; e o fato de que

$$\mathcal{N}_n = \begin{cases} \mathbb{A}_n[1] \cup \mathbb{A}_n[0] & \text{se } \ n \equiv 0 \ (mod\ 2) \\ \\ \mathbb{A}_n[1] \cup \mathbb{A}_n[0] \cup \{n\} & \text{se } \ n \equiv 1 \ (mod\ 2) \end{cases} \tag{5.9}$$

com as reuniões acima todas disjuntas.

$n-1$ primeiros termos de x, para determinar o último, basta escrevê-lo em função dos termos já conhecidos mediante alguma das equações de $\mathcal{S}$. Note ainda que na R.T.D. figuram ao todo $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ determinantes[5] e não mais $n+1$, como o é na Regra de Cramer. Na prática, será de interesse mesmo os casos em que $n \in \{2,3\}$, sobre os quais nos deteremos no Capítulo 6.

5.3 Demonstração do Lema 5.3 para $n \geqslant 3$

Nesta seção, a menos que seja dito o contrário, fixamos arbitrariamente $n \in \mathbb{N} - \{1,2\}$. Sejam, então, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, $b \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$ e $k \in \mathcal{N}_n$. De agora em diante, indicaremos com o símbolo

$$\lfloor A \rfloor_k$$

a matriz $n \times k$ obtida de A considerando-se apenas suas k primeiras colunas. Ao tempo que, com o símbolo

$$\lceil A \rceil^k$$

denotaremos a matriz $n \times k$ obtida de A considerando-se tão somente suas k últimas colunas.

Retomaremos ainda a notação introduzida no início da Seção 3.3 segundo a qual v_k indica a k-ésima coluna A e $\mathcal{V}_k$, a k-ésima coluna da matriz translinear horizontal de A.

Atentemos, de início, que, se $n \equiv 1 \pmod 2$, então[6]

$$\tau_{\langle n\times n\rangle}(A) \quad = \quad \left[\begin{array}{c|c} \tau_{\langle n\times(n-1)\rangle}(A \setminus v_n) & v_n \end{array} \right],$$

e, daí,

$$\tau_{\langle n\times n\rangle}(A)[n;b] = \left[\begin{array}{c|c} \tau_{\langle n\times(n-1)\rangle}(A \setminus b) & b \end{array} \right] = \tau_{\langle n\times n\rangle}(A[n;b]).$$

Sendo assim, para $d = n$, temos que (5.5) significa, evocando ainda o Teorema 3.4:

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{\det\, \tau_{\langle n\times n\rangle}(A[n;b])}{\left(\frac{i}{2}\right)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \det A} \\ &= \frac{\left(\frac{i}{2}\right)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \det A[n;b]}{\left(\frac{i}{2}\right)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \det A} \\ &= \frac{\det A[n;b]}{\det A}. \end{aligned}$$

[5] A cada par (x_d, x_{d+1}) corresponde o $\det A\big[d|\,(\eta_d;b)\big]$; e há o $\det A$, associado a todos os pares indistintamente. No mais, são $\#\mathbb{A}_n[1] = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ determinantes mais 1.

[6] Recorde a igualdade (3.9) pondo $m = n$.

Seja qual for a paridade de n, nos compete, de agora em diante, tratar dos casos em que

$$d \in \mathbb{A}_n[1] \cup \mathbb{A}_n[0].$$

Nesse intento, principiamos com o[7]

Lema 5.4. *Dado $j \in \mathbb{A}_n[1]$. A matriz translinear horizontal de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ particiona-se em blocos do seguinte modo:*

$$\tau_{\langle n\times n\rangle}(A) = \begin{cases} \left[\ [\mathcal{V}_1\ \mathcal{V}_2] \ \middle|\ \tau_{\langle n\times(n-2)\rangle}\left(\lceil A\rceil^{n-2}\right)\ \right] & \text{se } j=1 \\[2ex] \left[\ \tau_{\langle n\times(j-1)\rangle}\left(\lfloor A\rfloor_{j-1}\right)\ \middle|\ [\mathcal{V}_j\ \mathcal{V}_{j+1}]\ \middle|\ \tau_{\langle n\times k\rangle}(\lceil A\rceil^{k})\ \right] & \text{se } 1<j<n-1 \\[2ex] \left[\ \tau_{\langle n\times(n-2)\rangle}\left(\lfloor A\rfloor_{n-2}\right)\ \middle|\ [\mathcal{V}_{n-1}\ \mathcal{V}_n]\ \right] & \text{se } j=n-1. \end{cases}$$

Em que $k = n-j-1$.

Demonstração. Iniciemos pelo caso $1 < j < n-1$.

Note, sendo $-j > -n+1$, que $k = n-j-1 > n-n+1-1 = 0$.

Pode-se, então, escrever:

$$A = \left[\ \lfloor A\rfloor_{j-1}\ \middle|\ [v_j\ v_{j+1}]\ \middle|\ \lceil A\rceil^{k}\ \right].$$

Logo,

$$\begin{aligned} \tau_{\langle n\times n\rangle}(A) &= \left[\ \tau_{\langle n\times(j-1)\rangle}\left(\lfloor A\rfloor_{j-1}\right)\ \middle|\ \tau_{\langle n\times(k+2)\rangle}\left(\ [v_j\ v_{j+1}]\ \middle|\ \lceil A\rceil^{k}\ \right)\ \right] && (5.10)\\ &= \left[\ \tau_{\langle n\times(j-1)\rangle}\left(\lfloor A\rfloor_{j-1}\right)\ \middle|\ \tau_{\langle n\times 2\rangle}\left([v_j\ v_{j+1}]\right)\ \middle|\ \tau_{\langle n\times k\rangle}(\lceil A\rceil^{k})\ \right] && (5.11)\\ &= \left[\ \tau_{\langle n\times(j-1)\rangle}\left(\lfloor A\rfloor_{j-1}\right)\ \middle|\ [\mathcal{V}_j\ \mathcal{V}_{j+1}]\ \middle|\ \tau_{\langle n\times k\rangle}(\lceil A\rceil^{k})\ \right]. && (5.12) \end{aligned}$$

Sendo (5.10) devido ao Corolário 3.4, pois $j-1 \in \mathfrak{J}_n$, já que $j-1 \equiv 0\ (mod\ 2)$ e $j-1 \in \mathcal{N}_{n-1}$.

Bem como (5.11), porquanto $k+2 > 2$ e $2 \in \mathfrak{J}_{k+2}$, visto que $2 \equiv 0\ (mod\ 2)$ e $2 \in \mathcal{N}_{k+1}$.

Por fim, (5.12) se deve ao Teorema 3.2, do qual se tem

$$\tau_{\langle n\times 2\rangle}\left([v_j\ v_{j+1}]\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{v_j - iv_{j+1}}{2} & \dfrac{v_{(j+1)-1} + iv_{j+1}}{2} \end{bmatrix} = [\mathcal{V}_j\ \mathcal{V}_{j+1}]$$

[7]Recorde (5.9) e observe que se $j \in \mathbb{A}_n[1]$ então $1 \leqslant j \leqslant n-1$, a despeito da paridade de n. Sendo $j = n-1$ apenas quando $n \equiv 0\ (mod\ 2)$.

em razão de $j \in \mathbb{A}_n[1]$ implicar $j+1 \in \mathbb{A}_n[0]$.

Analogamente, podemos escrever no caso $j = 1$:

$$A = \left[\ [v_1\ v_2]\ \middle|\ \lceil A \rceil^{n-2}\ \right].$$

E, daí,

$$\begin{aligned}\tau_{\langle n\times n\rangle}(A) &= \left[\ \tau_{\langle n\times 2\rangle}([v_1\ v_2])\ \middle|\ \tau_{\langle n\times(n-2)\rangle}(\lceil A \rceil^{n-2})\ \right] \\ &= \left[\ [\mathcal{V}_1\ \mathcal{V}_2]\ \middle|\ \tau_{\langle n\times(n-2)\rangle}\left(\lceil A \rceil^{n-2}\right)\ \right]\end{aligned}$$

dado que $2 \in \mathcal{J}_n$.

