

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA

João Pedro Vieira de Mendonça Santos

**GERAÇÃO E DISTRIBUIÇÃO DE EMARANHAMENTO
EM REDES DE CAVIDADES ACOPLADAS**

Maceió - AL
2021

JOÃO PEDRO VIEIRA DE MENDONÇA SANTOS

**Geração e distribuição de emaranhamento em
redes de cavidades acopladas**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Guilherme Martins Alves de Almeida

Maceió - AL
2021

Catálogo na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

S237g Santos, João Pedro Vieira de Mendonça.
Geração e distribuição de emaranhamento em redes de cavidades acopladas /
João Pedro Vieira de Mendonça Santos. – 2021.
88 f. : il. color.

Orientador: Guilherme Martins Alves de Almeida.
Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de
Física. Maceió.

Bibliografia: f. 81-88.

1. Rede e cavidades acopladas. 2. Dinâmica de emaranhamento. 3.
Eletrodinâmica quântica de cavidades. I. Título.

CDU: 531.314

Agradecimentos

Agradeço ao Guilherme, meu orientador e amigo, por ter aceito me orientar durante esta pequena jornada que é o mestrado. Agradeço por sempre estar disposto a me ajudar quando necessário. A orientação foi fundamental para o meu rápido crescimento durante este mestrado. Desde o final da graduação estivemos trabalhando juntos e podendo sempre discutir sobre física e coisas da vida.

Aos professores Marcelo, Fidelis e Andre que aceitaram participar como banca examinadora. Só tenho a agradecer. Marcelo, meu orientador durante a graduação, e Fidelis sempre estão por perto me ajudando em minha carreira acadêmica com várias contribuições importantes.

Agradeço a todos os amigos e colegas que estiveram presentes em minha vida durante todo este processo e que com certeza continuarão se fazendo presentes. Durante esta pandemia, todos ficamos afastados mas não tão distantes. Agradeço, em especial, aos meus amigos Nico, Pedro bigodon, Debs, PV, Helena, Waltinho, Mari, Sendy e Lais. A galera da sala 10, Luan, Cibeles, Carol, Fabi e os agregados Giva e James. Matheus e Miqueias, sempre online no GFTC. Aos meus novos amigos do Mato Grosso, Fabricio Jorge, Paloma, Alfredo, Amanda e Ana.

A minha família, especialmente aos meus pais, Fernando e Ana, minha irmã Fernanda, que me apoiaram e me deram a educação necessária para estar onde estou e sempre estiveram ao meu lado, meu primo Lucas pelas discussões acadêmicas bastante interessantes e pelo apoio. Meus sogros e sogras, Lucélia e Marcos, Sebastião e Luciana, por me acolherem desde o início.

Agradeço a Luci, minha amada esposa, por estar ao meu lado, por me apoiar em minha carreira, por todo o carinho e amor. Sempre muito amiga e companheira, foi fundamental para que eu me mantesse são e conseguisse terminar este mestrado no tempo hábil. Sabemos que não sou bom com palavras e que não há palavras para descrever o que sinto e o tanto que posso agradecer por ter chegado até aqui terminando mais uma etapa desta longa carreira. Por tudo e mais um pouco, obrigado.

A todos os professores do IF que me ajudaram a crescer: Marcelo, Solange, Guilherme, Paulo, Italo, Socorro, Eduardo, Heber, Fidelis, Iram, Tereza, Tiago, Wandearley e Sergio. Obrigado.

“I don’t want to believe. I want to know.”
– Carl Sagan

Resumo

Nós estudamos a dinâmica de emaranhamento em uma rede de cavidades acopladas, onde cada cavidade contém um átomo de dois níveis, através do Hamiltoniano de Jaynes-Cummings-Hubbard (JCH) no subespaço de uma excitação. O modelo possui uma rica gama de regimes dinâmicos que podem ser usados para o controle do emaranhamento. O protocolo se baseia em preparar um único átomo excitado no centro da cadeia e deixá-lo evoluir naturalmente seguindo a dinâmica do Hamiltoniano. Nós focamos na concorrência entre pares de átomos e sua relação com as correlações átomo-campo e os modos de campo livre envolvidos. Nós mostramos que a extensão e a distribuição do emaranhamento de pares podem ser manipuladas através da sintonização do acoplamento átomo-cavidade. Além disso, incluindo um ruído estático nas frequências das cavidades, nós exploramos a aparição da localização de Anderson e sua relação combinada com o efeito de armadilhamento atômico conhecido por ocorrer no regime de forte tunelamento. Nós observamos que quanto maior é a desordem, maiores são as correlações entre átomo e campo, enquanto que a concorrência atômica responde de modo não-monotônico. De modo geral, nosso trabalho oferece considerações compreensivas sobre o funcionamento do Hamiltoniano JCH e trás uma contribuição no design de redes quânticas híbridas de luz e matéria.

Palavras-chave: 1. Rede de cavidades acopladas. 2. Dinâmica de emaranhamento. 3. Eletrodinâmica quântica de cavidades.

Abstract

We study the dynamics of entanglement in a one-dimensional coupled-cavity array, with each cavity containing a two-level atom, via the Jaynes-Cummings-Hubbard (JCH) Hamiltonian in the single-excitation sector. The model features a rich variety of dynamical regimes that can be harnessed for entanglement control. The protocol is based on setting an excited atom above the ground state and further letting it evolve following the natural dynamics of the Hamiltonian. Here we focus on the concurrence between pairs of atoms and its relation to atom-field correlations and the involved free-field modes. We show that the extension and distribution pattern of pairwise entanglement can be manipulated through a judicious tuning of the atom-cavity coupling strength. By also including static noise in the cavity frequencies, we explore the onset of Anderson localization and its interplay with the atomic trapping known to take place in the strong-hopping regime. Remarkably, we find that the stronger the disorder is, the higher are the atom-field correlations, whereas the atomic concurrence responds nonmonotonically. Overall, our work offers a comprehensive account of the machinery of the single-excitation JCH Hamiltonian and contributes to the design of hybrid light-matter quantum networks.

Keywords: 1. Coupled Cavity Arrays. 2. Entanglement dynamics. 3. Cavity Quantum Electrodynamics.

Sumário

1	Introdução	7
1.1	Origens da eletrodinâmica quântica de cavidades	8
1.2	Os regimes de interação	12
1.3	Realizações experimentais	15
1.3.1	Cavidade de estado sólido	15
1.3.2	Cavidade microondas	16
1.3.3	Cavidade de circuitos	19
1.4	Redes de cavidades acopladas	20
2	Interação luz-matéria	23
2.1	Quantização do campo EM	23
2.1.1	Não unicidade dos potenciais e transformações de gauge	24
2.1.2	Notação relativística	25
2.1.3	Quantização do Hamiltoniano do campo de radiação	27
2.1.4	Estatística de fótons	30
2.2	Teorias de interação luz-matéria	35
2.2.1	Sistema de dois níveis	36
2.2.2	Modelo de Jaynes-Cummings	41
3	Rede de cavidades acopladas	55
3.1	Formulação macroscópica do eletromagnetismo	55
3.2	Quantização em uma rede periódica	56
3.3	Modelo de Jaynes-Cummings-Hubbard	58
3.3.1	Métodos aproximados	59
3.3.2	Subespaço de uma excitação	62
4	Emaranhamento quântico	67
4.1	Emaranhamento de estados puros	67
4.2	Medidas de emaranhamento	68
4.2.1	Pureza	69

4.2.2	Entropia de von Neumann	69
4.2.3	Concorrência	71
5	Geração e distribuição de emaranhamento	73
5.1	Evolução temporal e emaranhamento	73
5.2	Armadilhamento atômico <i>vs</i> localização de Anderson	76
6	Conclusões	79

Lista de Figuras

1.1	Tecnologias quânticas pioneiras. Esquerda: Átomos ultra-frios em uma armadilha linear interagem com a luz através de um feixe laser que passa através da armadilha. Direita: Cavity eletrodinâmica onde a luz quantizada é confinada e interage com átomos em um feixe que passam através da cavity. Retirado e adaptado de [44].	7
1.2	Diagrama de níveis de energia do átomo ^{87}Rb . Retirado e adaptado de [104].	9
1.3	Estados circulares. (a) Mudança na órbita variando o número quântico orbital l para $n = 5$ de acordo com a teoria semi-clássica. Quando $l = n - 1 = 4$ temos uma órbita circular. (b) Densidade de probabilidade de acordo com a teoria quântica para n muito grande. Retirado e adaptado das referências [101, 104].	10
1.4	Sinais da emissão espontânea intensificada pela cavity. Linhas pontilhadas: cavity fora de ressonância; Linha cheia: cavity em ressonância. O número médio de átomos é (a) 3.5, (b) 2 e (c) 1.3. Retirado e adaptado de [41]. . . .	11
1.5	Esquema do arranjo experimental do micromaser, onde é possível estudar um átomo interagindo com um modo de campo. Retirado e adaptado de [80]. . .	12
1.6	Representação esquemática de uma cavity óptica. Retirado e adaptado de [43].	13
1.7	Representações experimentais de ambos os regimes de interação. (Esquerda) Fraco acoplamento [21]; (Direita) Forte acoplamento [78, 19]. Retirado e adaptado de [36]. Detalhes sobre os resultados no texto.	14
1.8	Alguns exemplos de cavidades nanofotônicas. Imagens retiradas e adaptadas de [63]. Mais detalhes dos experimentos e parâmetros de cavity estão no texto.	15
1.9	Gráfico do padrão de franjas de Ramsey para um feixe de átomo monocromático [79]. A dessintonia relativa $(\omega - \omega_0)/\Omega_0$ está variando no intervalo $[-5, 5]$. Retirado e adaptado de [100].	16

1.10	Esquema simplificado do aparato experimental. Os átomos emanam de um forno e são excitados a níveis de alto número quântico. Então passam pela cavidade onde interagem com um modo de campo. A subfigura nos mostra um esquema de manipulação de estados via interferômetro de Ramsey. Retirado e adaptado de [78].	17
1.11	Visão aproximada da cavidade. Retirado e adaptado de [16].	18
1.12	Cavidade fibra-ótica integrada à uma armadilha de ions. (a) Visão geral e (b) . Retirado e adaptado de [62].	18
1.13	Circuito integrado para cavidade de eletrodinâmica quântica. Detalhes sobre a arquitetura e funcionamento no texto. Retirado e adaptado de [13, 85]. . .	19
1.14	Representações pictográficas de redes quânticas. (a) Rede quântica tridimensional onde os nós quânticos armazenam informação e os canais quânticos a transmitem. (b) Cavidades podem ser usadas como nós e os fótons criam o canal. Retirado e adaptado das referências [56, 43]	20
2.1	Representação esquemática de um ressonador ótico (cavidade ótica): um arranjo que permite que a luz circule em um caminho fechado.	23
2.2	Representação do tensor de Levi-Civita. Retirado e adaptado de [99].	27
2.3	Exemplos de sistemas quânticos de dois níveis. (a) Um elétron, (b) campo elétrico e (c) átomo de dois níveis eletrônicos.	37
2.4	Representação esquemática da interação da luz de frequência ω com um sistema de dois níveis cuja frequência de transição é ω_0	39
2.5	Inversão atômica $W(t)$ mostrando que o átomo oscila entre os níveis com frequência Ω_R . Utilizamos $\Delta = 0$	41
2.6	Esquema de cavidade ótica que interage com um átomo de dois níveis preso em seu interior. Retirado e adaptado de [43].	43
2.7	Inversão atômica para um campo inicialmente em um estado coerente. Parâmetro: $\langle n \rangle = 15$	47
2.8	Mapa no plano $t-\Delta$ mostrando os primeiros colapsos e renascimentos para $\langle \hat{\sigma}_z(t) \rangle$ com $\langle n \rangle = 100$. A pequena figura mostra o mesmo que a figura 2.7 junto com uma aproximação envelope. Retirado e adaptado de [30].	48
2.9	Espectro de autoenergias do Hamiltoniano JC. (Esquerda) Representação dos níveis de energia para um número n de excitações em função da dessintonia Δ (veja a equação 2.132). As linhas tracejadas representam as energias para o caso sem interação, mostrando que a interação abre o <i>gap</i> . Para melhor visualização, ignoramos os termos constantes (em n) de energia. (Direita) O mesmo resultado para mais valores de n , retirado de [71].	49
2.10	Esquema de níveis de energia para os estados nus e vestidos comparativamente.	51
3.1	Possível arranjo experimental para o modelo de Jaynes-Cummings-Hubbard: uma rede de cristal fotônico. Os buracos da rede conseguem criar um índice de refração de tal modo que prende os fótons em uma dada frequência. Nos defeitos, isto é, os sítions onde não há buracos, se formam as cavidades. Em vermelho, estão denotados os átomos que formam sistemas de dois níveis postos um em cada cavidade. Retirado e adaptado de [66].	58

3.2	Representação esquemática do modelo de Jaynes-Cummings-Hubbard no subespaço de uma excitação. Retirado e adaptado de [66].	62
5.1	Evolução temporal exata da entropia de von Neumann e as concorrências atômicas $C_{x_0,33}, C_{31,33}$ para $ \psi(t=0)\rangle = e_{x_0}\rangle$ com $x_0 = 21$ em uma rede uniforme possuindo $N = 41$ sítios operando no regime de forte tunelamento com $g = 10^{-3}\kappa$ e $\Delta = 0$. A entropia oscila com período $T = \pi/g$	74
5.2	Recortes temporais da distribuição de emaranhamento atômico (concorrência) $C_{i,j}$ para (a) $t = 2000\pi/g$, (b) $t = 5000\pi/g$ e (c) $t = 10000\pi/g$, com $g = 10^3\kappa$, tais que $\Pi_a(t) = \cos^2(gt) = 1$ ($S = 0$). O sistema consiste de $N = 101$ cavidades acopladas com o estado inicial $ \psi(t=0)\rangle = e_{51}\rangle$ e $\omega_0 = \omega$. Os resultados são exatos, obtidos através do Hamiltoniano JCH. Note que a função de onda atômica se propaga a uma taxa $\kappa/2$ e então a frente de onda aproximadamente anda um sítio por um tempo κ^{-1} decorrido.	75
5.3	Concorrência máxima $C_{i,j}(t)$ entre todos os pares de átomos para uma janela temporal fixa κt	75
5.4	Evolução temporal exata da (a) entropia de von Neumann entre átomo e campo e (b) concorrência entre dois átomos em $x_0 = 21$ e $x_0 + 1$. Ambos são uma média de 102 realizações independentes para $N = 41$, $g = 10^{-3}J$, $W/J = 0.1, 0.5, 1, 2, 5$, e ω_a em ressonância com a frequência do campo ω_k gerando a maior sobreposição v_{k',x_0} para cada realização.	76
5.5	Concorrência analítica $C_{x_0,x} = 2 c_{a,x_0}c_{a,x}^* $ como uma função do tempo gt e do parâmetro de sobreposição ζ . Cálculo obtido a partir das equações do regime de forte tunelamento ($g \ll \kappa$) considerando $ v_{k',x_0} = \zeta$ e $ v_{k',x} = \sqrt{1 - \zeta^2}$	77

O cérebro dos computadores e celulares é um pequeno chip da ordem de centímetros quadrados, contendo milhões de transistores que controlam a tela, câmera, bateria, entre outros. Agora imagine um chip cujo princípio de funcionamento é baseado em um conjunto de átomos interagindo de acordo com as leis da mecânica quântica. Utilizá-la de forma direta com o objetivo de promover o processamento de informação é o objetivo da computação quântica. Essa modalidade vem sendo amplamente explorada nas últimas décadas, tanto no âmbito teórico quanto no experimental, contando, inclusive, com investimentos de grandes empresas de tecnologia. A unidade básica de informação de um computador quântico é o bit quântico (ou qubit), que pode ser implementado através de sistemas de dois níveis. Elementos da teoria quântica, tais como a superposição e o emaranhamento, fornecem um novo paradigma de computação com aplicações promissoras em criptografia, simulação quântica, busca em banco de dados, dentre outras.

Atualmente, empresas como a Google e a IBM, além de várias *startups*, vêm investindo fortemente em computação quântica. Para trabalharmos com computação quântica, precisamos entender e atingir um alto grau de controle sobre diversos fenômenos oriundos da própria mecânica quântica. Por exemplo, quando confinamos um átomo em uma cavidade óptica, o mesmo está propenso à emissão espontânea devido ao acoplamento com o vácuo, além de vários outros tipos de decaimentos e ruídos externos.

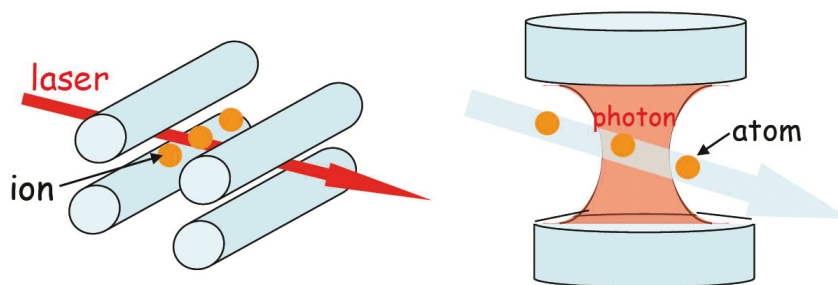


Figura 1.1: Tecnologias quânticas pioneiras. Esquerda: Átomos ultra-frios em uma armadilha linear interagem com a luz através de um feixe laser que passa através da armadilha. Direita: Cavidade eletrodinâmica onde a luz quantizada é confinada e interage com átomos em um feixe que passam através da cavidade. Retirado e adaptado de [44].

Um dos principais sistemas usados para computação quântica e simulação quântica, são os dispositivos baseados em eletrodinâmica quântica de cavidades. Átomos são sistemas relativamente robustos para armazenar informação e a luz possui um alto grau de coerência, podendo ser transmitida por longas distâncias. Isso faz com que sistemas híbridos luz-matéria sejam candidatos promissores para a criação de computadores quânticos em larga escala e para a implementação da internet quântica [56]. Especialistas sugerem que ainda teremos mais dez anos antes disto acontecer. Este não é o único tipo de dispositivo utilizado para os campos de computação, simulação e processamento de informação quântica. De fato, a eletrodinâmica quântica de cavidades enfrenta suas próprias dificuldades de controlabilidade e escalabilidade. Para que a interação luz-átomo seja relevante, o volume da cavidade deve ser necessariamente pequeno, dificultando a controlabilidade. O desenvolvimento de métodos experimentais que permitissem o estudo controlado destes sistemas foi tema do prêmio Nobel de 2012 dividido por Serge Haroche e David J. Wineland [45, 102].

Uma plataforma que pode ser descrita basicamente pelos mesmos princípios físicos trata-se de átomos ultra-frios armadilhados. A figura 1.1 nos mostra um esquema de cada uma das configurações. Em ambos os casos, é possível observar interações de um único átomo interagindo com um único quanta de luz. As duas configurações vêm sendo desenvolvidas concomitantemente desde os primórdios do estudo da interação de quantas singulares. O interesse na área de átomos frios cresceu particularmente rápido após as descobertas notáveis que culminaram o prêmio Nobel de 1997 concedido aos físicos Steven Chu [22], Claude Cohen-Tannoudji [25] e William D. Phillips [75] pelo “desenvolvimento de métodos para esfriamento e armadilhamento de átomos com luz laser”. Entretanto, existe uma grande dificuldade de escalar em número de qubits e manter a rede estável [83].

A escolha da configuração deve estar intimamente relacionada com as dificuldades de implementação para cada objetivo. Neste trabalho, estudamos a geração e a distribuição de emaranhamento em redes de cavidades acopladas [68]. Vários experimentos recentes dão suporte à esta tecnologia de cavidades, como veremos na seção 1.3. Partindo de teorias fundamentais como eletromagnetismo clássico, segunda quantização e sistemas de dois níveis, pudemos obter os modelos básicos para descrever um átomo interagindo com um número arbitrário de fótons em uma cavidade e também redes de cavidades acopladas via tunelamento fotônico, como veremos nos capítulos seguintes.

1.1 Origens da eletrodinâmica quântica de cavidades

Em um artigo de grande influência, Purcell [76, 77], pioneiro em eletrodinâmica quântica de cavidades, estudou a mudança na taxa de emissão espontânea de um spin em um circuito ressonante. De acordo com seus estudos, concluiu-se que a taxa de emissão espontânea para um sistema de dois níveis cresce se o átomo está contido em uma cavidade sintonizada na frequência de transição. Sabemos que a emissão espontânea é uma das principais manifestações da interação dinâmica entre átomo e vácuo. Desse modo, podemos deduzir que a cavidade eleva as flutuações do vácuo, assim aumentando a taxa de transição atômica. Décadas após essa descoberta, Keppeler [57] estudou como as propriedades da cavidade em que o átomo de dois níveis está inserido pode interferir na taxa de emissão espontânea, isto é, na dinâmica de interação átomo-vácuo. O resultado mais importante deste trabalho

foi a observação da possibilidade de inibição de emissão espontânea. Estes trabalhos foram essenciais para o desenvolvimento da teoria de interação átomo-campo no contexto de eletrodinâmica quântica de cavidades. Podemos interpretar que um átomo envolvido por uma cavidade forma um sistema quântico acoplado e, desse modo, os níveis de energia serão deslocados. Essencialmente, a interação dominante é do tipo Van der Waals entre o átomo e as paredes da cavidade. É conhecido que interações deste tipo surgem de mudanças na energia do estado fundamental [20].

O efeito Purcell, isto é, a intensificação da emissão espontânea via cavidade, só pôde ser inicialmente observado por meio de átomos Rydberg em cavidades de microondas. Os estudos relacionados à átomos Rydberg se iniciaram há mais de 100 anos. Johann Balmer em 1885 [35] descobriu uma fórmula que descreveria a série de linhas espectrais vistas para o átomo de hidrogênio [98]. A partir disso, o físico suíço Johannes Rydberg tentou encontrar uma relação matemática entre duas linhas espectrais próximas. Ele encontrou uma relação entre o comprimento de onda e números inteiros,

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right). \quad (1.1)$$

onde $R_H = 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ é a constante de Rydberg. Note que esta fórmula empírica foi descoberta antes da concepção do modelo de Bohr [14]. Observando que esta relação matemática está de acordo com tal modelo, os números inteiros n_1 e n_2 foram identificados com os números quânticos principais. Desse modo, a energia do fóton emitido quando um átomo decai de uma órbita mais alta é hc/λ . Esta fórmula é um dos pilares da espectroscopia e foi de extrema importância para a formulação da mecânica quântica.

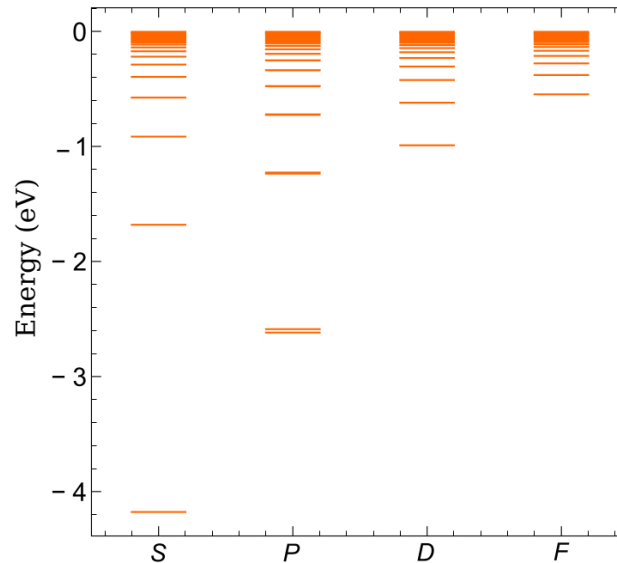


Figura 1.2: Diagrama de níveis de energia do átomo ^{87}Rb . Retirado e adaptado de [104].

Quando um elétron de valência de um certo átomo qualquer é excitado a uma órbita cujo número atômico principal é muito grande, da ordem de dezenas ou mais, a fórmula é válida. Então, tal átomo é chamado de átomo Rydberg. O fato é que, em média, o elétron de valência fica tão longe do núcleo que ele se torna fracamente ligado. Este tipo de arranjo

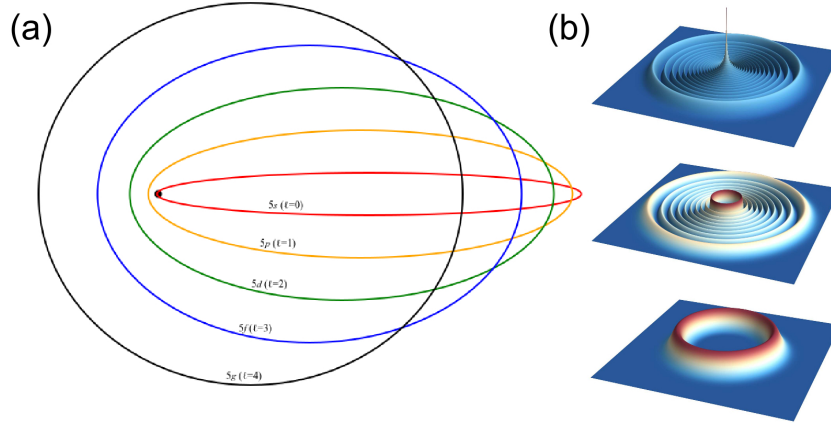


Figura 1.3: Estados circulares. (a) Mudança na órbita variando o número quântico orbital l para $n = 5$ de acordo com a teoria semi-clássica. Quando $l = n - 1 = 4$ temos uma órbita circular. (b) Densidade de probabilidade de acordo com a teoria quântica para n muito grande. Retirado e adaptado das referências [101, 104].

é extremamente sensível a campos eletromagnéticos externos e até mesmo ao campo gerado por um átomo vizinho. A figura 1.2 nos mostra os níveis de energia para o átomo ^{87}Rb . Podemos observar que crescendo n , a distribuição de níveis de energia se torna mais densa. Isto é observado porque a distância entre os níveis de energia escala com n^{-3} quando n é grande. Em alguns casos, as formas de escala podem mudar um pouco. Teremos um número quântico principal efetivo $n^* = n - \delta_{nl}$, onde δ_{nl} é o defeito quântico que depende do número quântico principal n e do número quântico l relacionado ao momento angular orbital.

No modelo semi-clássico (modelo de Bohr), as órbitas variam com l , como visto na figura 1.3a. Neste caso, é observado que quando $l = n - 1$ a órbita é circular e o raio é dado por $r = n^2 a_0$, onde a_0 é o raio de Bohr. Para átomos Rydberg, isto também é válido. Na figura 1.3b, podemos observar a parte radial da probabilidade para diferentes valores de l com $n = 30$. Quando $l = n - 1 = 29$, temos que $\langle r \rangle \approx n^2 a_0$. Esse estado é conhecido como estado circular. Para n muito grande, o raio médio deste átomo pode ser tão grande quanto o tamanho de um vírus ou de um condensado de Bose-Einstein [7]. Este é o estado Rydberg mais estável, pois a sobreposição (ou *overlap*) com os estados de menor energia é muito pequena, o que torna o tempo de vida longo ($\tau \propto n^3$).

Conhecendo todas estas propriedades dos átomos Rydberg, uma questão importante a ser abordada trata da produção destes átomos em um experimento. O método mais comum é o de excitar um estado usando luz laser do comprimento do ultravioleta. A geração do estado Rydberg pode ser feita por um processo de um fóton ou de múltiplos fótons. No processo de um fóton, o sistema se torna efetivamente de dois níveis, isto é, o estado fundamental e o de Rydberg. O esquema de múltiplos fótons pode ser feito por meio de estados intermediários¹. Neste trabalho, nós estaremos interessados no caso da excitação direta, onde o átomo Rydberg pode ser visto como um sistema de dois níveis com todas as vantagens experimentais mencionadas. Além disso, o campo eletromagnético acopla o estado Rydberg ao estado fundamental gerando oscilações de Rabi e outros fenômenos que estudaremos nos próximos

¹os estados intermediários não são estados Rydberg.

capítulos. A geração de campos eletromagnéticos para este fim, só se tornou possível através do uso do maser.

Com o advento do maser, o estudo da interação de um único átomo de dois níveis com um único modo do campo eletromagnético pôde ser difundida com mais rapidez, o que chamou a atenção de diversos pesquisadores [53, 89, 15, 88, 70, 58]. Maser é acrônimo para “amplificação microondas por emissão estimulada de radiação” (do inglês, *microwave amplification by stimulated emission of radiation*), ou seja, é um dispositivo que, através da amplificação da emissão estimulada, produz ondas eletromagnéticas coerentes. Emissão estimulada significa que um fóton (ou um pacote de onda de luz) em contato com um átomo pode fazer um elétron decair para um nível de energia mais baixo e então um fóton adicional com a mesma energia é emitido. O prêmio nobel de 1964 é dedicado ao trabalho pioneiro dos físicos Charles H. Townes, Nikolay Basov e Alexander Prokhorov, por suas contribuições teóricas e experimentais para a produção do maser [40]. Desde então, cavidades com esta tecnologia são amplamente usadas com átomos Rydberg [18, 28, 80, 97], principalmente porque o fóton emitido pelo estado Rydberg geralmente tem comprimento de onda na faixa microondas.

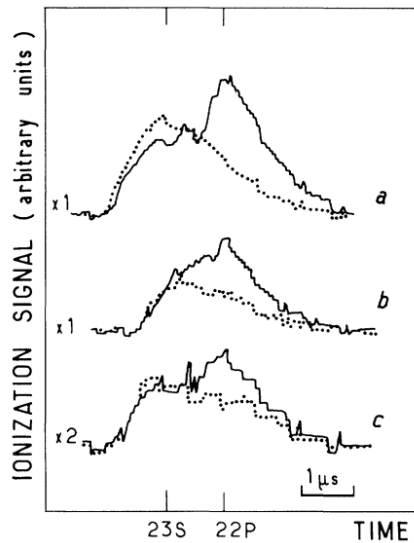


Figura 1.4: Sinais da emissão espontânea intensificada pela cavidade. Linhas pontilhadas: cavidade fora de ressonância; Linha cheia: cavidade em ressonância. O número médio de átomos é (a) 3.5, (b) 2 e (c) 1.3. Retirado e adaptado de [41].

As primeiras observações experimentais do efeito Purcell surgiram através dos trabalhos do grupo francês liderado por S. Haroche e J.M. Raimond [42, 41]. Os autores utilizaram uma cavidade do tipo Fabry-Perót² de nióbio em conjunto com átomos Rydberg de sódio para estudar o efeito Purcell. Como esperado, em ressonância, a intensificação do sinal da emissão espontânea³ é observada. Foi visto que, dentro da cavidade, o átomo pode ter uma taxa de emissão espontânea 35 vezes maior do que em espaço livre. Além disso, este é um dos primeiros trabalhos na área a tratar das propriedades radiativas de um único átomo. A

²Neste tipo de cavidade, duas superfícies finas refletoras confinam a luz. A luz só consegue atravessar a cavidade óptica quando estão em ressonância com ela.

