



Trabalho de Conclusão de Curso

Controlador RST Auto-Regulável: Análise e Estudo de Casos

de Tarcísio Lima Ferreira

orientado por

Prof. Dr. Ícaro Bezerra Queiroz de Araújo

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Computação
Maceió, Alagoas
18 de Junho de 2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
Instituto de Computação

CONTROLADOR RST AUTO-REGULÁVEL: ANÁLISE E ESTUDO DE CASOS

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Instituto de Computação da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para a obtenção do grau de Engenheiro de Computação.

Tarcísio Lima Ferreira

Orientador: Prof. Dr. Ícaro Bezerra Queiroz de Araújo

Banca Avaliadora:

Davi Bibiano Brito Prof. Dr., IC-UFAL
Glauber Rodrigues Leite Prof. UMJ

Maceió, Alagoas
18 de Junho de 2021

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 - 1767

F383c Ferreira, Tarcísio Lima.
Controlador RST auto-ajustável : análise e estudo de casos /
Tarcísio Lima Ferreira. – 2021.
76 f. : il.

Orientador: Ícaro Bezerra Queiroz de Araújo.
Monografia (Trabalho de conclusão de curso em Engenharia de
Computação) - Universidade Federal de Alagoas, Instituto de Computação.
Maceió, 2021.

Bibliografia: f. 74-76.

1. *Reference Signal Tracking*. 2. Sistemas de controle digital. 3.
Identificação de sistemas. 4. *Single Input Single Output*. I. Título.

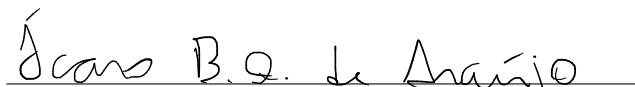
CDU: 004.41


UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
Instituto de Computação


CONTROLADOR RST AUTO-REGULÁVEL: ANÁLISE E ESTUDO DE CASOS

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Instituto de Computação da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para a obtenção do grau de Engenheiro de Computação.

Aprovado em 18 de Junho de 2021:


Ícaro Bezerra Queiroz de Araújo,
Prof. Dr., Orientador


Davi Bibiano Brito,
Prof. Dr., IC-UFAL


Glauber Rodrigues Leite,
Prof. UMJ

Dedicatória

À minha mãe, Josefa pelo carinho, amor e ensinamentos.

Ao meu pai, Romualdo pela dedicação em criar os filhos da melhor maneira possível.

À minha avó Maria (*in memoriam*), que sempre incentivou a todos da família a estudar.

Ao meu irmão, Thiago, e à minha irmã, Thainá, pelo carinho e respeito.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por iluminar toda a minha jornada e me conceder força nos momentos difíceis.

Minha família, que sempre me incentivou durante os estudos. Aos meus pais, pela paciência e compreensão durante o período da graduação.

Ao meu irmãos também pela paciência durante toda a jornada da graduação.

À minha namorada, Heloyza, pelo apoio, carinho e compreensão.

Ao meu orientador o Professor Dr. Ícaro, que sempre se mostrou disposto e interessado em me direcionar para o caminho certo. Agradecer também pela paciência e motivação durante as suas aulas e na elaboração desse trabalho.

Aos meus colegas de laboratório que sempre me ajudaram nos momentos de dúvidas.

E a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para a conclusão desse curso.

Resumo

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um controlador digital RST para entradas dos tipos: degrau, rampa e senoide, combinado com o estimador dos mínimos quadrados recursivos (MQR) para obtenção dos parâmetros do controlador a partir dos parâmetros identificados da planta. O controlador foi aplicado em 2 sistemas simulados, um sistema exemplo e um sistema real. Durante as simulações, foram utilizados índices de desempenho de controladores comumente utilizados na literatura para avaliar os controladores. Os resultados mostram que a estratégia implementada neste trabalho obteve sucesso em controlar os sistemas, mesmo na presença de perturbações e ruídos. Também é demonstrado que o controlador tem resultados satisfatórios em controlar a planta mesmo recebendo uma entrada de referência diferente da qual ele foi projetado.

***Palavras-chave:* RST auto ajustável; Controle Digital; Identificação de Sistemas; Sistemas SISO; Seguidor de referência.**

Abstract

This work describes the development of a digital controller RST for inputs: step, ramp and sinusoid, combined with least square error estimator (MQR) system identification algorithm to obtain the system model. The controller was applied in two simulated systems, an example system and a real system. Based on the system model, the controller parameters were calculated. During the system simulations, the performance indexes of the developed controller were evaluated. The results show that the self-tuning RST controller was successful in controlling the systems even in the presence of disturbance. It has also been demonstrated that the controller has satisfactory results in controlling the plant even though it receives a different reference input than the one it was designed for.

Keywords: Auto-Tuning RST; Digital Control; System Identification; SISO System; Reference Tracking.

Lista de Figuras

2.1	Estrutura Canônica do Controlador Digital R-S-T [Landau, 1998].	16
2.2	Trajectoria Deseja $y^*(t)$ [Landau and Zito, 2006]	18
2.3	Alocação de polos - rastreamento e regulação [Landau and Zito, 2006]	19
3.1	Polos e Zeros em tempo contínuo - Sistema 2 ^a Ordem	26
3.2	Polos e Zeros em tempo discreto - Sistema 2 ^a Ordem	27
3.3	<i>Sistema Massa-Mola-Amortecedor.</i>	28
3.4	<i>Diagrama de Corpo Livre das Massas.</i>	29
3.5	Polos e Zeros em tempo contínuo - Sistema 2 ^a Ordem	29
3.6	Polos e Zeros em tempo discreto - Sistema 2 ^a Ordem	30
4.1	Resposta ao degrau - Sistema 2 ^a Ordem	31
4.2	Resposta ao degrau - Sistema 2 ^a Ordem	32
4.3	Resposta ao degrau malha aberta - Sistema Massa Mola Amortecedor	32
4.4	Resposta ao degrau malha fechada - Sistema Massa Mola Amortecedor	33
4.5	Sistema simulado com controlador	34
4.6	Bloco de Entrada	34
4.7	Bloco do Controlador	35
4.8	Bloco do MQR	35
4.9	Bloco da Performance do Sistema	36
4.10	Bloco da Auto-Regulação do Controlador	37
5.1	Sinal de Perturbação	39
5.2	Saída x Sinal de Referência Entrada Degrau Controle Degrau	39
5.3	Sinal de Controle para Sinal de Referência Degrau Controle Degrau	40
5.4	Saída x Sinal de Referência Entrada Rampa Controle Degrau	40
5.5	Sinal de Controle para Sinal de Referência Rampa Controle Degrau	41
5.6	Saída x Sinal de Referência Entrada Rampa Controle Degrau primeiros 10 segundos	41
5.7	Sinal de Controle para Sinal de Referência Rampa Controle Degrau primeiros 10 segundos	42

5.8 Sinal de Controle para Sinal de Referência Rampa Controle Degrau no instante de perturbação	42
5.9 Sinal de Controle Entrada Rampa Controle Degrau no instante de perturbação	43
5.10 Saída x Sinal de Referência Entrada Senoide Controle Degrau	43
5.11 Sinal de Controle para Sinal de Referência Senoide Controle Degrau	44
5.12 Saída x Sinal de Referência Entrada Senoide Controle Degrau nos primeiros 10 segundos	44
5.13 Sinal de Controle Entrada Senoide Controle Degrau primeiros 10 segundos	45
5.14 Saída x Sinal de Referência Entrada Senoide Controle Degrau no instante de perturbação	45
5.15 Sinal de Controle Entrada Senoide Controle Degrau no instante de perturbação	46
5.16 Saída x Sinal de Referência Entrada Degrau Controle Rampa	46
5.17 Sinal de Controle para Sinal de Referência degrau Controle Rampa	47
5.18 Saída x Sinal de Referência Entrada Rampa Controle Rampa	47
5.19 Sinal de Controle para Sinal de Referência Rampa Controle Rampa	48
5.20 Saída x Sinal de Referência Entrada Rampa Controle Rampa nos primeiros 10 segundos	48
5.21 Sinal de Controle Entrada Rampa Controle Rampa nos primeiros 10 segundos	49
5.22 Saída x Sinal de Referência Entrada Rampa Controle Rampa no instante de perturbação	49
5.23 Sinal de Controle para Entrada Rampa Controle Rampa no instante de perturbação	50
5.24 Saída x Sinal de Referência Entrada Senoide Controle Rampa	50
5.25 Sinal de Controle para Sinal de Referência Senoide Controle Rampa	51
5.26 Saída x Sinal de Referência Entrada Senoide Controle Rampa nos primeiros 10 segundos	51
5.27 Sinal de Controle Entrada Senoide Controle Rampa nos primeiros 10 segundos	52
5.28 Saída x Sinal de Referência Entrada Senoide Controle Rampa no instante de perturbação	52
5.29 Sinal de Controle Entrada Senoide Controle Rampa no instante de perturbação	53
5.30 Saída x Sinal de Referência Entrada Degrau Controle Senoide	53
5.31 Sinal de Controle Sinal de Referência Entrada Degrau Controle Senoide	54
5.32 Saída x Sinal de Referência Entrada Rampa Controle Senoide	54
5.33 Sinal de Controle Sinal de Referência Entrada Rampa Controle Senoide	55
5.34 Saída x Sinal de Referência Entrada Rampa Controle Senoide nos primeiros 10 segundos	55

5.35 Sinal de Controle Entrada Rampa Controle Senoide nos primeiros 10 segundos	56
5.36 Saída x Sinal de Referência Entrada Rampa Controle Senoide no instante da perturbação	56
5.37 Sinal de Controle Entrada Rampa Controle Senoide no instante da perturbação	57
5.38 Saída x Sinal de Referência Entrada Senoide Controle Senoide	57
5.39 Sinal de Controle Sinal de Referência Entrada Senoide Controle Senoide	58
5.40 Saída x Sinal de Referência Entrada Senoide Controle Senoide nos primeiros 10 segundos	58
5.41 Sinal de Controle Entrada Senoide Controle Senoide nos primeiros 10 segundos	59
5.42 Saída x Sinal de Referência Entrada Senoide Controle Senoide no instante da perturbação	59
5.43 Sinal de Controle Entrada Senoide Controle Senoide no instante da perturbação	60
5.44 Sinal de Perturbação.	62
5.45 Saída x Sinal de Referência Entrada Degrau Controle Degrau Sistema Massa Mola Amortecedor	63
5.46 Sinal de Controle Sinal de Referência Entrada Degrau Controle Degrau Sistema Massa Mola Amortecedor	63
5.47 Saída x Sinal de Referência Entrada Senoide Controle Senoide Sistema Massa Mola Amortecedor	64
5.48 Sinal de Controle Sinal de Referência Entrada Senoide Controle Senoide Sistema Massa Mola Amortecedor	64
A.1 Bloco de Construção da Matriz ϕ	67
A.2 Bloco da Auto-Regulação do Controlador para Entrada Degrau	68
A.3 Bloco da Auto-Regulação do Controlador para Entrada Rampa	68
A.4 Bloco da Auto-Regulação do Controlador para Entrada Senoide	69
A.5 Bloco de Cálculo dos Coeficientes de P	70
A.6 Bloco de Construção da Matriz M	70
A.7 Bloco de Construção da Matriz p	71
A.8 Bloco de Construção da Matriz Auxiliar M para Entrada Degrau	71
A.9 Bloco de Construção da Matriz Auxiliar M para Entrada do Tipo Rampa	72
A.10 Bloco de Construção da Matriz Auxiliar M para Entrada do Tipo Senoide	73

Lista de Tabelas

5.1 Índices de Desempenho Sistema 2ª Ordem	60
5.2 Índices de Desempenho Sistema Massa Mola Amortecedor	64

Lista de Símbolos

ϕ Vetor coluna dos regressores

Ψ Matriz de regressores de modelos dinâmicos

$\psi(k-1)$ Vetor de regressores que contém observações até o instante k-1

θ Vetor de parâmetros a estimar

$\hat{\theta}$ Vetor de parâmetros estimados

$\hat{\theta}_{MQ}$ Vetor de parâmetros estimados utilizando o estimador dos mínimos quadrados

J_{MQ} Função de custo minimizada pelo estimador dos mínimos quadrados

ξ Vetor de resíduos

$\xi(k)$ Resíduo no instante k

λ Fator de esquecimento

$\|\cdot\|$ Norma euclidiana

$R_{uu}(\tau)$ Função de autocorrelação de $u(k)$ no atraso τ

e Valor de erro

$e(k)$ Erro no instante k

$y(k)$ Sinal de saída no instante k

$u(k)$ Sinal de entrada no instante k

R_ϕ Matriz de covariância de ϕ

I_n Matriz de identidade de ordem n

Lista de Abreviaturas

RST *Reference Signal Tracking*

MQR *Mínimos Cuadrados Recursivo*

MQ *Mínimos Cuadrados*

SISO *Single Input Single Output*

PWM *Pulse Width Modulation*

IAE *Integral Absolute Error*

ISE *Integral Square Error*

ITAE *Integral time Absolute Error*

RBEMCE *Reference Based Error with Minimum Control Effort*

RBMSEMC *Reference Based in Mean Square Error with Minimum Control Effort*

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Justificativa	3
1.2	Objetivos	3
1.2.1	Objetivos Gerais	3
1.2.2	Objetivos Específicos	3
1.3	Organização do Trabalho	4
2	Fundamentação Teórica	5
2.1	Estimador dos Mínimos Quadrados Não-Recursivo	5
2.1.1	Mínimos Quadrados Recursivos	9
2.1.2	Fator de Esquecimento dos Mínimos Quadrados	11
2.1.3	Convergência do Estimador dos Mínimos Quadrados	12
2.2	Estrutura RST	14
2.2.1	Projeto do Controlador por Alocação de Polos	15
2.2.2	Controlador RST com erro nulo em regime permanente	20
2.3	Índices de Desempenho de Controladores	22
3	Estudos de Caso	26
3.1	Sistema de 2 ^a Ordem	26
3.2	Sistema Massa Mola Amortecedor	27
4	Metodologia	31
4.1	Sistema 2 ^a Ordem	31
4.2	Sistema Massa Mola Amortecedor	32
4.3	Controlador Auto-Regulável	33
5	Resultados	38
5.1	Sistema de 2 ^a Ordem	38
5.2	Sistema Massa Mola Amortecedor	61
6	Conclusão	66

Conclusão	66
Appendices	67
A Controlador Auto-Regulável	67
Bibliografia	74

Capítulo 1

Introdução

Com o aumento do uso de computadores no ambiente industrial e com as novas tecnologias, a automação dos processos está cada vez mais evidente em vários processos. Além disso, para uma boa operação da planta é necessário um bom desenvolvimento de seu controlador [\[Rani et al., 2014\]](#).

Um controlador adequado tem um impacto significativo em relação ao aspecto econômico. Um sistema de controle bem projetado reduz a variância da variável controlada em relação ao valor de referência, proporcionando uma economia durante o processo, e com isso há uma diminuição dos custos de produção [\[Landau, 1998\]](#), além de garantir manufaturados com qualidade superiores. Em algumas situações, a qualidade do controlador depende dos modelos matemáticos dos sistemas controlados.

Em diversas áreas de estudo, são necessários modelos matemáticos para soluções de muitos problemas. Uma das formas de determinar o modelo matemático que represente as características do processo é através de métodos de identificação de sistemas. Dessa forma, um controlador eficaz pode ser obtido, durante sua fase de projeto, pois, um modelo apropriado do processo se torna conhecido [\[Rani et al., 2014\]](#).

A identificação de sistemas consiste em construir um modelo matemático do sistema dinâmico baseado-se em observações dos dados de entrada e/ou saída. O algoritmo dos Mínimos Quadrados Recursivos (MQR) é amplamente utilizado quando se deseja estimar o modelo da planta de uma forma recursiva e eficiente [\[Rani et al., 2014\]](#). Segundo [\[Coelho and dos Santos Coelho, 2004\]](#), na área de automação industrial, a identificação de sistemas pode ser utilizada para fins de previsão, supervisão, diagnóstico e controle. Devido a razões inesperadas, os parâmetros do processo podem mudar consideravelmente. Com isso, o sistema de controle deve ser capaz de lidar de maneira eficiente com essa mudança de parâmetros [\[Lin et al., 2000\]](#).

Os sistemas de controle são de extrema importância para a sociedade moderna. Pode-se observar inúmeras aplicações ao nosso redor: nos veículos autônomos, na aviação, no lançamento de foguetes, entre outras aplicações. Um sistema de controle pode ser definido como subsistemas e processos (ou plantas) construídos com o intuito de se obter uma saída

desejada com um desempenho desejado, dada uma entrada de referência [Nise, 2013].

O controle digital vem se tornando cada vez mais importante na indústria. Tal fato é constatado uma vez que a maioria dos controladores avançados são implementados em dispositivos digitais. Dessa forma, é adequado o uso de modelos de tempo discreto [Rani et al., 2014].

O controlador RST é uma estratégia de controle digital bastante utilizada em inúmeras aplicações [Bendjedja et al., 2014]. É um controlador amplamente utilizado devido a sua boa performance e sua baixa complexidade de implementação. R-S-T são os nomes dos polinômios que são encontrados durante o processo de projeto [Cuenca and Salt, 2012].

Em [Ostertag et al., 2007] foi projetado uma estrutura de controle em cascata para estabilizar um pêndulo invertido, usando dois controladores RST. [Galdos et al., 2011] propôs a implementação um controlador RST de ordem fixa para satisfazer algumas restrições da norma infinita. Em [Suryawanshi and Agashe, 2008] foi implementado um controlador RST de estrutura fixa para sistemas lineares SISO usando dados medidos no domínio da frequência. A planta utilizada foi o sistema de tanques acoplados da Quanser.

Em [Rani et al., 2014] o controlador RST foi implementado em um sistema não linear. [Landau, 1998] propôs a implementação do controlador digital RST através da solução de uma equação diofantina para o controle de depósito de zinco na galvanização por imersão a quente. Em [Ostertag, 1999] foi proposto a implementação do controlador RST com cancelamento do erro em regime permanente através da resolução de uma segunda equação diofantina.

Em [Ostertag and Godoy, 2005] foi projetado um controlador para referências do tipo senoide, garantindo também erro nulo em regime permanente entre a referência e a saída controlada. Também foi demonstrado a eficiência desse método num inversor PWM. [Suryawanshi and Agashe, 2008] apresentou o projeto do controlador auto-ajustável através do processo de identificação de sistemas e da estratégia de controle adaptativo. Foi utilizado um bio reator para ilustrar a teoria e os resultados da implementação. Em [Sant'Ana et al., 2019] foi apresentado o design do controlador RST para um inversor de fonte de tensão PWM multinível, a fim de atingir um erro nulo em estado estacionário ao rastrear uma referência senoidal.

Em trabalhos anteriores, o projeto do controlador foi feito para uma determinada entrada de referência. Em alguns trabalhos, foi utilizada a identificação de sistema juntamente com o controlador para uma melhora no desempenho do processo.

Nesse trabalho, é proposto a implementação do controlador RST auto-regulável para entradas do tipo: degrau, rampa e senoide. Dessa forma, pode-se comparar o desempenho do controlador quando o mesmo recebe uma entrada diferente da qual ele foi projetado.

1.1 Justificativa

Atualmente, existem muitas aplicações industriais complexas que apresentam processos de modelagem matemática complicados. Em algumas situações, um modelo de grande ordem é necessário para apresentar as dinâmicas necessárias do sistema. Em muitas situações, controladores de baixa ordem são comumente utilizados devido a sua simplicidade de implementação em comparação com controladores de alta ordem. Todavia, modelos de baixa ordem deixam de modelar algumas dinâmicas do sistema e isso pode afetar ao desempenho do controlador [Nicoletti et al., 2015].

É bastante desafiador, no campo de sistema de controle, ter bons critérios de desempenho, tais como: tempo de resposta, precisão e estabilidade, devido as não-linearidades da planta. Em processos específicos, o projeto de controladores que possam ser facilmente implementados e sintonizados pode ser complicado. Outra tarefa trabalhosa, é projetar um controlador que possa facilmente ser implementado e sintonizado para um processo específico [Hocine et al., 2009]. Na literatura, são vistas diversas formas de implementação do controlador. Tal fato demonstra que o projeto e a sintonia de controladores é um tema bastante estudado. Em especial, um dos controladores mais utilizados como objeto de estudo na literatura é o controlador RST.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivos Gerais

O objetivo central deste trabalho é descrever a metodologia de implementação e ajuste de um controlador RST auto regulável. O controlador fornece novos parâmetros sempre que ocorra mudança na dinâmica da planta, ajustando-se a diferentes tipos de entrada de referência, tais como: degrau, rampa e senoide.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Descrever o estimador dos mínimos quadrados recursivo para obtenção do modelo do processo;
- Descrever a implementação do controlador RST auto-regulável para entradas do tipo: degrau, rampa e senoide;
- Mostrar de forma didática a aplicação do RST auto-regulável em sistemas simulados;
- Analisar o comportamento e desempenho do controlador em diferentes situações.
- Utilizar índices de avaliação de controladores para quantificar o desempenho do método proposto.

1.3 Organização do Trabalho

Para facilitar a leitura deste trabalho o mesmo apresenta a seguinte organização. Neste capítulo introdutório são apresentados aspectos gerais sobre a área de estudo, assim como o propósito deste estudo. No Capítulo 2 são apresentados os fundamentos teóricos sobre o controlador RST e o método de estimação de Mínimos Quadrados Recursivo. O Capítulo 3 apresenta uma descrição completa dos sistemas utilizados como estudo de caso. No Capítulo 4 é apresentada a metodologia utilizada, assim como alguns aspectos descritivos da implementação computacional e dos estudos de caso. Em seguida, no Capítulo 5, são apresentados os resultados e uma discussão sobre eles. Por fim, no Capítulo 6 estão presentes as conclusões sobre o trabalho e uma breve discussão sobre possibilidades de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Um dos principais problemas relacionados a controle de sistemas dinâmicos é a obtenção do modelo matemático do processo a ser estudado. Uma forma de obtenção de modelos é a partir do estudo das leis físicas relacionadas ao sistema em questão. Porém, em algumas situações, a obtenção de modelos a partir do estudo das leis físicas envolvidas, torna-se impraticável. Nesses casos, uma possível abordagem é a obtenção de modelos matemáticos a partir da observação dos dados de entrada e saída da planta. Nesses casos, são utilizadas metodologias de identificação de sistemas [Coelho and dos Santos Coelho, 2004].

Uma das principais abordagens utilizada na identificação de processos variantes no tempo e com parâmetros desconhecidos é o método dos mínimos quadrados descrito por Gauss no final do século 18 [Coelho and dos Santos Coelho, 2004].

Em implementações de controle que necessitam de mudança de parâmetros em tempo real, o algoritmo de estimação de parâmetros deve ser iterado. O modelo do sistema é atualizado a cada período de amostragem, quando se tem acesso a novas medidas. Com isso, o modelo da planta (ou do controlador) pode sofrer ajustes devido às características do processo ou pode resintonizar-se quando ocorrer variações na dinâmica do processo [Coelho and dos Santos Coelho, 2004].

A princípio, o método de mínimos quadrados não recursivo será discutido. Em seguida, a partir de algumas definições desse método, serão mostrados os conceitos da metodologia de mínimos quadrados recursivos.

2.1 Estimador dos Mínimos Quadrados Não-Recursivo

De acordo com [Aguirre, 2000], o método dos mínimos quadrados é bastante utilizado em diversas áreas do conhecimento. Segundo [Coelho and dos Santos Coelho, 2004], Karl Friedrich Gauss formulou, em 1795, o princípio dos mínimos quadrados para prever a trajetória de planetas e cometas a partir das observações realizadas. Ele estabeleceu que

os parâmetros desconhecidos de um modelo matemático deveriam ser selecionados de modo que "o valor mais provável das grandezas desconhecidas é a que minimiza a soma dos quadrados da diferença entre os valores atualmente observados e os valores calculados multiplicados por números que medem o grau de precisão, onde quanto mais precisa a medida, maior a sua ponderação" [Ljung and Söderström, 1985].

