



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA**

**Informação, Velocidade da Luz e Pontos Não Analíticos
por
Wagner Ferreira da Silva**

**BR 104, Km 97. Campus A. C. Simões
Cidade Universitária
Tabuleiro dos Martins
Maceió - AL, Brasil
CEP 57072-970**



Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física
Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14. Campus A.C. Simões
Cidade Universitária
Tabuleiro dos Martins
57072-970 Maceió - AL. Brasil

PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

“Informação, Velocidade da Luz e Pontos Não Analíticos”

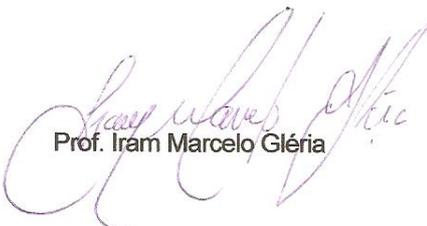
por

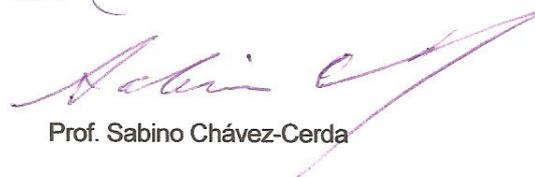
Wagner Ferreira da Silva

A Banca Examinadora composta pelos professores Jandir Miguel Hickmann (Orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Iram Marcelo Gléria, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas e Sabino Chávez-Cerda, do INAOE/México, consideram o candidato aprovado com grau **“A com louvor”**.

Maceió, 01 de março de 2007


Prof. Jandir Miguel Hickmann


Prof. Iram Marcelo Gléria


Prof. Sabino Chávez-Cerda

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA

INFORMAÇÃO, VELOCIDADE DA LUZ E PONTOS NÃO ANALÍTICOS

Wagner Ferreira da Silva

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, para obtenção do título de Mestre em Ciências

ORIENTADOR: *Prof. Dr. Jandir Miguel Hickmann*

Alagoas

2007

Aos meus pais Jorge e Maria, e aos meus irmãos Djair e Jorge.

Agradecimentos

- A Deus pelo dom da vida.
- A *Laura Melo Silva*, e aos seus pais *Pr. Cícero* e *Pra. Lúcia*.
- Aos meus colegas, *Rogério Fernandes*, *Willamys Cristiano*, *Itamar*, *Marcelo Felisberto*, *Ildemir*, *Adelino*, *Ricardo*, *Ângelo Alberto*, *Dainy Pacheco*, *Vinícius Manzoni*, *Hélcio Bezerra*, *Landoberg*, e demais colegas do Instituto de Física.
- Ao professor *Jandir Miguel Hickmann*, meu orientador nesta dissertação de mestrado.
- Aos professores *Dilson Pereira Caetano*, *Marcio A. R. C. Alencar* e *Eduardo Jorge da Silva Fonseca*, por suas contribuições ao longo destes anos no grupo OPTMA.
- Aos professores *Iram Marcelo Gléria* e *Sabino Chávez-Cerda* por aceitarem o convite para fazerem parte da minha banca de mestrado, e por suas sugestões.
- Ao professor *Adán José Corcho Fernández* do Instituto de Matemática da UFAL por suas contribuições neste trabalho.
- Aos demais professores e alunos do grupo de Óptica e Materiais do Instituto de Física de Alagoas.
- A todos os funcionários e professores do Instituto de Física da UFAL.

Conteúdo

Resumo	i
Abstract	ii
Introdução	3
1 Luz Rápida	4
1.1 Introdução	4
1.2 Velocidades de fase e de grupo	4
1.2.1 Exemplos e discussões em meios dispersivos	7
1.3 A equação de onda e a equação de Helmholtz	8
1.4 Modelo de Drude-Lorentz para a susceptibilidade elétrica	11
1.5 Absorção na ressonância	17
1.5.1 Análise próximo a frequência de ressonância	21
1.5.2 Análise longe da ressonância	23
1.6 Dispersão normal e anômala	25
1.7 Relações de Kramers-Kronig e a causalidade	26
1.8 Sistemas superluminais	32
1.8.1 Sistema com inversão de população	33
1.8.2 Sistema com ganho assistido	37
1.8.3 Superluminalidade em cristais fotônicos	39
1.9 Conclusão	41
2 Métodos de Fourier, Laplace e Green e a Analiticidade de Funções	44
2.1 Introdução	44
2.2 Introdução as equações diferenciais	45
2.3 Transformadas integrais	46
2.4 Método de Fourier	47
2.4.1 Transformada de Fourier de derivadas	47
2.4.2 Aplicação: Resolução da equação de onda	48
2.4.3 Teorema da convolução para a transformada de Fourier	50
2.4.4 Função de transferência	51
2.4.5 Propriedade da função resposta	53
2.5 Método de Laplace	54
2.5.1 Transformada de Laplace de derivadas	55

2.5.2	Algumas propriedades	55
2.6	Aplicação: Resolução da equação de onda	57
2.6.1	O teorema da convolução usando a transformada de Laplace.	58
2.7	Método de Green	59
2.8	Condições de Cauchy-Riemann e a analiticidade	64
2.9	Derivadas	68
2.10	Expansão de Taylor	69
2.11	Definição de um ponto não analítico	72
2.12	Conclusão	74
3	Resultados e discussões	75
3.1	Introdução	75
3.2	Exemplo sobre o envio de informação	76
3.3	Estudo da propagação	77
3.4	Pulso Gaussiano	79
3.5	Pulso com suporte compacto	84
3.5.1	Entendimento da violação da causalidade	91
3.5.2	Outros tipos de pulsos com pontos não analíticos	92
4	Conclusão	97

Resumo

O trabalho inicia com uma revisão sobre o conceito de velocidade de grupo e de fase, e uma breve discussão do que ocorre quando um pulso se propaga num meio dispersivo. Em seguida, fazemos um estudo da equação de onda de Helmholtz, seguido por uma descrição do modelo de Drude-Lorentz para a susceptibilidade elétrica. Durante este estudo exploramos as relações que existem entre a parte real e imaginária da constante dielétrica, através da relação de Kramers-Kronig. Além disso, discutimos o que é necessário na obtenção deste tipo de relação além do princípio de causalidade. Apresentamos os seguintes sistemas físicos nos quais é possível obter regiões com dispersão anômala: sistema com inversão de população, com ganho assistido e cristal fotônico.

Com o objetivo de aprofundar o entendimento das ferramentas matemáticas usadas no estudo da propagação de pulsos, revisamos os métodos de Fourier, de Laplace e de Green. Aplicamos estes métodos na equação de onda para mostrar como os mesmos tornam o problema mais simples de ser resolvido. Por fim, estudamos as condições de Cauchy-Riemann e a analiticidade de funções reais e imaginárias.

Estudamos a propagação de um pulso Gaussiano e de um pulso com suporte compacto, na região de dispersão anômala. Mostramos que um pulso Gaussiano se propaga com uma velocidade de grupo maior que a velocidade da luz no vácuo, e que o resultado obtido é o mesmo se usarmos somente a parte real do índice de refração ou se usarmos a expressão completa no estudo da propagação. No caso de um pulso com suporte compacto vimos que isto não é verdade. Percebemos ainda que na propagação do pulso com suporte compacto os pontos não analíticos nunca excedem a velocidade da luz no vácuo. Associando a informação a pontos não analíticos mostramos ser impossível enviar informação mais rápida que a luz no vácuo.

Abstract

The work begins with a review on the concept of group and phase velocity, and a discussion about pulses propagation in dispersive media. After that, we are going to study the Helmholtz equation, followed by Drude-Lorentz's model description of electric susceptibility. In this study we have analyzed the relations between the real and imaginary part of the dielectric constant, using Kramers-Kronig relations. Moreover, we have analyzed the necessary conditions to obtain these relations, and the causality principle. We have shown physical systems in which is possible to obtain anomalous dispersion. The systems are population inversion, system with gain-assisted and photonic crystal.

To understand better about some mathematical methods used to study the propagation of pulses, we have reviewed Fourier, Laplace and Green's methods. We used the wave equation to show how the methods mentioned above became a problem simpler to be solved. Finally, we have studied Cauchy-Riemann's conditions and the analyticity of real and imaginary functions.

We have studied the propagation of Gaussian pulse and a compact support pulse, in the anomalous dispersion region. We have shown that the Gaussian pulse can propagate with a bigger group velocity than the speed of light in the vacuum, and these results are the same when we use the whole expression for the refractive index or not. However, in the case of the compact support pulse we have seen that is not true. On the other hand, in the study of the compact support pulse propagation, it was observed that the non-analytical points never exceed the speed of light in the vacuum. Associating the information to the non-analytical points we have observed the impossibility to send information faster than light in the vacuum.

Introdução

Durante muito tempo os físicos não se preocuparam se havia alguma velocidade limite para os corpos, até o momento em que surgiram as idéias revolucionárias de Albert Einstein. Por volta do ano de 1905, Einstein publicou cinco artigos que revolucionaram o pensamento físico existente naquele tempo. Dentre estes artigos, o quarto artigo intitulado “Zur Elektrodynamik bewegter Körper” (“Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento”) lançou as bases para o desenvolvimento da teoria da relatividade restrita. Em seu trabalho Einstein postula que a luz sempre propaga no vácuo com uma velocidade definida c , que independe do estado de movimento do corpo que a emitiu. Hoje em dia, entre os físicos, é praticamente consenso que a velocidade da luz no vácuo é a velocidade máxima para um corpo ou para a transmissão de informação. Assim, a informação contida num pulso deverá obedecer este princípio.

O estudo da propagação de pulsos tem sido extensamente realizado através dos anos. Em particular tivemos grandes contribuições dadas por Sommerfeld e Brillouin [1], que estudaram pulsos com uma frente de onda bem definida propagando-se num meio dispersivo, e mostraram que a frente de onda não pode se propagar mais rápida que a velocidade da luz no vácuo. Alguns livros afirmaram também que as velocidades de grupo quando maiores que c “não possuem uma interpretação física” [2]. No entanto, foi demonstrado [3] que um pulso tipo gaussiano pode se propagar numa região com dispersão anômala com uma velocidade de grupo maior do que a velocidade da luz no vácuo.

Caso fosse possível transmitir informação com estas velocidades de grupo maiores que c , haveria uma violação do princípio da causalidade. Este é um dos princípios mais básicos da física e estabelece que a causa sempre precede o efeito. Como um pulso do tipo gaussiano possui continuidade analítica, podemos a partir de um ponto do pulso descrever todo o seu restante, usando a expansão de Taylor. Assim, no pico de um pulso Gaussiano não há nenhuma informação nova além da que já existe em qualquer outro ponto dele.

Apesar dos vários estudos realizados com propagação de pulsos em regiões de dispersão normal e anômala, ainda não existe um acordo sobre onde está a informação num pulso. Nossa proposta foi associar a informação a um ponto não analítico em uma função contínua, e mostrar que ele não se propaga mais rápido do que a velocidade da luz no vácuo. A motivação para associar a informação a um ponto não analítico, é devido ao fato de que quando queremos criar uma comunicação precisamos de no mínimo dois elementos. Combinando estes dois elementos podemos criar um mecanismo de comunicação. Somente após a chegada do ponto não analítico é possível estabelecer se o sinal enviado corresponde a um ou outro valor.

