

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA DA MATÉRIA CONDENSADA

RUBBENS ANTONIO DE LIMA VIEIRA

ESPALHAMENTO DE LUZ PARCIALMENTE COERENTE POR
MATERIAIS NÃO-HERMITIANOS

Maceió

2021

RUBBENS ANTONIO DE LIMA VIEIRA

Espalhamento de luz parcialmente coerente por materiais
não-Hermitianos

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Paulo Cesar Aguiar
Brandão Filho

Maceió

2021

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

V658e Vieira, Rubbens Antonio de Lima.
Espalhamento de luz parcialmente coerente por materiais não hermitianos /
Rubbens Antonio de Lima Vieira. – 2021.
65 f. : il. color.

Orientador: Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho.
Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de
Física. Maceió, 2020.

Bibliografia: f. 44-47.

1. Densidade espectral. 2. Luz parcialmente coerente. 3. Efeito Wolf. I. Título.

CDU: 535.3

”A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo.”

Galileu Galilei

AGRADECIMENTOS

- Agradeço primeiramente à Deus que me deu forças para continuar mais essa etapa da minha vida pessoal e acadêmica.
- Agradeço aos meus pais, Ana Maria e Antonio vieira, que sempre incentivaram e ajudaram a continuar apesar de ter tantas dificuldades. Aos meus irmãos , Caetano e Jamille, que estão sempre me ajudando em todas as etapas da minha vida e ao meu avó, José Ferreira, que também contribuiu para que eu chegasse até aqui.
- Agradeço ao meu amor, Alicia Sophia, que acreditou no meu potencial para alcançar um nível ainda maior do que estou. Além disso, pela enorme ajuda para que eu realizasse mais esse sonho.
- Ao meu orientador o professor Paulo Cesar Aguiar Brandão Filho pela atenção, a enorme paciência, respeito e disponibilidade para a orientação.
- Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa no Estado de Alagoas(FAPEAL) pelo apoio financeiro.
- Agradeço à meus amigos da graduação Ricarti, João Pedro, Otacílio e Hércules que me ajudaram durante esse tempo.
- Agradeço a Igreja Batista Sião pelo apoio em orações, em especial Pr. Marcos e Pr. Rafael e à Igreja Bíblica Batista Esperança em especial Jonathan, Daniel e ao Pr.Líbnis pela amizade e pelas orações.
- Agradeço aos meus colegas da Sala 4 Francisco, Daniel, Jonathan, Ricardo, Daykson, Douglas(*in memoriam*) e Carlos pelas conversas, brincadeiras, discussões construtivas, respeito e amizade. Em especial à Francisco que me ajudou muito durante a escrita dessa dissertação, a Daniel que me ajudou com o modelo da dissertação, a Jonathan pelos ensinamentos dentro e fora da física, ao Ricardo pela conversas engraçadas e discussões sobre física.
- Ao Douglas, que dividiu apartamento comigo durante todo o tempo que tive em Maceió, que me ajudou muito durante o aprendizado de gráficos e LaTeX, pois sem ele seria muito mais difícil. Também agradeço à Patricia e Heloysa pela amizade durante todo esse tempo.

- Agradeço aqueles que me ajudaram de maneira indireta a conquistar este título.

RESUMO

Nesta dissertação foi feito um breve estudo sobre os efeitos de espalhamento estocástico de radiação por duas esferas apresentando ganho e perda e verificando a mudança no espectro no domínio da frequência, ou seja, o efeito *Wolf* em **ambas configurações**, Hermitiana e não-Hermitiana. Encontramos analiticamente as frequências onde a densidade espectral do campo espalhado desaparece e mostramos que elas dependem do **parâmetro ganho** e perda. Isto demonstra o efeito *Wolf* não-Hermitiana. Além disso, a radiação espalhada tem uma mudança de fase de $\pi/2$ e, também, há diferença entre os máximos e mínimos em diferentes configurações: Hermitiana e não-Hermitiana

Palavras-chave: Densidade espectral. Luz parcialmente coerente. Efeito Wolf.

ABSTRACT

In this dissertation, we will study the effects of scattering of stochastic radiation across two spheres having gain and loss, and verifying the change in the spectrum in the frequency domain, that is, the *Wolf* effect in both configurations, Hermitian and non-Hermitiana. We find analytically as frequencies where the spectral density of the scattered field disappears and show that they depend on the gain and loss parameter. This demonstrates the non-Hermitian *Wolf* effect. In addition, the scattered radiation has a phase change of $\pi/2$ and there is also a difference between the maximums and parameters in different configurations: Hermitian and non-Hermitian

Keywords: Spectral density; Partially coherent light; Wolf effect.

Sumário

1	Introdução	2
2	Fotônica não-Hermitiana	5
2.1	Mecânica Quântica Não-Hermitiana	5
2.1.1	Sistema Aberto e Fechado	8
2.2	Aplicações em Óptica	10
3	Óptica Estatística	16
3.1	Onda Escalar	16
3.2	Processo Aleatório	17
3.2.1	Ergodicidade	20
3.3	Lei da interferência espectral e o grau de coerência espectral	21
3.4	Efeito de coerência em espalhamento	23
3.5	Equivalência entre radiação espectral e densidade espectral	27
3.6	Efeito <i>Wolf</i>	29
4	Efeito Wolf no espalhamento de luz por materiais não-Hermitianos	32
4.1	Material não-Hermitiano	32
4.2	Resultados	35
4.2.1	Mudanças Espectrais Hermitianas	38
4.2.2	Mudanças Espectrais não-Hermitianas	40
5	Conclusões e perspectivas	43

Capítulo 1

Introdução

No início do século XX, o físico Max Planck revolucionou a física com seu trabalho teórico sobre a radiação de corpo negro. Tal feito foi responsável pelo início da mecânica quântica. Vários outros físicos como L. de Broglie e W. R. Hamilton, começaram a desenvolver ideias de conexão entre a óptica e a mecânica clássica. Essa conexão entre a óptica e a mecânica clássica impulsionou Schrödinger a formular sua equação de onda para a mecânica quântica. Esta formulação só foi possível pelo fato de que já se havia o conhecimento da dualidade onda-partícula, devido às previsões feitas por L. de Broglie para a matéria [1].

A equação de Schrödinger é de fundamental importância na mecânica quântica, podendo até ser comparada com a importância das três Leis de Newton da mecânica clássica. Com esta equação, podemos calcular os autovalores e autovetores de um determinado Hamiltoniano de um sistema físico. Um dos axiomas da mecânica quântica afirma que o espectro (conjunto de autovalores) é real quando seu Hamiltoniano for Hermitiano [2, 3].

Com o passar do tempo, a teoria quântica foi se expandindo e, com isso, surgiram duas simetrias fundamentais para o estudo de Hamiltonianos. Claramente existem outras simetrias tão importantes quanto às citadas, mas vamos nos limitar ao estudo de apenas duas: paridade e reversão temporal. A paridade (reflexão espacial) pode ser representada pelo operador P . A reversão temporal é representada pelo símbolo T [3]. As propriedades básicas desses operadores, necessárias para a análise dos sistemas descritos nesta dissertação, será revisada no Capítulo 2.

Uns dos precursores para o avanço de um ramo da mecânica quântica, conhecida

hoje como mecânica quântica PT-simétrica, foram Bessis e J. Zinn-Justin. Em conversa privada com Bender e Boettcher, surgiu a curiosidade sobre uma nova possibilidade da existência de Hamiltonianos não-Hermitianos com espectro real. Diante deste desafio, Bender e Boettcher publicaram em 1998 um trabalho onde exploraram as propriedades de uma classe de Hamiltonianos possuindo invariância nas operações de paridade P e reversão temporal T [4]. Os autores forneceram evidências de que tal classe geravam autovalores reais, positivos e discretos, mesmo não sendo Hermitianos. Entretanto, seria necessária a imposição da condição de simetria PT [4–10]. Mais tarde, foi demonstrado que a classe de Hamiltonianos PT-simétricos é um caso particular de operadores pseudo-Hermitianos [11, 12]. A contribuição de Bender e Boettcher permitiu o avanço de várias áreas da física, não somente na mecânica quântica, como a óptica, física nuclear, estado sólido, supercondutividade, supersimetria, condensado de Bose-Einstein e eletromagnetismo [13, 14].

Com a analogia existente entre a equação de onda paraxial da óptica e a equação de Schrodinger dependente do tempo, inúmeros fenômenos quânticos poderiam ser simulados em condições de laboratório de uma forma clássica [15]. Desde os primeiros trabalhos de [16] juntamente com [17] as áreas da óptica e fotônica vêm crescendo rapidamente durante os últimos anos. Isso se deve ao aumento incrível de possibilidades teóricas e experimentais no qual podemos criar materiais que tenham as características e condições da base da simetria PT. Em óptica, postulamos que o índice de refração deve possuir as condições impostas pelos operadores paridade e reversão temporal [18]. Ao aplicar as definições, podemos ampliar o estudo em várias ramificações, como por exemplo, dinâmicas de feixes [19, 20], estruturas com simetria PT [21], espalhamento acústico [22], espalhamento de luz [23, 24], espalhamento direcional invisível [18], propriedades de espalhamento em objetos PT-simétricos [25], “*laser absorber*” PT-simétrico [26], entre outras aplicações [27, 28].

Nesta dissertação estamos interessados em estudar o espalhamento de luz policromática por um material não-Hermitiano. Quando mencionamos o termo *luz policromática* queremos dizer que a luz possui vários tipos de frequências, ou seja várias “cores”. O espalhamento de luz foi bastante estudado por diversos autores ao longo do tempo [14, 29–32]. Utilizamos essas referências para obter informações sobre o campo espalhado, através do cálculo da densidade espectral cruzada e da densidade espectral. Tais conceitos serão abordados e definidos nos próximos capítulos.

Em 1987, o físico Emil Wolf estudou o espectro da luz emitida por fontes estacionárias e foi observado um fenômeno de mudança no espectro, conhecido como *red shift* para uma frequência menor e *blue shift* para uma frequência maior comparada com a frequência central da fonte. Esse deslocamento da frequência central do campo espalhado tem origem nas correlações existentes na fonte e ficou conhecido como efeito *Wolf* [33–35]. Diante desses resultados, surge a pergunta: Como a frequência central do campo espalhado depende das propriedades não-Hermitianas do espalhador? Discutiremos nesta dissertação, o espalhamento de luz policromática por materiais PT-simétricos, onde analisamos casos Hermitianos e não-Hermitianos.

A estrutura da dissertação está organizada da seguinte forma: No capítulo 2 mostramos a fotônica em sistema PT simétrico, onde fizemos brevemente a ligação entre a mecânica quântica e a mecânica quântica não hermitiana, e suas aplicações em sistemas ópticos no qual veremos novos efeitos da óptica. No capítulo 3 foi feita uma abordagem sobre os conceitos principais de óptica estatística e resultados principais que utilizaremos no decorrer desta dissertação. Introduziremos os conceitos de densidade espectral, densidade espectral cruzada, radiação espectral e efeito *Wolf*. No capítulo 4 mostraremos a teoria da óptica estatística para determinar a densidade espectral no sistema *PT* simétrico e, portanto, observar a mudança no espectro, ou seja, o efeito *Wolf* em ambos os sistemas, analisar o tamanho da esfera em relação a frequência central e mudando o parâmetro de ganho e perda vemos uma diferença na radiação espalhada. E por fim, no capítulo 5 falaremos sobre a conclusão do trabalho realizado.

Capítulo 2

Fotônica não-Hermitiana

Neste capítulo 2 falaremos dos conceitos básicos da simetria PT e alguns trabalhos que estão relacionados à óptica. Iniciamos com o básico da mecânica quântica usual e a teoria quântica não-Hermitiana, seção 2.1, que será necessária para entendermos melhor o trabalho feito. Também, na seção 2.2, mencionamos alguns resultados de trabalhos que foram importantes para o desenvolvimento da pesquisa.

2.1 Mecânica Quântica Não-Hermitiana

Quando estudamos a teoria quântica usual, de modo geral, usamos o Hamiltoniano do sistema para encontrar seus autovalores e seus autovetores. Para encontrá-los utilizamos a equação de Schrödinger, para fins de facilidade nos cálculos, usaremos a equação de Schrödinger independente do tempo, que pode ser escrita na forma

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad (2.1)$$

onde E é o autovalor do Hamiltoniano, que podemos chamar de energia, e $|\psi\rangle$ é um autovetor do Hamiltoniano. Para que o Hamiltoniano tenha a energia real, é dito que ele seja Hermitiano. Para sabermos se é ou não-Hermitiano, utilizamos a definição de hermiticidade $H^\dagger = H$, onde \dagger representa a transporta conjugada. Então, diante disso afirmamos que o autovalor é real, discreto e positivo.

No momento já sabemos sobre a hermiticidade de um Hamiltoniano, agora partiremos para as simetrias. Ao estudarmos simetrias na mecânica quântica vimos que existem dois tipos de operadores que são denominados de paridade e reversão temporal, P e T respectivamente. Tais operadores tem a finalidade de operar em um Hamiltoniano para

adquirir as informações do determinado sistema físico que estamos estudando. O operador linear paridade, P , tem como função principal a reflexão espacial em torno de um ponto, de modo que se aplicarmos a paridade no operador posição, obtemos a posição oposta

$$P^{-1}\hat{x}P = -\hat{x}, \quad (2.2)$$

além disso o operador momento, definido como $\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$, também sofrerá mudança de

$$P^{-1}\hat{p}P = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{d(-x)} = -\hat{p}, \quad (2.3)$$

entretanto as constantes por exemplo i , não são afetadas por este operador. Em outro caso, temos o operador anti-linear reverso temporal, T , este nome não é muito adequado a propriedade do operador, podemos chamar de movimento reverso. Tal operador aplicado a uma combinação linear, resulta

$$T(a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle) = a^*T|\alpha\rangle + b^*T|\beta\rangle \quad (2.4)$$

caso aplicarmos T nos operadores posição e momento, como fizemos com o operador paridade, temos que

$$T^{-1}\hat{x}T = \hat{x} \quad (2.5)$$

e

$$T^{-1}\hat{p}T = -\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \quad (2.6)$$

como vimos anteriormente a constante se torna $a, b \rightarrow a^*, b^*$.