De acordo com [Araújo, 2019], o método dos mínimos quadrados permite estimar o vetor de parâmetros θ que descreve o modelo dinâmico do sistema.

Seja $\hat{\theta}$ o vetor dos parâmetros estimados descrito pela equação:

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_{n_\theta} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Segundo [Araújo, 2019] e [Coelho and dos Santos Coelho, 2004], para determinar os valores de $\hat{\theta}$ as seguintes condições devem ser levadas em conta:

- Para o modelo, tem-se (n_θ) parâmetros a estimar;
- Para determinar os n_θ parâmetros, deve-se utilizar as medidas de entrada e saída do sistema;
- São usadas K observações de y com o objetivo de se ter K equações para determinar os n_θ elementos de $\hat{\theta}$;
- O vetor de parâmetros estimados $\hat{\theta}$ não muda de uma observação para outra;
- A saída estimada do modelo pode ser escrita de acordo com a equação: $\hat{y} = \Psi\hat{\theta}$

Considerando as afirmações acima, a saída do modelo pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(1) \\ \hat{y}(2) \\ \vdots \\ \hat{y}_{n_\theta} \end{bmatrix} = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_{n_\theta}] \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_{n_\theta} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

onde ϕ_i , com $i = 1, \dots, n_\theta$ corresponde aos vetores colunas dos regressores. Cada vetor coluna é da forma:

$$\phi = \begin{bmatrix} \Psi_i(1) \\ \Psi_i(2) \\ \vdots \\ \Psi_i(K) \end{bmatrix}$$

cada $\Psi_i(K)$ corresponde ao regressor i no instante de observação K . Portanto, representando a equação (2.2) de forma matricial, obtém-se:

$$\hat{y} = \Psi\hat{\theta} \quad (2.3)$$

Para se obter os parâmetros θ do modelo estimado, pode-se utilizar a relação entre a inversa da matriz de regressores e o vetor de observações da saída da seguinte forma:

$$\hat{\theta} = \Psi^{-1}\hat{y} \quad (2.4)$$

Porém, em muitas situações, a matriz Ψ tem mais linhas que colunas, ou seja, não é quadrada. Para se utilizar a relação da equação (2.4) a matriz de regressores Ψ deve admitir uma inversa, isto é, Ψ deve ser não singular. Tendo em vista um sistema de equações sobredeterminado com $K > n$, a equação (2.3) tem $\Psi \in \mathbb{R}^{K \times n}$, $y \in \mathbb{R}^{K \times 1}$ e $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Com isso, Ψ não pode ser invertida pois não é uma matriz quadrada. Entretanto ao fazer a multiplicação da equação (2.3) por Ψ^T tem-se

$$\Psi^T\hat{y} = \Psi^T\Psi\hat{\theta} \quad (2.5)$$

O produto de uma matriz pela sua transposta resulta em uma matriz quadrada, com isso é possível encontrar $\hat{\theta}$ através da multiplicação da equação (2.5) por $(\Psi^T\Psi)^{-1}$. $\hat{\theta}$ é encontrado pela seguinte equação:

$$\hat{\theta} = (\Psi^T\Psi)^{-1}\Psi^T\hat{y} \quad (2.6)$$

A matriz $(\Psi^T\Psi)$ deve ser não singular e a matriz $(\Psi^T\Psi)^{-1}\Psi^T$ é conhecida como a matriz pseudo-inversa. De acordo com [Aguirre, 2000], a equação (2.6) é uma solução para determinar um vetor que contém os parâmetros do sistema a partir de um conjunto de equações que possuem mais restrições do que incógnitas.

Considerando o valor observado de y como:

$$y = \hat{y} + \xi \quad (2.7)$$

onde

$$\hat{y} = \Psi\hat{\theta} \quad (2.8)$$

com \hat{y} sendo o valor estimado de y e ξ o erro de estimação.

Conforme [Araújo, 2019], levando em conta a situação onde se tem n parâmetros e K medições, de modo que $n < K$. É possível representar as equações (2.7) e (2.8) na forma matricial, obtendo:

$$y = \Psi\hat{\theta} + \xi \quad (2.9)$$

A equação (2.6) tem infinitas soluções do sistema sobredeterminado. Com isso, é desejável encontrar um valor de $\hat{\theta}$ que reduza o valor de ξ para o menor possível. Nesse caso, é utilizado o somatório do quadrado dos erros, [Aguirre, 2000] o define como:

$$J_{MQ} = \sum_{i=1}^K (\xi)^2 = \xi^T \xi = \|\xi\|^2 \quad (2.10)$$

que caracteriza um índice da qualidade do ajuste de $\Psi\hat{\theta}$ ao vetor de dados y . Pode-se encontrar o valor ξ através da equação (2.9) e substituindo o resultado na equação (2.10), obtém-se:

$$J_{MQ} = (y - \Psi\hat{\theta})^T (y - \Psi\hat{\theta}) \quad (2.11)$$

Considerando que para minimizar a função de custo J_{MQ} em relação a $\hat{\theta}$ [Aguirre, 2000] e levando em conta as seguintes equações [Coelho and dos Santos Coelho, 2004]:

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}} (\hat{\theta}^T (\Psi^T \Psi) \hat{\theta}) = 2 \Psi^T \Psi \hat{\theta} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}} (y^T \Psi \hat{\theta}) = (y^T \Psi)^T \quad (2.13)$$

$$(\Psi \hat{\theta})^T = \hat{\theta}^T \Psi^T \quad (2.14)$$

$$y^T \Psi = (\Psi^T y)^T \quad (2.15)$$

a equação (2.11) é desenvolvida [Araújo, 2019], obtendo-se:

$$\begin{aligned} J_{MQ} &= (y^T - \hat{\theta}^T \Psi^T)(y - \Psi\hat{\theta}) \\ &= y^T y - y^T \Psi \hat{\theta} - \hat{\theta}^T (\Psi^T y) + \hat{\theta}^T (\Psi^T \Psi) \hat{\theta} \\ &= y^T y - (y^T \Psi) \hat{\theta} - (\Psi^T y)^T \hat{\theta} + \hat{\theta}^T (\Psi^T \Psi) \hat{\theta} \\ &= y^T y - 2(y^T \Psi) \hat{\theta} + \hat{\theta}^T (\Psi^T \Psi) \hat{\theta} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Calculando a derivada parcial da equação (2.16) em relação a $\hat{\theta}$, e igualando essa derivada a zero, tem-se:

$$\frac{\partial J_{MQ}}{\partial \hat{\theta}} = \frac{\partial (y^T y - 2(y^T \Psi) \hat{\theta} + \hat{\theta}^T (\Psi^T \Psi) \hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} = 0 \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}
&= -2\Psi^T y + 2\Psi^T \Psi \hat{\theta} = 0 \\
\Psi^T \Psi \hat{\theta} &= \Psi^T y \\
\hat{\theta} &= (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T y
\end{aligned}$$

Conforme [Araújo, 2019](#), a equação [\(2.17\)](#) obtida pelo método dos mínimos quadrados é igual a equação [\(2.6\)](#) utilizando-se a matriz pseudo-inversa.

Muitos métodos de identificação de sistemas baseados nas medidas do sistema não são apropriados para a aplicação em tempo real. Dessa forma, é desejável fazer uma elaboração adequada dos algoritmos de identificação para proporcionar metodologias eficientes.

Na implementação de controle adaptativo em tempo real, o algoritmo do estimador de parâmetros deve ser iterativo, com o modelo do sistema sendo atualizado a cada período de amostragem, quando novas medidas estão disponíveis (adequar-se às características do processo controlado ou resintonizar-se caso existam variações na dinâmica do processo) [Coelho e Coelho, 2004].

2.1.1 Mínimos Quadrados Recursivos

Conforme mostrado na seção 2.1, o valor observado de y é descrito como:

$$y = \Psi \hat{\theta} + \xi$$

Agora, considerando o modelo descrito por:

$$y(k) = \psi(k-1)\hat{\theta} + \xi(k)$$

Tem-se como objetivo estimar $\hat{\theta}$ de forma recursiva. Para isso deve-se escrever o estimador dos mínimos quadrados da seguinte forma [Aguirre, 2000](#):

$$\hat{\theta}_{MQ_k} = \left[\sum_{i=1}^k \psi(i-1)\psi^T(i-1) \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^k \psi(i-1)y(i) \right] \quad (2.18)$$

No decorrer dessa seção é adotada as notações:

$$\begin{aligned}
P_k &= \left[\sum_{i=1}^k \psi(i-1)\psi^T(i-1) \right]^{-1} \\
P_k^{-1} &= \left[\sum_{i=1}^{k-1} \psi(i-1)\psi^T(i-1) \right] + \psi(k-1)\psi^T(k-1) \\
P_k^{-1} &= P_{k-1}^{-1} + \psi(k-1)\psi^T(k-1)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

As notações acima expressam os dados num determinado instante de tempo k em função de valores em instantes passados. Substituindo P_k na equação (2.18), chega-se:

$$\hat{\theta}_{MQ_k} = P_k \left[\sum_{i=1}^{k-1} \psi(i-1)y(i) + \psi(k-1)y(k) \right] \tag{2.20}$$

Reescrevendo a equação (2.18) para o instante de tempo $k-1$, tem-se:

$$\left[\sum_{i=1}^{k-1} \psi(i-1)\psi^T(i-1) \right] \hat{\theta}_{k-1} = \left[\sum_{i=1}^{k-1} \psi(i-1)y(i) \right] \tag{2.21}$$

o termo $\left[\sum_{i=1}^{k-1} \psi(i-1)\psi^T(i-1) \right]$ pode ser escrito como P_{k-1}^{-1} . Dessa forma, o lado esquerdo da equação acima fica da forma: $P_{k-1}^{-1}\hat{\theta}_{k-1}$. Ao substituir esse resultado na equação (2.20) obtém-se:

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_k &= P_k [P_{k-1}^{-1}\hat{\theta}_{k-1} + \psi(k-1)y(k)] \\
&= P_k [(P_{k-1}^{-1} - \psi(k-1)\psi^T(k-1))\hat{\theta}_{k-1} + \psi(k-1)y(k)] \\
&= \hat{\theta}_{k-1} - P_k \psi(k-1)\psi^T(k-1)\hat{\theta}_{k-1} + P_k \psi(k-1)y(k) \\
&= \hat{\theta}_{k-1} + P_k \psi(k-1)[y(k) - \psi^T(k-1)\hat{\theta}_{k-1}] \\
&= \hat{\theta}_{k-1} + K_k \eta(k)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

onde $K_k = P_k \psi(k-1)$ é uma matriz de ganho e $\eta(k) = y(k) - \psi^T(k-1)\hat{\theta}_{k-1}$ é a inovação no instante de tempo k .

Da equação (2.22) fica claro que para utilizar os mínimos quadrados recursivo é preciso calcular P_k . Uma maneira de calcular P_k seria através da equação (2.19). Entretanto, para cada instante de tempo o algoritmo teria que calcular a inversa de uma matriz, tornando o processo custoso [Aguirre, 2000]. Uma forma de atualizar essa matriz inversa sem calculá-la diretamente é utilizando a seguinte identidade [Coelho and dos Santos Coelho, 2004]:

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$$

Desta forma, aplicando a identidade acima na equação (2.19), com $A = P_{k-1}^{-1}$, $B = \psi(k-1)$, $C = 1$ e $D = \psi^T(k-1)$, chega-se:

$$P_k = P_{k-1} - P_{k-1}\psi(k-1)[\psi^T(k-1)P_{k-1}\psi(k-1) + 1]^{-1}\psi^T(k-1)P_{k-1} \quad (2.23)$$

Com isso, apenas um termo escalar será invertido. Utilizando a equação (2.23), a matriz de ganho $K_k = P_k\psi(k-1)$, e sabendo que $\psi^T(k-1)P_{k-1}\psi(k-1)$ é um escalar [Aguirre, 2000], tem-se:

$$K_k = P_{k-1}\psi(k-1) - \frac{P_{k-1}\psi(k-1)\psi^T(k-1)P_{k-1}\psi(k-1)}{\psi^T(k-1)P_{k-1}\psi(k-1) + 1}$$

$$K_k = \frac{P_{k-1}\psi(k-1)}{\psi^T(k-1)P_{k-1}\psi(k-1) + 1} \quad (2.24)$$

Com as equações (2.22), (2.23) e (2.24) e considerando que $\psi(k) = \psi(k-1)$, chega-se:

$$K_k = \frac{P_{k-1}\psi_k}{\psi_k^T P_{k-1} \psi_k + 1}$$

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + K_k[y(k) - \psi_k^T \hat{\theta}_{k-1}] \quad (2.25)$$

$$P_k = P_{k-1} - K_k \psi_k^T P_{k-1}$$

Na próxima seção será demonstrado a importância do algoritmo dos mínimos quadrados recursivo ter uma capacidade de adaptação.

2.1.2 Fator de Esquecimento dos Mínimos Quadrados

Segundo [Coelho and dos Santos Coelho, 2004], em sistemas variantes no tempo, deve-se conceder ao algoritmo dos mínimos quadrados uma habilidade de adaptação. Ou seja, o algoritmo deve ter a capacidade de impedir que K_k tenda a zero. Isso pode ser atingido através do fator de esquecimento. Esse fator dá uma maior importância as medidas que são mais relevantes para o estado atual do sistema [Ljung, 1999].

Caso os parâmetros do sistema sejam variantes, se faz necessário adicionar uma modificação no algoritmo dos mínimos quadrados recursivo. Com o intuito de evitar que o ganho torne-se muito "pequeno". Dessa forma, é adicionado na equação de $\hat{\theta}_k$ (2.25) o fator de esquecimento λ .

Esse fator de esquecimento assume valores entre 0(zero) e 1(um).

Conforme [Coelho and dos Santos Coelho, 2004], o algoritmo do MQR minimiza o seguinte critério:

$$J(k, \theta) = \sum_{i=1}^k [y(i) - \psi^T(i)\theta]^2$$

a cada nova amostra de dados e também faz a ponderação do resíduo (erro de estimação). Havendo uma mudança dos parâmetros do sistema que está sendo identificado revela que erros novos devem ter uma maior importância que erros antigos de maneira que o algoritmo dos MQR se adapte ao novo sistema. Com isso, a modelagem das variações dos parâmetros, o critério de minimização dos MQR é modificado para:

$$J(k, \theta) = \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} e^2(i)$$

e o efeito do desconto dos erros passados pode ser visto como

$$J(k, \theta) = \lambda J(k-1, \theta) + e^2(k)$$

Portanto, as medidas anteriores são exponencialmente "esquecidas" e uma maior importância é dada às medidas mais recentes. Finalmente, o algoritmo de estimação dos mínimos quadrados com fator de esquecimento é dado da forma recursiva [Ljung, 1999]:

$$\begin{aligned} K_k &= \frac{P_{k-1}\psi_k}{\psi_k^T P_{k-1}\psi_k + \lambda} \\ \hat{\theta}_k &= \hat{\theta}_{k-1} + K_k [y(k) - \psi_k^T \hat{\theta}_{k-1}] \\ P_k &= \frac{1}{\lambda} \left(P_{k-1} - \frac{P_{k-1}\psi_k\psi_k^T P_{k-1}}{\psi_k^T P_{k-1}\psi_k + \lambda} \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

De acordo com [Coelho and dos Santos Coelho, 2004]:

- Se o valor de $\lambda = 1$, a ponderação é a mesma do MQR-padrão;
- Na prática, o valor de λ utilizado é $0.9 \leq \lambda \leq 1$;

Na próxima seção será provada a convergência do estimador dos mínimos quadrados recursivo.

2.1.3 Convergência do Estimador dos Mínimos Quadrados

Considerando que os dados obtidos de entrada e saída do sistema sejam da forma:

$$y(k) = \psi^T(k-1)\theta + e(k) \quad (2.27)$$

sendo $e(k)$ é uma sequência de erros qualquer [Aguirre, 2000]. A equação (2.27) é utilizada como equação de regressão, resultando na equação normal

$$\Psi^T \mathbf{y} = \Psi^T \Psi \boldsymbol{\theta}$$

Portanto, o estimador mínimos quadrados pode ser expresso como

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MQ} = [\Psi^T \Psi]^{-1} \Psi^T \mathbf{y}$$

Colocando a equação (2.27) na forma matricial, obtém-se

$$\mathbf{y} = \Psi \boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}$$

e substituindo essa equação em (2.6), tem-se

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MQ} = \boldsymbol{\theta} + [\Psi^T \Psi]^{-1} \Psi^T \mathbf{e}$$

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{MQ} &= \boldsymbol{\theta} + \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \psi(k-1) \psi^T(k-1) \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \psi(k-1) e(k) \right] \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{MQ} &= \boldsymbol{\theta} + [R_\psi]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \psi(k-1) e(k) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Onde R_ψ uma matriz de covariância e N é o número de amostras. O ideal é que $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MQ} \approx \boldsymbol{\theta}$ necessitando que o termo $\left([R_\psi]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \psi(k-1) e(k) \right)$ da equação (2.28) seja pequeno. Além disso, também seria desejável que $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MQ} \rightarrow \boldsymbol{\theta}$, para $N \rightarrow \infty$.

Conforme [Aguirre, 2000], ao ter o objetivo de averiguar o comportamento de $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MQ}$ quando $N \rightarrow \infty$, é assumido que $e(k)$ e $u(k)$ sejam processos estacionários de maneira que matrizes de covariância do tipo

$$R_{uu}(N, \tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k) u(k - \tau) \rightarrow R_{uu}(\tau) \quad (2.29)$$

Convirjam para $N \rightarrow \infty$, Nesse caso, R_ψ convergirá em probabilidade para \bar{R}_ψ , uma vez que é composta de somatórios do tipo (2.29). De maneira análoga, a segunda parcela do lado direito de (2.28) convergirá em probabilidade para $\bar{R}_{\psi e}$. Para isso, as matriz de covariância R_ψ não deve ser singular,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MQ} = \boldsymbol{\theta} + [\bar{R}_\psi]^{-1} \bar{R}_{\psi e}, N \rightarrow \infty \quad (2.30)$$

Conforme [Aguirre, 2000], para que o estimador seja consistente, deve-se ter $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MQ} \rightarrow \boldsymbol{\theta}$ à medida que $N \rightarrow \infty$. Para que isso aconteça, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

- a) \bar{R}_ψ seja não singular. Para isso $u(k)$ e $e(k)$ devem ser independentes e $u(k)$ deve ser persistentemente excitante de ordem suficiente elevada;
- b) $e(k)$ é ruído branco. Neste caso $\bar{R}_{\psi e} = 0$, pois $e(k)$ não dependerá do que tiver acontecido até o instante $k - 1$; ou
- c) $u(k)$ e $e(k)$ sejam independentes e não haja regressores de saída em $\psi(k - 1)$, ou seja, $n_y = 0$, assim $\psi(k - 1)$ é independente de $e(k)$.

Os controladores são de grande importância quando é necessário que o sistema se comporte de maneira desejada. Através das especificações de desempenho, pode-se descobrir os parâmetros do controlador.

É sabido que muitos sistemas são contínuos por natureza, os sistemas de controle utilizados para controlar os processos são implementados em computadores e utilizam algoritmos de controle digital [Coelho and dos Santos Coelho, 2004].

O algoritmo dos mínimos quadrados é bastante utilizado em controladores que são dependentes do modelo do processo. O controlador RST é um exemplo de algoritmo de controle digital que necessita do conhecimento prévio do modelo da planta para ser projetado. Dessa forma, conhecer o modelo do sistema é fundamental para que seja possível fazer a sintonia dos parâmetros do controlador.

2.2 Estrutura RST

O controlador RST é um controlador em tempo discreto com 2 graus de liberdade (O grau de liberdade indica o número de funções de transferência de malha fechada que podem ser ajustadas de modo independente [Wang and Fujimoto, 2018]). Os polinômios R e S são projetados com o objetivo de alcançar as performances de regulação desejadas. Já o polinômio T é projetado com o objetivo de alcançar as performances de rastreamento desejado [Landau, 1998]. O controlador RST é baseado na técnica de alocação de polos. Esse método permite alcançar critérios satisfatórios de controle, como a robustez [Alali et al., 2004].

A estrutura RST fornece um método para rastreamento da referência e da rejeição de perturbações, uma vez que o modelo da planta em tempo discreto é conhecido e a função de transferência em malha fechada é escolhida [Godoy and Ostertag, 2006].

Tal método é uma generalização dos controladores PID possuindo a característica de ser mais robusto contra perturbações. Há muitas formas de fazer a sintonia dos parâmetros desse controlador [Stefanoiu et al., 2016]. Uma das formas de projetar o controlador RST é pelo método de alocação de polos, baseado na resolução de uma equação Diofantina [Ostertag and Godoy, 2005]. Para encontrar os parâmetros do controlador pode ser utilizado o método de Sylvester. Entretanto a escolha dos polos desejados em malha-fechada se torna uma tarefa desafiadora com o aumento da ordem da planta [Madiouni et al., 2013].

Segundo [Landau and Zito, 2006](#), a planta a ser controlada é caracterizada pela função de transferência

$$H(q^{-1}) = \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})} \quad (2.31)$$

onde d é o número inteiro de períodos de amostragem. Os polinômios A e B da função de transferência discreta do sistema são da forma:

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{n_A}q^{-n_A}$$

$$B(q^{-1}) = b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_{n_B}q^{-n_B} = q^{-1}B^*(q^{-1})$$

em que n_A e n_B são, respectivamente, as ordens do numerador e denominador do sistema.

A estrutura canônica do controlador digital RST é representada na Figura [\(2.1\)](#). Utilizando tal estrutura, pode-se projetar um controlador capaz de atingir variados níveis de performance no rastreamento da entrada de referência e na regulação da planta. A equação canônica do controlador RST é dada por:

$$S(q^{-1})u(t) + R(q^{-1})y(t) = T(q^{-1})y^*(t + d + 1)(q^{-1})$$

Onde $u(t)$ e $y(t)$ são, respectivamente, entrada e a saída da planta. O termo $y^*(t + d + 1)(q^{-1})$ é a trajetória que o controlador deve alcançar. Essa trajetória é gerada pelo modelo de referência de rastreamento $\frac{Bm}{Am}$. Os polinômios $R(q^{-1})$, $S(q^{-1})$ e $T(q^{-1})$ tem a forma:

$$R(q^{-1}) = r_0 + r_1q^{-1} + r_2q^{-2} + \dots + r_{n_r}q^{-n_r}$$

$$S(q^{-1}) = 1 + s_1q^{-1} + s_2q^{-2} + \dots + s_{n_s}q^{-n_s}$$

$$T(q^{-1}) = t_0 + t_1q^{-1} + t_2q^{-2} + \dots + t_{n_t}q^{-n_t}$$

onde n_r , n_s e n_t são respectivamente os graus dos polinômios R , S e T , respectivamente.

2.2.1 Projeto do Controlador por Alocação de Polos

Com a utilização do método da alocação de polos, é possível projetar um controlador digital RST. Esse controlador é efetivo no controle de sistemas estáveis e em sistemas instáveis. Para isso, deve-se assumir as seguintes condições:

- Não pode haver restrições nos graus dos polinômios $A(q^{-1})$ e $B(q^{-1})$ do modelo

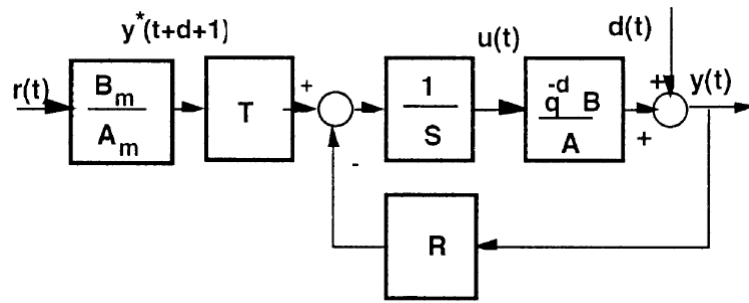


Figura 2.1: Estrutura Canônica do Controlador Digital R-S-T [Landau, 1998].

da planta em tempo discreto (desde que os polinômios não possuam fatores em comum);

- Não pode haver restrições no atraso de tempo;
- Não pode haver restrições nos zeros estáveis ou não-estáveis da planta.