Com base na associação da informação a pontos não analíticos, usamos um pulso com suporte compacto para estudar o seu comportamento em regiões de dispersão anômala. Este pulso é particularmente interessante porque ele existe numa região bem definida. Para realizar este estudo do pulso com suporte compacto dividimos o nosso trabalho em três capítulos. No capítulo inicial apresentamos os conceitos de velocidade de fase e de grupo, e fizemos uma descrição de um modelo físico que apresenta dispersão anômala, bem como do comportamento de um pulso ao se propagar nesta região. No capítulo seguinte apresentamos possíveis abordagens matemáticas usadas no estudo da propagação de pulsos. No último capítulo, apresentamos os resultados e discussões referente a propagação do pulso com suporte compacto na região de dispersão anômala. Finalizamos com uma

conclusão resumizando os resultados encontrados.

Capítulo 1

Luz Rápida

1.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos as condições necessárias para obtermos luz rápida, ou seja, velocidades de grupo maiores que a velocidade da luz no vácuo. Discutiremos que isto não viola o princípio da causalidade, segundo o qual a causa sempre precede o efeito. Por fim, mostraremos vários tipos de meios nos quais é possível obter regiões com dispersão anômala, que torna possível a obtenção de velocidades de grupo maiores que a velocidade da luz no vácuo.

1.2 Velocidades de fase e de grupo

Para uma onda ψ tipo cosseno, propagando-se na direção x com uma amplitude A , teremos que

$$\psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v_f} \right) \right]. \quad (1.1)$$

no qual,

$$v_f = \frac{\omega}{k}. \quad (1.2)$$

A quantidade v_f é conhecida como *velocidade de fase*. Uma outra velocidade pode ser definida se considerarmos agora a combinação de duas ou mais ondas da forma descrita

na equação (1.1). As ondas podem ter amplitudes diferentes, mas, façamos um caso com duas ondas com mesma amplitude, possuindo freqüências angulares e número de onda dados por

$$\omega_1 = \omega + \Delta\omega. \quad k_1 = k + \Delta k \quad (1.3)$$

$$\omega_2 = \omega - \Delta\omega. \quad k_2 = k - \Delta k$$

Assim,

$$\Psi(x, t) = A \cos(\omega_1 t - k_1 x) + A \cos(\omega_2 t - k_2 x). \quad (1.4)$$

Fazendo algumas manipulações podemos escrever que

$$\Psi(x, t) = 2A \cos(\omega t - kx) \cos(\Delta\omega t - \Delta kx). \quad (1.5)$$

Vemos assim que temos uma onda com freqüência ω e com uma modulação $\Delta\omega$. A partir disto, podemos definir uma *velocidade de grupo* que é dada por

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \rightarrow \frac{\partial\omega}{\partial k} \quad \text{para } \Delta k \rightarrow 0. \quad (1.6)$$

Na figura 1.1 vemos duas ondas com mesma amplitude mas com diferentes freqüências; e na figura 1.2 temos a onda resultante da combinação destas duas ondas.

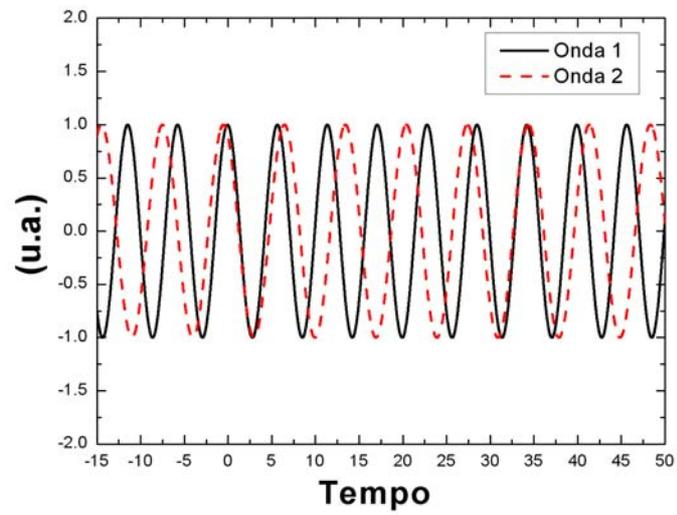


Figura 1.1: Ondas com diferentes frequências e mesma amplitude.

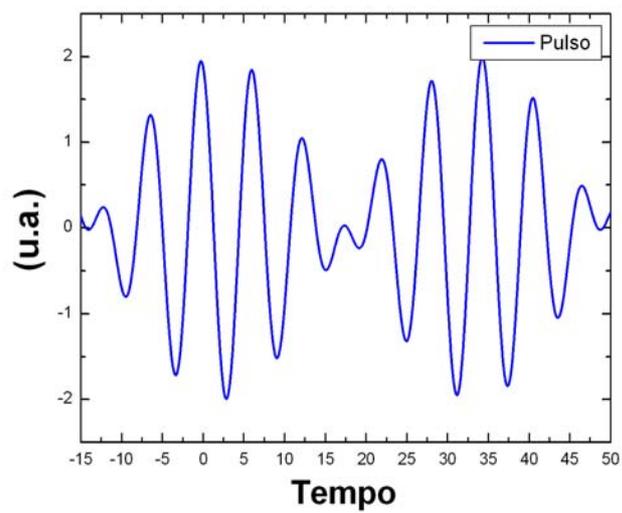


Figura 1.2: Onda resultante da combinação de duas ondas com diferentes frequências e mesma amplitude.

1.2.1 Exemplos e discussões em meios dispersivos

Em um meio onde a velocidade de fase é constante e não depende da frequência, temos

$$v_g = v_f.$$

Mas, de modo geral,

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}. \quad (1.7)$$

Usando o fato de que $\omega = kv_f$, nós podemos escrever que

$$v_g = v_f + k \frac{\partial v_f}{\partial k}. \quad (1.8)$$

Ou ainda, lembrando que $k = 2\pi/\lambda$,

$$v_g = v_f - \lambda \frac{\partial v_f}{\partial \lambda}. \quad (1.9)$$

Um meio que possui uma velocidade de fase $v_f(k)$, ou seja, que é função de k , é chamado de *meio dispersivo*. O vácuo não é dispersivo para a luz ($v_g = v_f = c$), mas todo meio material é dispersivo. É impossível ter um meio refrativo sem dispersão. A situação em geral é mais complicada, visto que v_f pode depender tanto de k , como também da densidade e da temperatura do material. Em alguns materiais devemos também levar em consideração a direção de propagação.

Obtemos uma representação gráfica útil se fizermos um gráfico de ω em função de k , conforme pode ser visto na figura 1.3. A relação $\omega = \omega(k)$ é chamada de *relação de dispersão*. A inclinação do seguimento OA fornece o valor da velocidade de fase v_f , e a inclinação da curva tangente ao ponto A fornece o valor da velocidade de grupo v_g .

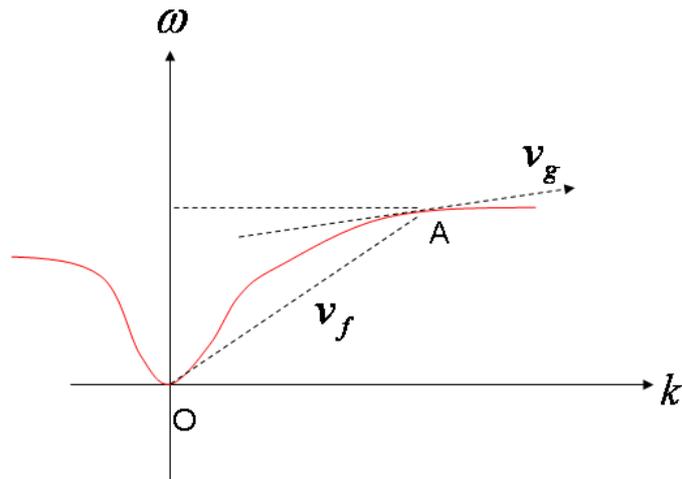


Figura 1.3: Curva de dispersão.

Como já tínhamos dito antes, a velocidade da luz é constante no vácuo, mas depende da frequência quando está propagando na matéria. Além da luz, que é uma onda eletromagnética, sabemos que outros tipos de ondas podem apresentar este comportamento, um exemplo disto, são as ondas sonoras. A velocidade do som no ar é aproximadamente constante para grandes comprimentos de onda, mas depende fortemente da frequência para curtos comprimentos de onda, especialmente quando o comprimento de onda é da ordem do espaçamento entre as moléculas.

1.3 A equação de onda e a equação de Helmholtz

Temos várias formas de estudar a propagação de um pulso, comentaremos aqui algumas dessas possíveis abordagens para estudar a propagação.

De modo geral, no estudo de propagação de um pulso usamos as equações de Maxwell juntamente com as condições de contorno do problema. Na ausência de densidades de correntes e cargas, e para meios não condutores, temos que as equações de Maxwell [4] são dadas por

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 \quad (1.10)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.11)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad (1.12)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.13)$$

No qual, \vec{H} é o campo magnético, \vec{D} é o deslocamento elétrico, \vec{B} é a indução magnética e \vec{E} é o campo elétrico. As equações acima são conhecidas como *equações de Maxwell*, e através delas podemos estudar vários fenômenos eletromagnéticos, em particular, estamos interessados em estudar a propagação de ondas eletromagnéticas num meio dispersivo, para isto, usaremos este conjunto de equações. Usando as equações de Maxwell é possível obter equações de propagação para \vec{E} e \vec{B} , as equações obtidas são chamadas de *equações de onda*.

Para obtermos a equação de onda para \vec{B} tomemos o rotacional da equação (1.10):

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} - \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0,$$

e usemos o fato que $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, onde ϵ é a *permissividade elétrica* do meio, assim,

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} - \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0.$$

Usando agora a equação (1.11) e considerando que $\vec{B} = \mu \vec{H}$, onde μ é constante e corresponde a *permeabilidade magnética* do meio, teremos

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.14)$$

Mas, sabemos que para um certo vetor \vec{a} , é válida a relação

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{a} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}. \quad (1.15)$$

Assim, usando esta identidade vetorial juntamente com a equação (1.13), poderemos reescrever a equação (1.14) como

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.16)$$

Esta é a equação da onda para \vec{B} . Analogamente para \vec{E} teremos que

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.17)$$

Estas equações de onda regem o campo eletromagnético num meio linear, homogêneo, no qual a densidade de carga é nula, e o meio não é condutor. Contudo, nem sempre as soluções destas equações satisfazem as equações de Maxwell. É claro que as equações (1.16) e (1.17) são uma consequência das equações de Maxwell, porém, a recíproca não é verdadeira. Portanto, ao resolvermos as equações de onda, devemos verificar se a solução satisfaz as equações de Maxwell. Um método de resolução usado para ondas monocromáticas consiste em obter uma solução para \vec{E} , e depois, calcular o rotacional de \vec{E} , que dará a derivada temporal de \vec{B} . No caso de ondas monocromáticas, a relação será simples, de modo que \vec{B} pode ser facilmente encontrado.

Uma outra possível forma de estudar a propagação de um pulso, é através do uso do método de Fourier, que detalharemos no capítulo seguinte. Inicialmente, consideremos que

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{D}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t}. \quad (1.18)$$

$$\vec{H}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{H}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t}. \quad (1.19)$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{E}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t}. \quad (1.20)$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{B}(\vec{x}, \omega) e^{-i\omega t}. \quad (1.21)$$

Usando estas equações juntamente com o fato de que $\tilde{D}(\vec{x}, \omega) = \epsilon(\omega) \tilde{E}(\vec{x}, \omega)$, e $\tilde{B}(\vec{x}, \omega) = \mu(\omega) \tilde{H}(\vec{x}, \omega)$, poderemos reescrever as equações (1.10-1.13) como

$$\vec{\nabla} \times \tilde{B} + i\omega(\epsilon\mu)\tilde{E} = 0. \quad (1.22)$$

$$\vec{\nabla} \times \tilde{E} - i\omega \tilde{B} = 0. \quad (1.23)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \tilde{E} = 0. \quad (1.24)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \tilde{B} = 0. \quad (1.25)$$

Fazendo agora manipulações análogas as usadas para obter as equações de onda (1.16) e (1.17), pode-se mostrar que

$$(\nabla^2 + \epsilon\mu\omega^2) \begin{Bmatrix} \tilde{E} \\ \tilde{B} \end{Bmatrix} = 0. \quad (1.26)$$

Esta é a *equação de onda de Helmholtz*. Se considerarmos a propagação ao longo da direção z , e usarmos que

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n}, \quad (1.27)$$

podemos escrever que

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{c} n(\omega, z) \right)^2 \right] \begin{Bmatrix} \tilde{E}(z, \omega) \\ \tilde{B}(z, \omega) \end{Bmatrix} = 0. \quad (1.28)$$

No qual, $n(\omega, z)$ é o *índice de refração* do meio.

