UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE BACHARELADO EM MATEMÁTICA

CÍCERO CALHEIROS DOS SANTOS FILHO

Um Link Entre Sistemas Dinâmicos e Teoria dos Números

Maceió

2021

CÍCERO CALHEIROS DOS SANTOS FILHO

Um Link Entre Sistemas Dinâmicos e Teoria dos Números

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Matemática - Bacharelado da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharelado em Matemática.

Orientador: Davi Dos Santos Lima

Maceió

2021

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

S237l Santos Filho, Cícero Calheiros dos.
Um link entre sistemas dinâmicos e teoria dos números / Cícero Calheiros dos Santos Filho. – 2021.
44 f.

Orientador: Davi dos Santos Lima.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática : Bacharelado) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2021.

Bibliografia: f. 44.

1. Frações contínuas. 2. Sistemas dinâmicos. 3. Transformação de Gauss. 4. Teorema de Birkhoff. I. Título.

CDU: 517.524

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais (Seu cícero e Dona Edleuza) por sempre me apoiarem nos meus estudos . Por entenderem quando eu quis morar em Maceió (Foi um período muito importante academicamente). Ao professor Davi que é meu orientador, também agradeço por desde o início da minha graduação me ajudar , me mostrando o que deveria estudar, quais caminhos seguir e no tcc também por todas as contribuições e dúvidas tiradas. Agradeço aos professores que contribuiram na minha formação. Em especial aos professores : Isnaldo, Alan, Rânter, Rafael, Krerley, Guilhermo .

A todos os meus amigos, pelas muitas conversas sobre matemática na fila do R.U ou no quadro do IM e Conversas jogada fora no cafezinho do Cedu. É uma quantidade não enumerável de nomes então evitarei colocar aqui.

RESUMO

Este Trabalho tem como principal objetivo apresentar um pouco da teoria das frações contínuas por meio de sistemas Dinâmicos. Usaremos para tal a Transformação de Gauss que fornece a expansão de um número em fração contínua. Estudaremos suas propriedades topológicas e ergódicas e usando o Teorema Ergódico de Birkhoff concluiremos várias propriedades sobre os dígitos de um número escrito em fração contínua.

Palavras-chave: Teoria dos Números, Sistemas Dinâmicos. Teoria Ergódica. Frações contínuas. Trasformação de Gauss. Teorema ergódico de Birkhoff.

ABSTRACT

The aim of this work is to present an introduction of the theory of continued fractions Through basic tools of Dynamic systems.In order to do that we will use the Gauss map, which provides the expansion of a number in continued fraction. We will study its topological and ergodic properties and Using Birkhoff's Ergodic Theorem we will conclude several properties on the digits of a number written in continuous fraction.

Keywords: Number Theory, Dynamical Systems. Ergodic Theory. Continued fractions. Gauss map. Birkhoff's ergodic theorem.

Sumário

1 Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar um link entre sistemas dinâmicos e teoria dos números. A representação decimal de números reais está ligada à dinâmica da função $f(x) = 10x - \lfloor 10x \rfloor$. De maneira análoga a isso, temos a função $T(x) = 1/x - \lfloor 1/x \rfloor$, chamada de transformação de Gauss, que fornece uma outra maneira de expandir números reais, a expansão em frações contínuas. A vantagem da transformação de Gauss é que ela não depende da base. Além disso, veremos que a expansão em fração contínua é um algoritmo para encontrarmos as melhores aproximações de um irracional por racional

Daremos algumas propriedades da expansão em frações contínuas. Em seguida provaremos o teorema de Liouville e fazendo uso da expansão em frações contínuas construíremos números transcendentes. Para finalizar o trabalho estudaremos algumas propriedades da Transformação de Gauss tais como densidade pontos periódicos,transitividade e mistura topológica , invariância com respeito à medida de Gauss e ergodicidade. Todos esses conceitos serão definidos no texto. Para finalizar, faremos o uso do teorema ergódico de Birkhoff para tirar conclusões sobre a expansão em fração continua de quase todo número.

2 Expansão em frações contínuas e a transformação de Gauss

Neste capítulo veremos primeiro que dado qualquer número racional x existe uma sequência finita $(a_j)_{j=0}^k$ de números naturais tal que podemos escrever o número x da forma

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}}$$

onde $a_0 = \lfloor x \rfloor$ é a parte inteira de x. Esta expressão é uma expansão em *frações contínuas* de x. Veremos que no caso em que x é irracional existe uma sequência $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tal que x é o limite da sequência de números racionais

$$\frac{p_k}{q_k} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}}$$

Os números a_i são os chamados *quocientes* de x e as frações p_k/q_k são os *convergentes* de x. Usaremos a seguinte notação

$$[a_1, a_2, ..., a_k] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}}.$$

2.1 Expansão em frações contínuas dos racionais

Para exemplificar o que falamos acima, considere o número racional $\frac{355}{113}$.

Podemos escrever

$$355 = 3 \cdot 113 + 16 \quad \text{e} \quad 113 = 16 \cdot 7 + 1.$$

E daí, temos

$$\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{113} = 3 + \frac{1}{\frac{113}{16}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}}.$$

Podemos então escrever

$$\frac{355}{113} = [3; 7, 16] \quad \text{ou} \quad \frac{355}{113} = [3; 7, 15, 1]$$

O principal resultado desta seção é o seguinte teorema que segue do Algoritmo de Euclides:

Teorema 2.1. *Um número x é racional se, e somente se, possui uma expansão em frações contínuas* *finita, isto é, existe uma sequência finita de números naturais tais que*

$$x = [a_0; a_1, a_2, ..., a_k]$$

Demonstração. A volta é imediata. E a ida segue do Algoritmo de Euclides. Perceba que basta considerar x em $(0, 1)$, pois caso contrário $x - \lfloor x \rfloor \in (0, 1)$ e segue o resultado.

Usaremos o algoritmo de Euclides. Seja $x = \dfrac{r_1}{r_0}$, onde $r_1 < r_0$. Usando o algoritmo de Euclides, existem $a_1 \geq 1$ e $0 \leq r_2 < r_1$ tais que

$$r_0 = a_1 r_1 + r_2$$

Se $r_2 = 0$ o processo termina :

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{r_1}{a_1 r_1 + r_2} = \frac{1}{a_1} = [a_1]$$

A seguir dividimos r_1 por r_2 e o processo continua de forma indutiva, obtendo assim sequências $(a_k)_k$ e $(r_k)_k$ de números naturais que verificam a relação

$$r_k = a_{k+1} + r_{k+2} \quad a_{k+1} = \left\lfloor \frac{r_k}{r_{k+1}} \right\rfloor$$

onde

$$r_{k+2} < r_{k+1} < \cdots < r_1 < r_0$$

Este processo é necessariamente finito. Portanto existe um primeiro natural tal que $r_{n+1} = 0$. Em tal caso,

$$x = [a_1, a_2, ..., a_n]$$

□

2.2 A transformação de Gauss

Nesta seção introduziremos a *transformação* de Gauss e veremos a relação entre a expansão em frações contínuas de um número racional x obtida usando o algoritmo de Euclides e as iterações de x pela transformação de Gauss.

Definição 2.2. *A transformação de Gauss T é definida por*

$$T : [0, 1) \to [0, 1), \quad T(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor & , se \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & , se \quad x = 0 \end{cases}$$

Definimos $T^0(x) = x$ e indutivamente $T^{i+1}(x) = T(T^i(x))$

Observação 2.3. *Um número $x \in (0,1)$ é irracional se, e somente se, $T(x)$ é irracional. Portanto, um número x é irracional se, e somente se, $T^n(x)$ é irracional (logo não nulo) para todo $n \geq 0$.*

2.2.1 Caso racional

Relacionaremos agora a transformação de Gauss e a expansão em frações contínuas de um número racional. Assumiremos que as expansões em frações contínuas dos números racionais são obtidas aplicando o algoritmo de Euclides.

Considere $x = [a_1, ..., a_k]$ e lembre que a construção no capítulo anterior implica que se um número raciconal x verifica $x = [a_1, ..., a_k]$ então $r_{k+1} = 0$ e $r_i \neq 0 \quad \forall i \leq k$. Escrevamos

$$x = T_0 = \frac{r_1}{r_0}, \quad T_1 = \frac{r_2}{r_1}, \cdots, T_{k-1} = \frac{r_k}{r_{k-1}}, \quad T_k = \frac{r_{k+1}}{r_k} = 0.$$

Vamos provar que $T_j = T^j(x) \quad$ e $\quad a_j = \left\lfloor \dfrac{1}{T^{j-1}(x)} \right\rfloor$. De fato, lembrando da definição dos a_n e dos r_n obtemos,

$$r_0 = a_1 r_1 + r_2, \quad \frac{r_0}{r_1} = \frac{1}{x} = a_1 + T_1 = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + T_1$$

Portanto

$$T_1 = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = T(x)$$

Suponha agora indutivamente que $T^j(x) = T_j$ e que $a_j = \left\lfloor \dfrac{1}{T^{j-1}(x)} \right\rfloor$ para todo $1 \leq j \leq n < k$. Escrevemos(Usando o algoritmo de Euclides)

$$r_n = a_{n+1} r_{n+1} + r_{n+2}$$

E observamos que

$$a_{n+1} = \left\lfloor \frac{r_n}{r_{n+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{T_n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{T^n(x)} \right\rfloor$$

Logo ,

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= \frac{r_{n+2}}{r_{n+1}} = \frac{r_n - a_{n+1} r_{n+1}}{r_{n+1}} = \frac{r_n}{r_{n+1}} - a_{n+1} = \frac{r_n}{r_{n+1}} - \left\lfloor \frac{r_n}{r_{n+1}} \right\rfloor = \\ &= T\left(\frac{r_{n+1}}{r_n}\right) = T(T_n) = T(T^n(x)) = T^{n+1}(x) \end{aligned}$$

Assim, $T^n(x) = T_n \quad \text{e} \quad a_n = \left\lfloor \dfrac{1}{T^{n-1}(x)} \right\rfloor$ para todo n como queriamos provar .