A função de transferência do sistema em malha fechada é dada por:

$$H_{CL}(q^{-1}) = \frac{q^{-d}T(q^{-1})B(q^{-1})}{A(q^{-1})S(q^{-1}) + (q^{-d})B(q^{-1})R(q^{-1})} = \frac{q^{-d}T(q^{-1})B(q^{-1})}{P(q^{-1})} \quad (2.32)$$

onde

$$P(q^{-1}) = A(q^{-1})S(q^{-1}) + (q^{-d})B(q^{-1})R(q^{-1}) = 1 + p_1q^{-1} + p_2q^{-2} + \dots + \quad (2.33)$$

contém os polos em malha fechada que determinam o comportamento desejado do sistema.

O polinômio $P(q^{-1})$ é escolhido de maneira em que ele tenha a forma de um polinômio de segunda ordem. Após essa etapa, é feita a discretização do sistema em tempo contínuo de segunda ordem, onde ω_0 (frequência natural) e ζ (coeficiente de amortecimento) do sistema que estão presentes no polinômio característico $P(q^{-1})$, são especificados obedecendo às seguintes condições:

$$0.25 \leq \omega_0 T_a \leq 1.5 ; 0.7 \leq \zeta \leq 1$$

O polinômio obtido pelas especificações de desempenho desejadas (tempo de subida, coeficiente de amortecimento) em malha fechada define os polos dominantes do sistema. Esse polinômio é $P(q^{-1})$ dado pela equação (2.33).

Após obter o polinômio com o comportamento desejado do sistema $P(q^{-1})$, para calcular os polinômios $R(q^{-1})$ e $S(q^{-1})$ do controlador de acordo com a equação (2.32), a equação (2.34) deve ser resolvida. Essa equação também tem o nome de "Identidade de Bezout":

$$P(q^{-1}) = A(q^{-1})S(q^{-1}) + (q^{-d})B(q^{-1})R(q^{-1}) \quad (2.34)$$

A solução única com menor grau dessa equação é obtida quando $A(q^{-1})$ e $B(q^{-1})$ não têm fatores em comum. Os graus dos polinômios $R(q^{-1})$, $S(q^{-1})$ e $P(q^{-1})$ podem ser obtidos da seguintes forma:

$$n_P = \text{deg } P(q^{-1}) \leq n_A + n_B + d - 1$$

□

$$n_S = \text{deg } S(q^{-1}) = n_B + d - 1 ; n_R = \text{deg } R(q^{-1}) = n_A - 1$$

Colocando a equação (2.34) na forma de matricial, tem-se:

$$Mx = p \quad (2.35)$$

onde

$$x^T = [1, s_1, \dots, r_0, \dots, r_{n_R}]$$

$$p^T = [1, p_1, \dots, p_i, \dots, p_{n_P}, 0, \dots, 0]$$

e a matriz M tem a seguinte forma:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & \ddots & \vdots & b_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & \ddots & \ddots & 0 & b_2 & \ddots & \ddots & b_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots & \ddots & \ddots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n_A} & \ddots & \ddots & a_2 & b_{n_B} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_{n_A} & 0 & 0 & 0 & b_{n_B} \end{bmatrix}$$

A matriz M tem dimensão $n_A + n_B + d \times n_A + n_B + d$. Aplicando a inversa da matriz M pode-se obter o vetor x . Esse vetor, contém os coeficientes dos polinômios $R(q^{-1})$ e $S(q^{-1})$ e pode ser encontrado a partir da equação:

$$x = M^{-1}p \quad (2.36)$$

¹deg é a função *degree*

onde M^{-1} é a matriz inversa de M . Essa inversa existe se o determinante da matriz M é diferente de zero.

[Sant'Ana et al., 2019], encontra os coeficientes p_1 e p_2 do polinômio $P(q^{-1})$ da equação (2.33) através das equações:

$$p_1 = -2e^{-\zeta_d \omega_d T_a} \cos(\omega_d T_a \sqrt{1 - \zeta_d^2}) \quad (2.37)$$

$$p_2 = e^{-2\zeta_d \omega_d T_a} \quad (2.38)$$

onde ω_d é a frequência natural desejada do sistema, ζ_d é o coeficiente de amortecimento desejado e T_a é o tempo de amostragem do sistema.

É desejado que quando o sinal de referência mudar, a saída do sistema $y(t)$ também mude, devendo seguir a trajetória desejada $y^*(t)$. Essa trajetória pode ser armazenada ou gerada cada vez que há mudanças na entrada utilizando um modelo de referência indicado na figura (2.2). A função de transferência do modelo é da forma:

$$H_m(q^{-1}) = \frac{q^{-1}B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})}$$

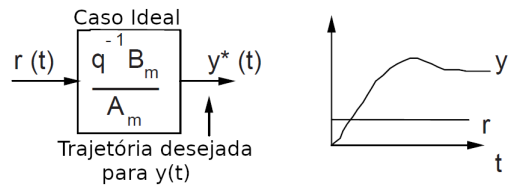


Figura 2.2: Trajetória Deseja $y^*(t)$ [Landau and Zito, 2006]

Esse modelo de referência é determinado pelas especificações de desempenho desejadas (tempo de subida, ultrapassagem percentual, tempo de acomodação). Uma vez que a função de transferência em tempo contínuo e o período de amostragem T_a , são conhecidos, a função de transferência do modelo de referência é obtida por discretização [Landau and Zito, 2006]. A função de transferência do modelo é da forma:

$$H_m(q^{-1}) = \frac{q^{-1}B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} = \frac{q^{-1}(b_{m0} + b_{m1}q^{-1})}{1 + a_{m1} + a_{m2}q^{-2}}$$

O controlador deve alcançar a função de transferência entre o sinal de referência r e o sinal de saída y . Caso o modelo da planta tenha um atraso de tempo, o termo q^{-d} deve ser multiplicado pela função de transferência do sistema. Essa multiplicação só pode ser efetuada caso o atraso não possa ser compensado. No caso de alocação de polos, isso não pode ser obtido porque os zeros da planta são mantidos (polinômio $B(q^{-1})$)

Na alocação de polos, deve-se então, trabalhar com a trajetória de referência do modelo

atrasado.

$$y^*(t)(q^{-1}) = \frac{q^{-(d+1)} B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} r(t)$$

Para isso, primeiro $y^*(t + d + 1)$ é gerado de $r(t)$:

$$y^*(t + d + 1)(q^{-1}) = \frac{q^{-(d+1)} B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} r(t) \quad (2.39)$$

e escolhe-se $T(q^{-1})$ de modo que:

$$T(q^{-1}) = GP(q^{-1})$$

onde

$$G = \begin{cases} 1/B(1), & \text{se } B(1) \neq 0 \\ B(1), & \text{se } B(1) = 0. \end{cases}$$

A lei de controle é da forma:

$$S(q^{-1})u(t) + R(q^{-1})y(t) = T(q^{-1})y^*(t + d + 1)$$

O diagrama completo da alocação de polos é dado pela figura (2.3)

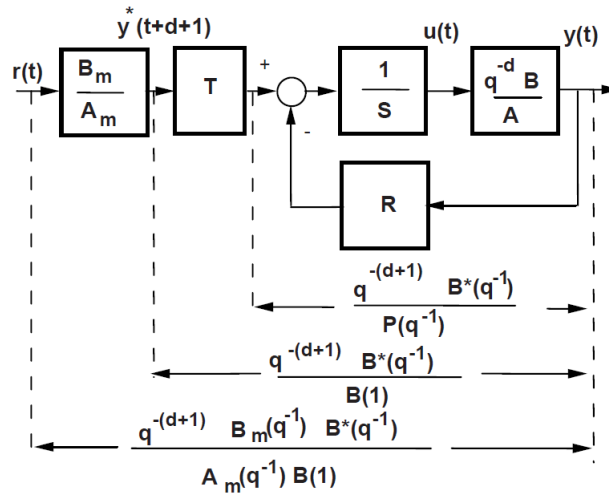


Figura 2.3: Alocação de polos - rastreamento e regulação [Landau and Zito, 2006]

A função de transferência entre a referência e a saída é

$$H_{CL}(q^{-1}) = \frac{q^{-(d+1)} B_m(q^{-1}) B^*(q^{-1})}{A_m(q^{-1}) B(1)}$$

Segundo [Landau and Zito, 2006], "em alguns casos podemos considerar uma simplificação do polinômio T levando em conta apenas os polos dominantes (como os polos

auxiliares geralmente estão em altas frequências com uma pequena influência na resposta temporal).”

Nesse caso

$$H_{CL}(q^{-1}) = \frac{q^{-(d+1)} B_m(q^{-1}) B^*(q^{-1}) P(1)}{A_m(q^{-1}) B(1) P(q^{-1})}$$

e

$$T(q^{-1}) = GP(q^{-1})$$

onde

$$G = \begin{cases} P_F(1)/B(1), & \text{se } B(1) \neq 0 \\ 1, & \text{se } B(1) = 0. \end{cases}$$

O modelo de referência da equação (2.39) e o polinômio T são substituídos por um ganho no caso onde a dinâmica de regulação for igual a dinâmica de rastreamento.

$$T(q^{-1}) = G = \begin{cases} P(1)/B(1), & \text{se } B(1) \neq 0 \\ 1, & \text{se } B(1) = 0. \end{cases}$$

Conforme [Landau and Zito, 2006], $T(q^{-1})$ ”garante um ganho estático unitário entre a trajetória de referência e a saída (se $B(1)$ não for nulo).”

2.2.2 Controlador RST com erro nulo em regime permanente

Segundo [Sant’Ana et al., 2019], o método para calcular os polinômios $R(q^{-1})$, $S(q^{-1})$ e $T(q^{-1})$ é baseado na adição e/ou cancelamento de polos e zeros da planta (dados pelas raízes dos polinômios $A(q^{-1})$ e $B(q^{-1})$), para que o sistema em malha fechada seja representado pelos polos e zeros resultantes das raízes dos polinômios $A_m(q^{-1})$ e $B_m(q^{-1})$ (que são escolhidos de acordo com as especificações de desempenho desejadas pelo projetista, a fim de alcançar um determinado comportamento do sistema).

A função de transferência do sistema pode ser calculada pela equação (2.32). O objetivo do controlador é alcançar, em malha fechada, uma resposta igual a resposta gerada por um sistema com função de transferência $\frac{B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})}$. Assim, a dinâmica do sistema em malha fechada é definida pela equação (2.40).

$$H_{CL}(q^{-1}) = \frac{B_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} \quad (2.40)$$

Relacionando (2.32) e (2.40) pode-se observar que o comportamento desejado pode ser obtido pelo ajuste dos polinômios R, S e T. Com isso, são cancelados os polos e zeros indesejáveis da planta e são adicionados novos polos e zeros nas posições desejadas.

Contudo, para utilizar o método de alocação de polos devem ser seguidas alguma regras [Ostertag and Godoy, 2005] e [Ostertag, 1999].

Primeiro, o numerador da planta (B) deverá ser fatorado em dois polinômios de acordo com as seguintes condições:

- $B(q^{-1})^+$, que deve conter todos os zeros que não serão compensados;
- $B(q^{-1})^-$, que deve conter os outros zeros de $B(q^{-1})$ (que não serão compensados). Esse polinômio deve incluir os zeros instáveis (aqueles que estão fora do círculo unitário) e os atrasos.

Portanto, o numerador da função de transferência do sistema pode ser reescrito como (2.41) e o numerador desejado em malha fechada pode ser escrito como (2.42).

$$B(q^{-1}) = B^+(q^{-1})B^-(q^{-1}) \quad (2.41)$$

$$B_m(q^{-1}) = B^-(q^{-1})B'_m(q^{-1}) \quad (2.42)$$

onde $B'_m(q^{-1})$ é o polinômio que é determinado de acordo com o tipo de entrada e das especificações de desempenho desejadas. Combinando (2.32), (2.40), (2.41) e (2.42) resulta em (2.43)

$$H_{CL}(q^{-1}) = \frac{q^{-d}T(q^{-1})B^+(q^{-1})B^-(q^{-1})}{A(q^{-1})S(q^{-1}) + (q^{-d})R(q^{-1})B^+(q^{-1})B^-(q^{-1})} = \frac{B^-(q^{-1})B'_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} \quad (2.43)$$

O polinômio S pode ser escolhido para conter os fatores não compensados de $B(q^{-1})$, ou seja, $B^+(q^{-1})$, como (2.44). Caso ele seja escolhido com esse intuito, então (2.43) fica da forma (2.45).

$$S(q^{-1}) = B(q^{-1})^+ S'(q^{-1}) \quad (2.44)$$

$$\frac{T(q^{-1})}{S'(q^{-1})A(q^{-1}) + R(q^{-1})B^-(q^{-1})} = \frac{B^-(q^{-1})B'_m(q^{-1})}{A_m(q^{-1})} \quad (2.45)$$

Da equação (2.45), as 2 equações podem ser obtidas para determinar R, S e T

$$T(q^{-1}) = B'_m(q^{-1}) \quad (2.46)$$

$$S'(q^{-1})A(q^{-1}) + R(q^{-1})B^-(q^{-1}) = A_m(q^{-1}) \quad (2.47)$$

Quando é desejado eliminar o erro em regime permanente quando o sistema em malha fechada necessitar rastrear um entrada de referência, é introduzida uma equação diofantina

auxiliar (2.48) por [Ostertag and Godoy, 2005], [Ostertag, 1999] fornece $B'_m(q^{-1})$ e $T(q^{-1})$. Baseando-se nas dinâmicas da resposta desejada ($A_m(q^{-1})$) e nos zeros não compensados da planta ($B^-(q^{-1})$). Para completar a equação, um polinômio auxiliar L é adicionado.

$$X(q^{-1})L(q^{-1}) + B^-(q^{-1})B'_m(q^{-1}) = A_m(q^{-1}) \quad (2.48)$$

O polinômio $X(q^{-1})$ em (2.48) deve ser escolhido de acordo com o tipo de entrada de referência que a saída deve rastrear. Portanto, para uma entrada do tipo degrau, X é dado por (2.49).

$$X|_{step} = 1 - q^{-1} \quad (2.49)$$

Para uma entrada do tipo rampa, X é dado por (2.50)

$$X|_{ramp} = (1 - q^{-1})^2 \quad (2.50)$$

Para uma entrada do tipo senoide, X é dado por (2.51)

$$X|_{sinusoidal} = 1 - 2\cos(\omega_0 \cdot T_s)q^{-1} + q^{-2} \quad (2.51)$$

onde ω_0 é a frequência angular da senoide de referência, com tempo de amostragem T_s segundos.

Se a entrada de referência for uma combinação de várias senoides (em frequências diferentes), os polinômios X das respectivas senoides devem ser multiplicados [Ostertag and Godoy, 2005].

O desempenho dos controladores aplicados em plantas são de grande importância para a otimização do uso de insumos, do consumo de energia e, conseqüentemente, uma maior lucratividade. Ultimamente, foi percebido a presença de problemas de desempenho nos processos industriais. É sabido que mesmo os controladores sendo sintonizados corretamente, alterações nas dinâmicas do sistema e as perturbações, podem tornar o controle ineficiente [Andreis, 2017].

2.3 Índices de Desempenho de Controladores

Conforme [Perez Serrano, 2020], levando em conta um sistema com sinal de referência $r(t)$ e saída $y(t)$, é definido $e(t)$ como $e(t) = r(t) - y(t)$. Também considerando o caso onde $\lim_{x \rightarrow \infty} = 0$, é obtido um sistema estável. Com isso, é adquirido um índice de desempenho finito. Dessa forma, pode-se definir os índices de desempenho mais conhecidos. A seguir, serão discutidos os índices IAE, ISE, ITAE, RBMSEMCE, RBMSEMCE, Variabilidade e *Goodhart*.

Para [Perez Serrano, 2020], o critério de desempenho IAE leva em conta a integral do

módulo do erro $e(t)$. De acordo com [Filho and de Paiva, 2011], o IAE é um dos índices mais utilizados e pode ser calculado pela seguinte equação:

$$IAE = \int_0^{\infty} |e(t)| dt$$

Conforme [Filho and de Paiva, 2011], "um sistema ótimo baseado nesse critério é um sistema que possui amortecimento aceitável e apresenta uma resposta transitória satisfatória". De acordo com [Perez Serrano, 2020], esse índice não apresenta muita seletividade, ou seja, um ajuste ótimo não é diferenciado de um ajuste não ótimo com facilidade.

Para [Perez Serrano, 2020], o ISE tem como particularidade utilizar grandes pesos para erros grandes e pequenos pesos para erros pequenos. Ele é bastante utilizado por conta da sua facilidade em ser implementado. O ISE é determinado como:

$$I_{ISE} = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$$

Contudo, esse índice não tem muita seletividade, uma vez que as variações nos parâmetros do sistema levam a pequenas variações no índice ISE. Ao minimizar esse critério, os sistemas tendem a apresentar uma rápida resposta, mas tem pequena estabilidade relativa, apresentando oscilações

Conforme [Filho and de Paiva, 2011], no critério ITAE, o erro absoluto $e(t)$ é ponderado pelo tempo, resultando em uma pequena ponderação para um erro inicial grande, enquanto que um erro pequeno na resposta nos tempos finais é muito penalizado.

$$I_{TAE} = \int_0^{\infty} t|e(t)| dt$$

De acordo com [Perez Serrano, 2020], o critério de desempenho RBEMCE é determinado como: "o critério RBEMCE (*Reference Based Error with Minimum Control Effort*) considera um fator muito importante na estratégia de controle, além do erro $e(t)$: o esforço do controle $u(t)$. O termo β é um valor de ponderação para o sinal de controle. Entende-se por esforço de controle o somatório da saída do controlador durante um período n , ou seja, o quanto de energia é utilizado para o controle, visto que, fisicamente falando, a saída do controlador excita um atuador, resultando em seu desgaste. Em outras palavras, define-se"

$$I_{RBEMCE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [e(i)] + \frac{\beta}{n} \sum_{i=1}^n u(i)$$

Segundo [Perez Serrano, 2020], o critério de desempenho RBMSEMCE é definido da seguinte forma: "o critério RBMSEMCE (*Reference Based in Mean Square Error with Minimum Control Effort*) provê duas características importante: primeiramente, ele reflete todas as variações e desvios em relação à referência dando grandes ponderações para

erros grandes e pequenas ponderações para erros pequenos; e em segundo lugar refina a função de avaliação, levando-se em conta o esforço de controle $u(t)$. Em outras palavras, define-se:”

$$I_{RBMSEMCE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [e^2(i)] + \frac{\beta}{n} \sum_{i=1}^n u(i)$$

De acordo com [Perez Serrano, 2020](#), o critério de desempenho variabilidade é estabelecido como: ”a variabilidade da variável controlada é uma boa medida para se analisar o quanto uma certa variável se dispersa em relação à sua média. O termo \hat{y} é o valor médio de $y(t)$. Como se deseja que a saída de uma malha alcance o valor da referência, pode-se concluir que o valor da variância de determinado sinal deve ser o menor possível. Pode-se expressar a variância pela seguinte equação:”

$$\text{Variabilidade} = \frac{2\sigma}{\mu}$$

onde

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y(i) - \hat{y})^2$$

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y(i)$$

Conforme [Goodhart et al., 1991](#), o índice *Goodhart* é composto pela soma de 3 critérios e é dado por:

$$\epsilon = \alpha_1 \cdot \epsilon_1 + \alpha_2 \cdot \epsilon_2 + \alpha_3 \cdot \epsilon_3$$

Onde α_1 , α_2 e α_3 , são, respectivamente, as ponderações dos critérios ϵ_1 , ϵ_2 e ϵ_3 . Essas ponderações são escolhidas para revelar o custo do sinal de controle, o desgaste do atuador e o sinal de erro. Os critérios ϵ_1 , ϵ_2 e ϵ_3 são descritos pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\sum u(t)}{\chi} \\ \epsilon_2 &= \frac{\sum [u(t) - \epsilon_1]^2}{\chi} \\ \epsilon_3 &= \frac{\sum |r(t) - y(t)|}{\chi} \end{aligned}$$

Sendo χ o tempo de duração dos teste, $u(t)$ representa a ação de controle, $r(t)$ representa a referência e $y(t)$ é a resposta do sistema.

Por fim, destaca-se que, para os sistemas utilizados e descritos no próximo capítulo,

não foram levadas em consideração alguns aspectos teóricos a respeito da discretização dos mesmos. Também é importante destacar que ambas as metodologias de RST e MQR descritos nesse capítulo levam em consideração sistemas discretos.

Capítulo 3

Estudos de Caso

Com o objetivo de verificar o comportamento dos algoritmos estudados, nesse capítulo, é apresentado a descrição matemática dos sistemas simulados.

3.1 Sistema de 2ª Ordem

O primeiro sistema simulado foi um de segunda ordem dado por $G(s) = \frac{1}{0,1s^2 + 1,1s + 1}$, um sistema com dois polos reais. O período de amostragem utilizado para discretização foi $T_a = 0,1s$. O método utilizado para a discretização do sistema foi o segurador de ordem zero. Ao discretizar o referido sistema, obtemos a função de transferência $G_d = \frac{z^{-1}(0,003762 + 0,002873z^{-1})}{1 - 1,154z^{-1} + 0,4493z^{-2}}$. Nas figuras (3.1) e (3.2) podemos observar a localização dos polos e zeros do sistema.

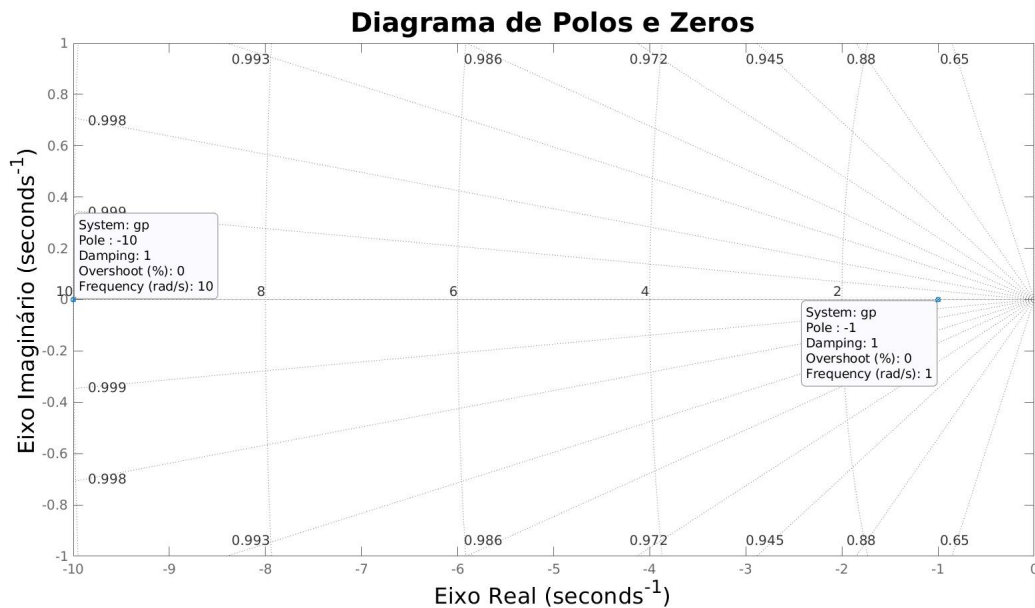


Figura 3.1: Polos e Zeros em tempo contínuo - Sistema 2ª Ordem

O sistema possui dois polos reais, $p_1 = -1$ e $p_2 = -10$. Ambos os polos estão no semi-plano esquerdo do plano s .