1.4 Modelo de Drude-Lorentz para a susceptibilidade elétrica

Descreveremos agora o modelo do oscilador harmônico de Drude-Lorentz, pelo qual é possível obter uma expressão para a susceptibilidade elétrica de um certo material.

Neste modelo, os elétrons ou íons serão tratados como osciladores harmônicos, isto é, partículas presas a uma posição de equilíbrio por uma força restauradora linear. Consideraremos também uma força de amortecimento linear proporcional à velocidade.

Temos que a equação clássica de movimento para o oscilador amortecido unidimensional é

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + G \frac{dx}{dt} + Cx = eE_m, \quad (1.29)$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{eE_m}{m}. \quad (1.30)$$

No qual e e m são respectivamente a carga e a massa da partícula, e E_m é o campo molecular que está atuando sobre a partícula. A constante de amortecimento $\gamma = G/m$, tem as dimensões de frequência. Temos ainda que ω_0 corresponde a frequência natural do oscilador não amortecido, e está relacionado a constante da força, C , por $m\omega_0^2 = C$.

Suporemos que

$$\vec{E}_m = \vec{E} + \frac{\nu}{\epsilon_0} \vec{P}. \quad (1.31)$$

Ou na forma escalar que

$$E_m = E + \frac{\nu}{\epsilon_0} P. \quad (1.32)$$

Aqui, E é o campo externo aplicado, P é a polarização do meio e ν é uma constante relacionada com o tipo de material no qual o campo é aplicado. Por exemplo, para um dielétrico isotrópico, não polar, $\nu = \frac{1}{3}$, e para um metal $\nu = 0$ [5].

Iremos considerar agora que E_m e P , dependem como E , harmonicamente do tempo ($e^{i\omega t}$) e da posição (e^{ikr}), ou seja,

$$E_m = E_{m0} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}.$$

No qual, E_{m0} corresponde a amplitude máxima do campo molecular. Para o nosso interesse, podemos tratar que a variação espacial de E_{m0} é desprezível em relação a posição das partículas, de modo que trataremos o campo espacialmente uniforme, da forma

$$E_m = E_{m0} e^{-i\omega t}. \quad (1.33)$$

Esta suposição é razoável, pois para a região da luz visível, por exemplo, temos que $\lambda \approx 5000\text{Å}$, enquanto que as distâncias atômicas ou o raio atômico são da ordem de 1Å a 10Å .

As soluções de estado estacionário da equação (1.30) são obtidas usando o processo de resolução através da substituição. Consideramos

$$x(t) = x_0 e^{-i\omega t}, \quad (1.34)$$

e usamos a equação (1.33) e (1.34) na equação (1.30), obtendo

$$x_0 \frac{d^2(e^{-i\omega t})}{dt^2} + \gamma x_0 \frac{d(e^{-i\omega t})}{dt} + \omega_0^2 x_0 e^{-i\omega t} = \frac{eE_{m0}e^{-i\omega t}}{m}.$$

$$x_0(-\omega^2) + \gamma x_0(-i\omega) + \omega_0^2 x_0 = \frac{eE_{m0}}{m}.$$

Resolvendo esta equação para x_0 , teremos que

$$x_0 = \frac{eE_{m0}/m}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2}. \quad (1.35)$$

Para obtermos a conexão entre o deslocamento x das partículas microscópicas carregadas que constituem o material, e a resposta elétrica macroscópica do meio obtido, devemos calcular a polarização P . Sabendo que o momento de dipolo devido à carga e deslocada é ex , e considerando que o número de cargas por unidade de volume é N , obteremos que

$$P = Nex. \quad (1.36)$$

Vamos agora supor que o campo aplicado E e a resposta P são proporcionais, ou seja,

$$P = \chi E, \quad (1.37)$$

no qual, χ corresponde a *susceptibilidade elétrica* do meio, e é dada por

$$\chi = \epsilon - \epsilon_0. \quad (1.38)$$

A constante ϵ é a permissividade elétrica do meio considerado, e ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo. Podemos também escrever que

$$K = 1 + \chi/\epsilon_0. \quad (1.39)$$

A constante $K = \epsilon/\epsilon_0$, como vemos é adimensional, e é conhecida como *constante dielétrica*. Usando agora a equação (1.36), juntamente com a equação (1.37) na equação (1.35), obteremos

$$\frac{\chi E}{Ne} = \frac{eE_{m0}/m}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2}. \quad (1.40)$$

Podemos reescrever a equação (1.37) usando a equação (1.31), obtendo

$$E_m = \left(1 + \frac{\nu\chi}{\epsilon_0}\right)E. \quad (1.41)$$

Usando agora a equação (1.41) e a equação (1.40), obteremos que

$$\frac{\chi}{\left(1 + \frac{\nu\chi}{\epsilon_0}\right)} = \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2}. \quad (1.42)$$

Ou ainda, usando a equação (1.39),

$$\frac{K - 1}{1 + \nu(K - 1)} = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2}, \quad (1.43)$$

no qual,

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m}. \quad (1.44)$$

A constante ω_p é conhecida como *freqüência de plasma* do meio.

A equação (1.43) nos fornece uma relação entre a constante macroscópica dielétrica adimensional K , e as propriedades microscópicas das partículas carregadas que constituem o meio. Desta última equação obtida, temos dois aspectos relevantes. O primeiro é que K é complexo, fato que é característico em meios condutores; e o segundo é que ele depende da freqüência, dessa forma, o modelo proposto automaticamente implica num meio dispersivo.

Podemos generalizar o último resultado obtido considerando que as partículas que compõem o meio não possuem necessariamente as mesmas propriedades. Por exemplo, podemos estar considerando elétrons em diferentes órbitas de um átomo. Se houver N_i

partículas de carga e_i , massa m_i , frequência de ressonância natural ω_{0i} e frequência de amortecimento γ_i , obteremos a partir da generalização da dedução acima que

$$\frac{K-1}{1+\nu(K-1)} = \sum_i \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{0i}^2 - i\gamma\omega - \omega^2}. \quad (1.45)$$

Se todas as partículas tiverem as mesmas cargas e massas, como no caso de elétrons em órbitas diferentes, poderemos escrever que

$$\frac{K-1}{1+\nu(K-1)} = \omega_p^2 \sum_i \frac{f_i}{\omega_{0i}^2 - i\gamma\omega - \omega^2}. \quad (1.46)$$

No qual, $f_i = N_i/N$ corresponde a fração de osciladores do tipo i . No caso em que o meio é condutor ($\nu = 0$),

$$K = 1 + \omega_p^2 \sum_i \frac{f_i}{\omega_{0i}^2 - i\gamma\omega - \omega^2}. \quad (1.47)$$

Na situação em que $\nu \neq 0$ e um dos termos do somatório domina todos os outros, poderemos considerar

$$(K-1)(\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2) = [1 + \nu(K-1)]\omega_p^2,$$

de modo que

$$K-1 = \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \nu\omega_p^2) - i\gamma\omega - \omega^2}. \quad (1.48)$$

Vemos da expressão acima que mesmo que $\nu \neq 0$ poderemos considerar uma frequência de ressonância efetiva da forma $\sqrt{\omega_0^2 - \nu\omega_p^2}$. Portanto, poderemos fazer nossas considerações simplesmente usando

$$K-1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2}. \quad (1.49)$$

No qual, ω_0 agora é a *frequência de ressonância efetiva* do meio. Podemos ainda escrever a última expressão da seguinte forma,

$$K = 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega} \left[\frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega} \right].$$

$$K = \left[1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \right] + i \left[\frac{\omega_p^2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \right].$$

Assim, em termos da parte real e imaginária teremos que

$$K_r = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}, \quad (1.50)$$

$$K_i = \frac{\omega_p^2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}. \quad (1.51)$$

A partir da equação (1.50) podemos encontrar o índice de refração do meio, que é

$$n = \sqrt{K}. \quad (1.52)$$

Ou ainda,

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2}}. \quad (1.53)$$

Associado a parte imaginária deste índice de refração, temos um coeficiente de absorção que é dado por

$$g \equiv -2 \operatorname{Im}(\omega n(\omega) / c). \quad (1.54)$$

No qual, c corresponde a velocidade da luz no vácuo. Um gráfico esquemático das partes real e imaginária do índice e refração da equação (1.53) é mostrado na figura 1.4. Como vemos na figura 1.4, a parte imaginária para o índice de refração é positiva e tem um máximo em $\omega_0 = 10$ MHz. Assim, vemos na equação (1.54) que $g < 0$. Veremos nos capítulos seguintes, quando estudarmos a propagação de um pulso, que temos um termo que é da forma

$$\exp \left[i \frac{n(\omega)\omega}{c} z \right] = \exp \left[i \frac{\operatorname{Re}[n(\omega)\omega]}{c} z \right] \exp \left[\frac{g}{2} z \right]. \quad (1.55)$$

Portanto, vemos da equação (1.55) que o termo $\exp \left[\frac{g}{2} z \right]$ tende a ser menor quanto maior o valor em módulo de g , pois aqui ele é negativo. Por este fato é que ele é chamado de coeficiente de absorção. Aqui, a absorção será máxima em $\omega = \omega_0$ (frequência de ressonância). Nas seções seguintes iremos explorar um pouco mais as equações obtidas para a constante dielétrica.

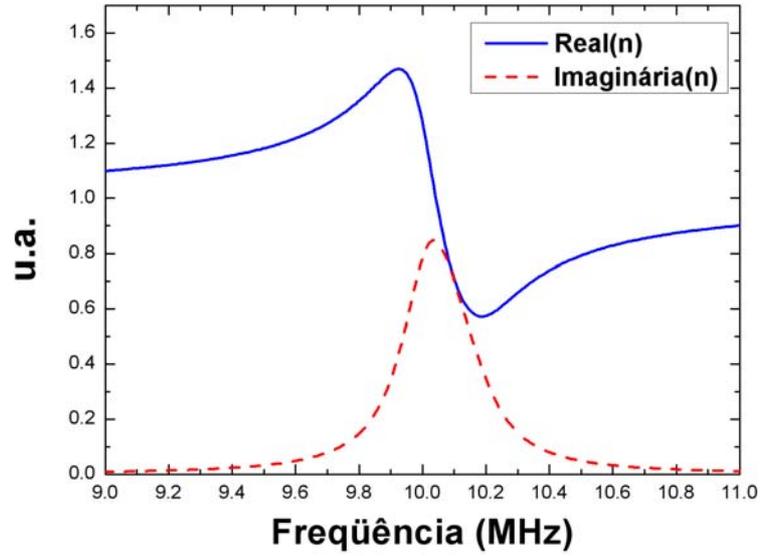


Figura 1.4: Gráfico ilustrativo das partes real e imaginária do índice de refração obtido na equação (1.53).

1.5 Absorção na ressonância

Trataremos agora um pouco sobre a absorção na ressonância devido à cargas ligadas. Iremos para isto aplicar as equações (1.50) e (1.51) para os materiais que não são condutores.