Por outro lado, se $j = n-1$, temos ainda:

$$A = \left[\ \lfloor A \rfloor_{n-2}\ \middle|\ [v_{n-1}\ v_n]\ \right].$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}\tau_{\langle n\times n\rangle}(A) &= \left[\ \tau_{\langle n\times(n-2)\rangle}(\lfloor A \rfloor_{n-2})\ \middle|\ \tau_{\langle n\times 2\rangle}([v_{n-1}\ v_n])\ \right] \\ &= \left[\ \tau_{\langle n\times(n-2)\rangle}(\lfloor A \rfloor_{n-2})\ \middle|\ [\mathcal{V}_{n-1}\ \mathcal{V}_n]\ \right]\end{aligned}$$

pois $n-2 \in \mathcal{J}_n$, em vista de $n-2 \equiv n = j+1 \equiv 0\ (mod\ 2)$ e $n-2 \in \mathcal{N}_{n-1}$. □

Definição 5.3. *Seja $j \in \mathbb{A}_n[1]$. Dá-se o nome de **j-ésima Matriz Residual** de $\tau_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)$ à matriz diagonal em blocos $\mathcal{R}_n(j) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ dada por*

$$\mathcal{R}_n(j) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathcal{I}_2 & \mathbf{0}_{2\times(n-2)} \\ \mathbf{0}_{(n-2)\times 2} & \tau_{\langle(n-2)\times(n-2)\rangle}(\mathcal{I}_{n-2}) \end{bmatrix} & se\ \ j=1 \\[2em] \begin{bmatrix} \tau_{\langle(j-1)\times(j-1)\rangle}(\mathcal{I}_{j-1}) & \mathbf{0}_{(j-1)\times 2} & \mathbf{0}_{(j-1)\times k} \\ \mathbf{0}_{2\times(j-1)} & \mathcal{I}_2 & \mathbf{0}_{2\times k} \\ \mathbf{0}_{k\times(j-1)} & \mathbf{0}_{k\times 2} & \tau_{\langle k\times k\rangle}(\mathcal{I}_k) \end{bmatrix} & se\ \ 1<j<n-1 \\[2em] \begin{bmatrix} \tau_{\langle(n-2)\times(n-2)\rangle}(\mathcal{I}_{n-2}) & \mathbf{0}_{(n-2)\times 2} \\ \mathbf{0}_{2\times(n-2)} & \mathcal{I}_2 \end{bmatrix} & se\ \ j=n-1. \end{cases}$$

Em que $k = n-j-1$.

Lema 5.5. *A matriz translinear horizontal de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ se exprime segundo o produto*

$$\tau_{\langle n\times n\rangle}(A) = A\big[j|\,(\mathcal{V}_j;\,\mathcal{V}_{j+1})\big]\cdot\mathcal{R}_n(j)$$

para cada $j \in \mathbb{A}_n[1]$.

Demonstração. Comecemos por perceber que, se $1 < j < n-1$, então

$$A\big[j|\,(\mathcal{V}_j;\,\mathcal{V}_{j+1})\big] = \big[\ \lfloor A\rfloor_{j-1}\ \big|\ [\mathcal{V}_j\ \mathcal{V}_{j+1}]\ \big|\ \lceil A\rceil^k\ \big],$$

com $k = n-j-1$. Por conseguinte,

$$\begin{aligned}
&= A\big[j|\,(\mathcal{V}_j;\,\mathcal{V}_{j+1})\big]\cdot\mathcal{R}_n(j) = \\
&= \big[\ \lfloor A\rfloor_{j-1}\ \big|\ [\mathcal{V}_j\ \mathcal{V}_{j+1}]\ \big|\ \lceil A\rceil^k\ \big]\begin{bmatrix} \tau_{\langle (j-1)\times(j-1)\rangle}(\mathcal{I}_{j-1}) & \mathbf{0}_{(j-1)\times 2} & \mathbf{0}_{(j-1)\times k} \\ \mathbf{0}_{2\times(j-1)} & \mathcal{I}_2 & \mathbf{0}_{2\times k} \\ \mathbf{0}_{k\times(j-1)} & \mathbf{0}_{k\times 2} & \tau_{\langle k\times k\rangle}(\mathcal{I}_k)\end{bmatrix} = \\
&= \Big[\ \lfloor A\rfloor_{j-1}\cdot\tau_{\langle (j-1)\times(j-1)\rangle}(\mathcal{I}_{j-1})\ \Big|\ [\mathcal{V}_j\ \mathcal{V}_{j+1}]\cdot\mathcal{I}_2\ \Big|\ \lceil A\rceil^k\cdot\tau_{\langle k\times k\rangle}(\mathcal{I}_k)\ \Big] = \\
&= \Big[\ \tau_{\langle n\times(j-1)\rangle}\big(\lfloor A\rfloor_{j-1}\big)\ \Big|\ [\mathcal{V}_j\ \mathcal{V}_{j+1}]\ \Big|\ \tau_{\langle n\times k\rangle}(\lceil A\rceil^k)\ \Big] = && (5.13)\\
&= \tau_{\langle n\times n\rangle}(A)\,. && (5.14)
\end{aligned}$$

Sendo (5.13) devido ao Teorema 3.3; e (5.14), ao Lema 5.4.

De modo análogo,

$$\begin{aligned}
A\big[1|\,(\mathcal{V}_1;\,\mathcal{V}_2)\big]\cdot\mathcal{R}_n(1) &= \big[\ [\mathcal{V}_1\ \mathcal{V}_2]\ \big|\ \lceil A\rceil^{n-2}\ \big]\begin{bmatrix}\mathcal{I}_2 & \mathbf{0}_{2\times(n-2)} \\ \mathbf{0}_{(n-2)\times 2} & \tau_{\langle (n-2)\times(n-2)\rangle}(\mathcal{I}_{n-2})\end{bmatrix} \\
&= \big[\ [\mathcal{V}_1\ \mathcal{V}_2]\cdot\mathcal{I}_2\ \big|\ \lceil A\rceil^{n-2}\cdot\tau_{\langle (n-2)\times(n-2)\rangle}(\mathcal{I}_{n-2})\ \big] \\
&= \big[\ [\mathcal{V}_1\ \mathcal{V}_2]\ \big|\ \tau_{\langle n\times(n-2)\rangle}\big(\lceil A\rceil^{n-2}\big)\ \big] \\
&= \tau_{\langle n\times n\rangle}(A)\,.
\end{aligned}$$

Mais ainda,

$$
\begin{aligned}
&= A\big[n-1\,|\,(\mathcal{V}_{n-1};\mathcal{V}_n)\big]\cdot \mathcal{R}_n(n-1) = \\
&= \left[\ \lfloor A \rfloor_{n-2}\ \middle|\ [\mathcal{V}_{n-1}\ \mathcal{V}_n]\ \right]\left[\begin{array}{cc} \tau_{\langle (n-2)\times(n-2)\rangle}(\mathcal{I}_{n-2}) & \mathbf{0}_{(n-2)\times 2} \\ \mathbf{0}_{2\times(n-2)} & \mathcal{I}_2 \end{array}\right] = \\
&= \left[\ \lfloor A \rfloor_{n-2}\cdot \tau_{\langle (n-2)\times(n-2)\rangle}(\mathcal{I}_{n-2})\ \middle|\ [\mathcal{V}_{n-1}\ \mathcal{V}_n]\cdot \mathcal{I}_2\ \right] = \\
&= \left[\ \tau_{\langle n\times(n-2)\rangle}(\lfloor A \rfloor_{n-2})\ \middle|\ [\mathcal{V}_{n-1}\ \mathcal{V}_n]\ \right] = \\
&= \tau_{\langle n\times n\rangle}(A)\,.
\end{aligned}
$$

Findando a prova. □

Neste ponto, voltemos o olhar sobre o determinante de $\mathcal{R}_n(j)$. Poderíamos pensar, a princípio, que este número dependeria de cada valor de $j \in \mathbb{A}_n[1]$, posto que tal matriz depende de j para ser obtida. Não obstante, um vez tendo n fixo, o determinante das matrizes residuais de $\tau_{\langle n\times n\rangle}(\mathcal{I}_n)$ é invariante em relação a j, conforme veremos. Antes, faz-se necessário o

Lema 5.6. *Se $j \in \mathbb{A}_n[1]$, então*

$$\left\lfloor \frac{j-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-j-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor .$$

Demonstração. Seja $n \equiv r\ (mod\,2)$, com $r \in \{0,1\}$. Resulta do fato de $j \equiv 1\ (mod\,2)$ que $j-1 \equiv 0\ (mod\,2)$ e $n-j-1 \equiv r-1-1 \equiv r\ (mod\,2)$. A Proposição 2.5, então, nos fornece

$$
\begin{aligned}
\left\lfloor \frac{j-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-j-1}{2} \right\rfloor &= \begin{cases} \dfrac{j-1}{2} + \dfrac{n-j-2}{2} & \text{se} \quad r=1 \\[2ex] \dfrac{j-1}{2} + \dfrac{n-j-1}{2} & \text{se} \quad r=0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{n-3}{2} & \text{se} \quad r=1 \\[2ex] \dfrac{n-2}{2} & \text{se} \quad r=0 \end{cases} \\
&= \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor
\end{aligned}
$$

pois $n-2 \equiv r-0 \equiv r\ (mod\ 2)$. □

Lema 5.7. *Para todo $j \in \mathbb{A}_n[1]$, tem-se*

$$\det \mathcal{R}_n(j) = \left(\frac{i}{2}\right)^{\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor}.$$