³Na emissão espontânea, um fóton é emitido e detectado por uma câmera CCD. Veja também [27].

figura 1.4 ilustra o resultado obtido para alguns números médios de átomos considerando a cavidade dentro ou fora de ressonância. Logo após esse fascinante trabalho, surgem dois artigos possuindo as primeiras observações experimentais da inibição da emissão espontânea sugerida por Keppeler [57]. O primeiro trabalho trata de um experimento extremamente controlado onde apenas um elétron está confinado em uma cavidade de microondas [37]. Diferentemente de [41], o elétron aqui está essencialmente estacionário no centro da cavidade ocupando uma pequena região comparado com o tamanho do comprimento de onda do campo. Em seguida, o segundo trabalho trata de átomos Rydberg de césio em estados circulares [51]. O interessante deste estado circular é que o átomo irradia somente por uma transição de dipolo. Ambos os trabalhos chegaram a conclusão que a emissão espontânea pode ser alterada e até inibida através de condições limites para o campo. Esses trabalhos, desenvolvidos em meados da década de 1980, foram de extrema importância para a área, ajudando a desvendar as interações fundamentais entre luz e matéria. Serge Haroche, pioneiro no estudo de campos de microondas e átomos Rydberg, foi laureado com o prêmio Nobel em 2012 pelas contribuições experimentais no que diz respeito a manipulação de átomos e quantas individuais [45].

A primeira observação da interação entre quantas singulares de átomo e campo pode ser inderessada à D. Meschede *et. al.* [69] em meados de 1985, utilizando as tecnologias de maser e átomos Rydberg. Este experimento introduziu um novo tipo de oscilador quântico onde as flutuações quânticas possuem um papel fundamental. Foi mostrado, de acordo com a estatística Poissoniana, que 99% dos eventos são de um único átomo. A figura 1.5 mostra um diagrama do experimento. Este experimento foi realizado no regime de forte acoplamento, isto é, a interação do átomo com a cavidade prevalece sobre a dissipação – o que, até então, era impossível para experimentos com um átomo. Este é o conhecido regime de forte acoplamento, um dos regimes de interação que vamos estudar em detalhes a seguir.

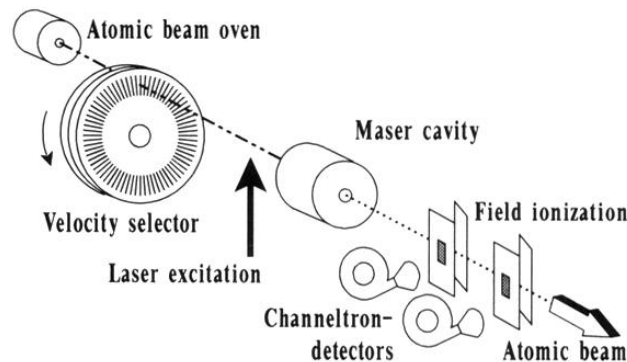


Figura 1.5: Esquema do arranjo experimental do micromaser, onde é possível estudar um átomo interagindo com um modo de campo. Retirado e adaptado de [80].

1.2 Os regimes de interação

Em eletrodinâmica quântica de cavidades há dois regimes principais de interação, chamados de fraco e forte. Tal distinção tem uma clara relação com os experimentos já mencionados. No regime de fraco acoplamento, o acoplamento átomo-campo é pequeno comparado com

a dissipação. Isto é, o tempo característico da interação entre o átomo e o campo é muito curto comparado com o tempo em que os processos dissipativos se tornam relevantes. Não há modificações relevantes nas propriedades radiativas do átomo mas há uma clara modificação na taxa de emissão espontânea e nos níveis de energia do átomo. Por outro lado, no regime de forte acoplamento, a interação átomo-campo domina completamente qualquer processo dissipativo. Neste regime foi possível criar o sistema quântico mais simples possível para a interação luz-matéria, um átomo interagindo com um único quanta de luz. Como mencionado na seção anterior, em tal regime há uma modificação radical nas propriedades radiativas do átomo e, além disso, é possível criar e manipular estados emaranhados de átomo e campo.

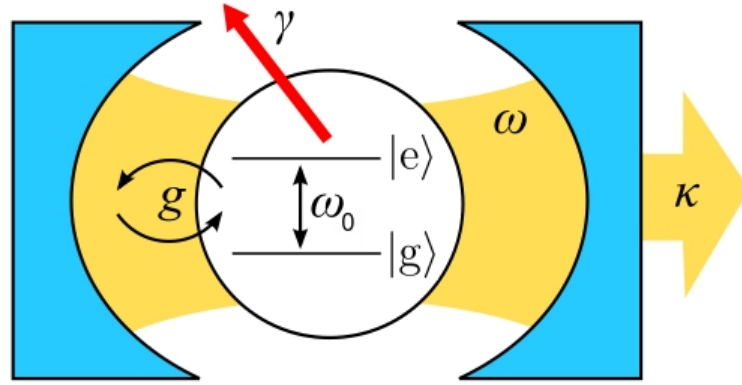


Figura 1.6: Representação esquemática de uma cavidade óptica. Retirado e adaptado de [43].

Para entendermos melhor a classificação dos regimes de interação, é necessário conhecer as principais escalas de tempo de sistemas de eletrodinâmica quântica de cavidades. São eles,

- Tempo de vida dos níveis atômicos,

$$T_{\text{at}} = \frac{1}{\gamma}. \quad (1.2)$$

Está relacionado com a taxa em que ocorre emissão espontânea, levando à uma perda incoerente de fótons para fora da cavidade.

- Tempo de vida da cavidade,

$$T_c = \frac{1}{\kappa}. \quad (1.3)$$

É o inverso da taxa em que ocorre o tunelamento de fótons através das paredes da cavidade.

- Tempo médio de transição entre os níveis atômicos T_{res} ,

$$\frac{1}{T_{\text{res}}} = \Omega_0 = 2g. \quad (1.4)$$

Enquanto que a energia de acoplamento é $\hbar g$, a frequência de Rabi será Ω_0 . Então $1/\Omega_0$ é o tempo característico desse comportamento.

- Tempo de interação de átomo-cavidade, T_{int} .

O tempo em que a interação é relevante no sistema. Está claramente relacionado com todos os outros tempos mencionados acima, ou seja, deve depender do balanceamento entre eles.

Além desses, há o tempo em que o átomo transita na cavidade T_{tr} . Pois, nos experimentos reais, vemos que há um feixe de átomos que passa pela cavidade e as interações ocorrem. No regime de forte acoplamento, este tempo deve ser comparável ao tempo relacionado com a interação átomo-campo (T_{res}). A figura 1.6 mostra uma representação esquemática de uma cavidade óptica e os respectivos processos relevantes.

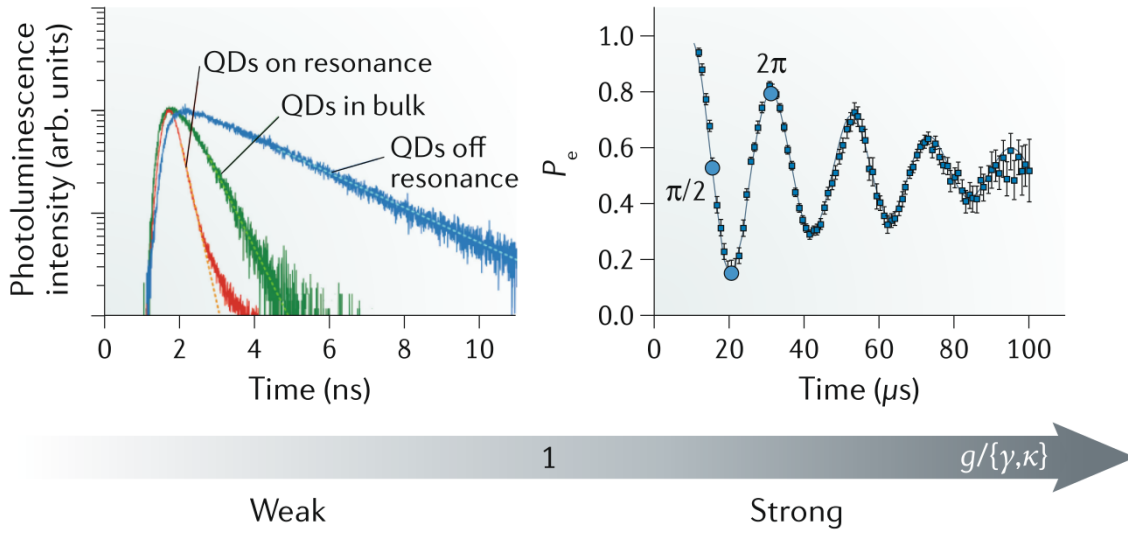


Figura 1.7: Representações experimentais de ambos os regimes de interação. (Esquerda) Fraco acoplamento [21]; (Direita) Forte acoplamento [78, 19]. Retirado e adaptado de [36]. Detalhes sobre os resultados no texto.

As condições de forte acoplamento, ou seja, as condições para que o acoplamento átomo-cavidade supere os processos dissipativos, são

$$T_{\text{int}}\Omega_0 \approx 1, \quad (1.5a)$$

$$T_{\text{res}}, T_{\text{int}} \ll T_{\text{at}}, T_{\text{c}}. \quad (1.5b)$$

Para ilustrar estes dois regimes, a figura 1.7 trás dois experimentos notáveis. No regime de fraco acoplamento, temos uma representação experimental do controle completo da dinâmica de emissão espontânea de pontos quânticos singulares em uma nano-cavidade de cristal fotônico. É mostrada a intensidade da fotoluminescência para os casos em ressonância com a cavidade, fora de ressonância e em *bulk* (sem cavidade). Podemos observar que os pontos quânticos dentro de uma cavidade ressonante decaem muito mais rápido que os outros casos. Este é o efeito Purcell. Para o regime de forte acoplamento, temos um experimento com átomos Rydberg acoplados a uma cavidade Fabry-Pérot de microondas. Neste sistema surgem oscilações de Rabi no vácuo. Como pode ser visto na figura, um átomo excitado entra na cavidade ressonante e as excitações atômicas ficam trocando várias vezes até que o oscilador decaia.

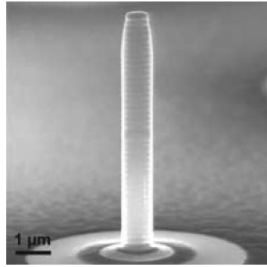
1.3 Realizações experimentais

Vimos que os experimentos guiaram o avanço da teoria de interação luz-matéria. Então, mesmo não trabalhando com experimentos diretamente, é de extrema importância conhecer as realizações experimentais modernas. Vamos apresentar brevemente algumas das realizações experimentais mais avançadas da atualidade. Também é importante mostrar se tais experimentos podem alcançar o tão esperado regime de forte acoplamento, onde os processos coerentes são dominantes. Para alcançarmos o regime de forte acoplamento temos que satisfazer a seguinte condição [12],

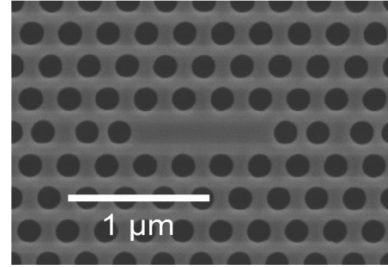
$$C = \frac{g^2}{2\kappa\gamma} \gg 1. \quad (1.6)$$

1.3.1 Cavidade de estado sólido

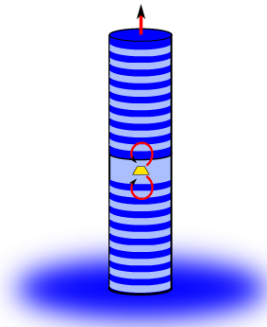
Consiste em pontos quânticos acoplados a espelhos de Bragg ou via *gap* fotônico. Existem vários exemplos de cavidades mas vamos nos ater aqui a apenas dois deles, a cavidade micro-pilar e de cristal fotônico.



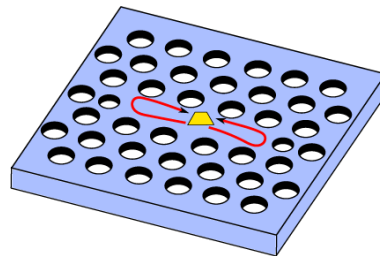
(a) cavidade micro-pilar: experimento real.



(b) cavidade de cristal fotônico: experimento real.



(c) cavidade micro-pilar: esboço.



(d) cavidade de cristal fotônico: esboço.

Figura 1.8: Alguns exemplos de cavidades nanofotônicas. Imagens retiradas e adaptadas de [63]. Mais detalhes dos experimentos e parâmetros de cavidade estão no texto.

Cavidade micro-pilar

Uma cavidade micro-pilar consiste em uma pilha de camadas com índices de refração alternantes, onde o diâmetro é de apenas poucos microns. Estas camadas alternantes formam um espelho de Bragg cuja refletividade é controlada pela quantidade de camadas. Entre dois espelhos de Bragg existe um espaço formando uma cavidade cujos modos são extremamente bem localizados. Como pode ser visto nas figuras 1.8(a) e (c), é possível posicionar um único ponto quântico em tal cavidade. Os parâmetros relevantes para a eletrodinâmica quântica de cavidades são, aproximadamente, $(g, \kappa, \gamma) = 2\pi \times (4, 5, 4)$ GHz [64].

Cristal fotônico

Os modos de cavidade bem localizados também podem ser obtidos através de cristais fotônicos por meio da criação de defeitos. Nas figuras 1.8(b) e (d), temos como exemplo o cristal fotônico bidimensional onde foram removidos três buracos. O *gap* fotônico localiza a luz na região de defeito. Podemos ver na figura 1.8(d) como o ponto quântico preferencialmente emite no modo de cavidade. Esse tipo avançado de experimento possui alta controlabilidade, mostrando o potencial da plataforma. De acordo com [47], os parâmetros obtidos são, aproximadamente, $(g, \kappa, \gamma) = 2\pi \times (22, 11, < 0.1)$ GHz.

1.3.2 Cavidade microondas

As cavidades microondas estão no núcleo da história da eletrodinâmica quântica, como vimos nas seções anteriores. Além do mencionado grupo francês liderado por Haroche, vários outros grupos líderes de pesquisa na área mantêm esta tecnologia. As cavidades destes experimentos são do tipo Fabry-Perót.

Átomos Rydberg e interferômetro de Ramsey

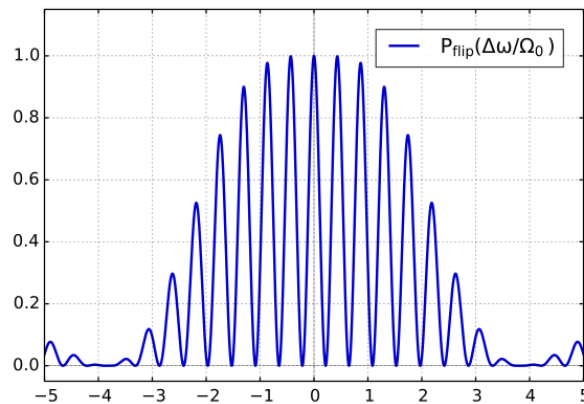


Figura 1.9: Gráfico do padrão de franjas de Ramsey para um feixe de átomo monocromático [79]. A dessintonia relativa $(\omega - \omega_0)/\Omega_0$ está variando no intervalo $[-5, 5]$. Retirado e adaptado de [100].

O interferômetro de Ramsey é usado como uma ferramenta que pode desde preparar estados de número de fótons por meio de loops de feedback, até emaranhar átomos e fótons. O

aparato também é amplamente usado para relógios atômicos [46]. O princípio deste aparato é relativamente simples. Átomos emanando de um feixe experimentam sucessivos pulsos microondas enquanto passam através de duas seções distantes de uma guia de onda. Os pulsos são sintonizados quase em ressonância com a frequência de transição atômica. Saindo da guia de onda, os estados atômicos são determinados por fluorescência óptica. A probabilidade de detectar átomos no estado fundamental é modulada variando a frequência do laser, onde é máxima quando é igual a frequência de transição (figura 1.9).

Para o estudo de eletrodinâmica quântica, este esquema é amplamente usado para a manipular os estados dos átomos. Especialmente para o caso de átomos Rydberg circulares, este aparato é particularmente útil. Mostramos na figura 1.10 um esquema simplificado com os principais mecanismos desde aparato. Átomos de Rubídio emanam de um forno O , são excitados em uma caixa B através de um processo pulsado até um estado circular com alto número quântico principal. Os átomos passam através de uma cavidade supercondutora Fabry-Pérot de microondas C que está sintonizada quase em ressonância com a frequência de transição entre os níveis Rydberg. A cavidade possui um campo térmico residual com um número médio de fótons igual a um, tornando possível estudar a interação com um único quanta [65]. No caso multi-fóton, uma fonte S , acoplada à cavidade, realiza um deslocamento gerando assim um campo coerente dentro da cavidade [39] – aqui é possível negligenciar o campo termal. Os estados produzidos pela zona B podem ser manipulados e emaranhados por meio da fonte microondas externa S' antes de interagir com a cavidade C . O interferômetro de Ramsey é usado aqui para este propósito, onde pulsos de radiação microondas são aplicados nas zonas R_1 e R_2 (subfigura 1.10). Estes pulsos são ótimas ferramentas para emaranhar os graus de liberdade atômicos por serem radiação clássica, isto é, o tempo de relaxação é muito menor que o de decaimento [55]. Por fim, os átomos são detectados por ionização atômica no detector D .

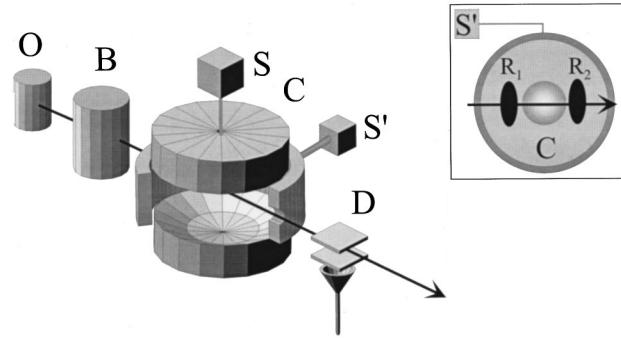


Figura 1.10: Esquema simplificado do aparato experimental. Os átomos emanam de um forno e são excitados a níveis de alto número quântico. Então passam pela cavidade onde interagem com um modo de campo. A subfigura nos mostra um esquema de manipulação de estados via interferômetro de Ramsey. Retirado e adaptado de [78].

De acordo com [17], os parâmetros deste aparato são, aproximadamente, $(g, \kappa, \gamma) = 2\pi \times (25 \times 10^3, 7, 30)$ Hz. Este experimento é abordado de forma ainda mais detalhada na aula Nobel de Serge Haroche [45] e na referência [46].

Cavidade em fibra ótica

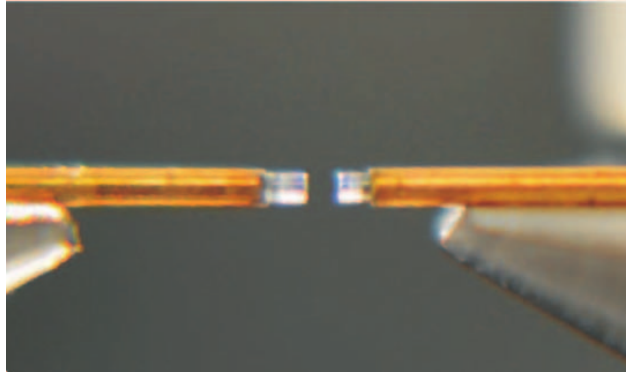


Figura 1.11: Visão aproximada da cavidade. Retirado e adaptado de [16].

O segundo aparato experimental consiste em uma cavidade de eletrodinâmica quântica miniaturizada. Uma cavidade Fabry-Pérot (FP) baseada em fibra ótica está integrada à uma armadilha linear. Este aparato é produzido colocando duas fibras óticas extremamente próximas, onde um revestimento altamente reflexivo é fabricado em uma face de cada fibra. Na figura 1.11, vemos as fibras espelhadas formando uma cavidade FP de comprimento $200\mu\text{m}$.

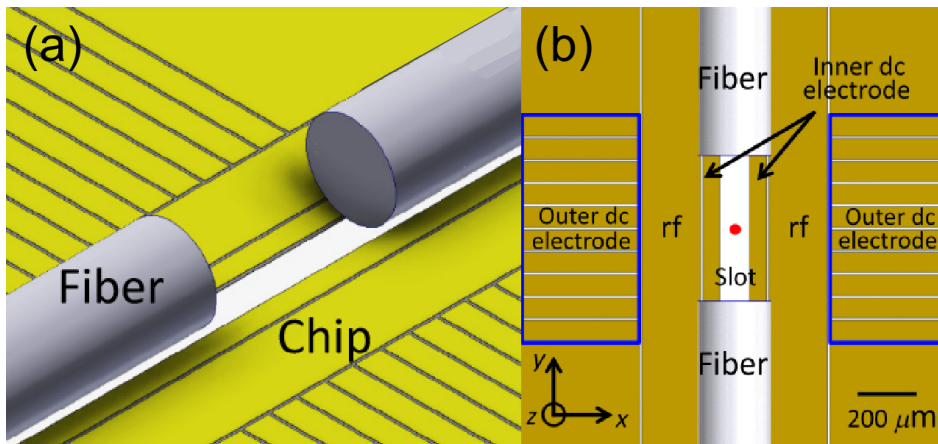


Figura 1.12: Cavidade fibra-ótica integrada à uma armadilha de íons. (a) Visão geral e (b) . Retirado e adaptado de [62].

Estas cavidades em fibra ótica são bastante promissoras para o estudo da interação luz-matéria quando é integrada à uma armadilha de íons. Já mencionamos como a configuração de armadilhamento de íons é promissora. Esta plataforma híbrida combina ambos os sistemas trazendo o melhor dos dois mundos. Em contraste com os sistemas mencionados acima, este promete ser facilmente escalável em número de qubits. Como exemplo, podemos ver na figura 1.12 uma cavidade de fibra ótica baseada em um sistema microeletromecânico que está integrada em um sistema de armadilhamento de íons [62]. Podemos ver na figura 1.12b a configuração do chip contendo trilhos de radio frequência e eletrodos DC internos

e externos. Esta configuração confina os íons de superfície ao longo do eixo da cavidade na posição central marcada em vermelho. Os parâmetros relevantes da cavidade estão no regime de forte acoplamento onde $C > 160$ [16, 91]. Várias referências dão suporte a esse tipo de arranjo experimental e mostram que é possível alcançar o regime de forte acoplamento [105, 52, 87, 72].

1.3.3 Cavidade de circuitos

Consiste em qubits supercondutores acoplados a fótons armazenados em ressonadores de guia de onda coplanares de alta qualidade. Este sistema promete proteger os qubits de decoerência e a cavidade de perda de fótons [95, 13].

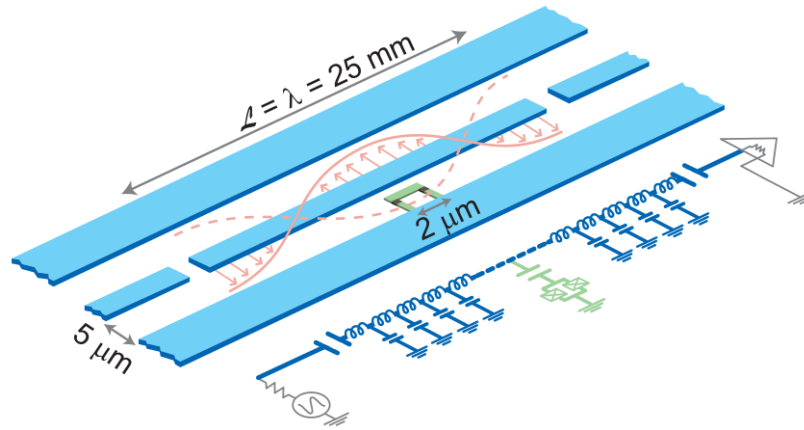


Figura 1.13: Circuito integrado para cavidade de eletrodinâmica quântica. Detalhes sobre a arquitetura e funcionamento no texto. Retirado e adaptado de [13, 85].

Circuitos supercondutores podem ser usados para atuar como átomos artificiais coerentes. Estes circuitos são particularmente interessantes pois operam na frequência de microondas e se manifestam macroscopicamente através de parâmetros como corrente e voltagem. Porém, dentro do circuito os efeitos são quânticos. Campos eletromagnéticos podem ser inseridos no circuito para interagir com ele e então poderemos observar interações típicas de eletrodinâmica quântica. Este aparato possui grandes vantagens em controlabilidade. Por exemplo, é possível proteger o dispositivo de decaimento radiativo acoplando qubits distantes através dos fótons. A chave para o estudo de eletrodinâmica quântica de cavidades nesse sistema é a guia de onda ressonadora coplanar unidimensional que forma uma cavidade microondas. Uma representação detalhada da arquitetura do sistema pode ser vista na figura 1.13. No centro da guia de onda ressonadora coplanar (em azul) temos uma caixa de pares de Cooper (verde). A caixa de pares de Cooper se comporta como um sistema de dois níveis e acopla os fótons armazenados no ressonador através de uma interação do tipo dipolo elétrico. A frequência ressonante da cavidade é definida pelo comprimento entre o *gap* de dois capacitores nas extremidades, o qual atuam como espelhos microondas. A cavidade é acionada de um lado e o sinal transmitido é medido do outro lado. A caixa é colocada em um antinodo⁴ no perfil de tensão espacial para o primeiro harmônico (rosa).

⁴região de amplitude máxima entre dois nós adjacentes em uma onda estacionária.

Devido à sua alta controlabilidade, o sistema pode alcançar o limite de forte acoplamento, onde as dissipações são irrelevantes. De acordo com [95], os parâmetros relevantes são $(g, \kappa, \gamma) = 2\pi \times (5.8, 0.8, 0.7)$ MHz.

1.4 Redes de cavidades acopladas

Todo esse entendimento relacionado à possibilidade de modificar os parâmetros do sistema está relacionado com controlabilidade. Se estamos interessados em computação quântica e processamento de informação quântica, a controlabilidade do sistema é imprescindível. Porém, este não é o único interesse para ambas as áreas. A escalabilidade do sistema nos dirá se é possível criar redes extensas para transmitir informação. Dentre os sistemas mencionados na seção anterior, as cavidades de circuitos e as cavidades em fibra ótica apresentam as melhores chances para a futura criação de grandes redes de cavidades.

Neste trabalho, nós estudamos a geração e distribuição de emaranhamento em redes de cavidades acopladas. O emaranhamento é o ingrediente fundamental para o processamento de informação e é extremamente útil em computação quântica. Nesta seção, vamos então dar um breve prelúdio do que se tratam estas redes quânticas.

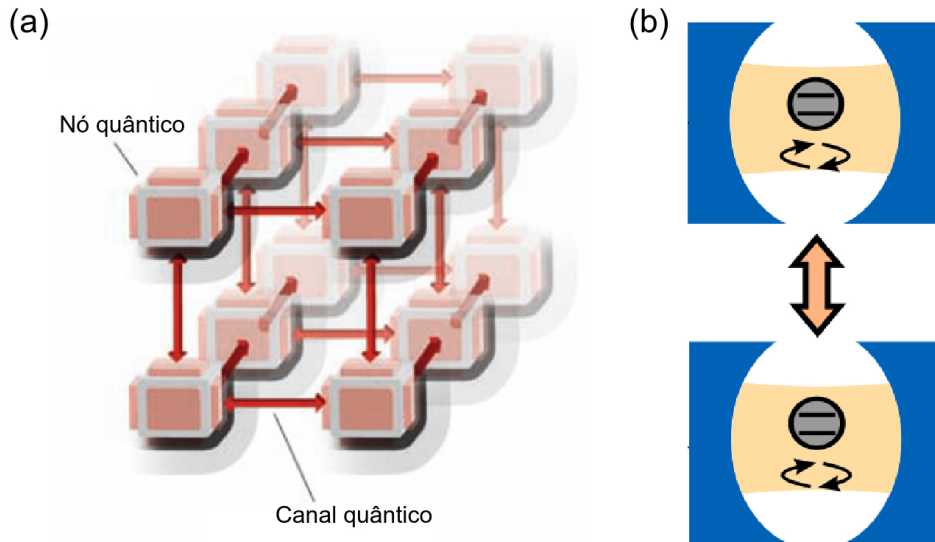


Figura 1.14: Representações pictográficas de redes quânticas. (a) Rede quântica tridimensional onde os nós quânticos armazenam informação e os canais quânticos a transmitem. (b) Cavidades podem ser usadas como nós e os fótons criam o canal. Retirado e adaptado das referências [56, 43]

Em redes quânticas, a informação quântica é gerada e processada nos nós quânticos. Tais nós são conectados através de canais quânticos que, além de distribuir o emaranhamento através de toda a rede, pode transportar estados quânticos. A figura 1.14a nos mostra uma ideia de como seria uma rede quântica. As cavidades de eletrodinâmica quântica são fortes candidatos para estas redes quânticas. Átomos podem armazenar informação quântica por longos períodos de coerência, sendo então memórias relativamente robustas [61, 90, 107]. Um dos processos básicos de uma cavidade é o tunelamento de fótons. Se as cavidades estão conectadas por exemplo fibra ótica, o tunelamento de fótons pode ser controlado de modo

que não há perda incoerente de fótons. Desse modo, os fótons atuam como o canal quântico entre cavidades adjacentes. Além de ser naturalmente um canal nesse tipo de sistema, os fótons podem se propagar por um longo período de tempo sem perda de coerência quântica [96, 8, 106]. Concluimos então que redes de cavidades acopladas possuem todos os blocos de construção fundamentais para a construção de redes quânticas. De acordo com Kimble [56], esta noção de rede quântica pode ser estendida para contemplar a ideia da internet quântica.

2.1 Quantização do campo EM

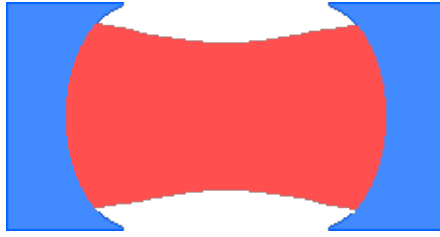


Figura 2.1: Representação esquemática de um ressonador óptico (cavidade ótica): um arranjo que permite que a luz circule em um caminho fechado.

Antes de estudar a teoria quântica da interação luz-matéria, nós precisamos fazer a quantização do campo eletromagnético em uma cavidade – como a Figura 2.1. Esta é uma aplicação especial da segunda quantização [3]. Vamos começar lembrando das equações de Maxwell com fonte,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Os campos podem ser escritos em termos dos potenciais. Como o divergente do campo de indução magnética é nulo, pode ser escrito em termos de um potencial vetor

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.2)$$

pois $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$. Note que o rotacional do campo elétrico,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) \Rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi,$$

nos leva ao campo elétrico escrito em termos de ambos os potenciais, escalar e vetor,

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

pois $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$. Podemos descrever o sistema apenas em termos de ϕ e $\mathbf{A}$. Tomando o rotacional de $\mathbf{B}$,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

e usando $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ obtemos

$$\left(\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (2.4)$$

Por outro lado temos, via equações de Maxwell, $\nabla \cdot (-\nabla \phi - \partial \mathbf{A} / \partial t) = \rho / \varepsilon_0$. Assim,

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (2.5)$$

Estas duas equações contém toda a informação das equações de Maxwell. Mostrando que podemos tratar somente dos potenciais.