Antes, vamos estimar um valor para ω_0 . Para isto, consideremos o caso estático em que x independe de t , deste modo, a equação (1.30) será escrita como

$$\omega_0^2 x = \frac{eE_m}{m}. \quad (1.56)$$

O deslocamento x , pode ser determinado por meio do equilíbrio das forças que atuam no núcleo. Teremos uma força ZeE_m atuando no sentido do campo, no qual, Z é o número atômico. Mas, uma força eletrostática entre o núcleo e a nuvem de carga tende a restaurar a configuração inicial. Usando a lei de Gauss, juntamente com o fato de que

a carga negativa, que atrai o núcleo, é a parte da nuvem no interior da esfera de raio x e considerando que a densidade da nuvem eletrônica é uniforme, teremos que a carga será Zex^3/R_0^3 [5]. Assim,

$$\frac{(Ze)(Zex^3/R_0^3)}{4\pi\epsilon_0x^2} = ZeE_m, \quad (1.57)$$

ou ainda,

$$Zex = 4\pi\epsilon_0R_0^3E_m. \quad (1.58)$$

Comparando agora a equação (1.56) com a equação (1.58), podemos notar que

$$\omega_0^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0mR_0^3}, \quad (1.59)$$

no qual consideramos que $Z = 1$, para o caso de um único oscilador. Para elétrons na camada de valência podemos considerar que $R_0 = 2\text{Å}$ [5], assim,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(1,6 \times 10)^2}{4\pi(8,854 \times 10^{-12})(0,91 \times 10^{-30})(2 \times 10^{-10})^3}} \approx 5,6 \times 10^{15} s^{-1}.$$

Esta frequência de ressonância eletrônica corresponde a um comprimento de onda no ar de 3350Å , que corresponde a região do ultravioleta, logo depois do espectro visível. Combinando agora a equação (1.59) com a equação (1.44), obtemos que

$$\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} = 4\pi R_0^3 N = 3NV_a. \quad (1.60)$$

Aqui, V_a corresponde ao “volume do átomo” considerado. Assim, se os átomos estiverem bem aglomerados, como quando estão condensados num líquido ou num sólido ($N \approx 1/3V_a$), teremos que

$$\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \approx 1. \quad (1.61)$$

No caso oposto, quando estiverem agregados menos densamente, como num gás ou numa solução, a razão será correspondentemente menor, pois N será menor. Geralmente ω_0 não é fortemente afetado pelo estado de agregação. A razão é também muito menor que 1

para os elétrons da camada interna, que são mais intensamente ligados e possuem órbitas menores [5].

Analisemos agora a frequência de amortecimento γ . Para isto, retomemos a equação (1.30) e consideremos o caso do oscilador livre com $E_m = 0$. A solução da equação com esta condição é

$$x = x_0 e^{-\gamma t/2} e^{-i\omega'_0 t}, \quad (1.62)$$

no qual,

$$\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - (\gamma/2)^2}.$$

Neste caso, ω'_0 será quase igual a ω_0 se γ for pequeno. Vemos ainda que a amplitude de oscilação tem decaimento dado por $e^{-\gamma t/2}$, e a energia de oscilação, que é proporcional ao quadrado da amplitude, tem um decaimento da forma $e^{-\gamma t}$. Dessa forma, podemos escrever que

$$\gamma = \frac{1}{\tau}. \quad (1.63)$$

A quantidade τ corresponde ao tempo médio de decaimento da energia do oscilador. Pode-se mostrar que a taxa de radiação [5] está relacionada a taxa de decaimento pela expressão

$$\frac{\gamma}{\omega_0} = \frac{4\pi R_e}{3 \lambda_0}, \quad (1.64)$$

no qual,

$$R_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} = 2,81 \times 10^{-15} \text{m} \quad (1.65)$$

e $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$ é o comprimento de onda no vácuo correspondente a ω_0 . A constante R_e é o raio clássico do elétron. Mesmo para raios X ($\lambda_0 \approx 1\text{\AA}$) o amortecimento devido a este mecanismo é extremamente pequeno em relação a frequência de ressonância ω_0 . Podemos em geral supor que

$$\frac{\gamma}{\omega_0} \ll 1.$$

Supondo que γ pode ser muito pequeno em relação a ω_0 , uma aplicação bastante instrutiva, mas não física, é feita considerando $\gamma = 0$. Usando esta condição na equação (1.50) teremos

$$K_r - 1 = \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (1.66)$$

Na figura 1.5 podemos ver o comportamento desta última equação, bem como de K_i .

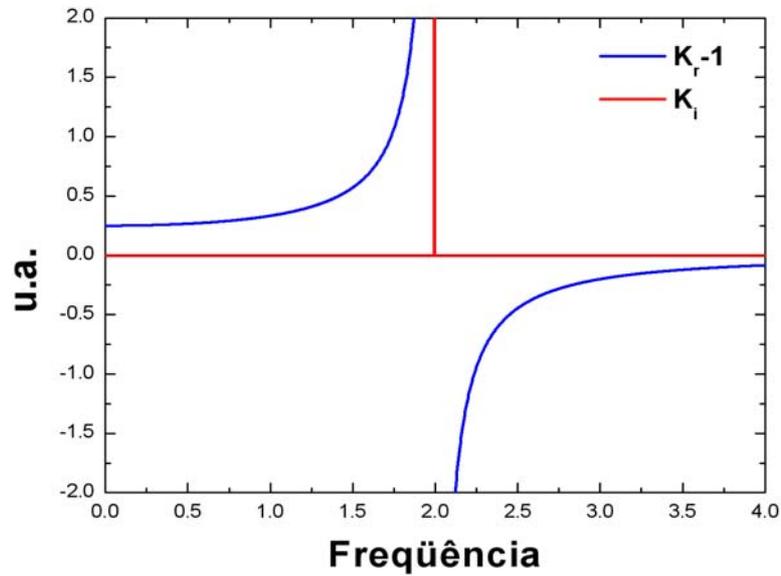


Figura 1.5: A curva cheia azul corresponde ao gráfico de $(K_r - 1)$ e a curva tracejada vermelha a quantidade K_i . Parâmetros usados: $\omega_p = 1$ e $\omega_0 = 2$.

Temos da equação (1.51) que nesta condição $K_i = 0$ em todas as frequências, exceto em $\omega = \omega_0$, onde é indefinido. Mas, da equação (1.51) temos que quando $\omega = \omega_0$ (e $\gamma \neq 0$)

$$K_i = \frac{\omega_p^2}{\omega_0 \gamma}. \quad (1.67)$$

De modo que K_i no pico de ressonância é proporcional a $1/\gamma$ e tende ao infinito no limite em que γ tende a zero. Este limite pode ser expresso como uma função da frequência,

usando a “função” delta de Dirac, da forma

$$K_i = \frac{\omega_p^2 \pi}{\omega_0^2} \delta(\omega - \omega_0). \quad (1.68)$$

O coeficiente $\pi/2$ é escolhido de forma que a integral sobre ω seja dada por

$$\int_0^{\infty} K_i d\omega = \frac{\omega_p^2 \pi}{\omega_0^2}, \quad (1.69)$$

que corresponde ao limite correto para $\gamma \rightarrow 0$, como pode ser demonstrado [5].

1.5.1 Análise próximo a frequência de ressonância

Vamos agora estudar o comportamento detalhado na vizinhança de ω_0 . Para isto, suporemos que $\gamma > 0$, com $\gamma \ll \omega_0$. Considerando ω próximo de ω_0 , podemos usar que

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega).$$

Substituindo este valor na equação (1.50) e (1.51), teremos que

$$K_r - 1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0} \frac{(\omega_0 - \omega)/2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2}, \quad (1.70)$$

$$K_i = \frac{\omega_p^2}{\omega_0} \frac{\gamma/4}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2}. \quad (1.71)$$

A função K_i tem a forma de uma curva *lorentziana*, conforme ilustrado na figura 1.6.

Ressaltamos que não temos nos preocupado em utilizar unidades nos gráficos porque estamos interessados apenas no comportamento qualitativo das funções estudadas nesta seção, bem como nas razões entre ω_p e ω_0 , e entre γ e ω_0 . Podemos observar nas últimas equações que K_i é par em relação a $(\omega_0 - \omega)$ e $K_r - 1$ é ímpar.

Calcularemos agora a largura ($L = \omega_+ - \omega_-$) de K_i na metade de seu valor máximo, e mostraremos que os valores ω_- e ω_+ correspondem aos pontos onde ocorrem os valores máximo e mínimo de $K_r - 1$, respectivamente.

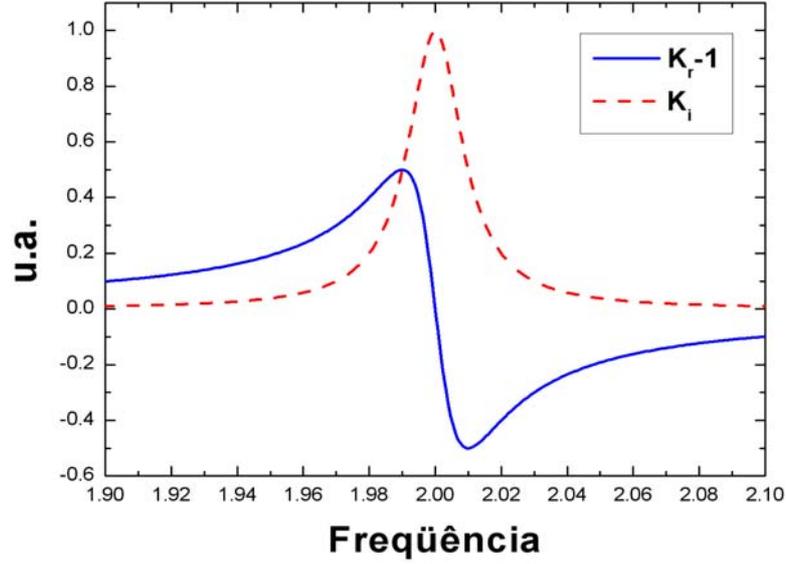


Figura 1.6: Gráfico de $(K_r - 1)$ e K_i , usando $\omega_0 = \omega_p = 2$ e $\gamma = 0.01\omega_0$.

Inicialmente calculemos o valor máximo de K_i . Faremos isto calculando o ponto onde a primeira derivada de K_i com relação a ω é igual a zero,

$$\frac{dK_i}{d\omega} = \frac{\omega_p^2}{\omega_0} (\gamma/4)(-1) [(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2]^{-2} [2(\omega_0 - \omega)(-1)] = 0$$

$$2(\omega_0 - \omega)(-1) = 0$$

Assim, vemos que o máximo ocorre em $\omega = \omega_0$. Usando agora este resultado na equação (1.71), obteremos que

$$M \equiv K_i(\omega = \omega_0) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0} \frac{\gamma/4}{(\gamma/2)^2}.$$

$$M = \frac{\omega_p^2}{\omega_0} \frac{1}{\gamma} = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{\omega_0}{\gamma}. \quad (1.72)$$

Calculemos agora o valor de ω para o qual $K_r - 1$ possui seu valor máximo ou mínimo,

$$\frac{d(K_r - 1)}{d\omega} = \frac{\omega_p^2}{\omega_0} \left\{ \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2} + \frac{1}{2} \frac{(\omega_0 - \omega)(-1)2(\omega - \omega_0)(-1)}{[(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2]^2} \right\} = 0$$

$$-(\omega_0 - \omega)^2 - \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 + 2(\omega_0 - \omega)^2 = 0$$

$$(\omega_0 - \omega)^2 = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2.$$

Portanto,

$$\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \frac{\gamma}{2}.$$

Substituindo agora este valor na equação (1.70), obteremos finalmente que

$$K_r(\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \frac{\gamma}{2}) - 1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0} \frac{[\omega_0 - \omega_0 - (\pm\gamma/2)]}{[\omega_0 - \omega_0 - (\pm\gamma/2)] + (\gamma/2)^2} = (\mp 2) \frac{\omega_p^2}{\omega_0} \frac{1}{\gamma} = \mp \frac{M}{2}.$$

$$(K_r - 1)_{\max} = \frac{M}{2}, \text{ e } (K_r - 1)_{\min} = -\frac{M}{2} \quad (1.73)$$

A integral de K_i sobre todas as frequências pode ser calculada, fornecendo o valor $(\omega_p^2/\omega_0) (\pi/2)$, justificando assim o coeficiente $\pi/2$ na equação (1.68). Por fim, calculemos a largura L de K_i ,

$$L = \left(\omega_0 + \frac{\gamma}{2}\right) - \left(\omega_0 - \frac{\gamma}{2}\right) = \gamma. \quad (1.74)$$

Assim, como a largura de K_i é igual a γ e sua altura é proporcional a $1/\gamma$, teremos que a área sob a curva é independente de γ .