Um dos estudos iniciais de hamiltonianos não hermitianos foi Bender e Boettcher em [4]. Na literatura de modo geral a mecânica quântica usual nos mostra que os autovalores de um Hamiltoniano Hermitiano é necessário que seja real, discreto, entretanto existem autovalores que são reais, discretos cujo Hamiltoniano não é Hermitiano. Essa classe de Hamiltonianos são conhecidos como Hamiltonianos PT simétricos. Para determinarmos se um Hamiltoniano tem simetria PT basta calcularmos o comutador

$$[PT, H] = PTH - HPT = H^{PT}. \quad (2.7)$$

ou para melhorar o entendimento, podemos analisar de outra maneira, de tal modo que

$$H(x, p) = H^*(-x, -p) \quad (2.8)$$

veja, por exemplo, que um Hamiltoniano seja descrito por $H = p^2 + x^2 + ix^3$, verificando de forma rápida, $x \rightarrow -x$, $p \rightarrow -p$ e $i \rightarrow -i$ vemos que é PT simétrico e possui autovalor

real e positivo ao contrario do $H = p^2 + ix^3 + x$, fazendo a mesma análise vemos que não é PT simétrico e tem autovalores inteiramente complexos [5].

Uma das primeiras classes de Hamiltonianos com simetria PT estudada por Bender e Boettcher é descrita por

$$H = p^2 + x^2(ix)^\epsilon, \quad (2.9)$$

onde \hat{p} e \hat{x} são os operadores momento e posição respectivamente, e ϵ é um número real. Esta relação é extremamente importante e interessante, pois dessa equação 2.9 ramifica vários outros Hamiltonianos. Para examinar a equação de Schrödinger foi resolvida pelo método numérico e assintótico [4]. É mostrado na figura 2.1 a região em que $\epsilon \geq 0$ todos os autovalores são reais, discretos e infinitos. Esta região é a quebra de simetria. Em $\epsilon = 0$ ocorre a transição de fase, onde temos os autovalores do oscilador harmônico. E quando $-1 < \epsilon < 0$ temos autovalores reais finitos e infinitos autovalores complexos, esta região é chamada de quebra espontânea de simetria PT e ainda para $\epsilon < -1$ obtemos apenas autovalores puramente imaginários [4, 5].

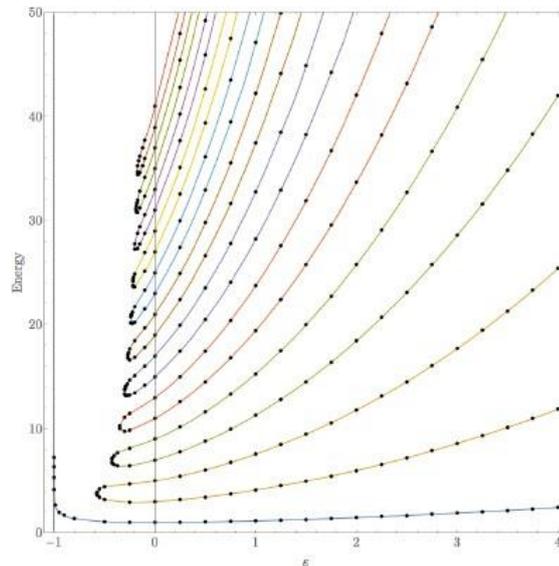


Figura 2.1: Os autovalores da equação 2.9 são plotados no gráfico. Na quebra de simetria ($\epsilon \geq 0$) os autovetores são todos reais. Em $\epsilon = 0$ os autovalores são os do oscilador harmônico. E para $-1 < \epsilon < 0$ os autovalores são mesclados entre real e complexo. Para $\epsilon < -1$ não tem autovalores reais. Fonte [4, 5]

2.1.1 Sistema Aberto e Fechado

As equações dominantes em um sistema físico podem ser derivadas de um Hamiltoniano. Contudo, precisamos das condições de contorno para ter a descrição de tal sistema. Dependendo do sistema podemos ter sistemas abertos e sistemas fechados os quais também podem ser chamados de sistemas isolados e não-isolados.

Um sistema fechado é uma idealização pois a evolução temporal não é influenciada pelo meio, isto não é possível ser verificado em laboratórios. Para ser visto experimentalmente requer que o sistema seja aberto, tal como um experimento de espalhamento. Um sistema aberto está sujeito a influencia exterior porque a energia e/ou fluxo de probabilidade do ambiente pode fluir para dentro e/ou para fora do sistema.

Vamos pensar em um sistema não-isolado e dentro desse tem dois subsistemas. O primeiro tem um fluxo de probabilidade diferente de zero e o outro subsistema tem o mesmo valor do fluxo de probabilidade porém, nesse, é aplicado o operador reverso temporal, ou seja, se o primeiro sistema ganha fluxo de probabilidade/energia o segundo perde fluxo de probabilidade/energia ou vice-versa. Embora o sistema seja PT simétrico não tem uma rede de ganho e perda.

A base da simetria PT tem como definição básica a estrutura de ganho e perda de energia ou fluxo de probabilidade [5]. Tais operadores mencionados tem funções próprias em aplicações em sistemas físicos. O operador T acima tem a função de trocar um sistema de perda em ganho e de ganho em perda e o operador paridade P reflete a posição do objeto.

Apesar de não ter uma rede de fluxo, se conseguimos acoplar os dois subsistemas então a probabilidade do subsistema com ganho pode fluir harmonicamente para dentro do subsistema de perda e é possível pois o sistema está em equilíbrio.

Para entendermos melhor tal subsistema, considere o Hamiltoniano

$$H = [a + ib]$$

onde a e b são contantes. A probabilidade é dada por $P = \psi\psi^*$, onde ψ é a solução da equação de Schrodinger, então a probabilidade é

$$P = |A|^2 e^{2bt}, \quad (2.10)$$

A é uma constante. A probabilidade cresce exponencialmente quando $b > 0$ e decai quando $b < 0$. Se fizermos uma cópia do subsistema aplicando o operador reverso temporal neste

Hamiltoniano conseguimos

$$H_t = \begin{bmatrix} a - ib \end{bmatrix}$$

novamente calculando a probabilidade do Hamiltoniano acima, obtemos que

$$P = |B|^2 e^{-2bt} \quad (2.11)$$

B é uma constante. Note que é o oposto da outra probabilidade que calculamos, para $b > 0$ decai e $b < 0$ cresce com o tempo t , combinando ambos os sistemas, H e H_t , é descrito pelo Hamiltoniano 2×2 H_c

$$H_c = \begin{bmatrix} a + ib & 0 \\ 0 & a - ib \end{bmatrix}$$

percebe-se que este não tem o acoplamento, identificamos isso pelos zeros na linha secundária da matriz H_c . A matriz tem um subsistema de ganho e outro com subsistema de perda, porém não à uma rede de fluxo. Note que a H_c não é Hermitiano pois, $H_c^\dagger \neq H_c$, a \dagger significa a transposta conjugada da matriz, porém se aplicarmos a propriedade da simetria PT descrita pela equação 2.7, observamos que ela é invariante nos operadores paridade e reverso temporal. O operador paridade é uma matriz da forma de 2×2

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema acima não está em equilíbrio por causa dos subsistemas inseridos, um deles está crescendo com o tempo e outro está decaindo com o tempo. Para colocarmos em equilíbrio temos que acoplar da forma

$$H_a = \begin{bmatrix} a + ib & g \\ g & a - ib \end{bmatrix}$$

esse sistema está com os mesmos subsistemas descritos anteriormente e ainda é PT simétrico. Calculando os autovalores do Hamiltoniano

$$E_{\pm} = a \pm \sqrt{g^2 - b^2}. \quad (2.12)$$

Para o autovalor temos dois casos: para $g^2 < b^2$ os autovalores são complexos e não estão em equilíbrio, esta região é chamada de quebra de simetria PT e para $g^2 > b^2$ os autovalores oscilam, essa região é chamada de sem quebra de simetria PT [5].

2.2 Aplicações em Óptica

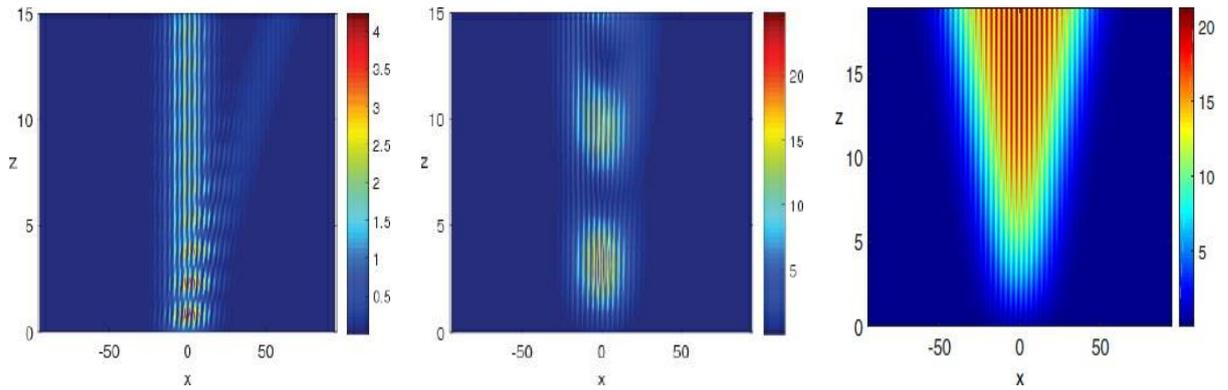
A junção entre a mecânica quântica não-Hermitiana e a óptica começou aderindo a aproximação paraxial, o resultado da aproximação paraxial de uma onda eletromagnética é praticamente idêntica a equação dependente do tempo de Schrodinger, no entanto é necessário outra interpretação. Tal analogia vem do fato de que em óptica iremos usar o índice de refração ao invés do potencial da equação de Schrodinger, portanto combinando com a óptica teremos o índice de refração no qual compõe de um fator real e imaginário, e com isso ganhos e perdas os quais nos fornecem novos sistemas ópticos e resultados interessantes. Devido a essa proximidade das equações podemos ter uma classe de fenômenos quânticos produzidos no laboratório.

A primeira aplicação em óptica, por exemplo, foi em um meio birrefringente, ou seja, onde tem duas refrações, uma ordinária e outra extraordinária, como é mostrado na figura 2.2a para a equação $\nu(x) = \nu_0(\cos(2x) + i\lambda \sin(2x))$, onde $\lambda = 0.9$, este valor é antes da quebra de simetria, contudo satisfaz a equação de Helmholtz. A equação é PT Simétrico, e ao aplicar a equação 2.7 conseguimos $PT\nu(x)(PT)^{-1} = \nu(x)$, ou podemos usar o seguinte argumento, $\nu(x) = \nu^*(-x)$, que também satisfaz a condição de ser PT simétrico, e mostrando de fato que é PT simétrico [5, 19]. Isso implica que temos ganho e perda nesse sistema.

A potência do feixe oscila no eixo Z , como é mostrado na figura 2.2b, entretanto para uma leve mudança no parâmetro, onde não consideramos mais a birrefringência mas sim a intensidade de oscilação. Ainda considerando $\lambda = 0.9$.

O ponto de quebra de simetria é quando $\lambda = 1$, a potência total cresce linearmente com Z como é mostrado na figura 2.2c. Após a quebra de simetria, a amplitude do feixe fica saturada depois de um aumento inicial e o crescimento linear é devido a propagação linear do feixe [5, 19].

Outro trabalho interessante produzido por [36], descreve uma função potencial de um determinado material na qual tem uma simetria PT . Tal potencial deve satisfazer a condição $(PT)V(\mathbf{r})(PT)^{-1} = V(\mathbf{r})$ portanto, considerando $V(\mathbf{r}) = v(x)\delta(y)\delta(y)$, onde



(a) Potencial óptico descrito por $v(x)$ com $\lambda = 0.9$, mostrando uma bifurcação no feixe inicial [5, 19].
 (b) Diferente parâmetro, ainda com $\lambda = 0.9$, o feixe não faz bifurcações mas mostra oscilações [5, 19].
 (c) Quebra de simetria em $\lambda = 1$ exibindo espalhamento do feixe e saturação [5, 19].

Figura 2.2: Fonte [5, 19]

$v(x)$ é uma função periódica sendo da forma

$$v(x) = \frac{1}{2} + v_r \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + iv_i \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right), \quad (2.13)$$

onde a é o período e δ é a função delta de Dirac. Esse potencial pode ser reescrito da forma de série de Fourier, de modo a obtemos

$$v(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{2\pi i x n}{a}\right) \quad (2.14)$$

onde os coeficientes de c_n são reais e positivos e dados por $c_{\pm 1} = (v_r \pm v_i)/2$ e $c_0 = 1/2$. Também é considerado o grau de coerência complexo que tem a forma de uma Gaussiana dada por

$$\mu^{(i)}(\rho_1, \rho_2; \omega) = \exp\left[-\frac{(\rho_2 - \rho_1)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (2.15)$$

Com estas equações que descrevem o potencial e o grau de coerência espectral, é possível calcularmos a densidade espectral [29, 36], que será definida mais a frente, assim temos

$$S^{(\infty)}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{L\sigma\sqrt{2\pi}S^{(i)}(\omega)}{4r^2} \left\{ \exp\left[\frac{-(k\sigma \cos \theta)^2}{2}\right] + (v_r - v_i)^2 \exp\left[\frac{-\sigma^2(k \cos \theta + 2\pi/a)^2}{2}\right] + (v_r + v_i)^2 \exp\left[\frac{-\sigma^2(k \cos \theta - 2\pi/a)^2}{2}\right] \right\}, \quad (2.16)$$

onde $\theta = \arccos(\mathbf{s} \cdot \mathbf{x})$. Assumindo que a densidade espectral incidente tem a forma Gaussiana $S^{(i)}(\omega) = S_0 \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\delta^2}\right]$, onde ω_0 é a frequência central e δ é a largura e S_0 é a amplitude espectral. Portanto a figura 2.3 é dada pela 2.16 junto com $S^{(i)}(\omega)$. São mostrados três casos diferentes para a densidade espectral normalizada com radiação

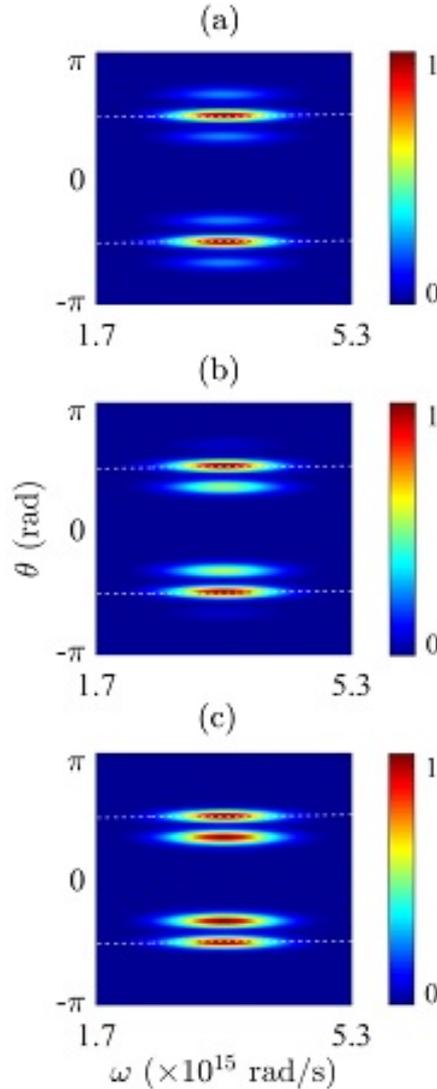


Figura 2.3: Densidade espectral espalhada normalizada da radiação parcialmente coerente com $\sigma = 20 \times (1/k)$ e $v_r = 0.5$. (a) Espalhamento Hermitiano $v_i = 0$, (b) espalhamento não-Hermitiano $v_i = 0.25$ e (c) $v_i = 0.5$. parâmetro usados: $\omega_0 = 3.54 \times 10^{15}$ rad/s, $\delta = 0.1\omega_0$, $a = 2\lambda$ e as linhas tracejadas são fixas em $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$. Fonte [36]

parcialmente coerente, com $\sigma = 20 \times (1/k)$. (a) mostra um comportamento Hermitiano, ou seja, $v_i = 0$. Para (b) o caso não-Hermitiano, $v_i = 0.25$ e (c) com $v_i = 0.5$. Isso com a parte real $v_r = 0.5$, o espectro incidente descrito pela equação $S^{(i)}$ com $\omega_0 =$

$3.54 \times 10^{15} \text{ rad/s}$ ($\lambda_0 = 532 \text{ nm}$), $\delta = 0.1\omega_0$ e $a = 2\lambda_0$, e a linha tracejada é o ângulo fixado em $\theta = \pm\pi/2$ [36]. Note que, quando aumentamos o termo da parte imaginária, v_i , aparece padrão de difração.