2.1.1 Não unicidade dos potenciais e transformações de gauge

Os potenciais obtidos não são únicos. Observe que podemos fazer as seguintes transformações sem alterar os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$,

$$\phi \rightarrow \phi + \beta, \quad (2.6a)$$

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \chi, \quad (2.6b)$$

onde β é constante no espaço. Os campos são invariantes sob tais transformações devido ao $\nabla \beta = 0$ e $\nabla \times (\nabla \chi) = 0$. A transformação de gauge é obtida relacionando β e $\nabla \chi$. Como as transformações levam ao mesmo campo elétrico,

$$\nabla \beta + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \chi) = 0 \Rightarrow \nabla \left(\beta + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) = 0,$$

temos finalmente que $\beta = -\partial \chi / \partial t$. Então,

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi, \quad (2.7a)$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad (2.7b)$$

os potenciais $(\phi', \mathbf{A}')$ e $(\phi, \mathbf{A})$ produzem os mesmos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. Esta é a transformação de gauge, o qual é invariante. No eletromagnetismo clássico, a escolha de χ costuma ser usada para simplificar os cálculos. Neste trabalho, vamos focar no gauge de Coulomb, onde χ é escolhido de tal modo que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Fisicamente, isto diz que ϕ vai refletir todas as variações em ρ , pois

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (2.8)$$

ou seja, o potencial escalar ϕ pode ser escrito em termos da fonte,

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (2.9)$$

Quando não há fonte o potencial escalar é nulo. Outra escolha bastante usada é o gauge de Lorentz onde temos que χ é escolhido de modo que

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (2.10)$$

Desse modo, o vetor potencial vai refletir as mudanças na densidade de corrente $\mathbf{J}$. O potencial escalar pode ser escrito também em termos da fonte, mas em um tempo retardado

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t_r)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad (2.11)$$

com $t_r = t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$.

2.1.2 Notação relativística

É conveniente utilizar a notação tensorial de índices para descrever o eletromagnetismo, especialmente para estudar efeitos relativísticos. Em conjunto com a convenção de Einstein, é a notação comumente utilizada em relatividade e teoria quântica de campos. Seguiremos a convenção de que vetores são matrizes $n \times 1$ e covetores são matrizes $1 \times n$. Para denotar as componentes do vetor escrevemos o índice acima, v^i , e para as componentes dos covetores escrevemos o índice abaixo, u_i . Generalizando o conceito para tensores de qualquer ordem, temos os tensores contravariantes e covariantes onde os índices são escritos acima ou abaixo, respectivamente. Vamos nos restringir a tensores de até terceira ordem. Também usaremos a convenção de Einstein onde os índices repetidos representam somas,

$$y = \sum_{i=1}^3 c_i x_i = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \Rightarrow y = c_i x^i, \quad (2.12)$$

além disso, nesta convenção, os índices latinos correm de 1 a 3 e os índices gregos de 0 a 3.

Ordem 0

Os tensores de ordem zero são escalares e não possuem índices, são apenas números. Na equação 2.12, y é de ordem zero. Podem ser obtidos através de produtos escalares entre tensores de ordem 1 (vetores), por exemplo.

Ordem 1

Os vetores são tensores de ordem 1. O produto interno é escrito como multiplicação das matrizes linha e coluna, isto é

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_j v^j = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Neste momento, podemos definir o tensor métrico de Minkowski. É necessário conhecê-lo para contrair os tensores, sendo útil para levantar e abaixar os índices. Vamos usar a convenção em que a métrica de Minkowski é da forma $(-+++)$, isto é, $g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Os índices de um tensor de primeira ordem podem ser abaixados ou levantados fazendo,

$$g^{ij} A_j = A^i, \quad (2.14a)$$

$$g_{ij} A^i = A_j. \quad (2.14b)$$

Em relatividade, as quantidades também são tensores. Posição, momentum, campos e potenciais aparecem como tensores. Neste caso, os vetores possuem quatro entradas onde as três últimas são associadas às coordenadas x, y e z . Os tensores dessa forma também são chamados de quadrivetores. Alguns exemplos de tensores de primeira ordem que vamos usar neste trabalho são posição x^μ , quadrivetor de onda k^μ e potencial quadrivetor A^μ . Respectivamente, temos

$$x^\mu = (ct, x, y, z), \quad (2.15a)$$

$$k^\mu = (\omega/c, k_x, k_y, k_z), \quad (2.15b)$$

$$A^\mu = (\phi/c, A_x, A_y, A_z). \quad (2.15c)$$

Note que a velocidade da luz entra corrigindo a dimensão quando incorporamos alguma quantidade associada a entrada de índice zero. O tempo entrou como ct na posição, a frequência entrou como ω/c no quadrivetor de onda e o potencial escalar aparece como ϕ/c no potencial EM. Após definir x^μ , as derivadas são definidas de forma simples

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu, \quad (2.16a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \partial^\mu. \quad (2.16b)$$

O operador d'Alembertiano é uma forma generalizada do Laplaciano incluindo a parte temporal,

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (2.17)$$

As derivadas de A^μ podem ser escritas como

$$\partial^\nu A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} = \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (2.18)$$

Ordem 2

Os tensores de segunda ordem seguem o mesmo raciocínio, sendo que abaixar e levantar os tensores segue a regra

$$g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} A_{\gamma\delta} = A^{\alpha\beta}, \quad (2.19a)$$

$$g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} A^{\gamma\delta} = A_{\alpha\beta}. \quad (2.19b)$$

O campo eletromagnético aparece como um único tensor de ordem dois, conhecido campo tensorial

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (2.20)$$

Após aplicar as métricas para abaixar os índices e obter $F_{\mu\nu}$ concluímos que para abaixar os índices, usando a métrica $(-+++)$, só é necessário trocar de sinal as componentes de índice zero.

Ordem 3

Desta ordem em diante é difícil visualizar os tensores. Para as ordens um e dois, é fácil observar que são vetores e matrizes. O tensor de terceira ordem carrega três índices e é menos comum aqui no uso de eletrodinâmica relativística.

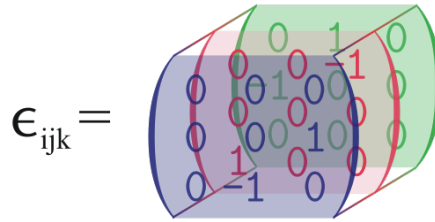


Figura 2.2: Representação do tensor de Levi-Civita. Retirado e adaptado de [99].

Um tensor de alta ordem muito usado é o de Levi-Civita ϵ_{ijk} , dado por

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \# \text{ par de permutações;} \\ -1, & \# \text{ ímpar de permutações;} \\ 0, & \text{índices repetidos;} \end{cases} \quad (2.21)$$

Com isto podemos definir o produto externo como,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \epsilon_{jk}^i u^j v^k \mathbf{e}_i. \quad (2.22)$$

2.1.3 Quantização do Hamiltoniando do campo de radiação

Helmholtz mostrou em 1858 [94], no contexto de hidrodinâmica, que qualquer campo vetorial que desaparece adequadamente rápido no infinito pode ser decomposto em termos das suas componentes rotacional e irrotacional,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\perp + \mathbf{A}_\parallel \quad (2.23)$$

onde $\nabla \cdot \mathbf{A}_\perp = 0$ e $\nabla \times \mathbf{A}_\parallel = 0$. Note que, nesse caso, é o mesmo que separar as partes transversal e longitudinal. Isto nos mostra que o gauge de Coulomb considera um potencial vetor transversal, $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_\perp$ (campo rotacional).

Vamos fazer uma decomposição de Fourier do potencial vetor em um volume cúbico, com $V = L^3$, e aplicar as condições periódicas de contorno. Em $t = 0$,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \sum_{\alpha=1}^2 (\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha)} c_{k,\alpha}(t = 0) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \boldsymbol{\epsilon}^{*(\alpha)} c_{k,\alpha}^*(t = 0) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}), \quad (2.24)$$

onde $c_{k,\alpha}$ são os coeficientes da expansão, $\mathbf{k}$ é o vetor de onda com $k_i = 2\pi n_i/L$ ($i = x, y, z$), $1/\sqrt{V}$ vem da normalização das ondas planas e $\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha)}$ são dois vetores que representam a polarização e obedecem a relação de ortonormalidade. Os vetores de polarização podem ter direções cartesianas x e y – o que os tornam reais –, onde $\boldsymbol{\epsilon}^{x,y} \cdot \mathbf{k} = 0$. Também podem representar as polarizações circulares – o que os tornam complexos – que são escritas em termos de $\boldsymbol{\epsilon}^x$ ou $\boldsymbol{\epsilon}^y$.

A equação de Maxwell no gauge de Coulomb, considerando que não há fonte, se torna simples $\square A^\mu = 0$. Com isso, a dependência temporal é obtida

$$c_{k,\alpha}(t) = c_{k,\alpha}(0) e^{-i\omega t}, \quad \text{onde } \omega = ck.$$

O potencial vetor pode então ser escrito como

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \sum_{\alpha=1}^2 (\boldsymbol{\epsilon}^{(\alpha)} c_{k,\alpha}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \boldsymbol{\epsilon}^{*(\alpha)} c_{k,\alpha}^*(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}). \quad (2.25)$$

Escrevendo explicitamente a dependência temporal de $\mathbf{A}$ e mantendo os coeficientes independentes do tempo como $c_{k,\alpha}(0) \equiv c_{k,\alpha}$, podemos escrever na forma covariante

$$A^\mu = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \sum_{\alpha=1}^2 \epsilon_\mu^{(\alpha)} c_{k,\alpha} e^{ik_\rho x^\rho} + \text{c.c.}, \quad (2.26)$$

onde o produto interno é $k_\mu x^\mu = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$.

O Hamiltoniano local pode ser escrito em termos de $F^{\mu\nu}$ e A^μ da seguinte maneira

$$\mu_0 \mathcal{H} = F_{\mu 0} \partial^0 A^\mu + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.27)$$

com o Hamiltoniano total dado por $H = \int d^3x \mathcal{H}$. Após alguma álgebra, o Hamiltoniano $\mathcal{H}$ pode ser escrito na forma mais simples

$$\mu_0 \mathcal{H} = -\partial^0 A^\mu \partial^0 A_\mu. \quad (2.28)$$

Desse modo, podemos escrever o Hamiltoniano total em termos de $c_{k,\alpha}$

$$H = -\frac{1}{\mu_0} \int d^3x \frac{\partial A^\mu}{\partial x_0} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_0} = -\frac{1}{V\mu_0} \int d^3x \sum_k \sum_\alpha \left(-c_{k,\alpha} \frac{\omega}{c} e^{ik_\rho x^\rho} + c_{k,\alpha}^* \frac{\omega}{c} e^{-ik_\rho x^\rho} \right)^2.$$

Note que os vetores de polarização somem do Hamiltoniano devido à relação de ortonormalidade. Lembrando da condição de ortonormalidade para as ondas planas

$$\frac{1}{V} \int d^3x e^{-ik_\rho x^\rho} e^{ik'_\rho x^\rho} = \delta_{k,k'},$$

podemos escrever finalmente

$$H = \varepsilon_0 \sum_{k,\alpha} \omega^2 [c_{k,\alpha} c_{k,\alpha}^* + c_{k,\alpha}^* c_{k,\alpha}] , \quad (2.29)$$

onde $c_{k,\alpha}$ é o coeficiente de Fourier dependente do tempo $\ddot{c}_{k,\alpha} = -\omega^2 c_{k,\alpha}$, isto é, reabsorvi a dependência temporal. Este Hamiltoniano se parece com o Hamiltoniano de uma coleção de osciladores desacoplados, um para cada k e α . Podemos escrever em termos das coordenadas

$$Q_{k,\alpha} = \sqrt{\varepsilon_0} (c_{k,\alpha} + c_{k,\alpha}^*) \quad (2.30)$$

e dos momentos conjugados correspondentes

$$P_{k,\alpha} = -i\omega\sqrt{\varepsilon_0} (c_{k,\alpha} - c_{k,\alpha}^*). \quad (2.31)$$

Esta troca de variável nos leva ao Hamiltoniano na forma conhecida do oscilador harmônico

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k,\alpha} [P_{k,\alpha}^2 + \omega^2 Q_{k,\alpha}^2] . \quad (2.32)$$

Note também que $Q_{k,\alpha}$ e $P_{k,\alpha}$ satisfazem as equações de Hamilton

$$\frac{\partial H}{\partial Q_{k,\alpha}} = -\dot{P}_{k,\alpha}, \quad \frac{\partial H}{\partial P_{k,\alpha}} = \dot{Q}_{k,\alpha}. \quad (2.33)$$

A quantização é feita trocando $Q_{k,\alpha}$ e $P_{k,\alpha}$ pelos operadores quânticos $\hat{Q}_{k,\alpha}$ e $\hat{P}_{k,\alpha}$ que seguem as relações de comutação

$$[\hat{Q}_{k,\alpha}, \hat{P}_{k',\alpha'}] = i\hbar \delta_{k,k'} \delta_{\alpha,\alpha'}, \quad (2.34a)$$

$$[\hat{Q}_{k,\alpha}, \hat{Q}_{k',\alpha'}] = 0, \quad (2.34b)$$

$$[\hat{P}_{k,\alpha}, \hat{P}_{k',\alpha'}] = 0. \quad (2.34c)$$

Por construção, podemos escrever o Hamiltoniano em termos dos operadores (não Hermitianos) de criação e aniquilação que satisfazem a relação de comutação $[\hat{a}_{k,\alpha}, \hat{a}_{k',\alpha'}^\dagger] = \delta_{k,k'} \delta_{\alpha,\alpha'}$. Para isto, podemos escrever

$$\hat{a}_{k,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega \hat{Q}_{k,\alpha} + i \hat{P}_{k,\alpha}), \quad (2.35a)$$

$$\hat{a}_{k,\alpha}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega \hat{Q}_{k,\alpha} - i \hat{P}_{k,\alpha}). \quad (2.35b)$$

Assim, o Hamiltoniano quântico de cada oscilador é escrito na forma conhecida

$$\hat{H}_{k,\alpha} = \hbar\omega \left(\hat{a}_{k,\alpha}^\dagger \hat{a}_{k,\alpha} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.36)$$

Podemos comparar com as expressões anteriores e obter que os coeficientes independentes do tempo possuem uma relação direta com os operadores de criação e aniquilação

$$c_{k,\alpha} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega}} \hat{a}_{k,\alpha}, \quad (2.37a)$$

$$c_{k,\alpha}^* = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega}} \hat{a}_{k,\alpha}^\dagger. \quad (2.37b)$$

Desse modo, podemos escrever os campos de interesse, na notação relativística,

$$\hat{A}^\mu = \frac{1}{\omega} \sum_{k,\alpha} \varepsilon_k \epsilon_\mu^{(\alpha)} \hat{a}_{k,\alpha} e^{ik_\rho x^\rho} + \text{h.c.}, \quad (2.38a)$$

$$\hat{E}^\mu = i \sum_{k,\alpha} \varepsilon_k \epsilon_\mu^{(\alpha)} \hat{a}_{k,\alpha} e^{ik_\rho x^\rho} - \text{h.c.}, \quad (2.38b)$$

onde ε_k é uma constante que depende de k ($\omega = ck$) que tem dimensão de campo elétrico,

$$\varepsilon_k = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2V\varepsilon_0}}. \quad (2.39)$$

2.1.4 Estatística de fótons

Nesta seção vamos mostrar algumas propriedades dos operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$, definir o que são os estados de Fock e um estado coerente. Com o conhecimento da estatística de fótons nós podemos investigar o comportamento quântico do campo eletromagnético. Como o Hamiltoniano se tornou apenas um conjunto de osciladores harmônicos desacoplados vamos, a partir daqui, ignorar os índices (k, α) e estudar algumas propriedades do oscilador harmônico simples no contexto de estatística de fótons.

Os estados de Fock são os autoestados do Hamiltoniano do campo $\hat{H}_c$,

$$\hat{H}_c |n\rangle = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n |n\rangle. \quad (2.40)$$

Vamos observar que os estados $\hat{a} |n\rangle$ e $\hat{a}^\dagger |n\rangle$ também são autoestados de $\hat{H}_c$,

$$\begin{aligned} \hat{H}_c \hat{a} |n\rangle &= \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \hat{a} |n\rangle = \hbar\omega \left(\hat{a} \hat{a}^\dagger - 1 + \frac{1}{2} \right) \hat{a} |n\rangle \\ &= \hat{a} \left[\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) - \hbar\omega \right] |n\rangle = \hat{a} (E_n - \hbar\omega) |n\rangle, \\ &= (E_n - \hbar\omega) \hat{a} |n\rangle. \end{aligned} \quad (2.41)$$

O estado $\hat{a} |n\rangle$ é um autoestado do Hamiltoniano com $-\hbar\omega$ de energia em relação ao estado $|n\rangle$. Nós chamamos o operador $\hat{a}$ de operador aniquilação ou destruição, pois ele diminui um quanta de energia ao ser aplicado. Para o estado fundamental,

$$\hat{H}_c \hat{a} |0\rangle = (E_0 - \hbar\omega) |0\rangle, \quad (2.42)$$

mas E_0 é o menor nível de energia, então definimos $\hat{a}|0\rangle = 0$. Assim,

$$\hat{H}_c|0\rangle = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |0\rangle = \frac{\hbar\omega}{2} |0\rangle, \quad (2.43)$$

obtemos $E_0 = \hbar\omega/2$. Desse modo, os níveis discretos de energia podem ser escritos na forma de recorrência $E_{n-1} = E_n - \hbar\omega$ ou $E_n = E_{n-1} + \hbar\omega$. Vamos observar o seguinte,

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 + \hbar\omega = \frac{1}{2}\hbar\omega + \hbar\omega = \frac{3}{2}\hbar\omega = \hbar\omega \left(1 + \frac{1}{2} \right), \\ E_2 &= E_1 + \hbar\omega = \frac{3}{2}\hbar\omega + \hbar\omega = \frac{5}{2}\hbar\omega = \hbar\omega \left(2 + \frac{1}{2} \right), \\ E_3 &= E_2 + \hbar\omega = \frac{5}{2}\hbar\omega + \hbar\omega = \frac{7}{2}\hbar\omega = \hbar\omega \left(3 + \frac{1}{2} \right), \\ &\vdots \\ E_n &= \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.44)$$

O operador $\hat{n}$ é o operador número de ocupação bosônico, $\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = \hat{n} |n\rangle = n |n\rangle$. Seguindo o raciocínio, o operador $\hat{a}$ tem a propriedade

$$|n-1\rangle = \frac{\hat{a}}{\alpha_n} |n\rangle,$$

onde α_n pode ser calculado a partir da normalização $\langle n-1|n-1\rangle = 1 \Rightarrow \alpha_n = \sqrt{n}e^{i\phi}$. Podemos escolher a fase de normalização igual a zero sem perdas, de modo que

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle. \quad (2.45)$$

Repetindo o mesmo procedimento para $\hat{a}^\dagger$,

$$\begin{aligned} \hat{H}_c \hat{a}^\dagger &= \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \hat{a}^\dagger |n\rangle \\ &= \hat{a}^\dagger \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1 + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \\ &= (E_n + \hbar\omega) \hat{a}^\dagger |n\rangle. \end{aligned} \quad (2.46)$$

vemos que $\hat{a}^\dagger$ cria um quanta de energia. Nós chamamos este operador de operador de criação. $\hat{a}^\dagger$ sobe um nível de energia, então

$$|n+1\rangle = \frac{\hat{a}^\dagger}{\beta_n} |n\rangle,$$

onde β_n pode ser calculado a partir da normalização $\langle n+1|n+1\rangle = 1 \Rightarrow \beta_n = \sqrt{n+1}e^{i\psi}$. Podemos escolher a fase de normalização igual a zero sem perdas, de modo que

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (2.47)$$

Aplicando a equação acima n vezes partindo do estado $|0\rangle$ obtemos

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (2.48)$$

Para completar a descrição dos estados de Fock, vamos resumir os resultados.

1. Os estados $|n\rangle$ formam um conjunto ortonormal completo;

$$\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \mathbb{1}. \quad (2.49)$$

2. Um vetor de estado arbitrário $|\phi\rangle$ pode ser escrito como uma superposição dos autoestados do Hamiltoniano do campo $\hat{H}_c$;

$$|\phi\rangle = \sum_n C_n |n\rangle. \quad (2.50)$$

3. Os operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ não são Hermitianos, mas algumas combinações são, vide $\hat{Q}$, $\hat{P}$ e $\hat{H}_c$. Os únicos elementos de matriz não nulos destes operadores são da forma

$$\langle n-1|\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n} \quad \langle n+1|\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}. \quad (2.51)$$

4. Classicamente, a distribuição de energia do campo eletromagnético é contínua. Entretanto, quanticamente, as autoenergias são discretas.

Podemos usar estes resultados para calcular as flutuações do campo elétrico $\langle(\Delta E)^2\rangle$ em um estado de Fock. Considerando um campo elétrico monocromático com polarização linear fixa, $E = i\varepsilon[\hat{a}e^{ik_\rho x^\rho} - \hat{a}^\dagger e^{-ik_\rho x^\rho}]$. O valor médio do campo $\langle n|E|n\rangle = \langle E\rangle$ é claramente zero, enquanto que

$$\langle E^2\rangle = \langle n|E^2|n\rangle = \varepsilon^2 \langle n|[\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}]|n\rangle = \varepsilon^2 (2n+1)$$

então obtemos as flutuações do campo,

$$\langle(\Delta E)^2\rangle = \langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2 = 2\varepsilon^2 \left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (2.52)$$

No vácuo, isto é, para $n = 0$,

$$\langle(\Delta E)^2\rangle = \varepsilon^2, \quad (2.53)$$

o valor médio é nulo, mas flutuações estão presentes. São estas flutuações do vácuo que trazem vários fenômenos quânticos como a emissão espontânea e desvio de Lamb.

É muito importante termos o conhecimento dos estados coerentes, pois possuem várias propriedades interessantes. Um estado coerente é um autoestado do operador criação

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (2.54)$$

Vamos deduzir a forma deste estado. Usando a completeza de $|n\rangle$ e a equação 2.48,

$$|\alpha\rangle = \left(\sum_n |n\rangle\langle n| \right) |\alpha\rangle = \sum_n |n\rangle\langle 0| \frac{(\hat{a})^n}{\sqrt{n!}} |\alpha\rangle,$$

mas $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \Rightarrow (\hat{a})^n|\alpha\rangle = \alpha^n|\alpha\rangle$, então

$$|\alpha\rangle = \langle 0|\alpha\rangle \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (2.55)$$

onde $\langle 0|\alpha\rangle$ é obtido através da normalização $\langle \alpha|\alpha\rangle = 1$,

$$1 = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \sum_n \frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 e^{|\alpha|^2},$$

então $\langle 0|\alpha\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2)$. Assim, o estado coerente pode ser escrito

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.56)$$

Com a equação 2.48 podemos reescrever $|\alpha\rangle$

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha \hat{a}^\dagger)^n}{n!} \right] |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle,$$

mas $e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle = [1 - \alpha^* \hat{a} + \dots] |0\rangle = |0\rangle$,

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}) |0\rangle, \quad (2.57)$$

onde usamos na última igualdade a fórmula BCH, $e^{A+B} = e^{[A,B]/2} e^A e^B$. Desse modo, podemos definir o operador deslocamento,

$$D(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}), \quad (2.58)$$

que é unitário $D^\dagger(\alpha) = D(-\alpha) = D^{-1}(\alpha)$ e leva o estado de vácuo para um estado coerente $D(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle$.

As propriedades do estado coerente são as seguintes.

1. O número médio de fótons em um estado coerente $|\alpha\rangle$ é $\langle n \rangle = |\alpha|^2$;

Prova:

$$\begin{aligned} \langle \alpha | n | \alpha \rangle &= \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle = e^{-|\alpha|^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} \langle n | \right) \hat{a}^\dagger \hat{a} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} | n \rangle \right) \\ &= e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^* \alpha)^n}{n!} \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} n \\ &= e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^2 \frac{\partial}{\partial |\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^2 \frac{\partial}{\partial |\alpha|^2} e^{|\alpha|^2} \\ &= |\alpha|^2. \end{aligned} \quad (2.59)$$

2. A probabilidade de encontrar n fótons é uma distribuição Poissoniana;

Prova: Temos que

$$\langle n|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} \langle n|m\rangle. \quad (2.60)$$

Então,

$$P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{e^{|\alpha|^2} |\alpha|^{2n}}{n!} = \frac{\langle n\rangle^n e^{-\langle n\rangle}}{n!}. \quad (2.61)$$

3. Estados coerentes não são ortogonais, mas são normalizados;

Prova:

$$\langle \alpha|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_n \frac{(\alpha^* \alpha)^n}{n!} = 1, \quad (2.62a)$$

$$\langle \alpha|\beta\rangle \neq 0 \Rightarrow |\langle \alpha|\beta\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2}. \quad (2.62b)$$

4. O estado que minimiza a incerteza é o estado coerente, isto é, $\Delta\hat{Q}\Delta\hat{P} = \hbar/2$;

Prova: Relembrando, os operadores de criação e aniquilação não são Hermitianos mas suas combinações são

$$\frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} \hat{Q}, \quad (2.63a)$$

$$\frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}} \hat{P}. \quad (2.63b)$$

Os operadores $\hat{Q}$ e $\hat{P}$ são observáveis e possuem a relação de comutação $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar$. Além disso, a relação de incerteza é satisfeita

$$\Delta\hat{Q}\Delta\hat{P} \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2.64)$$

É útil lembrar que o valor médio dos operadores de escada são $\langle \hat{a} \rangle = \langle \alpha|\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha \langle \alpha|\alpha\rangle = \alpha$ e $\langle \hat{a}^\dagger \rangle = \alpha^*$. Vamos calcular o desvio quadrático médio de cada um destes operadores, considerando que estamos em um estado coerente. Para o operador $\hat{P}$:

$$\begin{aligned} \langle \hat{P} \rangle &= \langle \alpha|\hat{P}|\alpha\rangle = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(\langle \hat{a} \rangle - \langle \hat{a}^\dagger \rangle) = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(\alpha - \alpha^*) \\ \Rightarrow \langle \hat{P}^2 \rangle &= -\frac{\hbar\omega}{2}(\alpha^2 + \alpha^{*2} - 2\alpha\alpha^*), \\ \langle \hat{P}^2 \rangle &= -\frac{\hbar\omega}{2}\langle (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \cdot (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \rangle = -\frac{\hbar\omega}{2}(\alpha^2 + \alpha^{*2} - 2\alpha\alpha^* - 1). \end{aligned}$$

Assim, $\langle(\Delta\hat{P})^2\rangle = \langle\hat{P}^2\rangle - \langle\hat{P}\rangle^2 = \hbar\omega/2$. Para o operador $\hat{Q}$:

$$\begin{aligned}\langle\hat{Q}\rangle &= \langle\alpha|\hat{P}|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(\langle\hat{a}\rangle + \langle\hat{a}^\dagger\rangle) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(\alpha + \alpha^*) \\ \Rightarrow \langle\hat{Q}^2\rangle &= \frac{\hbar}{2\omega}(\alpha^2 + \alpha^{*2} + 2\alpha\alpha^*), \\ \langle\hat{Q}^2\rangle &= \frac{\hbar}{2\omega}\langle(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \cdot (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)\rangle = -\frac{\hbar\omega}{2}(\alpha^2 + \alpha^{*2} + 2\alpha\alpha^* + 1).\end{aligned}$$

Com isso, temos $\langle(\Delta\hat{Q})^2\rangle = \langle\hat{Q}^2\rangle - \langle\hat{Q}\rangle^2 = \hbar/(2\omega)$. Multiplicando os resultados e tomando a raiz quadrada nós obtemos a relação de incerteza para o campo em um estado coerente,

$$\sqrt{\langle(\Delta\hat{Q})^2\rangle\langle(\Delta\hat{P})^2\rangle} = \Delta\hat{Q}\Delta\hat{P} = \left(\frac{\hbar}{2\omega} \frac{\hbar\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\hbar}{2}. \quad (2.65)$$

2.2 Teorias de interação luz-matéria

O Hamiltoniano clássico do átomo (ou molecular) é dado por

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}), \quad (2.66)$$

o potencial pode ser do tipo Coulombiano. Interagindo com um campo externo, os operadores se transformam do seguinte modo

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A}, \quad (2.67a)$$

$$H \rightarrow H + e\phi, \quad (2.67b)$$

e então o Hamiltoniano de um átomo interagindo com um campo eletromagnético externo se torna

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + V(\mathbf{x}) + e\phi \\ &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{e^2}{2m}\mathbf{A}^2 - \frac{e}{2m}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}) + V(\mathbf{x}).\end{aligned} \quad (2.68)$$

Existem várias maneiras de tratar o Hamiltoniano acima, vamos mostrar duas em que se baseiam na escolha do gauge de Coulomb, onde $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ e $\phi = 0$ (sem fonte). Primeiro, vamos observar a seguinte aplicação em uma função escalar $f(\mathbf{x})$ sabendo que $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$,

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{A})f(\mathbf{x}) &= \frac{\hbar}{i}(\nabla \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla)f(\mathbf{x}) \\ &= \frac{\hbar}{i}[(\nabla \cdot \mathbf{A})f + (\nabla f) \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot (\nabla f)] \\ &= \frac{\hbar}{i}(\nabla \cdot \mathbf{A})f,\end{aligned}$$

no gauge de Coulomb o resultado é nulo e então $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}$. O termo com $\mathbf{A}^2$ pode ser negligenciado se $\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$ for, comparativamente, muito maior. Assim,

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) - \frac{e}{m} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}, \quad (2.69)$$

onde o último termo representa a interação átomo-campo.

Uma outra forma de escrever o Hamiltoniano é escrever a interação na forma de dipolo elétrico. Considerando a aproximação de dipolo elétrico, isto é, $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{A}(t)$, tomamos o Hamiltoniano na forma do gauge de Coulomb e então fazemos uma outra transformação de gauge,

$$H = \frac{1}{2m} [\mathbf{p} - e(\mathbf{A} + \nabla\chi)]^2 - e \frac{\partial\chi}{\partial t} + V(\mathbf{x}), \quad (2.70)$$

escolhendo χ de tal modo que

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} &\Rightarrow \nabla\chi = -\mathbf{A}, \\ \frac{\partial\chi}{\partial t} &= -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Isto implica que o Hamiltoniano pode ser então escrito como a soma do Hamiltoniano do átomo livre e da interação átomo-campo do tipo dipolo elétrico,

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) - e\mathbf{E} \cdot \mathbf{x}. \quad (2.71)$$

Existe uma equivalência entre as representações, pois o regime em que $\mathbf{A}^2$ é desprezível coincide com o regime em que podemos aplicar a aproximação de dipolo elétrico.

A parte do Hamiltoniano 2.71 que representa o átomo livre pode ser escrita de diversas maneiras. Neste trabalho estaremos interessados no caso em que o sistema de interesse será um sistema de dois níveis, como o spin-1/2. Não há análogo clássico para o spin, deste modo não precisamos tratar de segunda quantização nesta parte. Vamos agora revisar algumas propriedades de um sistema quântico de dois níveis de energia, muito importante no estudo de informação quântica.

2.2.1 Sistema de dois níveis

O bit (do inglês, *binary digit*) é a menor unidade de informação para a computação, assim como para a teoria e processamento de informação. É um dígito binário, ou seja, só existem dois valores (ou estados) possíveis. Qualquer sistema de dois estados pode representar o bit. Como exemplo podemos pensar em um sistema onde “0” (ou “ligado”) significa que a corrente elétrica está fluindo e “1” (ou “desligado”) representa que não há fluxo de corrente. Outro exemplo simples é duas diferentes direções de magnetização em uma fita magnética. O que realmente importa para representar o bit é poder identificar os dois possíveis estados.

Na computação quântica e em teoria da informação quântica, temos, de modo análogo, o bit quântico, qubit (do inglês, *quantum bit*). O qubit é um sistema de dois níveis, isto é, só existem dois estados independentes (distinguíveis), $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Na mecânica quântica, isto significa que a base de estados deste sistema (o qubit) está definida em um espaço de Hilbert bidimensional. Ademais, o mesmo apresenta uma característica ausente na computação

clássica: o qubit pode assumir os dois estados simultaneamente, ampliando as possibilidades e capacidades para a computação quântica. Para a implementação física do sistema, podemos pensar em dois exemplos fundamentais: uma partícula de spin-1/2, onde temos dois estados conhecidos como *up/down* ou $+/ -$; o campo elétrico com duas polarizações, horizontal e vertical; um átomo de dois níveis eletrônicos, o estado fundamental e o estado excitado, denotados por g/e (do inglês, *ground* e *excited*) – veja a figura 2.3.