Demonstração. Seja $1 < j < n-1$, aplicando o Teorema 2.3 duas vezes e evocando o Lema 3.5, temos, sucessivamente, que

$$\begin{aligned}
\det \mathcal{R}_n(j) &= \det \tau_{\langle (j-1)\times(j-1)\rangle}\left(\mathcal{I}_{j-1}\right) \cdot \det \mathcal{I}_2 \cdot \det \tau_{\langle k\times k\rangle}\left(\mathcal{I}_k\right) \\
&= \left(\frac{i}{2}\right)^{\left\lfloor \frac{j-1}{2} \right\rfloor} \cdot 1 \cdot \left(\frac{i}{2}\right)^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \\
&= \left(\frac{i}{2}\right)^{\left\lfloor \frac{j-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-j-1}{2} \right\rfloor} \\
&= \left(\frac{i}{2}\right)^{\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor}
\end{aligned}$$

pois $k = n-j-1$ e vale o Lema 5.6.

Analogamente, se constata, de imediato, que

$$\det \mathcal{R}_n(1) = \det \mathcal{R}_n(n-1) = \det \tau_{\langle (n-2)\times(n-2)\rangle}\left(\mathcal{I}_{n-2}\right) \cdot \det \mathcal{I}_2 = \left(\frac{i}{2}\right)^{\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor}.$$

□

Lema 5.8. *Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ e $b \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$, então*

$$\det \tau_{\langle n\times n\rangle}(A)[d;b] = \begin{cases} 2^{-1}\left(\frac{i}{2}\right)^{\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor} \det A\big[d\,|\,(b; v_d + iv_{d+1})\big] & se \quad d \in \mathbb{A}_n[1] \\ \\ 2^{-1}\left(\frac{i}{2}\right)^{\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor} \det A\big[d-1\,|\,(v_{d-1} - iv_d; b)\big] & se \quad d \in \mathbb{A}_n[0]. \end{cases}$$

Demonstração. Pondo $j = d \in \mathbb{A}_n[1]$ no Lema 5.5, temos

$$\tau_{\langle n\times n\rangle}(A) = A\big[d\,|\,(\mathcal{V}_d; \mathcal{V}_{d+1})\big] \cdot \mathcal{R}_n(d).$$

Por conseguinte,

$$\tau_{\langle n\times n\rangle}(A)[d;b] = A\big[d|(b;\mathcal{V}_{d+1})\big]\cdot\mathcal{R}_n(d).$$

Então, o Teorema 2.1 e o Lema 5.7 fornecem sucessivamente:

$$\begin{aligned}\det\,\tau_{\langle n\times n\rangle}(A)[d;b] &= \det A\big[d|(b;\mathcal{V}_{d+1})\big]\cdot\det\mathcal{R}_n(d)\\ &= \left(\frac{i}{2}\right)^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor}\det A\big[d|(b;\mathcal{V}_{d+1})\big].\end{aligned}$$

Por outro lado, o Teorema 3.2 nos diz que

$$\mathcal{V}_{d+1} = \frac{v_{(d+1)-1}+iv_{d+1}}{2} = \frac{v_d+iv_{d+1}}{2},$$

haja vista $d+1\in\mathbb{A}_n[0]$. Sendo assim,

$$\det\,\tau_{\langle n\times n\rangle}(A)[d;b] = 2^{-1}\left(\frac{i}{2}\right)^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor}\det A\big[d|(b;v_d+iv_{d+1})\big].$$

Para o que falta, relembre a bijeção estabelecida na Proposição 3.1, em razão da qual se pode pôr $j+1=d\in\mathbb{A}_n[0]$ no Lema 5.5, donde

$$\tau_{\langle n\times n\rangle}(A) = A\big[d-1|(\mathcal{V}_{d-1};\mathcal{V}_d)\big]\cdot\mathcal{R}_n(d-1).$$

Com isso,

$$\tau_{\langle n\times n\rangle}(A)[d;b] = A\big[d-1|(\mathcal{V}_{d-1};b)\big]\cdot\mathcal{R}_n(d-1).$$

Temos, então, que

$$\begin{aligned}\det\,\tau_{\langle n\times n\rangle}(A)[d;b] &= \det A\big[d-1|(\mathcal{V}_{d-1};b)\big]\cdot\det\mathcal{R}_n(d-1)\\ &= \left(\frac{i}{2}\right)^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor}\det A\big[d-1|(\mathcal{V}_{d-1};b)\big]\\ &= 2^{-1}\left(\frac{i}{2}\right)^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor}\det A\big[d-1|(v_{d-1}-iv_d;b)\big],\end{aligned}$$

já que $d-1\in\mathbb{A}_n[1]$ implica

$$\mathcal{V}_{d-1} = \frac{v_{d-1}-iv_{(d-1)+1}}{2} = \frac{v_{d-1}-iv_d}{2}.$$

Findando a prova. $\square$

Lema 5.9. *Para todo $n\in\mathbb{Z}$, tem-se*

$$2^{-1}\left(\frac{i}{2}\right)^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} = -i.$$

Demonstração. Seja $r \in \{0, 1\}$. Se $n \equiv r \ (mod\ 2)$, então $n-2 \equiv r \ (mod\ 2)$ e a Proposição 2.5 nos diz que

$$\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \dfrac{n-3}{2} - \dfrac{n-1}{2} & \text{se} \quad r = 1 \\ \\ \dfrac{n-2}{2} - \dfrac{n}{2} & \text{se} \quad r = 0 \end{cases}$$
$$= -1.$$

Por conseguinte,

$$2^{-1}\left(\frac{i}{2}\right)^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 2^{-1}\left(\frac{i}{2}\right)^{-1} = \left(2 \cdot \frac{i}{2}\right)^{-1} = i^{-1} = -i.$$

$\square$

Nesta altura, estamos já de posse de todo o necessário para finalizar a prova do Lema 5.3.

Demonstração (*do Lema 5.3 para $n \geqslant 3$*).

Recordemos, de início, a igualdade (5.5) segundo a qual, a despeito da paridade de n, se tem

$$z_d = \frac{\det\ \tau_{\langle n \times n \rangle}(A)[d; b]}{\left(\frac{i}{2}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \det A}.$$

Há, pois, dois casos a ponderar.

(i) Se $d \in \mathbb{A}_n[1]$, então os Lemas 5.8 e 5.9 fornecem sucessivamente:

$$\begin{aligned} z_d &= \frac{2^{-1}\left(\frac{i}{2}\right)^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \det A\big[d \big| (b; v_d + iv_{d+1})\big]}{\left(\frac{i}{2}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \det A} \\ \\ &= \frac{2^{-1}\left(\frac{i}{2}\right)^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \det A\big[d \big| (b; v_d + iv_{d+1})\big]}{\det A} \\ \\ &= \frac{-i \det A\big[d \big| (b; v_d + iv_{d+1})\big]}{\det A} \\ \\ &= \frac{i \det A\big[d \big| (v_d + iv_{d+1}; b)\big]}{\det A}. \end{aligned}$$

(ii) Se $d \in \mathbb{A}_n[0]$, então os Lemas 5.8 e 5.9 nos dizem ainda que:

$$
\begin{aligned}
z_d &= \frac{2^{-1}\left(\frac{i}{2}\right)^{\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor} \det A\big[d-1|\,(v_{d-1}-iv_d;\,b)\big]}{\left(\frac{i}{2}\right)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \det A} \\
&= \frac{2^{-1}\left(\frac{i}{2}\right)^{\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \det A\big[d-1|\,(v_{d-1}-iv_d;\,b)\big]}{\det A} \\
&= \frac{-i\det A\big[d-1|\,(v_{d-1}-iv_d;\,b)\big]}{\det A} \\
&= \frac{i\det A\big[d-1|\,(b;\,v_{d-1}-iv_d)\big]}{\det A}.
\end{aligned}
$$

Conforme queríamos demonstrar. □

CAPÍTULO 6

APLICAÇÕES À SALA DE AULA

Neste capítulo, torna-se oportuno delinear o alcance das ideias tratadas ao longo do presente trabalho à sala de aula. Para tanto, recorreremos a alguns problemas envolvendo sistemas lineares de ordem n sobre $\mathbb{R}$, com $n \in \{2,3\}$. Tendo em vista em [22] que

> a Matemática pode ser ensinada de uma maneira mais "concreta" caso seus conceitos sejam abordados tomando como ponto de partida um contexto. Isto não significa necessariamente principiar com um problema quotidiano. A Matemática se desenvolveu, e continua a se desenvolver, por meio de problemas (pp. IX-X).