Para um gás, à pressão atmosférica, $(\omega_p^2/\omega_0)^2 \approx 10^{-3}$ [5], porém $(\omega_0/\gamma) \approx 10^5$, de modo que, de acordo com a equação (1.72)

$$M \approx 100.$$

Logo, M pode ser bastante grande.

1.5.2 Análise longe da ressonância

No caso longe da ressonância, quando $|\omega - \omega_0| \gg \gamma$, pode-se mostrar que

$$K_r - 1 \approx \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (1.75)$$

$$K_i \approx \frac{\omega_p^2 \gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}. \quad (1.76)$$

Se γ não for tão pequeno com relação a ω_0 , nenhuma das relações simples precedentes será válida quantitativamente, porém, o comportamento qualitativo de K ainda será o mesmo. O caso em que $\omega_p/\omega_0 = 1$ e $\gamma/\omega_0 = 1/10$ é mostrado na figura 1.7. A parte imaginária tem um pico com o máximo próximo de ω_0 . Na região deste pico, a parte real sempre tem uma inclinação negativa, denominada de *dispersão anômala*; quando a inclinação é positiva chamamos de *dispersão normal*. Nos materiais reais existem sempre muitos picos de absorção eletrônica na região ultravioleta, algumas vezes, estendendo-se na região visível; e nos sólidos, podem ser largos e se sobrepõem intensamente.

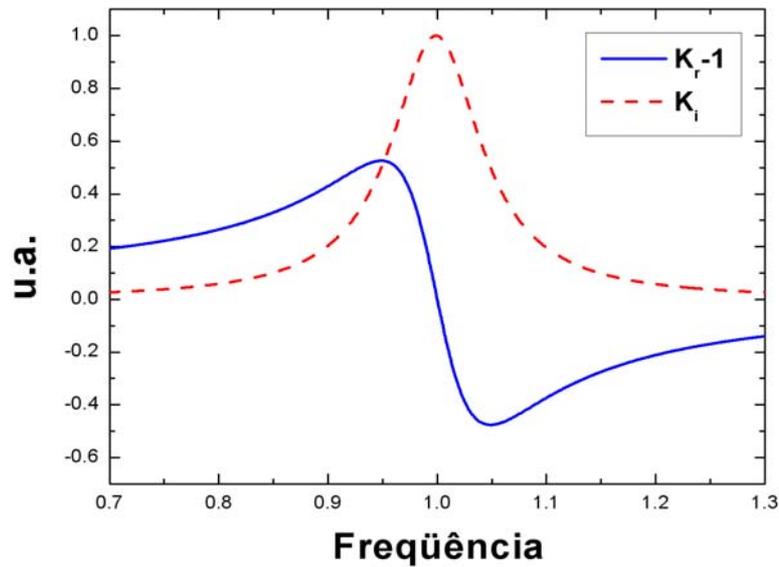


Figura 1.7: Gráfico de $(K_r - 1)$ e K_i , para $\omega_p = \omega_0 = 1$ e $\gamma = 0.1\omega_0$.

Podemos ainda ressaltar que se as partículas carregadas, que oscilam, forem íons pesados ao invés de elétrons, a frequência de ressonância ω_0 será algumas centenas de vezes maior. A constante da força restauradora linear é aproximadamente a mesma, uma vez que também provém da força de Coulomb, porém, a massa do íon será 4 ou 5 ordens de grandeza maior do que a massa do elétron [5]. A frequência ω_p será menor, pois é

inversamente proporcional à raiz quadrada da massa. Por exemplo, num cristal iônico

$$\frac{\omega_p}{\omega_0} \approx 1, \quad \frac{\gamma}{\omega_0} \approx 0.1.$$

Vemos que as razões são praticamente as mesmas que comentamos antes, entretanto, teremos agora que o pico de absorção, embora sendo semelhante ao eletrônico, estará localizado na região do infravermelho ao invés de se situar na região visível ou ultravioleta.

1.6 Dispersão normal e anômala

Na seção anterior já comentamos um pouco sobre o que é uma região de dispersão normal e anômala. Vamos agora aprofundar um pouco mais este conceito. Para isto, analisemos o esquema mostrado na figura 1.8.

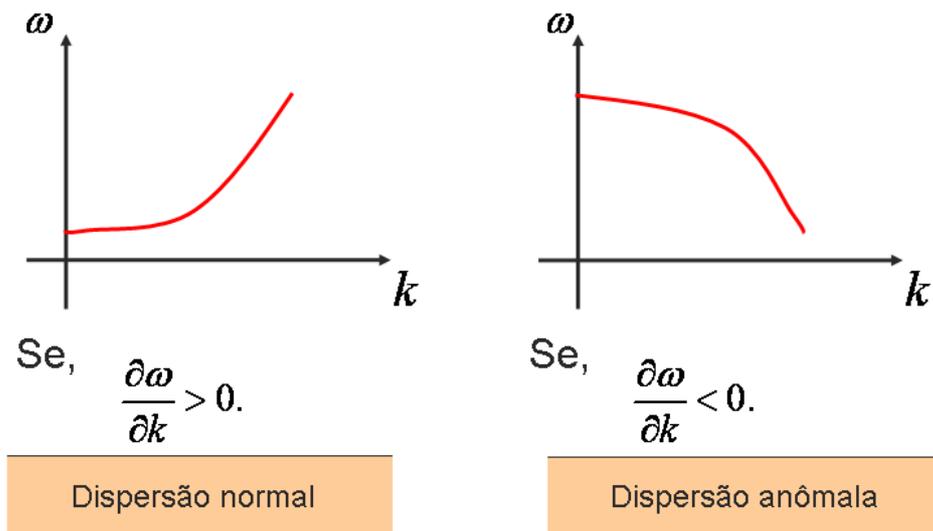


Figura 1.8: Esquema sobre a dispersão normal e anômala.

Vemos na figura 1.8 curvas de dispersão. No primeiro caso temos $\partial\omega/\partial k > 0$, ou seja a derivada é positiva, quando isto ocorre dizemos que temos uma região de dispersão normal. Já no outro caso, quando $\partial\omega/\partial k < 0$, dizemos ser esta uma região de dispersão anômala. A região de dispersão anômala será a que usaremos nos capítulos seguintes,

sua importância será mais explorada mais tarde. Mas, adiantamos que obteremos uma expressão para a velocidade de grupo da forma

$$v_g = \frac{c}{n(\omega_c) + \omega \frac{\partial n}{\partial \omega} \Big|_{\omega_c}}. \quad (1.77)$$

No qual, ω_c corresponde a frequência central de um certo pulso. A equação (1.77) é obtida usando o fato de que $k = n\omega/c$. Da equação (1.77) vemos que se $\partial n/\partial \omega < 0$ (região de dispersão anômala), poderemos ter $v_g > c$, ou seja, poderemos ter uma velocidade de grupo maior que a da luz no vácuo (velocidade superluminal), conforme exploraremos mais tarde.

1.7 Relações de Kramers-Kronig e a causalidade

Até agora foi possível perceber em nosso estudo, que a um certo pico de absorção K_i existe uma dispersão K_r associada. Mostraremos nesta seção que existe uma relação geral entre K_r e K_i tal que, seja qual for o mecanismo de absorção, se $K_i(\omega)$ for conhecido, poderemos calcular $K_r(\omega)$ usando $K_i(\omega)$. E ainda, ele será unicamente determinado para todo ω . Obteremos $K_r(\omega)$ através de uma certa integral definida de $K_i(\omega)$. Ressaltamos ainda que o oposto também é verdade, ou seja, se conhecermos $K_r(\omega)$ poderemos determinar $K_i(\omega)$.

Em particular, se $K_i(\omega) = 0$ para todo ω , teremos que $K_r(\omega) = 1$. A relação existente entre $K_r(\omega)$ e $K_i(\omega)$ é extremamente importante, pois, se por exemplo, pudermos determinar um deles experimentalmente, não será preciso medir o outro, basta usar a relação que existe entre eles. Veremos que as relações existentes entre eles são chamadas de *relações de Kramers-Kronig*. Estas relações foram demonstradas primeiramente por H. A. Kramers (1927) e R. de L. Kronig (1926) independentemente.

A relação geral pode ser encontrada, supondo-se que qualquer absorção arbitrária pode ser representada como uma distribuição contínua de linhas de absorção de oscilador

harmônico muito próximas. De acordo com a equação (1.69) temos que

$$\int_0^{\infty} K_i d\omega = \frac{\omega_p^2 \pi}{\omega_0 2} \equiv K_i(\omega_0) \Delta\omega_0, \quad (1.78)$$

que nos fornece a contribuição total dos osciladores de frequência natural ω_0 no pequeno intervalo $\Delta\omega_0$ para K_i . Expressando agora ω_p^2 em termos de $K_i(\omega_0)\Delta\omega_0$, obteremos

$$\omega_p^2 = \frac{2}{\pi} \omega_0 K_i(\omega_0) \Delta\omega_0. \quad (1.79)$$

Substituindo este resultado na equação (1.66) teremos que

$$\Delta(K_r - 1) = \frac{2}{\pi} \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} K_i(\omega_0) \Delta\omega_0,$$

que representa a contribuição de K_r para uma frequência ω , devido aos osciladores no intervalo $\Delta\omega_0$ em torno de ω_0 . Deste modo, a soma de todas as contribuições dos diferentes ω_0 para K_r , será dada por

$$K_r(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega' K_i(\omega') d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}. \quad (1.80)$$

Na última expressão mudamos $\Delta\omega_0$ num diferencial $d\omega_0$, e representamos ω_0 por ω' . Esta é a *relação de Kramers-Kronig*, que foi usada pela primeira vez em 1926, para determinar o índice de refração para os raios X a partir da absorção medida.