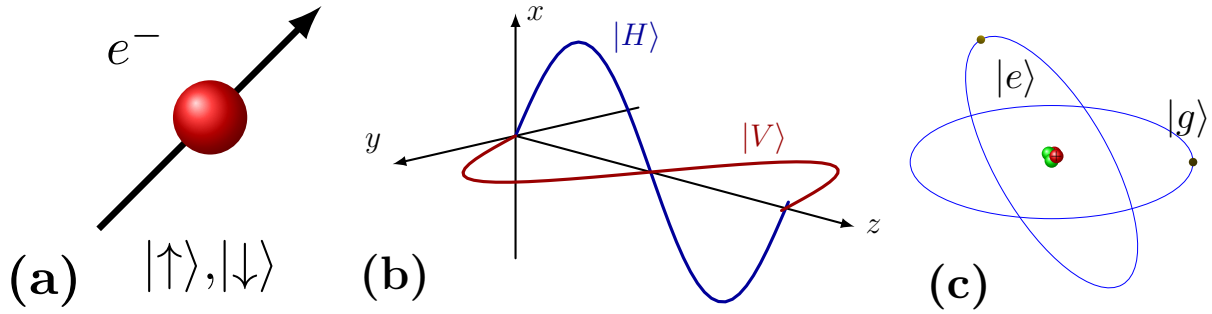


Figura 2.3: Exemplos de sistemas quânticos de dois níveis. (a) Um elétron, (b) campo elétrico e (c) átomo de dois níveis eletrônicos.

De modo geral, um sistema de dois níveis de energia é descrito por um espaço de estados bidimensional. Iremos denotar por $|e\rangle$ e $|g\rangle$ os autoestados que geram tal base cujas autoenergias são E_e e E_g , respectivamente. Estes estados compõem um sistema ortonormal completo:

$$\langle e|g\rangle = \langle g|e\rangle = 0, \quad (2.72a)$$

$$\langle e|e\rangle = \langle g|g\rangle = 1, \quad (2.72b)$$

$$\mathbb{1} = |e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|. \quad (2.72c)$$

O Hamiltoniano escrito na base dos autoestados de energia é, então

$$\hat{H}_a = E_e |e\rangle\langle e| + E_g |g\rangle\langle g| \quad (2.73)$$

e um estado arbitrário é da forma

$$|\psi\rangle = C_e |e\rangle + C_g |g\rangle. \quad (2.74)$$

Podemos reescrever em termos de outra base. Sabendo que em um espaço de estados bidimensional só existem $2 \times 2 = 4$ operadores linearmente independentes, podemos escolher

$$\mathbb{1} = |e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|, \quad (2.75a)$$

$$\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|, \quad (2.75b)$$

$$\hat{\sigma}^+ = |e\rangle\langle g|, \quad (2.75c)$$

$$\hat{\sigma}^- = |g\rangle\langle e|, \quad (2.75d)$$

onde os operadores não hermitianos $\hat{\sigma}^\pm$ são os conhecidos operadores de criação e aniquilação fermiônicos que obedecem as regras de anti-comutação

$$\{\hat{\sigma}^+, \hat{\sigma}^-\} = \{\hat{\sigma}^-, \hat{\sigma}^+\} = \mathbb{1}, \quad (2.76a)$$

$$\{\hat{\sigma}^+, \hat{\sigma}^+\} = \{\hat{\sigma}^-, \hat{\sigma}^-\} = 0. \quad (2.76b)$$

A aplicação destes operadores no estado 2.74 nos dá

$$\hat{\sigma}^+ |\psi\rangle = C_g |e\rangle, \quad (2.77a)$$

$$\hat{\sigma}^- |\psi\rangle = C_e |g\rangle, \quad (2.77b)$$

$$\hat{\sigma}_z |\psi\rangle = C_e |e\rangle - C_g |g\rangle. \quad (2.77c)$$

O valores esperados dos operadores $\hat{\sigma}^\pm$ não são quantidades físicas, pois os mesmos são não hermitianos e, conseqüentemente, não são observáveis. Porém, o operador $\hat{\sigma}_z$ representa uma quantidade física mensurável e o seu valor médio

$$\langle \hat{\sigma}_z \rangle = \langle \psi | \hat{\sigma}_z | \psi \rangle = |C_e|^2 - |C_g|^2 = W \quad (2.78)$$

é conhecido como inversão atômica, W . Sabendo que $|C_e|^2$ e $|C_g|^2$ são as probabilidades de encontrar o átomo nos estados $|e\rangle$ e $|g\rangle$, onde $1 = |C_e|^2 + |C_g|^2$, podemos ver que W está limitado no intervalo $[-1, 1]$ que é igual a zero quando os estados são equiprováveis e $+1(-1)$ quando a probabilidade de encontrar o átomo no estado de energia $E_e(E_g)$ é máxima.

O Hamiltoniano do átomo pode ser reescrito nesta base,

$$\begin{aligned} E_e \hat{\sigma}_{ee} + E_g \hat{\sigma}_{gg} &= \frac{1}{2}(E_e - E_g)(\hat{\sigma}_{ee} - \hat{\sigma}_{gg}) + \frac{1}{2}(E_e + E_g)(\hat{\sigma}_{ee} + \hat{\sigma}_{gg}) \\ &= \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \hat{\sigma}_z + \frac{1}{2}(E_e + E_g), \end{aligned}$$

com $\hbar\omega_0 = E_e - E_g$. Reescalando a energia $\hat{H}_a \rightarrow \hat{H}_a - \frac{1}{2}(E_e + E_g)$, temos

$$\hat{H}_a = \frac{\hbar\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z. \quad (2.79)$$

Finalmente, obtemos os Hamiltonianos do campo eletromagnético livre, do átomo livre e algumas possíveis formas de representar a interação entre ambos. Munidos disso, somos agora capazes de estudar a teoria quântica da interação luz-matéria. Entretanto, é interessante primeiro mostrar o resultado da teoria semi-clássica para então vermos suas deficiências em representar a natureza.

Modelo semi-clássico de interação entre o átomo e um campo elétrico

A teoria semiclássica consiste em tratar do átomo quanticamente e o campo óptico classicamente. Por simplicidade, vamos considerar um campo elétrico monocromático, linearmente polarizado na direção x . O Hamiltoniano total deste sistema é da forma $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$, onde $\hat{H}_0$ é o Hamiltoniano do átomo livre dado por 2.79 e $\hat{V}$ é a parte de interação do Hamiltoniano que é escrita como a energia do momento de dipolo elétrico,

$$\hat{V} = -q\hat{R} \cdot E_x(\hat{R}, t), \quad (2.80)$$

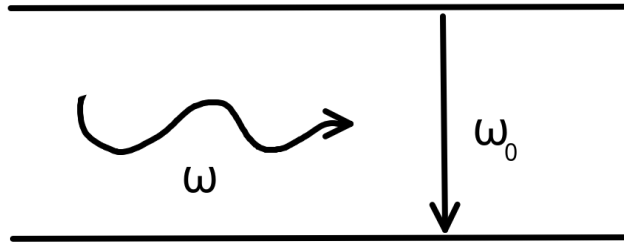


Figura 2.4: Representação esquemática da interação da luz de frequência ω com um sistema de dois níveis cuja frequência de transição é ω_0 .

onde $\hat{p} = q\hat{R}$ é o operador momento de dipolo elétrico, q é a carga elétrica do átomo, $E_x(\hat{R}, t)$ é o campo elétrico atuando sobre o átomo na posição $\hat{R}$ e no tempo t , com $\hat{R}$ representando o operador posição. Através da aproximação de dipolo $E_x(\hat{R}, t) \approx E_x(t) \approx \varepsilon \sin(\omega t)$, $\hat{V}$ se torna

$$\hat{V} = -q\varepsilon \sin(\omega t) \hat{R}. \quad (2.81)$$

Como não há transição entre os níveis de mesma energia, assumimos que $\langle i | \hat{R} | j \rangle = \delta_{ij}$, onde δ_{ij} é a delta de Kronecker com $i, j = e$ ou g . Então, $V_{ee} = V_{gg} = 0$ e

$$V_{eg} = \langle e | \hat{V} | g \rangle = -p_{eg}\varepsilon \sin(\omega t), \quad (2.82a)$$

$$V_{ge} = \langle g | \hat{V} | e \rangle = -p_{ge}\varepsilon \sin(\omega t), \quad (2.82b)$$

onde $p_{eg} = p_{ge}^* = q \langle e | \hat{R} | g \rangle$ são os elementos de matriz não nulos do momento de dipolo elétrico. Assim,

$$\hat{V} = -(p_{eg} |e\rangle\langle g| + p_{ge} |g\rangle\langle e|) E_x(t). \quad (2.83)$$

A evolução temporal do sistema é dada pela equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle. \quad (2.84)$$

A equação diferencial acima pode ser escrita substituindo o estado dado pela Eq. 2.74 e o Hamiltoniano total do sistema,

$$\dot{C}_e |e\rangle + \dot{C}_g |g\rangle = -\frac{i}{\hbar} [(C_e E_e + C_g V_{eg}) |e\rangle + (C_g E_g + C_e V_{ge}) |g\rangle]. \quad (2.85)$$

Multiplicando por $\langle e |$ e utilizando as relações 2.72,

$$\dot{C}_e = -\frac{i}{\hbar} (C_e E_e + C_g V_{eg}), \quad (2.86)$$

repetindo o procedimento aplicando $\langle g |$,

$$\dot{C}_g = -\frac{i}{\hbar} (C_g E_g + C_e V_{ge}). \quad (2.87)$$

Obtemos então um par de equações diferenciais acopladas descrevendo o nosso sistema dinâmico

$$\dot{C}_e = -i\omega_e C_e + i\Omega_R e^{-i\phi} \sin(\omega t) C_g, \quad (2.88a)$$

$$\dot{C}_g = -i\omega_g C_g + i\Omega_R e^{i\phi} \sin(\omega t) C_e, \quad (2.88b)$$

aqui usamos $E_{e/g} = \hbar\omega_{e/g}$ e $p_{ge} = |p_{ge}|e^{i\phi}$, onde ϕ é a fase do elemento de matriz do momento de dipolo elétrico, e

$$\Omega_R = \varepsilon \frac{|p_{ge}|}{\hbar} \quad (2.89)$$

é a frequência de Rabi.

Este sistema pode ser resolvido analiticamente fazendo $C_{e/g} = c_{e/g}e^{-i\omega_{e/g}t}$, considerando que $c_{e/g}$ são amplitudes de variação lenta. Substituindo nas equações 2.88, definindo $\omega_0 = \omega_e - \omega_g$ e aplicando a aproximação da onda girante (RWA, em inglês), negligenciamos os termos de rápida variação $e^{\pm i(\omega_0 + \omega)t}$,

$$\dot{C}_e = -\frac{\Omega_R}{2}e^{i(\Delta t - \phi)}C_g, \quad (2.90a)$$

$$\dot{C}_g = \frac{\Omega_R}{2}e^{-i(\Delta t - \phi)}C_e, \quad (2.90b)$$

onde $\Delta = \omega_0 - \omega$ é a dessintonia entre as frequências características.

Oscilações de Rabi

As oscilações de Rabi são o processo mais básico usado para se manipular qubits. Tais oscilações são obtidas expondo o qubit a campos magnéticos (ou elétricos) periódicos durante intervalos de tempo ajustáveis. Foi mostrado que todos os algoritmos quânticos podem ser quebrados em uma sequência de operações de um qubit mais uma operação de dois qubits específica [26].

Considere que o sistema se encontra inicialmente no estado excitado, isto é, $C_e(0) = 1$ e $C_g(0) = 0$. Assumindo completa ressonância entre átomo e campo $\Delta = 0$, obtemos as amplitudes de probabilidade

$$C_e(t) = \cos\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right), \quad (2.91a)$$

$$C_g(t) = e^{i\phi} \sin\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right). \quad (2.91b)$$

As probabilidades de encontrar o átomo no estado de maior e menor energia são, respectivamente, dadas por

$$P_e(t) = \cos^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right), \quad (2.92a)$$

$$P_g(t) = \sin^2\left(\frac{\Omega_R t}{2}\right). \quad (2.92b)$$

Assim, a expressão da inversão do átomo tem uma forma simples

$$W(t) = P_e(t) - P_g(t) = \cos(\Omega_R t). \quad (2.93)$$

A Fig. 2.5 ilustra este resultado onde nós vemos que o átomo oscila entre os dois estados com a frequência de Rabi Ω_R . É interessante observar que nesse sistema existem três

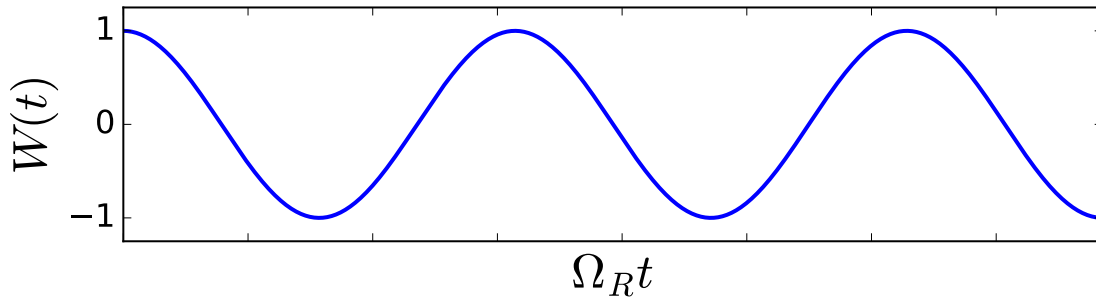


Figura 2.5: Inversão atômica $W(t)$ mostrando que o átomo oscila entre os níveis com frequência Ω_R . Utilizamos $\Delta = 0$.

frequências envolvidas: frequência de transição ω_0 , frequência do campo ω e frequência de Rabi Ω_R . Com as suposições de ressonância, a única frequência relevante é a de Rabi. Outro fator importante é que na ausência de campo, $\Omega_R = 0$, o átomo inicialmente preparado no estado $|e\rangle$ permanecerá neste estado, pois $P_e(t) = 1$ e $P_g(t) = 0$, mostrando que a teoria semi-clássica não prevê o fenômeno conhecido como emissão espontânea. Este fenômeno puramente quântico será objeto de análise nas seções seguintes, onde tratamos da teoria quântica entre átomo e campo.

2.2.2 Modelo de Jaynes-Cummings

O modelo de Jaynes-Cummings consiste em tratar o campo quanticamente e o átomo é um sistema quântico de dois níveis de energia. Este modelo trata do Hamiltoniano de interação na forma da aproximação de dipolo (assim como eq. 2.71). Vamos escrever o Hamiltoniano de interação $H_I = -e\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}$ na forma quântica. Primeiro vamos calcular para k e α fixos, depois podemos generalizar. Escrevendo

$$e\hat{\mathbf{x}} = \sum_{i,j=g}^e |i\rangle\langle i| e\hat{\mathbf{x}} |j\rangle\langle j| = \sum_{\substack{i,j=g \\ i \neq j}}^e p_{ij} \hat{\sigma}_{ij} = \mathbf{p} \hat{\sigma}^+ + \mathbf{p}^* \hat{\sigma}^-, \quad (2.94)$$

onde definimos $\mathbf{p} = p_{eg} = e \langle e | \hat{\mathbf{x}} | g \rangle$, $\mathbf{p}^* = p_{ge} = e \langle g | \hat{\mathbf{x}} | e \rangle$, $\hat{\sigma}^+ = \hat{\sigma}_{eg} = |e\rangle\langle g|$ e $\hat{\sigma}^- = \hat{\sigma}_{ge} = |g\rangle\langle e|$. Note que só há termos cruzados, só existe momento de dipolo quando ocorre transições entre os níveis de energia. O campo elétrico quantizado e linearmente polarizado, na aproximação de dipolo, é

$$\hat{\mathbf{E}} = i\varepsilon\epsilon [\hat{a} - \hat{a}^\dagger], \quad (2.95)$$

onde a dependência temporal foi absorvida $\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-i\omega t}$. Assim, podemos escrever

$$e\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{E}} = (\mathbf{p} \hat{\sigma}^+ + \mathbf{p}^* \hat{\sigma}^-) \cdot (i\varepsilon\epsilon [\hat{a} - \hat{a}^\dagger]).$$

Definindo a energia de acoplamento $\hbar g = \varepsilon(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\epsilon})$ obtemos o Hamiltoniano de interação quântico

$$\hat{H}_I = -i\hbar(g\hat{\sigma}^+ + g^*\hat{\sigma}^-)(\hat{a} - \hat{a}^\dagger).$$

Na representação de interação temos que, através da aproximação de onda girante, os termos $\hat{\sigma}^+ \hat{a}^\dagger$ e $\hat{\sigma}^- \hat{a}$ oscilam muito rápido e podem ser considerados não conservativos. De modo que

nós podemos ignorá-los. Além disso, a dependência temporal dos operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ some com a representação de interação. Portanto,

$$\hat{H}_I = -i\hbar(g\hat{\sigma}^+\hat{a} - g^*\hat{\sigma}^-\hat{a}^\dagger) \quad (2.96)$$

é o Hamiltoniano de interação quântico. Podemos explorar as transformações do tipo $U(1)$ (fase global) para escrever $\hat{H}_I$ em uma forma mais elegante. A forma mais simples de trabalhar é fazer a transformação nos vetores de estado, pois são invariantes por transformações de fase global,

$$|g\rangle' \rightarrow e^{i\beta}|g\rangle, \quad |e\rangle' \rightarrow e^{i\alpha}|e\rangle, \quad (2.97)$$

mas $\hat{\sigma}^+ = |e\rangle\langle g|$ e $\hat{\sigma}^- = |g\rangle\langle e|$, então os operadores também se transformam,

$$\hat{\sigma}^{+'} \rightarrow e^{i(\alpha-\beta)}\hat{\sigma}^+, \quad \hat{\sigma}^{-'} \rightarrow e^{-i(\alpha-\beta)}\hat{\sigma}^-, \quad (2.98)$$

o que nos leva a observar que $\hat{H}'_a = \hat{H}_a$ o Hamiltoniano do átomo é invariante sob tal transformação. Fazendo o mesmo para os operadores do campo,

$$\hat{a}' \rightarrow e^{i\phi}\hat{a}, \quad \hat{a}^{\dagger'} \rightarrow e^{-i\phi}\hat{a}^\dagger, \quad (2.99)$$

observamos que $\hat{H}'_c = \hat{H}_c$ o Hamiltoniano do campo é invariante. Vamos ver como fica o Hamiltoniano de interação,

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= -i\hbar [g\hat{\sigma}^+\hat{a}e^{i(\alpha-\beta+\phi)} - g^*\hat{\sigma}^-\hat{a}^\dagger e^{-i(\alpha-\beta+\phi)}] \\ &= -i\hbar|g| [\hat{\sigma}^+\hat{a}e^{i(\alpha-\beta+\phi+\theta)} - \hat{\sigma}^-\hat{a}^\dagger e^{-i(\alpha-\beta+\phi+\theta)}], \end{aligned}$$

onde usei que $g = |g|e^{i\theta}$. Devido a arbitrariedade dos parâmetros α, β e ϕ , podemos escolher de tal forma que compensem a fase da constante de acoplamento g . Escolho-o como $\pi/2$,

$$\alpha - \beta + \phi + \theta \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad (2.100)$$

de modo que finalmente obtemos o Hamiltoniano de interação na forma usual,

$$\hat{H}_I = \hbar g(\hat{\sigma}^+\hat{a} + \hat{\sigma}^-\hat{a}^\dagger). \quad (2.101)$$

Note que agora g é real, semelhante à frequência de Rabi obtida no modelo semi-clássico. Generalizando para k e α arbitrários,

$$\hat{H}_I = \hbar \sum_{k,\alpha} g_{k,\alpha}(\hat{\sigma}^+\hat{a}_{k,\alpha} + \hat{\sigma}^-\hat{a}_{k,\alpha}^\dagger). \quad (2.102)$$

A representação esquemática de uma cavidade ótica interagindo com um átomo de dois níveis é mostrada na figura 2.6. Existem duas componentes principais que causam perda no sistema. A cavidade não é perfeitamente selada, existe uma probabilidade não nula de que fótons vazem da cavidade a uma taxa κ . Existe também uma probabilidade finita, proporcional a γ , de que ocorra vazamento de luz devido a emissão espontânea de fótons a partir do estado excitado do átomo. Neste trabalho, nós vamos negligenciar explicitamente todos os processos de dissipação, assumindo que g é muito maior do que as perdas,

$$\frac{g^2}{2\gamma\kappa} \gg 1, \quad (2.103)$$

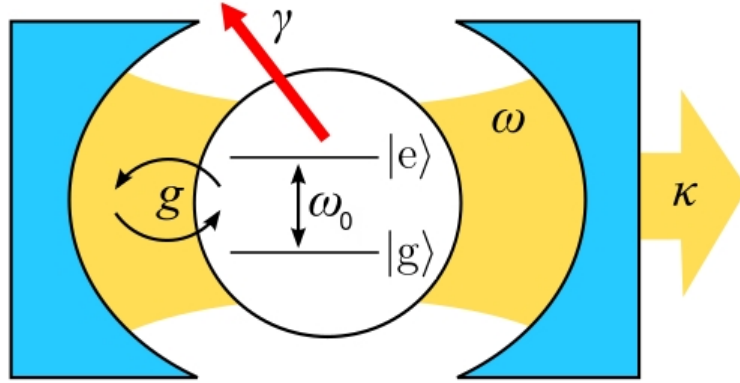


Figura 2.6: Esquema de cavidade óptica que interage com um átomo de dois níveis preso em seu interior. Retirado e adaptado de [43].

isto é, as escalas temporais das interações átomo-campo são muito maiores do que o tempo em que as perdas se tornam relevantes. Esta hipótese é conhecida na literatura como regime de forte acoplamento, amplamente discutido no capítulo 1. De modo geral, podemos escrever o Hamiltoniano total do sistema como a soma das energias das partes individuais não perturbadas e a energia de interação,

$$\hat{H}^{\text{JC}} = \hat{H}_a + \hat{H}_c + \hat{H}_I, \quad (2.104)$$

com $\hat{H}_a$ e $\hat{H}_c$ dados pelas equações 2.79 e 2.36. Para escrevermos o Hamiltoniano atômico na forma mais usual vista na literatura vamos lembrar que $\hat{\sigma}_{ee} + \hat{\sigma}_{gg} = |e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g| = \mathbb{1}$,

$$\begin{aligned} \hat{H}_a &= \frac{\hbar\omega_0}{2} (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g| + [|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|] - [|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|]) \\ &= \frac{\hbar\omega_0}{2} (2|e\rangle\langle e| - [|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|]) \\ &= \hbar\omega_0\hat{\sigma}^+\hat{\sigma}^- - \frac{1}{2}\hbar\omega_0. \end{aligned}$$

Negligenciando o termos de energia constante nos Hamiltonianos do átomo $-\hbar\omega_0/2$ e do campo $\hbar\omega/2$, chegamos na forma usual do modelo de Jaynes-Cummings

$$\hat{H}^{\text{JC}} = \sum_{k,\alpha} \hbar\omega_{k,\alpha} \hat{a}_{k,\alpha}^\dagger \hat{a}_{k,\alpha} + \hbar\omega_0 \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^- + \sum_{k,\alpha} \hbar g_{k,\alpha} (\hat{\sigma}^+ \hat{a}_{k,\alpha} + \hat{\sigma}^- \hat{a}_{k,\alpha}^\dagger). \quad (2.105)$$

Aqui vamos considerar a interação entre um campo óptico polarizado de modo único e um único átomo de dois níveis dentro de uma cavidade,

$$\hat{H}^{\text{JC}} = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\omega_0 \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^- + \hbar g (\hat{\sigma}^+ \hat{a} + \hat{\sigma}^- \hat{a}^\dagger). \quad (2.106)$$

Podemos definir o número de ocupação polaritônico $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^-$ que nos dá o número de excitações atômicas mais fotônicas (não confundir com número de fótons). Como visto nas seções anteriores, os vetores de estado atômico e do campo são, respectivamente,

$$|\psi_a\rangle = C_e |g\rangle + C_g |g\rangle, \quad (2.107a)$$

$$|\psi_c\rangle = \sum_n C_n |n\rangle. \quad (2.107b)$$

com C_e , C_g e C_n coeficientes complexos. O sistema composto dado pelo Hamiltoniano de Jaynes-Cummings pertence ao espaço de Hilbert total. O estado geral do sistema é dado pelo produto tensorial $|\psi\rangle = |\psi_c\rangle \otimes |\psi_a\rangle$. Então,

$$|\psi\rangle = \sum_n [C_{n,e} |n, e\rangle + C_{n,g} |n, g\rangle]. \quad (2.108)$$

Se prepararmos um estado com o átomo inicialmente excitado em um campo com n fótons,

$$|\psi(t=0)\rangle = |n\rangle \otimes |e\rangle = |n, e\rangle, \quad (2.109)$$

em um tempo posterior t o estado será

$$|\psi\rangle = C_{n,e} |n, e\rangle + C_{n+1,g} |n+1, g\rangle. \quad (2.110)$$

Existirá uma probabilidade finita de que o átomo tenha decaído para o estado fundamental e emitido um fóton.

Representação de Interação

Nós transformamos um operador para a representação de interação da seguinte forma,

$$\hat{O}_I(t) = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{O}(0) e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}. \quad (2.111)$$

Assim, o Hamiltoniano de interação nesta representação é,

$$\hat{V} = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{H}_I e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}. \quad (2.112)$$

Usando as fórmulas BCH, os operadores de escada bosônicos e fermiônicos na representação de interação são escritos

$$\hat{a}_I = \hat{a} e^{i\omega t}, \quad (2.113a)$$

$$\hat{a}_I^\dagger = \hat{a}^\dagger e^{-i\omega t}, \quad (2.113b)$$

$$\hat{\sigma}_{+I} = \hat{\sigma}^+ e^{i\omega_0 t}, \quad (2.113c)$$

$$\hat{\sigma}_{-I} = \hat{\sigma}^- e^{-i\omega_0 t}. \quad (2.113d)$$

Substituindo em $\hat{V}$ e negligenciando os termos de rápida oscilação (aproximação de onda girante) temos

$$\hat{V} = \hbar g (\hat{\sigma}^+ \hat{a} e^{-i\Delta t} + \hat{\sigma}^- \hat{a}^\dagger e^{i\Delta t}) \quad (2.114)$$

onde $\Delta = \omega - \omega_0$ é a dessintonia entre as frequências. Vamos trabalhar com o caso ressonante, isto é, $\Delta = 0$.

A equação de movimento na representação de interação é dada por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_I = \hat{V} |\psi(t)\rangle_I, \quad (2.115)$$

onde o vetor de estado é semelhante ao dado pela equação 2.108, mas as amplitudes de probabilidade dependem do tempo e variam lentamente.

A energia de interação consegue causar transições somente entre $|n, e\rangle$ e $|n+1, g\rangle$, então $|\psi(t)\rangle_I = C_{n,e}(t)|n, e\rangle + C_{n+1,g}(t)|n+1, g\rangle$. Colocando isto na equação de movimento e multiplicando o resultado por $\langle n, e|$,

$$\begin{aligned}\dot{C}_{n,e} &= -ig \langle n, e|(\hat{a}\hat{\sigma}^+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}^-)|n, e\rangle C_{n,e} \\ &\quad + -ig \langle n, e|(\hat{a}\hat{\sigma}^+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}^-)|n+1, g\rangle C_{n+1,g}\end{aligned}\quad (2.116)$$

repetimos o procedimento multiplicando por $\langle n+1, g|$ em vez de $\langle n, e|$. Usando as propriedades dos operadores de escada bosônicos e fermiônicos mencionadas nas seções anteriores e que $\langle \alpha, n|\alpha, n\rangle = 1$, com $\alpha = e$ ou g , obtemos

$$\dot{C}_{n,e}(t) = -ig\sqrt{n+1}C_{n+1,g}(t), \quad (2.117a)$$

$$\dot{C}_{n+1,g}(t) = -ig\sqrt{n+1}C_{n,e}(t), \quad (2.117b)$$

um par de equações diferenciais acopladas exatamente solúvel.

Vamos escrever a solução geral deste sistema dinâmico. Primeiro vamos escrever na forma matricial $\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{A}\mathbf{C}$ e calcular os autovalores e autovetores da matriz de transformação $\mathbf{A}$:

$$\begin{pmatrix} \dot{C}_{n,e} \\ \dot{C}_{n+1,g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -ig\sqrt{n+1} \\ -ig\sqrt{n+1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{n,e} \\ C_{n+1,g} \end{pmatrix}. \quad (2.118)$$

Os autovetores de $\mathbf{A}$ são dados por $\mathbf{v}_+ = (1 \ -1)^T$ e $\mathbf{v}_- = (1 \ 1)^T$, cujos autovalores correspondentes são $\lambda_\pm = \pm ig\sqrt{n+1}$. A solução geral é a combinação $\mathbf{C} = c_+\lambda_+\mathbf{v}_+ + c_-\lambda_-\mathbf{v}_-$. Através desta solução geral, podemos explorar qualquer condição inicial possível. Como já foi dito, a teoria quântica da interação luz-matéria pode contemplar os fenômenos de emissão espontânea e absorção estimulada. Para estudar a emissão espontânea tomamos o átomo inicialmente excitado, isto é, $C_{n,e}(0) = C_n(0)$ e $C_{n+1,g}(0) = 0$. Com esta condição inicial obtemos

$$C_{n,e}(t) = C_n(0) \cos(g\sqrt{n+1}t), \quad (2.119a)$$

$$C_{n+1,g}(t) = -iC_n(0) \sin(g\sqrt{n+1}t), \quad (2.119b)$$

existirá uma probabilidade finita de que o átomo excitado decaia para o estado de menor energia. No caso da absorção estimulada nós preparamos o sistema com o átomo no estado fundamental, $C_{n+1,g}(0) = C_{n+1}(0)$ e $C_{n,e}(0) = 0$. Esta condição inicial nos trás também uma probabilidade que oscila entre os níveis de energia. As amplitudes são

$$C_{n,e}(t) = -iC_{n+1}(0) \sin(g\sqrt{n+1}t), \quad (2.120a)$$

$$C_{n+1,g}(t) = C_{n+1}(0) \cos(g\sqrt{n+1}t). \quad (2.120b)$$

Agora podemos calcular algumas quantidades físicas mensuráveis, tais como as probabilidades e a inversão atômica. A probabilidade de encontrar o átomo em um dado nível de energia é obtida tomando o traço parcial sobre o campo. Então, a probabilidade de encontrar o átomo no estado $|e\rangle$ será $P_e = \sum_n |C_{n,e}|^2$ enquanto que a probabilidade de encontrar o átomo no estado $|g\rangle$ é dada por $P_g = \sum_n |C_{n,g}|^2$. A probabilidade de encontrar

n fótons no campo em um instante t é dada tomando o traço parcial sobre o átomo, isto é, $P_n(t) = \rho_{nn}(t) = \sum_{\alpha} |C_{n,\alpha}(t)|^2$. Vamos considerar o caso em que temos um átomo inicialmente excitado, $C_{n,e} = C_n(0)$ e $C_{n+1,g}(0) = 0$. Então, $\rho_{nn}(0) = |C_{n,e}(0)|^2 = |C_n(0)|^2$ ($C_e(0) = 1$), podemos escrever a probabilidade de que há n fótons no campo

$$\begin{aligned} P_n(t) &= |C_n(0)|^2 \cos^2(g\sqrt{n+1}t) + |C_{n-1}(0)|^2 \sin^2(g\sqrt{n}t) \\ &= \rho_{nn}(0) \cos^2(g\sqrt{n+1}t) + \rho_{n-1,n-1}(0) \sin^2(g\sqrt{n}t). \end{aligned} \quad (2.121)$$

A inversão atômica pode ser calculada,

$$\begin{aligned} W &= P_e - P_g = \sum_n [|C_{n,e}|^2 - |C_{n,g}|^2] \\ &= \sum_n \left[\rho_{nn}(0) \cos^2(g\sqrt{n+1}t) - \rho_{n-1,n-1}(0) \sin^2(g\sqrt{n}t) \right] \\ &= \sum_n \rho_{nn}(0) \left[\cos^2(g\sqrt{n+1}t) - \sin^2(g\sqrt{n+1}t) \right], \end{aligned} \quad (2.122)$$

onde usamos as equações 2.119a e 2.119b. Portanto, a inversão atômica para um sistema preparado com o átomo excitado e um campo qualquer, pode ser escrita

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{nn}(0) \cos(2g\sqrt{n+1}t). \quad (2.123)$$

O campo dentro da cavidade pode ser, por exemplo,

1. Vácuo; Para o estado de vácuo, $\rho = |0\rangle\langle 0|$, temos $\rho_{nn}(0) = \langle n|\rho|n\rangle = \langle n|0\rangle \langle 0|n\rangle = \delta_{n,0}$. Então,

$$W(t) = \sum_n \delta_{n,0} \cos(2g\sqrt{n+1}t) = \cos(2g\sqrt{1}t). \quad (2.124)$$

As oscilações de Rabi ocorrem mesmo quando não há campo. A raiz de 1, $\sqrt{1}$, corresponde a emissão espontânea. Completamente diferente do resultado obtido pela teoria semiclássica onde, na ausência de campo, $P_g(t) = 0$ (veja a equação 2.93) não há transição. Na teoria quântica, a probabilidade de encontrar o átomo no estado fundamental $|g\rangle$ é

$$P_g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |C_{n,g}(t)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{nn}(0) \sin^2(g\sqrt{n+1}t). \quad (2.125)$$

Na ausência de campo, isto é, para o estado de vácuo $\rho_{nn}(0) = \delta_{n,0}$ obtemos

$$P_g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n,0} \sin^2(g\sqrt{n+1}t) = \sin^2(gt) \quad (2.126)$$

onde g é a frequência de Rabi no vácuo. Este importante fenômeno foi mostrado experimentalmente [19, 92].