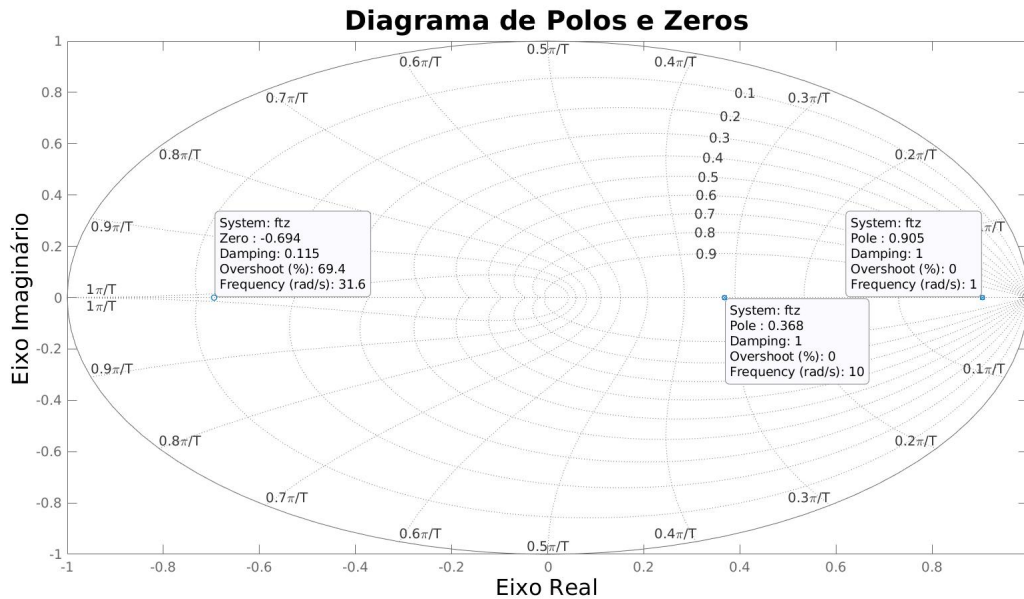


Figura 3.2: Polos e Zeros em tempo discreto - Sistema 2ª Ordem

Como pode ser observado na Figura (3.2), o sistema possui polos em 0,368 e 0,905 e um zero em -0,694 . Fica claro que os polos do sistema estão dentro do círculo unitário. Dessa forma, podemos observar que o sistema é estável.

3.2 Sistema Massa Mola Amortecedor

Nesse trabalho, as equações de movimento do sistema serão desenvolvidas de acordo com as equações das leis de Newton, cada bloco é analisado através do diagrama de corpo livre e restringindo o movimento linear a apenas o movimento em um plano. Assim, é possível definir as equações diferenciais do sistema.

O sistema modelado [Nise, 2013], Figura (3.3), consiste em dois blocos, que sofrem força de atrito com o chão, ligadas entre si por uma mola e um amortecedor, e presas a paredes por duas outras molas. Além disso, o sistema apresenta como entrada uma força atuando sobre o primeiro bloco e como saída a posição do primeiro ou do segundo bloco.

A modelagem do sistema teve início a partir da análise do diagrama de corpo livre para ambos os blocos, como é mostrado na Figura (3.4) . Em seguida, utiliza-se a 2ª lei de Newton para descrever a relação das forças no bloco 1 como:

$$(k_1 + k_2) \cdot x_1 - k_2 \cdot x_2 + (b_1 + b_3) \cdot \dot{x}_1 - b_3 \cdot \dot{x}_2 + m_1 \cdot \ddot{x}_1 = f(t) \quad (3.1)$$

A relação de forças no bloco 2 é dada por:

$$-k_2 \cdot x_1 - b_3 \cdot \dot{x}_1 + (k_2 + k_3) \cdot x_2 + (b_2 + b_3) \cdot \dot{x}_2 + m_2 \cdot \ddot{x}_2 = 0 \quad (3.2)$$

onde k_1 , k_2 e k_3 representam as constantes elásticas das molas, b_1 , b_2 e b_3 representam os coeficientes de atrito viscoso, $f(t)$ representa a força aplicada ao bloco 1, x_1 e x_2 indicam as posições dos blocos e m_1 e m_2 representam as massas dos blocos.

Aplicando a Transformada de Laplace nas equações de movimento (3.1) e (3.2) obtemos:

$$(k_1 + k_2) \cdot s \cdot X_1 - k_2 \cdot X_2 + (b_1 + b_3) \cdot s \cdot X_1 - b_3 \cdot s \cdot X_2 + m_1 \cdot s^2 \cdot X_1 = F(s) \quad (3.3)$$

$$-k_2 \cdot X_1 - b_3 \cdot s \cdot X_1 + (k_2 + k_3) \cdot X_2 + (b_2 + b_3) \cdot s \cdot X_2 + m_2 \cdot s^2 \cdot X_2 = 0 \quad (3.4)$$

A partir das equações (3.3) e (3.4) podemos escrever a função de transferência, $\frac{X_2(s)}{F(s)}$, que relaciona a força aplicada ao bloco 1 e a posição do bloco 2.

$$\frac{X_2(s)}{F(s)} = G(s) = \frac{(b_3 s + k_2)}{\Delta}$$

onde

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_1 \cdot s^2 + (b_1 + b_2) \cdot s + (k_1 + k_2) & -(b_3 + k_2) \\ -(b_3 + k_2) & m_2 \cdot s^2 + (b_2 + b_3) \cdot s + (k_2 + k_3) \end{vmatrix}$$

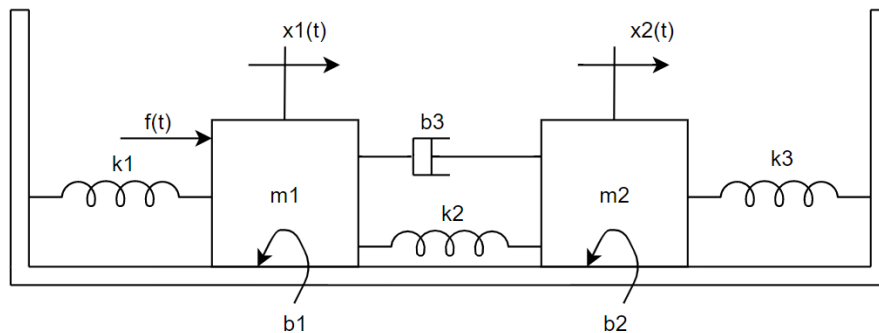


Figura 3.3: Sistema Massa-Mola-Amortecedor.

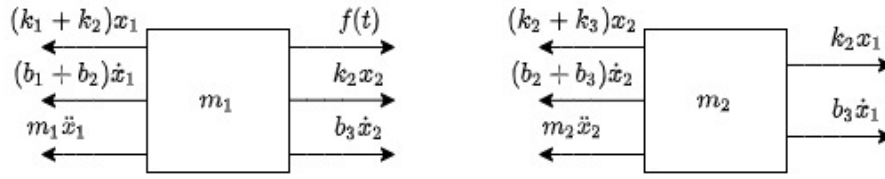


Figura 3.4: Diagrama de Corpo Livre das Massas.

Para o sistema massa mola amortecedor, foram escolhidos os seguintes parâmetros: $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 4\text{kg}$, $k_1 = 1 \text{ N/m}$, $k_2 = 1 \text{ N/m}$, $k_3 = 1 \text{ N/m}$, $b_1 = 0.1 \text{ N.s/m}$, $b_2 = 0.4 \text{ N.s/m}$, $b_3 = 1 \text{ N.s/m}$. Com isso, obtemos a função de transferência dada por $G_s = \frac{s+1}{4s^4+5,8s^3+10,54s^2+3s+3}$. O método utilizado para a discretização do sistema foi o segurador de ordem zero. Ao discretizar o referido sistema, obtemos a função de transferência $G_d = \frac{z^{-1}(0,03396+0,09564z^{-1}-0,01374z^{-2}-0,009646z^{-3})}{1-1,836z^{-1}+1,585z^{-2}-0,6651z^{-3}+0,2346z^{-4}}$. Nas figuras (3.5) e (3.6) podemos observar a localização dos polos e zeros do sistema.

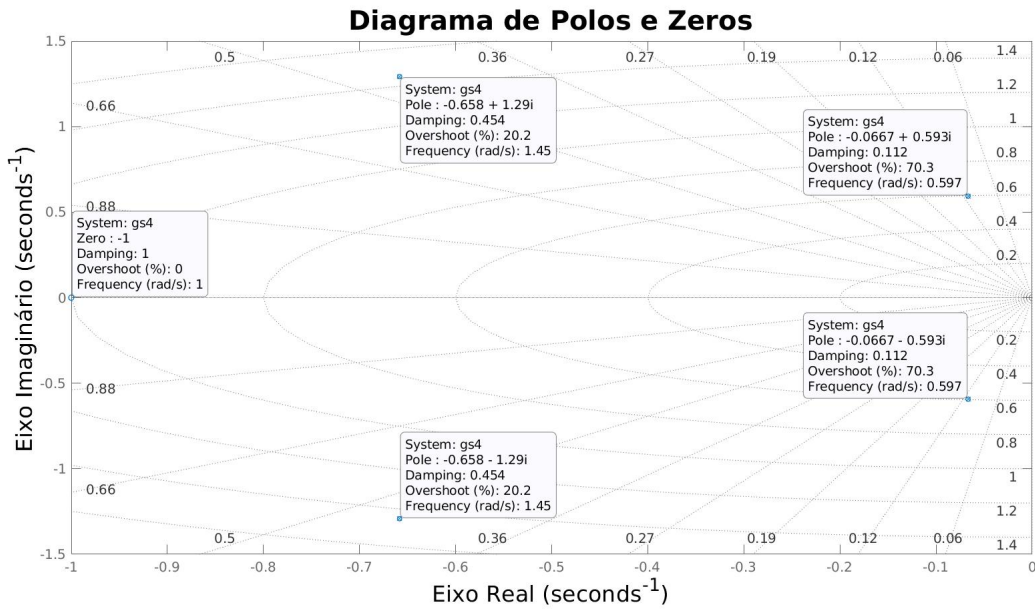


Figura 3.5: Polos e Zeros em tempo contínuo - Sistema 2ª Ordem

Esse sistema tem quatro polos complexos e um zero. São eles: $p_1 = -0,658 + 1,29i$, $p_2 = -0,658 - 1,29i$, $p_3 = -0,0667 + 0,593i$, $p_4 = -0,0667 - 0,593i$ e $z_1 = -1$.

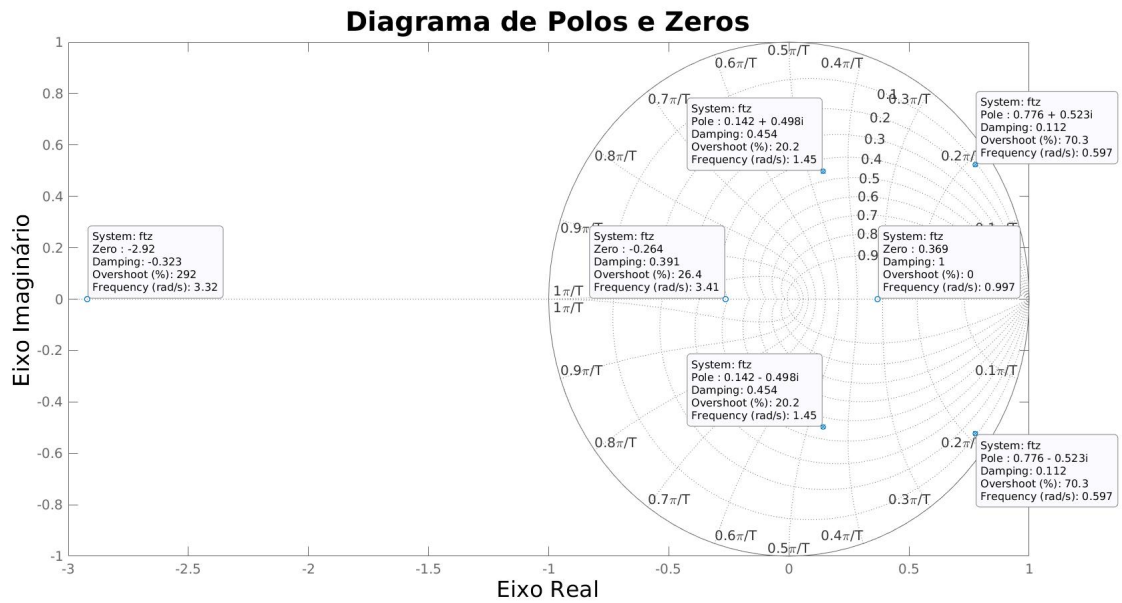


Figura 3.6: Polos e Zeros em tempo discreto - Sistema 2^a Ordem

Como pode ser observado na Figura (3.6), o sistema possui quatro polos e três zeros. São eles: $p_1 = 0,142 + 0,498i$, $p_2 = 0,142 - 0,498i$, $p_3 = -0,776 + 0,523i$, $p_4 = -0,776 - 0,523i$, $z_1 = -2,92$, $z_2 = 0,369$ e $z_3 = -0,264$.

Os sistemas apresentados neste capítulo apresentam diferentes situações e foram utilizados para validar a metodologia de controlador proposta neste trabalho. No próximo capítulo serão apresentados os resultados obtidos.

Capítulo 4

Metodologia

4.1 Sistema 2^a Ordem

A seguir, é descrita a simulação do sistema para uma entrada degrau. Foi aplicado um degrau no sistema em malha aberta, e em malha fechada com realimentação unitária.

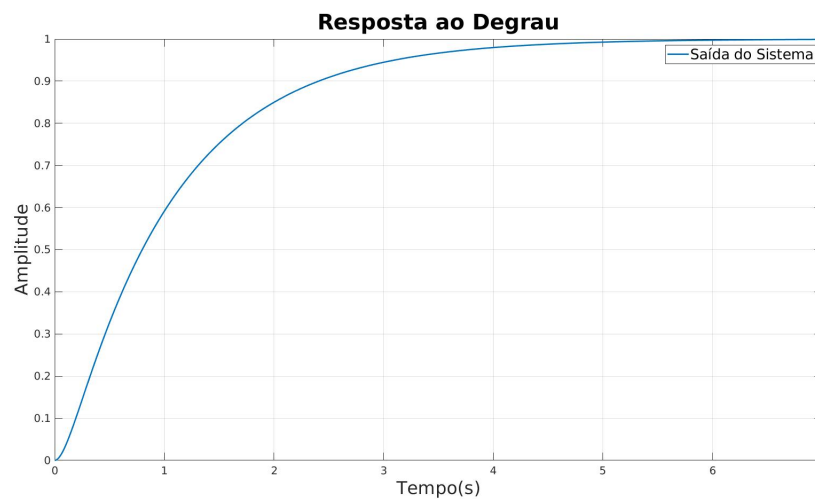


Figura 4.1: Resposta ao degrau - Sistema 2^a Ordem

Esse sistema apresentou um tempo de subida de 2,2s, tempo de acomodação de 4,02s, não apresentou *overshoot*, valor final de 1.

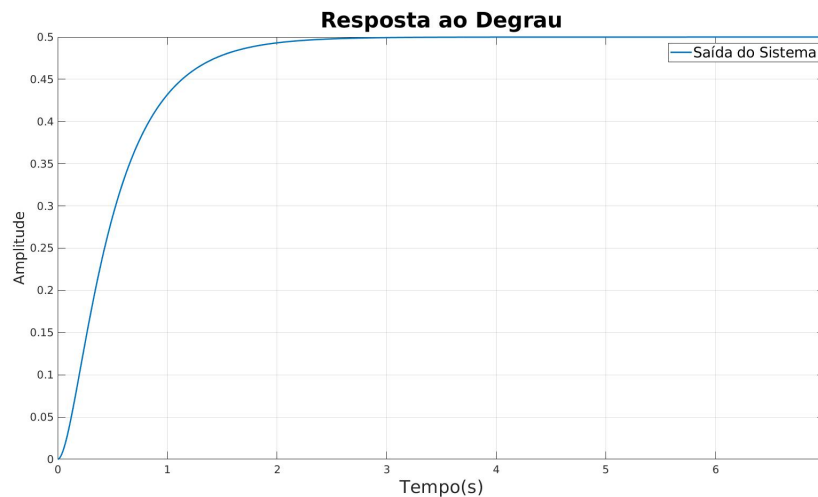


Figura 4.2: Resposta ao degrau - Sistema 2ª Ordem

Já para uma realimentação unitária, o sistema se comportou de acordo com a Figura (4.2). Apresentou um tempo de subida de 1,01s, tempo de acomodação de 1,84s, não apresentou *overshoot*, valor final de 0,5 o que mostra que esse sistema é do tipo 0 já que possui erro constante em regime permanente.

Na próxima seção, é feita a descrição do comportamento do sistema massa mola amortecedor.

4.2 Sistema Massa Mola Amortecedor

A resposta ao degrau desse sistema é:

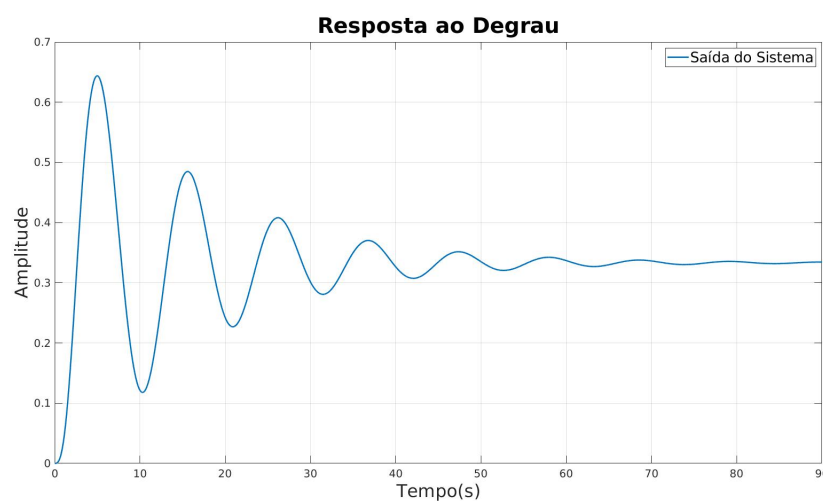


Figura 4.3: Resposta ao degrau malha aberta - Sistema Massa Mola Amortecedor

Esse sistema apresentou um tempo de subida de 1,49s, tempo de acomodação de 59,2s, tempo de pico de 5,04s, *overshoot* de 93,1% e valor final de 0,333. Pela Figura (4.3),

podemos observar que esse sistema é do tipo 0, pois apresenta erro constante em regime permanente para uma entrada do tipo degrau. Foi escolhido o tempo de amostragem de 1s para discretizar o sistema. Com isso, obtemos a seguinte função de transferência do sistema discretizado: $Gd = \frac{z^{-1}(0,03396+0,09564z^{-1}+0,01374z^{-2}-0,009646z^{-3})}{1-1,836z^{-1}+1,585z^{-2}+0,665z^{-3}+0,2346z^{-4}}$.

O comportamento do referido sistema com uma realimentação unitária pode ser observado na Figura (4.4). Foi obtido um tempo de subida de 1,29s, tempo de acomodação de 48,5s, tempo de pico de 4,32s, *overshoot* de 103% e valor final de 0,25.

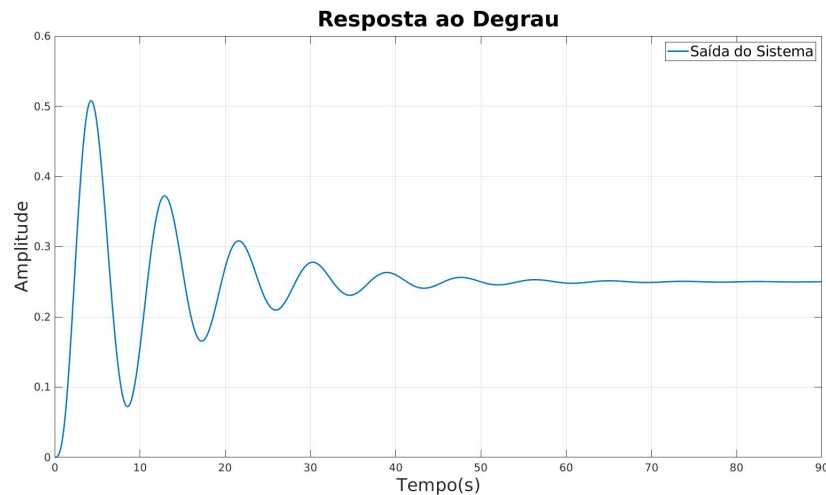


Figura 4.4: Resposta ao degrau malha fechada - Sistema Massa Mola Amortecedor

Nessa seção, foi demonstrado a resposta ao degrau do sistema massa mola amortecedor. Na próxima seção, é demonstrado a implementação dos principais blocos do controlador no programa *Simulink*. O restante da implementação do controlador está no apêndice do trabalho.

4.3 Controlador Auto-Regulável

Na Figura (4.5) é demonstrado a implementação do sistema controlado no programa *Simulink*.

No bloco de entrada, é escolhido qual sinal de referência o sistema recebe. A seleção do sinal de entrada é feita a partir de um *rotatory switch* 'Tipo de Entrada'. Na posição 1, o sistema recebe uma entrada degrau. Na posição 2, o sistema recebe uma entrada do tipo rampa. E na posição 3, o sistema recebe uma entrada do tipo senoide.

Tal configuração pode ser observada na Figura (4.6). Já no *rotatory switch* 'Entrada Esperada' o controlador faz o cálculo dos polinômios R, S e T para uma determinada entrada. Na posição 1, o controlador é sintonizado para uma entrada degrau. Na posição 2, o controlador é sintonizado para uma entrada do tipo rampa. E na posição 3, o controlador é sintonizado para uma entrada do tipo senoide.

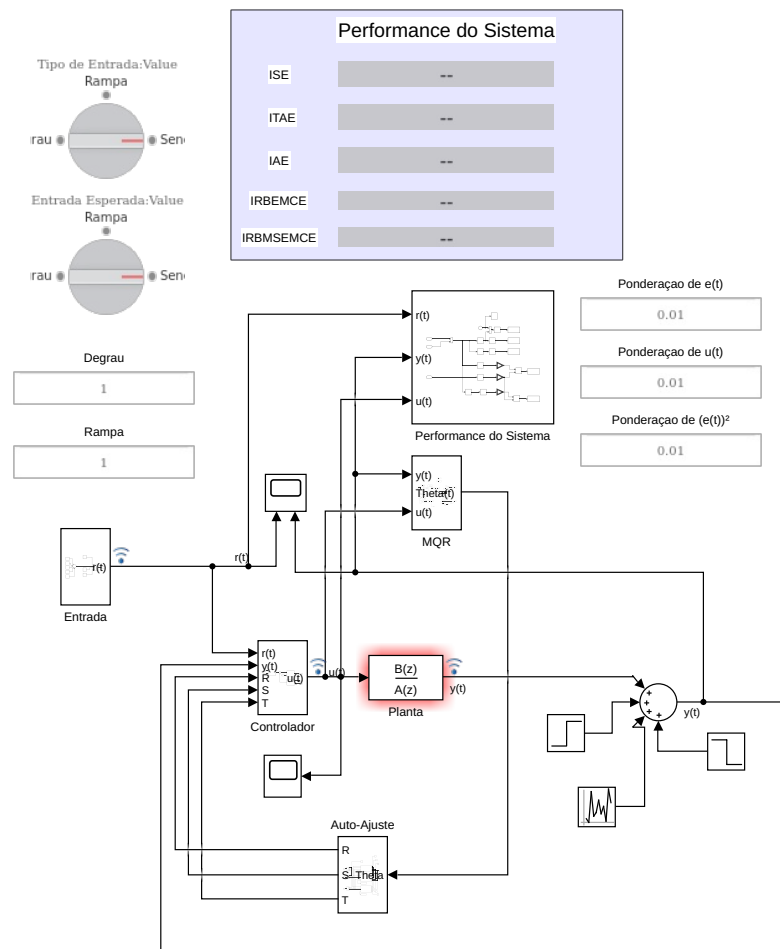


Figura 4.5: Sistema simulado com controlador

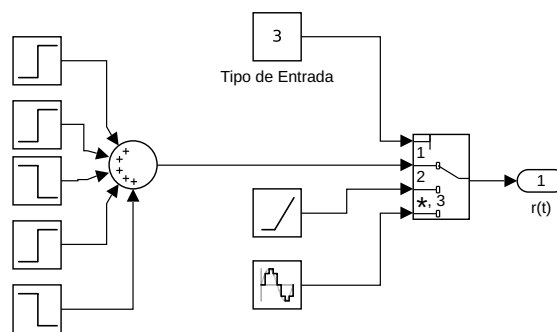


Figura 4.6: Bloco de Entrada

No bloco da Figura (4.7), são recebidos os sinais de referência $r(t)$ que serão utilizados na simulação do sistema, o sinal de saída $y(t)$ e os sinais de ajuste dos coeficientes dos polinômios R, S e T. Tendo como saída do bloco o sinal de controle $u(t)$ que alimenta a planta simulada.