Faremos agora uma aplicação para o caso de baixas frequências para uma partícula livre. Em alguns estados da matéria, principalmente em metais e plasmas, os elétrons pertencentes às órbitas atômicas externas não são localizados (ligados), eles são livres. Neste caso, suporemos em nosso modelo microscópico que a força restauradora para esses elétrons é igual a zero. Assim, tomando $\omega_0 = 0$ na equação (1.49), obteremos que

$$K - 1 = -\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)}. \quad (1.81)$$

Com as partes real e imaginária sendo descritas por

$$K_r - 1 = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2}, \quad (1.82)$$

$$K_i = \frac{\omega_p^2 \gamma}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)}. \quad (1.83)$$

Consideremos agora que $\omega \ll \gamma$, podemos assim escrever que

$$K_r \approx \frac{-\omega_p^2}{\gamma^2}, \quad (1.84)$$

$$K_i \approx \frac{\omega_p^2}{\omega \gamma}. \quad (1.85)$$

Substituindo este resultado na equação (1.80) encontramos

$$K_r - 1 = \frac{2 \omega_p^2}{\pi \gamma} \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}. \quad (1.86)$$

Calculando a integral acima obteremos que,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} &= -\frac{1}{2\omega} \left[\int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega' + \omega} - \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} \right] \\ \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} &= -\frac{1}{2\omega} \left[\ln \left| \frac{\omega' + \omega}{\omega' - \omega} \right| \right]_0^{\infty} = 0. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Portanto, usando este resultado na equação (1.86) teremos

$$K_r = 1. \quad (1.88)$$

Contudo, vemos claramente que este resultado não está em acordo com a equação (1.84), isto ocorre devido ao fato de que $K_i(\omega)$ deve ser conhecido no intervalo de frequência completo, de 0 a ∞ , para obtermos o resultado correto. Aqui, tínhamos usado a equação (1.85) para $K_i(\omega)$, entretanto, ela só é correta para frequências bem abaixo de γ . Um fato importante a se ressaltar, é que a integral sempre fornece o valor correto para K_r quando ω tende ao infinito, ou seja, $K_r = 1$, como se pode ver diretamente da equação (1.80). Deste modo, se K_r for constante, deve ser igual a 1.

Com base nas últimas observações, podemos ressaltar que quando a integral for calculada usando dados experimentais, é necessário fazer uma extrapolação razoável acima

e abaixo do intervalo de frequência em que as medidas foram realizadas, mesmo para encontrar K_r somente neste intervalo, pois, se isto não for feito vimos que o valor obtido será incorreto. Uma causa de erro mais direta seria a omissão de um pico de absorção desconhecido acima do intervalo de medida.

Podemos multiplicar a integral em (1.87), que é igual a zero, por $(-2/\pi)\omega K_i(\omega)$ e somar o resultado a integral da equação (1.80), obtendo

$$K_r(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[\omega' K_i(\omega') - \omega K_i(\omega)] d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}. \quad (1.89)$$

Esta forma de escrever a relação de Kramers-Kronig é útil para calcular a integral numericamente, pois, nesta representação o integrando não tem singularidade, devido ao fato de que o numerador se anula no mesmo ponto que o denominador.

Podemos integrar a equação (1.80) por partes e obter que

$$K_r(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dK_i(\omega')}{d\omega'} \ln \frac{1}{|\omega'^2 - \omega^2|} d\omega'. \quad (1.90)$$

Esta forma de representação é instrutivamente importante porque nos fornece uma idéia do comportamento que se espera de K_r . Vemos que a contribuição do integrando é maior em frequências próximas de ω por causa do fator $\ln [1/|\omega'^2 - \omega^2|]$, notamos ainda que, a magnitude de K_r é fortemente influenciada pela inclinação de K_i em frequências próximas. Isto pode ser observado qualitativamente em todos os gráficos de K_r e K_i mostrados até agora neste capítulo.

Embora tenhamos derivado a relação de Kramers-Kronig a partir do modelo do oscilador harmônico, ela pode ser obtida de uma forma mais geral. Para isto, duas suposições são necessárias. A primeira suposição é a da *linearidade*, no nosso caso, o oscilador harmônico foi o protótipo do sistema linear; a segunda suposição é a da *causalidade*, ou seja, a resposta (perturbação) do sistema não existe antes que a força seja aplicada, como no caso do oscilador harmônico que fizemos anteriormente.

Faremos agora uma abordagem alternativa daquela considerada até agora. Para isto, vamos expressar a linearidade e a causalidade escrevendo a polarização P em termos do campo aplicado E da seguinte forma

$$P(t) = \int_0^{\infty} dt' f(t') E(t-t'), \quad (1.91)$$

no qual temos que $f(t')$ é real. Da última expressão, temos que P no instante t é proporcional às contribuições de E no tempo t (presente) e $t-t'$ (passado), mas não existem contribuições correspondentes ao futuro. Expressemos agora P e E usando a transformada de Fourier, pela forma

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{E}(\omega) e^{-i\omega t}, \quad (1.92)$$

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{\chi}(\omega) \tilde{E}(\omega) e^{-i\omega t}. \quad (1.93)$$

Na última equação nós usamos o fato de que $\tilde{P}(\omega) = \tilde{\chi}(\omega) \tilde{E}(\omega)$. Substituindo a equação (1.92) na equação (1.91) obteremos que

$$P(t) = \int_0^{\infty} dt' f(t') \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{E}(\omega) e^{-i\omega(t-t')} \right].$$

Invertendo agora a ordem de integração e rearranjando os termos teremos

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[\int_0^{\infty} dt' f(t') e^{i\omega t'} \right] \tilde{E}(\omega) e^{-i\omega t}. \quad (1.94)$$

Comparando a equação (1.94) com a equação (1.93) vemos que

$$\tilde{\chi}(\omega) = \int_0^{\infty} dt' f(t') e^{i\omega t'}. \quad (1.95)$$

E em termos de suas partes real e imaginária obteremos

$$\chi_r(\omega) = \int_0^{\infty} dt' f(t') \cos(\omega t'), \quad (1.96)$$

$$\chi_i(\omega) = \int_0^{\infty} dt' f(t') \text{sen}(\omega t'). \quad (1.97)$$

Deste modo, vemos que χ_r e χ_i não são independentes, pois estão relacionados unicamente a $f(t')$. Para obter tal relação, devemos resolver uma das equações para $f(t')$, por exemplo, usando a transformada de Fourier inversa na equação (1.97), obtendo

$$f(t') = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega' \chi_i(\omega') \text{sen}(\omega' t'). \quad (1.98)$$

Substituindo agora esta equação na equação (1.96) e calculando a integração em t' obteremos que

$$\chi_r(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \omega' d\omega' \chi_i(\omega') / (\omega'^2 - \omega^2). \quad (1.99)$$

Analogamente teremos que,

$$\chi_i(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega' \chi_r(\omega') / (\omega'^2 - \omega^2). \quad (1.100)$$

Vemos que a equação (1.99) é idêntica a equação (1.80) e a equação (1.100) é complementar a esta.

Nós faremos agora uma simples aplicação da equação (1.98), calcularemos a resposta de um meio dispersivo a um campo não senoidal aplicado. Consideraremos um único pico de absorção muito estreito, da forma

$$\chi_i(\omega') = \frac{\pi\omega_0\chi_0}{2} \delta(\omega' - \omega_0), \quad (1.101)$$

no qual, $\chi_r(0) = \chi_0$. Substituindo esta última equação na equação (1.98) obteremos

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega' \left[\frac{\pi\omega_0\chi_0}{2} \delta(\omega' - \omega_0) \right] \text{sen}(\omega' t)$$

$$f(t) = \chi_0\omega_0 \text{sen}(\omega_0 t). \quad (1.102)$$

Vamos agora supor que é aplicado um campo elétrico tipo degrau, dado por

$$E(t) = 0, \quad \text{para } t < 0.$$

$$E(t) = E_0, \quad \text{para } t > 0.$$

Substituindo estas equações na equação (1.93), obteremos que

$$P(t) = E_0 \int_0^t dt' f(t')$$

$$P(t) = \chi_0 \omega_0 E_0 \int_0^t dt' \text{sen}(\omega_0 t')$$

$$P(t) = \chi_0 E_0 [1 - \cos(\omega_0 t)]. \quad (1.103)$$

Assim, vemos que após a súbita aplicação do campo elétrico E_0 , o meio oscilará na frequência de absorção (ressonância) ω_0 .

1.8 Sistemas superluminais

Nesta seção vamos considerar sistemas nos quais a velocidade de grupo v_g pode ser maior que a velocidade da luz no vácuo, a estes tipos de sistemas denominaremos de superluminais. Discutiremos também porque o princípio da causalidade não é violado nestes casos.

O estudo da propagação de pulsos superluminais tem sido extensivamente estudado ao longo dos anos. Lord Rayleigh já tinha discutido o fenômeno de propagação de um pulso numa região de dispersão anômala em 1899 [6]. Pelo princípio da causalidade temos que nenhum objeto ou informação pode viajar mais rápido que a velocidade da luz c . Para resolver esta aparente contradição, de que é possível obter velocidades maiores que a da luz no vácuo, Brillouin e Sommerfeld mostraram que não há violação da causalidade neste tipo de propagação [1]. Em seus trabalhos, eles mostraram que a velocidade do sinal é limitada a velocidade da frente de onda, e por causa do processo de interações eletrônicas, esta frente de onda não pode propagar mais rápida que a interação eletrônica. Portanto, se o pulso pode viajar mais rápido que c , a frente de onda não pode. Considerando o

caso onde o pulso propagado corresponde a um pulso quadrado, que possui uma frente de onda bem definida, eles mostraram que o pulso é fortemente distorcido e a informação é perdida.

Contudo, em estudos posteriores realizados com pulsos do tipo gaussiano, mostrou-se que esses pulsos podem alcançar velocidades de grupo maiores que a velocidade da luz no vácuo sem sofrer deformação [7].

1.8.1 Sistema com inversão de população

Vamos considerar aqui um sistema atômico de dois níveis com inversão de população. Para um sistema de dois níveis, teremos que o índice de refração [8] será dado por

$$n(\omega) = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}}. \quad (1.104)$$

Notemos aqui o sinal de menos ($-$) em frente ao segundo termo que está dentro da raiz quadrada, correspondendo ao fato de termos no sistema atômico inversão de população. Se estivéssemos usando o modelo inicial dos osciladores harmônicos, o sinal em frente ao segundo termo que está dentro da raiz quadrada seria o de mais ($+$), ver equação (1.53), deste modo, correspondendo a uma região de absorção.

Analisando a equação (1.104) vemos que quando $\omega = 0$,

$$n(0) = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}} < 1. \quad (1.105)$$

O fato de que $n(0) < 1$ torna possível a obtenção de superluminaridade, conforme veremos mais tarde. Um gráfico mostrando a parte real e imaginária de $n(\omega)$ é mostrado na figura 1.9.

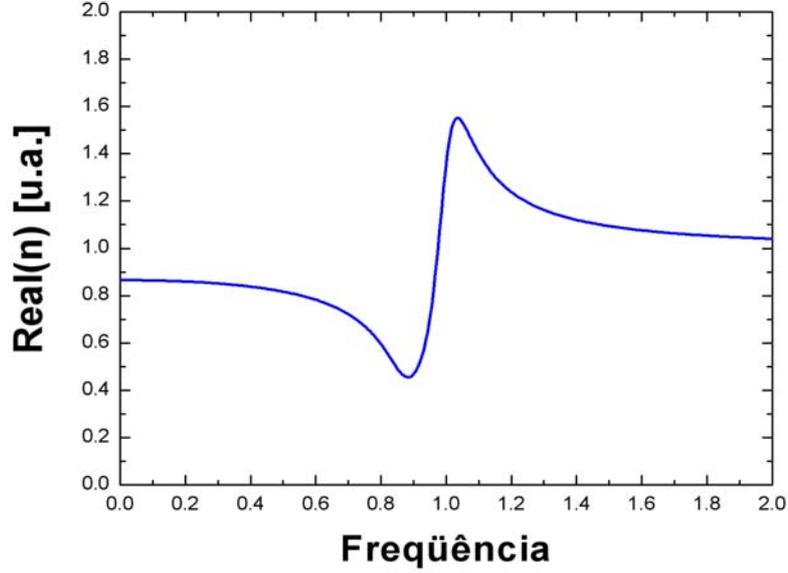


Figura 1.9: Gráfico da parte real do índice de refração, usando $\omega_p = 0.5$, $\omega_0 = 1$, e $\gamma = 0.1$.