2.2.2 Caso irracional

Dado $x \in (0,1)$ escrevemos

$$a_1(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \quad a_2(x) = \left\lfloor \frac{1}{T(x)} \right\rfloor$$

e definimos de forma indutiva, para $n \geq 1$,

$$a_n(x) = a_1(T^{n-1}(x)) = \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}(x)} \right\rfloor$$

Pelas definições de $T(x)$ e $a_1(x)$ temos

$$x = \frac{1}{a_1(x) + T(x)}.$$

Repetindo o proceso,

$$T(x) = \frac{1}{a_1(T(x)) + T(T(x))} = \frac{1}{a_2(x) + T^2(x)}.$$

Portanto, indutivamente obtemos

$$x = \cfrac{1}{a_1(x) + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1}(x) + \cfrac{1}{a_n(x) + T^n(x)}}}.$$

isto é,

$$x = [a_1(x), a_2(x), ..., a_n(x) + T^n(x)]$$

Se x é um número real qualquer, escolhemos $a_0 = \lfloor x \rfloor$. Portanto $x - a_0 \in [0,1)$. Daí , aplicamos processo a $x - a_0$ e chegamos a

$$x = [a_0(x); a_1(x - \lfloor x \rfloor), a_2(x - \lfloor x \rfloor), ..., a_n(x - \lfloor x \rfloor)) + T^n(x - \lfloor x \rfloor)].$$

Definição 2.4. *Considere $x \in \mathbb{R}$ dizemos que*

- *o número inteiro $a_n(x)$ é o n-ésimo quociente de x.*
- *o número racional $[a_0(x); a_1(x), a_2(x), ..., a_n(x)] = \dfrac{p_n(x)}{q_n(x)}$ é o n-ésimo convergente de x.*

Fecharemos este capítulo com um exemplo simples de expansão em frações contínuas de um número irracional:

Exemplo 2.5. *(Expansão de $\sqrt{3}$) os quocientes de $\sqrt{3}$ formam uma sequência periódica , onde*

$$a_{2i+1}(\sqrt{3}) = 1 \quad e \quad a_{2i+2}(\sqrt{3}) = 2.$$

Como $\lfloor\sqrt{3}\rfloor = 1$, temos

$$\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, ...]$$

Demonstração. Temos $a_0 = \lfloor\sqrt{3}\rfloor = 1$. Aplicamos a transformação de Gauss a $y = \sqrt{3} - 1$.

$$a_1(y) = \left\lfloor \frac{1}{y} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{3}-1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right\rfloor = 1.$$

$$a_2(y) = \left\lfloor \frac{1}{T(y)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} \right\rfloor = \lfloor\sqrt{3}+1\rfloor = 2.$$

Observamos que o processo de calcular os quocientes $a_i(y)$ é o mesmo que o de determinar $T^i(y)$.

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{T^0(y)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \quad \frac{1}{T^1(y)} = \sqrt{3}+1.$$

Por indução segue que

$$\frac{1}{T^{2i}(y)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \quad \frac{1}{T^{2i+1}(y)} = \sqrt{3}+1.$$

Daí,

$$a_{2i+1}(y) = \left\lfloor \frac{1}{T^{2i}(y)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right\rfloor = 1.$$
$$a_{2i+2}(y) = \left\lfloor \frac{1}{T^{2i+1}(y)} \right\rfloor = \lfloor\sqrt{3}+1\rfloor = 2.$$

□

3 Convergentes e suas propriedades aritméticas

3.1 Propriedades aritméticas dos convergentes

Para provar a *convergência dos quocientes* o primeiro passo é ver que os convergentes de um número x verificam algumas propriedades aritméticas.

A seguir fixaremos x e, para simplificar a notação, escreveremos a_i, p_i, q_i no lugar de $a_i(x), p_i(x), q_i(x)$

quando não for necessário explicitar o número x.

Por convenção, escreveremos

$$q_{-1} = 0, \quad p_0 = a_0 \quad \text{e} \quad p_{-1} = q_0 = 1.$$

Proposição 3.1. ***(Propriedades dos convergentes)***

(A) *para todo $n \geq 1$ se verifica*

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad e \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

(B) *para todo $n \geq 0$,*

(I)

$$x = \frac{p_n + T^n(x) p_{n-1}}{q_n + T^n(x) q_{n-1}}.$$

(II)

$$p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n.$$

(III)

$$p_n(x) = q_{n-1}(T(x)).$$

(C) *Para todo $n \geq 2$ se verifica*

$$p_n \geq 2^{(n-2)/2} \quad e \quad q_n \geq 2^{(n-1)/2}$$

Observação 3.2. *Por (B II) garantimos que p_n/q_n é irredutível.*

Prova de (A):

$$\frac{p_0}{q_0} = a_0$$

e

$$\frac{p_1}{q_1} = a_0 + [a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1}$$

Portanto, podemos escolher

$$p_1 = a_0 a_1 + 1 \quad \text{e} \quad q_1 = a_1$$

Obtemos assim a propriedade para $n = 1$.

$$\frac{p_2}{q_2} = a_0 + [a_1, a_2] = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1}$$

escolhemos então

$$p_2 = a_0a_1a_2 + a_0 + a_2 = a_2(a_0a_1 + 1) + a_0, \quad q_2 = a_1a_2 + 1$$

obtendo então a propriedade para $n = 2$.

por indução, suponha que a propriedade é verdadeira para todo $k \leq n$ ou seja ,

$$[a_1, ..., a_n] = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_np_{n-1} + p_{n-2}}{a_nq_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Veja que $[a_1, ..., a_n, a_{n+1}]$ é obtido substituindo na expressão $[a_1, ..., a_n]$ o número a_n por $a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}$ e que essa substituição não altera os a_i precedentes. Por fim observamos que os p_n, q_n não dependem do a_n. Eles não se alteram com essa substituição.

$$\begin{aligned}
[a_1, ..., a_n, a_{n+1}] &= \left[a_1, ..., a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right] = \\
&= \frac{\left(a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right)p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right)q_{n-1} + q_{n-2}} = \\
&= \frac{a_na_{n+1}p_{n-1} + p_{n-1} + p_{n-2}a_{n+1}}{a_na_{n+1}q_{n-1} + q_{n-1} + q_{n-2}a_{n+1}} = \\
&= \frac{a_{n+1}(a_np_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}(a_nq_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}}.
\end{aligned}$$

Lembrando que pela hipótese de indução

$$p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2} \quad , q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2}.$$

Obtemos

$$[a_1, ..., a_n, a_{n+1}] = \frac{a_{n+1}p_n + p_{n-1}}{a_{n+1}q_n + q_{n-1}}.$$

Escolhemos

$$p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1} \quad \text{e} \quad q_n = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$$

que conclui a prova da propriedade (A).

Prova de (B III):

A prova se dará também por indução.

Se $n = 0$, temos que

$$0 = p_0(x) = q_{-1}(T(x)).$$

Suponha então que vale para todo $k \leq n$ e vamos provar que vale para $k = n+1$.

$$p_{n+1}(x) = a_{n+1}(x)p_n(x) + p_{n-1}(x) = a_{n+1}(x)q_{n-1}(T(x)) + q_{n-2}(T(x))$$

Lembre-se que $a_{n+1}(x) = a_n(T(x))$ e daí usando a recorrência pro q_n, temos

$$p_{n+1}(x) = a_n(T(x))q_{n-1}(T(x)) + q_{n-2}(T(x)) = q_n(T(x)).$$

E fica provado assim.

Observação 3.3. *O item (B II) garante que* $\dfrac{p_n}{q_n}$ *é irredutível.*

Proposição 3.4. *Seja* $x = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, x_n]$, $x_n \geq 1$ *então*

$$x = \frac{x_n p_{n-1} + p_{n-2}}{x_n q_{n-1} + q_{n-2}}$$

Demonstração. A prova se dará por indução.

Se $n = 1$, então $x = [a_0; x_1] = a_0 + \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{a_0 x_1 + 1}{x_1}$ e como $p_0 = a_0, q_0 = 1, p_{-1} = 1, q_{-1} = 0$ então a proposição é válida para $n = 1$.

Suponha que vale para n e tome $x = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n, x_{n+1}]$

Como na prova da proposição anterior,

$$x = \left[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{x_{n+1}}\right]$$

e por hipótese de indução

$$x = \frac{\left(a_n + \frac{1}{x_{n+1}}\right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{x_{n+1}}\right) q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{a_n x_{n+1} p_{n-1} + p_{n-1} + x_{n+1} p_{n-2}}{a_n x_{n+1} q_{n-1} + q_{n-1} + x_{n+1} q_{n-2}} = \frac{(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) x_{n+1} + p_{n-1}}{(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) x_{n+1} + q_{n-1}}$$

e pela proposição 3.1, temos que

$$x = \frac{x_{n+1} p_n + p_{n-1}}{x_{n+1} q_n + q_{n-1}}$$

□

O próximo corolário fornece uma maneira de escrever a diferença de dois números escritos em fração contínua. Isso nos permitirá provar lá na seção 6 que os pontos periódicos da transformação de Gauss formam um conjunto denso.