Em resumo, nós observamos que, na ausência do campo, os dois tratamentos nos trazem diferentes resultados. Na teoria semiclássica, o átomo excitado não pode fazer uma transição para o estado de menor energia. Por outro lado, a teoria quântica nos mostra que transições entre os níveis de energia são possíveis devido à emissão espontânea.

2. Estado de Fock; Para o campo inicialmente no estado número n_0 , $\rho = |n_0\rangle\langle n_0|$, temos $\rho_{nn} = \delta_{n,n_0}$. Então,

$$W(t) = \sum_n \delta_{n,n_0} \cos(2g\sqrt{n+1}t) = \cos(2g\sqrt{n_0+1}t). \quad (2.127)$$

3. Estado coerente; Para o campo preparado em um estado coerente,

$$\rho_{nn}(0) = \frac{\langle n \rangle^n e^{-\langle n \rangle}}{n!}, \quad (2.128)$$

a inversão atômica será,

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle n \rangle^n e^{-\langle n \rangle}}{n!} \left[\cos(2g\sqrt{n+1}t) \right]. \quad (2.129)$$

Conforme observamos na figura 2.7, ocorre o conhecido fenômeno de colapso e renascimento. O tão conhecido fenômeno de colapso e renascimento é um efeito extremamente interessante por ser uma propriedade puramente quântica do sistema. Isto é, este efeito não pode ser descrito por meio das equações de Bloch clássicas. Note que mostramos acima este fenômeno teoricamente por meio da matriz densidade através da aproximação de onda girante, primeiro descrito em [30] e, posteriormente por outros métodos, por [33] e [34]. Experimentalmente, o fenômeno também foi observado [19, 81] e possui inúmeras aplicações que vão desde física atômica e átomos armadilhados [86, 67] até nano-estruturas de baixa dimensionalidade [54].

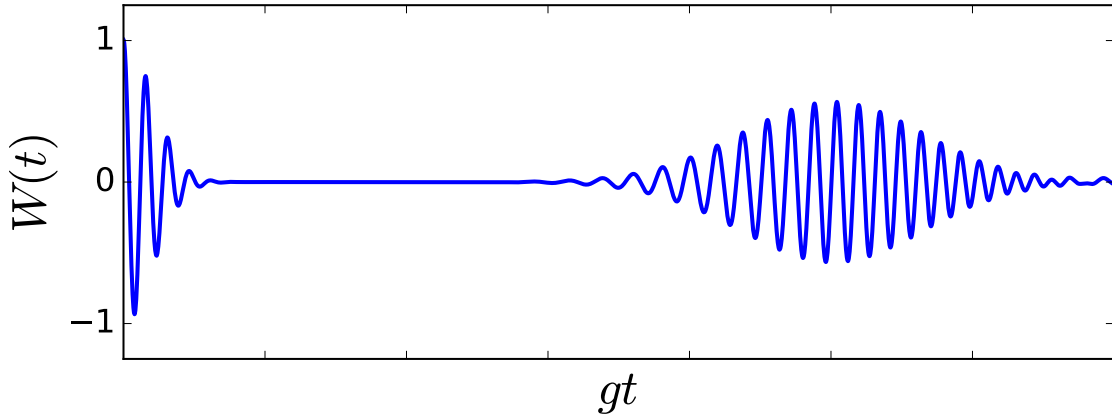


Figura 2.7: Inversão atômica para um campo inicialmente em um estado coerente. Parâmetro: $\langle n \rangle = 15$.

Nesta seção, nós estudamos os vários fenômenos da interação luz-matéria abordado pelo modelo de Jaynes-Cummings com a suposição de ressonância, $\Delta = 0$. Porém, sabemos que também irão ocorrer para $\Delta \neq 0$. Por exemplo, de acordo com Eberly *et. al.* [30], o fenômeno de colapso e renascimento ocorre para os vários valores de Δ . Na figura 2.8, observamos um mapa no plano t - Δ mostrando os primeiros colapsos e renascimentos para $\langle n \rangle = 100$.

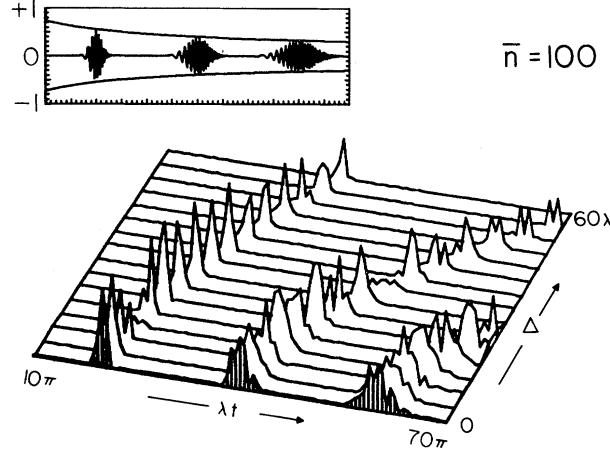


Figura 2.8: Mapa no plano t - Δ mostrando os primeiros colapsos e renascimentos para $\langle \hat{\sigma}_z(t) \rangle$ com $\langle n \rangle = 100$. A pequena figura mostra o mesmo que a figura 2.7 junto com uma aproximação envelope. Retirado e adaptado de [30].

Espectro de energia e estados vestidos

O Hamiltoniano do modelo de Jaynes-Cummings é diagonal em blocos na base $\{|0, g\rangle, |n, e\rangle, |n+1, g\rangle\}$, isto é,

$$\hat{H}^{JC} = \sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} \hat{H}_{\tilde{n}}, \quad (2.130)$$

onde $\hat{H}_0 = |0, g\rangle \langle 0, g| \hat{H}^{JC} |0, g\rangle \langle 0, g| = \hat{0}$. Desse modo, é possível diagonalizar exatamente o Hamiltoniano JC apenas calculando os autovalores e autovetores das matrizes $\hat{H}_{\tilde{n}}$. Note que quando só há um fóton permitido, $n = 0$, os estados possíveis são $|0, e\rangle$ e $|1, g\rangle$, isto corresponde à uma única excitação. O subespaço de duas excitações corresponde ao caso de $n = 2$ fótons permitidos e assim por diante. Então, o número total excitações pode ser escrito em termos do número de fótons permitidos, $\tilde{n} = n + 1$. O Hamiltoniano $\hat{H}_{\tilde{n}}$ em termos do número de fótons é dado por

$$\hat{H}_{n+1} = \hbar \begin{pmatrix} \omega n + \omega_0 & g\sqrt{n+1} \\ g\sqrt{n+1} & \omega(n+1) \end{pmatrix}, \quad \forall n. \quad (2.131)$$

Os autoestados de $\hat{H}_{\tilde{n}}$ são conhecidos como polártons pares $|+, \tilde{n}\rangle$ e ímpares $|-, \tilde{n}\rangle$. Além disso, $|\pm, 0\rangle = |0, g\rangle \equiv |\text{vac}\rangle$ é o estado de vácuo, não há excitações. As autoenergias correspondentes são,

$$E_{\pm, \tilde{n}} = \hbar \omega \tilde{n} - \frac{\hbar \Delta}{2} \pm \frac{\hbar}{2} \Omega_{\tilde{n}}(\Delta), \quad (2.132)$$

onde $\Omega_{\tilde{n}}(\Delta) = \sqrt{\Delta^2 + g^2\tilde{n}}$ é a frequência generalizada de Rabi. Em ressonância e para $\tilde{n} = 0$ reobtemos $\Omega_0 = g$ a frequência de Rabi no vácuo (veja a equação 2.126). A figura 2.9 nos mostra o espectro de energias desprezando o termo constante (independente de $\tilde{n}$). Podemos observar que a diferença de energia entre os polárítos pares e ímpares é não-linear,

$$\delta E_{\tilde{n}} = E_{+, \tilde{n}} - E_{-, \tilde{n}} = \hbar \Omega_{\tilde{n}}(\Delta). \quad (2.133)$$

Mesmo em ressonância, temos que tal não-linearidade ainda é vista e a diferença cresce proporcional à $\sqrt{\tilde{n}}$. Esta não-linearidade torna possível que um sistema de cavidades acopladas seja um potencial simulador de sistemas quânticos fortemente correlacionados, pois podemos induzir interações efetivas não-lineares entre fótons.

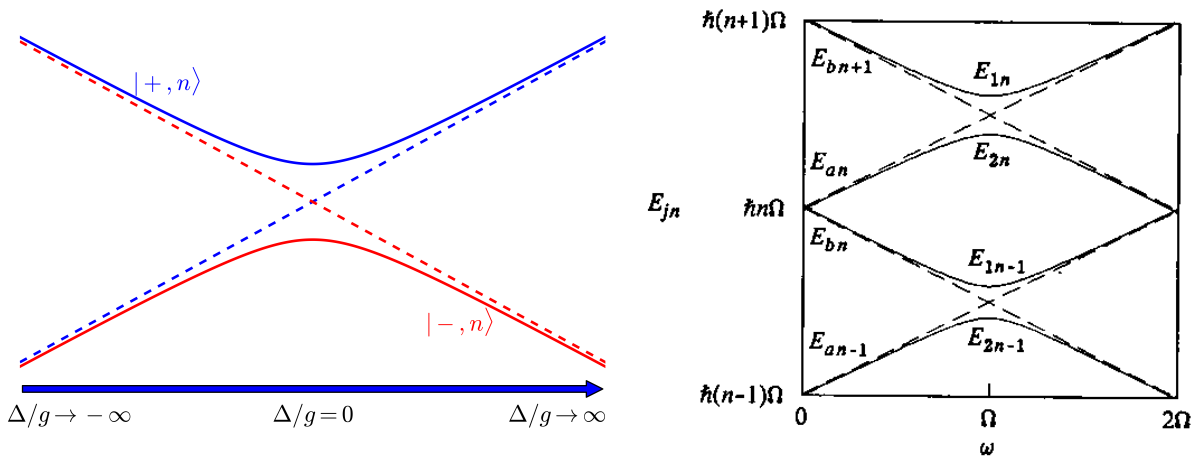


Figura 2.9: Espectro de autoenergias do Hamiltoniano JC. (Esquerda) Representação dos níveis de energia para um número n de excitações em função da dessintonia Δ (veja a equação 2.132). As linhas tracejadas representam as energias para o caso sem interação, mostrando que a interação abre o *gap*. Para melhor visualização, ignoramos os termos constantes (em n) de energia. (Direita) O mesmo resultado para mais valores de n , retirado de [71].

Vamos calcular os autoestados de $\hat{H}_{n+1}$ e sua relação com a base nua em termos do número permitido de fótons. De acordo com a equação secular, temos

$$\hbar \begin{pmatrix} \omega n + \omega_0 & g\sqrt{n+1} \\ g\sqrt{n+1} & \omega(n+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{\pm} \\ \beta_{\pm} \end{pmatrix} = E_{\pm, n} \begin{pmatrix} \alpha_{\pm} \\ \beta_{\pm} \end{pmatrix}, \quad (2.134)$$

mantendo o vínculo de que os autovetores são normalizados, isto é,

$$\alpha_{\pm}^2 + \beta_{\pm}^2 = 1. \quad (2.135)$$

Com a relação acima, temos três equações para duas incógnitas. Podemos então usar a equação $\hbar(\omega n + \omega_0)\alpha_{+} + \hbar g\sqrt{n+1}\beta_{+} = E_{+, n}\alpha_{+}$ e substituir $\beta_{+} = \sqrt{1 - \alpha_{+}^2}$. Assim,

$$\alpha_{+} = \frac{g\sqrt{n+1}}{\sqrt{(\Delta + \Omega_n)^2 + g^2(n+1)}}.$$

Substituindo α_+ na equação 2.135,

$$\beta_+ = \frac{\Delta + \Omega_n}{\sqrt{(\Delta + \Omega_n)^2 + g^2(n+1)}}.$$

A equação 2.135 nos permite fazer um mapeamento de α_+ e β_+ em um círculo unitário,

$$\sin(\theta_n) = \alpha_+, \quad \cos(\theta_n) = \beta_+,$$

onde θ_n pode ser calculado fazendo a seguinte observação,

$$\begin{aligned} \cos(2\theta_n) &= \cos^2(\theta_n) - \sin^2(\theta_n) = \frac{\Delta}{\Omega_n}, \\ \sin(2\theta_n) &= 2 \sin(\theta_n) \cos(\theta_n) = \frac{g\sqrt{n+1}}{\Omega_n}, \end{aligned}$$

de modo que $\tan(2\theta_n) = g\sqrt{n+1}/\Delta$. Então,

$$\theta_n = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{g\sqrt{n+1}}{\Delta} \right). \quad (2.136)$$

Note que no caso ressonante temos que o ângulo para qualquer n é dado por

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \theta_n = \frac{1}{2} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{g\sqrt{n+1}}{\Delta} \right) \right\} = \frac{\pi}{4}, \quad \forall n. \quad (2.137)$$

Repetindo o procedimento acima para calcularmos α_- e β_- nós descobrimos que

$$\alpha_-^2 = \beta_+^2, \quad \beta_-^2 = \alpha_+^2.$$

Observando apenas os quadrados, nós perdemos a informação acerca dos sinais. Para o caso ressonante ($\Delta = 0$), temos que $\beta_- = -\alpha_+$. Finalmente, obtemos os autoestados de $\hat{H}_{n+1}$,

$$|+, n+1\rangle = \sin \theta_n |n, e\rangle + \cos \theta_n |n+1, g\rangle, \quad (2.138a)$$

$$|-, n+1\rangle = \cos \theta_n |n, e\rangle - \sin \theta_n |n+1, g\rangle. \quad (2.138b)$$

Observe a figura esquemática 2.10 para uma melhor visualização. O estado de vácuo total (onde não há excitações) corresponde ao estado de energia zero $|\pm, 0\rangle = |0, g\rangle \equiv |\text{vac}\rangle$. Note que, se começarmos com o estado excitado $|0, e\rangle$, haverá uma probabilidade finita de estar em um dos poláritons $|\pm, 1\rangle = [|0, e\rangle \pm |1, g\rangle]/\sqrt{2}$ (caso $\Delta = 0$). É importante observar com isso que este estado inicial ativa apenas o subespaço de uma excitação, a escolha do estado inicial é de extrema importância, pois nosso sistema é fechado.

Mapeamento polaritônico

Os estados obtidos acima são conhecidos como estados vestidos. Os estados vestidos misturam excitações do campo (fótons) e excitações atômicas. Desse modo, eles consistem em poláritons pares ($|+, n\rangle$) ou ímpares ($|-, n\rangle$). Aqui n é o número de excitações. Não confundir com o

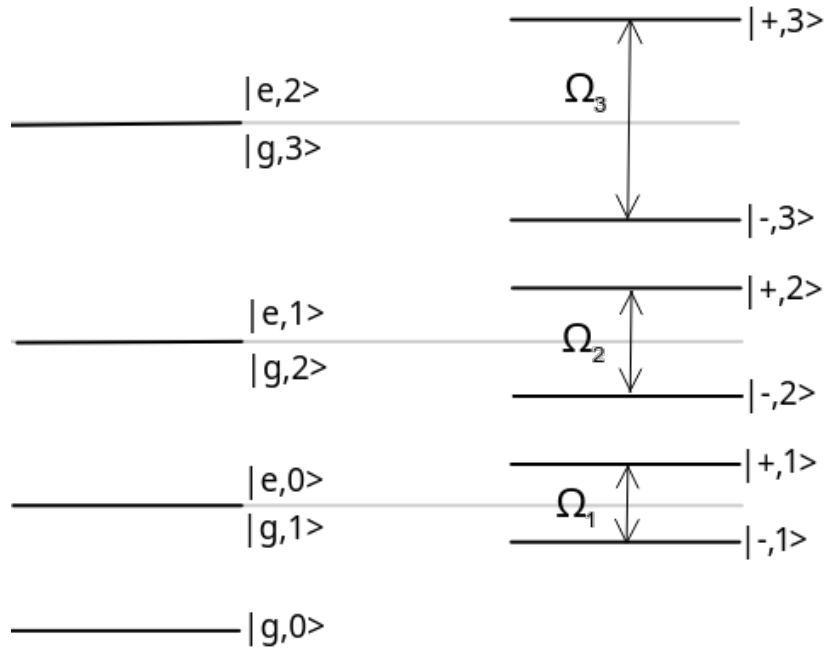


Figura 2.10: Esquema de níveis de energia para os estados nus e vestidos comparativamente.

número permitido de fótons. Nos próximos capítulos, quando vermos $|\pm, n\rangle$, n é o autovalor do operador número de ocupação polaritônico $\hat{n}_p = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\sigma}^+ \hat{\sigma}^-$ que agora dá o número de excitações atômicas mais fotônicas. Podemos escrever os operadores polaritônicos de modo que o Hamiltoniano de Jaynes-Cummings, na base $\{|\text{vac}\rangle, |+, n\rangle, |-, n\rangle\}$, fica

$$\hat{H}^{\text{JC}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha=\pm} E_{\alpha,n} \hat{P}_{\alpha,n}^\dagger \hat{P}_{\alpha,n}, \quad (2.139)$$

onde a energia é dada pela equação 2.132 com $\hat{P}_{\alpha,n}^\dagger$ e $\hat{P}_{\alpha,n}$ dados simplesmente pelas projeções

$$\hat{P}_{\alpha,n}^\dagger = |\alpha, n\rangle \langle \text{vac}|, \quad (2.140a)$$

$$\hat{P}_{\alpha,n} = |\text{vac}\rangle \langle \alpha, n|, \quad (2.140b)$$

cujas atuações em estados vestidos arbitrários são dados por

$$\hat{P}_{\alpha,n}^\dagger \hat{P}_{\alpha,n} |\beta, m\rangle = \delta_{\alpha,\beta} \delta_{n,m} |\alpha, n\rangle, \quad (2.141a)$$

$$\hat{P}_{\alpha,n} \hat{P}_{\alpha,n}^\dagger |\beta, m\rangle = \delta_{0,m} |\text{vac}\rangle. \quad (2.141b)$$

A escolha para escrever estes operadores aqui é óbvia, pois o operador nos dá um poláriton a partir do estado de vácuo que é único. A partir destas definições podemos escrever os operadores de criação e aniquilação fotônicos em termos de $\hat{P}_{\alpha,n}^\dagger$ e $\hat{P}_{\alpha,n}$. Isto será útil quando formos tratar da atuação destes operadores em estados vestidos.

Para finalizar o mapeamento, devemos ser capazes de escrever os operadores de criação e aniquilação usuais em termos dos operadores de criação e aniquilação polaritônicos. Já que

vamos relacionar ambas as bases, vamos escrever tudo em termos do número de fótons para não haver confusão. Primeiro, reescrevemos as equações 2.138 na forma matricial

$$\begin{pmatrix} |+, n+1\rangle \\ |-, n+1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta_n & \cos \theta_n \\ \cos \theta_n & -\sin \theta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |n, e\rangle \\ |n+1, g\rangle \end{pmatrix} = T_n \begin{pmatrix} |n, e\rangle \\ |n+1, g\rangle \end{pmatrix}. \quad (2.142)$$

Também sabemos que o operador de aniquilação fotônico atua diminuindo por um o número de fótons

$$\hat{a} \begin{pmatrix} |+, n+1\rangle \\ |-, n+1\rangle \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} |+, n\rangle \\ |-, n\rangle \end{pmatrix}, \quad (2.143)$$

onde M_n é uma matriz de transição que depende de n . Mas, a atuação de $\hat{a}$ no lado direito da equação 2.142, isto é, nos estados nus, nos dá

$$\hat{a} T_n \begin{pmatrix} |n, e\rangle \\ |n+1, g\rangle \end{pmatrix} = T_n \begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0 \\ 0 & \sqrt{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |n-1, e\rangle \\ |n, g\rangle \end{pmatrix}$$

e ainda,

$$M_n \begin{pmatrix} |+, n\rangle \\ |-, n\rangle \end{pmatrix} = M_n T_{n-1} \begin{pmatrix} |n-1, e\rangle \\ |n, g\rangle \end{pmatrix}.$$

Podemos então igualar as equações que relacionam M_n e T_n através dos estados nus,

$$M_n T_{n-1} \begin{pmatrix} |n-1, e\rangle \\ |n, g\rangle \end{pmatrix} = T_n \begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0 \\ 0 & \sqrt{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |n-1, e\rangle \\ |n, g\rangle \end{pmatrix}$$

e obter finalmente a matriz de transição,

$$M_n = T_n \begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0 \\ 0 & \sqrt{n+1} \end{pmatrix} T_{n-1}^{-1}, \quad (2.144)$$

cujos elementos de matriz podem ser escritos explicitamente como

$$M_n^{++} = \sqrt{n} \sin \theta_n \sin \theta_{n-1} + \sqrt{n+1} \cos \theta_n \cos \theta_{n-1}, \quad (2.145a)$$

$$M_n^{+-} = \sqrt{n} \sin \theta_n \cos \theta_{n-1} - \sqrt{n+1} \cos \theta_n \sin \theta_{n-1}, \quad (2.145b)$$

$$M_n^{-+} = \sqrt{n} \cos \theta_n \sin \theta_{n-1} - \sqrt{n+1} \sin \theta_n \cos \theta_{n-1}, \quad (2.145c)$$

$$M_n^{--} = \sqrt{n} \cos \theta_n \cos \theta_{n-1} + \sqrt{n+1} \sin \theta_n \sin \theta_{n-1}. \quad (2.145d)$$

Conhecendo os elementos de matriz de M_n , a aplicação do operador de aniquilação nos estados vestidos é conhecida via 2.143 ou simplesmente,

$$\begin{aligned} \hat{a} |\beta, m\rangle &= \sum_{\alpha'=\pm} M_m^{\beta\alpha'} |\alpha', m-1\rangle \\ &= \left(\sum_n \sum_{\alpha, \alpha'} M_n^{\alpha\alpha'} |\alpha', n-1\rangle \langle \alpha, n| \right) |\beta, m\rangle. \end{aligned}$$

Assim, é fácil usar as definições dos operadores em 2.140 para reescrever a equação acima como

$$\hat{a} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha, \alpha'=\pm} M_n^{\alpha\alpha'} \hat{P}_{\alpha',n-1}^{\dagger} \hat{P}_{\alpha,n}, \quad (2.146a)$$

$$\hat{a}^{\dagger} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha, \alpha'=\pm} M_{n+1}^{\alpha'\alpha} \hat{P}_{\alpha',n+1}^{\dagger} \hat{P}_{\alpha,n}, \quad (2.146b)$$

onde agora já voltamos a escrever em termos apenas do número de excitações. Para obter a equação para $\hat{a}^{\dagger}$ repetimos o mesmo procedimento acima. Observei que os elementos da matriz de transição para $\hat{a}^{\dagger}$ se assemelham ao que obtemos para $\hat{a}$ mas com $n \rightarrow n+1$ e os elementos fora da diagonal trocados, como pode ser visto na equação acima.

Esta representação é útil para estudar o sistema na base vestida e também será útil para calcular alguns regimes de acoplamento no modelo de Jaynes-Cummings-Hubbard que será mostrado mais adiante.

Rede de cavidades acopladas

Vamos agora estudar a teoria quântica da interação luz-matéria para uma rede de cavidades acopladas. Para isto, é necessário rever a quantização do campo eletromagnético considerando um meio material, ou seja, a rede de cavidades. É interessante ressaltar nesse caso que vamos tratar sempre de uma rede periódica. Então, algumas propriedades como o teorema de Bloch poderão ser aplicadas. Diante disso, poderemos conectar o resultado da quantização com os resultados do modelo de Jaynes-Cummings.

3.1 Formulação macroscópica do eletromagnetismo

Para um material sem polarização e magnetização, isto é, não há fonte, as equações de Maxwell na matéria são escritas como

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}\quad (3.1)$$

onde os campos auxiliares são conectados com os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ via

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{x}, t). \quad (3.2b)$$

Podemos ainda introduzir os potenciais escalar e vetor do mesmo modo que antes,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\nabla \phi(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t), \quad (3.3a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t). \quad (3.3b)$$

Substituindo nas equações para o divergente do campo de indução magnética e na lei de Ampère, obtemos

$$\nabla \cdot [\varepsilon(\mathbf{x}) \nabla \phi(\mathbf{x}, t)] + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot [\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)] = 0, \quad (3.4a)$$

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)] + \frac{\varepsilon(\mathbf{x})}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \frac{\varepsilon(\mathbf{x})}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (3.4b)$$

Fica claro que a escolha do gauge de Coulomb muda na presença de matéria e se torna $\nabla \cdot [\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)] = 0$. Novamente, não havendo fonte, temos que $\phi(\mathbf{x}, t) = 0$. Assim,

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)] + \frac{\varepsilon(\mathbf{x})}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} = 0. \quad (3.5)$$

Podemos fazer a quantização do campo eletromagnético através apenas do potencial vetor. O conjunto completo das funções de modos de campo $w_\sigma(\mathbf{x})e^{-i\omega_\sigma t}$ que vão aparecer na expansão de $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ devem satisfazer

$$\nabla \times [\nabla \times w_\sigma(\mathbf{x})] - \varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\omega_\sigma^2}{c^2} w_\sigma(\mathbf{x}) = 0, \quad (3.6a)$$

$$\nabla \cdot [\varepsilon(\mathbf{x})w_\sigma(\mathbf{x})] = 0, \quad (3.6b)$$

onde as soluções são denotadas pelo índice σ .

3.2 Quantização em uma rede periódica

Considere que o meio em que o campo está inserido é uma rede periódica de cavidades acopladas. Desse modo, a permissividade elétrica vai carregar a periodicidade da rede,

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{x} + \mathbf{R}), \quad (3.7)$$

onde $\mathbf{R}$ é um vetor de rede e a permissividade local centrada no sítio $\mathbf{R}$ será chamada de $\varepsilon_{\mathbf{R}}(\mathbf{x})$. A permissividade elétrica descrita deste modo faz com que o fóton se desloque na rede como se houvesse um potencial efetivo que carrega a periodicidade da rede. Tal sistema é semelhante a um elétron se movendo em um sólido cristalino, onde um potencial periódico devido aos átomos carrega a periodicidade da rede. Podemos então usar o teorema de Bloch para o potencial vetor, de modo que

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{R}, t) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t). \quad (3.8)$$

Então, considerando que o campo é monocromático com polarização fixa, a expansão de $\mathbf{A}$ é da forma usual, onde $w(\mathbf{x})$ é a função de Wannier,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_n w(\mathbf{x} - \mathbf{R}_n) e^{(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_n - \omega t)}, \quad (3.9)$$

onde $\mathbf{R}_n = R\mathbf{n}$ com $\mathbf{n}$ uma t  pla de inteiros. Em cada sítio, a fun  o de Wannier    caracterizada pela permissividade local $\varepsilon_{\mathbf{R}}(\mathbf{x})$ e frequência ω_σ . Representa a parte espacial dos modos da cavidade. Para um campo monocromático de polariza  o fixa, vamos omitir o   ndice σ e a frequência será ω_c . Desse modo, para a rede per  dica, a permissividade elétrica na equa  o 3.6a será a local, $\varepsilon_{\mathbf{R}}(\mathbf{x})$.