No bloco da Figura (4.8), são implementadas as equações em (2.26). Para a construção das referidas equações, são utilizados o sinal de controle $u(t)$ e o sinal de saída $y(t)$. A partir desse conjunto de medições, são computados os parâmetros estimados do modelo

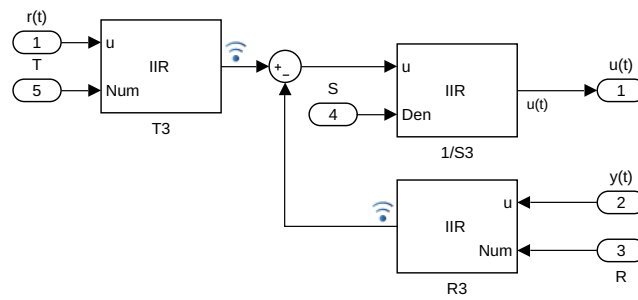


Figura 4.7: Bloco do Controlador

da planta simulada dados pela matriz $\hat{\theta}$.

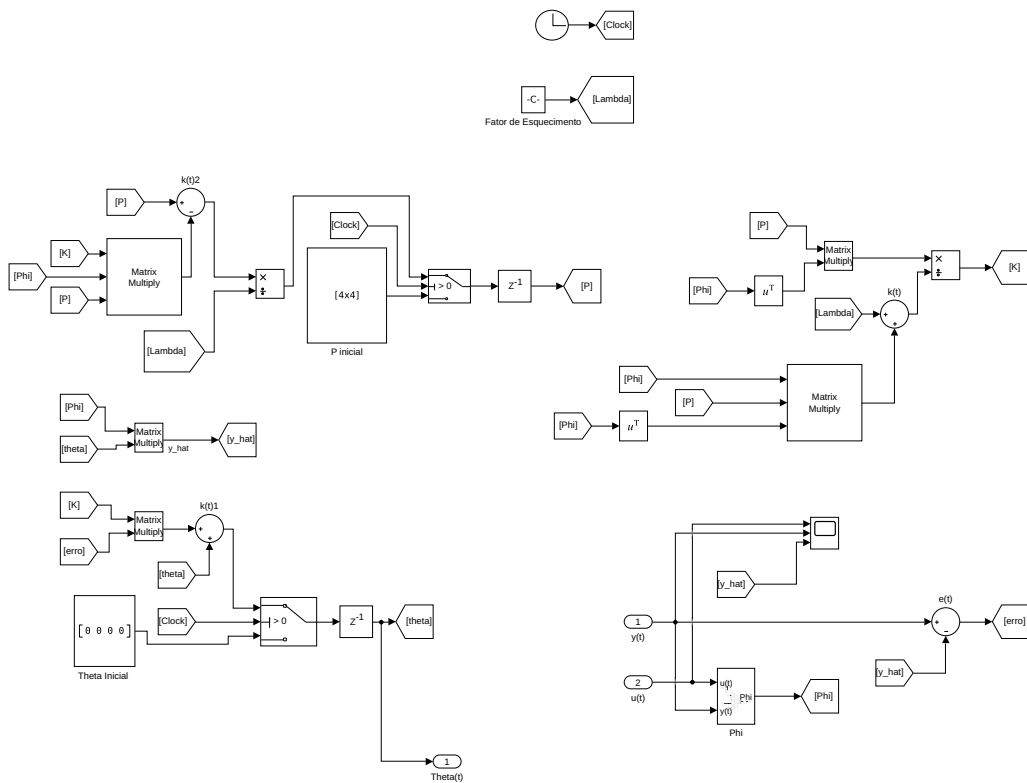


Figura 4.8: Bloco do MQR

No bloco da Figura 4.9, são calculados em tempo real para os sistemas simulados os índices de desempenho: ISE, ITAE, IAE, IRBEMCE, IRBMSEMCE. Dessa forma, é possível observar se o sistema apresenta um erro grande em regime permanente, se há um esforço muito grande do controlador para garantir que o sistema consiga chegar ao sinal de referência.

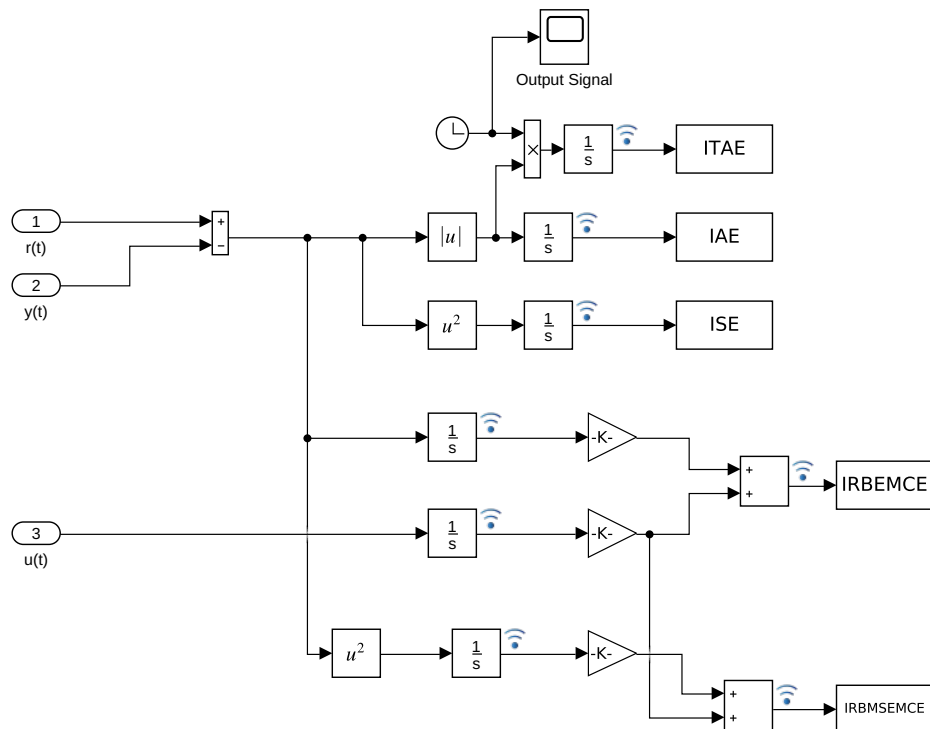


Figura 4.9: Bloco da Performance do Sistema

No bloco (4.10), são calculados para entradas do tipo: degrau, rampa e senoide, os coeficientes do polinômios R, S, T de acordo com as especificações de desempenho desejadas (tempo de amostragem, tempo de estabilização e coeficiente de amortecimento) e de acordo com o modelo estimado da planta obtido no bloco (4.8). Também são utilizadas as especificações: frequência da senoide e tempo de amostragem da senoide para computar os coeficientes dos polinômios para esse tipo de entrada. De acordo com o valor do bloco 'entrada esperada' são escolhidos os coeficientes dos polinômios R, S e T para um determinado tipo de entrada.

Se o valor do bloco for 1, a saída são os coeficientes para uma entrada do tipo degrau. Se o valor do bloco for 2, a saída são os coeficientes para uma entrada do tipo rampa. Se o valor do bloco for 3, a saída são os coeficientes para uma entrada do tipo senoide. Caso o tipo de entrada selecionado seja degrau ou rampa, o controlador faz os cálculos para uma entrada do tipo senoide com frequência de 1 rad/s e tempo de amostragem igual ao da planta simulada.

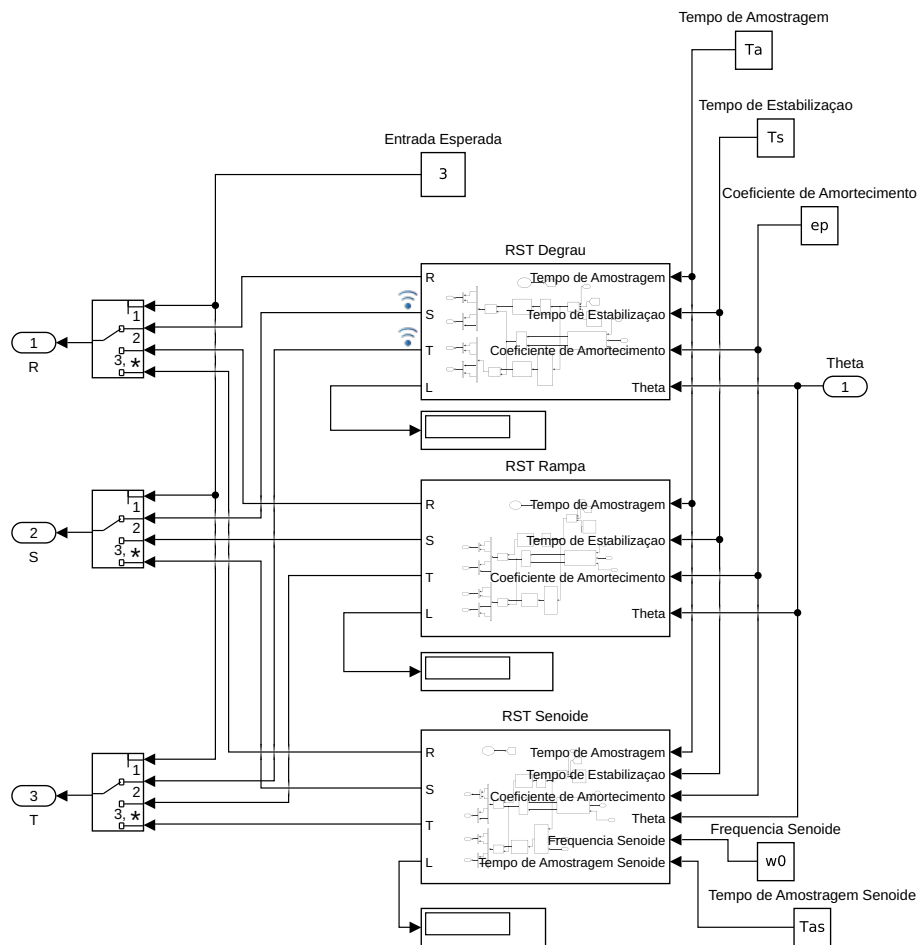


Figura 4.10: Bloco da Auto-Regulação do Controlador

No próximo capítulo são demonstrados os resultados obtidos na aplicação do controlador auto-regulável em sistemas simulados.

Capítulo 5

Resultados

5.1 Sistema de 2ª Ordem

Para o sistema de 2ª ordem, foram utilizadas as seguintes especificações de desempenho: tempo de estabilização (T_s) de 1 segundo e coeficiente de amortecimento (ζ) igual a 0,7. Dessa forma, o sistema foi simulado para as entradas: degrau, rampa e senoide. O controlador também foi projetado para as referidas entradas. Foi feito o comparativo entre a entrada do sistema e a entrada para a qual o controlador foi projetado.

São demonstrados os gráficos de entrada de referência x saída do sistema e o gráfico do sinal de controle. Também são demonstrados os índices de desempenho do sistema. Os valores de θ utilizados no início da simulação são descritos a seguir:

Valor de θ inicial utilizado para sinal de referência degrau.

$$\theta = \begin{bmatrix} -0,31 \\ 0,55 \\ 0,0021 \\ 0,12 \end{bmatrix}$$

Valor de θ inicial utilizado para sinal de referência rampa.

$$\theta = \begin{bmatrix} -0,54 \\ -0,33 \\ 0,0324 \\ 0,0840 \end{bmatrix}$$

Valor de θ inicial utilizado para sinal de referência senoide.

$$\theta = \begin{bmatrix} -0,33 \\ -0,53 \\ 0,015 \\ 0,11 \end{bmatrix}$$

Os valores de theta inicial foram escolhidos através de simulação. Foi aplicado o sinal de referência e escolhido os thetas para os quais o sistema permaneceu estável.

O sistema foi simulado na presença de perturbação. A perturbação simula condições reais de operação que na maioria das vezes apresentam perturbação no formato de degraus (referência) e o ruído aparece geralmente descrito na forma de uma distribuição gaussiana com média 0. A Figura (5.1) ilustra o sinal de perturbação utilizado nos testes do sistema.

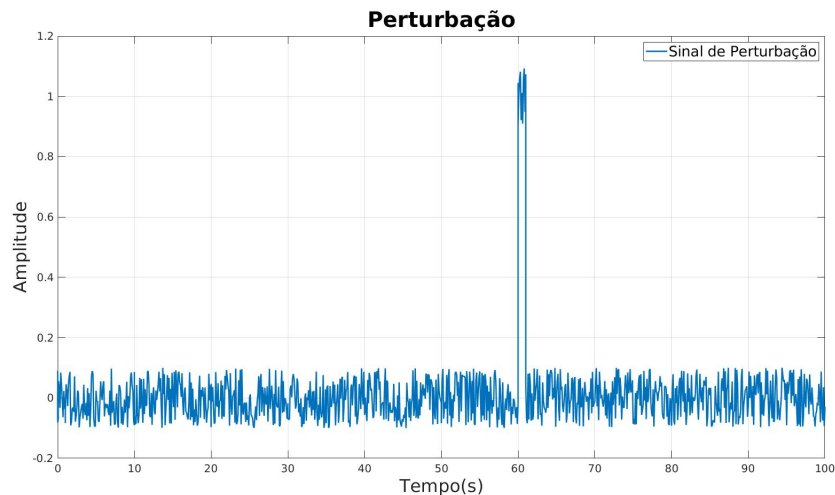


Figura 5.1: Sinal de Perturbação

A Figura (5.1) representa a perturbação aplicada durante a simulação do sistema. No instante de tempo 60s é possível observar um pico na amplitude do sinal de perturbação. A aplicação desse pico tem o objetivo de verificar se o sistema continua estável.

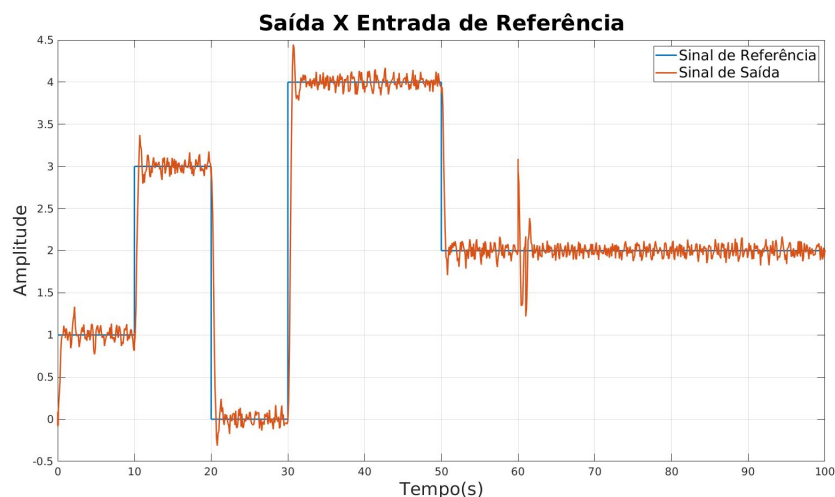


Figura 5.2: Saída x Sinal de Referência Entrada Degrau Controle Degrau

A Figura (5.2) representa o valor de saída do sistema em comparação com o valor de entrada. Nesse caso, o sinal de referência é uma entrada degrau e o controlador foi projetado para um sinal de referência degrau.

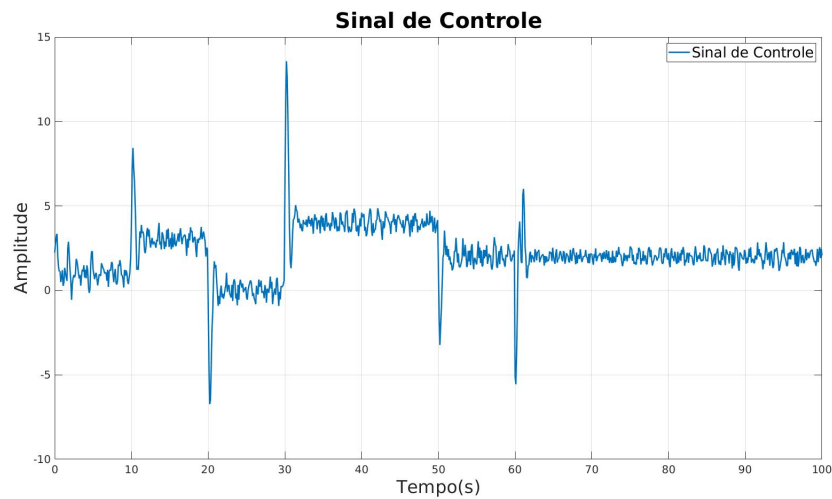


Figura 5.3: Sinal de Controle para Sinal de Referência Degrau Controle Degrau

A Figura (5.3) representa o sinal de controle aplicado. É mostrado como o sinal de controle atua para um sinal de referência degrau quando o controlador foi projetado para uma entrada de referência degrau.

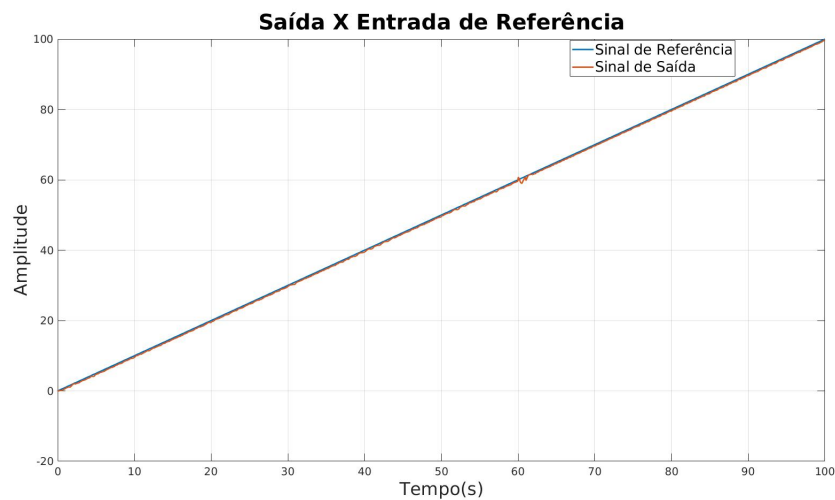


Figura 5.4: Saída x Sinal de Referência Entrada Rampa Controle Degrau

A Figura (5.4) representa o valor de saída do sistema em comparação com o valor de entrada. Nesse caso, o sinal de referência é uma entrada rampa e o controlador foi projetado para um sinal de referência degrau.

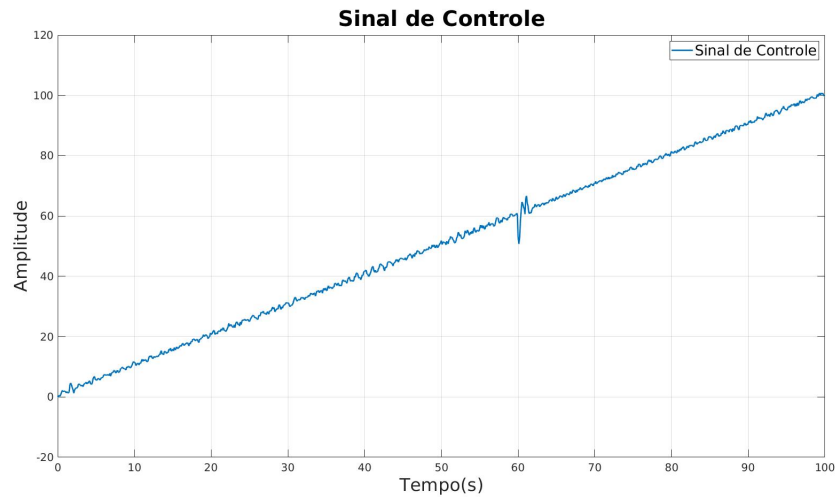


Figura 5.5: Sinal de Controle para Sinal de Referência Rampa Controle Degrau

A Figura (5.5) representa o sinal de controle aplicado. É mostrado como o sinal de controle atua para um sinal de referência rampa quando o controlador foi projetado para uma entrada de referência degrau.

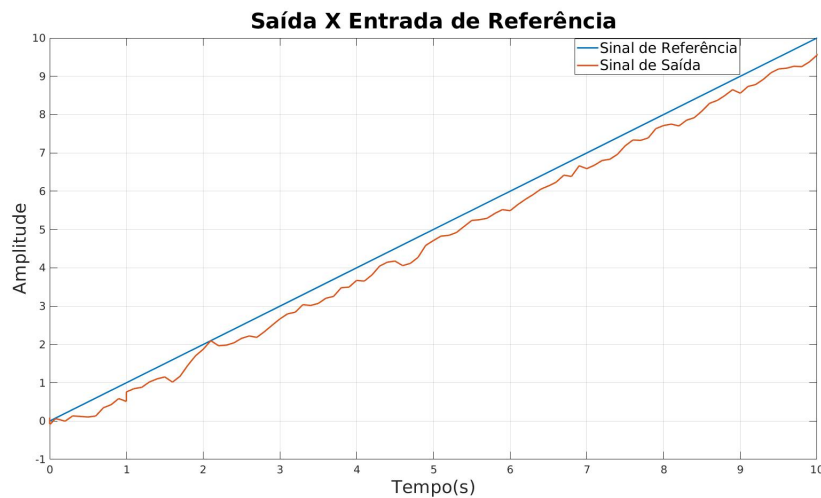


Figura 5.6: Saída x Sinal de Referência Entrada Rampa Controle Degrau primeiros 10 segundos

A Figura (5.6) representa o valor de saída do sistema em comparação com o valor de entrada nos primeiros 10 segundos de simulação do sistema para uma entrada de referência rampa e com controlador projetado para entrada degrau.

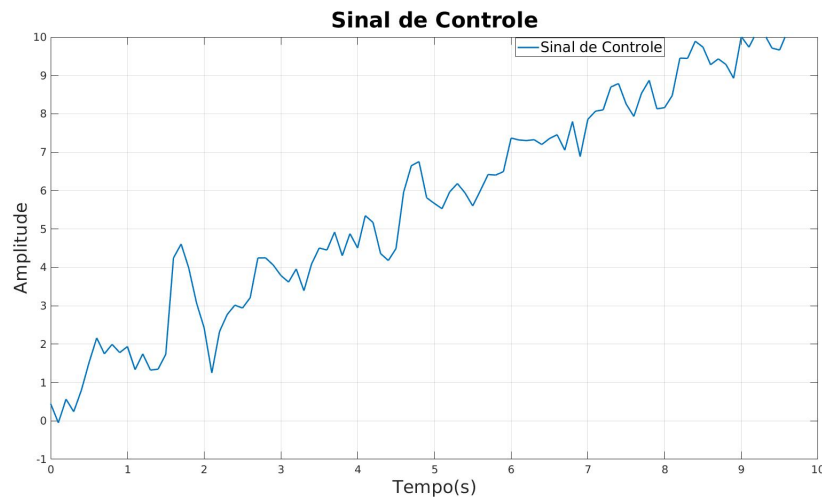


Figura 5.7: Sinal de Controle para Sinal de Referência Rampa Controle Degrau primeiros 10 segundos

A Figura (5.7) representa o valor do sinal de controle nos primeiros 10 segundos de simulação do sistema para uma entrada de referência rampa e com controlador projetado para entrada degrau.