Nosso intento será, portanto, o de resolver e discutir[1] tais sistemas sobre $\mathbb{C}$ de modo conveniente e econômico, sob o respaldo dos resultados firmados nos capítulos precedentes e sob condição de fazê-los avançar um pouco mais.

Nosso enfoque será geométrico e algébrico. São duas as razões. Primeira: "os números complexos são (...) estudados no ensino médio (...) com uma abordagem algebrista e formal, deixando de lado o seu aspecto geométrico, tão rico em aplicações" [19]. Segunda: "a adoção de uma abordagem geométrica dos números complexos não exclui, é claro, o uso algébrico dos complexos, que continuam sendo importantes por motivos algébricos" [5].

Nas próximas linhas, esperamos, então, munir o professor de aplicações não usuais da álgebra e da geometria dos complexos a nível de ensino médio, sem que nelas haja menção a tais números. Com efeito, "[a] falta de aplicações para os temas estudados em classe é o defeito mais gritante do ensino da Matemática em todas as séries escolares" ([16], p. 157). "De resto, as aplicações mais interessantes, durante todo o curso, são os exemplos e exercícios cujo objeto principal não é o assunto que está sendo tratado" (idem, p. 156).

6.1 Resolução de Sistemas de Pequeno Porte

Nestas linhas, veremos que a R.T.D. confere mais praticidade à Regra de Cramer quando se tem $n \in \{2,3\}$, casos em que ela já é, segundo Lima [13], um método que funciona bem.

[1] A discussão se restringirá ao caso $n = 2$.

6.1.1 O caso $n = 2$

Sendo

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}),\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}) \text{ e } b = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}),$$

temos

$$Ax = b \iff \mathcal{S} : \begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 = p \\ \gamma x_1 + \delta x_2 = q. \end{cases}$$

Posto que $\mathbb{A}_2 = \mathcal{N}_2 = \{1,2\}$, tem-se $\mathbb{A}_2[1] = \{1\}$.

Se A é invertível, a solução de $\mathcal{S}$ é dada, segundo o Teorema 5.3, tomando $d = 1$, por

$$(x_1, x_2) = \frac{i \det A\big[1|\,(\eta_1; b)\big]}{\det A} = \frac{i \det \begin{bmatrix} \alpha + \beta i & p \\ \gamma + \delta i & q \end{bmatrix}}{\det A} \tag{6.1}$$

visto que $\eta_1 = v_1 + i v_2 = \begin{bmatrix} \alpha + \beta i \\ \gamma + \delta i \end{bmatrix}$.

Para fins de ilustração, segue o

Exemplo 6.1 (Lima:[15], p. 196)**.** *Uma liga $\mathcal{L}_1$ contém 30% de ouro e 70% de prata e uma liga $\mathcal{L}_2$ tem 60% de ouro e 40% de prata. Quantos gramas de cada uma deve-se tomar a fim de formar 100 gramas de uma liga com igual quantidade de ouro e prata?*

Solução. *Seja $\mathcal{L}$ a liga a ser formada. Se x e y denotam, respectivamente, as quantidades em gramas de $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ presentes em $\mathcal{L}$, então interessa-nos resolver o sistema*

$$\mathcal{S} : \begin{cases} 0,3x + 0,6y = 50 \\ 0,7x + 0,4y = 50. \end{cases}$$

Note que $A = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,6 \\ 0,7 & 0,4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *é invertível, pois*

$$\det A = 0,3 \cdot 0,4 - 0,6 \cdot 0,7 = 0,12 - 0,42 = -0,3 \neq 0.$$

Desse modo, a R.T.D. em (6.1) *nos fornece*

$$
\begin{aligned}
(x,y) &= \frac{i\det\begin{bmatrix} 0,3+0,6i & 50 \\ 0,7+0,4i & 50 \end{bmatrix}}{-0,3} \\
&= \frac{i[(0,3+0,6i)\,50-50\,(0,7+0,4i)]}{-0,3} \\
&= \frac{i(15+30i-35-20i)}{-0,3} \\
&= \frac{i(-20+10i)}{-0,3} \\
&= \frac{-10-20i}{-0,3} \\
&= \frac{100}{3}+\frac{200}{3}i.
\end{aligned}
$$

Portanto, a fim de formar $\mathcal{L}$*, deve-se tomar* $100/3$ *gramas de* $\mathcal{L}_1$ *e* $200/3$ *gramas de* $\mathcal{L}_2$*.* ■

6.1.2 O caso $n=3$

Sejam dadas as matrizes

$$A=\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \theta & \varepsilon \\ \rho & \mu & \lambda \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}),\ x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \text{ e } b=\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}).$$

Segue-se, daí, que

$$Ax=b \iff \mathcal{S}:\left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha x_1 & + & \beta x_2 & + & \gamma x_3 & = & p \\ \delta x_1 & + & \theta x_2 & + & \varepsilon x_3 & = & q \\ \rho x_1 & + & \mu x_2 & + & \lambda x_3 & = & r. \end{array}\right.$$

Para $n = 3$, temos $\mathbb{A}_3 = \mathcal{N}_{3-1} = \mathcal{N}_2 = \{1, 2\}$, donde $\mathbb{A}_3[1] = \{1\}$.

Se A é invertível, o Teorema 5.3 nos diz, então, para $d = 1$, que

$$(x_1, x_2) = \frac{i \det A\big[1|(\eta_1; b)\big]}{\det A} = \frac{i \det \begin{bmatrix} \alpha+\beta i & p & \gamma \\ \delta+\theta i & q & \varepsilon \\ \rho+\mu i & r & \lambda \end{bmatrix}}{\det A} \tag{6.2}$$

dado que $\eta_1 = v_1 + i v_2 = \begin{bmatrix} \alpha+\beta i \\ \delta+\theta i \\ \rho+\mu i \end{bmatrix}$.

Prosseguindo, temos o

Exemplo 6.2 (Lima:[16], pp. 99-100)**.** *O curso de Matemática no semestre passado teve três provas. As questões valiam um ponto cada uma, mas os pesos das provas eram diferentes. Jorge, que acertou 6 questões na primeira prova, 5 na segunda e 4 na terceira, obteve no final um total de 47 pontos. Fernando acertou 3, 6 e 6, totalizando 54 pontos. Por sua vez, Marcos acertou 1, 7 e 5 questões, atingindo a soma de 50 pontos no final. Já Renato fez 5 questões certas na primeira prova, 8 na segunda e 3 na terceira. Qual foi o total de pontos de Renato?*

Solução. *Sejam x, y e z os pesos relativos à primeira, à segunda e à terceira prova respectivamente. Para começar, as informações dadas fornecem o sistema*

$$\mathcal{S} : \begin{cases} 6x + 5y + 4z = 47 \\ 3x + 6y + 6z = 54 \\ x + 7y + 5z = 50. \end{cases}$$

Perceba que a matriz dos coeficientes de $\mathcal{S}$ é invertível. De fato,

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 5 \end{bmatrix} &= 6 \det \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} - 5 \det \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + 4 \det \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \\ &= 6(30-42) - 5(15-6) + 4(21-6) \\ &= -72 - 45 + 60 \\ &= -57 \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Nesse sentido, a R.T.D. em (6.2) *nos dá*

$$
\begin{aligned}
(x,y) &= \frac{i\det\begin{bmatrix} 6+5i & 47 & 4 \\ 3+6i & 54 & 6 \\ 1+7i & 50 & 5 \end{bmatrix}}{-57} \\
&= \frac{i(-219+102i)}{-57} \\
&= \frac{-102-219i}{-57} \\
&= \frac{34}{19}+\frac{73}{19}i,
\end{aligned}
$$

porquanto

$$
\begin{aligned}
\det\begin{bmatrix} 6+5i & 47 & 4 \\ 3+6i & 54 & 6 \\ 1+7i & 50 & 5 \end{bmatrix} &= (6+5i)\det\begin{bmatrix} 54 & 6 \\ 50 & 5 \end{bmatrix} - 47\det\begin{bmatrix} 3+6i & 6 \\ 1+7i & 5 \end{bmatrix} + 4\det\begin{bmatrix} 3+6i & 54 \\ 1+7i & 50 \end{bmatrix} \\
&= (6+5i)(270-300) - 47\,(15+30i-6-42i) + 4\,(150+300i-54-378i) \\
&= (6+5i)(-30) - 47\,(9-12i) + 4\,(96-78i) \\
&= -180-150i-423+564i+384-312i \\
&= -219+102i.
\end{aligned}
$$

Sendo, então, $x = \dfrac{34}{19}$ e $y = \dfrac{73}{19}$, *a terceira equação de* $\mathcal{S}$ *nos permite obter*

$$5z = 50 - x - 7y = \frac{950-34-511}{19} = \frac{405}{19} \implies z = \frac{81}{19}.$$

Portanto, o total de pontos de Renato foi igual a

$$\frac{5\cdot 34 + 8\cdot 73 + 3\cdot 81}{19} = \frac{997}{19} \approx 52{,}5.$$

■

6.2 Ponto de Discussão

Nesta altura, são de interesse os sistemas lineares de ordem 2 sobre $\mathbb{R}$, para os quais[2] o teorema a seguir fornece uma caracterização distinta da usual que permitirá discuti-los de um modo relativamente simples.