Da mesma forma, produzido por [24], foi utilizado potencial espalhado dado por

$$F(\mathbf{r}, \omega) = \frac{Ak^2}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) (1 + i\beta \cdot \mathbf{r}) \quad (2.17)$$

conseguimos ver que satisfaz a condição a simetria PT , $F^*(-\mathbf{r}, \omega) = F(\mathbf{r}, \omega)$. Assim, usando da equação da densidade espectral que pode ser calculada partindo da transformada de fourier de F , conseguimos a transformada de fourier do potencial

$$\tilde{F}(\mathbf{K}, \omega) = Ak^2 \exp\left(-\frac{|\mathbf{K}|^2 \sigma^2}{2}\right) (1 + \sigma^2 \vec{\beta} \cdot \mathbf{K}), \quad (2.18)$$

temos que a densidade espectral após normalizações, resulta em

$$S_\beta(\theta, \omega) = \exp\left[-\frac{(\omega - 1)^2}{2\Gamma_0^2} - 4\sigma^2\omega^2 \sin^2\frac{\theta}{2}\right] \left(\omega^2 - 2\beta\sigma^2\omega^3 \sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2. \quad (2.19)$$

Plotando o gráfico da equação 2.19 e usando os parâmetros iguais a [31], exceto $\Gamma_0 = 0.01$, e variando valores de β . A figura 2.4 tem três valores diferentes para β , para o caso em que $\beta = 0$ é dito como Hermitiano, se $\beta \neq 0$ é dito não-Hermitiano, como nos outros dois valores de beta. O espectro é modificado devido ao ganho e perda nos dois outros valores de beta. A linha tracejada vermelha temos o $\beta = 0.03079$ e a linha tracejada azul $\beta = 0.03054$, vemos que existem dois pontos críticos, ignorando o ponto mínimo $S_\beta = 0$, em ambos dos casos.

Outro trabalho fundamental para a pesquisa foi [23], cujo o objetivo é calcular a densidade espectral de uma determinada função potencial $F(\mathbf{r}, \omega) = \delta(y)\delta(z)[(\sigma + i\gamma)\delta(x - a) + (\sigma - i\gamma)\delta(x + a)]$, onde σ e γ são parâmetros reais positivos e podem depender da frequência. Assumindo o grau de coerência da forma em que seja parcialmente coerente $\mu^{(i)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \exp\left[-\frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{2\Delta^2}\right] \exp[ik\hat{s}_0 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]$. Conseguimos portanto a densidade espectral da função potencial

$$S^{(\infty)} = S^{(i)}(\omega) \frac{2(\sigma^2 + \gamma^2)}{r^2} \left\{ 1 + e^{-\frac{2a}{\Delta^2}} \left[\left(\frac{\sigma^2 - \gamma^2}{\sigma^2 + \gamma^2} \right) \cos(2kas_x) + \left(\frac{2\sigma\gamma}{\sigma^2 + \gamma^2} \right) \sin(2kas_x) \right] \right\} \quad (2.20)$$

onde $s_x = \sin\theta \cos\phi$ e $\hat{s}_0 = \hat{z}$, ou seja, o campo se propaga na direção z . Para obtermos o caso Hermitiano é só considerar $\gamma = 0$, já o caso não-Hermitiano temos que atribuir

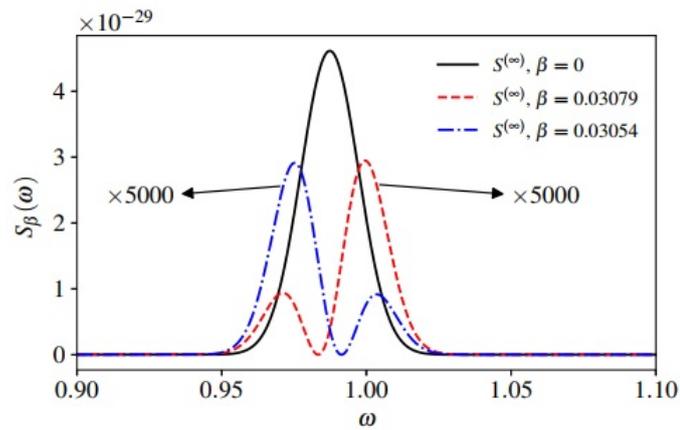


Figura 2.4: A frequência central é descontínua em S_β máximo. O parâmetro β aumenta, o espectro modifica e aparece uma dupla banda de frequência de forma que os máximos globais e locais quando β passa por um ponto crítico. Fonte [24]

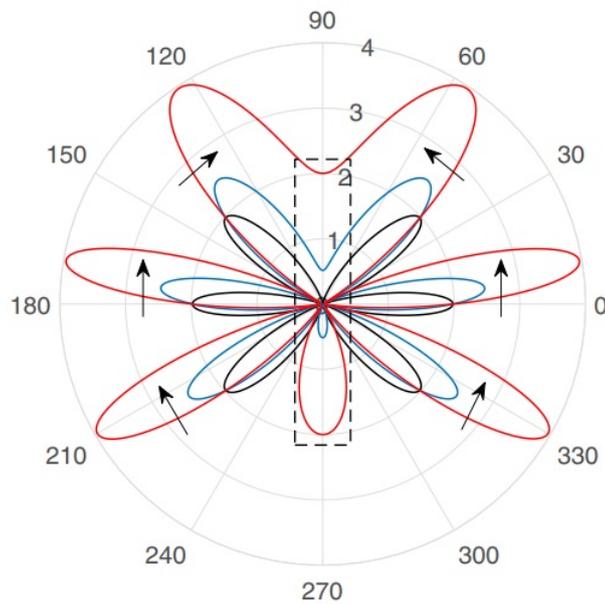


Figura 2.5: A linha preta descrevem o espalhamento Hermitiano. A linha azul e vermelha retrata o espalhamento não-Hermitiano. O espalhador está onde as vibrações são correlacionadas. As setas preta nos mostram o sentido de rotação da franja de interferências conforme o aumento de γ . Fonte [23]

valores para o fator de ganho e perda, ou seja, o γ . Assumindo três valores para γ . A figura 2.5 mostra que quando $\gamma = 0$, linha preta, descreve o caso Hermitiano. Para a linha azul, temos $\gamma = 0.5$, isto é um caso não-Hermitiano. E linha vermelha, o $\gamma = 1$, temos outro caso não Hermitiano. Isto descreve dois efeitos, primeiro efeito é a intensidade máxima rotaciona com o angulo $\theta = \frac{\pi}{2}$ com o aumento de γ . Apontado pela setas pretas. Segundo efeito, nos fornece uma nova radiação para os casos nos hermitianos em diferentes ângulos.

Capítulo 3

Óptica Estatística

Abordaremos, neste capítulo, os conceitos fundamentais para a teoria de espalhamento. Definimos processos aleatórios de modo geral, funções de autocorrelação, grau de coerência partindo da lei espectral, a relação entre radiação e densidade espectral e, por fim, o efeito *Wolf*.

3.1 Onda Escalar

Para da inicio a discussão sobre óptica vamos ignorar os efeitos da polarização dos campos de tal forma que nosso sistema possa ser escrito como uma função escalar $u(\mathbf{r}, t)$ no qual possui todas as informações e satisfaz a equação de onda

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo. Uma solução simples para a equação de onda é

$$u(\mathbf{r}, t) = u_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (3.2)$$

onde ω , frequência, e u_0 , amplitude, são constantes reais e \vec{k} indica a direção da propagação do campo. Pode-se obter uma solução com o fator de fase apenas adicionando uma constante dentro do cosseno onde podemos representa por ϕ

$$u(\mathbf{r}, t) = u_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi). \quad (3.3)$$

A constante ϕ é conhecida como fator de fase e sua função é mudar o valor de $u(\mathbf{r}, t)$ no tempo ou posição inicial.

É bem mais conveniente escrevermos o campo na forma complexa, ou seja, utilizarmos os números complexos para reescrevermos o campo. Dessa maneira, conseguimos escrever

$$u(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [U_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\omega t}] = \text{Re} [U(\mathbf{r}, t)] \quad (3.4)$$

onde temos um número complexo $U_0 = u_0 e^{-i\phi}$. A função $U(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{C}$ é a representação complexa do campo $u(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{R}$.

Vamos analisar o campo quando a luz é policromática. Para facilitar nossos cálculos, vamos assumir que $\phi = 0$ e temos nota que a equação de onda é linear, conseguimos somar uma série de campos com posições fixas no espaço, assim para N campos

$$U(t) = U_1 e^{-\omega_1 t} + U_2 e^{-\omega_2 t} + \dots + U_N e^{-\omega_N t}. \quad (3.5)$$

Para o caso em que $N \rightarrow \infty$ temos o caso contínuo

$$U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.6)$$

onde $u(\omega)$ é

$$u(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{i\omega t} dt. \quad (3.7)$$

Removendo as frequências negativas e dobrando a amplitude, obtemos que

$$U(t) = 2 \int_0^{\infty} u(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (3.8)$$

Esta equação é conhecida como sinal analítico de $u(t)$ como veremos, a definição, ainda neste capítulo.

3.2 Processo Aleatório

Ao estudarmos óptica estatística necessitamos entender alguns outros assuntos. O ramo que iremos abordar é conhecido como teoria de processos aleatórios ou teoria de processos estocásticos.

Iniciaremos a discussão com o processo aleatório. Suponha que a medida do campo $x(t)$ seja diferente para cada vez que medimos, ou seja, a cada medida feita terá um resultado diferente do anterior. Sejam feitas as amostras dos campos $^1x(t), ^2x(t), \dots, ^Nx(t)$, a junção das medições é chamada de ensemble de realizações. Somando todas as quantidade de campos que conseguimos obter e deixando que o limite seja $N \rightarrow \infty$

$$\langle x(t) \rangle_e = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(t), \quad (3.9)$$

a equação 3.9 é a forma da média de ensemble do campo $x(t)$.

Outra média que pode ser aplicada em funções determinísticas é a média temporal. Se por exemplo, quiséssemos saber a posição de uma partícula, com função $x(t)$, no decorrer de um tempo t . De modo que, podemos definir a média temporal como

$$\langle x(t) \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt. \quad (3.10)$$

Veja que a média temporal $\langle x(t) \rangle_t$ não depende de t . Conseguimos também aplicar a média temporal na amostra do ensemble

$$\langle x(t) \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt. \quad (3.11)$$

Podemos ter outra definição similar do valor médio se determinarmos uma função $F[x(t)]$

$$\langle F[x(t)] \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F[x(t)] dt. \quad (3.12)$$

Outra forma de escrever a média de ensemble na qual introduzimos uma outra quantidade, a densidade de probabilidade $p(x, t)$. A quantidade $p(x, t)dx$ representa a probabilidade do campo aleatória variável que irá tomar um valor entre $(x, x + dx)$ no tempo. A média de ensemble de $x(t)$ é escrita na forma de uma integral da seguinte maneira

$$\langle x(t) \rangle_e = \int xp(x, t) dx, \quad (3.13)$$

apesar de x depender do tempo do lado esquerdo da equação, a variável x do lado direito da equação é independente do tempo. Como foi feito na média temporal vamos generalizar a média de ensemble, esta generalização segue o mesmo padrão da equação anterior, e assim

$$\langle F[x(t)] \rangle_e = \int F(x)p(x, t) dx. \quad (3.14)$$

Observando a equação 3.9, partindo dela definiremos a função de autocorrelação. Se fixarmos dois tempos diferentes para cada medida de $x(t)$ e dividirmos por $N \rightarrow \infty$, conseguimos tal propriedade

$$\left(\frac{{}^1x(t_1){}^1x(t_2) + {}^2x(t_1){}^2x(t_2) + \dots + {}^Nx(t_1){}^Nx(t_2)}{N} \right) = \langle x(t_1)x(t_2) \rangle, \quad (3.15)$$

assim, a média do produto de dois campos em tempos diferentes é chamada de função de autocorrelação na qual pertence ao conjunto dos reais ($\in \mathbb{R}$).

Até o momento consideramos apenas um campo real, onde $x(t) \in \mathbb{R}$. É mais conveniente escrevemos o campo óptico pelo sinal analítico, $X(t)$, pois de fato é um resultado

mais geral para quaisquer campos. O sinal analítico da função $x(t)$ é uma função que pertence aos complexos e é definida por

$$X(t) = 2 \int_0^{\infty} x(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (3.16)$$

Assim somos capazes de reescrever a media de ensemble, que foi definida pelas equações 3.9 e 3.15, para o sinal analítico

$$\langle X(t) \rangle_e = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X(t), \quad (3.17)$$

$$\left(\frac{{}^1 X^*(t_1) X(t_2) + {}^2 X^*(t_1) X(t_2) + \dots + {}^N X^*(t_1) X(t_2)}{N} \right) = \langle X^*(t_1) X(t_2) \rangle, \quad (3.18)$$

onde 3.17 é a média do ensemble no conjunto complexo e 3.18 é a função de autocorrelação pertencente aos complexos ($\in \mathbb{C}$). Da mesma maneira que podemos representar o sinal analítico como a média de ensemble, conseguimos também representar a média de ensemble pela probabilidade, que é definida por

$$\langle X(t) \rangle_e = \int X p(X, t) d^2 x, \quad (3.19)$$

de forma análoga

$$\langle X^*(t_1) X(t_2) \rangle_e = \int X^*(t_1) X(t_2) p(X(t_1), t_1, X(t_2), t_2) d^2 X(t_1) d^2 X(t_2), \quad (3.20)$$

onde a diferencial elevada ao quadrado resulta do fato de que temos uma área no plano real, imaginário.