Uma possível forma de estudar a propagação de um pulso, é através do método de Fourier (que será mais explorado no próximo capítulo), de modo que, uma solução para o campo elétrico no meio dispersivo é dada por,

$$E(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_0(\omega) \exp [ik(\omega)z - \omega t] d\omega, \quad (1.106)$$

no qual, $k(\omega) = n(\omega)/c$, e $\tilde{E}_0(\omega)$ corresponde a transformada de Fourier do pulso no instante inicial, antes de propagar no meio com dispersão. Este pulso inicial será considerado como tendo uma frequência central ω_c . Podemos desta forma, expandir o número de onda $k(\omega)$ em torno desta frequência, obtendo que

$$k(\omega) = k(\omega_c) + \left[\frac{dk}{d\omega} \right]_{\omega_c} (\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} \left[\frac{d^2k}{d\omega^2} \right]_{\omega_c} (\omega - \omega_c)^2 + \dots, \quad (1.107)$$

ou,

$$k(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k_m (\omega - \omega_c)^m}{m!}, \quad (1.108)$$

com,

$$k_m = \left[\frac{d^m k}{d\omega^m} \right]_{\omega=\omega_c}. \quad (1.109)$$

Destas expressões, temos que o termo correspondente a k_1 está associado a velocidade de grupo por $k_1 = 1/v_g$, assim,

$$k_1 = \left[\frac{dk}{d\omega} \right]_{\omega_c} = \left[\frac{d(n(\omega)\omega/c)}{d\omega} \right]_{\omega_c} = \frac{1}{c} \left[n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega} \right]_{\omega_c} = \frac{1}{v_g}.$$

Ou ainda,

$$v_g = \frac{c}{\left[n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega} \right]_{\omega_c}}. \quad (1.110)$$

Ressaltamos aqui que a parte do índice de refração usada nesta expressão é somente a parte real.

Vemos da última equação que quando $dn/d\omega < 0$, que corresponde a uma região com dispersão anômala, poderemos ter que $v_g > c$. Analisando também o gráfico 1.7, vemos que em $\omega = 0$, $dn/d\omega \approx 0$ e $n(0) < 1$, de modo que $v_g > c$. Teremos assim, nestes casos, velocidades de grupos maiores que a velocidade da luz no vácuo. O caso representado na figura 1.9 foi discutido por Raymond Y. Chao [8], mostrando as condições nas quais podemos obter um pulso com velocidade superluminal e com pouca deformação.

O segundo termo de k , no caso k_2 , é associado a dispersão da velocidade de grupo. Com base nos termos k_1 e k_2 , analisaremos as condições necessárias para que um pulso se propague sem sofrer muita deformação.

Podemos reescrever a equação (1.106) usando a expansão obtida na equação (1.107), disto

$$E(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_0(\omega) d\omega \exp[-\omega t] \exp \left[ik(\omega_c)z + i \left[\frac{dk}{d\omega} \right]_{\omega_c} (\omega - \omega_c) + \dots \right]. \quad (1.111)$$

Consideremos agora um meio dispersivo de tamanho L , conforme ilustrado na figura 1.10.

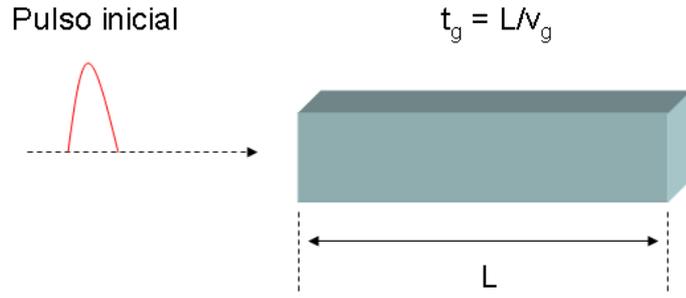


Figura 1.10: Esquema da propagação de um pulso num meio com dispersão.

A intensidade do pulso, que é proporcional ao módulo quadrático do campo, antes de propagar no meio dispersivo será dada por

$$\left| E(z = 0, t - \frac{L}{v_g}) \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_0(\omega) d\omega \exp[-i\omega t] \exp\left[iL \frac{\omega}{v_g} \right] \right|^2, \quad (1.112)$$

ou ainda,

$$\left| E(z = 0, t - \frac{L}{v_g}) \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_0(\omega) d\omega \exp[-i\omega t] \exp\left[iL\omega \left[\frac{dk}{d\omega} \right]_{\omega_c} \right] \right|^2 \quad (1.113)$$

Depois que o pulso propaga na região de dispersão, temos que

$$|E(z = L, t)|^2 \approx \left| \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_0(\omega) d\omega \exp[-i\omega t] \exp\left[iLk(\omega_c) + iL \left[\frac{dk}{d\omega} \right]_{\omega_c} \Delta_{\omega_c} + iL \frac{1}{2} \left[\frac{d^2k}{d\omega^2} \right]_{\omega_c} (\Delta_{\omega_c})^2 \right] \right|^2 \quad (1.114)$$

no qual, consideramos que $\Delta_{\omega_c} = \omega - \omega_c$, e desprezamos os termos de ordem maior que dois, dentro do argumento da segunda exponencial do integrando. Temos que $|\exp[iLk(\omega_c)]|^2 = 1$, portanto se,

$$\left| \frac{1}{2} L \left[\frac{d^2k}{d\omega^2} \right]_{\omega_c} (\Delta_{\omega_c})^2 \right| \ll \left| L \left[\frac{dk}{d\omega} \right]_{\omega_c} \Delta_{\omega_c} \right|, \quad (1.115)$$

teremos que,

$$\left| E(z = 0, t - \frac{L}{v_g}) \right|^2 \approx |E(z = L, t)|^2. \quad (1.116)$$

Ou seja, o pulso praticamente não sofrerá deformação, e além disso, poderá se propagar com uma velocidade superluminal quando $dn/d\omega < 0$.

Embora o pulso possa se propagar com velocidade de grupo superluminal sem sofrer deformação, isto não viola a causalidade, pois, nos casos em que foi obtido superluminalidade sem deformação, o pulso usado foi do tipo gaussiano, e um pulso gaussiano possui continuidade analítica, isto será discutido com mais detalhes nos próximos capítulos, assim, conhecendo o valor dele numa certa posição, podemos através da expansão de Taylor descrevê-lo em qualquer outra posição. Deste modo, embora a velocidade do pico do pulso possa ser superluminal, ele não possui nenhuma informação nova.

Até aqui, temos considerado o modelo de inversão de população para mostrar que é possível obter superluminalidade, entretanto, ressaltamos que a condição necessária para obter superluminalidade é que exista uma região com dispersão anômala. A condição necessária para termos superluminalidade, também pode ser demonstrada diretamente das relações de Kramers-Kronig. Da equação (1.80) temos que em $\omega = 0$,

$$K_r(0) = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega' K_i(\omega') d\omega'}{\omega'^2}. \quad (1.117)$$

Assim, se

$$K_i(\omega') < 0, \quad (1.118)$$

como no exemplo com inversão de população, pela equação (1.118) teremos que $K_r(0) < 1$, e deste modo, $n(0) < 1$. Assim, a velocidade de grupo será superluminal.

1.8.2 Sistema com ganho assistido

Em alguns experimentos usando transparência eletromagneticamente induzida (EIT) [9], foi mostrado uma drástica redução na velocidade de grupo, chegando a alcançar velocidades de grupo da ordem de 8m/s. Isto foi alcançado utilizando-se a região de dispersão normal obtida entre duas linhas de absorção suficientemente próximas. De modo análogo, entre duas regiões de ganho suficientemente próximas, aparece uma região com dispersão anômala, conforme pode ser visto na figura 1.11. Nesta região, como visto

antes, poderemos ter velocidades de grupo superluminais. Este tipo de sistema, com dois picos de ganho próximos, é chamado de ganho dobrado ou ganho assistido. Ele recebe este nome porque se antes tínhamos uma absorção associada a região de dispersão anômala, agora temos uma região de ganho.

Neste sistema são consideradas duas linhas de ganho muito próximas, mas separadas por uma distância espectral da ordem de suas larguras de linhas. Neste caso, o índice de refração será dado por

$$n(\omega) = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} - \frac{\omega_p^2}{\omega_2^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}}. \quad (1.119)$$

Na figura 1.11 vemos um gráfico esquemático da parte real deste índice de refração e o ganho correspondente, que é dado por $g = -2 \text{Im}(\omega n(\omega))/c$.

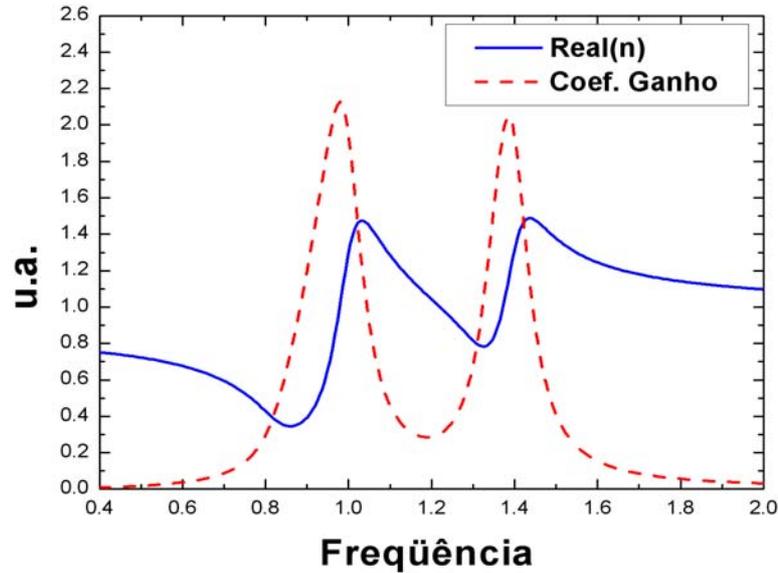


Figura 1.11: Gráfico da parte real do índice de refração e do coeficiente de ganho. Usando que $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1.4$, $\omega_p = 0.5$ e $\gamma = 0.1$.

Vemos na figura 1.11, que temos uma região de dispersão anômala entre os dois picos da curva de ganho. Portanto, podemos usar este tipo de configuração para obter velocidades

de grupo superluminais.

Usando este tipo de sistema proposto por A. M. Steinberg e R. Y. Chiao [10], e demonstrado por L. J. Wang e colaboradores [11], foi obtido um avanço na velocidade de grupo de $62ns$ ($\pm 1ns$), em relação à um pulso propagado no vácuo. Para isto, eles usaram um gás de átomos de césio. Dentro do meio gasoso, os átomos estão em três níveis de energia: Um estado excitado $|0\rangle$ e dois estados fundamentais $|1\rangle$ e $|2\rangle$. Dois feixes ópticos E_1 e E_2 são aplicados no meio gasoso. As frequências de E_1 e E_2 , ω_1 e ω_2 , são diferentes por uma pequena quantidade 2Δ , e ambos os campos estão próximos da frequência de transição ω_{01} (de $|0\rangle$ para $|1\rangle$) por uma pequena quantidade Δ_0 . Um outro feixe E_p é introduzido causando um transição de $|1\rangle$ para $|2\rangle$. Um esquema disto pode ser visto na figura 1.12. Nesta configuração descrita, existirão duas frequências nas quais o ganho será máximo, e o índice de refração obtido é análogo ao mostrado na equação (1.119).

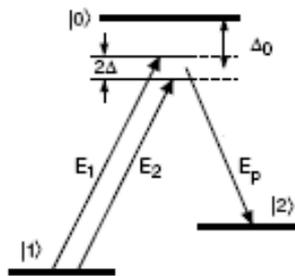


Figura 1.12: Esquema de níveis atômicos usados para obter uma região com ganho dobrado.