Corolário 3.5. *Se* $x = [0; a_1, \cdots, a_n, \mu]$ *e* $y = [0; a_1, \cdots, a_n, \nu]$ *então*

$$|x - y| = \frac{|\mu - \nu|}{(\mu q_n + q_{n-1})(\nu q_n + q_{n-1})}$$

Demonstração. Pela proposição anterior,

$$\begin{aligned} |x-y| &= \left| \frac{\mu p_n + p_{n-1}}{\mu q_n + q_{n-1}} - \frac{\nu p_n + p_{n-1}}{\nu q_n + q_{n-1}} \right| \\ &= \frac{|\mu\nu p_n q_n + \mu p_n q_{n-1} + \nu q_n p_{n-1} + p_{n-1}q_{n-1} - \mu\nu p_n q_n - \nu p_n q_{n-1} - \mu q_n p_{n-1} - p_{n-1}q_{n-1}|}{(\mu q_n + q_{n-1})(\nu q_n + q_{n-1})} \\ &= \frac{|\mu p_n q_{n-1} + \nu q_n p_{n-1} - \nu p_n q_{n-1} - \mu q_n p_{n-1}|}{(\mu q_n + q_{n-1})(\nu q_n + q_{n-1})} = \frac{|\mu(p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}) - \nu(p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}|}{(\mu q_n + q_{n-1})(\nu q_n + q_{n-1})} \end{aligned}$$

e Pela proposição 3.1 temos que $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n$. Portanto segue que

$$|x - y| = \frac{|\mu - \nu|}{(\mu q_n + q_{n-1})(\nu q_n + q_{n-1})}.$$

□

Proposição 3.6. *A sequência dos pares* $\left\{ \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} \right\}_{n\geq 0}$ *é decrescente . Enquanto que a sequência dos ímpares* $\left\{ \frac{p_{2n}}{q_{2n}} \right\}_{n\geq 0}$ *é crescente .*

Demonstração. A prova é simples e segue diretamente do fato de

$$\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n a_{n+2}}{q_{n+2}q_n}.$$

Ser positivo para n par e negativo para n ímpar. □

Proposição 3.7. $\left\{ \frac{p_n}{q_n} \right\}$ *é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Do ítem (B II) ,temos

$$\left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

. Daí, por desigualdade triangular e aplicando a igualdade acima várias vezes, obtemos

$$\left| \frac{p_m}{q_m} - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \sum_{m\leq j\leq n} \frac{1}{q_j q_{j+1}} \leq \sum_{m\leq j\leq n} \frac{1}{2^{(j-1)/2} \cdot 2^{j/2}}$$

Como, $\sum_{j=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^j}$ é convergente, então dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq n_0$,

$$\sum_{m \leq j \leq n} \frac{1}{2^{(j-1)/2} \cdot 2^{j/2}} < \varepsilon \quad \text{(A cauda da série fica pequena).}$$

Portanto,

$$\left| \frac{p_m}{q_m} - \frac{p_n}{q_n} \right| < \varepsilon$$

Isto prova que $\left\{ \dfrac{p_n}{q_n} \right\}$ é uma sequência de Cauchy. □

No próximo teorema , provaremos que dado um irracional x, de fato os seus convergentes convergem para x.

Teorema 3.8. *Para todo número irracional x a sequência dos seus convergentes verifica*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_n(x)}{q_n(x)} = x$$

Demonstração. Queremos provar que

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \to 0.$$

Suponha primeiro $x \in (0, 1)$. Pela propriedade (B I), temos

$$x = \frac{p_n + T^n(x) p_{n-1}}{q_n + T^n(x) q_{n-1}}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| &= \left| \frac{T^n(x)(p_{n-1} q_n - q_{n-1} p_n)}{q_n(q_n + T^n(x) q_{n-1})} \right| = \\ &= \left| \frac{T^n(x)(-1)^n}{q_n(q_n + T^n(x) q_{n-1})} \right| = \\ &= \frac{T^n(x)}{q_n(q_n + T^n(x) q_{n-1})} < \frac{1}{q_n^2}. \end{aligned}$$

Onde a útlima desigudade segue observando que $0 \leq T^n(x) < 1$ e

q_n e q_{n-1} são positivos. Finalmente, como a sequência q_n é monótona crescente e $q_n > 1$ para todo $n \geq 2$ temos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{q_n} = x.$$

Se x é um número real qualquer, tomamos $a_0 = \lfloor x \rfloor$ e repetimos a prova para $x - a_0 \in (0, 1)$, completando a demonstração do teorema. □

3.1.1 Interpretação geométrica dos quocientes

Nesta seção daremos uma interpretação geométrica dos convergentes.

Tomamos um número irracional $x = [a_1, a_2, ...] \in (0, 1)$ e consideramos o intervalo $I_0 = [0, x]$, assim $|I_0| = x$. Como

$$a_1 = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

temos que $a_1 \leq \frac{1}{x} < a_1 + 1$, e portanto

$$a_1 x \leq 1 < (a_1 + 1)x.$$

Isso significa que podemos colocar no máximo a_1 intervalos consecutivos de tamanho $|I_0| = x$ no intervalo $[0, 1]$

Seja $J_1 = [a_1 x, 1]$, veja que $|J_1| = 1 - a_1 x$. Transladamos este intervalo à origem obtemos $I_1 = [0, 1 - a_1 x]$. Como $|I_1| = 1 - a_1 x$, temos

$$x = \frac{1}{a_1} - \frac{|I_1|}{a_1} = \frac{p_1}{q_1} - \frac{|I_1|}{a_1}.$$

Além disso, observamos que

$$\frac{|I_1|}{|I_0|} = \frac{1 - a_1 x}{x} = \frac{1}{x} - a_1 = T(x).$$

Portanto

$$a_2 = \left\lfloor \frac{1}{T(x)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{|I_0|}{|I_1|} \right\rfloor,$$

Então,

$$a_2 \leq \frac{|I_0|}{|I_1|} < a_2 + 1.$$

Isto é,

$$a_2 |I_1| \leq |I_0| < (a_2 + 1)|I_1|.$$

Logo, cabem exatamente a_2 intervalos de tamanho $|I_1|$ dentro de I_0. Como no primeiro caso, Seja J_2 o intervalo que resulta ao retirar de I_0 os a_2 intervalos consecutivos de tamanho $|I_1|$. Denotaremos por I_2 a translação pra origem. Temos

$$|I_2| = x - a_2 |I_1| = x - a_2(1 - a_1 x) = x(1 + a_1 a_2) - a_2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_2}{1+a_1a_2} + \frac{|I_2|}{1+a_1a_2} = \\ &= \frac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2}} + \frac{|I_2|}{1+a_1a_2} = \\ &= \frac{p_2}{q_2} + \frac{|I_2|}{1+a_1a_2}. \end{aligned}$$

A ideia da construção é determinar quantos intervalos de tamanho $|I_2|$ cabem no intervalo I_1, obter um resto de intervalo J_3, translada-lo à origem, obtendo um intervalo I_3, e repetir o processo com os intervalos I_2 e I_3, e assim sucessivamente.

Vamos fazer essa construção indutivamente. Suponhamos definidos os intervalos $I_0, I_1, ..., I_k$ com as propriedades acima. Observe que

$$J_{k+1} = [a_{k+1}|I_k|, |I_{k-1}|], \qquad I_{k+1} = [0, |I_{k-1}| - a_{k+1}|I_k|]$$

Provaremos que

$$\frac{|I_{k+1}|}{|I_k|} = T^{k+1}(x), \quad k \geq 0.$$

O caso $k = 0$ já foi provado. Suponha que vale para todo $j \leq k$. Então pela definição de I_{k+1},

$$\begin{aligned} \frac{|I_{k+1}|}{|I_k|} &= \frac{|I_{k-1}| - a_{k+1}|I_k|}{|I_k|} = \frac{|I_{k-1}|}{|I_k|} - a_{k+1} = \\ &= \frac{1}{T^k(x)} - a_{k+1} = T^{k+1}(x) \end{aligned}$$

Está provada a afirmação. Mostraremos agora que, para todo $k \geq 1$, temos

$$|I_k| = \begin{cases} xq_k - p_k, & \text{se } k \text{ é par;} \\ p_k - xq_k, & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Já provamos isso para $k = 1, 2$.

Suponha indutivamente que a afirmação acima é verdadeira para $j < k$. Se k é par nós usaremos a propriedade (A) e a hipótes de indução,

$$\begin{aligned} |I_k| &= |I_{k-2}| - a_k|I_{k-1}| = \\ &= xq_{k-2} - p_{k-2} - a_k(p_{k-1} - xq_{k-1}) = \\ &= x(q_{k-2} + a_kq_{k-1}) - (p_{k-2} + a_kp_{k-1}) = xq_k - p_k. \end{aligned}$$

O que prova a afirmação quando k é par. Da mesma forma vale para k ímpar.