O processo aleatório estacionário pode ser dividido em dois tipos: Processo aleatório estacionário no sentido estrito, conhecido também como processo estritamente estacionário, e processo aleatório estacionário no sentido amplo.

Considere um processo estocástico, ou seja um processo aleatório, $U(t)$ que corresponde as condições

$$p(U_1, t_1 + \tau, U_2, t_2 + \tau, \dots, U_N, t_N + \tau) = p(U_1, t_1, U_2, t_2, \dots, U_N, t_N) \quad (3.21)$$

onde $U_1 = U(t_1)$ e $U_2 = U(t_2)$. Note que são N condições e que todas elas devem ser satisfeitas para todos os valores de τ . Se um processo estocástico satisfaz as condições preditas então dizemos que é um processo estritamente estacionário.

A segunda condição para ser estritamente estacionário é ter a média do ensemble não dependente do tempo τ

$$\langle U(t + \tau) \rangle_e = \int U p(U, t + \tau) dU = \int U p(U, t) dU = \langle U(t) \rangle_e \quad (3.22)$$

para todos os valores de τ . A última condição é o fato de que a função de autocorrelação seja função apenas da diferença entre os tempos

$$R(t_1, t_2) = \langle U^*(t_1)U(t_2) \rangle_e = f(t_2 - t_1) \quad (3.23)$$

onde f é um função na qual só depende da diferença entre os tempos.

O processo aleatório estacionário no sentido amplo é considerado quando satisfaz duas condições: $\langle U(t) \rangle_e$ não dependem do tempo e $\langle U^*(t_1)U(t_2) \rangle_e$ depende apenas da diferença entre os tempos. Perceba que todos os processos estritamente estacionários são também estacionários no sentido amplo, entretanto não podemos dizer o inverso pois, podemos obter processos que a densidade de probabilidade não seja invariante com o tempo e que seguem as outras condições mencionadas.

3.2.1 Ergodicidade

Como foi visto anteriormente existem dois tipos de médias. Uma envolve o ensemble de realizações e a outra uma função determinista do tempo. Para podermos mostrar que um processo estatisticamente é ergódico a seguinte condição deve ser válida

$$\langle F[x(t)] \rangle_t = \langle F[x(t)] \rangle_e \quad \forall k \quad (3.24)$$

e conseguimos generalizar se a função determinista possuir várias variáveis

$$\langle F[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)] \rangle_t = \langle F[x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)] \rangle_e. \quad (3.25)$$

De maneira geral, a equação 3.24 do lado esquerdo da equação depende da escolha do processo aleatório e é independente do tempo e do lado direito não depende de escolha e sim do ensemble e depende do tempo. Podemos definir como a média temporal, independente do tempo, em qualquer membro do ensemble deve ser igual a média do ensemble.

3.3 Lei da interferência espectral e o grau de coerência espectral

A formulação do espaço de frequência é definida pela quantidade da função de densidade cruzada $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ e esta deve obedecer a duas equações de Helmholtz

$$\nabla_1^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) + K^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = 0 \quad (3.26)$$

e

$$\nabla_2^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) + K^2 W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = 0, \quad (3.27)$$

onde ∇_1^2 e ∇_2^2 são os operadores laplacianos agindo em \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 , $k = \omega/c$ é o número de ondas no espaço livre e c é a velocidade da luz no vácuo [29].

Consideremos um campo ótico em um domínio no espaço livre. A densidade espectral cruzada do campo em qualquer par de pontos \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 pode ser expressa em série [29, 30]

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \sum_n \lambda_n(\omega) \phi_n^*(\mathbf{r}_1, \omega) \phi_n(\mathbf{r}_2, \omega) \quad (3.28)$$

integrando ambos os lados por $\int_D \phi_n(\mathbf{r}_1, \omega) d^3 r_1$, onde teremos

$$\int W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \phi_n(\mathbf{r}_1, \omega) d^3 r_1 = \lambda_n(\omega) \phi_n(\mathbf{r}_2, \omega), \quad (3.29)$$

note que, na equação 3.29 foi usada a propriedade da ortogonalidade $\int \phi_n^*(\mathbf{r}, \omega) \phi_m(\mathbf{r}, \omega) d^3 r = \delta_{nm}$ para $\delta = 1(n = m)$ e $\delta = 0(n \neq m)$.

Agora iremos construir a função de densidade espectral cruzada com um ensemble $\{U(\mathbf{r}, \omega)\}$ de função amostral $U(\mathbf{r}, \omega)$. Escrevendo a amostra do ensemble na forma

$$U(\mathbf{r}, \omega) = \sum_n a_n(\omega) \phi_n(\mathbf{r}, \omega), \quad (3.30)$$

onde $a_n(\omega)$ são coeficiente aleatórios que obedecem $\langle a_n^*(\omega) a_m(\omega) \rangle_\omega = \lambda_n(\omega) \delta_{nm}$. Considerando a função de correlação $\langle U^*(\mathbf{r}_1, \omega) U(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle_\omega$ e usando a equação 3.30 obtemos

$$\langle U^*(\mathbf{r}_1, \omega) U(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle_\omega = \sum_n \sum_m \langle a_n^*(\omega) a_m(\omega) \rangle \phi_n^*(\mathbf{r}_1, \omega) \phi_m(\mathbf{r}_2, \omega) \quad (3.31)$$

igualando $n = m$, dessa forma temos

$$\langle U^*(\mathbf{r}_1, \omega) U(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle_\omega = \sum_n \lambda_n(\omega) \phi_n^*(\mathbf{r}_1, \omega) \phi_n(\mathbf{r}_2, \omega) \quad (3.32)$$

vemos que as equações. 3.32 e 3.28 são iguais, então segue que

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \langle U^*(\mathbf{r}_1, \omega)U(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle_\omega \quad (3.33)$$

A amostra do ensemble também satisfaz a equação de Helmholtz,

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}, \omega) + k^2 U(\mathbf{r}, \omega) = 0. \quad (3.34)$$

Por consequência deste resultado, nosso ensemble pode depender da parte do espaço do campo de onda monocromático $V(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t)$, este fato contribui para o entendimento de vários resultados da teoria de segunda ordem no espaço de frequência. Um caso particular da Densidade Espectral Cruzada é a Densidade Espectral, isto acontece quando $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$

$$S(\mathbf{r}, \omega) \equiv W(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega), \quad (3.35)$$

também podemos escrever na forma da média do campo

$$S(\mathbf{r}, \omega) = \langle U^*(\mathbf{r}, \omega)U(\mathbf{r}, \omega) \rangle_\omega. \quad (3.36)$$

Determinaremos o grau de coerência complexo. Considere uma luz com qualquer estado de coerência incidindo no plano A com dois furos Q_1 e Q_2 . Representamos o campo nos furos pelo ensemble dependendo da frequência $\{U(Q_1, \omega)\}$ e $\{U(Q_2, \omega)\}$. Assumindo que os furos são suficientemente pequenos que a amplitude permaneça constante e, além disso, o ângulo de incidência e a difração são pequenos. O ponto P no plano B , permanece atrás do plano A , onde se encontra os furos, e é dado pelo ensemble $\{U(P, \omega)\}$

$$U(P, \omega) = k_1 U(Q_1, \omega) e^{ikR_1} + k_2 U(Q_2, \omega) e^{ikR_2} \quad (3.37)$$

onde K_1 e k_2 são fatores da difração nos furos, $R_1 = Q_1P$ e $R_2 = Q_2P$, são as distancia do plano até o ponto P . Substituindo 3.37 em 3.36 e, usando o fato que $W(Q_2, Q_1, \omega) = W^*(Q_1, Q_2, \omega)$ obtemos a equação da densidade espectral no ponto P

$$S(P, \omega) = |k_1|^2 S(Q_1, \omega) + |k_2|^2 S(Q_2, \omega) + 2Re\{k_1^* k_2 W(Q_1, Q_2, \omega) e^{-i\delta}\}, \quad (3.38)$$

onde $\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(R_1 - R_2)$. Nos casos em que $k_2 = 0$ e em outro caso $k_1 = 0$, teremos respectivamente que

$$|k_1|^2 S(Q_1, \omega) \equiv S^{(1)}(P, \omega) \quad (3.39a)$$

$$|k_2|^2 S(Q_2, \omega) \equiv S^{(2)}(P, \omega) \quad (3.39b)$$

representando em termo de $S^{(1)}(P, \omega)$ e $S^{(2)}(P, \omega)$, conseguimos um significado mais físico

$$S(P, \omega) = S^{(1)}(P, \omega) + S^{(2)}(P, \omega) + 2\sqrt{S^{(1)}(P, \omega)}\sqrt{S^{(2)}(P, \omega)}\text{Re}[\mu(Q_1, Q_2, \omega)e^{-i\delta}] \quad (3.40)$$

sendo que

$$\mu(Q_1, Q_2, \omega) = \frac{W(Q_1, Q_2, \omega)}{\sqrt{S^{(1)}(Q_1, \omega)}\sqrt{S^{(2)}(Q_2, \omega)}}. \quad (3.41)$$

A expressão 3.41 é o fator de normalização da função densidade espectral cruzada que é positivo e, portanto temos as condições de contorno de μ em um intervalo de 0 a 1, de modo que o valor absoluto

$$0 \leq |\mu(Q_1, Q_2, \omega)| \leq 1. \quad (3.42)$$

O valor de $|\mu| = 1$ dizemos que é correlação completa, outro valor $\mu = 0$ é a falta de correlação e quando μ está entre os seus valores absolutos dizemos que é parcialmente coerente.

3.4 Efeito de coerência em espalhamento

Existe diversos tipos conhecidos de espalhamento, por exemplo átomos, moléculas e partículas entre outras [29].

Considere um espalhamento de uma onda monocromática $V^{(i)}(\mathbf{r}, t) = U^{(i)}(\mathbf{r}, \omega)e^{-i\omega t}$ que incide em um espalhador linear cujo domínio é D .

Assumindo que a propriedade física média é caracterizada pelo índice de refração $n(\vec{r}, \omega)$. O campo total em um ponto \mathbf{r} , quando $U(\mathbf{r}, \omega)$ satisfaz a equação de Helmholtz 3.34, de modo que

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}, \omega) + k^2 n^2(\mathbf{r}, \omega) U(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad (3.43)$$

onde $k = \omega/c$ é o numero de onda livre associada com a frequência ω e c é a velocidade da luz no vácuo [29]. Uma outra forma de escrevemos a equação de Helmholtz é usando a constante de permissividade ε , assim

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}, \omega) + k^2 \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) U(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad (3.44)$$

onde foi usada a formula de Maxwell para $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = n^2(\mathbf{r}, \omega)$ [30]. De forma diferente, podemos reescrever a equação 3.44 com uma nova função

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}, \omega) + k^2 U(\mathbf{r}, \omega) = -4\pi F(\mathbf{r}, \omega) U(\mathbf{r}, \omega), \quad (3.45)$$

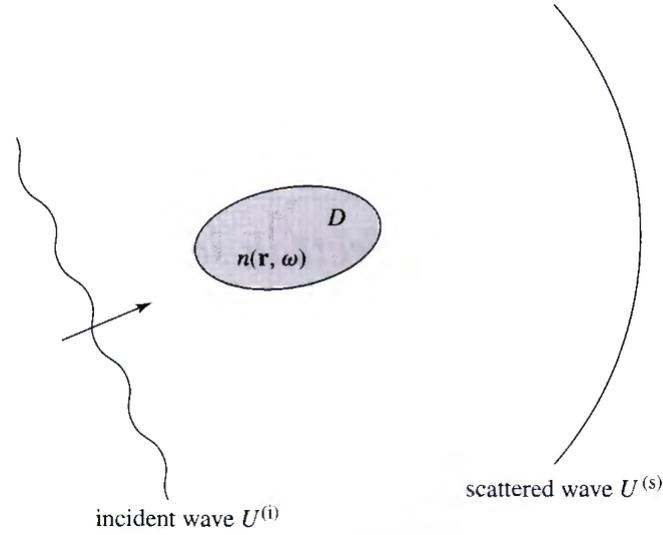


Figura 3.1: Representação de uma onda incidente $U^{(i)}$, de um espalhador com um índice de refração n e a onda espalhada $U^{(s)}$. Fonte: [29]

onde

$$F(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi} k^2 [n^2(\mathbf{r}, \omega) - 1] \quad (3.46)$$

ou

$$F(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi} k^2 [\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) - 1] \quad (3.47)$$

ambas as formas são chamadas de função potencial ou potencial espalhado.

O índice de refração $n(\mathbf{r}, \omega)$ pode ser escrito em relação a suscetibilidade dielétrica a forma $n^2(\mathbf{r}, \omega) = 1 + 4\pi\eta(\mathbf{r}, \omega)$, onde η é a suscetibilidade dielétrica. Contudo, conseguimos também escrever a função potencial espalhada de forma simplificada $F(\mathbf{r}, \omega) = k^2\eta(\mathbf{r}, \omega)$.

A representação do campo total $U(\mathbf{r}, \omega)$ é a soma do campo incidente $U^{(i)}(\mathbf{r}, \omega)$ e o campo espalhado $U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega)$, isto é,

$$U(\mathbf{r}, \omega) = U^{(i)}(\mathbf{r}, \omega) + U^{(s)}(\mathbf{r}, \omega), \quad (3.48)$$

de modo que podemos escrever

$$U(\mathbf{r}, \omega) = U^{(i)}(\mathbf{r}, \omega) + \int_D F(\mathbf{r}', \omega) U(\mathbf{r}', \omega) G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \omega) d^3r' \quad (3.49)$$

onde $G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \omega) = e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} / |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ é a função de Green do operador de Helmholtz. Se assumirmos que a magnitude do campo espalhado $|U^{(s)}|$ for mais fraca que a magnitude do campo incidente $|U^{(i)}|$, ou seja $|U^{(s)}| \ll |U^{(i)}|$. Para uma boa aproximação do campo U a equação acima pode ser reescrita como

$$U(\mathbf{r}, \omega) \approx U^{(i)}(\mathbf{r}, \omega) + \int_D F(\mathbf{r}', \omega) U^{(i)}(\mathbf{r}', \omega) G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \omega) d^3r' \quad (3.50)$$

que é conhecida como a aproximação de primeira ordem de Born para a solução da integral do potencial espalhado.