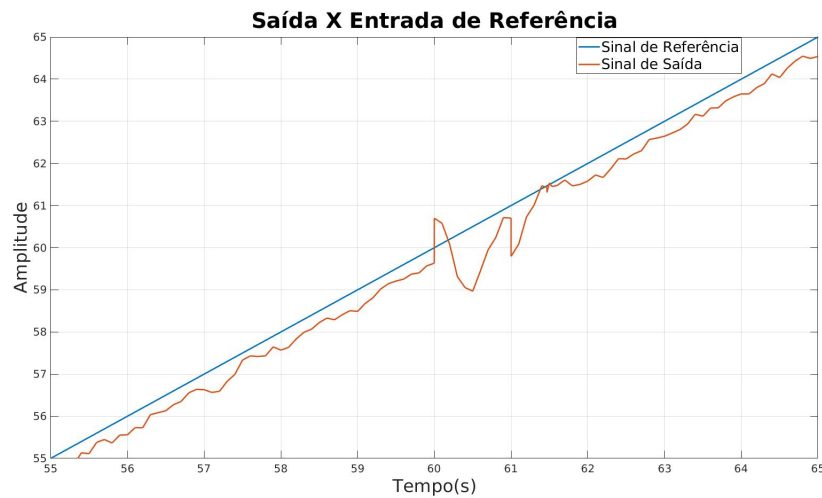


Figura 5.8: Sinal de Controle para Sinal de Referência Rampa Controle Degrau no instante de perturbação

A Figura (5.8) representa o valor de saída do sistema em comparação com o valor de entrada no instante do pico da perturbação durante a simulação do sistema para uma entrada de referência rampa e com controlador projetado para entrada degrau.

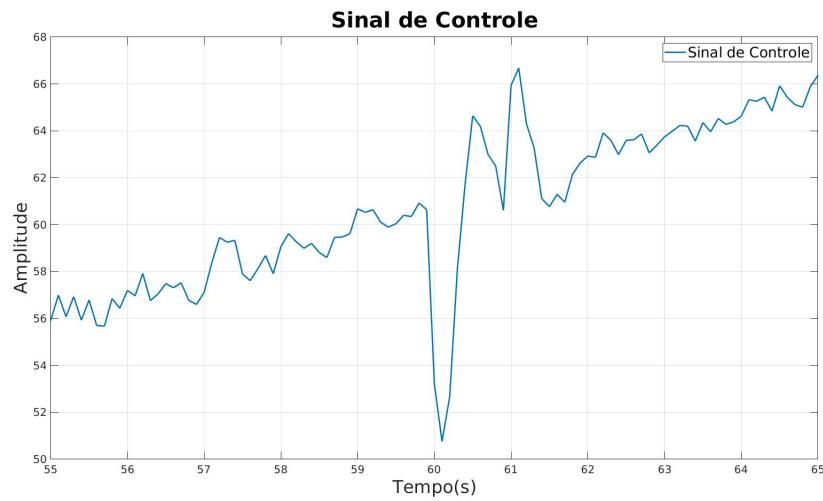


Figura 5.9: Sinal de Controle Entrada Rampa Controle Degrau no instante de perturbação

A Figura (5.9) representa o valor do sinal de controle no instante do pico da perturbação durante a simulação do sistema para uma entrada de referência rampa e com controlador projetado para entrada degrau.

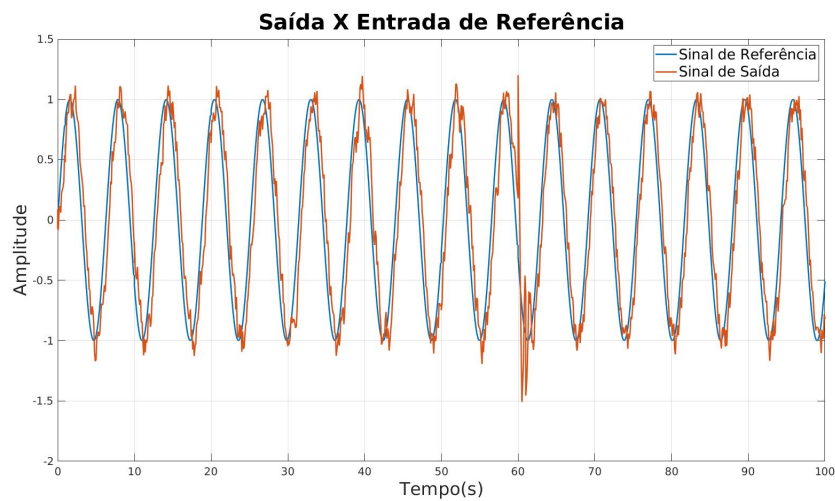


Figura 5.10: Saída x Sinal de Referência Entrada Senoide Controle Degrau

A Figura (5.10) representa o valor de saída do sistema em comparação com o valor de entrada. Nesse caso, o sinal de referência é uma senoide degrau e o controlador foi projetado para um sinal de referência degrau.

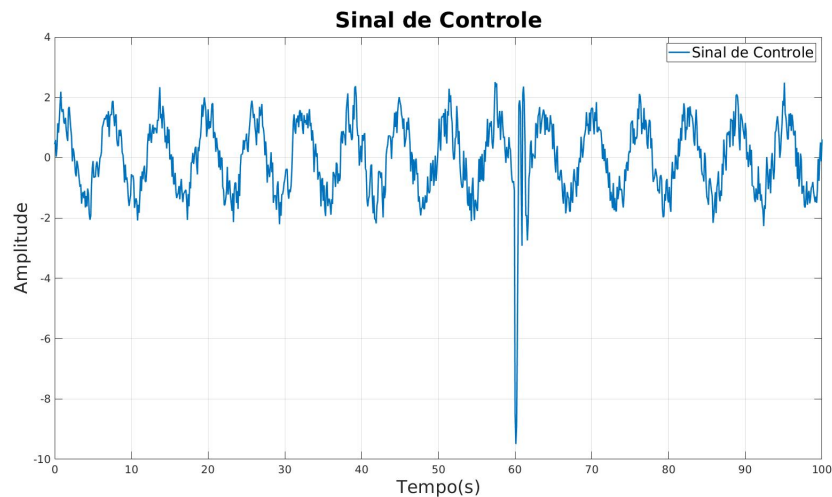


Figura 5.11: Sinal de Controle para Sinal de Referência Senoide Controle Degrau

A Figura (5.11) representa o sinal de controle aplicado. É mostrado como o sinal de controle atua para um sinal de referência senoide quando o controlador foi projetado para uma entrada de referência degrau.

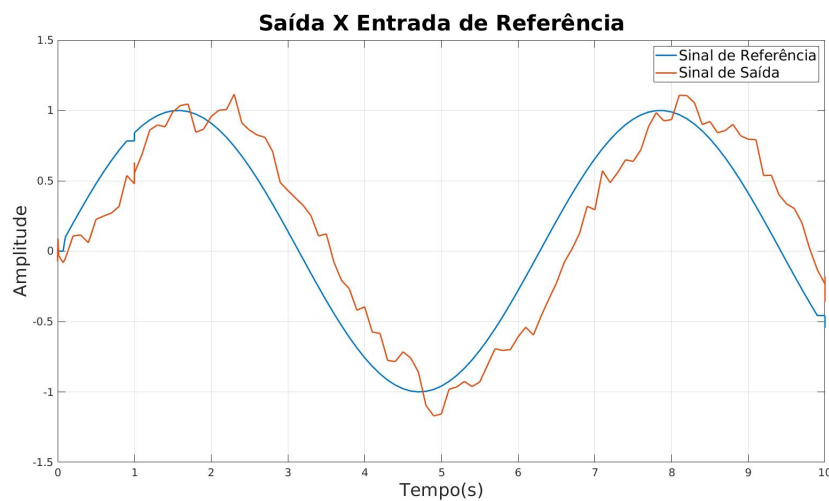


Figura 5.12: Saída x Sinal de Referência Entrada Senoide Controle Degrau nos primeiros 10 segundos

A Figura (5.12) representa o valor de saída do sistema em comparação com o valor de entrada nos primeiros 10 segundos de simulação do sistema para uma entrada de referência senoide e com controlador projetado para entrada degrau.

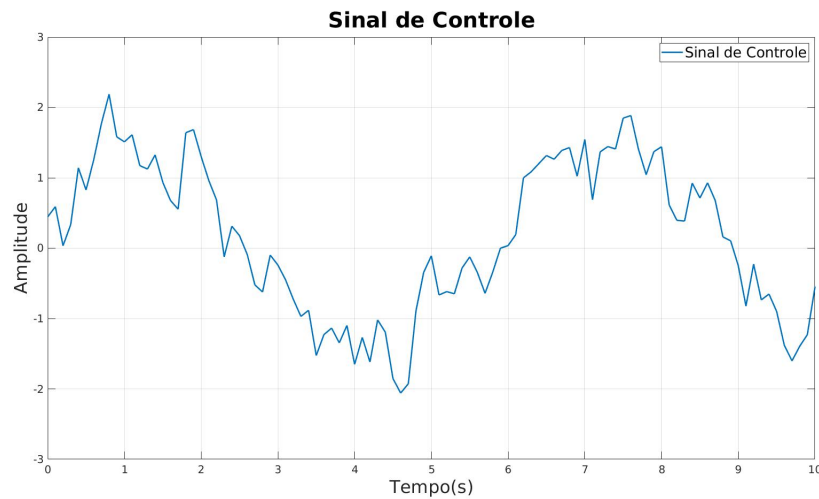


Figura 5.13: Sinal de Controle Entrada Senoide Controle Degrau primeiros 10 segundos

A Figura (5.13) representa o valor do sinal de controle nos primeiros 10 segundos de simulação do sistema para uma entrada de referência senoide e com controlador projetado para entrada degrau.

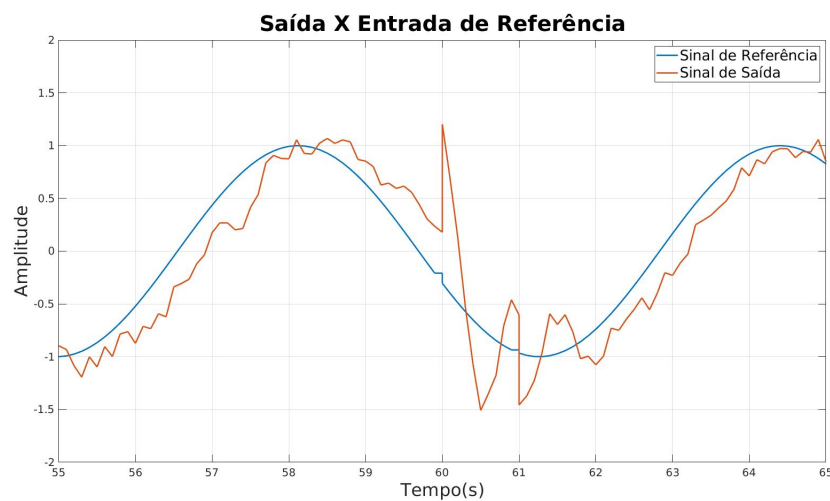


Figura 5.14: Saída x Sinal de Referência Entrada Senoide Controle Degrau no instante de perturbação

A Figura (5.14) representa o valor de saída do sistema em comparação com o valor de entrada no instante do pico da perturbação durante a simulação do sistema para uma entrada de referência senoide e com controlador projetado para entrada degrau.

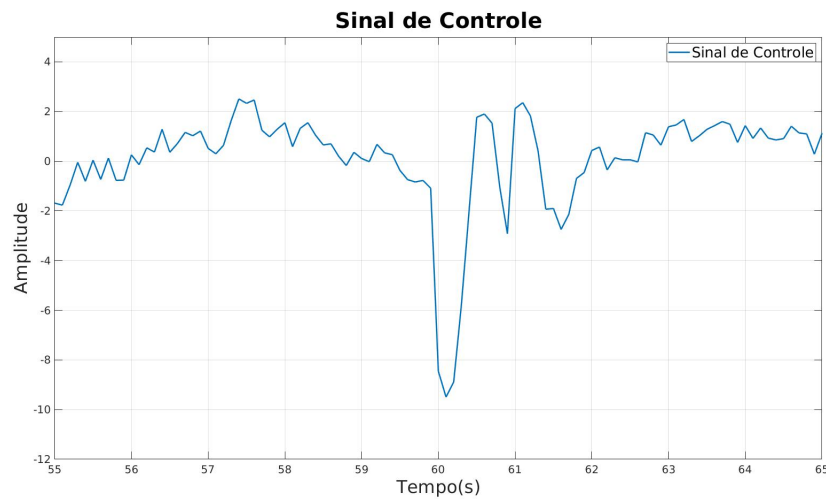


Figura 5.15: Sinal de Controle Entrada Senoide Controle Degrau no instante de perturbação

A Figura (5.15) representa o valor do sinal de controle no instante do pico da perturbação durante a simulação do sistema para uma entrada de referência senoide e com controlador projetado para entrada degrau.

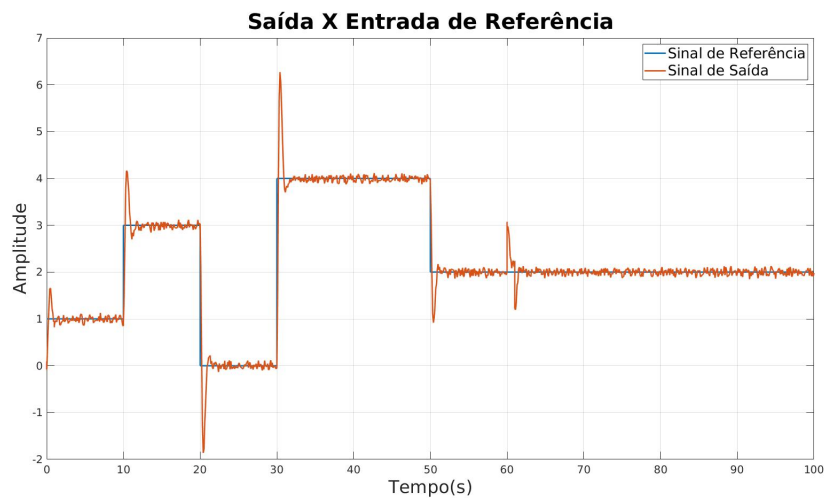


Figura 5.16: Saída x Sinal de Referência Entrada Degrau Controle Rampa

A Figura (5.16) representa o valor de saída do sistema em comparação com o valor de entrada. Nesse caso, o sinal de referência é uma entrada degrau e o controlador foi projetado para um sinal de referência rampa.

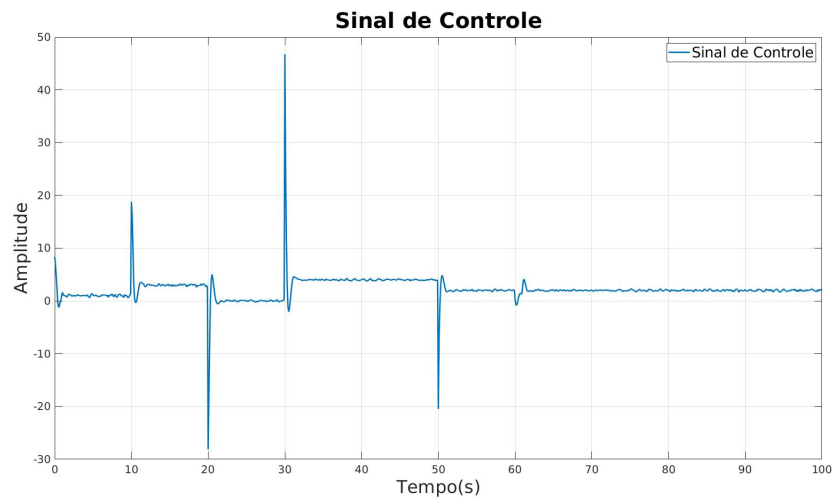


Figura 5.17: Sinal de Controle para Sinal de Referência degrau Controle Rampa

A Figura (5.17) representa o sinal de controle aplicado. É mostrado como o sinal de controle atua para um sinal de referência degrau quando o controlador foi projetado para uma entrada de referência rampa.

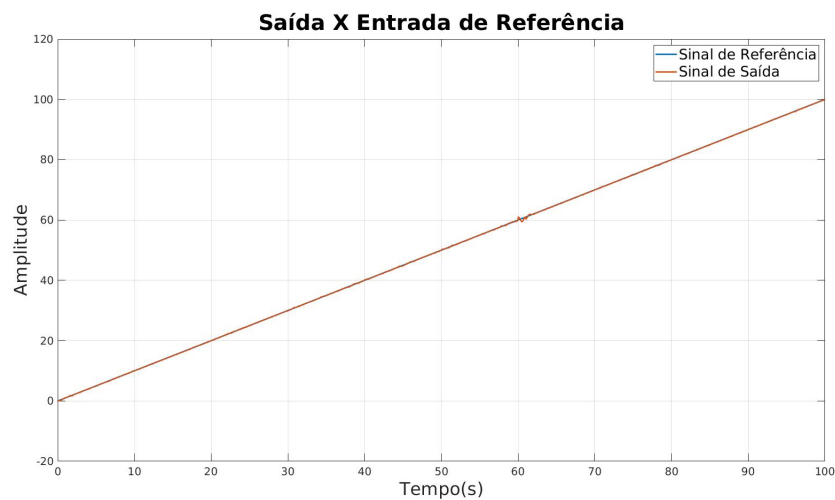


Figura 5.18: Saída x Sinal de Referência Entrada Rampa Controle Rampa

A Figura (5.18) representa o valor de saída do sistema em comparação com o valor de entrada. Nesse caso, o sinal de referência é uma entrada rampa e o controlador foi projetado para um sinal de referência rampa.

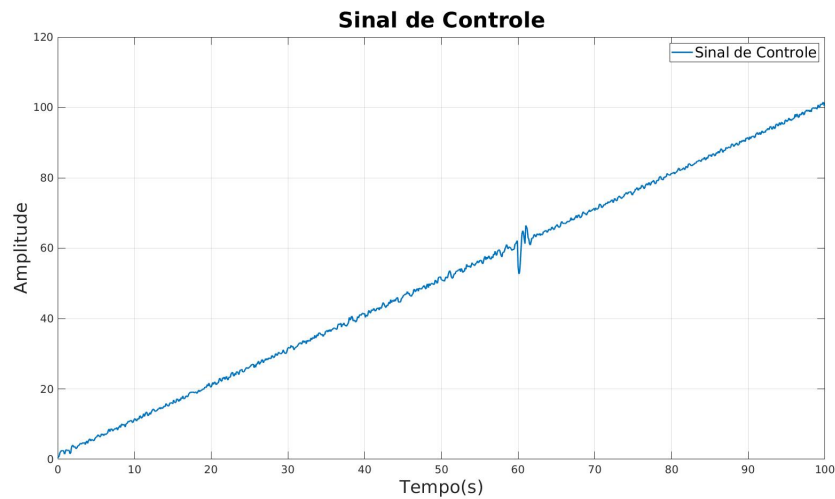


Figura 5.19: Sinal de Controle para Sinal de Referência Rampa Controle Rampa

A Figura (5.19) representa o sinal de controle aplicado. É mostrado como o sinal de controle atua para um sinal de referência rampa quando o controlador foi projetado para uma entrada de referência rampa.

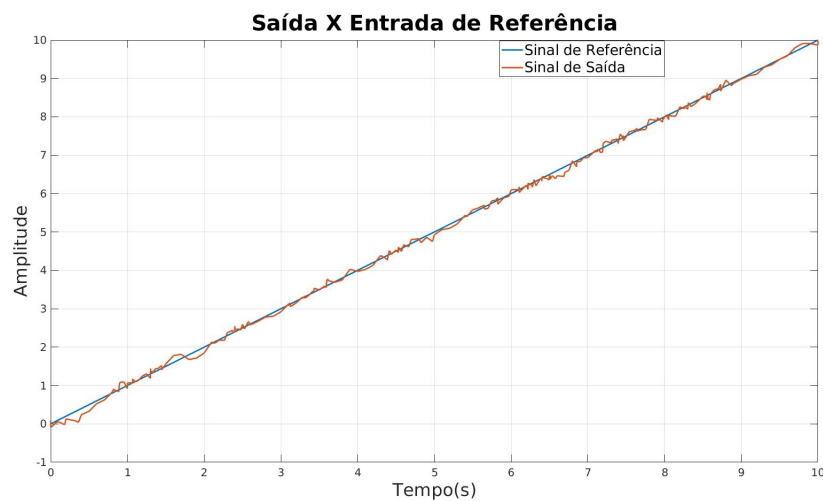


Figura 5.20: Saída x Sinal de Referência Entrada Rampa Controle Rampa nos primeiros 10 segundos

A Figura (5.20) representa o valor de saída do sistema em comparação com o valor de entrada nos primeiros 10 segundos de simulação do sistema para uma entrada de referência rampa e com controlador projetado para entrada rampa.

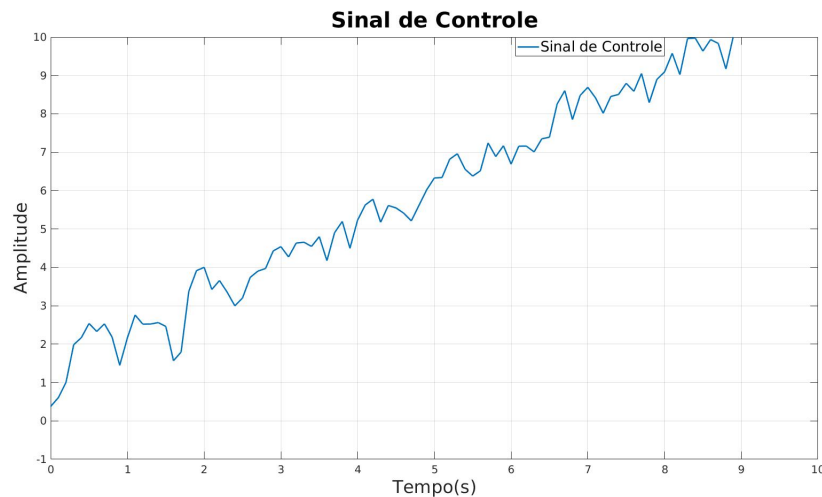


Figura 5.21: Sinal de Controle Entrada Rampa Controle Rampa nos primeiros 10 segundos

A Figura (5.21) representa o valor do sinal de controle nos primeiros 10 segundos de simulação do sistema para uma entrada de referência rampa e com controlador projetado para entrada rampa.

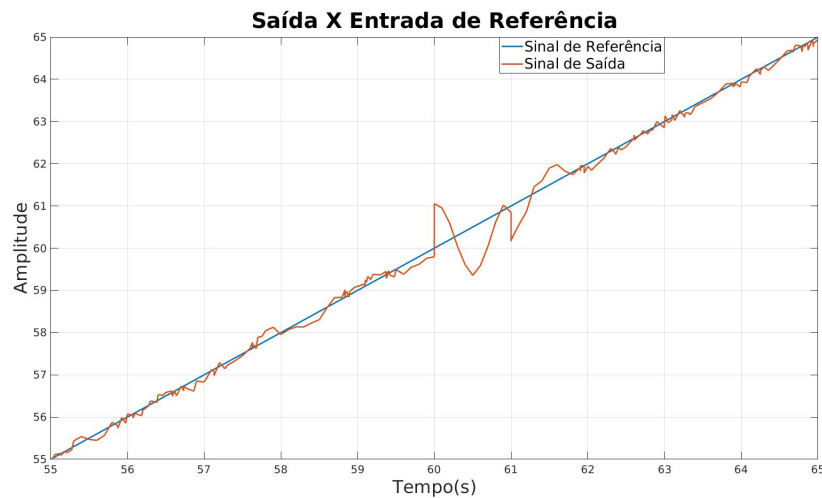


Figura 5.22: Saída x Sinal de Referência Entrada Rampa Controle Rampa no instante de perturbação

A Figura (5.22) representa o valor de saída do sistema em comparação com o valor de entrada no instante do pico da perturbação durante a simulação do sistema para uma entrada de referência rampa e com controlador projetado para entrada rampa.