Obtemos assim

$$\begin{cases} x = \dfrac{p_k}{q_k} + \dfrac{|I_k|}{q_k}, & \text{se } k \text{ é par;} \\ x = \dfrac{p_k}{q_k} - \dfrac{|I_k|}{q_k}, & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

3.1.2 Unicidade da expansão em frações contínas(irracionais)

Veremos nesta seção que a expansão de números irracionais em fração contínua é única. Considere um número irracional $x \in (0,1)$ e suponha que $[a_1, ..., a_n, ...]$ é a expansão obtida usando a transformação de Gauss e que existe $[b_1, ..., b_n, ...]$ tal que

$$x = [a_1, ..., a_n, ...] = [b_1, ..., b_n, ...].$$

Afirmamos que neste caso $a_i = b_i$ para todo i e portanto as duas expansões são iguais. Escrevemos

$$r_1 = [a_2, ..., a_n, ...] \quad \text{e} \quad s_1 = [b_2, ..., b_n, ...]$$

$r_1, s_1 \in (0,1)$. Temos então $x = [a_1 + r_1] = [b_1 + s_1]$. Portanto,

$$a_1 + r_1 = b_1 + s_1, \quad a_1 - b_1 = s_1 - r_1.$$

Neste caso, $a_1 = b_1$. Pois caso contrário podemos supor sem perda de generalidade que $a_1 > b_1$ e daí $a_1 - b_1 \geq 1$. Assim, $s_1 - r_1 \geq 1$, absurdo. Por indução suponha que $a_k = b_k$ para todo $k \leq n-2$, defina

$$r_{n-1} = [a_n, ...] \quad \text{e} \quad s_{n-1} = [b_n, ...]$$

$r_{n-1}, s_{n-1} \in (0,1)$. Portanto

$$x = [a_1, a_2, ..., a_{n-1} + r_{n-1}] = [b_1, b_2, ..., b_{n-1} + s_{n-1}].$$

Da mesma forma, chegamos que $a_{n-1} = b_{n-1}$. Concluimos por indução que $a_i = b_i$ para todo i.

4 Convergentes e boas aproximações de irracionais

Teorema 4.1. *Seja x um número irracional e $\frac{p_k}{q_k}$ seu $k-$ésimo convergente. Então, para todo $k \geq 0$, se verifica*

$$\frac{1}{q_k(q_k+q_{k+1})} < \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

Demonstração.

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| = \left| \frac{p_k + T^k(x)p_{k-1}}{q_k + T^k(x)q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} \right| = \frac{T^k(x)}{q_k(q_k + T^k(x)q_{k-1})}.$$

Lembre-se que $a_{k+1} = \left\lfloor \frac{1}{T^k(x)} \right\rfloor$ e portanto

$$a_{k+1} \leq \frac{1}{T^k(x)} < a_{k+1} + 1.$$

Provaremos primeiro a desigualdade da direita.

$$\frac{T^k(x)}{q_k(q_k + T^k(x)q_{k-1})} \leq \frac{T^k(x)}{q_k^2} \leq \frac{1}{a_{k+1}q_k^2} \leq \frac{1}{q_{k+1}q_k}$$

Na última desigualdade usamos o fato de que

$$q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1} \Rightarrow q_{k+1} > a_{k+1}q_k$$

Vamos agora provar o lado esquerdo.

$$\frac{T^k(x)}{q_k(q_k + T^k(x)q_{k-1})} \geq \frac{T^k(x)}{q_k(q_k + q_{k-1})} \geq \frac{1}{q_k(a_{k+1}+1)(q_k + q_{k-1})}$$

$$= \frac{1}{q_k(a_{k+1}q_k + a_{k+1}q_{k-1} + q_k + q_{k-1})} = \frac{1}{q_k(q_{k+1} + a_k q_{k-1})} \geq \frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})}$$

que prova o teorema para $x \in (0,1)$ Se y é qualquer. Chame $a_0 = \lfloor y \rfloor$ e escreva $x = y - a_0$ que está em [0,1). E usando o que já fizemos para x segue o teorema. □

Teorema 4.2. *Para todos $p, q \in \mathbb{Z}$, com $0 < q < q_{n+1}$ temos*

$$|q_n x - p_n| \leq |qx - p|.$$

Além disso, se $0 < q < q_n$ a desigualdade acima é estrita.

Demonstração. Como $mdc(p_n, q_n) = 1$, temos que se $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ então $p = kp_n, q = kq_n$ e portanto,

$$|qx - p| = |k||q_n x - p_n| \geq |q_n x - p_n|.$$

Se for $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$, temos que

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{|pq_n - qp_n|}{qq_n} \geq \frac{1}{qq_n} > \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

já que $q < q_{n+1}$ portanto $\frac{p}{q}$ não pertence ao intervalo de extremos $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ pois $\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ e portanto

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \min\left\{\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right|, \left|\frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|\right\} \geq \frac{1}{qq_{n+1}}.$$

O que implica

$$|qx - p| \geq \frac{1}{q_{n+1}} \geq |q_n x - p_n| \tag{1}$$

□

Teorema 4.3. *Se $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$, então $\frac{p}{q}$ é uma reduzida da fração contínua de x.*

Demonstração. Como $\{q_n\}$ é ilimitada Então existe n tal que $q_n \leq q < q_{n+1}$. Suponha que $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$. Então

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{qq_{n+1}} \quad \text{por (1)}$$

e portanto $\frac{p}{q}$ está fora do intervalo de extremos $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. Daí, há duas possibilidades.

(a) se $q \geq \frac{q_{n+1}}{2}$ então $\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{qq_{n+1}} \geq \frac{1}{2q^2}$ absurdo.

(b) se $q < \frac{q_{n+1}}{2}$

$$\begin{aligned}\left|x - \frac{p}{q}\right| &\geq \left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| - \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \\ &\geq \frac{1}{qq_n} - \frac{1}{q_nq_{n+1}} = \frac{q_{n+1} - q}{qq_nq_{n+1}} \\ &> \frac{1}{2qq_n} \geq \frac{1}{2q^2}\end{aligned}$$

o que também é um absurdo.

$\square$

5 Números algébricos e a expansão em frações contínuas de e

Definição 5.1. *Um número x é algébrico de grau n se existe um polinômio $f(z)$ com coeficientes inteiros, de grau n tal que $f(x) = 0$. Se x não é algébrico, é dito ser transcedente.*

Não é díficil ver que o conjunto dos números algébricos é Enumerável. Portanto , não só existem números transcendentes como eles formam um conjunto não enumerável. No entanto, a primeira construção de números transcedentes é creditada a Liouville(Por volta de 1850)

5.1 Teorema de Liouville: aproximação de números algébricos

Teorema 5.2. *Seja x um número algébrico de grau n. Então existe uma constante $C = c(x) > 0$ tal que*

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| > \frac{C}{b^n}$$

para todos $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, tais que $x \neq \frac{a}{b}$.

Demonstração. Seja $f(y) = c_0 + c_1y + \cdots + c_ny^n$ o polinômio tal que x é raiz. Veja que como o conjunto das raizes é finito, podemos isolar cada uma delas. Daí, existe um $\delta > 0$ tal que o intervalo $I = [x - \delta, x + \delta]$ só tem o x como raiz de f.

Se $\frac{a}{b} \notin I$ então

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| > \delta \geq \frac{\delta}{b^n}.$$

Se for $\frac{a}{b} \in I$ então pelo T.V.M existe um z no intervalo de extremos x e $\frac{a}{b}$ tal que

$$\left|\frac{f(x) - f\left(\frac{a}{b}\right)}{x - \frac{a}{b}}\right| = |f'(z)|.$$

Ou seja,

$$\left|f\left(\frac{a}{b}\right)\right| = |f'(z)|\left|x-\frac{a}{b}\right| \leq M\left|x-\frac{a}{b}\right|.$$

Onde M é o máximo de f' em I. Por outro lado,

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = c_0 + c_1\frac{a}{b} + \cdots + c_n\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{K}{b^n}$$

Logo, como $|K| \geq 1$

$$\left|x-\frac{a}{b}\right| \geq \frac{M}{b^n}$$

Tome agora $C = \max\left\{\delta, \dfrac{1}{M+1}\right\}$ e o teorema está provado. $\square$

Definição 5.3. *(Número de Liouville) Um número real x é dito ser um número de Liouville se para todo n natural, existem inteiros a_n, b_n tais que*

$$\left|x-\frac{a_n}{b_n}\right| < \frac{1}{b_n^n}.$$

Pelo teorema de Lioville segue que todo número de Liouville é transcedente.

Exemplo 5.4. *$\alpha = \sum_{j=1}^{\infty}\dfrac{1}{10^{j!}}$ é um número de Liouville e portanto transcedente. De fato, tome $a_n = \sum_{j=1}^{n}\dfrac{1}{10^{j!-n!}}$ e $b_n = 10^{n!}$ daí,*

$$\begin{aligned}\left|\alpha-\frac{a_n}{b_n}\right| &= \left|\alpha-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{10^{j!}}\right|\\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{10^{j!}} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{10^{(n+j)!}} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{10^{-(n+1)!}}{10^{(n+j)!-(n+1)!}}\\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty}\frac{10^{-(n+1)!}}{10^{j}} = \frac{10}{9\cdot 10^{(n+1)!}} < \frac{1}{10^{(n+1)!-1}} \leq \frac{1}{10^{n!\cdot n}} = \frac{1}{b_n^n}.\end{aligned}$$

Isso prova que α é um número de Lioville e portanto transcedente.

Observação 5.5. *O conjunto dos números de Liouville tem medida nula, porém o próximo teorema que é devido a Erdös nos diz que Liouville + Lioville = Reta, que tem medida total.*

Teorema 5.6. *(Erdös) Todo número real pode ser escrito como soma de dois números de Liouville.*

Demonstração. Se $t \in \mathbb{Q}$ e ξ é um número de Liouville, então $\omega = t - \xi$ também é um número de Liouville. Portanto $t = \xi + \omega$. Para o caso onde $t \notin \mathbb{Q}$, podemos escrever $t = \lfloor t \rfloor + \{t\}$. t é Liouville se, e só se, $\{t\}$ é Liouville. Podemos supor então que $t \in (0,1)$. Escreva $t = \sum \dfrac{a_n}{2^n}$ onde $a_n = \{0,1\}$.