Assumindo que uma onda incidente no espalhador é uma onda plana monocromática de frequência ω e a direção de propagação é \mathbf{s}_0

$$U^{(i)}(\mathbf{r}, \omega) = a(\omega)e^{i\mathbf{k}\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.51)$$

substituindo em 3.52

$$U(\mathbf{r}, \omega) \approx a(\omega)e^{i\mathbf{k}\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{r}} + a(\omega) \int_D F(\mathbf{r}', \omega)e^{i\mathbf{k}\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{r}'} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \omega) d^3r' \quad (3.52)$$

onde a função de Green pode ser escrita de forma aproximada $G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \omega) \sim \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}'}$, $r = rs$ é a distância da origem do espalhador até um ponto P distante.

Agora consideramos um sistema físico em que a luz não é monocromática no espalhador, mas parcialmente coerente.

A função de densidade espectral cruzada incidente da luz pode ser escrita

$$W^{(i)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \langle U^{(i)*}(\mathbf{r}_1, \omega) U^{(i)}(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle, \quad (3.53)$$

e além disso, similarmente conseguimos a função da densidade espectral cruzada espalhada

$$W^{(s)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \langle U^{(s)*}(\mathbf{r}_1, \omega) U^{(s)}(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle \quad (3.54)$$

. Substituindo o campo espalhado da equação 3.52 em 3.54 obtemos

$$W^{(s)}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \omega) = \int_D \langle U^{(i)*}(\mathbf{r}_1, \omega) U^{(i)}(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle \times \\ F(\mathbf{r}'_1, \omega) F(\mathbf{r}'_2, \omega) G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1|, \omega) G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2|, \omega) d^3r'_1 d^3r'_2, \quad (3.55)$$

sabendo que $W^{(i)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \langle U^{(i)*}(\mathbf{r}_1, \omega) U^{(i)}(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle$, temos a função da densidade espectral cruzada

$$W^{(s)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \int_D W^{(i)}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \omega) F(\mathbf{r}'_1, \omega) F(\mathbf{r}'_2, \omega) G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1|, \omega) G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2|, \omega) d^3r'_1 d^3r'_2 \quad (3.56)$$

relembrando a equação 3.41 conseguimos reescrever da seguinte forma a densidade espectral cruzada

$$W^{(i)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \sqrt{S^{(i)}(\mathbf{r}_1, \omega)} \sqrt{S^{(i)}(\mathbf{r}_2, \omega)} \mu(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega), \quad (3.57)$$

se o espalhador for independente da posição, dizemos que $S^{(i)}(\mathbf{r}_1, \omega) = S^{(i)}(\mathbf{r}_2, \omega) = S^{(i)}(\omega)$. Portanto, assim obtemos a função de densidade espectral cruzada com o grau de coerência

$$W^{(s)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = S^{(i)}(\omega) \int_D \mu^{(i)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \times \\ F(\mathbf{r}'_1, \omega) F(\mathbf{r}'_2, \omega) G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1|, \omega) G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2|, \omega) d^3 r'_1 d^3 r'_2. \quad (3.58)$$

Se os dois furos estiverem no mesmo lugar, ou seja $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \equiv \mathbf{r}$, dessa maneira a parte da esquerda da equação se torna à 3.35, assim a equação acima torna-se a função de densidade espectral

$$S^{(s)}(\mathbf{r}, \omega) = S^{(i)}(\omega) \int_D \mu^{(i)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \times \\ F(\mathbf{r}'_1, \omega) F(\mathbf{r}'_2, \omega) G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1|, \omega) G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2|, \omega) d^3 r'_1 d^3 r'_2. \quad (3.59)$$

Note que, o espectro do campo espalhado difere do espectro do campo incidente isto acontece pelos fatos: da propriedade da coerência espacial da luz incidida; e da frequência ter dependência tanto com a função potencial, como com a função de Green para o espaço livre [29].

Agora consideramos uma onda plana policromática, a qual se propaga em direção de \hat{s}_0 onde é incidido em um espalhador. Dessa forma podemos exprimir a onda pelo ensemble estatístico

$$\{U^{(i)}(\mathbf{r}, \omega)\} = \{a(\omega)\} e^{ik\hat{s}_0 \cdot \mathbf{r}} \quad (3.60)$$

onde $a(\omega)$ é uma amplitude aleatória. Podemos agora, substituir na equação 3.53 e conseguimos

$$W^{(i)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = S^{(i)}(\omega) e^{ik\hat{s}_0 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)} \quad (3.61)$$

onde o espectro incidente é $S^{(i)}(\omega) = \langle a^*(\omega) a(\omega) \rangle = \langle |a(\omega)|^2 \rangle$. Esta equação pode ser comparada com a equação 3.57, é fácil ver que o grau de coerência espectral pode ser escrito da maneira

$$\mu^{(i)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = e^{ik\hat{s}_0 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}. \quad (3.62)$$

Trazendo o resultado de $U^{(s)}$ conseguimos reconstruir a densidade espectral cruzada com o produto de funções. Substituindo a função de Green em $U^{(s)}$ na equação 3.52, obtemos

$$U^{(s)}(r\mathbf{s}, \omega) = \sqrt{S^{(i)}(\omega)} \frac{e^{ikr}}{r} \int F(\mathbf{r}', \omega) e^{-ik(\mathbf{s} - \hat{s}_0) \cdot \mathbf{r}'} d^3 r' \quad (3.63)$$

onde podemos reescrever essa equação com a transformada de Fourier da função potencial, \tilde{F} ,

$$U^{(s)}(r\mathbf{s}, \omega) = \sqrt{S^{(i)}(\omega)} \frac{e^{ikr}}{r} \tilde{F}[k(\mathbf{s} - \hat{s}_0), \omega], \quad (3.64)$$

lembrando que podemos usar a notação $\mathbf{r} = r\mathbf{s}$. Agora, substituindo a equação anterior na equação 3.54 obtemos a densidade espectral cruzada $W^{(s)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ na forma de transformada de Fourier e igualando $r\mathbf{s}_1 = r\mathbf{s}_2 = r\mathbf{s}$ atingimos a densidade espectral no qual é um dos resultados mais importantes da teoria de coerência de segunda ordem [29, 30, 35]

$$W^{(s)}(r\mathbf{s}_1, r\mathbf{s}_2, \omega) = \frac{1}{r^2} S^{(i)}(\omega) \tilde{F}^*[k(\mathbf{s}_1 - \hat{s}_0), \omega] \tilde{F}[k(\mathbf{s}_2 - \hat{s}_0), \omega] \quad (3.65)$$

$$S^{(s)}(r\mathbf{s}, \omega) = \frac{1}{r^2} S^{(i)}(\omega) |\tilde{F}[k(\mathbf{s} - \hat{s}_0), \omega]|^2. \quad (3.66)$$

3.5 Equivalência entre radiação espectral e densidade espectral

Considerando campos gerados por planos, fonte secundária, assumindo que seja estacionária no sentido amplo. Conseguimos escrever a função densidade espectral cruzada que é expressa pela fonte e o sobrescrito 0 representa que está na fonte

$$W^{(0)}(\rho'_1, \rho'_2, \omega) = \langle U^{(0)*}(\rho'_1, \omega) U^{(0)}(\rho'_2, \omega) \rangle_\omega \quad (3.67)$$

onde ρ'_1 e ρ'_2 são vetores, de duas dimensões, que localizam o ponto de origem na fonte em $z = 0$, s_1 e s_2 são pares de pontos na fonte plana.

Nosso objetivo agora será calcular a função de densidade espectral cruzada em um

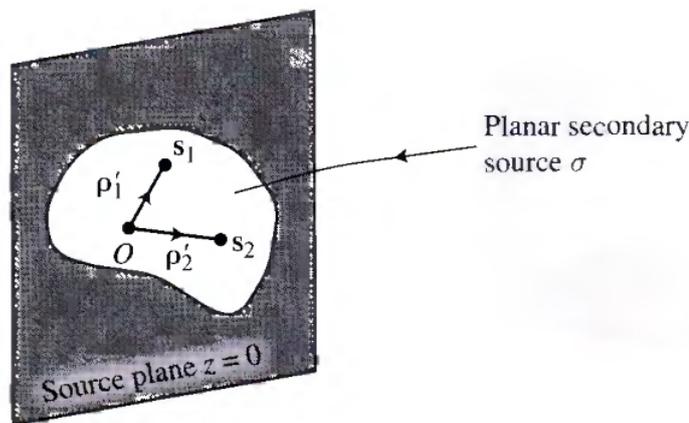


Figura 3.2: Fonte secundária em $z = 0$. Fonte: [29]

campo muito longe da fonte, $z > 0$, que pode ser representada por

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \langle U^*(\mathbf{r}_1, \omega)U(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle_\omega \quad (3.68)$$

$U(\mathbf{r}, \omega)$ pode ser representado pela integral de difração de Rayleigh [29, 30]

$$U(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{z=0} U^{(0)}(\rho', \omega) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \right] d^2\rho' \quad (3.69)$$

é evidente que para longas distâncias de r , podemos escrever $R \sim r - \mathbf{s} \cdot \rho'$ e portanto substituindo-a na derivada da equação 3.69 obtemos que o campo em uma zona distância fica

$$U^{(\infty)}(r\mathbf{s}, \omega) \sim -\frac{ik}{2\pi} \cos\theta \frac{e^{ikr}}{r} \int U^{(0)}(\rho', \omega) e^{-ik\mathbf{s} \cdot \rho'} d^2\rho' \quad (3.70)$$

onde foi considerado $\mathbf{r} = r\mathbf{s}$ e $z/r = \cos\theta$. Aqui θ é denominado o ângulo do plano com o ponto onde estamos observando o campo.

É interessante termos a transformada de Fourier de $U^{(0)}$, portanto vemos que pode ser expressa da forma

$$\tilde{U}^{(0)}(\mathbf{f}, \omega) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{z=0} U^{(0)}(\rho', \omega) e^{-i\mathbf{f} \cdot \rho'} d^2\rho' \quad (3.71)$$

aqui \mathbf{f} é um vetor de duas dimensões da frequência espacial. Note que $\mathbf{f} = k\mathbf{s}$ assim conseguimos escrever o campo em uma zona longe

$$U^{(\infty)}(r\mathbf{s}, \omega) \sim -2\pi ik \cos\theta \tilde{U}^{(0)}(k\mathbf{s}_\perp, \omega) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (3.72)$$

onde \mathbf{s}_\perp é o vetor perpendicular a fonte no plano $z = 0$, escrevemos $\mathbf{s}_\perp = (s_x, s_y, 0)$.

Substituindo a equação anterior na função da densidade espectral cruzada, a equação 3.68, para os pontos em que $\mathbf{r}_1 = r_1\mathbf{s}_1$ e $\mathbf{r}_2 = r_2\mathbf{s}_2$ é dada por

$$W^{(\infty)}(r_1\mathbf{s}_1, r_2\mathbf{s}_2, \omega) = (2\pi ik)^2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \left\langle \tilde{U}^{(0)*}(k\mathbf{s}_{1\perp}, \omega) \tilde{U}^{(0)}(k\mathbf{s}_{2\perp}, \omega), \omega \right\rangle \frac{e^{ik(r_2-r_1)}}{r_1 r_2}, \quad (3.73)$$

onde θ_1 e θ_2 são os ângulos que \mathbf{s}_1 e \mathbf{s}_2 fazem com o eixo z . O termo da média é a densidade espectral cruzada da fonte que pode ser representada como a transformada de fourier

$$\tilde{W}^{(0)}(-\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \omega) = \left\langle \tilde{U}^{(0)*}(\mathbf{f}_1, \omega) \tilde{U}^{(0)}(\mathbf{f}_2, \omega), \omega \right\rangle \quad (3.74)$$

observe que o surgimento desse menos no argumento da função da densidade espectral cruzada é necessário ser inserido na transformada de fourier. Disso, conseguimos escrever agora

$$W^{(\infty)}(r_1\mathbf{s}_1, r_2\mathbf{s}_2, \omega) = (2\pi ik)^2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 \tilde{W}^{(0)}(-\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \omega) \frac{e^{ik(r_2-r_1)}}{r_1 r_2}. \quad (3.75)$$

Esta expressão pode deduzir varias propriedades de campos em zonas distantes geradas por fontes estatisticamente estacionárias de quaisquer estados de coerência.

Como foi definido a densidade espectral, 3.36, que é um caso particular da densidade espectral cruzada, partindo da equação 3.75 conseguimos obter $S(rs)$ que pode ser chamada de intensidade óptica na frequência ω em um campo longe. Usando a definição, conseguimos

$$S^{(\infty)}(r\mathbf{s}, \omega) = \frac{(2\pi ik)^2}{r^2} \cos^2\theta \tilde{W}^{(0)}(-k\mathbf{s}_\perp, k\mathbf{s}_\perp, \omega). \quad (3.76)$$

Nota-se que a densidade espectral tem a dependência angular, por conta do $\cos^2\theta$ e das propriedades de correlações espaciais da fonte, através da transformada de fourier $\tilde{W}^{(0)}$ na direção do vetor \mathbf{s} [29].

É possível, também, escrevemos de outra maneira a densidade espectral

$$S^{(\infty)}(r\mathbf{s}, \omega) = \frac{J_\omega(\mathbf{s})}{r^2} \quad (3.77)$$

onde $J_\omega(\mathbf{s}) = (2\pi k)^2 \cos^2\theta \tilde{W}^{(0)}(-k\mathbf{s}_\perp, k\mathbf{s}_\perp, \omega)$. Esta função $J(\hat{s}, \omega)$ é conhecida como a radiação na frequência ω ou radiação espectral, também como intensidade de radiação.