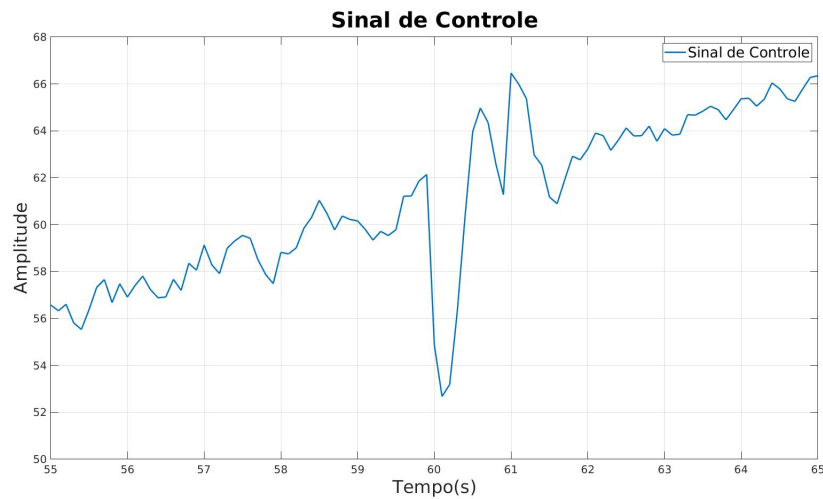


Figura 5.23: Sinal de Controle para Entrada Rampa Controle Rampa no instante de perturbação

A Figura (5.23) representa o valor do sinal de controle no instante do pico da perturbação durante a simulação do sistema para uma entrada de referência rampa e com controlador projetado para entrada rampa.

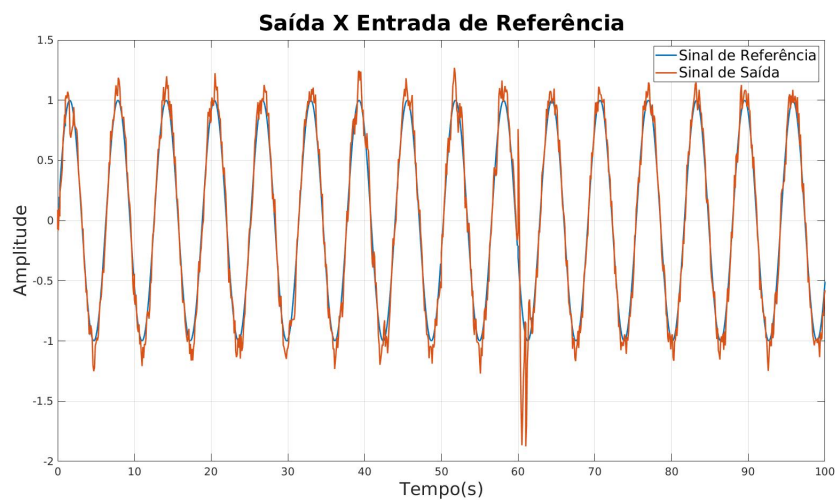


Figura 5.24: Saída x Sinal de Referência Entrada Senoide Controle Rampa

A Figura (5.24) representa o valor de saída do sistema em comparação com o valor de entrada. Nesse caso, o sinal de referência é uma entrada senoide e o controlador foi projetado para um sinal de referência rampa.

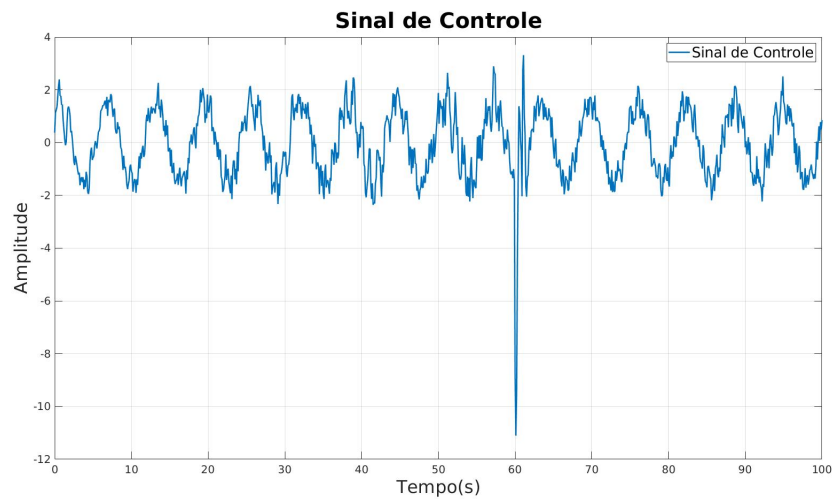


Figura 5.25: Sinal de Controle para Sinal de Referência Senoide Controle Rampa

A Figura (5.25) representa o sinal de controle aplicado. É mostrado como o sinal de controle atua para um sinal de referência senoide quando o controlador foi projetado para uma entrada de referência rampa.

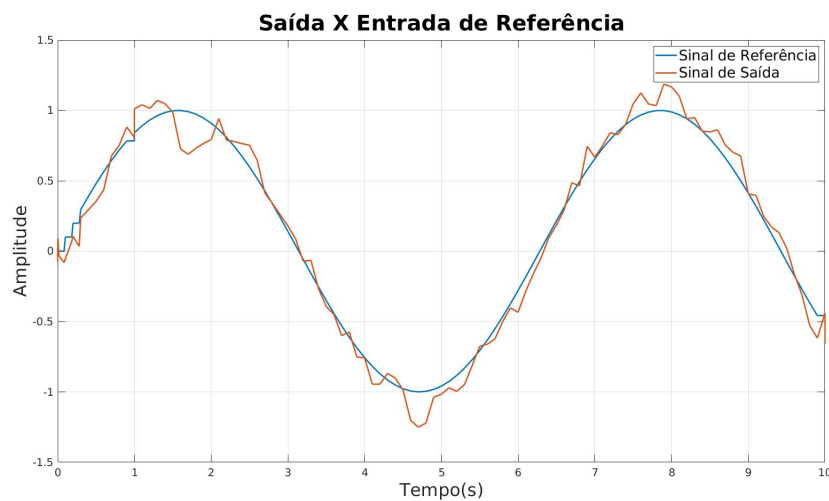


Figura 5.26: Saída x Sinal de Referência Entrada Senoide Controle Rampa nos primeiros 10 segundos

A Figura (5.26) representa o valor de saída do sistema em comparação com o valor de entrada nos primeiros 10 segundos de simulação do sistema para uma entrada de referência senoide e com controlador projetado para entrada rampa.

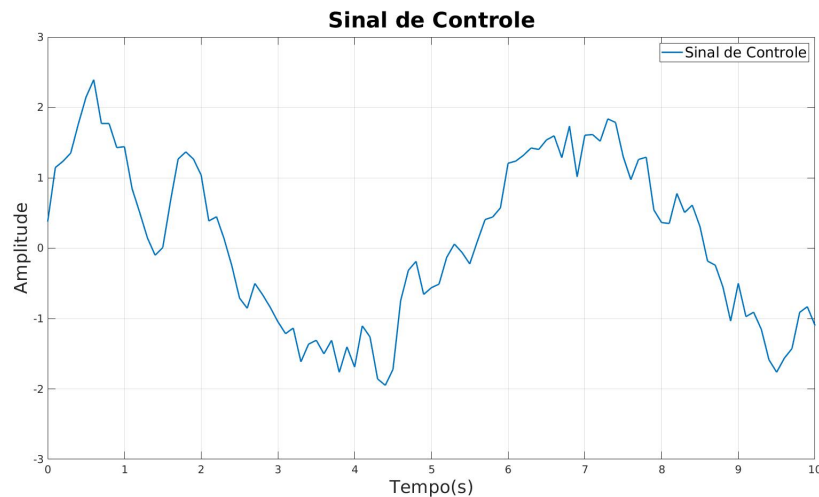


Figura 5.27: Sinal de Controle Entrada Senoide Controle Rampa nos primeiros 10 segundos

A Figura (5.27) representa o valor do sinal de controle nos primeiros 10 segundos de simulação do sistema para uma entrada de referência senoide e com controlador projetado para entrada rampa.

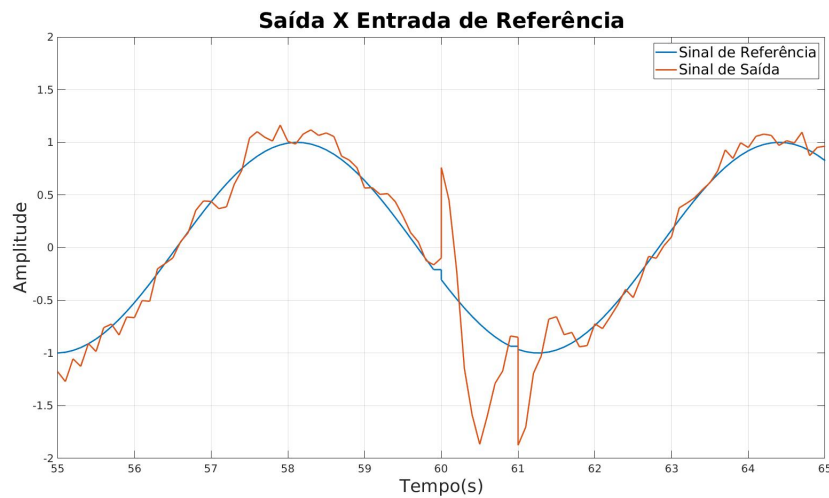


Figura 5.28: Saída x Sinal de Referência Entrada Senoide Controle Rampa no instante de perturbação

A Figura (5.28) representa o valor de saída do sistema em comparação com o valor de entrada no instante do pico da perturbação durante a simulação do sistema para uma entrada de referência senoide e com controlador projetado para entrada rampa.

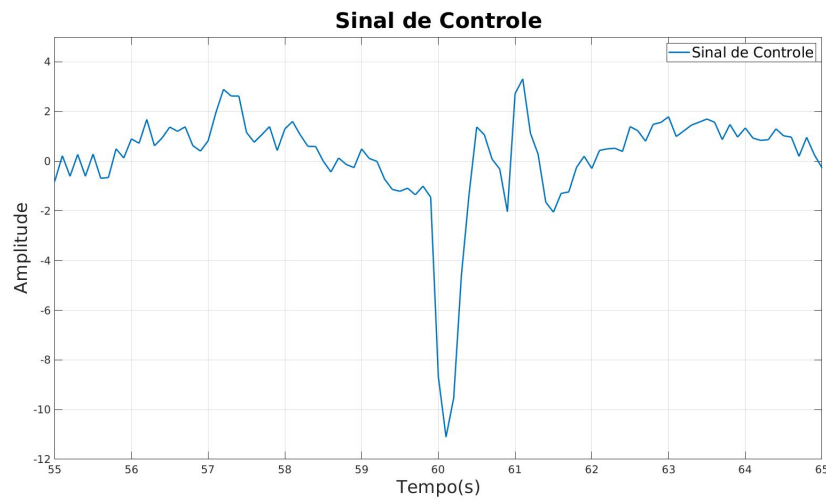


Figura 5.29: Sinal de Controle Entrada Senoide Controle Rampa no instante de perturbação

A Figura (5.29) representa o valor do sinal de controle no instante do pico da perturbação durante a simulação do sistema para uma entrada de referência senoide e com controlador projetado para entrada rampa.

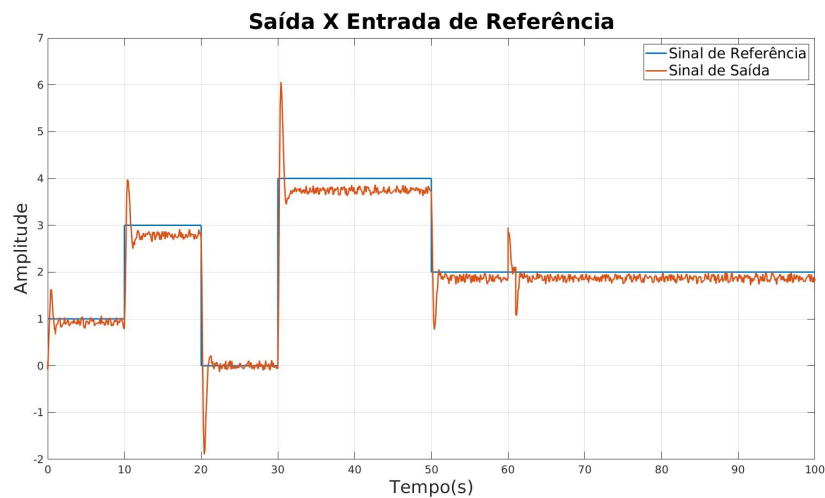


Figura 5.30: Saída x Sinal de Referência Entrada Degrau Controle Senoide

A Figura (5.30) representa o valor de saída do sistema em comparação com o valor de entrada. Nesse caso, o sinal de referência é uma entrada degrau e o controlador foi projetado para um sinal de referência senoide.

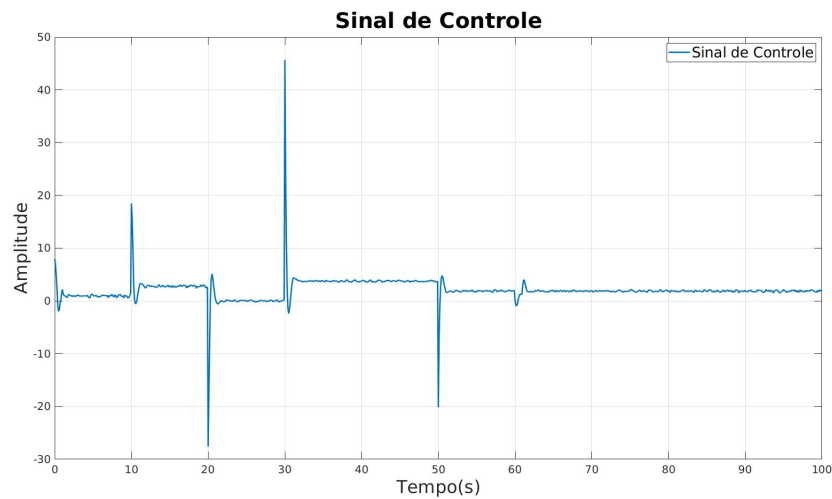


Figura 5.31: Sinal de Controle Sinal de Referência Entrada Degrau Controle Senoide

A Figura (5.31) representa o sinal de controle aplicado. É mostrado como o sinal de controle atua para um sinal de referência degrau quando o controlador foi projetado para uma entrada de referência senoide.

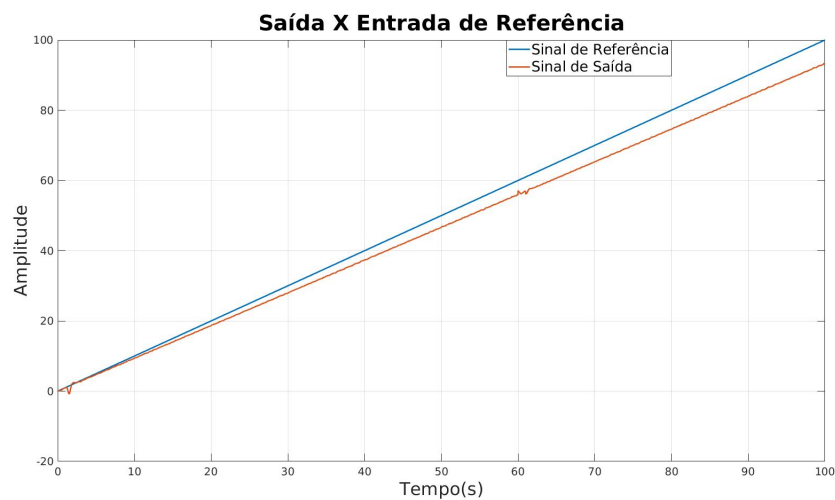


Figura 5.32: Saída x Sinal de Referência Entrada Rampa Controle Senoide

A Figura (5.32) representa o valor de saída do sistema em comparação com o valor de entrada. Nesse caso, o sinal de referência é uma entrada rampa e o controlador foi projetado para um sinal de referência senoide.

Figura 5.33: Sinal de Controle Sinal de Referência Entrada Rampa Controle Senoide

A Figura (5.33) representa o sinal de controle aplicado u mostrado como o sinal de controle atua para um sinal de referência rampa quando o controlador foi projetado para uma entrada de referência senoide.

Figura 5.34: Sada x Sinal de Referência Entrada Rampa Controle Senoide nos primeiros 10 segundos

A Figura (5.34) representa o valor de sada do sistema em comparação com o valor de entrada nos primeiros 10 segundos de simulação do sistema para uma entrada de referência rampa e com controlador projetado para entrada senoide.

Figura 5.35: Sinal de Controle Entrada Rampa Controle Senoide nos primeiros 10 segundos

A Figura (5.35) representa o valor do sinal de controle nos primeiros 10 segundos de simulação do sistema para uma entrada de referência rampa e com controlador projetado para entrada senoide.

Figura 5.36: Sada x Sinal de Referência Entrada Rampa Controle Senoide no instante da perturbação

A Figura (5.36) representa o valor de sada do sistema em comparação com o valor de entrada no instante do pico da perturbação durante a simulação do sistema para uma entrada de referência rampa e com controlador projetado para entrada senoide.

Figura 5.37: Sinal de Controle Entrada Rampa Controle Senoide no instante da perturbação

A Figura (5.37) representa o valor do sinal de controle no instante do pico da perturbação durante a simulação do sistema para uma entrada de referência rampa e com controlador projetado para entrada senoide.

Figura 5.38: Sada x Sinal de Referência Entrada Senoide Controle Senoide

A Figura (5.38) representa o valor de sada do sistema em comparação com o valor de entrada. Nesse caso, o sinal de referência é uma entrada senoide e o controlador foi projetado para um sinal de referência senoide.

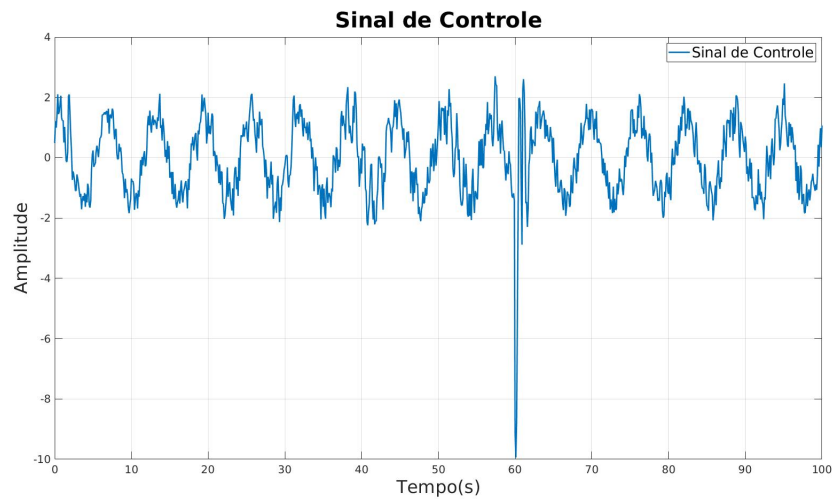


Figura 5.39: Sinal de Controle Sinal de Referência Entrada Senoide Controle Senoide

A Figura (5.39) representa o sinal de controle aplicado. Como o sinal de controle atua para um sinal de referência senoidal quando o controlador foi projetado para uma entrada de referência senoidal.

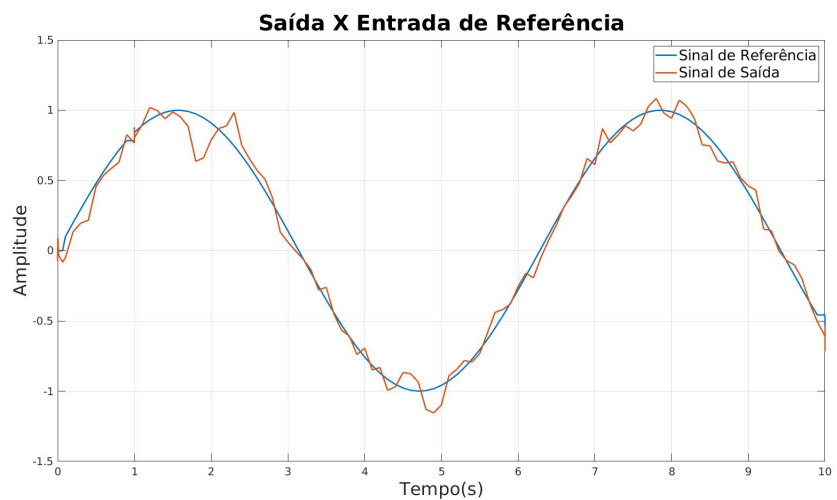


Figura 5.40: Saída x Sinal de Referência Entrada Senoide Controle Senoide nos primeiros 10 segundos

A Figura (5.40) representa o valor de saída do sistema em comparação com o valor de entrada nos primeiros 10 segundos de simulação do sistema para uma entrada de referência senoidal e com controlador projetado para entrada senoidal.

Figura 5.41: Sinal de Controle Entrada Senoide Controle Senoide nos primeiros 10 segundos

A Figura (5.41) representa o valor do sinal de controle nos primeiros 10 segundos de simulação do sistema para uma entrada de referência senoide e com controlador projetado para entrada senoide.

Figura 5.42: Sada x Sinal de Referência Entrada Senoide Controle Senoide no instante da perturbação

A Figura (5.42) representa o valor de sada do sistema em comparação com o valor de entrada no instante do pico da perturbação durante a simulação do sistema para uma entrada de referência senoide e com controlador projetado para entrada senoide.

Figura 5.43: Sinal de Controle Entrada Senoide Controle Senoide no instante da perturbação

A Figura (5.43) representa o valor do sinal de controle no instante do pico da perturbação durante a simulação do sistema para uma entrada de referência senoide e com controlador projetado para entrada senoide.

Índices de Desempenho								
Entrada	Entrada Esperada	IAE	ISE	ITAE	Goodhart	RBEMCE	RBMSEMCE	Variabilidade
Degrau	Degrau	9,9971	7,1797	412,7194	2,15E+06	2,3354	2,3548	1,079
Rampa	Degrau	36,1384	14,2746	1,80E+03	1,13E+09	50,596	50,3797	1,1828
Senoide	Degrau	24,1641	7,6168	1,16E+03	90,1368	0,2293	0,066	1,11E+03
Degrau	Rampa	9,4053	5,7807	383,8493	2,24E+06	2,377	2,3839	1,1191
Rampa	Rampa	7,7408	1,2875	394,7068	4,37E+10	50,936	50,8742	1,1851
Senoide	Rampa	8,5248	1,4662	421,162	50,1065	0,0779	7,40E-03	-3,30E+02
Degrau	Senoide	18,4988	7,8872	840,1014	1,97E+06	2,3251	2,2605	1,1249
Rampa	Senoide	334,6251	1,49E+03	2,23E+04	1,03E+09	49,695	60,8944	1,2116
Senoide	Senoide	7,2088	1,0889	362,9789	1,01E+02	0,0599	-0,0013	-424,388

Tabela 5.1: Índices de Desempenho Sistema 2ª Ordem

A partir dos resultados mostrados nas Figuras da seção 5.1 e da Tabela 5.1, foi possível observar que na maioria das configurações apresentadas o controlador proposto obteve resultado satisfatório.

É visto que o controlador tem o menor valor do índice IAE quando a entrada de referência é igual a entrada para a qual o controlador foi projetado. Para as outras configurações demonstradas na tabela, o controlador obteve um valor do índice IAE razoável. Entretanto, para a configuração: entrada de referência rampa e controlador projetado para entrada senoide, o controlador alcançou o maior valor do índice IAE. Tal fato demonstra que o módulo do erro foi elevado em comparação com as outras configurações.

Ao analisar o índice ISE, o controlador atingiu os menores valores nas configurações onde o controlador foi projetado para uma entrada igual a entrada de referência do sistema. É visto que para a configuração entrada de referência rampa e controlador projetado para

entrada senoide, o controlador obteve o maior valor do índice ISE. Demonstrando que o erro foi bastante elevado em comparação com as outras configurações.

De forma semelhante ao índice IAE e ao índice ISE, o controlador alcançou os menores valores do índice ITAE nas configurações onde o controlador foi projetado para uma entrada igual a entrada de referência do sistema. As configurações onde o controlador obteve os piores resultados foram: configuração entrada de referência rampa e controlador projetado para entrada degrau, configuração entrada de referência senoide e controlador projetado para entrada degrau, configuração entrada de referência rampa e controlador projetado para entrada senoide. Nessa configuração se revelou a presença de um grande valor de erro ao longo do tempo.