Defina

$$\xi = \sum \frac{\alpha_n}{2^n} \quad \text{e} \quad \omega = \sum \frac{\beta_n}{2^n}.$$

Onde para $n! < k < (n+1)!$, temos

$$\alpha_k = a_k \quad \text{e} \quad \beta_k = 0 \quad \text{se } n = 1, 3, 5, ...$$

$$\beta_k = a_k \quad \text{e} \quad \alpha_k = 0 \quad \text{se } n = 2, 4, 6, ...$$

Falta ver que ξ e ω são números de Liouville.

Veremos que ξ é Liouville (ω é análogo). Dado $n \geq 1$, seja $q_n = 2^{(2n)!-1}$ e $p_n = q_n(\alpha_1 2^{-1} + \cdots + \alpha_{(2n)!-1} 2^{-(2n)!+1})$. Assim,

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| = \sum_{m \geq (2n)!} \alpha_m 2^{-m} = \sum_{m \geq (2n+1)!} \alpha_m 2^{-m} \leq \sum_{m \geq (2n+1)!} 2^{-m} = 2^{-(2n+1)!+1} < 2^{-n[(2n)!-1]} = \frac{1}{q_n^n}.$$

Portanto ξ é um número de Liouville. $\square$

5.2 Expansão em frações contínuas de e

Veremos nesta seção que a expansão em frações contínuas do número e é dada por

$$[2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, ...].$$

Para isto, consideremos o número Θ cuja expansão em frações contínuas é

$$\Theta = [2; a_1, a_2, ..] \quad \text{onde} \quad \begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{3k-1} = 2k \\ a_{3k} = a_{3k+1} = 1. \end{cases}$$

Fixe $m \in \mathbb{Z}$. Considere os números

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^n (n+k)!}{k!(2n+2k)!} \left(\frac{1}{m} \right)^{2k+n}.$$

Veja que

$$\frac{2^n (n+k)!}{k!(2n+2k)!} \left(\frac{1}{m} \right)^{2k+n} \leq \frac{2^n}{k!} \left(\frac{1}{m} \right)^{2k} \quad \text{que é convergente,}$$

portanto os números ξ_n estão bem definidos.

Lembrando da expansão em série do taylor do e

$$\xi_0 = \frac{e^{1/m} + e^{-1/m}}{2}$$

e

$$\xi_1 = \frac{e^{1/m} - e^{-1/m}}{2}.$$

Lema 5.7. *Os números ξ_n satisfazem a recorrência*

$$\xi_n - m(2n+1)\xi_{n+1} = \xi_{n+2}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\xi_n - m(2n+1)\xi_{n+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^n(n+k)!}{k!(2n+2k)!}\left(\frac{1}{m}\right)^{2k+n} - m(2n+1)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n+1+k)!}{k!(2n+2+2k)!}\left(\frac{1}{m}\right)^{2k+n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{n+2}(n+1+k)!}{(k-1)!(2n+2+2k)!}\left(\frac{1}{m}\right)^{2k+n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{n+2}(n+2+k)!}{(k)!(2n+4+2k)!}\left(\frac{1}{m}\right)^{2k+n+2} \\
= \xi_{n+2}.
\end{aligned}$$

□

Seja agora $\delta_n = \dfrac{\xi_n}{\xi_{n+1}}$. Temos então

$$\delta_0 = \frac{\xi_0}{\xi_1} = \frac{e^{2/m}+1}{e^{2/m}-1}.$$

Por outro lado, do lema , temos

$$\delta_n = m(2n+1) + \frac{1}{\delta_{n+1}}.$$

Portanto, provamos que

$$\Psi_m = \frac{e^{2/m}+1}{e^{2/m}-1} = [m; 3m, 5m, 7m, ...].$$

Em particular, para $m = 2$, temos

$$\Psi_2 = \frac{e+1}{e-1} = [2; 6, 10, 14, ...]$$

Seja (P_k/Q_k) a sequência dos convergentes de

$$\frac{P_k}{Q_k} = \frac{2(2k+1)P_{k-1} + P_{k-2}}{2(2k+1)Q_{k-1} + Q_{k-2}}.$$

Temos o seguinte lema que relaciona Θ e Ψ_2

Lema 5.8. *Os convergentes* (P_k/Q_k) *de* Ψ_2 *e* (p_k/q_k) *de* Θ *verificam*

- $p_{3k+1} = 2(2k+1)p_{3(k-1)+1} + p_{3(k-2)+1}$*;*
- $q_{3k+1} = 2(2k+1)q_{3(k-1)+1} + q_{3(k-2)+1}$*;*
- $p_{3k+1} = P_k + Q_k \quad e \quad q_{3k+1} = P_k - Q_k$.

Demonstração. Daremos a prova apenas do primeiro item.

$$\begin{aligned} p_{3k+1} &= p_{3k} + p_{3k-1} = 2p_{3k-1} + p_{3k-2} \\ &= 2(2kp_{3k-2} + p_{3k-3}) + p_{3k-2} = ... \\ &= 2(2k+1)p_{3(k-1)+1} + p_{3(k-2)+1}. \end{aligned}$$

□

Assim,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{P_k + Q_k}{P_k - Q_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{p_{3k+1}}{q_{3k+1}} = \Theta.$$

Mas,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{P_k + Q_k}{P_k - Q_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{P_k}{Q_k} + 1}{\frac{P_k}{Q_k} - 1} =$$

$$= \frac{\Psi_2 + 1}{\Psi_2 - 1} = \frac{\frac{e+1}{e-1} + 1}{\frac{e+1}{e-1} - 1} = e.$$

Portanto

$$\Theta = e.$$

6 Propriedades ergódicas e topológicas da transformação de Gauss.

6.1 Propriedades topológicas e dinâmica da Transformação de Gauss.

Defina $I_k = \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$. Observe que

$$T^k(x) \in I_m \iff \frac{1}{m+1} \leq T^k(x) < \frac{1}{m} \iff m < \frac{1}{T^k(x)} \leq m+1 \iff \left\lfloor \frac{1}{T^(x)} \right\rfloor = m$$

Portanto,

$$a_k(x) = \left\lfloor \frac{1}{T^{k-1}(x)} \right\rfloor = m \iff T^{k-1}(x) \in I_m$$

Pela definição de T, temos que $T(I_k) = [0, 1)$ para todo $k \geq 1$. Além disso, a restrição de T ao intervalo I_k é injetora. Dados $k, j \in \mathbb{N}$, definimos $I_{k,j}$ como o subconjunto de I_k tal que

$$T(I_{k,j}) = I_j.$$

De maneira indutiva, para toda família de k naturais $i_1, \cdots, i_k$, podemos definir $I_{i_1,\cdots,i_k}$ satisfazendo

- $I_{i_1,\cdots,i_k} \subset I_{i_1,\cdots,i_{k-1}}$;
- $T(I_{i_1,\cdots,i_k}) = I_{i_2,\cdots,i_k}$;
- $T^{k-1}(I_{i_1,\cdots,i_k}) = I_{i_k}$(e logo $T^k(I_{i_1,\cdots,i_k}) = [0, 1)$.)

Proposição 6.1. *Dado $x \in (0, 1)$ seja $a_i(x) = a_i$ o i-ésimo quociente de x. Então*

$$I_{i_1,\ldots,i_n} = \{x \in (0, 1) : \quad i_1 = a_1, \ldots i_n = a_n\}$$

Demonstração. Faremos as duas inclusões por indução.

$\Rightarrow$) Para $n = 1$. Considere $x \in I_{i_1}$ Então $a_1 = i_1$. O que prova a inclusão para $n = 1$. Suponhamos agora que a proposição é verdadeira para todo $1 \leq k \leq n$. Consideramos $x \in I_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}} \subset I_{i_1,\ldots,i_n}$, assim $a_1 = i_1, \ldots, a_n = i_n$. Por outro lado,

$$T(x) \in T(I_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}}) = I_{i_2,\ldots,i_{n+1}}.$$

Portanto, pela hipótese de indução

$$a_1(T(x)) = i_2, \ldots, a_n(T(x)) = i_{n+1}.$$

Assim,

$$a_{n+1} = a_n(T(x)) = i_{n+1}.$$

Isso conclui a prova.

$\Leftarrow$) Se $n = 1$ a implicação é obviamente verdadeira. Supohamos então que vale para qualquer sequência de tamanho n. Tome x tal que

$$a_1(x) = i_1, \ldots a_{n+1}(x) = i_{n+1}.$$

Sabemos que

$$a_1(T(x)) = i_2, ...a_{n+1}(T(x)) = i_{n+1}.$$

Assim Por hipótese de indução se verifica que $T(x) \in I_{i_2,\ldots,i_{n+1}}$. Assim, $x \in I_{j,i_2,\ldots,i_{n+1}}$ para algum j. Na verdade $j = i_1$ o que prova a inclusão e a proposição. $\square$

6.2 Propriedades topológicas

Definição 6.2. *Um ponto x é dito ser periódico de periodo n se existe um menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$. No caso de $f(x) = x$, dizemos que é ponto fixo.*

Exemplo 6.3. *Vamos descrever os pontos periódicos da transformação de Gauss T.*

Se $n = 1$, Veja que $x = [0; a, a, a, \cdots]$ é ponto fixo de T, onde $a \in \mathbb{N}$. Além disso, se $x = [0; a_1, a_2, \cdots]$ for tal que $T(x) = x$ então

$$x = T(x) = [0; a_2, a_3, \cdots].$$

Daí, por unicidade da expansão,

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots$$

Portanto, todos os pontos periódicos de periodo 1 são os pontos $x = [0; a, a, a, \cdots]$ com $a \in \mathbb{N}$.