Teorema 6.1. *Sejam a, b, c, d, p e q números reais, com $q \neq 0$. Considere o sistema linear*

$$\mathcal{S} : \begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \tag{6.3}$$

do qual procede

$$z_{\mathcal{S}} := \frac{a+bi}{c+di}.$$

Então, são válidas as seguintes sentenças:

(i) $z_{\mathcal{S}}$ *não é real se, e somente se,* $\mathcal{S}$ *possui uma única solução.*

(ii) $z_{\mathcal{S}}$ *é real mas diferente de* $\dfrac{p}{q}$ *se, e somente se,* $\mathcal{S}$ *não possui solução.*

(iii) $z_{\mathcal{S}}$ *é real e igual a* $\dfrac{p}{q}$ *se, e somente se,* $\mathcal{S}$ *possui infinitas soluções.*

Demonstração. A princípio, atente que o Teorema 5.2 permite transferir a análise do número de soluções de $\mathcal{S}$ para o seu sistema translinear associado, qual seja:

$$\mathcal{S}_\tau : \begin{cases} \overline{\alpha}z_1 + \alpha z_2 = p \\ \overline{\beta}z_1 + \beta z_2 = q \end{cases}$$

em que $\alpha = (a+bi)/2$ e $\beta = (c+di)/2$.

Note agora que $a^2 + b^2 \neq 0$ significa que $\alpha \neq 0$. Analogamente, $\beta \neq 0$.

Por conseguinte, multiplicando a primeira equação de $\mathcal{S}_\tau$ por $\overline{\beta} \neq 0$; enquanto que, a segunda por $-\overline{\alpha} \neq 0$; e, em seguida, somando-as, chega-se, equivalentemente, a

$$\mathcal{S}_\tau : \begin{cases} \overline{\alpha}z_1 + \alpha z_2 = p \\ z_2(\overline{\beta}\alpha - \overline{\alpha}\beta) = \overline{\beta}p - \overline{\alpha}q. \end{cases}$$

[2] A exemplo de Lima [15], "salvo menção explícita em contrário, fica convencionado que, ao escrevermos uma equação $ax + by = p$, estaremos admitindo tacitamente que $a^2 + b^2 \neq 0$, isto é, que os coeficientes a e b não se anulam simultaneamente" (p. 193).

Constata-se, pois, que

(a) $\mathcal{S}_\tau$ possui uma única solução $\iff \overline{\beta}\alpha - \overline{\alpha}\beta \neq 0 \iff \dfrac{\alpha}{\beta} \neq \dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$.

(b) $\mathcal{S}_\tau$ não possui solução $\iff \overline{\beta}\alpha - \overline{\alpha}\beta = 0$, com $\overline{\beta}p - \overline{\alpha}q \neq 0 \iff \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} \neq \dfrac{p}{q}$.

(c) $\mathcal{S}_\tau$ possui infinitas soluções $\iff \overline{\beta}\alpha - \overline{\alpha}\beta = \overline{\beta}p - \overline{\alpha}q = 0 \iff \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} = \dfrac{p}{q}$.

Mas, sendo

$$z_{\mathcal{S}} = \frac{\alpha}{\beta} \qquad \text{e} \qquad \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} = \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \overline{z_{\mathcal{S}}},$$

temos que

(i) $\mathcal{S}$ possui uma única solução $\iff z_{\mathcal{S}} \neq \overline{z_{\mathcal{S}}} \iff z_{\mathcal{S}}$ não é real.

(ii) $\mathcal{S}$ não possui solução $\iff z_{\mathcal{S}} = \overline{z_{\mathcal{S}}} \neq p/q \iff z_{\mathcal{S}}$ é real mas diferente de $\dfrac{p}{q}$.

(iii) $\mathcal{S}$ possui infinitas soluções $\iff z_{\mathcal{S}} = \overline{z_{\mathcal{S}}} = p/q \iff z_{\mathcal{S}}$ é real e igual a $\dfrac{p}{q}$.

Findando a prova. □

Como aplicação imediata do resultado precedente, segue o

Exemplo 6.3. *Determinar o número de soluções de cada sistema linear a seguir.*

$$(i) \quad \mathcal{S}_1 : \begin{cases} 9x + 6y = 1 \\ 9x + 4y = 1 \end{cases}$$

Neste caso, $z_{\mathcal{S}_1} = \dfrac{9+6i}{9+4i}$ *não é real, pois*

$$\mathfrak{Im}\left(z_{\mathcal{S}_1}\right) = \mathfrak{Im}\left(\frac{9+6i}{9+4i}\cdot\frac{9-4i}{9-4i}\right) = \frac{-36+54}{9^2+4^2} = \frac{18}{9^2+4^2} \neq 0.$$

Então, $\mathcal{S}_1$ *possui uma única solução.*

$$(ii) \quad \mathcal{S}_2 : \begin{cases} 18x & + & 18y & = & \dfrac{1}{18} \\ \\ x & + & y & = & 1 \end{cases}$$

Em razão de

$$z_{\mathcal{S}_2} = \frac{18+18i}{1+1i} = \frac{18(1+i)}{1+i} = 18 \neq \frac{\frac{1}{18}}{1},$$

$\mathcal{S}_2$ *não possui solução.*

$$(iii) \quad \mathcal{S}_3 : \begin{cases} 1331x & - & 968y & = & 121 \\ \\ 11x & - & 8y & = & 1 \end{cases}$$

Posto que

$$z_{\mathcal{S}_3} = \frac{1331-968i}{11-8i} = \frac{121(11-8i)}{11-8i} = \frac{121}{1},$$

$\mathcal{S}_3$ *possui infinitas soluções.* ■

Meditemos um pouco o último resultado. Tradicionalmente, de acordo com Lima e Carvalho [18], "do ponto de vista geométrico, o sistema [$\mathcal{S}$] tem uma única solução quando as retas dadas[3] são concorrentes, nenhuma solução se elas são paralelas e uma infinidade de soluções quando essas retas coincidem" (p. 56). Não obstante, o Teorema 6.1 nos ensina algo mais simples. Ele assegura que, para discutir o sistema $\mathcal{S}$, devemos tão somente olhar para um único ponto do plano complexo, qual seja:

$$z_{\mathcal{S}} = \frac{a+bi}{c+di}. \tag{6.4}$$

Nesse sentido, o item *(i)* do Teorema 6.1 significa, geometricamente, que $z_{\mathcal{S}}$ não pertence ao eixo Ox se, e só se, $\mathcal{S}$ possui uma única solução, conforme a Figura 6.1.

No plano complexo, tracemos ainda a reta vertical

$$r : x = \frac{p}{q}. \tag{6.5}$$

Tão logo, o item *(ii)* significa que $z_{\mathcal{S}} \in Ox$ mas $z_{\mathcal{S}} \notin r$ se, e só se, $\mathcal{S}$ não possui solução (veja a Figura 6.2).

[3]Recordando da Geometria Analítica que cada equação de $\mathcal{S}$ representa uma reta no plano $\mathbb{R}^2$.