Agora estamos aptos a resolver o problema e determinar qual a contribui  o para ω no Hamiltoniano 2.36 do campo livre quantizado. Primeiro, vamos substituir a expansão acima na equa  o 3.5,

$$\sum_n \varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\omega^2}{c^2} w(\mathbf{x} - \mathbf{R}_n) e^{(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_n - \omega t)} = \sum_n \nabla \times \nabla \times w(\mathbf{x} - \mathbf{R}_n) e^{(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_n - \omega t)}$$

mas, de acordo com 3.6a, conhecemos o lado direito da equação. Assim, substituindo e reorganizando,

$$\omega^2 \sum_n \varepsilon(\mathbf{x}) w(\mathbf{x} - \mathbf{R}_n) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_n} = \omega_c^2 \sum_n \varepsilon_{\mathbf{R}}(\mathbf{x} - \mathbf{R}_n) w(\mathbf{x} - \mathbf{R}_n) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_n},$$

multiplicando ambos os lados por $w^*(\mathbf{x})$ e integrando em todo o espaço, podemos encontrar uma expressão para ω

$$\omega^2 = \omega_c^2 \frac{\sum_n \int d\mathbf{x} \varepsilon_{\mathbf{R}}(\mathbf{x} - \mathbf{R}_n) w^*(\mathbf{x}) w(\mathbf{x} - \mathbf{R}_n) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_n}}{\sum_n \int d\mathbf{x} \varepsilon(\mathbf{x}) w^*(\mathbf{x}) w(\mathbf{x} - \mathbf{R}_n) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_n}}. \quad (3.10)$$

Como mencionado, o sistema se comporta semelhante a um elétron se dispersando em uma rede cristalina. Do mesmo modo, podemos escrever ω em termos dos parâmetros de *tight-binding*. Só precisamos separar nos somatórios o termo $n = 0$ e lembrar que as funções de Wannier satisfazem

$$\int d\mathbf{x} \varepsilon_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}) w^*(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) = 1. \quad (3.11)$$

Então, obtemos a frequência ω em termos dos parâmetros de *tight-binding*,

$$\omega^2 = \omega_c^2 \frac{1 + \sum_{n \neq 0} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_n} \beta_n}{1 + \gamma + \sum_{n \neq 0} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_n} \alpha_n}, \quad (3.12)$$

onde os parâmetros β_n , γ e α_n são dados por

$$\beta_n = \int d\mathbf{x} \varepsilon_{\mathbf{R}}(\mathbf{x} - \mathbf{R}_n) w^*(\mathbf{x}) w(\mathbf{x} - \mathbf{R}_n), \quad (3.13a)$$

$$\gamma = \int d\mathbf{x} [\varepsilon(\mathbf{x}) - \varepsilon_{\mathbf{R}}(\mathbf{x})] w^*(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}), \quad (3.13b)$$

$$\alpha_n = \int d\mathbf{x} \varepsilon(\mathbf{x}) w^*(\mathbf{x}) w(\mathbf{x} - \mathbf{R}_n). \quad (3.13c)$$

Considerando que fora da cavidade as funções de Wannier decaem rápido, podemos considerar que as integrais β_n e α_n estão restritas aos primeiros vizinhos, de modo que os únicos termos que sobrevivem serão $\beta_{\pm 1}$ e $\alpha_{\pm 1}$. Além disso, devido à simetria, essas integrais são invariantes sob a inversão de sinal de n . Obtemos então,

$$\omega^2 = \omega_c^2 \frac{1 + 2 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) \beta_1}{1 + \gamma + 2 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_n) \alpha_1} = \omega_c^2 \left[\frac{-\gamma + 2\kappa \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})}{1 + \gamma + \sum_{n \neq 0} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_n} \alpha_1} + 1 \right],$$

onde escrevi $\kappa = \beta_1 - \alpha_1$, ou seja,

$$\kappa = \int d\mathbf{x} [\varepsilon_{\mathbf{R}}(\mathbf{x} - \mathbf{R}) - \varepsilon(\mathbf{x})] w^*(\mathbf{x}) w(\mathbf{x} - \mathbf{R}_n). \quad (3.14)$$

Supondo que as quantidades satisfazem $\gamma, \alpha_1 \approx 0$, podemos escrever ω na forma

$$\omega \approx \omega_c \sqrt{1 + 2\kappa \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})} \approx \omega_c [1 + \kappa \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})],$$

onde expandi a raiz em série de Taylor e manti os termos até primeira ordem. Podemos expandir também o cosseno em série de Taylor até primeira ordem em $\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}$ e obter

$$\omega \approx \omega_c + \omega_c \kappa. \quad (3.15)$$

As aproximações são válidas no limite de longo comprimento de onda, isto é, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} \approx 0$.

A interpretação do resultado acima é clara. O primeiro termo descreve uma contribuição no sítio em que o fóton se encontra, enquanto que o segundo termo são as contribuições entre os primeiros vizinhos. Podemos então combinar este resultado com o Hamiltoniano 2.36,

$$\hat{H}_{\text{campo}}^{\text{JCH}} = \sum_{i,j} (\omega \delta_{ij} + \omega \kappa_{ij}) \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j.$$

Note que a energia foi deslocada para não termos uma energia constante no Hamiltoniano. Podemos absorver ω em κ_{ij} e defini-lo como negativo $\omega \kappa_{ij} \rightarrow -\kappa_{ij}$ sem perdas. Além disso, a constante de tunelamento (ou *hopping*) vale $\kappa_{ij} = \kappa$ para os primeiros vizinhos e $\kappa_{ij} = 0$ para os outros casos. Finalmente, obtemos o Hamiltoniano do campo

$$\hat{H}_{\text{campo}}^{\text{JCH}} = \omega \sum_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i - \kappa \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j, \quad (3.16)$$

onde a notação $\langle i,j \rangle$ significa que a soma é apenas entre os primeiros vizinhos.

3.3 Modelo de Jaynes-Cummings-Hubbard

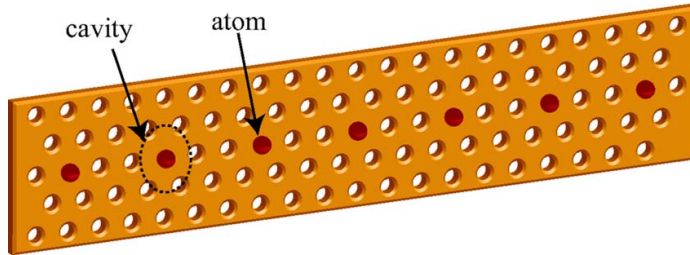


Figura 3.1: Possível arranjo experimental para o modelo de Jaynes-Cummings-Hubbard: uma rede de cristal fotônico. Os buracos da rede conseguem criar um índice de refração de tal modo que prende os fótons em uma dada frequência. Nos defeitos, isto é, os sítios onde não há buracos, se formam as cavidades. Em vermelho, estão denotados os átomos que formam sistemas de dois níveis postos um em cada cavidade. Retirado e adaptado de [66].

O Hamiltoniano do modelo Jaynes-Cummings-Hubbard possui a contribuição 3.16 para o campo e o acoplamento é o de Jaynes-Cummings que já obtemos. Explicitamente, o Hamiltoniano total pode ser escrito

$$\hat{H}^{\text{JCH}} = \sum_i \hat{H}_i^{\text{JC}} + \hat{H}_{\text{hop}}, \quad (3.17)$$

onde a parte $\hat{H}_{\text{hop}}$ corresponde ao segundo termo no Hamiltoniano do campo. A forma do acoplamento entre as cavidades, o termo de *hopping*, vai depender da geometria do arranjo

desta rede periódica. Por exemplo, no caso uma rede linear e unidimensional de N cavidades, podemos escrever, nesse caso, o termo de *hopping* como

$$\hat{H}_{\text{hop}} = -\kappa \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j = -\kappa \sum_{i=1}^{N-1} \left(\hat{a}_{i+1}^\dagger \hat{a}_i + \text{h.c.} \right). \quad (3.18)$$

A figura 3.1 nos mostra um exemplo de experimento para a visualização do modelo JCH envolvendo cristais fotônicos, onde é possível criar uma rede unidimensional de átomos.

Reorganizando o Hamiltoniano total de acordo com o número total de excitações, o Hamiltoniano é escrito como diagonal em blocos $\hat{H}^{\text{JCH}} = \text{diag}[\hat{H}^{(0)}, \hat{H}^{(1)}, \hat{H}^{(2)}, \dots]$, onde $\hat{H}^{(j)}$ denota o Hamiltoniano na base de estados com um número fixo de j excitações. Este sistema pode admitir um grande número excitações e resolvê-lo é muito difícil. Mesmo numericamente, este tipo de sistema necessita de métodos bastante avançados para estudar suas soluções. Desse modo, vamos nos restringir à estudar formas aproximadas e ao subespaço de uma excitação.

3.3.1 Métodos aproximados

De modo geral, tratamos dessa parte no ensemble grande canônico, então vou adicionar o termo relacionado ao potencial químico μ ,

$$\hat{H}^{\text{JCH}} = \sum_j \hat{H}_j^{\text{JC}} - \sum_{\langle i,j \rangle} \kappa_{ij} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j - \mu \sum_j \hat{n}_j, \quad (3.19)$$

onde o considereei igual em todos os sítios, não há desordem, e $\hat{n}_j = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \hat{\sigma}_j^+ \hat{\sigma}_j^-$ é o operador número polaritônico da cavidade j . Não é fácil, e muitas vezes não é possível, obter as autoenergias deste Hamiltoniano exatamente. Desse modo, vamos estudar o sistema através de diferentes aproximações para obtermos um melhor entendimento do problema.

Regimes de interação: limite atômico ou de fraco tunelamento

Vamos considerar aqui que $\kappa \ll g$ de tal modo que o termo de *hopping* é desprezível, não é permitido tunelamento entre as cavidades adjacentes. Todas as excitações ficam presas nas respectivas cavidades. O Hamiltoniano é então dado simplesmente pela forma desacoplada,

$$\hat{H}_{\text{atômico}}^{\text{JCH}} = \sum_j \left(\hat{H}_j^{\text{JC}} - \mu \hat{n}_j \right), \quad (3.20)$$

cujas autoenergias são localmente dadas pelas energias do modelo de JC menos uma constante proporcional à μ . O autoket correspondente ao estado fundamental do sistema será então dado pelo produto direto dos autokets locais $|\psi_{\text{rede}}\rangle = \bigotimes_{j=1}^N |\psi_{\text{local}}\rangle_j$. Já vimos que os autoestados locais, isto é, os autoestados do modelo de JC (poláritons), nos leva à dois estados, um de maior energia $|+, n\rangle$ e outro de menor energia $|-, n\rangle$. Desse modo, a função de onda do estado fundamental local deve corresponder à um dos autoestados de menor energia ou ao estado de vácuo.

Para estudarmos o estado fundamental nesse regime de interação podemos primeiro observar que quando $(\omega - \mu) \gg g, |\Delta|$ o estado fundamental é o estado de vácuo, ou seja, o estado $|\text{vac}\rangle$. Saindo deste regime, diminuindo a diferença $(\omega - \mu)$, vamos chegar a um ponto onde adicionar uma excitação ao sistema possui o mesmo custo energético que o estado de vácuo. Desse modo, podemos encontrar a seguinte relação de degenerescências $E_{-,n}^{(0)} = E_{-,n+1}^{(0)}$. Assim, obtemos a seguinte relação,

$$\frac{\mu_{\text{eff}}}{g} = \frac{1}{2g} [\Omega_n(\Delta) - \Omega_{n+1}(\Delta)], \quad (3.21)$$

onde a função $\Omega_n(\Delta)$ é a frequência generalizada de Rabi e a diferença $(\omega - \mu) = -\mu_{\text{eff}}$ atua como um potencial químico efetivo.

De acordo com o que vimos, no limite em que a interação átomo-campo domina, o número de poláritons é fixo em cada sítio para um dado conjunto de parâmetros. Quando o número total de poláritons é um múltiplo inteiro do número de cavidades, este regime se assemelha a fase isolante de Mott. Esta fase é bem conhecida do modelo de Bose-Hubbard para o estudo de sistemas quânticos de muitas partículas bosônicas.

Regimes de interação: forte tunelamento

Neste caso nós vamos considerar que $\kappa \gg g$ de tal modo que o termo de interação proporcional à g é desprezível. Isto significa que a interação átomo-campo se torna proibida. Podemos então assumir que não há excitações atômicas no sistema, desde que estamos interessados no estado de menor energia do sistema. Então, o Hamiltoniano no regime de forte tunelamento é, simplesmente,

$$\hat{H}_{\text{hop}}^{\text{JCH}} = (\omega - \mu) \sum_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j - \kappa \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j. \quad (3.22)$$

Este Hamiltoniano pode ser diagonalizado exatamente no espaço dos momentos. Vamos então tomar a transformada de Fourier do operador de aniquilação,

$$\hat{a}_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i}, \quad (3.23)$$

onde a soma engloba todos os vetores de onda na primeira zona de Brillouine. Assim, podemos reescrever o Hamiltoniano acima da seguinte forma

$$\hat{H}_{\text{hop}}^{\text{JCH}} = (\omega - \mu) \sum_j \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}_j} - \kappa \sum_{\langle i,j \rangle} \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}_j)}. \quad (3.24)$$

A primeira equação é simplificada observando que a soma em j nos dá uma delta e sobra apenas uma soma em $\mathbf{k}$. Prosseguindo com a simplificação do Hamiltoniano acima, podemos introduzir a decomposição $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_i + \mathbf{R}$, onde $\mathbf{R}$ é o vetor da rede que conecta o sítio i ao seu primeiro vizinho j . Vamos considerar agora que nossa rede é uma rede cúbica simples. Os vetores da rede $\mathbf{R}$ são, simplesmente, $\mathbf{R} \in \{(\pm a, 0, 0)^T, (0, \pm a, 0)^T, (0, 0, \pm a)^T\}$, onde chamei de a a constante de rede. Substituindo tudo no Hamiltoniano, obtemos

$$\hat{H}_{\text{hop}}^{\text{JCH}} = (\omega - \mu) \sum_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} - \kappa \sum_i \sum_{\mathbf{R}} \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}_i} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{R}}. \quad (3.25)$$

Novamente, a soma em i nos leva a uma delta e sobra apenas uma soma em $\mathbf{k}$. Abrimos a soma sobre $\mathbf{R}$ usando, explicitamente, as componentes do vetor de onda $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)^T$ para obter, finalmente,

$$\hat{H}_{\text{hop}}^{\text{JCH}} = \sum_{\mathbf{k}} \left[(\omega - \mu) - 2\kappa \sum_{i=1}^3 \cos(k_i a) \right] \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}. \quad (3.26)$$

De modo que as autoenergias deste Hamiltoniano que são dadas por

$$E(\mathbf{k}) = (\omega - \mu) - 2\kappa \sum_{i=1}^3 \cos(k_i a). \quad (3.27)$$

É importante observar que quando o tunelamento fotônico domina totalmente o acoplamento átomo-campo, isto é, no regime de forte tunelamento, o estado fundamental consistirá de fótons completamente espalhados na rede. Isto é observado pelo fato de que o Hamiltoniano no espaço de Fourier é local $\hat{H}_{\text{hop}}^{\text{JCH}} = \sum_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k}) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}$ e, devido a relação com o espaço real, temos que as excitações estarão delocalizadas no espaço real. Esse comportamento se assemelha à fase superfluida de um sistema quântico de muitas partículas bosônicas, bem conhecido através do modelo de Bose-Hubbard.

Teoria de campo médio e transição de fases

Vamos prosseguir com o método da teoria de campo médio. Primeiro, fazemos uma decomposição dizendo que só há uma perturbação em torno do valor médio, $\hat{a}_i = \langle \hat{a}_i \rangle + \delta \hat{a}_i$ e $\hat{a}_i^\dagger = \langle \hat{a}_i^\dagger \rangle + \delta \hat{a}_i^\dagger$. Através da aproximação de desacoplamento, isto é, mantendo em primeira ordem, podemos escrever $\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j = \langle \hat{a}_i^\dagger \rangle \hat{a}_j + \hat{a}_i^\dagger \langle \hat{a}_j \rangle - \langle \hat{a}_i^\dagger \rangle \langle \hat{a}_j \rangle$. O parâmetro de ordem do sistema aqui é o próprio valor médio, $\langle \hat{a}_i \rangle = \langle \hat{a}_j \rangle = \Psi$ que é complexo. Desse modo, substituindo no termo de *hopping*, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{hop}}^{\text{MF}} &= -\kappa \sum_{\langle i,j \rangle} \left(\Psi^* \hat{a}_j + \hat{a}_i^\dagger \Psi - |\Psi|^2 \right) \\ &= -\kappa z \Psi \sum_j \left(\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger - \Psi \right), \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde z é o número de coordenação da rede. Em uma rede linear unidimensional temos $z = 2$ e para uma rede cúbica simples, $z = 3$, ou seja, é o número de primeiros vizinhos. Note que na última equação considerei Ψ real. Isto é possível através de uma transformação do grupo $U(1)$ (fase global), assim como fizemos para o termo de acoplamento átomo-campo. Finalmente, podemos escrever o Hamiltoniano de Jaynes-Cummings-Hubbard na aproximação de campo médio,

$$\hat{H}^{\text{MF}} = \sum_j \left[\hat{H}_j^{\text{JC}} - z\kappa \Psi \left(\hat{a}_j^\dagger + \hat{a}_j \right) + z\kappa |\Psi|^2 - \mu \hat{n}_j \right]. \quad (3.29)$$

Podemos incorporar alguns termos, definindo

$$\begin{aligned}\hat{H}^{\text{MF}} &= \sum_j \left[(\omega - \mu) \hat{n}_j + \Delta \hat{\sigma}_j^+ \hat{\sigma}_j^- + g(\hat{\sigma}_j^+ \hat{a}_j + \hat{\sigma}_j^- \hat{a}_j^\dagger) + z\kappa |\Psi|^2 - z\kappa \Psi (\hat{a}_j^\dagger + \hat{a}_j) \right] \\ &= \sum_j \left[\hat{H}_j^{(0)} + \hat{V}_j \right]\end{aligned}\quad (3.30)$$

onde o termo quadrático em Ψ entrou como um deslocamento na energia do Hamiltoniano não perturbado e a parte perturbativa é apenas $\hat{V}_j = -\kappa z \Psi (\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger)$. No estudo de transições de fases, a teoria de perturbação é aplicada para encontrar as correções nos autovalores de energia, visto que estamos aqui considerando que Ψ é pequeno. Com o uso destes resultados, o fenômeno de transição de fases pode ser estudado via teoria de Ginzburg-Landau [73]. Para calcular a transição de fases entre isolante de Mott e superfluidez, é necessário calcular as correções de energia até a quarta ordem. Podemos observar também que, devido à simetria $U(1)$ deste Hamiltoniano, todas as perturbações ímpares são nulas. Deste modo, é feita a expansão de Landau

$$E_{-,n}(\Psi) = A_0 + A_2 \Psi^2 + A_4 \Psi^4 + \dots \quad (3.31)$$

Só precisamos minimizar a função acima e obter o diagrama de transição de fases. Não vamos nos a este problema explicitamente neste trabalho, pois o nosso interesse principal não é o estudo do fenômeno de transição de fases. Note ainda que mencionei calcular as correções para o estado fundamental. Por isso são ignorados os estados de polárítons pares.

3.3.2 Subespaço de uma excitação

Vamos agora estudar o Hamiltoniano no subespaço de uma excitação, isto é, há apenas um átomo excitado ou um fóton passeando na cadeia. Neste subespaço, o sistema é obviamente descrito pelo Hamiltoniano $\hat{H}^{(1)}$ – veja o esquema na figura 3.2. O Hamiltoniano é gerado pelos kets $|1_x\rangle \equiv \hat{a}_x^\dagger |\text{vac}\rangle$ e $|e_x\rangle \equiv \hat{\sigma}_x^+ |\text{vac}\rangle$, onde o estado de vácuo no sistema de cavidades é $|\text{vac}\rangle = |g, 0\rangle_1 |g, 0\rangle_2 \cdots |g, 0\rangle_N$ e x denota a posição da cavidade. Assim, a dimensão do espaço de Hilbert é duas vezes o número de cavidades. Mesmo no subespaço de uma excitação o sistema possui uma dinâmica bastante rica e vamos estudar em detalhes.

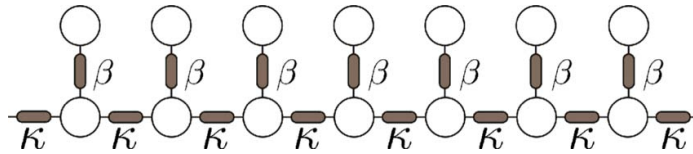


Figura 3.2: Representação esquemática do modelo de Jaynes-Cummings-Hubbard no subespaço de uma excitação. Retirado e adaptado de [66].

No início da subseção anterior foram mostrados os dois regimes de interação do sistema. Note que negligenciando g ou κ nós perdemos muita informação do sistema de interesse e temos apenas uma compreensão básica do sistema observando o que ocorre quando estas interações estão ausentes. Porém, no subespaço de uma excitação temos um pouco mais de liberdade para estudar analiticamente tais regimes de interação. De fato, representando o sistema em diferentes bases podemos observar, através da representação de interação, quais

termos sobrevivem na aproximação de onda girante. Por simplicidade, não vou carregar $\hbar$ nos cálculos seguintes, isto é, $\hbar = 1$ sem perda de generalidade.

Modos normais e regime de forte tunelamento

Como as energias atômicas $\hbar\omega_0$ e a energia de acoplamento entre cada átomo com o campo, $\hbar g$, foram considerados uniformes em toda a rede, nós podemos escrever o Hamiltoniano como uma soma de N interações do tipo Jaynes-Cummings desacopladas $\hat{H}^{\text{JCH}} = \sum_k \hat{H}_k$, com

$$\hat{H}_k = \omega_k \hat{\alpha}_k^\dagger \hat{\alpha}_k + \omega_0 \hat{\beta}_k^\dagger \hat{\beta}_k + g \left(\hat{\alpha}_k^\dagger \hat{\beta}_k + \hat{\beta}_k^\dagger \hat{\alpha}_k \right), \quad (3.32)$$

onde $\hat{\alpha}_k = |\text{vac}\rangle\langle\alpha_k|$ e $\hat{\beta}_k = |\text{vac}\rangle\langle\beta_k|$ são os operadores de modo normal do campo e do átomo, respectivamente. Temos então que, no caso do campo livre, $\{|\alpha_k\rangle\}$ é o conjunto de N autoestados do Hamiltoniano de *hopping*, cujos autovalores são $\{\alpha_k\}$. Desse modo, cada estado é da forma $|\alpha_k\rangle = \sum_x v_{k,x} |1_x\rangle$. Por outro lado, os estados do átomo são análogos aos do campo e possuem a mesma distribuição espacial, isto é, as mesmas amplitudes $|\beta_k\rangle = \sum_x v_{k,x} |e_x\rangle$. Porém, todos os estados $|\beta_k\rangle$ possuem o mesmo autovalor associado ω_0 .

O Hamiltoniano total é representado por uma matriz diagonal em blocos 2×2 , seus autoestados são calculados como simplesmente

$$|\psi_k^\pm\rangle = A_k^\pm |\alpha_k\rangle + B_k^\pm |\beta_k\rangle, \quad (3.33)$$

onde temos que

$$A_k^\pm = \frac{2g}{\sqrt{(\Delta_k \pm \Omega_k)^2 + 4g^2}}, \quad (3.34a)$$

$$B_k^\pm = \frac{\Delta_k \pm \Omega_k}{\sqrt{(\Delta_k \pm \Omega_k)^2 + 4g^2}}, \quad (3.34b)$$

$\Delta_k = \omega_0 - \omega_k$ é a dessintonia entre as frequências de modo normal do átomo e do campo e $\Omega_k = \sqrt{\Delta_k^2 + 4g^2}$ é a frequência de Rabi correspondente. Além disso, os níveis de energia locais são dados por

$$\epsilon_k^{(\pm)} = \frac{1}{2} (\omega_0 + \omega_k \pm \Omega_k). \quad (3.35)$$

Para alcançarmos o regime de forte tunelamento, nós precisamos ir para a representação de interação,

$$\hat{H}_I(t) = g \left(\sum_k \hat{\alpha}_k^\dagger \hat{\beta}_k + \text{h.c.} \right). \quad (3.36)$$

Observe que, se colocarmos ω_0 em ressonância com um dado modo k' , teremos um único termo independente do tempo ($\Delta_{k'} = 0$). Se considerarmos que $g \ll \{\Delta_{k \neq k'}\}$, todos os termos restantes são de rápida rotação e podem ser ignorados. Desse modo, quando voltamos para a representação de Schrödinger, obtemos o Hamiltoniano efetivo,

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H}_{k'} + \sum_{k \neq k'} \left(\omega_k \hat{\alpha}_k^\dagger \hat{\alpha}_k + \omega_0 \hat{\beta}_k^\dagger \hat{\beta}_k \right). \quad (3.37)$$

Esta equação descreve uma única interação do tipo Jaynes-Cummings existindo em um modo k' , gerando um par de estados vestidos $|\psi_{k'}^\pm\rangle$ enquanto que todos os outros modos estão desacoplados. Neste regime, isto é, no regime de forte *hopping*, se prepararmos um átomo excitado em uma dada posição x_0 , digamos $|\psi(0)\rangle = |e_{x_0}\rangle$, a excitação pode ficar presa dependendo da natureza do espectro do campo livre e das condições de ressonância. No caso fora da ressonância, $\omega_k \neq \omega_0$ para todo k , temos que $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle = e^{-i\omega_0 t} |e_{x_0}\rangle$. De fato, neste caso a excitação atômica congela na cavidade inicial x_0 . Por outro lado, se ω_0 é colocado em ressonância com um dado modo não-degenerado k' , de modo a criar uma interação do tipo JC entre estes modos, os coeficientes atômicos evoluídos no tempo podem ser escritos como

$$c_{a,x}(t) = e^{-i\omega_0 t} \left[\sum_{k \neq k'} v_{k,x} v_{k,x_0}^* + \cos(gt) v_{k',x} v_{k',x_0}^* \right], \quad (3.38)$$

e como $\sum_k v_{k,x} v_{k,x_0}^* = 1$ ($= 0$) para $x = x_0$ ($x \neq x_0$) devido à ortonormalidade, a probabilidade de retorno será

$$p_{a,x_0}(t) \equiv |c_{a,x_0}(t)|^2 = [1 + |v_{k',x_0}|^2 (\cos gt - 1)]^2. \quad (3.39)$$

Em outras palavras, o tanto de informação liberada pela excitação inicial depende totalmente da sobreposição (ou *overlap*) entre $|\beta_{k'}\rangle$ e $|e_{x_0}\rangle$. Como estamos tratando de uma rede uniforme, o espectro do campo livre consiste de ondas planas da forma $v_{k,x} \propto \sin(kx)$, com $k = \pi m/(N+1)$ e $m = 1, \dots, N$. Então, o *overlap* deve ser suficientemente pequeno para reter a maior parte da amplitude. Desse modo, para um N finito, parte da probabilidade atômica flui periodicamente do estado inicial alcançando os outros estados atômicos em fase como

$$p_{a,x}(t) = |v_{k',x} v_{k',x_0}^*|^2 (\cos gt - 1)^2 \quad (3.40)$$

para $x \neq x_0$.

Ao escrever o Hamiltoniano total como soma de interações do tipo JC e utilizar esta representação conveniente, nós podemos alcançar analiticamente um dos regimes de interação, onde $g \ll \kappa$. Podemos, neste regime, escolher um modo fotônico em particular e colocá-lo em ressonância com ω_0 para acionar um par de estados tipo JC vestidos $|\psi_{k'}^\pm\rangle$.

Base polaritônica e regime de fraco tunelamento

Esta base de estados foi apresentada no capítulo anterior e, como já vimos, são os autoestados do Hamiltoniano de Jaynes-Cummings, isto é, de cada cavidade. Desse modo, podemos reescrever o Hamiltoniano de Jaynes-Cummings-Hubbard em termos dos operadores polaritônicos locais $\hat{P}_{\alpha,n,x} \equiv |\text{vac}\rangle_x \langle \alpha, n|$. Aqui, obviamente, não vamos considerar os termos com mais de uma excitação. Assim,

$$\begin{aligned} H = & \sum_{x=1}^N \left(g^+ \hat{P}_{+,x}^\dagger \hat{P}_{+,x} + g^- \hat{P}_{-,x}^\dagger \hat{P}_{-,x} \right) + \sum_{x=1}^N \frac{\Delta}{2} \left(\hat{P}_{+,x}^\dagger \hat{P}_{-,x} + \hat{P}_{-,x}^\dagger \hat{P}_{+,x} \right) \\ & - \frac{\kappa}{2} \sum_{x=1}^{N-1} \left(\hat{P}_{+,x}^\dagger \hat{P}_{+,x+1} + \hat{P}_{-,x}^\dagger \hat{P}_{-,x+1} + \hat{P}_{+,x}^\dagger \hat{P}_{-,x+1} + \hat{P}_{-,x}^\dagger \hat{P}_{+,x+1} + \text{h.c.} \right), \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde abreviamos $\hat{P}_{\alpha,x} \equiv \hat{P}_{\alpha,1,x}$ e $g^\pm = (\omega + \omega_0)/2 \pm g$. O Hamiltoniano acima é equivalente a uma dupla rede do tipo *tight-binding* totalmente conectada através dos termos de troca que conectam todos os poláritons pares $|+\rangle_x$ e ímpares $|-\rangle_x$. Tal sistema pode ser simplificado quando $g \gg \kappa, \Delta$, pois ambas as redes se tornam efetivamente desacopladas, isto é, os termos que conectam os poláritons pares aos ímpares são ignorados por serem de rápida rotação. Além disso, podemos observar que quando $\Delta = 0$ os kets $|\pm\rangle_x$ são os estados que diagonalizam cada célula JC (cada cavidade), acabando com suas conexões. Neste regime de interação o sistema se comporta efetivamente como uma cadeia de spin XY onde spin *up* (*down*) corresponde a presença (ausência) de poláritons. Isso ocorre porque os operadores polaritônicos obedecem a mesma álgebra que os operadores de escada de spin-1/2 ($\hat{\sigma}^\pm$). A dinâmica de excitação atômica se assemelha com a propagação de uma única partícula se propagando através de duas cadeias efetivamente desacopladas, se espalhando balisticamente, com uma constante de *hopping* $\kappa/2$. A principal diferença aqui é que as excitações atômicas são continuamente convertidas para fotônicas e reconvertidas para atômicas a uma taxa g . A excitação fotônica é a responsável pela propagação da excitação atômica através da rede. Os coeficientes atômicos podem ser escritos neste caso como

$$c_{a,x}(t) = \cos(gt) \sum_k e^{-i\omega_k t/2} v_{k,x} v_{k,x_0}^*. \quad (3.42)$$

Se o sistema for inicializado em um estado polariton par (ímpar), a contraparte ímpar (par) não participará da dinâmica.

Emaranhamento quântico

Emaranhamento quântico é uma das propriedades mais intrigantes da natureza sem análogo clássico [50]. É uma manifestação chave na física de muitos corpos, pois desempenha um papel significativo nas transições de fase quânticas [4, 93, 74]. Além disso, emaranhamento é um recurso fundamental em problemas de processamento de informação quântica, como teleporte quântico [9], criptografia quântica [32, 38] e codificação quântica densa [11]. Assim, a fim de projetar tal classe de protocolos, precisamos ser capazes de transmitir propriamente os estados quânticos e estabelecer emaranhamento sobre qubits arbitrários distantes [29, 24]. Obter o claro entendimento dos canais de informação quântica é, portanto, um passo fundamental para a construção de redes quânticas em grande escala [56, 84]. As técnicas experimentais para a manipulação de emaranhamento átomo-campo em cavidades são apresentadas em detalhes por Raimond *et al.* em seu artigo de revisão [78]. Nesse capítulo, estaremos interessados em definir quantificadores de emaranhamento, recurso chave para estudar e classificar redes quânticas.

4.1 Emaranhamento de estados puros

Um sistema que é completamente definido por um único estado é um estado puro. Por exemplo, um qubit $|\psi\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ é um estado puro. O seguinte estado bipartido também é outro exemplo,

$$|\psi\rangle = \frac{|00\rangle + |01\rangle}{\sqrt{2}} = |0\rangle_A \otimes \frac{|0\rangle_B + |1\rangle_B}{\sqrt{2}}. \quad (4.1)$$

Os estados mencionados acima são separáveis, isto significa que podemos decompor o estado em termos de estados de seus subsistemas, como pode ser visto na última igualdade da equação acima. Quando é impossível separar dessa forma, o estado é chamado de emaranhado. Então,

1. $|\psi\rangle = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$ é um estado separável;
2. Se $|\psi\rangle \neq |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$ o estado é emaranhado.

Apesar da definição parecer meramente matemática, existem profundas implicações relacionadas principalmente à medições. O exemplo abaixo ilustra uma das implicações físicas do emaranhamento.

Alice observa a partícula A e Bob observa a partícula B . O estado

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B) \quad (4.2)$$

é emaranhado. Antes que Alice meça σ_A^z , Bob pode obter os resultados $\sigma_B^z = \pm 1$ mas, após ela fazer a medição, o estado em B colapsa e Bob só pode obter um resultado.