Se $n = 2$, Veja que se $x = [0; a, b, a, b, \cdots]$ então $T(x) = [0; b, a, b, a \cdots]$, e logo $T^2(x) = [0; a, b, a, b, \cdots]$ onde $a, b \in \mathbb{N}$. além disso, se $x = [0; a_1, a_2, \cdots]$ é tal que $T^2(x) = x$, então

$$x = T^2(x) = [0; a_3, a_4, a_5 \cdots]$$

Daí, por unicidade da expansão,

$$a_1 = a_3 = a_5 = \cdots$$

$$a_2 = a_4 = a_6 = \cdots$$

Portanto, todos os pontos periódicos de periodo 2 são os pontos $x = [0; a, b, a, b, \cdots]$ com $a, b \in \mathbb{N}$.

De modo geral, pode-se provar que os pontos periódicos de periodo n são os $x = [0; a_1, \cdots, a_n, a_1, \cdots, a_n, \cdots]$, com $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{N}$.

Definição 6.4. *Considere um espaço métrico ($\mathbb{X}$,d). Uma função $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ é*

- ***Topologicamente transitiva*** *se para todo par de conjuntos abertos não vazios U e V de $\mathbb{X}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

- ***Topologicamente misturadora*** *se para todo par de conjuntos abertos não vazios U e V de $\mathbb{X}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq k$.*

Proposição 6.5. *A transformação de Gauss T é topologicamente misturadora.*

Demonstração. Considere dois abertos U, V não vazios. Tome j grande de tal forma que $I_{i_1,\cdots,i_j,k} \subset U$. Daí, pelas propriedades dos $I_{i_1,\cdots,i_n}$ vale que

$$T^{j+1}(I_{i_1,\cdots,i_j,k}) = [0,1)$$

. Portanto, também vale que $T^{j+1}(U) = [0,1)$. Daí, para todo $m \geq j+1$

$$T^m(U) \cap V \neq \emptyset.$$

O que prova que T é topologicamente misturadora. □

Corolário 6.6. *Dado qualquer aberto U existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k(U) = [0,1)$.*

Proposição 6.7. *Os pontos periódicos da transformação de Gauss T formam um conjunto denso de $[0,1)$.*

Demonstração. Dado qualquer intervalo I. Tome um subintervalo $J = [a,b]$ de I $(0 < a < b < 1)$ tais que T^k é contínua em J e $T^k(J) = (0,1)$. Como T^k é contínua existe $x \in J \subset I$ tal que $T^k(x) = x$ (Pelo teorema do valor intermediário). Ou seja, Dado qualquer intervalo I, conseguimos achar um ponto periódico $x \in I$. Isso prova que os pontos periódicos de T formam um conjunto denso. □

Daremos uma outra prova da proposição da proposição 6.7 baseada no corolário 3.4.

Demonstração. Seja

$$x = [0; a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots]$$

E seja

$$X_n = [0; a_1, \cdots, a_n, a_1, a_2, \cdots, a_n, a_1, \cdots].$$

Pelo corolário 3.4 temos que

$$|x - X_n| = \frac{|\mu - \nu|}{(\mu q_n + q_{n-1})(\nu q_n + q_{n-1})}.$$

Onde $\mu = [a_{n+1}; a_{n+2}, ...]$ e, $\nu = [a_1; a_2, ...]$. Daí, como $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$ segue o resultado. □

6.3 A medida de Lebesgue

Vamos Enunciar e provar alguns resultados de teoria da medida que usaremos no capítulo.

Dado $\mathbb{X}$, dizemos que uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de $\mathbb{X}$ é uma álgebra se

- $\mathbb{X} \in \mathcal{F}$;
- Se $A \in \mathcal{F}$ então $\mathbb{X} - A \in \mathcal{F}$;
- Se $A, B \in \mathcal{F}$ então $A \cup B \in \mathcal{F}$.

uma álgebra $\mathcal{F}$ é dita ser uma $\sigma-$álgebra se

- Para toda família enumerável (A_i) de conjuntos de $\mathcal{F}$ tem-se $\bigcup A_i \in \mathcal{F}$.

Exemplo 6.8. *Dois exemplos triviais de $\sigma-$álgebra*

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\mathbb{X}).$$

$$\mathcal{F}_2 = \{\mathbb{X}, \emptyset\}.$$

Uma forma padrão e importante de se obter $\sigma-$álgebras é atráves das chamadas $\sigma-$álgebras geradas.

Definição 6.9. *Considere uma família $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\mathbb{X}$. a $\sigma-$álgebra gerada por $\mathcal{A}$ é a interseção de todas as $\sigma-$álgebras que contém $\mathcal{A}$.*

Exemplo 6.10. *Seja $\mathbb{X} = [0,1]$ e $\mathcal{I}$ o conjunto dos intervalos abertos de $\mathbb{X}$. a $\sigma-$álgebra gerada por $\mathcal{I}$ é chamada de σ-álgebra de Borel. Denotada por $\mathcal{B}$. Os elementos de $\mathcal{B}$ são chamados de borelianos.*

Definição 6.11. *Considere um par $(\mathbb{X}, \mathcal{F})$ $\mathcal{F}$ é uma $\sigma-$álgebra definida em $\mathbb{X}$. Uma medida μ definida em $(\mathbb{X}, \mathcal{F})$ é uma função*

$$\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$$

que verifica

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ *para toda família enumerável de conjuntos dois a dois disjuntos. Esta propriedade é denominada de $\sigma-$aditividade. Diremos então que $(\mathbb{X}, \mathcal{F}, \mu)$ é um espaço de medida.*

Se $\mu(\mathbb{X}) < \infty$ diremos que μ é finita. Se $\mu(\mathbb{X}) = 1$ diremos então que $(\mathbb{X}, \mathcal{F}, \mu)$ é um espaço de probabilidade.

Uma propriedade $\mathcal{P}$ vale em $\mu-$quase toda parte ($\mu-$q.t.p) se existe um conjunto Z com $\mu(Z) = 0$ tal que $\mathcal{P}$ vale fora de Z.

Podemos definir uma medida λ nos intervalos (a, b) como sendo

$$\lambda[(a, b)] = b - a.$$

Gostaríamos de estender essa função pra todos os borelianos. Observe que podemos definir uma álgebra $\mathcal{B}_I$ em $[0, 1]$ da seguinte forma: um conjunto I está em $\mathcal{B}_I$ se, e somente se, I é união finita de intervalos abertos dois a dois disjuntos. A extensão da medida λ a todos os borelianos é dada pelo seguinte clássico teorema:

Teorema 6.12. ***(Extensão de Caretheodory)*** *Considere um conjunto $\mathbb{X}$, uma álgebra $\mathcal{F}_0$ definida em $\mathbb{X}$ e uma função finitamente aditiva*

$$\mu_0 : \mathcal{F}_0 \to [0, \infty].$$

Seja $\mathcal{F}$ a σ-álgebra gerada em $\mathbb{X}$ por $\mathcal{F}_0$. Então existe uma única medida $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ que estende μ_0. Ou seja, $\mu(A) = \mu_0(A)$ para todo $A \in F_0$ Uma prova desse teorema pode ser encontrada em [2].

A medida que estende λ dos intervalos de $[0, 1]$ é a nossa *medida de Lebesgue.*

Exemplo 6.13. *Seja $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua e positiva. Definimos*

$$\lambda_\phi([a, b]) = \int_a^b \phi(x)dx.$$

E usando o teorema anterior podemos estender λ_ϕ para todos os borelianos.

Definição 6.14. *Considere dois espaços mensuráveis $(\mathbb{X}, \mathcal{F})$ e $(\mathbb{Y}, \mathcal{G})$. Uma função $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ é mensurável se para todo $G \in \mathcal{G}$ tem-se $f^{-1}(G) \in \mathcal{F}$.*

Definição 6.15. *Dado $(\mathbb{X}, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de probabilidade. Dizemos que $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ preserva μ ou μ é f-invariante se $\forall A \in \mathcal{F}$ $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$.*

Definição 6.16. *Dizemos que uma família $\mathcal{C}$ de subconjuntos de $\mathbb{X}$ é uma Classe monótona se $\mathcal{C}$ contém $\mathbb{X}$ e é fechada para uniões e interseções enumeráveis e monótonas, ou seja,*

- *Se $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ estão em $\mathcal{C}$, então $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{C}$;*
- *$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ estão em $\mathcal{C}$ então $\bigcap_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{C}$.*

Se $\{C_i\}_{i\in I}$ são classes monótonas , então $\bigcap_{i\in I} C_i$ é uma classe monótona. Podemos portanto considerar a menor classe monótona que contém um um conjunto dado.

Teorema 6.17. *(Classes monótonas) A menor classe monótona que contém uma álgebra $\mathcal{F}_0$ coincide com a σ-álgebra gerada por $\mathcal{F}_0$.*

Esse teorema pode ser encontrado em [3]. Usaremos o teorema das Classes monótonas para provar a proposição abaixo que permite concluir que para uma medida ser invariante por uma transformação é suficiente que isso seja verdade em uma álgebra. Entretanto antes vamo enunciar um fato muito útil e que usaremos a seguir.