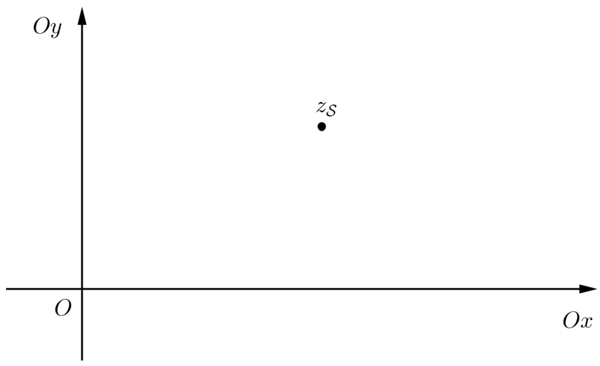

Figura 6.1 $\mathcal{S}$ possui uma única solução.

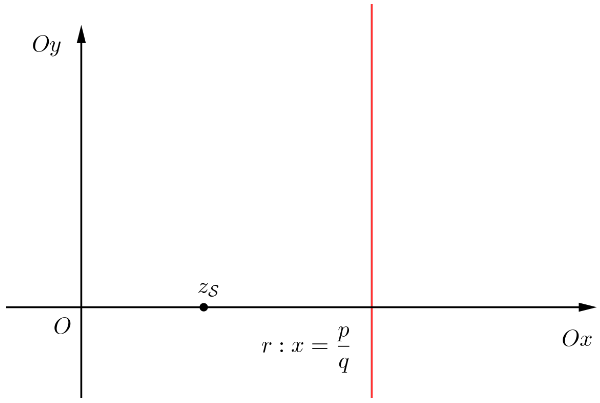

Figura 6.2 $\mathcal{S}$ não possui solução.

Finalmente, o item *(iii)* quer dizer que $z_{\mathcal{S}} \in Ox \cap r = \{(p/q, 0)\}$ se, e só se, $\mathcal{S}$ possui infinitas soluções, consoante a Figura 6.3.

Por essas razões, dá-se a $z_{\mathcal{S}}$ o nome de ***Ponto de Discussão*** de $\mathcal{S}$. Mas que ponto é $z_{\mathcal{S}}$ em (6.4) explicitamente? Vejamos, multiplicando e devidindo por $c - di$, resulta que

$$z_{\mathcal{S}} = \frac{(ac+bd) - i(ad-bc)}{c^2+d^2}. \tag{6.6}$$

Pondo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $u = (a,b) = a+bi$ e $v = (c,d) = c+di$, (6.6) assume a forma

$$z_{\mathcal{S}} = \frac{\langle u,v \rangle - i \det A}{|v|^2}. \tag{6.7}$$

Em que $\langle u,v \rangle$ denota o ***produto interno*** entre u e v definido por $\langle u,v \rangle = ac+bd$.

A identidade (6.7) por si só, além de unificar conceitos estudados em geral isoladamente, dota de grande sentido o emprego algébrico dos complexos. Naturalmente, em posse dela, o professor tem em mãos uma excelente oportunidade para retomar ideias, consolidar outras e, em suma, de expressar em uma linha o caráter unificador de que goza a Matemática.

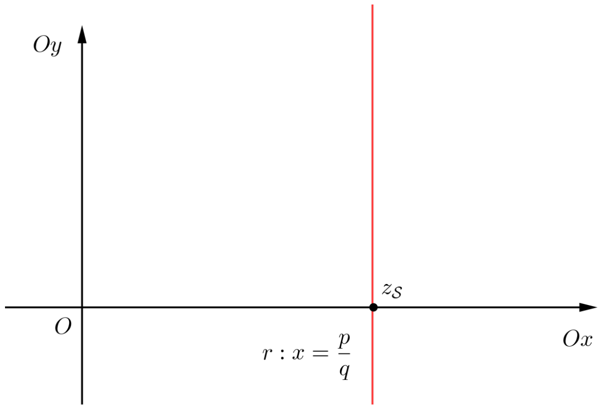

Figura 6.3 $\mathcal{S}$ possui infinitas soluções.

Sejam fixos $p \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R} - \{0\}$. No intuito de discutir o sistema $\mathcal{S}$ de maneira dinâmica, podemos enxergar o comportamento de $z_{\mathcal{S}}$ ao variarmos os complexos u e v, pondo, lado a lado, dois sistemas de eixos ortogonais. Nisto consitirá a próxima seção na qual tornamos isto possível mediante o *software* GeoGebra.[4] Na prática, com ele o aluno poderá, por conta, além de discutir $\mathcal{S}$, constatar os seguintes fatos:

1) $z_{\mathcal{S}}$ é real se, e só se, v é múltiplo[5] de u ou u é múltiplo de v. De fato, evocando (6.4) $z_{\mathcal{S}}$ ser real significa que $u/v = \varepsilon$ para algum $\varepsilon \in \mathbb{R} - \{0\}$; o que, por sua vez, equivale a $u = \varepsilon \cdot v$, ou ainda, a $v = \varepsilon^{-1} \cdot u$, posto que u e v são, por hipótese, ambos não nulos.

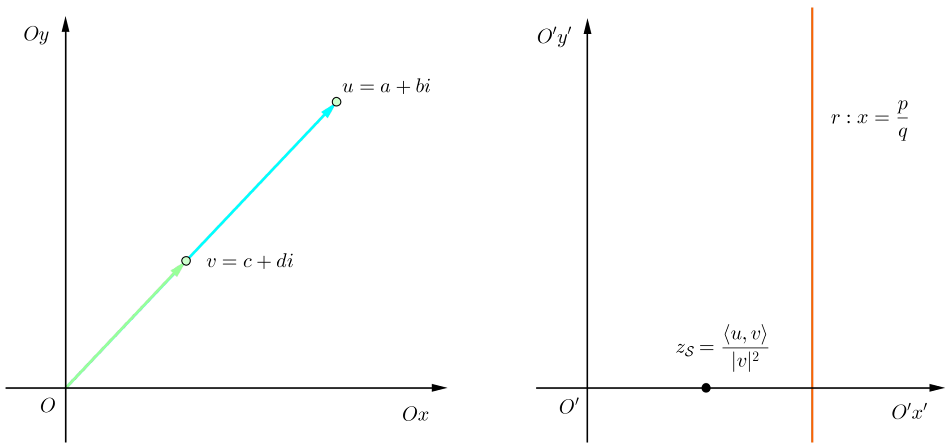

Figura 6.4 $z_{\mathcal{S}}$ é real se, e só se, u e v são múltiplos.

2) $z_{\mathcal{S}}$ não é real se, e só se, v não é múltiplo de u e u não é múltiplo de v, pela contrapositiva do item (1).

[4]Segundo Friske e Mathias [7], o "GeoGebra é um aplicativo gratuíto de Matemática Dinâmica que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo". O *software* é, de fato, bastante útil. A exemplo, todas as figuras que compõem este trabalho foram feitas com ele pelo Autor.

[5]Diz-se que "um vetor v é ***múltiplo*** do vetor u se existe $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que $v = \varepsilon \cdot u$" ([6], p. 31).

3) $\mathfrak{Re}\ (z_S) = 0$ se, e só se, u e v são perpendiculares. Com efeito,

$$\mathfrak{Re}\ (z_S) = 0 \Leftrightarrow \frac{\langle u, v\rangle}{|v|^2} = 0 \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0$$

e "dois vetores são perpendiculares se e só se seu produto interno é zero" ([6], p. 40).

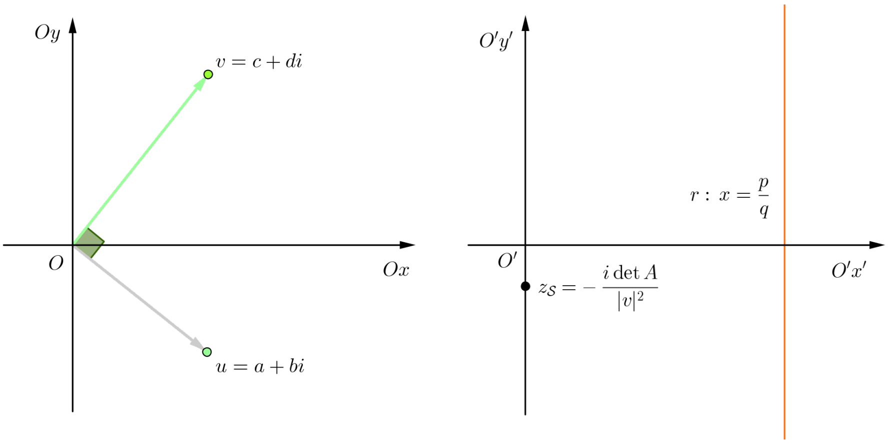

Figura 6.5 $\mathfrak{Re}\ (z_S) = 0$ se, e só se, u e v são perpendiculares.