Os estados puros possuem a vantagem de terem a separabilidade facilmente testada. É útil conhecer o teorema da decomposição de Schmidt para vermos isto com clareza. Qualquer estado puro $|\psi\rangle \in H_A \otimes H_B$ pode ser decomposto através do teorema da decomposição de Schmidt como [31],

$$|\psi\rangle = \sum_i \lambda_i |i_A\rangle |i_B\rangle, \quad (4.3)$$

onde os estados são ortonormais, $\lambda_i > 0$, e $\sum_i \lambda_i^2 = 1$. Os λ_i^2 são os autovalores da matriz densidade reduzida. Se existe apenas um λ_i diferente de zero, o estado é separável. Caso contrário, o estado é emaranhado. Se todos os λ_i são iguais, o estado é maximamente emaranhado. Note que a definição vale apenas para sistemas bipartidos. Existem definições para sistemas multipartidos, mas não vamos nos ater neste trabalho.

4.2 Medidas de emaranhamento

Desejamos encontrar quantificadores que nos digam quanto emaranhamento está contido em um dado estado quântico. Podemos dizer que podemos definir infinitos quantificadores de emaranhamento, pois o objetivo é definir se o estado pode ou não ser decomposto. Formalmente, um quantificador de emaranhamento é qualquer função não-negativa, real, que não cresce sobre operações locais e comunicação clássica. Dentre os vários quantificadores de emaranhamento, vamos tratar aqui da pureza, a entropia de von Neumann e concorrência. Veremos como estas medidas estão intimamente relacionadas e, no capítulo seguinte, as duas últimas serão utilizadas para quantificar o emaranhamento em nosso sistema de interesse. Estas medidas dependem do operador densidade e de seu traço parcial. Vamos então calcular o operador densidade do sistema e escrever a matriz densidade reduzida do subsistema que compreende os graus de liberdade atômicos.

O subespaço de uma excitação é gerado pela base $\{|1_i\rangle, |e_i\rangle\}$, de modo que o estado geral nessa base é escrito

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N (c_{f,i} |1_i\rangle + c_{a,i} |e_i\rangle), \quad (4.4)$$

onde $c_{f,i}$ e $c_{a,i}$ são os coeficientes de campo e atômicos, respectivamente. No formalismo de operador densidade,

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (c_{f,i} c_{f,j}^* |1_i\rangle\langle 1_j| + c_{f,i} c_{a,j}^* |1_i\rangle\langle e_j| + c_{a,i} c_{f,j}^* |e_i\rangle\langle 1_j| + c_{a,i} c_{a,j}^* |e_i\rangle\langle e_j|). \quad (4.5)$$

As medidas de emaranhamento mencionadas seguem tomando o traço parcial dos modos da cavidade para obter $\rho_a = \text{Tr}_f[\rho]$,

$$\rho_a = \sum_{i=1}^N |c_{f,i}|^2 |\Downarrow\rangle\langle\Downarrow| + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{a,i} c_{a,j}^* \sigma_i^+ |\Downarrow\rangle\langle\Downarrow| \sigma_j^-, \quad (4.6)$$

onde $|\Downarrow\rangle \equiv |g\rangle_1 \cdots |g\rangle_N$. Em geral, ρ_a é um estado misto e então a componente atômica como um todo é dita que está emaranhada com o sistema fotônico. A forma diagonal de ρ_a possui apenas duas entradas $\Pi_f \equiv \sum_i |c_{f,i}|^2$ e $\Pi_a \equiv \sum_i |c_{a,i}|^2$, ou seja, as probabilidades fotônicas e atômicas.

4.2.1 Pureza

O operador densidade que descreve um sistema puro é, simplesmente, o operador projeção $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Desse modo $\text{Tr}(\rho^2) = \text{Tr}(\rho) = 1$. A pureza, para qualquer estado descrito por uma matriz densidade ρ , é dada por

$$\gamma = \text{Tr}(\rho^2). \quad (4.7)$$

O limite superior de γ é igual a um, pois $\text{Tr}(\rho^2) \leq \text{Tr}(\rho)$. O limite inferior é obtido quando um estado é completamente misto, isto é, $\rho = \mathbb{1}_d/d$. Desse modo,

$$\frac{1}{d} \leq \gamma \leq 1, \quad (4.8)$$

onde d é a dimensão do espaço de Hilbert onde o estado está definido. A relação desta quantidade com o emaranhamento quântico se torna clara: o traço parcial de um sistema puro gera, geralmente, um operador densidade misto. O operador densidade reduzido é puro somente quando o sistema é separável. Para um sistema bipartido, é sempre possível escrever o estado através da decomposição de Schmidt 4.3. Escrevendo o operador densidade a partir deste estado, podemos observar que ambos os traços parciais geram os mesmos autovalores λ_j^2 . Portanto, a pureza pode ser calculada através de qualquer um dos operadores densidade reduzidos

$$\gamma = \sum_j \lambda_j^2 \leq 1. \quad (4.9)$$

4.2.2 Entropia de von Neumann

A entropia de von Neumann pode ser definida para um sistema quântico descrito por uma matriz densidade ρ ,

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log \rho). \quad (4.10)$$

Esta medida é uma extensão quântica da conhecida entropia de Gibbs. Podemos decompor a matriz densidade $\rho = \sum_j p_j |j\rangle\langle j|$ e reescrever S ,

$$S(\rho) = -\sum_j p_j \log p_j. \quad (4.11)$$

Note agora a clara relação entre a entropia de von Neumann e a entropia de Shannon em teoria da informação.

Observando que $S = 0$ para um estado puro, entendemos que a entropia nos dá informação sobre o afastamento do sistema de um estado puro. Se ρ_{AB} é o operador densidade do estado puro de um sistema composto, o traço parcial nos levará a um estado misto se as partes A e B estão emaranhadas. Desse modo, a entropia $S(\rho_A)$, onde $\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB})$, nos dá informação sobre quão emaranhada a parte A está com a parte B . Se $S = 1$, o estado é maximamente emaranhado e, se $S = 0$, o estado é separável.

A entropia de von Neumann possui várias propriedades interessantes e úteis. Vamos enunciar algumas,

- $S(\rho) = 0$, se ρ é puro;

Se ρ é puro, sua matriz correspondente é idempotente ($\rho^2 = \rho$) cujos autovalores são 0 ou 1. Isto corresponde à entropia zero.

- $S(U\rho U^\dagger)$, onde U é um operador unitário arbitrário;

U é unitário ($U^\dagger = U^{-1}$), a transformação $\rho \rightarrow U\rho U^\dagger$ é uma transformação de similaridade. Esta transformação preserva o espectro de autovalores, então a entropia não muda.

- $S(\rho_A) = S(\rho_B)$, onde $\rho_{A,B}$ é a matriz densidade reduzida;

Um estado puro bipartido $|\psi\rangle$ pode ser decomposto através do teorema da decomposição de Schmidt decomposition como $|\psi\rangle = \sum_i \lambda_i |i_A\rangle |i_B\rangle$, então $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Tomando o traço parcial do sistema A ou B dará o mesmo autovalor. Então a entropia é igual.

- Operadores unitários locais não podem gerar emaranhamento.

Vamos mostrar tomando um estado bipartido. Podemos definir unitariedades locais como $U = U_A \otimes U_B$. Escrevendo $|\psi\rangle = \sum_{j,k} a_{j,k} |j_A\rangle |k_B\rangle$. A aplicação de U neste estado é $U|\psi\rangle = \sum_{j,k} a_{j,k} U_A |j\rangle U_B |k\rangle = \sum_{j,k} a_{j,k} |j'\rangle |k'\rangle = |\psi'\rangle$. Como $U_{A,B}$ são transformações unitárias, os kets ainda formam uma base ortonormal independente. A decomposição de ambos os kets $|\psi\rangle$ and $|\psi'\rangle$ dará o mesmo λ_i . Então, unitariedades locais não podem gerar emaranhamento.

Finalmente, vamos calcular a forma da entropia para o nosso sistema. Através da entropia de von Neumann, estaremos interessados em calcular o emaranhamento entre os graus de liberdade atômicos e do campo. Temos que

$$S(\rho_a) = -\text{Tr} \rho_a \log_2 \rho_a = -\Pi_a \log_2 \Pi_a - (1 - \Pi_a) \log_2 (1 - \Pi_a), \quad (4.12)$$

o que nos dá 0 (1) para um estado totalmente separável (emaranhado). Vamos usar aqui a convenção de que o logaritmo é na base 2. Note que a entropia alcança o valor máximo para $\Pi_f = \Pi_a = 1/2$, isto é, $S_{\text{max}} = -\log_2 (1/2) = 1$.

4.2.3 Concorrência

O cálculo do emaranhamento através da entropia de von Neumann se dá através do traço parcial de um ρ puro, onde $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Por outro lado, é possível generalizar esta medida para ρ misto. De acordo com o famoso artigo de Bennett *et al.* [10], o emaranhamento de formação $E(M)$, onde $E(\psi) = S(\rho_A) = S(\rho_B)$, de um estado bipartido misto M é definido como o emaranhado menos esperado de qualquer ensemble de estados puros gerando M . É dado o nome de “emaranhamento de formação” pois, para Alice e Bob gerarem o estado M sem transferirem estados quânticos entre eles, eles devem compartilhar o mesmo $E(M)$. Neste trabalho, chamamos apenas de “emaranhamento”. O fato é, se ambos possuem este mesmo montante de emaranhamento, será possível gerar M . Através dos mesmos argumentos usados para S , obtemos que $E(M)$ não pode crescer através de operações locais e comunicação clássica. Podemos construir este entendimento através das seguintes definições,

- O emaranhamento de um estado puro bipartido ψ é a entropia de von Neumann $E(\psi) = S(\rho_A)$;
- O emaranhamento $E(\mathcal{E})$ de um ensemble de estados puros $\mathcal{E} = \{p_i, \psi_i\}$ é a média de ensemble $\sum_i p_i E(\psi_i)$ das entropias de formação de estados puros;
- O emaranhamento $E(M)$ de um estado misto $M = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ é o mínimo $E(\mathcal{E})$ sobre todos os ensembles $\mathcal{E} = \{p_i, \psi_i\}$.

Um caminho interessante seria estudar o emaranhamento de misturas de estados de Bell de duas partículas. Os estados de Bell são,

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle), \quad (4.13a)$$

$$|e_2\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle), \quad (4.13b)$$

$$|e_3\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), \quad (4.13c)$$

$$|e_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle). \quad (4.13d)$$

Desse modo, podemos escrever um estado puro nesta base

$$|\phi\rangle = \sum_{j=1}^4 \alpha_j |e_j\rangle, \quad (4.14)$$

e o emaranhamento pode ser calculado através da entropia de von Neumann da matriz densidade reduzida. Após fazer este cálculo, podemos obter a seguinte fórmula [10],

$$E = H \left[\frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - C^2}) \right], \quad (4.15)$$

onde $H(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2 (1 - x)$ e a quantidade C é escrita como a sobreposição,

$$C = \left| \sum_i \alpha_i^2 \right|. \quad (4.16)$$

Esta quantidade varia de zero a um, assim como E , e está monotonicamente relacionada com E . Desse modo, C é uma medida própria de emaranhamento. Hill e Wootters a nomearam de concorrência [48].

Estamos interessados no emaranhamento para um estado arbitrário de dois qubits. A generalização pode ser feita por meio da transformação “*spin flip*”¹. A operação spin invertido para um estado puro pode ser escrita

$$|\tilde{\psi}\rangle = \sigma_y |\psi^*\rangle, \quad (4.17)$$

onde $|\psi^*\rangle$ é o complexo conjugado de $|\psi\rangle$ quando escrito na base fixa $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ e σ_y é escrito na mesma base. Para um estado geral ρ de dois qubits temos que a transformação é da forma

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y), \quad (4.18)$$

onde a conjugação complexa é tomada na base $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$.

Em particular, podemos observar que a concorrência para estados puros de dois qubits pode ser escrita simplesmente como

$$C(\psi) = \left| \langle \tilde{\psi} | \psi \rangle \right|. \quad (4.19)$$

Vemos que o estado de Bell $|e_4\rangle$ não muda sob transformação *spin flip*, a concorrência é máxima $C = 1$. Por outro lado, o estado separável (não emaranhado) $|\uparrow\downarrow\rangle$ produz concorrência nula. A generalização da concorrência é simples,

$$C(\rho) = \min_{\{p_i, \psi_i\}} \sum_i p_i C(\psi_i), \quad (4.20)$$

onde ρ descreve um estado misto arbitrário de dois qubits. O problema de minimização acima foi resolvido por Wootters [103] por meio das transformações *spin flip*. Foi observado que $E(C)$ pode ser expresso em termos do operador Hermitiano $R = \sqrt{\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}}$ e a concorrência é escrita em termos dos autovalores de R . De modo alternativo, a concorrência pode ser escrita em termos das raízes dos autovalores do operador não-Hermitiano $\rho\tilde{\rho}$. Ambas as representações são equivalentes. Em nosso trabalho, decidimos usar a segunda representação. Desse modo, a concorrência é reescrita como

$$C(\rho) = \max\{0, \sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2} - \sqrt{\epsilon_3} - \sqrt{\epsilon_4}\}, \quad (4.21)$$

onde $\{\epsilon_i\}$ são os autovalores, em ordem decrescente, da matriz $\rho\tilde{\rho}$.

No nosso trabalho, a concorrência é usada para calcular o emaranhamento entre um par de sítios, i e j . Tomamos o traço parcial de ρ_a sobre o resto dos sítios para obter a matriz reduzida gerada pela base $\{|g_i g_j\rangle, |e_i g_j\rangle, |g_i e_j\rangle, |e_i e_j\rangle\}$,

$$\rho_{i,j}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 - |c_{a,i}|^2 - |c_{a,j}|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |c_{a,i}|^2 & c_{a,i}c_{a,j}^* & 0 \\ 0 & c_{a,j}c_{a,i}^* & |c_{a,j}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Podemos finalmente calcular a concorrência,

$$C[\rho_{i,j}^{(2)}] = 2|c_{a,i}c_{a,j}^*| = 2|\langle e_i | \psi \rangle \langle \psi | e_j \rangle|. \quad (4.23)$$

¹ *spin flip* pode ser traduzido como inversão de spin.

Geração e distribuição de emaranhamento

Nos capítulos anteriores, fizemos uma análise completa do modelo de Jaynes-Cummings-Hubbard e seus regimes limite. Agora nós temos a capacidade de acompanhar temporalmente o emaranhamento entre os graus de liberdade atômicos e fotônicos através da entropia de von Neumann, assim como o emaranhamento entre pares de átomos através da concorrência. Este capítulo baseia-se em nosso artigo intitulado “*Generation and distribution of atomic entanglement in coupled-cavity arrays*” publicado na revista *Physical Review A* [68].

5.1 Evolução temporal e emaranhamento

O protocolo consiste em, inicialmente, preparar uma única excitação no centro da cadeia de cavidades acopladas. Então, nós deixamos o sistema evoluir naturalmente via $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |e_{x_0}\rangle$, com $x_0 = \frac{N+1}{2}$ e N sendo um número ímpar para que exista apenas um modo no centro da banda. Nós mantemos as frequências em ressonância, isto é, $\Delta = 0$. Como já discutido, isto aciona uma interação do tipo Jaynes-Cummings entre os modos de campo e atômico quando estamos no regime de forte tunelamento. Também note que $v_{k, \frac{N+1}{2}} \propto \sin(\pi m/2) = 0$ para m par. Como a ressonância é posta no centro da banda, temos que $m = (N + 1)/2$ deve ser um número ímpar. Por outro lado, não há propagação quando $g \ll \kappa$. Ocorre o congelamento atômico.

Dado o fato de que a função de onda atômica só pode se espalhar na cadeia mediada pelo campo, a geração de emaranhamento entre pares de átomos deve ser precedida pelo desenvolvimento de correlações entre átomo e campo. Vamos ver como isto ocorre para ambos os limites de interação. A dinâmica exata da entropia para o regime de forte *hopping* $g \ll \kappa$ é mostrada na figura 5.1 em conjunto com a concorrência entre pares de átomos. A probabilidade atômica total $\Pi_a(t) = 1 - |v_{k', x_0}|^2 \sin^2(gt)$, assim como a entropia, evolui com período $T = \pi/g$. Metade do período da probabilidade de retorno, visto na equação 3.39. Então, dois ciclos de entropia cobrem, desde o início, a liberação de energia de $|e_{x_0}\rangle$ para os graus fotônicos de liberdade, seguido pela excitação dos estados atômicos restantes (veja a equação 3.40) em $t = T$ (quando $S = 0$) terminando com a recuperação total do estado inicial em $t = 2T$ por meio de uma segunda transição através do modo fotônico. Concorrências atômicas são definidas ao longo da mesma escala de tempo, atingindo seu

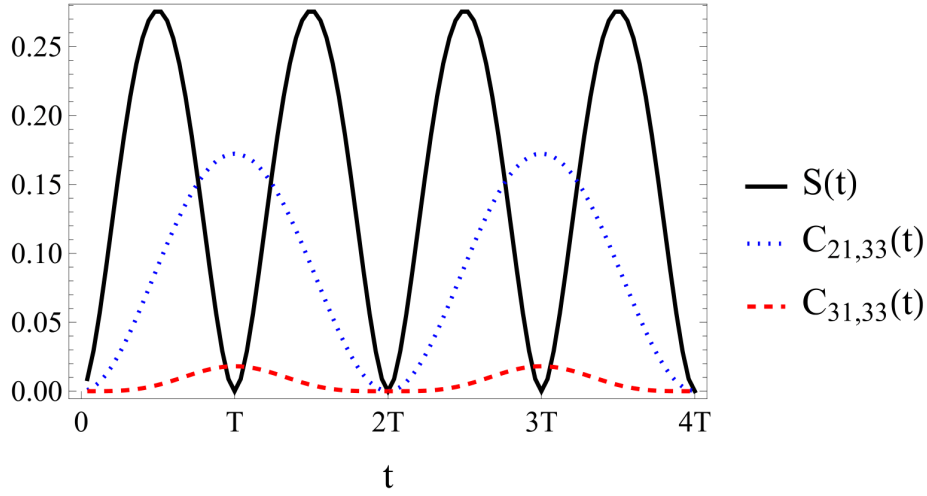


Figura 5.1: Evolução temporal exata da entropia de von Neumann e as concorrências atômicas $C_{x_0,33}$, $C_{31,33}$ para $|\psi(t=0)\rangle = |e_{x_0}\rangle$ com $x_0 = 21$ em uma rede uniforme possuindo $N = 41$ sítios operando no regime de forte tunelamento com $g = 10^{-3}\kappa$ e $\Delta = 0$. A entropia oscila com período $T = \pi/g$.

máximo nos instantes $t = T, 3T, 5T, \dots$ em fase, como já implícito na equação 3.40. De modo geral, é crucial ressaltar que o grau de geração de entropia, assim como o exato tempo da concorrência máxima são governados pelo overlap v_{k',x_0} , já que a comunicação entre os graus de liberdade atômicos e fotônicos no regime de forte tunelamento envolve trocas entre $|\alpha'_k\rangle$ e $|\beta'_k\rangle$ em um único nível k' em vez de todo o espectro. Outra característica para observarmos na figura 5.1 – e também por uma inspeção cuidadosa da equação 3.38 – é que a concorrência envolvendo o átomo localizado no estado inicial x_0 supera o emaranhamento entre qualquer outro par (a figura 5.1 mostra dois pares representativos). Isto é devido ao perfil espectral da rede uniforme de cavidades acopladas, pois restringe o fluxo de $|e_{x_0}\rangle$, deixando assim as cavidades restantes com recursos limitados para estabelecer o emaranhamento atômico, especialmente para N grande.

Indo agora para o limite de fraco tunelamento ($g \gg \kappa$), temos uma imagem totalmente diferente. Não há modo especial desencadeando a dinâmica. Todos os modos estão envolvidos e os graus de liberdade atômicos estão completamente misturados com seus análogos fotônicos. Assistido pelo espalhamento fotônico, a excitação atômica inicial se espalha balisticamente a uma taxa $\kappa/2$. Como $|e_{x_0}\rangle$ é uma superposição de poláritons pares e ímpares, geramos duas cadeias efetivamente desacopladas. Enquanto que se propaga, a função de onda constantemente vai e volta para a sua forma fotônica em uma escala de tempo muito rápida. Neste limite, a entropia é alimentada pela probabilidade atômica total $\Pi_a(t) = \cos^2(gt)$, implicando que $S(t)$ alcança um máximo quando $t = m\pi/(4g)$ para m ímpar (ou seja, quando $\Pi_a(t) = 1/2$). Observe que a propriedade acima é geral, pois vale para qualquer tamanho N e padrão de *hopping*, com a dinâmica atômica resultante sempre obedecendo às propriedades espectrais subjacentes da rede de cavidades acopladas, contanto que g seja maior que a largura de banda do campo livre e Δ . Portanto, dado que a geração de entropia é local, a geração de emaranhamento atômica é totalmente dirigida pela dispersão ondulatória. A figura 5.2 mostra a distribuição de concorrência para alguns valores de tempo quando $\Pi_a(t) = 1$ para

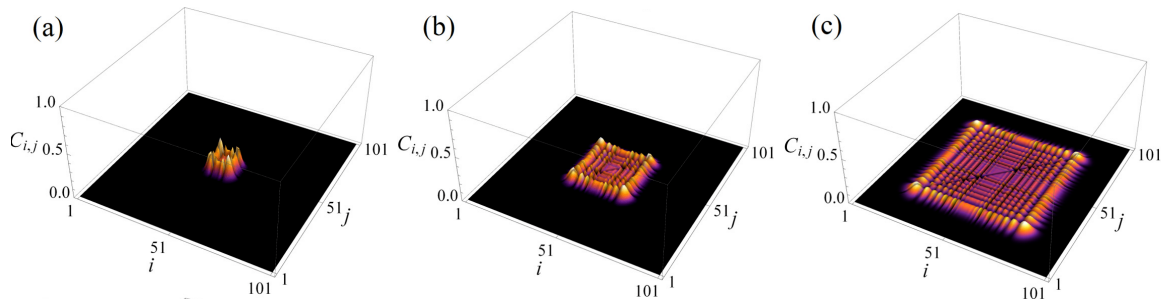


Figura 5.2: Recortes temporais da distribuição de emaranhamento atômico (concorrência) $C_{i,j}$ para (a) $t = 2000\pi/g$, (b) $t = 5000\pi/g$ e (c) $t = 10000\pi/g$, com $g = 10^3\kappa$, tais que $\Pi_a(t) = \cos^2(gt) = 1$ ($S = 0$). O sistema consiste de $N = 101$ cavidades acopladas com o estado inicial $|\psi(t=0)\rangle = |e_{51}\rangle$ e $\omega_0 = \omega$. Os resultados são exatos, obtidos através do Hamiltoniano JCH. Note que a função de onda atômica se propaga a uma taxa $\kappa/2$ e então a frente de onda aproximadamente anda um sítio por um tempo κ^{-1} decorrido.

obtermos o maior $C_{i,j}$. Como esperado, o emaranhamento é bem distribuído ao longo da cadeia enquanto evolui no tempo, com fortes correlações ocorrendo dentro de cada frente de onda, bem como entre eles.

Finalmente, para termos uma melhor visualização sobre a distribuição espacial de emaranhamento atômico, na figura 5.3 nós mostramos a concorrência máxima registrada dentro de um intervalo de tempo fixo para todos $C_{i,j}$ com $i \neq j$ e para todos os regimes de interação. No regime de forte tunelamento, como uma única excitação atômica é preparada na rede uniforme de cavidades, a mesma experimenta um mecanismo de armadilhamento [66, 23, 1], a excitação se emparelha com cada um dos átomos restantes para produzir o padrão de emaranhamento que podemos ver na figura 5.3a. Nesta situação, nós devemos lembrar que o emaranhamento não se espalha do centro da cadeia, como ocorre na figura 5.2. É gerado de uma só vez, pois a dinâmica da entropia envolve uma interação ressonante entre os modos atômicos e fotônicos delocalizados. Nós observamos que tal distribuição espacial é similar ao caso de redes desordenadas reportado por [2], que é muito interessante já que a nossa rede é totalmente uniforme. Isto significa que o mecanismo de armadilhamento atômico pode ser considerado um tipo de localização induzida por interação.

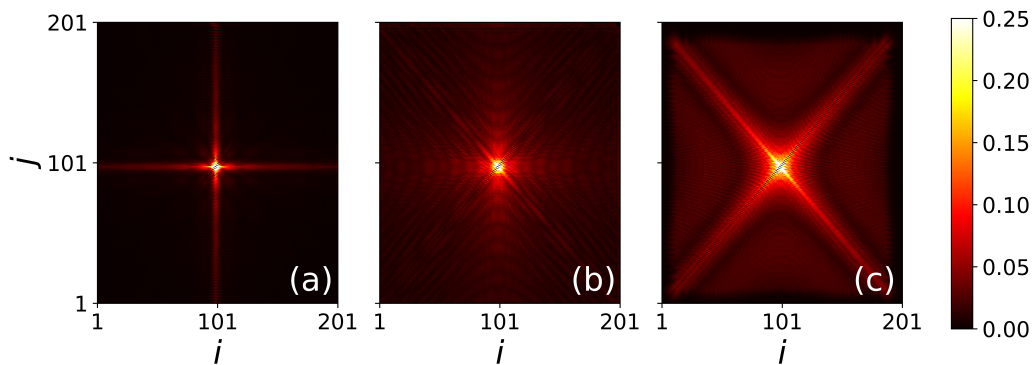


Figura 5.3: Concorrência máxima $C_{i,j}(t)$ entre todos os pares de átomos para uma janela temporal fixa κt

Definindo agora uma interação moderada ($g \approx \kappa$), a distribuição de emaranhamento na figura 5.3b não parece mostrar um padrão bem definido, mas é semelhante a uma mistura do padrão de ambos regimes. O regime de fraco *hopping* é assinalado por fortes correlações entre átomos equidistantes do centro da cadeia, como já sugerido pela figura 5.2. Como neste caso temos estados estendidos por toda a banda tomando o controle da dinâmica com g crescente, a excitação atômica inicial rapidamente se comunica com os graus de liberdade fotônicos localmente e então são espalhados, simulando a dinâmica de um único fóton em uma rede de cavidades livre de átomos com κ trocado por $\kappa/2$ no limite $g \gg \kappa$. Este máximo na figura 5.3c é então registrado quando a frente de onda da função de onda atômica passa [2].

5.2 Armadilhamento atômico *vs* localização de Anderson

Vamos agora estudar o comportamento do emaranhamento na presença de um ruído estático nas frequências de cavidades. Vamos considerar

$$\omega \rightarrow \omega(x) = \omega + \delta_x, \quad (5.1)$$

onde $\delta_x \in [-W, W]$ é um número aleatório para cada posição x e W é o parâmetro de desordem que estaremos interessados. Este tipo de desordem é conhecida por dar origem ao fenômeno conhecido como localização de Anderson [5]. No capítulo 3, nós observamos a localização atômica no regime de forte tunelamento. Estamos interessados em mostrar os efeitos da competição entre localização de Anderson e armadilhamento atômico. Nós veremos que, surpreendentemente, a desordem pode conduzir a energia de interação átomo-campo gerando altos níveis de entropia e concorrência atômica à curta distância, se comparado com o caso ordenado.

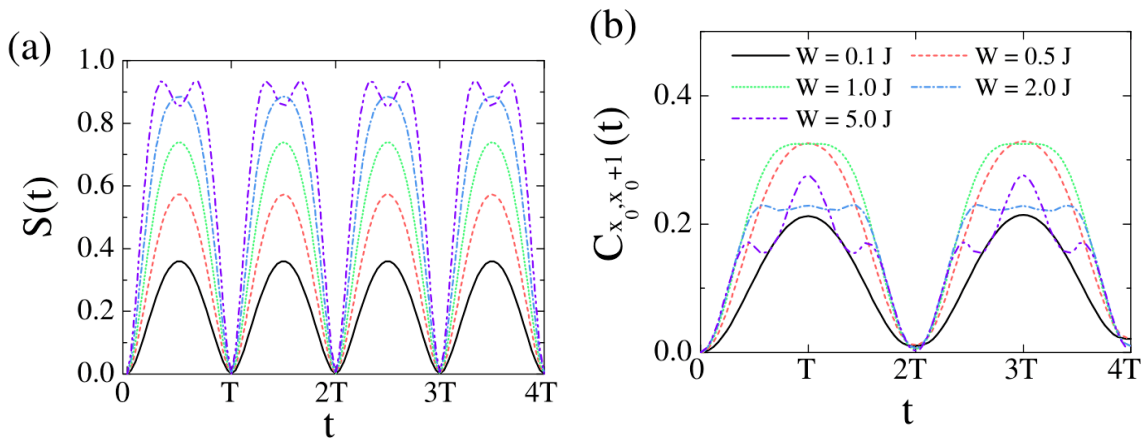


Figura 5.4: Evolução temporal exata da (a) entropia de von Neumann entre átomo e campo e (b) concorrência entre dois átomos em $x_0 = 21$ e $x_0 + 1$. Ambos são uma média de 102 realizações independentes para $N = 41$, $g = 10^{-3}J$, $W/J = 0.1, 0.5, 1, 2, 5$, e ω_a em ressonância com a frequência do campo ω_k gerando a maior sobreposição v_{k', x_0} para cada realização.

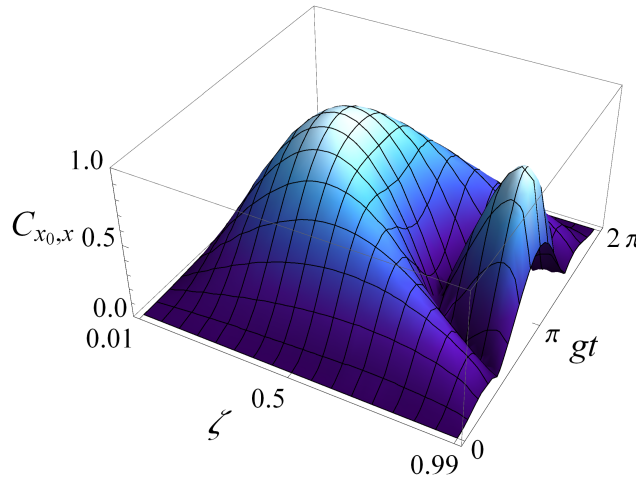


Figura 5.5: Concorrência analítica $C_{x_0,x} = 2|c_{a,x_0}c_{a,x}^*|$ como uma função do tempo gt e do parâmetro de sobreposição ζ . Cálculo obtido a partir das equações do regime de forte tunelamento ($g \ll \kappa$) considerando $|v_{k',x_0}| = \zeta$ e $|v_{k',x}| = \sqrt{1 - \zeta^2}$.