Lema 6.18. *Seja μ uma medida definida em $\mathcal{F}$ então*

- *Se $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ estão em $\mathcal{F}$, então*

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \lim \mu(A_n)$$

- *$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ estão em $\mathcal{F}$ e $\mu(A_1) < \infty$ então*

$$\mu\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \lim \mu(A_n)$$

Uma prova desse lema pode ser encontrada em [2].

Proposição 6.19. *Seja $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ uma transformação mensurável e μ uma medida finita em $\mathbb{X}$. Suponha que exista uma álgebra $\mathcal{F}_0$ de subconjuntos de $\mathbb{X}$ tal que $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{F}_0$. Então o mesmo vale para todo A na σ-álgebra $\mathcal{F}$ gerada por $\mathcal{F}_0$. Isto é, μ é f-invariante.*

Demonstração. $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{F} : \mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)\}$ é uma classe monótona.

De fato, Seja $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ uma sequência de elementos em $\mathcal{C}$ e seja $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$. precisamos provar que $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$. Ora, pelo lema anterior, temos que

$$\mu(A) = \lim \mu(A_n) \quad \text{e} \quad \mu(f^{-1}(A)) = \lim \mu(f^{-1}(A_n))$$

e como $A_i \in \mathcal{C}$, então

$$\mu(A) = \lim \mu(A_n) = \lim \mu(f^{-1}(A_n)) = \mu(f^{-1}(A))$$

De maneira totalmente análoga se mostra pra interseção. Isto prova portanto que $\mathcal{C}$ é uma classe monótona. E como, por hipótese, $\mathcal{C} \supset \mathcal{F}_0$ então pelo teorema das classes monótonas, $\mathcal{C} = \mathcal{F}_0$. $\square$

6.4 Ergodicidade e o Teorema Ergódico de Birkhoff

Consideremos um espaço de probabilidade $(\mathbb{X}, \nu, \mathcal{F})$ e uma transformação $G : \mathbb{X} \to X$ que preserva medida. Uma pergunta natural em teoria ergódica é a de determinar com que frequências órbitas de pontos visitam um conjunto. De forma mais precisa, dado B mensurável e um ponto $x \in \mathbb{X}$, queremos determinar com que frequência a órbita de x por G visita o conjunto B, isto é, queremos calcular

$$\mathcal{B}_n(x) = \frac{\#\{0 \leq i \leq n-1 : G^i(x) \in B\}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{I}_B \circ G^i(x).$$

O teorema ergódico de Birkhoff que provaremos mais pra frente nos traz algumas consequências sobre o limite assintótico de $\mathcal{B}_n$ e no caso da medida ser *ergódica* temos

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{B}_n(x) = \nu(B), \quad \text{para } \nu\text{-quase todo ponto } x \in \mathbb{X}.$$

Definição 6.20. . *Dizemos que B é G-invariante se*

$$\mu(B \triangle G^{-1}(B)) = 0$$

Definição 6.21. *Considere um espaço de probabilidade $(\mathbb{X}, \nu, \mathcal{F})$ e uma função mensurável $G : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ tal que ν é G-invariante. Dizemos que a medida ν é ergódica para G(ou que o sistema (G, ν) é ergódico) se para todo subconjunto G-invariante $B \in \mathcal{F}$ tem-se $\nu(B) = 0$ ou $\nu(B) = 1$.*

Enunciaremos sem prova o próximo teorema, porém uma prova pode ser encontrado em [1] ou em [3].

Teorema 6.22. ***(Teorema Ergódico de Birkhoff)*** *Considere um espaço de probabilidade $(\mathbb{X}, \nu, \mathcal{F})$ e uma transformação $G : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ que preserva a medida ν. Então para qualquer função $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{X}, \nu)$, existe uma função mensurável $g_f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{X}, \nu)$ e G-invariante que verifica as seguintes propriedades:*

- *para ν-quase todo $x \in \mathbb{X}$ se verifica*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f \circ G^i(x) = g_f(x);$$

- $\int_{\mathbb{X}} f d\nu = \int_X g_f d\nu$;

- *Além disso, se a medida ν é ergódica(com respeito a G) então g_f é constante ν-q.t.p, em particular*

$$g_f(x) = \int_{\mathbb{X}} f d\nu.$$

6.4.1 A medida de Gauss

Definição 6.23. *A medida de Gauss μ é de um intervalo $(a,b) \subset [0,1)$ é definida como*

$$\mu(a,b) = \frac{1}{\log 2}\int_a^b \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{\log 2}\log\left(\frac{1+b}{1+a}\right).$$

A medida de Gauss é T-invariante e ergódica. Porém a medida de Lebesgue não é invariante para a transformação de Gauss T. Entretanto podemos relacionar a medidade Lebesgue com a medida de Gauss da seguinte forma.

$$\frac{1}{2\log 2} < \frac{1}{\log 2(1+x)} < \frac{1}{\log 2}.$$

Portanto, para qualquer mensurável $A \subset [0,1)$

$$\int_A \frac{1}{2\log 2}dx < \int_A \frac{1}{\log 2(1+x)}dx < \int_A \frac{1}{\log 2}dx.$$

Ou seja,

$$\frac{1}{2\log 2}\lambda(A) < \mu(A) < \frac{1}{\log 2}\lambda(A).$$

Proposição 6.24. *A medida de Gauss μ é T-invariante.*

Demonstração. É suficiente provar pra intervalos. Pois estes geram a σ-álgebra de Borel e portanto podemos usar a proposição 8.11 e concluir que vale para qualquer mensurável.

Em primeiro lugar, veja que

$$x \in I_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = n.$$

Portanto, qualquer $x \in I_n$ pode ser escrito da forma $x = \dfrac{1}{n+\alpha}$ com $\alpha \in (0,1)$. Daí,

$$T(x) = T\left(\frac{1}{n+\alpha}\right) = n + \alpha - \lfloor n+\alpha \rfloor = \alpha$$

a pré imagem de (a,b) em I_n é $\left(\dfrac{1}{n+b}, \dfrac{1}{n+a}\right)$ e como cada intervalo (a,b) tem uma pré imagem em cada intervalo I_n, temos que

$$T^{-1}((a,b)) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+b}, \frac{1}{n+a}\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mu(T^{-1}((a,b))) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+b},\frac{1}{n+a}\right)\right)= \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\left(\frac{1}{n+b},\frac{1}{n+a}\right)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log 2}\log\left(\frac{1+\dfrac{1}{n+a}}{1+\dfrac{1}{n+b}}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log 2}\log\left(\frac{n+a+1}{n+a}\frac{n+b}{n+b+1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n+a+1)-\log(n+a)+\log(n+b)-\log(n+b+1))}{\log 2}.
\end{aligned}$$

Essa é uma série telescópica, e portanto aquela soma é igual a

$$\frac{1}{\log 2}\log\left(\frac{1+b}{1+a}\right)=\mu((a,b)).$$

Provamos então que

$$\mu(T^{-1}((a,b)))=\mu((a,b)).$$

O que conclui a proposição . □

6.5 Consequências da Ergodicidade

Com a ergodicidade da Transformação de Gauss podemos usar o Teorema de Birkhof para obter algumas propriedades sobre a distribuição dos dígitos na expansão em frações contínuas de quase todo número do intervalo $[0,1)$

Proposição 6.25. *Para quase todo $x\in[0,1)$, a frequência com que aparece um número $k\in\mathbb{N}$ na expansão em frações contínuas $[a_1(x),a_2(x),\cdots]$ de x verfica*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\#\{i\in[1,n];a_i(x)=k\}}{n}=\frac{\log\left(1+\dfrac{1}{k(k+2)}\right)}{\log 2}=\mu(I_k)$$

Demonstração. Considere a função característica $\mathbb{I}_{I_k}(x)$ onde $I_k=\left[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right)$ Como $a_n(x)=\left\lfloor\frac{1}{T^{n-1}(x)}\right\rfloor$, temos que

$$a_n(x)=k \iff T^{n-1}(x)\in I_k \iff \mathbb{I}_{I_k}(T^{n-1)(x)}=1$$

portanto,

$$\frac{\#\{i \in [1,n]; a_i(x) = k\}}{n} = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{I}_{I_k}(T^{n-1}(x))$$

Ora, T é ergódica com respeito à medida de Gauss μ e $\mathbb{I}_{I_k}$ é integrável. Então pelo teorema de Birkhoff, para μ-quase todo ponto $x \in [0,1)$ se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \mathbb{I}_{I_k}(T^{n-1}(x)) = \int_0^1 \mathbb{I}_{I_k}(x) d\mu = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right)}{\log 2} = \mu(I_k)$$

Portanto fica provada a proposição. □

Na proposição seguinte enunciamos algumas propriedades assintóticas sobre os dígitos da expansão em frações contínuas de quase todo ponto do intervalo $[0,1)$

Proposição 6.26. *Para quase todo $x \in [0,1)$:*

(I)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1(x) + \cdots + a_n(x)}{n} = \infty$$

(II)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1(x) \cdots a_n(x)} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right)^{\frac{\log k}{\log 2}}$$

(III)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(q_n(x))}{n} = \frac{-\pi^2}{12 \log 2}$$

(IV)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left| x - \frac{p_n(x)}{q_n(x} \right| = \frac{-\pi^2}{6 \log 2}$$

Demonstração. A ideia da prova é encontrar, em cada caso, uma função integrável que descreva a distribuição dos dígitos e aplicar o teorema de Birkhoff.