3.6 Efeito *Wolf*

Para compreender o efeito *Wolf*, vamos considerar uma fonte quase-homogênea em $z = 0$ gere um campo distante da forma

$$S(\mathbf{r}, \omega) = \left(\frac{2\pi k}{r}\right)^2 \tilde{S}(\omega) \tilde{\mu}(k\mathbf{s}_\perp, \omega) \cos^2\theta, \quad (3.78)$$

veja que esta função da intensidade espectral é igual a equação 3.76, na qual foi utilizado a relação $\tilde{W}(-k\mathbf{s}_\perp, k\mathbf{s}_\perp, \omega) = \tilde{S}(\omega) \tilde{\mu}(k\mathbf{s}_\perp)$ onde \tilde{S} e $\tilde{\mu}$ são transformadas de fourier respectivamente de S e μ [29, 35]. As definições das TR(transformadas de Fourier) são dadas por

$$\tilde{S}^{(0)}(\mathbf{f}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int S^{(0)}(\rho, \omega) e^{-\mathbf{f}\cdot\rho} d^2\rho \quad (3.79a)$$

$$\tilde{\mu}^{(0)}(\mathbf{f}', \omega) = \frac{1}{2\pi} \int \mu^{(0)}(\rho', \omega) e^{-i\mathbf{f}'\cdot\rho'} d^2\rho'. \quad (3.79b)$$

Agora, considere uma fonte que possui a mesma distribuição espectral em qualquer ponto no plano $z = 0$, $S(\vec{\rho}, \omega) = A(\omega)$ para $|\vec{\rho}| \leq a$, onde $A(\omega)$ é uma função real, positiva. Iremos portanto assumir o grau de coerência espectral da fonte de forma gaussiana $\mu(\vec{\rho}, \omega) = e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}$, onde $\sigma \ll a$ representa o tamanho da fonte onde tem correlação [35]. Veja que necessitamos das transformadas de fourier para substituir na equação de espalhamento, então tomando as transformadas de fourier conseguimos obter

$$\tilde{S}(\omega) = \frac{\pi a^2 A(\omega)}{(2\pi)^2} \quad (3.80a)$$

$$\tilde{\mu}(\vec{f}, \omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} e^{-\frac{\sigma^2 |\vec{f}|^2}{2}} \quad (3.80b)$$

substituindo 3.80a e 3.80b em 3.78 e organizando os termos, obtemos que a densidade espectral

$$S(\mathbf{r}, \omega) = \frac{a^2 \sigma^2 \cos^2 \theta}{2c^2 r^2} \omega^2 A(\omega) \exp\left(-\frac{\sigma^2 \omega^2 \sin^2 \theta}{2c^2}\right) \quad (3.81)$$

onde foi utilizado do fato que $k^2 = \omega^2/c^2$. Assumindo agora que a distribuição espectral da fonte seja da forma gaussiana centrada em ω_0

$$A(\omega) = A_0 \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\Gamma_0^2}\right], \quad (3.82)$$

sendo que A_0 é uma constante positiva e Γ_0 é a largura da distribuição. Dessa maneira, podemos escrever o espectro da radiação como

$$S(\mathbf{r}, \omega) = S_0 \omega^2 A_0 \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\Gamma_0^2}\right] \exp\left(-\frac{\omega^2}{2\Gamma_1^2}\right) \quad (3.83)$$

onde $S_0 = a^2 A_0 \sigma^2 / 2c^2 r^2$ e $\Gamma_1^2 = c^2 / \sigma^2 \sin^2 \theta$. Fixamos o r , pois queremos estudar a frequência. Veja que a radiação espectral difere da fonte. A distribuição espectral é o resultado de duas gaussianas e um polinômio como é mostrado na equação 3.83. Podemos reescrever essa equação fazendo o produto das duas gaussianas, de modo que teremos

$$S(\omega) = S'_0 \exp\left[-\frac{(\omega - \omega')^2}{2\Gamma'^2}\right] \omega^2 \quad (3.84)$$

onde $S'_0 = S_0 \exp[C]$, a largura é descrita por

$$\Gamma' = \frac{\Gamma_0 \Gamma_1}{\sqrt{\Gamma_0^2 + \Gamma_1^2}}$$

a frequência central da gaussiana é dado por

$$\omega' = \omega_0 \frac{\Gamma_1^2}{\Gamma_1^2 + \Gamma_0^2}$$

e

$$C = -\frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{\Gamma_1^2 + \Gamma_0^2},$$

note que C não depende de ω . O espectro de radiação criado pela fonte 3.82 não está centrado em ω_0 . Contudo, essa mudança no espectro causada pelas correlações existentes na fonte é conhecida como Efeito *Wolf* [33–35].

Capítulo 4

Efeito Wolf no espalhamento de luz por materiais não-Hermitianos

Discutiremos neste capítulo os efeitos de espalhamentos sobre um potencial o qual descreve duas esferas de tamanho Δ a uma certa distância da origem. Foi feito um espalhamento de luz policromática nos espalhadores para estudar a mudança espectral, o efeito *Wolf* em dois casos: Caso Hermitiano e caso não-Hermitiano. Veremos a diferença entre as radiações espalhadas quando o parâmetro de ganho e perda é igual a zero ($\gamma = 0$) e diferente de zero ($\gamma \neq 0$).

4.1 Material não-Hermitiano

Diante de toda teoria dos capítulos anteriores podemos, agora, formular um novo material que contenha simetria *PT*. Vamos reformular a notação de algumas equações ao longo desse capítulo. Esta dissertação é uma extensão do trabalho de [23].

Discutiremos o espalhamento da luz policromática e para isto é necessário descrever o ensemble da forma $\{u^i(\mathbf{r}, \omega) = a(\omega)e^{ik\hat{s}_0 \cdot \mathbf{r}}\}$ onde $a(\omega)$ é uma função aleatória da frequência ω , \hat{s}_0 é um vetor unitário que representa a direção da propagação do campo de radiação incidente e $k = \omega/c$ onde c é a velocidade da luz no vácuo. A densidade espectral da radiação incidente é portanto $S(\omega) = \langle |a(\omega)|^2 \rangle$ e não depende da posição, como foi visto anteriormente na seção 3.4. Este campo $u(\mathbf{r}, \omega)$ em um sistema de espalhamento satisfaz a equação de Helmholtz não homogênea

$$[\nabla^2 + k^2\varepsilon(\mathbf{r}, \omega)] u(\mathbf{r}, \omega) = 0. \quad (4.1)$$

Na equação anterior podemos ver que é uma equação homogênea pois é igual a zero, entretanto colocamos o nome não homogêneo devido ao termo de \mathbf{r} .

Na qual a solução, usando a aproximação de Born e considerando que $\mathbf{r} \rightarrow \infty$, é dada pela equação 3.52 que pode ser reescrita na forma da transformada de Fourier da função potencial

$$u(\mathbf{r}, \omega) = a(\omega)e^{ik\hat{s}_0 \cdot \mathbf{r}} + a(\omega)\tilde{F}(\mathbf{K}, \omega)\frac{e^{ikr}}{r} \quad (4.2)$$

onde

$$\tilde{F}(\mathbf{K}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{r}, \omega)e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \quad (4.3)$$

esta é a transformada de Fourier de três dimensões da função potencial em que $\mathbf{K} = k(\hat{s} - \hat{s}_0)$ com \hat{s} sendo o vetor unitário da direção observada. A função potencial ou potencial espalhado pode ser definido na forma da equação 3.46, entretanto iremos trabalhar com sistemas não homogêneos que é definida pela equação 3.47

$$F(\mathbf{r}, \omega) = \frac{k^2}{4\pi} [\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) - 1] \quad (4.4)$$

onde ε é a permissibilidade dielétrica.

Para encontrarmos a densidade espectral devemos fazer uso da equação 3.66, que foi definida no capítulo 3, em que precisamos da transformada de Fourier do potencial. O potencial espalhado considerado é uma generalização do potencial de [23] pois se tomarmos $\Delta \rightarrow 0$ obtemos o mesmo potencial espalhado e duas funções de delta de Dirac ao invés de esferas com tamanhos finitos. A função $F(\mathbf{r}, \omega)$ representa o material no qual o campo incidente interage, dessa forma definiremos-a da seguinte maneira

$$F(\mathbf{r}, \omega) = \frac{k^2}{4\pi} \left[(\sigma + i\gamma) \frac{e^{-(\mathbf{r}-\mathbf{a})^2/2\Delta^2}}{\Delta^3(2\pi)^{3/2}} + (\sigma - i\gamma) \frac{e^{-(\mathbf{r}+\mathbf{a})^2/2\Delta^2}}{\Delta^3(2\pi)^{3/2}} \right] \quad (4.5)$$

onde σ e γ são reais e parâmetros do material não-Hermitiano no qual controla a parte real e imaginária da permissividade, Δ é o tamanho de cada espalhador onde são localizados vetorialmente a uma distância da origem em (\mathbf{a}) e $(-\mathbf{a})$. A esfera com perda está a uma distancia (\mathbf{a}) e outra esfera com ganho está a uma ponto $(-\mathbf{a})$. Todo parâmetro geométrico descrito acima está contido na figura 4.1.

Para vermos com clareza que nosso material é PT simétrico, basta aplicarmos o que vimos na seção 2.1 onde foi mostrada a definição da simetria PT. Assim, podemos verificar de maneira rápida que

$$F(\mathbf{r}, \omega) = F^*(-\mathbf{r}, \omega). \quad (4.6)$$

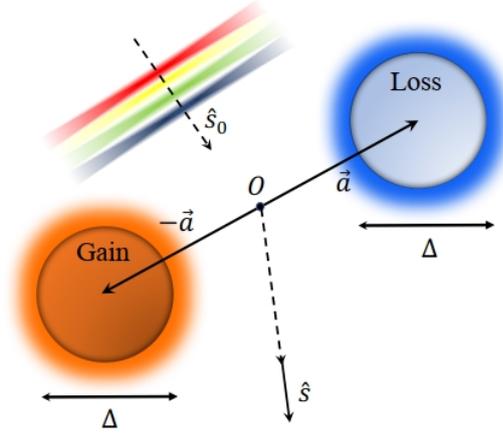


Figura 4.1: Luz policromática se propagando em direção, \hat{s}_0 , a dois espalhadores nas localidades $\pm \mathbf{a}$

Vamos discutir previamente sobre materiais PT-simétricos não homogêneos. A relação Kramers-Kronig entre a parte real e imaginária da permissividade dielétrica não são satisfeitas para materiais PT-simétricos em um domínio de frequência, isto foi demonstrado por [37]. Para satisfazer a condição da simetria PT em sistemas não homogêneos foi mostrado que conseguimos dopar um material com impurezas que produza o efeito de ganho e perda para um intervalo finito de frequência [38]. O conceito de *quasi* PT simétrica possibilita estudar a propagação de pulsos ópticos através de estruturas periódicas em geometrias Laue e Bragg [38, 39]. A formulação do conceito de *quasi* PT simétrica se dá ao fato de o tempo de relaxamento não homogêneo T_2^* é muito menor que o tempo de relaxamento homogêneo T_2 que, por sua vez, é menor que um pulso $\tau_0 \sim 1/\Gamma_0$, onde Γ_0 é a largura espectral do pulso, logo a permissividade dielétrica é aproximadamente PT-simétrica. O conceito de *quasi* PT simétrica, definida em [38], pode ser escrito a permissividade dielétrica como $\varepsilon_{total}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_{hm}(\mathbf{r}) + \varepsilon_{res}(\mathbf{r}, \omega)$ onde $\varepsilon_{hm}(\mathbf{r})$ é independente da frequência e, o subscrito representa *host medium*, esta é a parte real e $\varepsilon_{res}(\mathbf{r}, \omega)$ é a parte imaginária e descreve o meio ressonante das impurezas que faz o efeito de ganho e perda do material. Se escrevemos a parte ressonante como $\varepsilon_{res}(\mathbf{r}, \omega) = -iW(\mathbf{r})\tilde{\varepsilon}(\omega)$, onde

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = i\beta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\Delta - \Delta_0)}{\Delta + i/T_2} d\Delta \quad (4.7)$$

sendo que $\beta = \frac{4\pi N\mu^2}{h}$, onde N é a concentração ressonante dos átomos e μ é o momento de dipolo, $\Delta = \omega - \omega'_0$ e $\Delta_0 = \omega - \omega_0$, onde ω_0 é a frequência central e ω'_0 é a frequência

ressoante [40]. A função $g(\Delta - \Delta_0)$ pode ser escrita como a distribuição de Doppler-Maxwellian

$$g(\Delta - \Delta_0) = \frac{T_2^*}{\sqrt{2}} e^{-(\Delta - \Delta_0)^2 (T_2^*)^2 / 2} \quad (4.8)$$

usando o limite em que $T_2^*/T_2, T_2^* \ll 1$ obtemos

$$g \sim T_2^*. \quad (4.9)$$

Assim conseguimos ter que $\tilde{\varepsilon}(\omega) \sim \beta T_2^*$ com $T_2^* \rightarrow 0$, a constante β representa uma constante proporcional a concentração ressonante do átomos [38]. De fato, se assumirmos, o período do *host medium*, uma função ímpar $W(\mathbf{r}) = -W(-\mathbf{r})$ a permissibilidade total $\varepsilon_{total}(\mathbf{r}, \omega)$ é *quasi* PT simétrica. Para o modelo considerado pode ser facilmente verificado que

$$\varepsilon_{hm}(\mathbf{r}) = 1 + \frac{\sigma}{\Delta^3 (2\pi)^{3/2}} \left[e^{-(\mathbf{r}-\mathbf{a})^2 / 2\Delta^2} + e^{-(\mathbf{r}+\mathbf{a})^2 / 2\Delta^2} \right],$$

$$W(\mathbf{r}) = e^{-(\mathbf{r}+\mathbf{a})^2 / 2\Delta^2} - e^{-(\mathbf{r}-\mathbf{a})^2 / 2\Delta^2},$$

basta comparar as equações 4.4 e 4.5, e $\gamma = \beta T_2^*$. Apesar de usarmos quantidades normalizadas, assumimos que as aproximações são válidas para o domínio que estamos estudando.