De acordo com a teoria da localização de Anderson, os autoestados de uma partícula em uma rede *tight-binding* unidimensional na presença de uma desordem descorrelacionada local¹ são exponencialmente localizados, independente da intensidade de desordem W [5, 60, 59]. Isto significa diretamente que os modos de campo livre são da forma $v_{k,x} \propto \exp(-|x - x_0|/\lambda_k)$, onde λ_k é o comprimento de localização. Desse modo, o fluxo de saída de probabilidade de x_0 é maximizado e $p_{a,x_0} = 0$ (veja equação 3.39) sempre que $|v_{k',x_0}| \geq 1/\sqrt{2}$ em tempos $gt = \cos^{-1}(|v_{k',x_0}|^2 - 1)/|v_{k',x_0}|^2$ em um período completo $2T$. Além disso, nós também obtemos $\Pi_a(t) = 1/2$ ($S = 1$) em tempos $gt = \sin^{-1}(1/(\sqrt{2}|v_{k',x_0}|))$ gerando dois máximos em um ciclo de emaranhamento com período T quando $|v_{k',x_0}| > 1/\sqrt{2}$. A figura 5.4a mostra a evolução temporal da entropia no regime de forte tunelamento para valores crescentes de W após uma média sobre várias realizações independentes. Para cada caso, ω_a foi sintonizado em ressonância com a frequência $\omega_{k'}$ levando ao maior overlap v_{k',x_0} . Podemos observar que quanto mais intensa a desordem, mais intenso é o emaranhamento átomo-campo. Vemos que de fato existem dois máximos dentro de um período completo $2T$, mostrando que a maioria das realizações geram $|v_{k',x_0}| > 1/\sqrt{2}$. Nós não estamos observando $S_{max} = 1$, como mencionado acima, devido ao procedimento de médias.

Acabamos de mostrar que a localização de Anderson destrói o armadilhamento atômico, permitindo uma liberação completa da excitação atômica em x_0 . Isso nos fornece mais recursos para a geração de emaranhamento átomo-átomo entre primeiros vizinhos devido ao perfil do modo normal envolvido. Como a concorrência é da forma $C_{x,x_0} \propto \exp\{-|x - x_0|/\lambda_{k'}\}$, vamos focar no emaranhamento entre átomos localizados em sítios x_0 e $x_0 + 1$. Os resultados podem ser vistos na figura 5.4b onde, novamente, a desordem atua de forma favorável. Note que a concorrência desenvolve algumas oscilações extras dentro de meio período, resultado esperado devido a relação entre $c_{a,x}$ e c_{a,x_0} e de fato mais amplitude está sendo liberada do átomo em x_0 . Outro fenômeno interessante é o comportamento não-monotônico do pico da concorrência em um ciclo variando W . Para vermos melhor este comportamento, podemos

¹A energias $\hbar\omega$ são locais, isto é, são as energias relacionadas ao sítio e não às respectivas interações.

usar as equações 3.39, 3.40 e 4.23 com $|v_{k',x_0}| = \zeta$ e $|v_{k',x}| = \sqrt{1 - \zeta^2}$ e plotar a seguinte equação,

$$C_{x_0,x}(t) = 2|\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}[1 + \zeta^2(\cos gt - 1)](\cos gt - 1)| \quad (5.2)$$

para valores de ζ em um ciclo completo, como pode ser visto na figura 5.5. Este modelo simplificado mostra que existe uma certa quantidade de sobreposição que leva ao modo k' e x_0 capaz de maximizar a concorrência. Para esta situação em particular onde a quantidade de probabilidade de ocupação disponível a ser compartilhada por ambos os átomos é uma unidade (em geral temos $|v_{k',x_0}| + |v_{k',x}| \neq 1$, a não ser que apenas duas cavidades estão envolvidas), a concorrência máxima é obtida quando, simultaneamente, $|c_{a,x_0}(t)|$ e $|c_{a,x}(t)|$ alcançam $1/\sqrt{2}$. Isto ocorre duas vezes, onde a concorrência é lentamente criada e em seguida decai, com ζ mostrando um renascimento abrupto que pode corresponder ao regime de forte desordem, explicando então o comportamento não-monotônico.

Podemos também observar outra característica interessante no regime de forte tunelamento. O comprimento de localização dos modos de campo livre são mantidos para N crescente, enquanto que, para a rede de cavidades ordenada, o armadilhamento atômico se torna cada vez mais fraco com v_{k',x_0} diminuindo para o espectro gerado por ondas de Bloch. Comportamento análogo foi visto também por Ciccarello [23] usando um padrão escalonado de *hoppings* para induzir um modo localizado discreto no centro da banda.

Neste trabalho, fizemos uma apresentação detalhada do campo conhecido como eletrodinâmica quântica de cavidades. Inicialmente, foi feita uma revisão da literatura contemplando as primeiras impressões acerca do estudo da interação luz-matéria em cavidades. O estudo da intensificação do fenômeno de emissão espontânea no vácuo de uma cavidade óptica, fez com que a atenção crescesse. Com o advento do micromaser em conjunto com átomos Rydberg, tornou-se possível os primeiros estudos experimentais de um único átomo interagindo com um único modo de campo. Desde então, as várias previsões teóricas foram sendo observadas e também foi possível o avanço teórico da área. Além disso, preparando átomos cuja correlação com o campo é extremamente forte, levou ao alcance do regime de forte acoplamento, onde as dissipações são suprimidas pelas outras interações. O modelo de Jaynes-Cummings trata de um átomo de dois níveis interagindo com um campo eletromagnético quântico na aproximação de dipolo elétrico armadilhados em uma cavidade óptica na aproximação de onda girante.

Foi mostrado em detalhes como obter o modelo de Jaynes-Cummings através da quantização do campo eletromagnético livre e da quantização da interação do tipo dipolo elétrico. Ademais, nós mostramos como a aproximação de dipolo elétrico toma lugar em tal sistema físico. Após esta longa e detalhada apresentação da obtenção do modelo, foi possível mostrar analiticamente alguns fenômenos puramente quânticos como oscilações de Rabi no vácuo e o efeito de colapso e renascimento. Também é importante estudar os autoestados do Hamiltoniano JC, conhecidos como poláritons pares e ímpares, para ter um entendimento profundo do sistema de interesse. Por outro lado, como nossa contribuição é estudar o modelo de Jaynes-Cummings-Hubbard, o mapeamento polaritônico se torna algo essencial para entender analiticamente os regimes de interação em tal sistema de cavidades acopladas.

O modelo de Jaynes-Cummings-Hubbard trata de uma rede de cavidades acopladas, onde cada cavidade possui um átomo de dois níveis. Refizemos parcialmente a quantização do campo eletromagnético considerando um meio material periódico formado pela rede de cavidades acopladas. O acoplamento ocorre devido ao tunelamento de fótons através das paredes condutoras de cada cavidade, colocando as cavidades próximas de modo que os fótons escapem diretamente para a cavidade adjacente. Conhecimentos como o teorema de Bloch e o modelo *tight-binding* são necessários para que se faça a correta associação e calcularmos a correção ao modelo JC devido ao tunelamento entre cavidades adjacentes.

Finalmente, em um trabalho publicado na revista *Physical Review A*, nós estudamos a geração de emaranhamento e o controle de sua distribuição espacial sobre uma rede de cavidades acopladas uniforme e unidimensional descrita pelo Hamiltoniano de Jaynes-Cummings-Hubbard no subespaço de uma excitação. Nós realizamos cálculos analíticos detalhados para os dois casos limite, isto é, os regimes de forte e fraco tunelamento fotônico. Estudamos a geração de emaranhamento através da evolução temporal de uma única excitação atômica preparada no centro da cadeia. Focamos na entropia de von Neumann entre os estados atômicos e fotônicos e na concorrência entre pares de átomos. Nós descobrimos que no regime de forte *hopping* $g \ll \kappa$, a geração de entropia segue a mesma escala temporal que a concorrência e depende diretamente da chance de liberação de energia do emissor localizado na cavidade inicial – o qual, por sua vez, depende do modo de campo ressonante – sendo então crucial para criar correlações. Devido ao perfil espacial tipo-Bloch dos modos envolvidos na dinâmica, um armadilhamento atômico se estabelece, prevenindo que o átomo inicialmente excitado libere sua amplitude, de modo a comprometer a geração de emaranhamento. Tal tipo de localização induzida por interação ocorrendo no regime de forte tunelamento certamente merece investigação futura em outros cenários, como além do subespaço de uma excitação onde o bloqueio de fótons ocorre [6]. Nós mostramos, através de uma desordem estática nas frequências da cavidade, que a localização de Anderson curiosamente pode prevenir o armadilhamento atômico, permitindo entropia máxima entre átomo-campo e altos níveis de concorrência entre o átomo central e seus vizinhos.

No regime de fraco tunelamento $g \gg \kappa$, a dinâmica da entropia é mais simples. A entropia oscila entre um máximo e um mínimo muito mais rápido do que a propagação da função de onda atômica, significando que a geração de entropia ocorre estritamente devido às interações locais, diferentemente do limite de forte tunelamento. A concorrência atômica é então gerada dependente do perfil de dispersão da rede em uma taxa $\kappa/2$. A rede uniforme gera uma dispersão balística e então as amplitudes estão concentradas dentro das frentes de onda. Altos graus de emaranhamento entre pares de átomos são encontrados entre primeiros vizinhos, entre eles e entre suas contrapartes equidistantes do lado oposto da rede em relação ao centro.

Sabemos que o emaranhamento atômico a longas distâncias pode se tornar fraco devido aos efeitos dispersivos naturais da rede. É possível que o mesmo seja destilado (purificado) em singletos puros – veja, por exemplo, o artigo de Horodecki [49] sobre tal processo de destilação quântica – para ser usado em, por exemplo, protocolos de teleporte quântico. A dinâmica natural do Hamiltoniano JCH pode então ser controlada para gerar emaranhamento entre nós distantes em arquiteturas de redes quânticas híbridas de luz-matéria [56, 82].

Referências Bibliográficas

- [1] ALMEIDA, G. M. A., CICCARELLO, F., APOLLARO, T. J. G., AND SOUZA, A. M. C. Quantum-state transfer in staggered coupled-cavity arrays. *Phys. Rev. A* *93* (Mar 2016), 032310.
- [2] ALMEIDA, G. M. A., DE MOURA, F. A. B. F., APOLLARO, T. J. G., AND LYRA, M. L. Disorder-assisted distribution of entanglement in xy spin chains. *Phys. Rev. A* *96* (Sep 2017), 032315.
- [3] ALTLAND, A. Advanced quantum mechanics, 2013.
- [4] AMICO, L., FAZIO, R., OSTERLOH, A., AND VEDRAL, V. Entanglement in many-body systems. *Rev. Mod. Phys.* *80* (May 2008), 517–576.
- [5] ANDERSON, P. W. Absence of diffusion in certain random lattices. *Physical review* *109*, 5 (1958), 1492.
- [6] ANGELAKIS, D. G., SANTOS, M. F., AND BOSE, S. Photon-blockade-induced mott transitions and xy spin models in coupled cavity arrays. *Phys. Rev. A* *76* (Sep 2007), 031805.
- [7] BALEWSKI, J. B., KRUPP, A. T., GAJ, A., PETER, D., BÜCHLER, H. P., LÖW, R., HOFFERBERTH, S., AND PFAU, T. Coupling a single electron to a bose–einstein condensate. *Nature* *502*, 7473 (Oct 2013), 664–667.
- [8] BAO, X.-H., QIAN, Y., YANG, J., ZHANG, H., CHEN, Z.-B., YANG, T., AND PAN, J.-W. Generation of narrow-band polarization-entangled photon pairs for atomic quantum memories. *Phys. Rev. Lett.* *101* (Nov 2008), 190501.
- [9] BENNETT, C. H., BRASSARD, G., CRÉPEAU, C., JOZSA, R., PERES, A., AND WOOTTERS, W. K. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels. *Phys. Rev. Lett.* *70* (Mar 1993), 1895–1899.

- [10] BENNETT, C. H., DiVINCENZO, D. P., SMOLIN, J. A., AND WOOTTERS, W. K. Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Phys. Rev. A* 54 (Nov 1996), 3824–3851.
- [11] BENNETT, C. H., AND WIESNER, S. J. Communication via one- and two-particle operators on einstein-podolsky-rosen states. *Phys. Rev. Lett.* 69 (Nov 1992), 2881–2884.
- [12] BERMAN, P. R. *Cavity quantum electrodynamics*. 1994.
- [13] BLAIS, A., GAMBETTA, J., WALLRAFF, A., SCHUSTER, D. I., GIRVIN, S. M., DEVORET, M. H., AND SCHOELKOPF, R. J. Quantum-information processing with circuit quantum electrodynamics. *Phys. Rev. A* 75 (Mar 2007), 032329.
- [14] BOHR, N. I. on the constitution of atoms and molecules. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 26, 151 (1913), 1–25.
- [15] BONIFACIO, R., AND PREPARATA, G. Coherent spontaneous emission. *Phys. Rev. A* 2 (Aug 1970), 336–347.
- [16] BRANDSTÄTTER, B., MCCLUNG, A., SCHÜPPERT, K., CASABONE, B., FRIEBE, K., STUTE, A., SCHMIDT, P. O., DEUTSCH, C., REICHEL, J., BLATT, R., AND NORTHUP, T. E. Integrated fiber-mirror ion trap for strong ion-cavity coupling. *Review of Scientific Instruments* 84, 12 (2013), 123104.
- [17] BRUNE, M., AND RAIMOND, J. M. Trapped quantum light. *EPL (Europhysics Letters)* 110, 2 (apr 2015), 20001.
- [18] BRUNE, M., RAIMOND, J. M., AND HAROCHE, S. Theory of the rydberg-atom two-photon micromaser. *Phys. Rev. A* 35 (Jan 1987), 154–163.
- [19] BRUNE, M., SCHMIDT-KALER, F., MAALI, A., DREYER, J., HAGLEY, E., RAIMOND, J. M., AND HAROCHE, S. Quantum rabi oscillation: A direct test of field quantization in a cavity. *Phys. Rev. Lett.* 76 (Mar 1996), 1800–1803.
- [20] CASIMIR, H. B. G., AND POLDER, D. The influence of retardation on the london-van der waals forces. *Phys. Rev.* 73 (Feb 1948), 360–372.
- [21] CHANG, W.-H., CHEN, W.-Y., CHANG, H.-S., HSIEH, T.-P., CHYI, J.-I., AND HSU, T.-M. Efficient single-photon sources based on low-density quantum dots in photonic-crystal nanocavities. *Phys. Rev. Lett.* 96 (Mar 2006), 117401.
- [22] CHU, S. Nobel lecture: The manipulation of neutral particles. *Rev. Mod. Phys.* 70 (Jul 1998), 685–706.
- [23] CICCARELLO, F. Resonant atom-field interaction in large-size coupled-cavity arrays. *Phys. Rev. A* 83 (Apr 2011), 043802.
- [24] CIRAC, J. I., ZOLLER, P., KIMBLE, H. J., AND MABUCHI, H. Quantum state transfer and entanglement distribution among distant nodes in a quantum network. *Phys. Rev. Lett.* 78 (Apr 1997), 3221–3224.

- [25] COHEN-TANNOUDJI, C. N. Nobel lecture: Manipulating atoms with photons. *Rev. Mod. Phys.* 70 (Jul 1998), 707–719.
- [26] DAVID, D., AND ROGER, P. Quantum computational networks. In *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* (Sep 1989), vol. 425, The Royal Society, pp. 73–90.
- [27] DAVID NADLINGER BLOG. Wip: Photographing a single atom. <https://klickverbot.at/blog/2018/02/photographing-a-single-atom/>, acessado em 13.12.2021.
- [28] DAVIDOVICH, L., RAIMOND, J. M., BRUNE, M., AND HAROCHE, S. Quantum theory of a two-photon micromaser. *Phys. Rev. A* 36 (Oct 1987), 3771–3787.
- [29] DiVINCENZO, D. P. Quantum computation. *Science* 270, 5234 (1995), 255–261.
- [30] EBERLY, J. H., NAROZHNY, N. B., AND SANCHEZ-MONDRAGON, J. J. Periodic spontaneous collapse and revival in a simple quantum model. *Phys. Rev. Lett.* 44 (May 1980), 1323–1326.
- [31] EKERT, A., AND KNIGHT, P. L. Entangled quantum systems and the schmidt decomposition. *American Journal of Physics* 63, 5 (1995), 415–423.
- [32] EKERT, A. K. Quantum cryptography based on bell’s theorem. *Phys. Rev. Lett.* 67 (Aug 1991), 661–663.
- [33] FERANCHUK, I. D., AND LEONOV, A. Analytical analysis of the “collapse-revival” effect in the jaynes–cummings model. *Physics Letters A* 373, 5 (2009), 517–520.
- [34] FLEISCHHAUER, M., AND SCHLEICH, W. P. Revivals made simple: Poisson summation formula as a key to the revivals in the jaynes-cummings model. *Phys. Rev. A* 47 (May 1993), 4258–4269.
- [35] FOOT, C. J., ET AL. *Atomic physics*, vol. 7. Oxford University Press, 2005.
- [36] FRISK KOCKUM, A., MIRANOWICZ, A., DE LIBERATO, S., SAVASTA, S., AND NORI, F. Ultrastrong coupling between light and matter. *Nature Reviews Physics* 1, 1 (Jan 2019), 19–40.
- [37] GABRIELSE, G., AND DEHMELT, H. Observation of inhibited spontaneous emission. *Phys. Rev. Lett.* 55 (Jul 1985), 67–70.
- [38] GISIN, N., RIBORDY, G., TITTEL, W., AND ZBINDEN, H. Quantum cryptography. *Rev. Mod. Phys.* 74 (Mar 2002), 145–195.
- [39] GLAUBER, R. J. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.* 131 (Sep 1963), 2766–2788.

- [40] GORDON, J. P., ZEIGER, H. J., AND TOWNES, C. H. The maser—new type of microwave amplifier, frequency standard, and spectrometer. *Phys. Rev.* 99 (Aug 1955), 1264–1274.
- [41] GOY, P., RAIMOND, J. M., GROSS, M., AND HAROCHE, S. Observation of cavity-enhanced single-atom spontaneous emission. *Phys. Rev. Lett.* 50 (Jun 1983), 1903–1906.
- [42] GROSS, M., GOY, P., FABRE, C., HAROCHE, S., AND RAIMOND, J. M. Maser oscillation and microwave superradiance in small systems of rydberg atoms. *Phys. Rev. Lett.* 43 (Jul 1979), 343–346.
- [43] GUILHERME M. A. ALMEIDA. Tese: Transferência de estado quântico em sistemas de cavidades acopladas. Universidade Federal de Sergipe.
- [44] HAROCHE, S. Nobel lecture: Controlling photons in a box and exploring the quantum to classical boundary. *Rev. Mod. Phys.* 85 (Jul 2013), 1083–1102.
- [45] HAROCHE, S. Nobel lecture: Controlling photons in a box and exploring the quantum to classical boundary. *Rev. Mod. Phys.* 85 (Jul 2013), 1083–1102.
- [46] HAROCHE, S., BRUNE, M., AND RAIMOND, J.-M. Atomic clocks for controlling light fields. *Physics Today* 66, 1 (2013), 27–32.
- [47] HENNESSY, K., BADOLATO, A., WINGER, M., GERACE, D., ATATÜRE, M., GULDE, S., FÄLT, S., HU, E. L., AND IMAMOĞLU, A. Quantum nature of a strongly coupled single quantum dot–cavity system. *Nature* 445, 7130 (Feb 2007), 896–899.
- [48] HILL, S., AND WOOTTERS, W. K. Entanglement of a pair of quantum bits. *Phys. Rev. Lett.* 78 (Jun 1997), 5022–5025.
- [49] HORODECKI, M., HORODECKI, P., AND HORODECKI, R. Mixed-state entanglement and distillation: Is there a “bound” entanglement in nature? *Phys. Rev. Lett.* 80 (Jun 1998), 5239–5242.
- [50] HORODECKI, R., HORODECKI, P., HORODECKI, M., AND HORODECKI, K. Quantum entanglement. *Rev. Mod. Phys.* 81 (Jun 2009), 865–942.
- [51] HULET, R. G., HILFER, E. S., AND KLEPPNER, D. Inhibited spontaneous emission by a rydberg atom. *Phys. Rev. Lett.* 55 (Nov 1985), 2137–2140.
- [52] HUNGER, D., STEINMETZ, T., COLOMBE, Y., DEUTSCH, C., HÄNSCH, T. W., AND REICHEL, J. A fiber fabry–perot cavity with high finesse. *New Journal of Physics* 12, 6 (jun 2010), 065038.
- [53] JAYNES, E., AND CUMMINGS, F. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE* 51, 1 (1963), 89–109.

- [54] KHITROVA, G., GIBBS, H. M., KIRA, M., KOCH, S. W., AND SCHERER, A. Vacuum rabi splitting in semiconductors. *Nature Physics* 2, 2 (Feb 2006), 81–90.
- [55] KIM, J. I., FONSECA ROMERO, K. M., Horiguti, A. M., DAVIDOVICH, L., NEMES, M. C., AND DE TOLEDO PIZA, A. F. R. Classical behavior with small quantum numbers: The physics of ramsey interferometry of rydberg atoms. *Phys. Rev. Lett.* 82 (Jun 1999), 4737–4740.
- [56] KIMBLE, H. J. The quantum internet. *Nature* 453, 7198 (Jun 2008), 1023–1030.
- [57] KLEPPNER, D. Inhibited spontaneous emission. *Phys. Rev. Lett.* 47 (Jul 1981), 233–236.
- [58] KNIGHT, P., AND MILONNI, P. The rabi frequency in optical spectra. *Physics Reports* 66, 2 (1980), 21–107.
- [59] KRAMER, B., BERGMANN, G., AND BRUYNSERAEDE, Y. *Localization, Interaction, and Transport Phenomena: Proceedings of the International Conference, August 23–28, 1984 Braunschweig, Fed. Rep. of Germany*, vol. 61. Springer Science & Business Media, 2012.
- [60] LAGENDIJK, A., VAN TIGGELEN, B., AND WIERSMA, D. S. Fifty years of anderson localization. *Phys. Today* 62, 8 (2009), 24–29.
- [61] LANGER, C., OZERI, R., JOST, J. D., CHIAVERINI, J., DEMARCO, B., BEN-KISH, A., BLAKESTAD, R. B., BRITTON, J., HUME, D. B., ITANO, W. M., LEIBFRIED, D., REICHLE, R., ROSEN BAND, T., SCHAETZ, T., SCHMIDT, P. O., AND WINE-LAND, D. J. Long-lived qubit memory using atomic ions. *Phys. Rev. Lett.* 95 (Aug 2005), 060502.
- [62] LEE, M., LEE, M., HONG, S., SCHÜPPERT, K., KWON, Y.-D., KIM, T., COLOMBE, Y., NORTHUP, T. E., CHO, D.-I. D., AND BLATT, R. Microelectromechanical-system-based design of a high-finesse fiber cavity integrated with an ion trap. *Phys. Rev. Applied* 12 (Oct 2019), 044052.
- [63] LODAHL, P., MAHMOODIAN, S., AND STOBBE, S. Interfacing single photons and single quantum dots with photonic nanostructures. *Rev. Mod. Phys.* 87 (May 2015), 347–400.
- [64] LOO, V., LANCO, L., LEMAÎTRE, A., SAGNES, I., KREBS, O., VOISIN, P., AND SENELLART, P. Quantum dot-cavity strong-coupling regime measured through coherent reflection spectroscopy in a very high-q micropillar. *Applied Physics Letters* 97, 24 (2010), 241110.
- [65] MAIOLI, P., MEUNIER, T., GLEYZES, S., AUFFEVE, A., NOGUES, G., BRUNE, M., RAIMOND, J. M., AND HAROCHE, S. Nondestructive rydberg atom counting with mesoscopic fields in a cavity. *Phys. Rev. Lett.* 94 (Mar 2005), 113601.

- [66] MAKIN, M. I., COLE, J. H., HILL, C. D., GREENTREE, A. D., AND HOLLENBERG, L. C. L. Time evolution of the one-dimensional jaynes-cummings-hubbard hamiltonian. *Phys. Rev. A* 80 (Oct 2009), 043842.
- [67] MEEKHOF, D. M., MONROE, C., KING, B. E., ITANO, W. M., AND WINELAND, D. J. Generation of nonclassical motional states of a trapped atom. *Phys. Rev. Lett.* 76 (Mar 1996), 1796–1799.
- [68] MENDONÇA, J. P., DE MOURA, F. A. B. F., LYRA, M. L., AND ALMEIDA, G. M. A. Generation and distribution of atomic entanglement in coupled-cavity arrays. *Phys. Rev. A* 102 (Dec 2020), 062416.
- [69] MESCHEDE, D., WALTHER, H., AND MÜLLER, G. One-atom maser. *Phys. Rev. Lett.* 54 (Feb 1985), 551–554.
- [70] MEYSTRE, P., GENEUX, E., QUATTROPANI, A., AND FAIST, A. Long-time behaviour of a two-level system in interaction with an electromagnetic field. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)* 25, 2 (Feb 1975), 521–537.
- [71] MEYSTRE, P., AND SARGENT, M. *Elements of quantum optics*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [72] MIGUEL-SÁNCHEZ, J., REINHARD, A., TOGAN, E., VOLZ, T., IMAMOGLU, A., BESGA, B., REICHEL, J., AND ESTÈVE, J. Cavity quantum electrodynamics with charge-controlled quantum dots coupled to a fiber fabry-perot cavity. *New Journal of Physics* 15, 4 (apr 2013), 045002.
- [73] NIETNER, C., AND PELSTER, A. Ginzburg-landau theory for the jaynes-cummings-hubbard model. *Phys. Rev. A* 85 (Apr 2012), 043831.
- [74] OSTERLOH, A., AMICO, L., FALCI, G., AND FAZIO, R. Scaling of entanglement close to a quantum phase transition. *Nature* 416, 6881 (Apr 2002), 608–610.
- [75] PHILLIPS, W. D. Nobel lecture: Laser cooling and trapping of neutral atoms. *Rev. Mod. Phys.* 70 (Jul 1998), 721–741.
- [76] PURCELL, E. M. Spontaneous emission probabilities at radio frequencies. *Phys. Rev.* 69 (1946), 681.
- [77] PURCELL, E. M. *Spontaneous Emission Probabilities at Radio Frequencies*. Springer US, Boston, MA, 1995, pp. 839–839.
- [78] RAIMOND, J. M., BRUNE, M., AND HAROCHE, S. Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity. *Rev. Mod. Phys.* 73 (Aug 2001), 565–582.
- [79] RAMSEY, N. F. A molecular beam resonance method with separated oscillating fields. *Phys. Rev.* 78 (Jun 1950), 695–699.
- [80] REMPE, G., SCHMIDT-KALER, F., AND WALTHER, H. Observation of sub-poissonian photon statistics in a micromaser. *Phys. Rev. Lett.* 64 (Jun 1990), 2783–2786.

- [81] REMPE, G., WALTHER, H., AND KLEIN, N. Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser. *Phys. Rev. Lett.* 58 (Jan 1987), 353–356.
- [82] RITTER, S., NÖLLEKE, C., HAHN, C., REISERER, A., NEUZNER, A., UPHOFF, M., MÜCKE, M., FIGUEROA, E., BOCHMANN, J., AND REMPE, G. An elementary quantum network of single atoms in optical cavities. *Nature* 484, 7393 (Apr 2012), 195–200.
- [83] SCHAETZ, T. Trapping ions and atoms optically. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 50, 10 (2017), 102001.
- [84] SCHOELKOPF, R. J., AND GIRVIN, S. M. Wiring up quantum systems. *Nature* 451, 7179 (Feb 2008), 664–669.
- [85] SCHUSTER, D. I. *Circuit quantum electrodynamics*. Yale University, 2007.
- [86] SCULLY, M. O., AND ZUBAIRY, M. S. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997.
- [87] STEINMETZ, T., COLOMBE, Y., HUNGER, D., HÄNSCH, T. W., BALOCCHI, A., WARBURTON, R. J., AND REICHEL, J. Stable fiber-based fabry-pérot cavity. *Applied Physics Letters* 89, 11 (2006), 111110.
- [88] STENHOLM, S. Quantum theory of electromagnetic fields interacting with atoms and molecules. *Physics Reports* 6, 1 (1973), 1–121.
- [89] TAVIS, M., AND CUMMINGS, F. W. Approximate solutions for an n -molecule-radiation-field hamiltonian. *Phys. Rev.* 188 (Dec 1969), 692–695.
- [90] TAYLOR, J. M., MARCUS, C. M., AND LUKIN, M. D. Long-lived memory for mesoscopic quantum bits. *Phys. Rev. Lett.* 90 (May 2003), 206803.
- [91] UNIVERSITÄT INNSBRUCK. Cavity qed: Fiber-cavity apparatus. <https://www.uibk.ac.at/exphys/quantum-interfaces/research/cavity-qed.html>, acessado em 30.06.2021.
- [92] VARCOE, B. T. H., BRATTKE, S., WEIDINGER, M., AND WALTHER, H. Preparing pure photon number states of the radiation field. *Nature* 403, 6771 (Feb 2000), 743–746.
- [93] VIDAL, G., LATORRE, J. I., RICO, E., AND KITAEV, A. Entanglement in quantum critical phenomena. *Phys. Rev. Lett.* 90 (Jun 2003), 227902.
- [94] VON HELMHOLTZ, H. Über integrale der hydrodynamischen gleichungen, welche den wirbelbewegungen entsprechen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 1858, 25 – 55.
- [95] WALLRAFF, A., SCHUSTER, D. I., BLAIS, A., FRUNZIO, L., HUANG, R.-. S., MAJER, J., KUMAR, S., GIRVIN, S. M., AND SCHOELKOPF, R. J. Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics. *Nature* 431, 7005 (Sep 2004), 162–167.

- [96] WANG, H., HORIKIRI, T., AND KOBAYASHI, T. Polarization-entangled mode-locked photons from cavity-enhanced spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. A* **70** (Oct 2004), 043804.
- [97] WEIDINGER, M., VARCOE, B. T. H., HEERLEIN, R., AND WALTHER, H. Trapping states in the micromaser. *Phys. Rev. Lett.* **82** (May 1999), 3795–3798.
- [98] WHITE, H. E., ET AL. Introduction to atomic spectra.
- [99] WIKIPEDIA, THE FREE ENCYCLOPEDIA. Levi-civita symbol. https://en.wikipedia.org/wiki/Levi-Civita_symbol, acessado em 13.12.2021.
- [100] WIKIPEDIA, THE FREE ENCYCLOPEDIA. Ramsey interferometry. https://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey_interferometry, acessado em 13.12.2021.
- [101] WIKIPEDIA, THE FREE ENCYCLOPEDIA. Rydberg atom. https://en.wikipedia.org/wiki/Rydberg_atom, acessado em 10.12.2021.
- [102] WINELAND, D. J. Nobel lecture: Superposition, entanglement, and raising schrödinger's cat. *Rev. Mod. Phys.* **85** (Jul 2013), 1103–1114.
- [103] WOOTTERS, W. K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Phys. Rev. Lett.* **80** (Mar 1998), 2245–2248.
- [104] WU, X., LIANG, X., TIAN, Y., YANG, F., CHEN, C., LIU, Y.-C., TEY, M. K., AND YOU, L. A concise review of rydberg atom based quantum computation and quantum simulation. *Chinese Physics B* **30**, 2 (feb 2021), 020305.
- [105] WUTTKE, C., BECKER, M., BRÜCKNER, S., ROTHHARDT, M., AND RAUSCHENBEUTEL, A. Nanofiber fabry-perot microresonator for nonlinear optics and cavity quantum electrodynamics. *Opt. Lett.* **37**, 11 (Jun 2012), 1949–1951.
- [106] ZHAO, L., GUO, X., LIU, C., SUN, Y., LOY, M. M. T., AND DU, S. Photon pairs with coherence time exceeding $1\mu s$. *Optica* **1**, 2 (Aug 2014), 84–88.
- [107] ZHAO, R., DUDIN, Y. O., JENKINS, S. D., CAMPBELL, C. J., MATSUKEVICH, D. N., KENNEDY, T. A. B., AND KUZMICH, A. Long-lived quantum memory. *Nature Physics* **5**, 2 (Feb 2009), 100–104.