Já em relação ao índice Goodhart, verificou-se que na grande maioria das configurações o controlador teve um valor elevado. Uma vez que foi dada uma maior ponderação para a parcela de $\frac{1}{2}$ que leva em consideração a média do sinal de controle e a o sinal de controle, é possível concluir que há um grande variação no sinal de controle. O que parece ser razoável uma vez que estamos lidando com um sinal de perturbação que é aproximadamente 10% do valor de entrada.

Ao verificar o índice RBEMCE, o controlador atingiu valores baixos, exceto nas configurações onde a entrada de referência foi um sinal do tipo rampa. Foram utilizados os mesmos valores para ponderação do erro e ponderação do sinal de controle. Portanto, é possível ver que não há grande esforço do controlador para alcançar o sinal de referência.

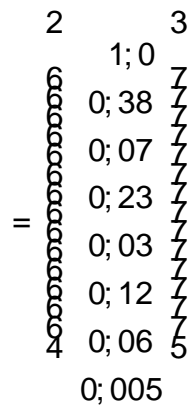
De forma análoga ao índice RBEMCE, o controlador obteve valores baixos do índice RBMSEMCE, exceto nas configurações onde a entrada de referência foi um sinal do tipo rampa. Dessa forma, também é verificado que não há um grande esforço do controlador mesmo levando em consideração ponderações grandes em erros grandes.

Em relação ao índice de Variabilidade, é visto que na maioria das configurações a variável não se dispersa muito em relação a sua média. Exceto nas configurações onde a entrada de referência é do tipo senoide.

5.2 Sistema Massa Mola Amortecedor

Para o sistema massa mola amortecedor, foram utilizadas as seguintes especificações de desempenho: tempo de estabilização T_s de 5 segundos e coeficiente de amortecimento (ζ) igual a 0,7. O sistema foi simulado para entradas degraus como referência. A seguir é demonstrado o gráfico de entrada de referência $x_s(t)$ do sistema e o gráfico do sinal de controle. Também são demonstrados os índices de desempenho do sistema. O valor de inicial utilizado foi de:

Valor de $x(0)$ inicial utilizado para sinal de referência degrau e sinal de referência senoidal.



O sistema foi simulado na presença de perturbação. A Figura (5.44) representa a perturbação utilizada na simulação do sistema massa mola amortecedor.

Figura 5.44: Sinal de Perturbação.

A Figura (5.44) representa a perturbação aplicada durante a simulação do sistema. No instante de tempo 15s se pode observar um pico na amplitude do sinal de perturbação. A aplicação desse pico tem o objetivo de verificar se o sistema continua estável.

Figura 5.45: Sada x Sinal de Referência Entrada Degrau Controle Degrau Sistema Massa Mola Amortecedor

A Figura (5.45) representa o valor de sada do sistema em comparação com o valor de entrada. Nesse caso, o sinal de referência é uma entrada degrau e o controlador foi projetado para um sinal de referência degrau.

Figura 5.46: Sinal de Controle Sinal de Referência Entrada Degrau Controle Degrau Sistema Massa Mola Amortecedor

A Figura (5.46) representa o sinal de controle aplicado e mostrado como o sinal de controle atua para um sinal de referência degrau quando o controlador foi projetado para uma entrada de referência degrau.

A Figura (5.47) representa o valor de sada do sistema em comparação com o valor de entrada. Nesse caso, o sinal de referência é uma entrada senoide e o controlador foi projetado para um sinal de referência senoide.

A Figura (5.48) representa o sinal de controle aplicado e mostrado como o sinal de controle atua para um sinal de referência degrau quando o controlador foi projetado para

Figura 5.47: Sada x Sinal de Referência Entrada Senoide Controle Senoide Sistema Massa Mola Amortecedor

Figura 5.48: Sinal de Controle Sinal de Referência Entrada Senoide Controle Senoide Sistema Massa Mola Amortecedor

uma entrada de referência degrau.

Índices de Desempenho								
Entrada	Entrada Esperada	IAE	ISE	ITAE	Goodhart	RBEMCE	RBMSEMCE	Variabilidade
Degrau	Degrau	45,9779	72,2402	3,77e+03	1,9378	6,2065	6,3376	1,2498
Senoide	Senoide	14,1197	2,2976	1,43e+03	0,0454	0,1740	0,1148	54,1101

Tabela 5.2: Índices de Desempenho Sistema Massa Mola Amortecedor

De acordo com a Tabela (5.2) é possível observar que o controlador conseguiu controlar o sistema mesmo na presença de perturbações.

Através dos índices IAE e ISE é possível observar que há uma maior presença de erro quando o sistema recebe uma entrada do tipo degrau. Já em relação ao índice ITAE, é visto que nas duas condições, entrada degrau e entrada senoide, há um grande valor

de erro ao longo do tempo. Ao analisar o índice Goodharte verifico que não há uma grande variação no sinal de controle. Em relação aos índices RBEMCE e RBMSEMCE, é constatado que não há um grande esforço do controlador para atingir o sinal de referência de entrada. E ao verificar índice de variabilidade é visto que para a con guracao de entrada de referência senoide há uma maior dispersão da varável de sada.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho, foi feita a implementação do controlador digital RST para entradas: degrau, rampa e senoide, combinado com o algoritmo de identificação de sistemas MQR. Dessa forma, foi possível aplicar o controlador em sistema simulado. Durante as simulações, foram computados os índices de desempenho do controlador com o intuito de avaliar a qualidade do controlador projetado.

Através dos resultados descritos no capítulo anterior, é possível observar que o controlador obteve êxito em controlar os sistemas simulados mesmo na presença de perturbações. Também é possível verificar, que o controlador mesmo não sendo projetado para a entrada de referência aplicada ao sistema conseguiu, de forma razoável, controlar os sistemas simulados. Uma das vantagens do controlador proposto em comparação com outros trabalhos é que não se faz necessário ter o conhecimento do modelo da planta.

Outra vantagem do controlador aplicado é que não se faz necessário a resintonização dos parâmetros do controlador, uma vez que o próprio controlador faz o ajuste dos seus parâmetros de forma recursiva. Portanto, com as vantagens citadas, o processo de projeto e aplicação de controladores para planta onde não é conhecido todas as dinâmicas do sistema torna-se mais simples e menos custoso.

Em trabalhos futuros, pode ser abordado outras técnicas de identificação de sistemas, como a correntropia. Também pode ser desenvolvidos trabalhos onde se faz a aplicação do controlador para sistemas de grande ordem. E trabalhos onde a escolha do theta inicial do estimador dos mínimos quadrados recursivo não dependa do conhecimento do sistema.

Apêndice A

Controlador Auto-Reguável

A seguir, é demonstrado o restante da implementação do controlador no programa Simulink.

No bloco da Figura (A.1), é construída a matriz de observações. Onde são armazenadas as medições dos sinais $u(t)$ e $y(t)$ da simulação do processo ao decorrer do tempo.

Figura A.1: Bloco de Construção da Matriz

Nos blocos das Figuras (A.2), (A.3) e (A.4) são implementadas as equações 2.36 e 2.48. No início da simulação, o programa não tem os valores do modelo da planta, a matriz \hat{A} . Dessa forma, um valor inicial de \hat{A} é escolhido para que seja realizada a simulação. Após o tempo de $10 \times$ o tempo de amostragem, o valor de \hat{A} utilizado é o valor calculado pelo bloco (4.8). A equação 2.48 é uma identidade de Bezout auxiliar. Utilizada para o cálculo do polinômio T que é responsável pelo rastreamento do sinal de referência $r(t)$.

Sua resolução também é realizada através da equação 2.36. Com isso, se faz necessário a construção de uma matriz M auxiliar. Um polinômio auxiliar X é utilizado de acordo com o tipo de entrada. A partir das referidas equações, são feitos os cálculos dos coeficientes dos polinômios do controlador. A diferença entre esses blocos é na construção da

matriz M auxiliar (M2). Para cada tipo de entrada uma matriz M2 é construída.

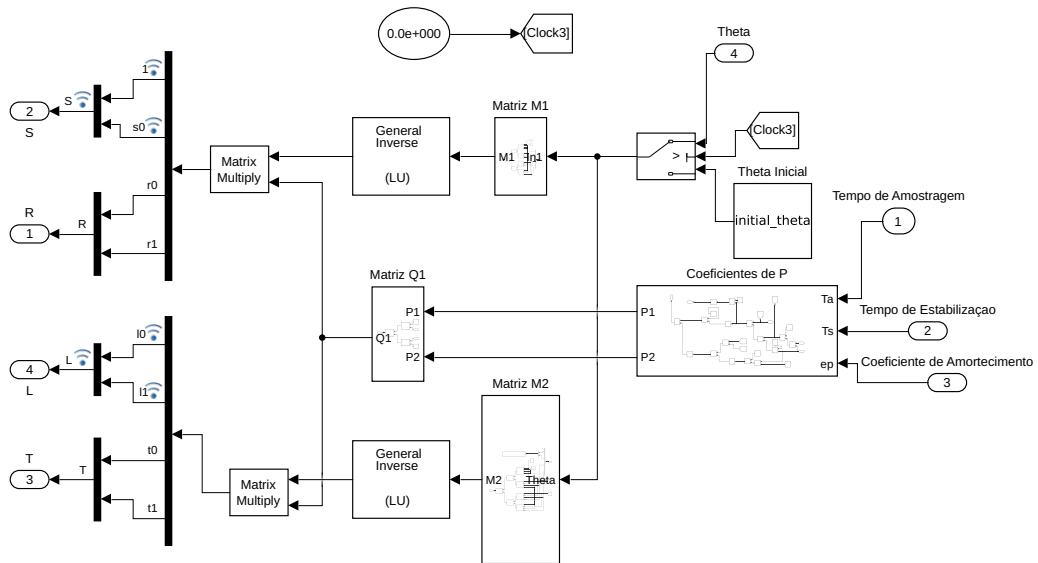


Figura A.2: Bloco da Auto-Regulação do Controlador para Entrada Degrau

Bloco que faz a regulação dos coeficientes dos polinômios R, S e T para um sinal de referência degrau.

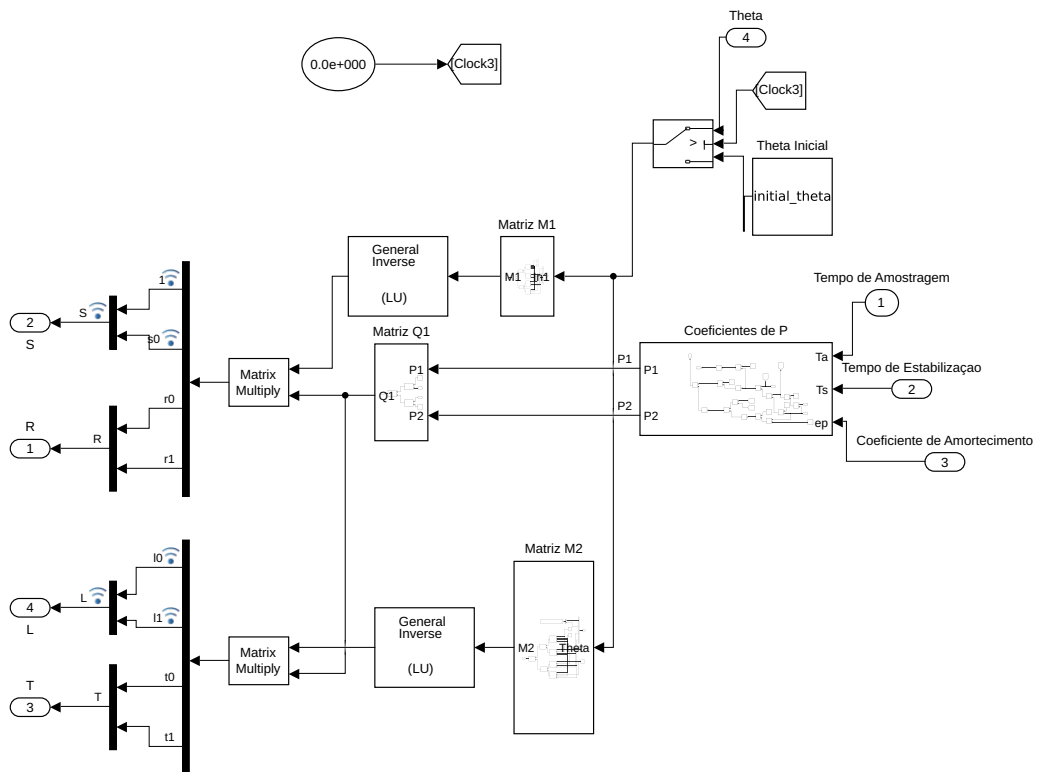


Figura A.3: Bloco da Auto-Regulação do Controlador para Entrada Rampa

Bloco que faz a regulação dos coeficientes dos polinômios R, S e T para um sinal de

referência rampa.

Figura A.4: Bloco da Auto-Regulação do Controlador para Entrada Senoide

Bloco que faz a regulação dos coeficientes dos polinômios R, S e T para um sinal de referência senoidal.

No bloco da Figura (A.5), são calculados os coeficientes p_1 e p_2 da equação (2.33). Dessa forma, é possível construir o polinômio desejado em malha fechada P.

Figura A.5: Bloco de Cálculo dos Coeficientes de P

Nos blocos das Figuras (A.6) e (A.7) é feita a construção da matriz M e da matriz p da equação (2.35).

Figura A.6: Bloco de Construção da Matriz M

Nos blocos das Figuras (A.8), (A.9) e (A.10) são construídas as matrizes M referente a cada tipo de entrada para resolver a segunda equação diofantina auxiliar (2.48).

Figura A.7: Bloco de Construção da Matriz p

Figura A.8: Bloco de Construção da Matriz Auxiliar M para Entrada Degrau

Bloco da construção da matriz M da segunda equação diofantina para sinal de referência degrau.

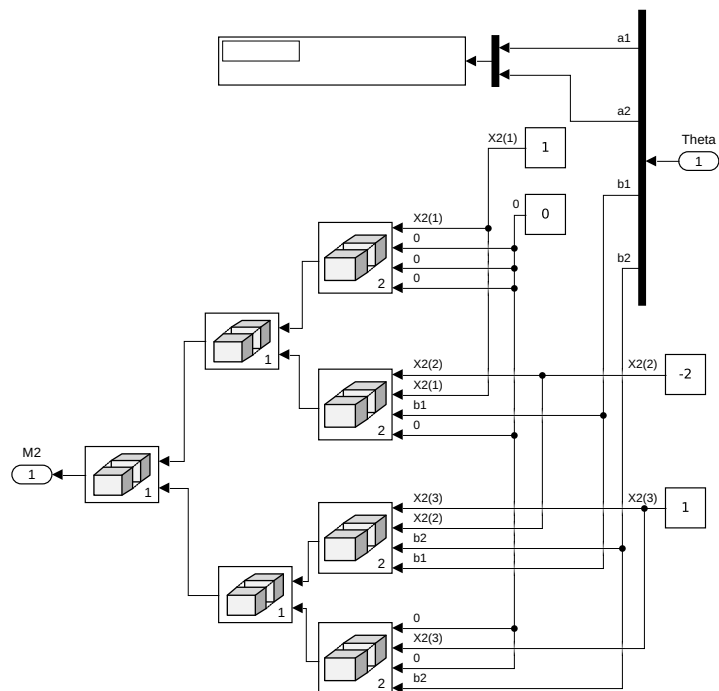


Figura A.9: Bloco de Construção da Matriz Auxiliar M para Entrada do Tipo Rampa

Bloco da construção da matriz M da segunda equação diofantina para sinal de referência rampa.

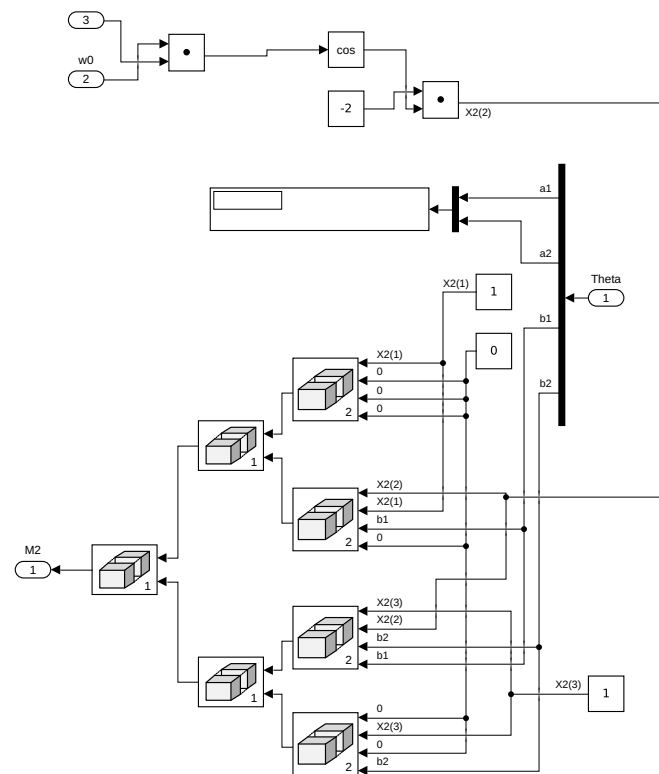


Figura A.10: Bloco de Construção da Matriz Auxiliar M para Entrada do Tipo Senoide

Bloco da construção da matriz M da segunda equação diofantina para sinal de referência senoidal.

Bibliografia

- [Aguirre, 2000] Aguirre, L. A. (2000). *Introdução à Identificação de Sistemas. Técnicas Lineares e não Lineares Aplicadas a Sistema Reais*. Editora da UFMG, Belo Horizonte, 1. edition. ISBN 85-7041-220-7.
- [Alali et al., 2004] Alali, M. A. E., Chapuis, Y. ., Saadate, S., and Braun, F. (2004). Advanced common control method for shunt and series active compensators used in power quality improvement. *IEE Proceedings - Electric Power Applications*, 151(6):658–665.
- [Andreis, 2017] Andreis, A. A. (2017). Avaliação do desempenho e sintonia de controladores de nível. Master’s thesis, Universidade do Vale do Rio dos Sinos - UNISINOS, Porto Alegre.
- [Araújo, 2019] Araújo, I. B. Q. (2019). *Maximização da correntropia por simulação com poda aplicado a detecção de estruturas e estimação de parâmetros de modelos NARX*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica e de Computação).
- [Bendjedja et al., 2014] Bendjedja, M., Tehrani, K. A., Azzouz, Y., and Shall, H. (2014). Robust rst controller design for induction motor drive for electric vehicle application. In *2014 First International Conference on Green Energy ICGE 2014*, pages 251–258.
- [Coelho and dos Santos Coelho, 2004] Coelho, A. A. R. and dos Santos Coelho, L. (2004). *Identificação de sistemas dinâmicos lineares*. Editora da UFSC, Florianópolis, 1. edition.
- [Cuenca and Salt, 2012] Cuenca, A. and Salt, J. (2012). Rst controller design for a non-uniform multi-rate control system. *Journal of Process Control*, 22:1865–1877.
- [Filho and de Paiva, 2011] Filho, O. and de Paiva, M. (2011). Lógica fuzzy para controle de ph em um processo petrolífero. Master’s thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

- [Galdos et al., 2011] Galdos, G., Karimi, A., and Longchamp, R. (2011). Rst controller design by convex optimization using frequency-domain data. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1):11429 – 11434. 18th IFAC World Congress.
- [Godoy and Ostertag, 2006] Godoy, E. and Ostertag, E. (2006). Rst-controller design: A rational teaching method based on two diophantine equations. *IFAC Proceedings Volumes*, 39(6):541 – 546. 7th IFAC Symposium on Advances in Control Education.
- [Goodhart et al., 1991] Goodhart, S., Burnham, K., and James, D. (1991). A bilinear self-tuning controller for industrial heating plant. In *International Conference on Control 1991. Control '91*, pages 779–783 vol.2.
- [Hocine et al., 2009] Hocine, L., Gueguen, H., and Boubekour, M. (2009). Supervisory control based on closed-loop adaptive control approach of nonlinear continuous stirred tank reactor process (ncstrp). In *2009 European Control Conference (ECC)*, pages 4054–4059.
- [Landau, 1998] Landau, I. (1998). The r-s-t digital controller design and applications. *Control Engineering Practice*, 6(2):155 – 165.
- [Landau and Zito, 2006] Landau, I. D. and Zito, G. (2006). *Digital Control Systems Design, Identification and Implementation*. Springer-Verlag, London, 1. edition.
- [Lin et al., 2000] Lin, F., Brandt, R., and Saikalis, G. (2000). Self-tuning of pid controllers by adaptive interaction. volume 5, pages 3676 – 3681 vol.5.
- [Ljung, 1999] Ljung, L. (1999). *System Identification: Theory for the User*. Prentice Hall information and system sciences series. Prentice Hall PTR, 2. edition. 9780136566953.
- [Ljung and Söderström, 1985] Ljung, L. and Söderström, T. (1985). Theory and practice of recursive identification. *Automatica*, 21(4):499–501.
- [Madiouni et al., 2013] Madiouni, R., Bouallègue, S., Haggège, J., and Siarry, P. (2013). Particle swarm optimization-based design of polynomial rst controllers. In *10th International Multi-Conferences on Systems, Signals Devices 2013 (SSD13)*, pages 1–7.
- [Nicoletti et al., 2015] Nicoletti, A., Emedi, Z., and Karimi, A. (2015). A data-driven approach in designing rst controllers with h_∞ performance via convex optimization. In *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 6650–6655.
- [Nise, 2013] Nise, N. S. (2013). *Engenharia de Sistemas de Controle*. LTC, Rio de Janeiro, 6. edition.

- [Ostertag, 1999] Ostertag, E. (1999). Steady-state error-free rst-controller design: A double diophantine equation approach. In *1999 European Control Conference (ECC)*, pages 2841–2846.
- [Ostertag and Godoy, 2005] Ostertag, E. and Godoy, E. (2005). Rst-controller design for sinewave references by means of an auxiliary diophantine equation. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 6905–6910.
- [Ostertag et al., 2007] Ostertag, E., Godoy, E., and Carvalho-Ostertag, J. (2007). Dual rst-control of an inverted pendulum with simulink s-functions implementation. In *2007 European Control Conference (ECC)*, pages 2687–2693.
- [Perez Serrano, 2020] Perez Serrano, M. A. (2020). Estratégias de controle avançado para uma planta de tratamento de ph. Master’s thesis, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- [Rani et al., 2014] Rani, L. T., Sivakumar, D., Rathikarani, D., and Suryakala, S. (2014). Design and implementation of rst controllers for a nonlinear system. In *2014 International Conference on Green Computing Communication and Electrical Engineering (ICGCCEE)*, pages 1–6.
- [Sant’Ana et al., 2019] Sant’Ana, W. C., Salomon, C. P., Lambert-Torres, G., Bonaldi, E. L., Teixeira, C. E., Campos, M. M., Gama, B. R., Borges-da-Silva, L. E., and Carvalho, R. B. B. (2019). Achieving zero steady state error on voltage source inverters with sinusoidal references using a rst polynomial controller. In *2019 20th International Conference on Intelligent System Application to Power Systems (ISAP)*, pages 1–6.
- [Stefanoiu et al., 2016] Stefanoiu, D., Stoica, A., Constantinescu, C., Cimpoesu, E. M., Danciu, A., and Barrio, A. M. (2016). A rst design approach for the launchers flight control system.
- [Suryawanshi and Agashe, 2008] Suryawanshi, P. and Agashe, S. (2008). An indirect self-tuning control scheme based on recursive least square estimation and pole placement design. *International Journal of Engieering Research and Industrial Applications*, 1:307–322.
- [Wang and Fujimoto, 2018] Wang, Y. and Fujimoto, H. (2018). Chapter 9 - dynamics control for evs. In Zhang, H., Cao, D., and Du, H., editors, *Modeling, Dynamics and Control of Electrified Vehicles*, pages 309 – 337. Woodhead Publishing.