4.2 Resultados

A princípio temos que encontrar a densidade espectral $S^{(s)}(\mathbf{r}, \omega)$ da radiação espalhada, para obtê-la precisamos da transformada de fourier da equação 4.5. Utilizando a definição 4.3, conseguimos

$$\tilde{F}_{\mathbf{K}} = \frac{k^2}{2\pi} e^{-K^2 \Delta^2 / 2} [\sigma \cos(\mathbf{K} \cdot \mathbf{a}) + \gamma \sin(\mathbf{K} \cdot \mathbf{a})] \quad (4.10)$$

onde $K = |\mathbf{K}|$. Analisando a equação anterior fica evidente que o tamanho, representada por Δ , do material estudado, as esferas, será importante para o efeito do espalhamento. Substituindo a equação 4.10 em 3.66, obtemos que a densidade espectral do campo espalhado é

$$S^{(s)}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{k^4 S^{(i)}(\omega)}{4\pi^2 r^2} e^{-K^2 \Delta^2} [\sigma \cos(\mathbf{K} \cdot \mathbf{a}) + \gamma \sin(\mathbf{K} \cdot \mathbf{a})]^2. \quad (4.11)$$

Escolhemos agora o campo incidente na direção z , $\hat{s}_0 = \hat{z}$, e os espalhadores estão localizados no eixo x tal que $\mathbf{a} = a\hat{x}$, onde a é um constante positiva. A esfera espalhadora com ganho está em $\mathbf{a} = -a\hat{x}$ e a outra com perda está em $\mathbf{a} = a\hat{x}$. Suponha que que a

densidade espectral incidente, dependa apenas da frequência, tem uma forma gaussiana descrita por

$$S^{(i)}(\omega) = S_0 e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\Gamma_0^2}} \quad (4.12)$$

onde S_0 é constante, ω_0 é a frequência central e Γ_0 é a largura de banda. Aplicando a densidade espectral incidente em 4.11 ficamos com

$$S^{(s)}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{k^4 S_0 e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\Gamma_0^2}}}{4\pi^2 r^2} e^{-K^2 \Delta^2} [\sigma \cos(\mathbf{K} \cdot \mathbf{a}) + \gamma \sin(\mathbf{K} \cdot \mathbf{a})]^2. \quad (4.13)$$

fazendo algumas normalizações

$$\begin{aligned} \omega &\rightarrow \frac{\omega}{\omega_0}, \\ \Gamma_0 &\rightarrow \frac{\Gamma_0}{\omega_0}, \\ \Gamma_1 &\rightarrow \frac{\Gamma_1}{\omega_0}, \\ \Delta &\rightarrow \frac{\Delta \omega_0}{c}, \\ a &\rightarrow \frac{a \omega_0}{c}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

a radiação espectral $J(\hat{s}, \omega)$ é definida da forma

$$J(\hat{s}, \omega) = \frac{4\pi^2 r^2}{k^4 S_0} S(\mathbf{r}, \omega), \quad (4.15)$$

reescrevendo na forma do produto de três termos, resulta em

$$J(\hat{s}, \omega) = I(\omega) G_\Delta(\hat{s}, \omega) P_{\sigma, \gamma, a}(\hat{s}, \omega) \quad (4.16)$$

onde

$$I(\omega) = e^{-\frac{(\omega-1)^2}{2\Gamma_0^2}}, \quad (4.17)$$

$$G_\Delta(\hat{s}, \omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2\Gamma_1^2}}, \quad (4.18)$$

$$P_{\sigma, \gamma, a}(\hat{s}, \omega) = [\sigma \cos(\omega a \hat{s} \cdot \hat{x}) + \gamma \sin(\omega a \hat{s} \cdot \hat{x})]^2, \quad (4.19)$$

a largura de banda é dada por $\Gamma_1 = (2\sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2})^{-1}$ com θ variando entre 0 e π , ou seja $\theta \in [0, \pi]$, este é o ângulo entre \hat{s} e o eixo z . Como temos produtos de gaussianas podemos junta-las para observar a física por traz da equação da radiação espalhada,

$$I(\omega) G_\Delta(\hat{s}, \omega) = e^{-\frac{(\omega-\omega_c)^2}{2\Gamma_c^2}} e^\Theta \quad (4.20)$$

onde

$$\omega_c = \left(1 + 8\Delta^2\Gamma_0^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^{-1}, \quad (4.21)$$

$$\Gamma_c = \Gamma_0 \left(1 + 8\Delta^2\Gamma_0^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^{-1/2} \quad (4.22)$$

e

$$\Theta_\Delta(\hat{s}) = \frac{1}{2\Gamma_0^2} \left[\left(1 + 8\Delta^2\Gamma_0^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^{-1} - 1 \right] \quad (4.23)$$

em que ω_c é a frequência central do produto das duas gaussianas juntamente com a largura de banda central descrita por Γ_c e $\Theta_\Delta(\hat{s})$ não depende da frequência ω e por isso não terá influência sobre a forma da radiação para um \hat{s} fixo e por isso vamos desprezar este termo, pois apenas contribuirá no fator de uma amplitude.

Na figura 4.2 plotamos a frequência central, equação 4.21, do produto de $I(\omega)G_\Delta(\hat{s}, \omega)$ em função do ângulo espalhado $\theta = \cos^{-1}(\hat{s} \cdot \hat{z})$. Assim, a distribuição da frequência dos produtos das gaussianas é centrada na frequência central, em ω_c , com a amplitude variando com a dependência do ângulo θ . Como é possível observar na na figura 4.2 o fator de maior influencia é inferior de $\theta = \pi$. Também é visto, na mesma figura, diferentes valores para o tamanho da esfera, Δ , na qual tem uma influência diferente na frequência central.

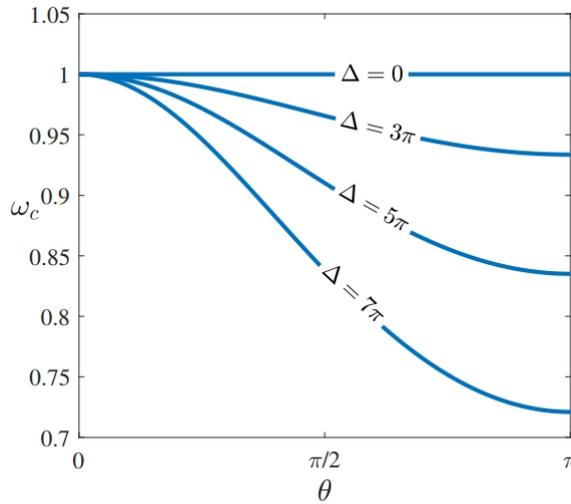


Figura 4.2: Frequência central em função de θ descrita por quatro valores diferentes de Δ . Parâmetro usado: $\Gamma_0 = 0.01$

Nas próximas duas subseções abordaremos dois casos: Hermitiano e não Hermitiano.

4.2.1 Mudanças Espectrais Hermitianas

Vamos redefinir os produtos de duas gaussianas, $I(\omega)G_{\Delta}(\hat{s}, \omega)$, como sendo

$$H_{\Delta}(\hat{s}, \omega) = e^{-\frac{(\omega-\omega_c)^2}{2\Gamma_c^2}}. \quad (4.24)$$

escrevendo a intensidade de radiação como

$$J(\hat{s}, \omega) = H_{\Delta}(\hat{s}, \omega)P_{\sigma, \gamma, a}(\hat{s}, \omega). \quad (4.25)$$

Nosso objetivo nessa seção é estudar a dependência de $J(\hat{s}, \omega)$ em ω de modo que fixaremos uma direção \hat{s} na qual nos proporcione estudar o tema central deste trabalho.

Fixando uma distancia entre os espalhadores em $2a = 68\pi$, a representação física dessa distância é de $34\lambda_0$, e considerando os ângulos fixados que são: $\theta = \pi/4$, ângulo polar, $\phi = \pi/4$, ângulo azimutal, $s_x = \sin\theta \cos\phi$ é em coordenadas esféricas e assumimos $\sigma = 1$. Na figura 4.3 ilustra o comportamento das funções $P_{\gamma, a}(\hat{s}, \omega)$, removemos o σ quando assumimos anteriormente $\sigma = 1$, $H_{\Delta}(\hat{s}, \omega)$ e $J(\hat{s}, \omega)$ para o caso hermitiano onde o parâmetro de ganho e perda é nulo, $\gamma = 0$, isto mostra que o material não tem ganho e perda. Primeiramente na parte (a) da figura, plotando a função $H_{\Delta}(\hat{s}, \omega)$, linhas contínuas, e juntamente com a função periódica $P_{\gamma, a}(\hat{s}, \omega)$, linhas tracejadas, para valores diversos do tamanho $\Delta = 3\pi, 5\pi$ e 7π . Uma vez que, mudando o valor de Δ , a função $H_{\Delta}(\hat{s}, \omega)$ tem um desvio para o vermelho de tal modo que toca a função periódica $P_{\gamma, a}(\hat{s}, \omega)$ que é independente do tamanho Δ . Na parte (b) o efeito de comparação onde as linhas contínuas representa a função da intensidade de radiação e a linha tracejada é a densidade espectral incidente. Portanto, a radiação espalhada ocorre com o aumento de ambos materiais dispersores. Esta correlação induzida mudada para o vermelho na frequência é chamada de Efeito *Wolf* ou, neste caso, Efeito *Wolf* Hermitiano desde que o material não usufrua de ganho e perda. Tal efeito, é resultado pela mudança no sistema físico do material.

Tal comportamento pode ser investigado para removermos algumas frequências dentro do espectro espalhado, percebemos que os zeros da função periódica $P_{\gamma, a}(\hat{s}, \omega)$ são localizados em $\omega_p = p\pi/2as_x$, onde $p = 1, 3, 5, \dots$ é inteiro positivo, de modo que a condição $\omega_p = \omega_c$ poderia ser satisfeita para uma escolha de parâmetros geométricos. Os zeros de $P_{\gamma, a}(\hat{s}, \omega)$ estão na figura 4.3 que são representados por ω_{31} (azul), ω_{33} (laranja) e ω_{35} (verde).

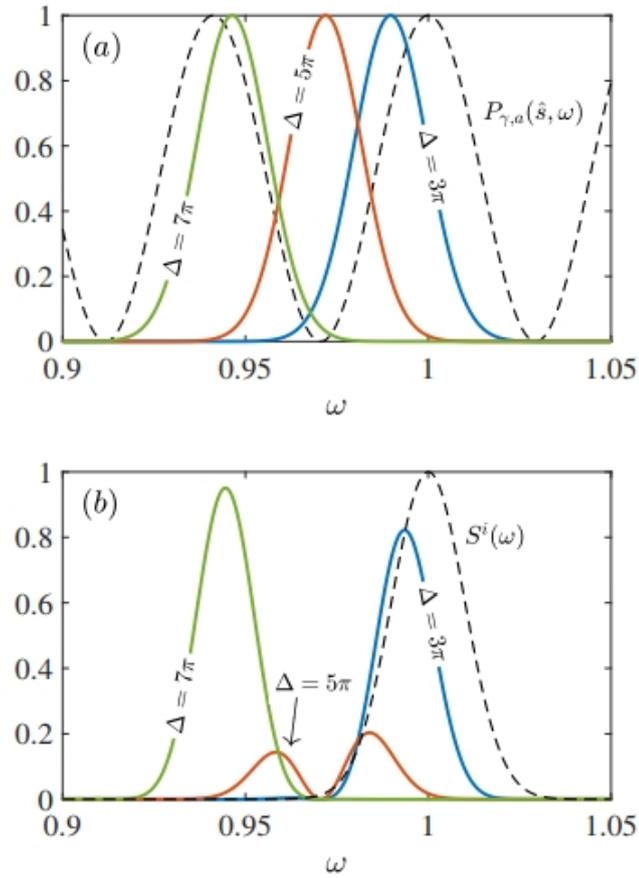


Figura 4.3: Mudança espectral na configuração Hermitiana. (a) a função $H_{\Delta}(\hat{s}, \omega)$ (linha contínua) para $\Delta = 3\pi$ (azul), $\Delta = 5\pi$ (laranja) e $\Delta = 7\pi$ (verde) e a função periódica $P_{\gamma,a}$ (linha tracejada). (b) plot do espectro incidente $S^{(i)}(\omega)$ (linha tracejada) e da intensidade de radiação $J(\hat{s}, \omega)$ (linha contínua) para $\Delta = 3\pi$ (azul), $\Delta = 5\pi$ (laranja) e $\Delta = 7\pi$ (verde). Parâmetro usado: $\Gamma_0 = 0.01$, $\theta = \phi = \pi/4$, $a = 34\pi$ e $\gamma = 0$

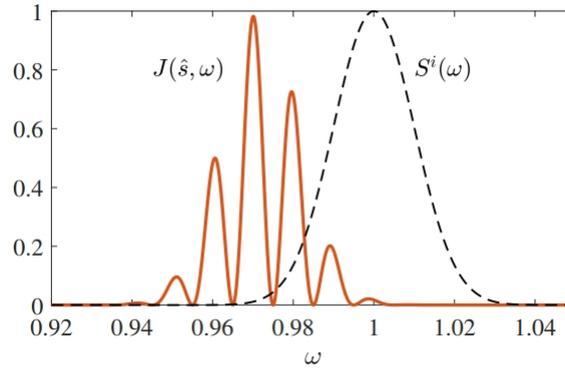


Figura 4.4: Efeito oscilatório do espectro de radiação espalhada quando $a = 200\pi$ (linha laranja) e juntamente ao espectro incidente (linha tracejada). Parâmetro usado: $\Gamma_0 = 0.01$, $\theta = \phi = \pi/4$, $\Delta = 5\pi$ e $\gamma = 0$

Analisando o aumento da distância entre ambos espalhadores, percebemos que o período da função $P_{\gamma,a}(\hat{s}, \omega)$ decresce e começa a ter fortes variações dentro da faixa de frequência onde a $H_{\Delta}(\hat{s}, \omega)$ não é zero. Diante deste resultado, o espectro de radiação aparece oscilando em caráter do perfil dos zeros que são determinados pelos zeros da função periódica $P_{\gamma,a}(\hat{s}, \omega)$. A figura 4.4, nos mostra o efeito do aumento da distância quando $a = 200\pi$ entre os espalhadores com um tamanho fixado em $\Delta = 5\pi$. Assim, o espectro passa por uma transição do tipo Gaussiana, espectro incidente, e caráter oscilatório quando a geometria, o tamanho e a distância entre ambos, é alterada.

4.2.2 Mudanças Espectrais não-Hermitianas

Consideraremos agora, nesta seção, o parâmetro, γ , de ganho e perda da distribuição de frequência da intensidade de radiação $J(\hat{s}, \omega)$. A única influência do γ será apenas na função periódica $P(\hat{s}, \omega)$ por conta que é a única função que depende de γ , veja que a função exponencial, $H_{\Delta}(\hat{s}, \omega)$, é independente de tal parâmetro. De forma que só a dependência na função periódica. É importante frisar que na configuração não Hermitiana os zeros da função $P(\hat{s}, \omega)$ são dependentes de γ e são localizados em

$$\Omega_l = \frac{1}{as_x} \left[-\arctan\left(\frac{1}{\gamma}\right) + l\pi \right]. \quad (4.26)$$

É fácil ver que se aplicarmos o limite de $\gamma \rightarrow 0$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \Omega_l = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{as_x} \left[-\arctan\left(\frac{1}{\gamma}\right) + l\pi \right] = \frac{\pi}{2as_x} (2l - 1) = \omega_p \quad (4.27)$$

onde $\lim_{\gamma \rightarrow 0} -\arctan\left(\frac{1}{\gamma}\right) = -\pi/2$, e $p = 2l - 1$ e dessa forma obtemos que $\Omega_l \rightarrow \omega_p$. Para vermos o efeito do parâmetro γ nos zeros de $P_{\gamma,a}(\hat{s}, \omega)$ consideremos novamente a figura 4.3 com as frequências ω_{31} , ω_{33} e ω_{35} na qual são correspondente de Ω_{16} , Ω_{17} e Ω_{18} respectivamente, de acordo com a relação $p = 2l - 1$. Na figura 4.5 é mostrado o comportamento da frequência Ω para $l = 16, 17, 18$ em função de γ . Neste gráfico indica o efeito *Wolf* induzido por correlação não Hermitiana independentemente das mudanças dos parâmetros geométricos do sistema físico. Conseguimos controlar a frequência do espectro da radiação espalhada sem alterar a geometria do material, apenas mudando os parâmetros de ganho e perda. Por outro lado temos que na figura 4.5 e na equação 4.26 um valor máximo em $\gamma \rightarrow \infty$, dado pelo limite

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \Omega_l = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{1}{as_x} \left[-\arctan\left(\frac{1}{\gamma}\right) + l\pi \right] = \frac{l\pi}{2as_x} \quad (4.28)$$

para $s_x \neq 0$.