6.3 O Ponto z_S no GeoGebra

Para efetuar a construção prometida, elencamos alguns passos a serem seguidos.

1) Iniciemos por definir a origem O, pondo

Entrada: $\boxed{\mathbf{O} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \qquad \alpha}$

2) Selecione a ferramenta ***Vetor Definido por Dois Pontos***, determinando dois vetores não nulos $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ e $v = (c, d) \in \mathbb{R}^2$, ambos com extremidade inicial em O.

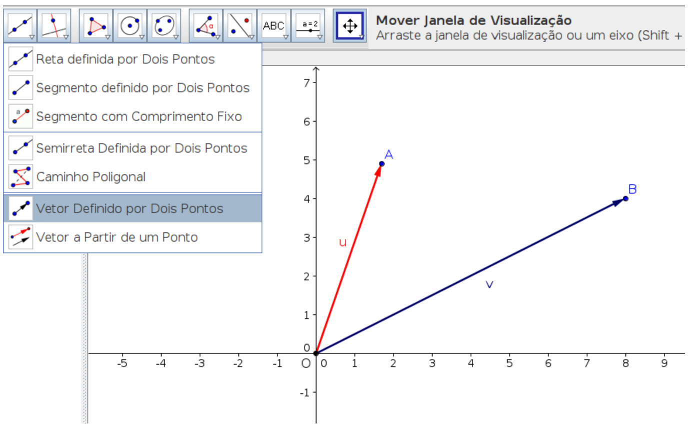

Figura 6.6 Vetor Definido por Dois Pontos.

3) Tendo selecionado u e v a um só tempo, dê um clique com o botão direito do *mouse*, indo, após, em Propriedades. Na aba Álgebra, escolha a opção Número Complexo.

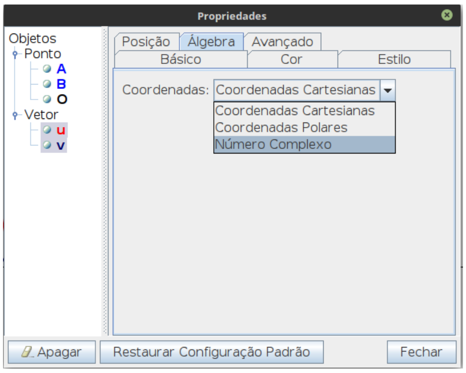

Figura 6.7 Mudando as Coordenadas.

4) Interessa-nos agora pôr os complexos u e v na forma polar.

Comecemos por determinar o módulo de cada um. No GeoGebra, presta-se a isto o comando cuja sintaxe é

Entrada: **Comprimento[<Vetor>]** α

Na Entrada, escreva, pois,

Mu**=Comprimento[**u**]** e **M**v**=Comprimento[**v**]**

um por vez.

5) A fim de usar o comando **Ângulo[<Vetor>, <Vetor>]** para obter o argumento principal de u e de v, introduzamos o vetor unitário e, pondo

Entrada: **e=Vetor**[**O**, (**1**, **0**)] α

Na Entrada, pode-se, então, escrever[6]

α**=Ângulo[**e**,** u**]** e β**=Ângulo[**e**,** v**]**

um por vez (a Figura 6.8 contém o resultado destes comandos).

6) Com isso, temos $u = \mathbf{M}u(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha))$ e $v = \mathbf{M}v(\cos(\beta)+i\sin(\beta))$. E daí,

$$a = \mathbf{M}u\cdot\cos(\alpha), \qquad b = \mathbf{M}u\cdot\sin(\alpha),$$
$$c = \mathbf{M}v\cdot\cos(\beta), \qquad d = \mathbf{M}v\cdot\sin(\beta).$$

Na Entrada, digite cada igualdade acima, uma por vez.[7]

[6] Para ter acesso ao alfabeto grego, basta clicar sobre o ícone α no canto direito da Entrada.

[7] No GeoGebra, indica-se uma multiplicação pelo sinal de asterisco (*), ou ainda, deixando-se um espaço simples entre os fatores.

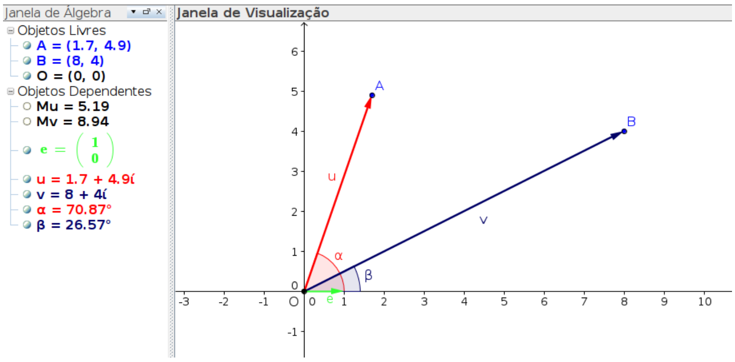

Figura 6.8 O vetor unitário e, o argumento principal α de u e β de v.

7) Queremos, então, inserir um segundo sistema de eixos ortogonais. No menu Exibir, selecione a opção Janela de Visualização 2.

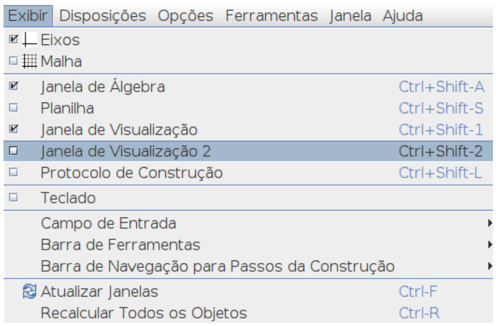

Figura 6.9 Um segundo sistema de eixos.

8) Tendo em mente o sistema $\mathcal{S}$ em (6.3), falta-nos apenas estabelecer p e q a esta altura. Para isto, lancemos mão da ferramenta ***Controle Deslizante***. Selecionando-a, clique sobre a Janela de Visualização 2, pondo, em particular, as especificações[8] de q que se acham na Figura 6.10.

9) Para a limpidez da construção, convém ocultar os ângulos α e β, bem como o vetor unitário e. Na Janela de Álgebra, basta, pois, clicar sobre o ícone de cada objeto de interesse, deixando-o com a seguinte aparência: $\circ$.

10) Selecionando a Janela de Visualização, determinemos o ângulo entre v e u, escrevendo

Entrada: $\boxed{\eta\textbf{=Ângulo}[v,u] \qquad \alpha}$

[8]Na Figura 6.10, fez-se de antemão o controle de p para o qual pusemos

$$(min = -5,\, max = 5,\, Incremento = 0.01).$$

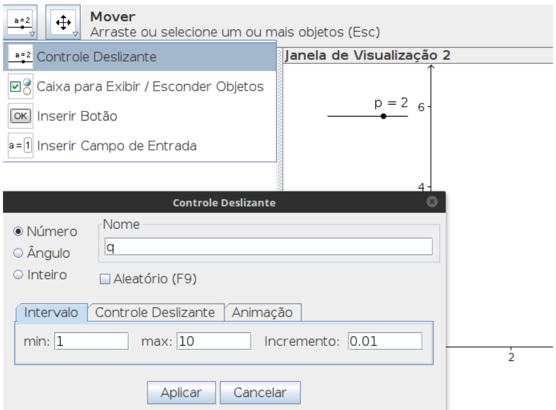

Figura 6.10 A ferramenta ***Controle Deslizante*** e as especificações de q.

11) Neste ponto, selecione a Janela de Visualização 2. Na Entrada, digite, uma por vez, as igualdades a seguir:

$$x = p/q \quad \text{e} \quad z_{\mathcal{S}} = u/v.$$

Tem-se, portanto, estabelecidos a reta vertical r em (6.5) e o ponto de discussão de $\mathcal{S}$.

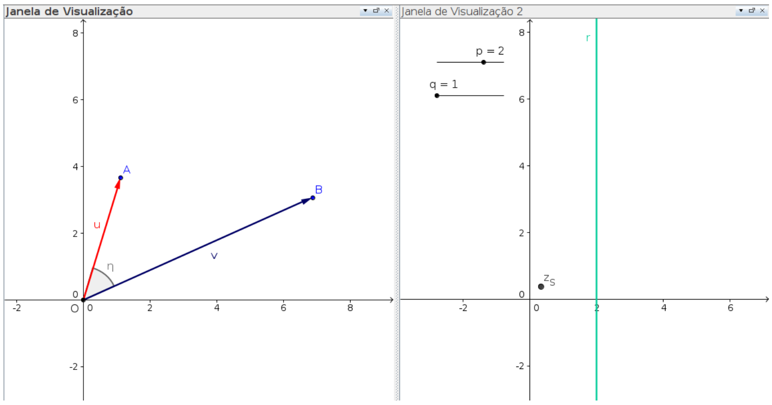

Figura 6.11 O ângulo η, a reta r e o ponto $z_{\mathcal{S}}$.