(I) Consideremos a função

$$f(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = a_1(x)$$

Como $a_i(x) = a_1(T^{i-1}(x))$ então

$$\frac{a_1(x) + \cdots + a_n(x)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$$

Porém, $f \notin L^1([0,1),\mu)$ e portanto não podemos aplicar birkhoff diretamente. Ora,

$$1 > T(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \Rightarrow f(x) > \frac{1-x}{x}$$

Donde,

$$\int_0^1 f d\mu = \frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx \geq \frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{1-x}{x(1+x)}dx = \infty.$$

Para isso, iremos truncar a função f. (Isso é um artifício muito usado em teoria da medida). Defina, para cada $N > 0$ a função

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad f(x) \leq N \\ 0 & \text{se} \quad f(x) > N \end{cases}$$

f_N é integrável pois é limitada e tem um número finito de descontinuidade. Em cada f_N usamos o teorema de Birkhoff. Assim,

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) &\geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f_N(T^i(x)) \\ &= \lim n \to \infty \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f_N(T^i(x)) \\ &= \int_0^1 f_N d\mu = \frac{1}{\log 2}\int_0^1 \frac{f_N(x)}{1+x}dx. \end{aligned}$$

Portanto , para quase todo $x \in [0,1)$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(x) + \cdots + a_n(x)}{n} = \infty$$

(II) Em primeiro lugar, observamos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1(x)\cdots a_n(x)} &= \lim_{n\to\infty} \exp[\log(\sqrt[n]{a_1(x)\cdots a_n(x)})] = \\ &= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(a_i(x))\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \log(a_1(T^i(x))\right) \end{aligned}$$

e daí, gostaríamos de aplicar Birkhoff a função $g(x) = \log(a_1(x))$.

$g \in L^1([0,1),\mu)$. De fato,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g d\mu &= \int_{\cup_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right)} g d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} g d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \log k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log k}{\log 2}\log\left(\frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k+1}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log k}{\log 2}\log\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log k}{\log 2}\log\left(1+\frac{1}{k^2}\right)
\end{aligned}$$

Como, $\log x \leq x-1$ então $\log\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \leq \dfrac{1}{k^2}$ e basta ver que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log k}{k^2}$$

é convergente. O que é verdade usando o teste da integral.

Podemos então aplicar o teorema de Birkhoff à função g. Obtendo para quase todo $x \in [0,1)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} g(T^i(x)) = \int_0^1 g d\mu$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g d\mu &= \int_{\cup_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right)} g d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} g d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \log k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log k}{\log 2}\log\left(\frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k+1}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log k}{\log 2}\log\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\log\left(\left(1+\frac{1}{k(k+2}\right)^{\frac{\log k}{\log 2}}\right)
\end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1(x)\cdots a_n(x)} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)^{\frac{\log k}{\log 2}}$$

(III) Em primeiro lugar , observe que

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

De fato,

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{6} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n)^2}\right)+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+\frac{\pi^2}{12}\end{aligned}$$

e daí segue que

$$\frac{\pi^2}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

Provamos no ítem (B III) que $p_n(x) = q_{n-1}(T(x))$, obtemos, então

$$\frac{1}{q_n(x)}=\frac{1}{q_n(x)}\frac{p_n(x)}{q_{n-1}(T(x)}\frac{p_{n-1}(T(x))}{q_{n-2}(T^2(x))}\cdots\frac{p_2(T^{n-2}(x))}{q_1(T_{n-1}(x))}\frac{p_1(T^{n-1}(x))}{q_0(T^n(x))}$$

Reagrupando os termos,aplicando logaritmos e dividindo por n , obtemos

$$-\frac{1}{n}\log(q_n(x))=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(\frac{p_{n-k}(T^k(x))}{q_{n-k}(T^k(x)}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log(T^k(x))+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\log\left(\frac{p_{n-k}(T^k(x))}{q_{n-k}(T^k(x)}\right)-T^k(x)\right)$$

Portanto , basta provar que

Lema 6.27. *Para quase todo $x \in [0, 1)$,*

- $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log(T^k(x))=\frac{-\pi^2}{12\log 2}$
- $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\log\left(\frac{p_{n-k}(T^k(x))}{q_{n-k}(T^k(x)}\right)-T^k(x)\right)=0$

Demonstração. A primeira afirmação segue do teorema de Birkhoff. Para quase todo $x \in [0, 1)$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log(T^k(x)) &= \int_0^1 \log x\,d\mu=\frac{1}{\log 2}\int_0^1\frac{\log x}{1+x}dx\\ &= \frac{1}{\log 2}\log(x)\log(x+1)\Big|_0^1-\frac{1}{\log 2}\int_0^1\frac{\log(x+1)}{x}dx\\ &= \frac{-1}{\log 2}\int_0^1\frac{\log(1+x)}{x}dx\end{aligned}$$

Pois,

$$\begin{aligned}
\log(x)\log(x+1)\Big|_0^1 &= -\lim_{x\to 0}\log(x)\log(x+1) = -\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{\dfrac{1}{\log x}}\\
&= -\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{-1}{(\log x)^2}\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{x(\log x)^2}{x+1} = \lim_{x\to 0}x(\log x)^2\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(\log x)^2}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2\log x}{x}}{\dfrac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}-2x\log x\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-2\log x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-2}{x}}{\dfrac{-1}{x^2}} = 0
\end{aligned}$$

A expansão em série de $\log(1+x)$ é dada por

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log(T^k(x)) &= \frac{-1}{\log 2}\int_0^1 \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right) =\\
&= \frac{-1}{\log 2}\int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \cdots\right)\\
&= \frac{-1}{\log 2}\left[x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \cdots\right]_0^1\\
&= \frac{-1}{\log 2}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots\right) = \frac{-1}{\log 2}\frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

Para o segundo ítem , lembre-se que para n par, temos que

$$I_{i_1,\cdots,i_n} = \left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\right)$$

Assim, pelo Teorema do valor médio, dado $x \in I_{i_1,\cdots,i_n}$, temos que

$$0 < \frac{\log x - \log\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)}{x - \dfrac{p_n}{q_n}} = \frac{1}{\gamma}, \quad \text{onde} \quad \gamma \in \left(\frac{p_n}{q_n}, x\right)$$

como $\dfrac{p_n}{q_n} < \gamma < x < \dfrac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}$,
podemos usar a propriedade (B II) para obter

$$\begin{aligned} 0 &< \log x - \log\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \frac{1}{\gamma}\left(x - \frac{p_n}{q_n}\right) < \frac{1}{\gamma}\left(\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}\right) \\ &< \frac{q_n}{p_n}\left(\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}\right) = \frac{1}{p_n(q_n + q_{n-1})} < \frac{1}{q_n}. \end{aligned}$$

Para n ímpar,

$$I_{i_1,\cdots,i_n} = \left(\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}\right].$$

De maneira totalmente análoga, obtemos que

$$0 > \log x - \log\left(\frac{p_n}{q_n}\right) > \frac{-1}{q_n}.$$

Portanto,

$$\left|\log x - \log\left(\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right)\right| < \frac{1}{q_n}.$$

Como, $T^k(x) \in I_{i_1,\cdots,i_{n-k}}$, a mesma prova fornece

$$\left|\log(T^k(x) - \log\left(\frac{p_n(T^k(x))}{q_n(T^k(x))}\right)\right| < \frac{1}{q_{n-k}(T^k(x))} < \frac{1}{2^{(n-1)/2}}.$$

Onde na última desigualdade nós usamos a propriedade (C). E daí,

$$\left|\log(T^k(x) - \log\left(\frac{p_n(T^k(x))}{q_n(T^k(x))}\right)\right| \to 0$$

O que acaba a prova do ítem III $\square$

(IV) Note que Pelo teorema 4.1, temos que

$$\frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})} < \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

Como $q_{n+1} \geq q_n$, temos

$$2q_n q_{n+1} \geq q_n(q_n + q_{n+1})$$

Logo,

$$\frac{1}{2q_n q_{n+1}} < \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

Tomando logaritmos, e dividindo por n obtemos

$$-\frac{1}{n}\log 2-\frac{1}{n}\log(q_n)-\frac{1}{n}\log q_{n+1}<\frac{1}{n}\log\left(\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|\right)$$
$$\leq -\frac{1}{n}\log q_n-\frac{1}{n}\log q_{n+1}$$

Pelo ítem III, tmos que para quase todo $x\in[0,1)$ vale

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log q_n(x)=\frac{pi^2}{12\log 2}$$

Concluimos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left|x-\frac{p_n(x)}{q_n(x}\right|=\frac{-\pi^2}{6\log 2}$$

$\square$

Referências

[1] Lorenzo J. Díaz, Danielle de Rezende Jorge, *Uma introdução aos Sistemas Dinâmicos via Frações Contínuas*. 26º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA , 2007.

[2] R. G, Bartle, *A modern theory of integration*, Graduate Studies in Mathematics: AMS, 2001.

[3] Marcelo Viana, Krerley Oliveira, *Fundamentos da Teoria Ergódica*, 2.ed. SBM, 2019.

[4] Carlos Gustavo Moreira, Fabio Brochero, Nicolau Saldanha, Eduardo Tengan, *Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*, 4.ed. IMPA, 2015.

[5] Paul Erdös, *Representations of real numbers as sums and products of Liouvilee numbers*, Michigan Math, 1962.