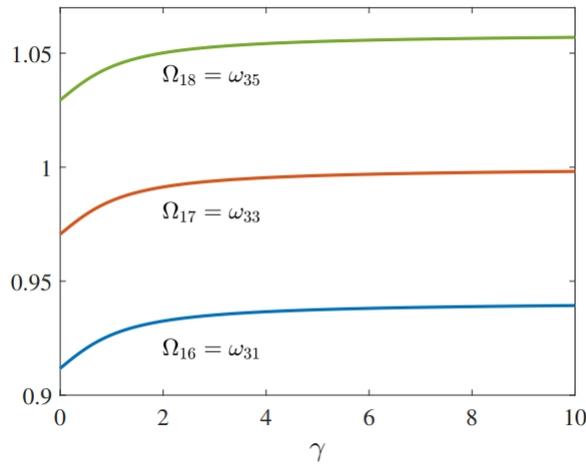


Figura 4.5: ilustração do comportamento dos zeros da frequência, Ω_l , da função $P_{\gamma,a}(\hat{s}, \omega)$ com γ variando. Valores correspondente são $\Omega_{16} = \omega_{31}$, $\Omega_{17} = \omega_{33}$ e $\Omega_{18} = \omega_{35}$ mostrado que são comparados com a figura 4.3.

Os zeros da função periódica $P_{\gamma,a}(\hat{s}, \omega)$, juntamente com os deslocamentos, tem uma mudança na amplitude, isto implica que o espectro espalhado pode ser ampliado ajustando as propriedades de ganho e perda dos espalhadores. Contudo os dois efeitos apresentados, mudança dos zeros e da amplitude, acontecem ao mesmo momento e são dependentes de γ . Olhando para as duas configurações, Hermitiana e não Hermitiana, contemplamos uma mudança de fase de $\pi/2$ aparece se $\gamma \gg 1$, como podemos ver pela equação 4.19

$$P_{\gamma,a}(\hat{s}, \omega) \propto \gamma^2 \sin^2(\omega as_x) \quad (\gamma \gg 1) \quad (4.29)$$

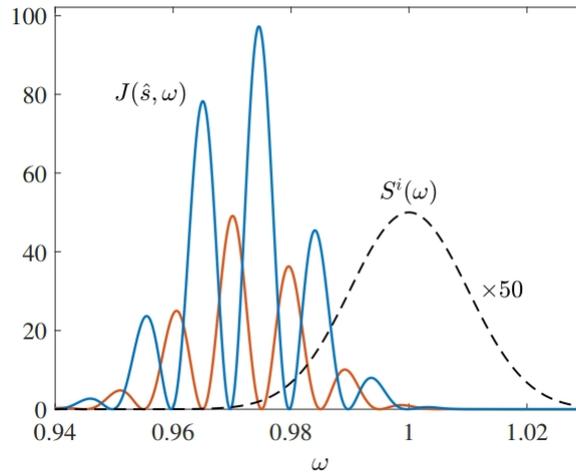


Figura 4.6: Este gráfico ilustra a mudança de fase de $\pi/2$ do espectro espalhado quando $\gamma \gg 1$. A linha laranja representa a radiação com $\gamma = 0$ multiplicada por $\times 50$ para melhor visualização. A linha azul contínua é a radiação com $\gamma = 10$ e a linha preta tracejada é o espectro incidente. Parâmetros usados: $\Gamma_0 = 0.01$, $\theta = \phi = \pi/4$ e $\Delta = 5\pi$.

cujos zeros estão localizados em $\Omega = l\pi/as_x$.

É mostrado na figura 4.6 o efeito do espalhamento da luz policromática de dois espalhadores com $\gamma = 10$. Fica claro que sofre mudanças de máximo e mínimo da intensidade de radiação quando o sistema passa de Hermitiano ($\gamma = 0$) para não hermitiano ($\gamma > 0$). Os critérios usados para construção do gráfico é: $\Gamma_0 = 0.01$, $\theta = \phi = \pi/4$, $\Delta = 5\pi$. A linha laranja contínua representa a intensidade de radiação hermitiana multiplicada por $\times 50$, para melhor visualização, e a linha azul é a intensidade de radiação com parâmetro de ganho e perda e a linha preta tracejada é o espectro incidente multiplicado por $\times 50$, para termos uma melhor visualização. As diferenças entre as duas intensidade são seus máximos e mínimos, como dito anteriormente, e a mudança na fase de $\pi/2$.

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas

Demos início com os conceitos básicos de mecânica quântica não Hermitiana que trata de Hamiltonianos com autovalores reais mesmo não sendo Hermitianos. Com essas definições foi possível fazer algumas aplicações em outras áreas da física incluindo a óptica e, também, diversas áreas da óptica. Foi demonstrado, no capítulo 2, que se usarmos as condições da simetria PT terá mudanças muito interessantes no espalhamento devido ao parâmetros ganho e perda.

No capítulo 3 descrevemos os principais conceitos físicos, leis físicas e matemáticas necessários para entender o desenvolvimento desde trabalho. As definições de processos aleatórios usamos definindo nosso potencial como sendo estacionário no sentido amplo. Também as definições importantes que foram da densidade espectral, intensidade de radiação, efeito *Wolf*, entre outras.

No capítulo 4 podemos ver que dependendo dos parâmetros geométricos do nosso sistema, por exemplo, se aumentando o tamanho da esfera vemos que há uma mudança na frequência do espectro, de modo que acontece o efeito *Wolf* Hermitiano. Considerando o parâmetro não-Hermitiano, os zeros da frequência da função periódica não há dependência na geometria, mostramos que a frequência varia com o parâmetro de ganho e perda, isto mostra o efeito *Wolf* induzido por correlações não-Hermitianas. Além disso a intensidade de radiação possui uma nova forma com os parâmetro de ganho e perda onde muda seus máximos e mínimos e, também, sua frequência. Estes resultados estão presente na revista *Journal of Optics* [41].

Referências Bibliográficas

- [1] W. Greiner, *Quantum mechanics: an introduction*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [2] R. Shankar, *Principles of quantum mechanics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [3] J. J. Sakurai and E. D. Commins, “Modern quantum mechanics, revised edition,” 1995.
- [4] C. M. Bender and S. Boettcher, “Real spectra in non-hermitian hamiltonians having PT symmetry,” *Physical Review Letters*, vol. 80, no. 24, p. 5243, 1998.
- [5] C. M. Bender, *PT symmetry: In quantum and classical physics*. World Scientific Publishing, 2018.
- [6] C. M. Bender, D. C. Brody, and H. F. Jones, “Must a hamiltonian be hermitian?,” *American Journal of Physics*, vol. 71, no. 11, pp. 1095–1102, 2003.
- [7] C. M. Bender, S. Boettcher, and P. N. Meisinger, “Pt-symmetric quantum mechanics,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 40, no. 5, pp. 2201–2229, 1999.
- [8] C. M. Bender, D. C. Brody, and H. F. Jones, “Complex extension of quantum mechanics,” *Physical Review Letters*, vol. 89, no. 27, p. 270401, 2002.
- [9] C. M. Bender, “Making sense of non-hermitian hamiltonians,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 70, no. 6, p. 947, 2007.
- [10] C. M. Bender, “Introduction to PT -symmetric quantum theory,” *Contemporary physics*, vol. 46, no. 4, pp. 277–292, 2005.

- [11] A. Mostafazadeh, “Pseudo-hermiticity versus pt symmetry: the necessary condition for the reality of the spectrum of a non-hermitian hamiltonian,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 43, no. 1, pp. 205–214, 2002.
- [12] A. Zyablovsky, A. P. Vinogradov, A. A. Pukhov, A. V. Dorofeenko, and A. A. Lisyansky, “ Pt -symmetry in optics,” *Physics-Uspekhi*, vol. 57, no. 11, p. 1063, 2014.
- [13] H. Hernandez-Coronado, D. Krejčířík, and P. Siegl, “Perfect transmission scattering as a pt -symmetric spectral problem,” *Physics Letters A*, vol. 375, no. 22, pp. 2149–2152, 2011.
- [14] T. Wang and D. Zhao, “Scattering theory of stochastic electromagnetic light waves,” *Optics letters*, vol. 35, no. 14, pp. 2412–2414, 2010.
- [15] S. Longhi, “Quantum-optical analogies using photonic structures,” *Laser & Photonics Reviews*, vol. 3, no. 3, pp. 243–261, 2009.
- [16] S. Moayedi and A. Rostami, “ Pt -invariant helmholtz optics and its applications to slab waveguides,” *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, vol. 36, no. 3, pp. 359–363, 2003.
- [17] A. Ruschhaupt, F. Delgado, and J. Muga, “Physical realization of pt -symmetric potential scattering in a planar slab waveguide,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 38, no. 9, p. L171, 2005.
- [18] E. Hurwitz and G. Gbur, “Localized pt -symmetric directionally invisible scatterers,” *Physical Review A*, vol. 93, no. 4, p. 041803, 2016.
- [19] K. G. Makris, R. El-Ganainy, D. Christodoulides, and Z. H. Musslimani, “Beam dynamics in pt symmetric optical lattices,” *Physical Review Letters*, vol. 100, no. 10, p. 103904, 2008.
- [20] M. C. Zheng, D. N. Christodoulides, R. Fleischmann, and T. Kottos, “ Pt optical lattices and universality in beam dynamics,” *Physical Review A*, vol. 82, no. 1, p. 010103, 2010.
- [21] R. El-Ganainy, K. Makris, D. Christodoulides, and Z. H. Musslimani, “Theory of coupled optical pt -symmetric structures,” *Optics letters*, vol. 32, no. 17, pp. 2632–2634, 2007.

- [22] X. Zhu, H. Ramezani, C. Shi, J. Zhu, and X. Zhang, “P t-symmetric acoustics,” *Physical Review X*, vol. 4, no. 3, p. 031042, 2014.
- [23] P. A. Brandão and S. B. Cavalcanti, “Scattering of partially coherent radiation by non-hermitian localized structures having parity-time symmetry,” *Physical Review A*, vol. 100, no. 4, p. 043822, 2019.
- [24] M. Pinto and P. Brandão, “Asymmetrical splitting in the spectrum of stochastic radiation scattered by non-hermitian materials having pt symmetry,” *Physical Review A*, vol. 101, no. 5, p. 053817, 2020.
- [25] M.-A. Miri, M. A. Eftekhar, M. Facao, A. F. Abouraddy, A. Bakry, M. A. Razvi, A. Alshahrie, A. Alù, and D. N. Christodoulides, “Scattering properties of pt-symmetric objects,” *Journal of Optics*, vol. 18, no. 7, p. 075104, 2016.
- [26] S. Longhi, “Pt-symmetric laser absorber,” *Physical Review A*, vol. 82, no. 3, p. 031801, 2010.
- [27] S. Longhi, “Parity-time symmetry meets photonics: A new twist in non-hermitian optics,” *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 120, no. 6, p. 64001, 2018.
- [28] L. Feng, R. El-Ganainy, and L. Ge, “Non-hermitian photonics based on parity–time symmetry,” *Nature Photonics*, vol. 11, no. 12, pp. 752–762, 2017.
- [29] E. Wolf *et al.*, *Introduction to the Theory of Coherence and Polarization of Light*. Cambridge University Press, 2007.
- [30] M. Born and E. Wolf, *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Elsevier, 2013.
- [31] M. Lahiri and E. Wolf, “Spectral changes of stochastic beams scattered on a deterministic medium,” *Optics letters*, vol. 37, no. 13, pp. 2517–2519, 2012.
- [32] O. Korotkova and G. Gbur, “Chapter four - applications of optical coherence theory,” in *A Tribute to Emil Wolf* (T. D. Visser, ed.), vol. 65 of *Progress in Optics*, pp. 43 – 104, Elsevier, 2020.
- [33] E. Wolf, “Red shifts and blue shifts of spectral lines emitted by two correlated sources,” *Physical review letters*, vol. 58, no. 25, p. 2646, 1987.

- [34] E. Wolf, “Non-cosmological redshifts of spectral lines,” *Nature*, vol. 326, no. 6111, pp. 363–365, 1987.
- [35] E. Wolf and D. F. James, “Correlation-induced spectral changes,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 59, no. 6, p. 771, 1996.
- [36] P. A. Brandão and S. Cavalcanti, “Non-hermitian spectral changes in the scattering of partially coherent radiation by periodic structures,” *Optics letters*, vol. 44, no. 17, pp. 4363–4366, 2019.
- [37] A. Zyablovsky, A. Vinogradov, A. Dorofeenko, A. Pukhov, and A. Lisyansky, “Causality and phase transitions in pt-symmetric optical systems,” *Physical Review A*, vol. 89, no. 3, p. 033808, 2014.
- [38] D. Tsvetkov, V. Bushuev, V. Konotop, and B. Mantsyzov, “Broadband quasi-pt-symmetry sustained by inhomogeneous broadening of the spectral line,” *Physical Review A*, vol. 98, no. 5, p. 053844, 2018.
- [39] V. Bushuev, D. Tsvetkov, V. Konotop, and B. Mantsyzov, “Unidirectional invisibility and enhanced reflection of short pulses in quasi-pt-symmetric media,” *Optics letters*, vol. 44, no. 23, pp. 5667–5670, 2019.
- [40] L. Allen and J. H. Eberly, *Optical resonance and two-level atoms*, vol. 28. Courier Corporation, 1987.
- [41] R. Vieira and P. Brandão, “Wolf effect in the scattering of polychromatic radiation by two spheres having parity-time symmetry,” *Journal of Optics*, 2020.