12) Para terminar, poremos o sistema $\mathcal{S}$ na Janela de Visualização. A cujo propósito serve a ferramenta ***Inserir Texto***.[9] Selecionando-a, clique sobre a Janela de Visualização, pondo[10] em Editar o texto a seguir:

```
$ \mathcal{S}:\left\{
\begin{array}{lcl}\begin{array}{ccccc}
\, x & + & \, y  & = & \\\\
\, x & + & \, y  & = &
\end{array}\end{array}
\right. $
```

Feito isto, disponha os objetos que se referem a $\mathcal{S}$, conforme ilustra a Figura 6.12.

[9] Ela encontra-se dentre as ferramentas que acompanham o *software* e tem por ícone uma justaposição de letras, a saber: ABC.

[10] Marque ainda a opção LaTeX.

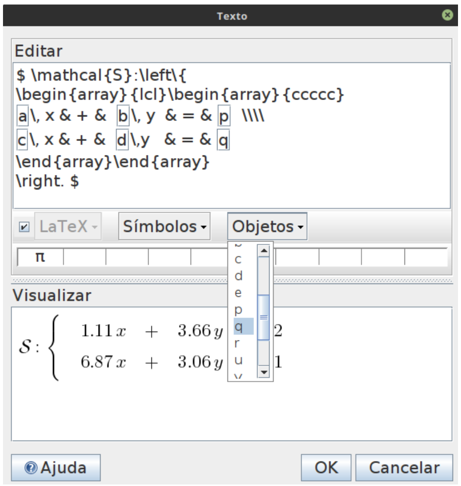

Figura 6.12 O Texto do Sistema $\mathcal{S}$.

13) Eis o resultado final:

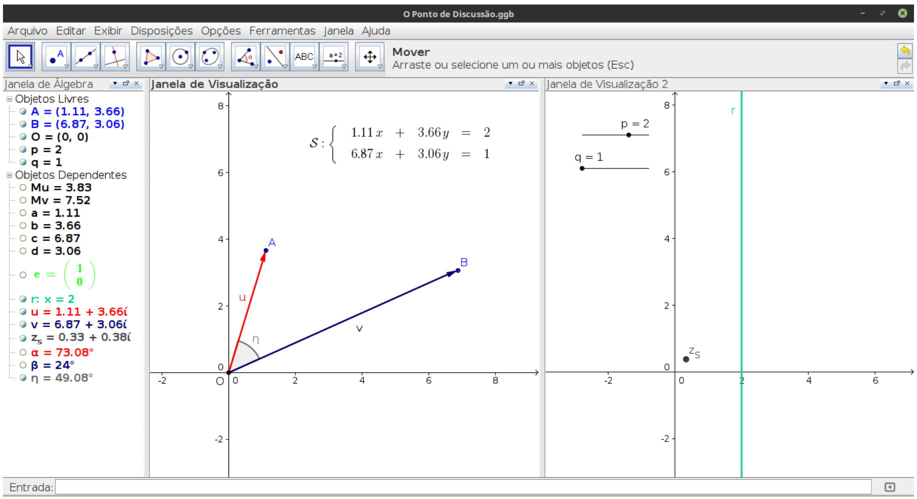

Figura 6.13 O Ponto $z_{\mathcal{S}}$ no GeoGebra.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, definimos duas aplicações: as translineadoras horizontal $\tau_{\langle n\times m\rangle}$ e vertical $\varphi_{\langle n\times m\rangle}$ do espaço $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$. Tendo-as, pois, estudado extensivamente, a ponto de lhes conferir o título de automorfismos diagonalizáveis, introduzimos a noção de sistema translinear, para o qual se pôde transferir a análise do número de soluções de um sistema linear dado.

Sob este prisma, tornou-se factível estabelecer uma interpretação do método de Cramer no plano complexo. Nisto consistiu a Regra dos Termos Duais (simplesmente, R.T.D.) em posse da qual se pode obter, aos pares como o quociente de dois determinantes em $\mathbb{C}$, os termos da solução de um sistema linear de ordem $n \geqslant 2$ sobre $\mathbb{R}$, cuja matriz dos coeficientes seja invertível, em que figuram um total de $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ determinantes e não mais $n+1$, como o é na Regra de Cramer.

Nesse sentido, a R.T.D. rendeu à sala de aula os casos em que $n \in \{2,3\}$ e, com isso, constitui-se como uma aplicação não usual da álgebra dos números complexos a nível de ensino médio. Para além da perspectiva algébrica, se forneceu ainda uma caracterização distinta da usual para a determinação do número de soluções de um sistema linear de ordem 2 sobre $\mathbb{R}$, cuja interpretação geométrica goza de notável simplicidade.

Finalmente, tendo exibido o alcance e a utilidade dos complexos ao conectá-los à resolução e à discussão de sistemas lineares de pequeno porte sobre $\mathbb{R}$, há questões naturais que surgiram ao longo da presente pesquisa e que apontam para a sua potencial continuidade, a saber: a ampliação do estudo para a resolução de sistemas que não possuam matriz dos coeficientes invertível; a discussão de sistemas de ordem 3 sobre $\mathbb{R}$, a exemplo do caso $n = 2$; bem como a ideia de explorar as translineadoras $\tau_{\langle n\times m\rangle}$ e $\varphi_{\langle n\times m\rangle}$ no sentido de situá-las dentre os operadores auto-adjuntos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ÁVILA, Geraldo. Se eu fosse professor de Matemática. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 54.

[2] BUENO, Hamilton P. *Álgebra Linear: Um Segundo Curso*. Rio de Janeiro: SBM, 2006. Coleção Textos Universitários.

[3] BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. *PCN+ Ensino Médio:* Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: 2002.

[4] CALLIOLI, Carlos A.; DOMINGUES, Hygino H.; COSTA, Roberto C. F. *Álgebra Linear e Aplicações.* 6. ed. São Paulo: Atual, 1990.

[5] CARNEIRO, J. P. A.. A Geometria e o Ensino dos Números Complexos. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 55.

[6] DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. *Geometria Analítica*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Coleção PROFMAT.

[7] FRISKE, Andréia Luisa; MATHIAS, Carmen Vieira. Homotetias, sequências e construções de Fractais. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 92, 2017.

[8] GULISZ, Vitor Emanuel. Entendendo a Regra de Cramer. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 92, pp. 22-24, 2017.

[9] HEFEZ, Abramo. *Aritmética*. Rio de Janeiro: SBM, 2014. Coleção PROFMAT.

[10] HEFEZ, Abramo. *Curso de Álgebra vol. 1*. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. Coleção Matemática Universitária.

[11] HEFEZ, Abramo; FERNANDEZ, Cecília S. *Introdução à Álgebra Linear*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. Coleção PROFMAT.

[12] HEFEZ, Abramo; VILLELA, Maria Lucia Torres. *Polinômios e Equações Algébricas*. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Coleção PROFMAT.

[13] LIMA, Elon Lages. *Álgebra Linear*. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. Coleção Matemática Universitária.

[14] LIMA, Elon Lages. *Análise Real vol. 1 - Funções de uma Variável*. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017. Coleção Matemática Universitária.

[15] LIMA, Elon Lages. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. Coleção Matemática Universitária.

[16] LIMA, Elon Lages. *Matemática e Ensino*. Rio de Janeiro: SBM, 2001. Coleção do Professor de Matemática.

[17] LIMA, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Coleção do Professor de Matemática.

[18] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *Coordenadas no plano*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Coleção do Professor de Matemática.

[19] LINO, Paulo Sérgio C.; CARNEIRO, J. P. A.. Reflexões em Espelhos Usando Números Complexos. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 76.

[20] MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; CARMO, Manfredo Perdigão do. *Trigonometria/Números Complexos*. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. Coleção do Professor de Matemática.

[21] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar Volume 5: Teoria dos Números*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Coleção do Professor de Matemática.

[22] ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira. *Tópicos de História da Matemática*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2019. Coleção PROFMAT.

[23] SANTOS, José Plínio de Oliveira. *Introdução à Teoria dos Números.* 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. Coleção Matemática Universitária.

[24] SOARES, Marcio G.. *Cálculo em uma variável complexa*. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. Coleção Matemática Universitária.