1.8.3 Superluminalidade em cristais fotônicos

Até aqui temos considerado sistemas nos quais tínhamos um ganho ou uma absorção associada à região de dispersão anômala. Nós trataremos agora um caso de superluminalidade para um sistema que não apresenta absorção ou ganho associado a região de

dispersão anômala. Aqui, o efeito de superluminalidade será devido a troca de energia, ou interferência, entre os dois modos do campo eletromagnético, neste caso, duas diferentes polarizações da luz.

Durante algum tempo, acreditou-se que as relações de Kramers-Kronig requiriam que em sistemas com dispersão tivéssemos absorção ou reflexão para que fosse possível obter superluminalidade. Entretanto, foi desmonstrado que isto não é verdade [12], o que ocorre é que em sistemas com absorção, por exemplo, temos uma região espectral com dispersão, mas, o inverso não é verdadeiro. A condição suficiente para se obter o efeito de superluminalidade, neste caso, é que tenhamos a transferência de energia entre os dois modos. E aqui, mais uma vez, o efeito não irá violar a causalidade, pois teremos as relações de Kramers-Kronig, que como sabemos obedecem a causalidade.

O experimento que mostra este feito, consiste em usar um cristal fotônico bidimensional (2D) com alta-birrefringência e um polarizador linear, colocado em série. O cristal fotônico tem *band gaps* em 10 e 20 GHz, e possui uma alta birrefringência e uma alta transmissão na região de frequência entre estes dois gaps.

Um cristal fotônico é colocado longe da fonte que gera o campo eletromagnético, para assegurar que as frentes de ondas sejam praticamente ondas planas, ver figura 1.13. Um detector é colocado na direção oposta à fonte de origem, no caso, depois do cristal fotônico. O cristal fotônico e o detector são protegidos por uma “caixa”, que possui uma abertura, com tamanho escolhido de tal forma que diminua os efeitos de difração.

Para controlar a polarização da luz incidente e do campo detectado relativo ao eixo rápido do cristal, o detector foi montado de tal forma que fosse possível rotacioná-lo. O ângulo da polarização incidente foi escolhido para fazer um ângulo fixo de 45° com o eixo rápido do cristal, já o ângulo β , que o detector faz com o eixo rápido do cristal, pode ser variado.

A polarização *TM* é feita paralela ao eixo rápido do cristal, e a polarização *TE* é

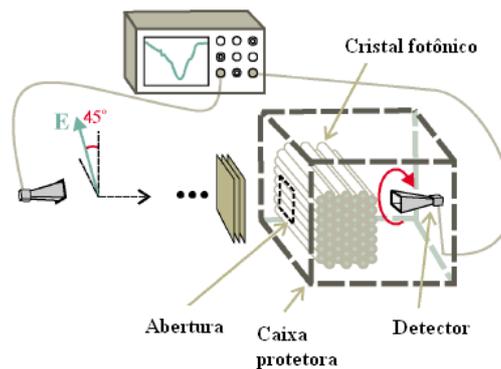


Figura 1.13: Esquema do uso de um cristal fotônico para obter uma região com dispersão anômala.

colocada perpendicular a este eixo.

Medidas das amplitudes e das fases com relação ao detector em 40° e 50° são mostrados nas figuras 1.14 e 1.15, respectivamente. Devido ao fato de que a região espectral está longe da região de band-gap, o comportamento visto na transmissão não pode estar associado aos efeitos do band gap. Ele acontece porque o cristal fotônico rotaciona a polarização da luz, através da adição de uma fase diferente para cada polarização [13].

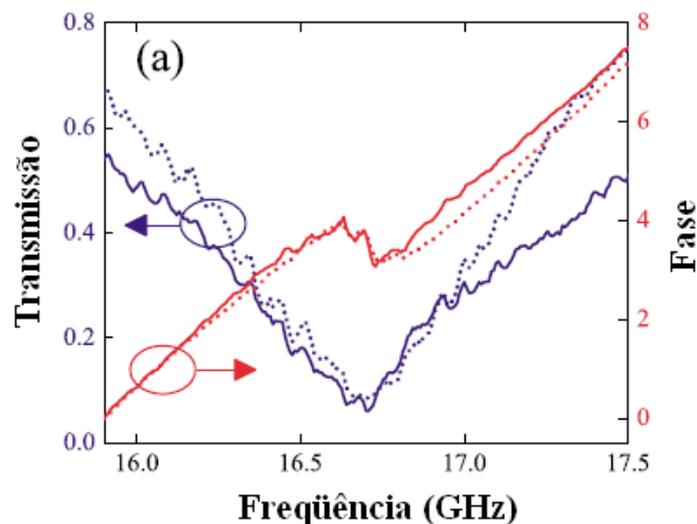


Figura 1.14: Gráfico da transmissão e da fase para $\beta = 40^\circ$. As linhas cheias correspondem aos resultados experimentais e as linhas pontilhadas aos calculados [12].

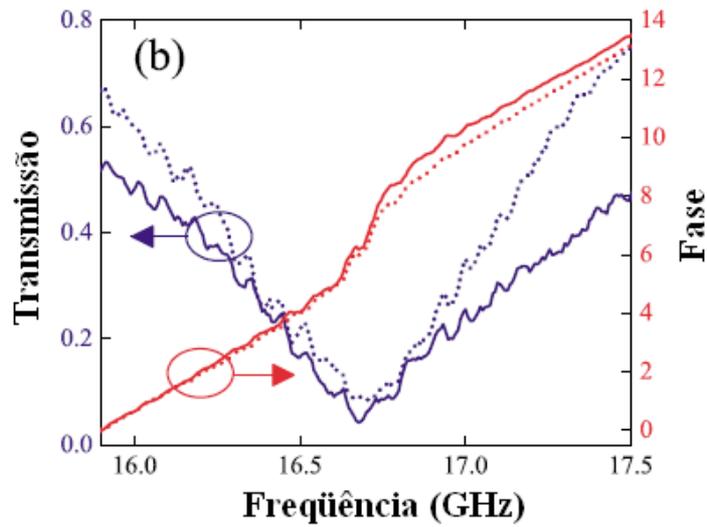


Figura 1.15: Gráfico da transmissão e da fase para $\beta = 50^\circ$. As linhas cheias correspondem aos resultados experimentais e as linhas pontilhadas aos calculados [12].

Para $\beta \leq 45^\circ$ vemos claramente, nas figuras 1.14 e 1.15, uma região de dispersão anômala na vizinhança de 16.5 – 17GHz, e quando $\beta \geq 45^\circ$ a dispersão é normal. Deste modo, quando $\beta \leq 45^\circ$ a região com dispersão anômala pode ser usada para obter superluminalidade.

Mas, vale ressaltar que o fato relevante do trabalho que citamos [12] é que a transmissão é idêntica tanto para $\beta = 40^\circ$ como para $\beta = 50^\circ$, contudo, o comportamento da região de dispersão é totalmente diferente.

1.9 Conclusão

Neste capítulo, estudamos as condições necessárias para obtermos velocidades de grupo maiores que a velocidade da luz no vácuo. Vimos que, podemos ter velocidades superluminais quando o pulso se propaga em regiões com dispersão anômala, e embora o pico se propague com velocidade de grupo superluminal, isto não viola a causalidade.

Estudamos também vários tipos de meios que apresentam dispersão anômala, e vimos

que, embora possamos ter uma região de dispersão anômala associada a uma região de absorção, o inverso não é verdade.

Capítulo 2

Métodos de Fourier, Laplace e Green e a Analiticidade de Funções

2.1 Introdução

Neste capítulo trataremos de alguns métodos que podem ser usados no estudo da propagação de um pulso. Em especial, trataremos do método de Fourier, Laplace e de Green. O método de Fourier e de Laplace possuem uma aplicação similar, que é simplificar a resolução de equações diferenciais usando um espaço transformado, e depois calculando-se a transformada inversa da resposta obtida no espaço transformado, obtemos a resposta do problema desejado. O que irá determinar a utilização de um destes métodos, Fourier ou Laplace, serão as condições de contorno ou iniciais do problema. Por exemplo, se estivermos resolvendo a equação de onda e tivermos como condição de contorno que a função e suas derivadas se anulam em $-\infty$ e $+\infty$, o método de Fourier será útil. Por outro lado, se tivermos que no tempo inicial a função e sua derivada é igual a zero, poderemos utilizar o método de Laplace. Estes dois casos serão tratados neste capítulo quando usarmos ambos os métodos para resolver a equação de onda. Um outro método bastante útil que será tratado é o método de Green, ou método da convolução.

Por fim, trataremos sobre a analiticidade de funções, em especial será importante para nós a noção do que é um ponto não analítico, pois ele será associado a informação no

capítulo seguinte. Abordaremos também aqui sobre a utilização da expansão de Taylor para funções analíticas.

2.2 Introdução as equações diferenciais

Em muitos dos problemas físicos que estudamos, em particular no caso da propagação de pulsos, nos deparamos com equações diferenciais. Em geral, uma equação diferencial ordinária (EDO) linear, de segunda ordem e homogênea tem a seguinte forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0. \quad (2.1)$$

Ela é homogênea porque cada termo contém $y(x)$ ou sua derivada; é linear porque cada y , dy/dx , d^2y/dx^2 aparece elevado a primeira potência, ou seja, não existem produtos destas quantidades. A solução mais geral para este tipo de equação é escrita como

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x). \quad (2.2)$$

Entretanto, muitos problemas físicos resultam em equações diferenciais não homogêneas da forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = F(x). \quad (2.3)$$

A função no lado direito da equação, $F(x)$, representa uma “excitação”, podendo corresponder, por exemplo, a cargas eletrostáticas ou a uma força restauradora. Soluções para este tipo de equação, bem como para equações diferenciais parciais (EDP), podem ser obtidas usando o método de Fourier, de Laplace ou as funções de Green, como comentamos inicialmente; este será o primeiro objetivo deste capítulo.

2.3 Transformadas integrais

Nesta seção daremos uma breve introdução sobre integrais transformadas. Em física é muito freqüente encontrarmos funções que são do seguinte tipo

$$g(\alpha) = \int_a^b f(t)K(\alpha, t)dt. \quad (2.4)$$

A função $g(\alpha)$ é chamada de transformada (integral) de $f(t)$ pelo “núcleo” $K(\alpha, t)$. A operação também pode ser descrita como o mapeamento da função $f(t)$ no espaço- t em uma outra função, $g(\alpha)$, no espaço- α .

Dentre as diversas possibilidades de integrais transformadas abordaremos neste capítulo duas em particular. Quando $K(\alpha, t) = e^{-\alpha t}$ estaremos tratando da transformada de Laplace, e quando $K(\alpha, t) = e^{i\omega t}$ estaremos estudando a transformada de Fourier.

Todas essas integrais transformadas são **lineares**, isto é,

$$\int_a^b [c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] K(\alpha, t)dt = c_1 \int_a^b f_1(t)K(\alpha, t)dt + c_2 \int_a^b f_2(t)K(\alpha, t)dt. \quad (2.5)$$

A transformada integral também pode ser representada por um por um operador \mathcal{L} , assim

$$g(\alpha) = \mathcal{L}\{f(t)\}. \quad (2.6)$$

E a transformada inversa será representada por

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{g(\alpha)\}. \quad (2.7)$$

As integrais transformadas possuem muitas aplicações, uma delas é usá-las para simplificar a resolução de equações diferenciais, a qual abordaremos neste capítulo. Um esquema desta técnica pode ser visto na figura 2.1. Quando estamos diante de certos problemas cujas soluções são difíceis de serem calculadas, podemos usar as transformadas integrais para solucionar o problema num outro espaço, tornando o problema relativamente mais

simples. A solução final do problema no espaço original será obtida calculando a transformada inversa. Este tipo de aplicação será tratado nas seções seguintes.

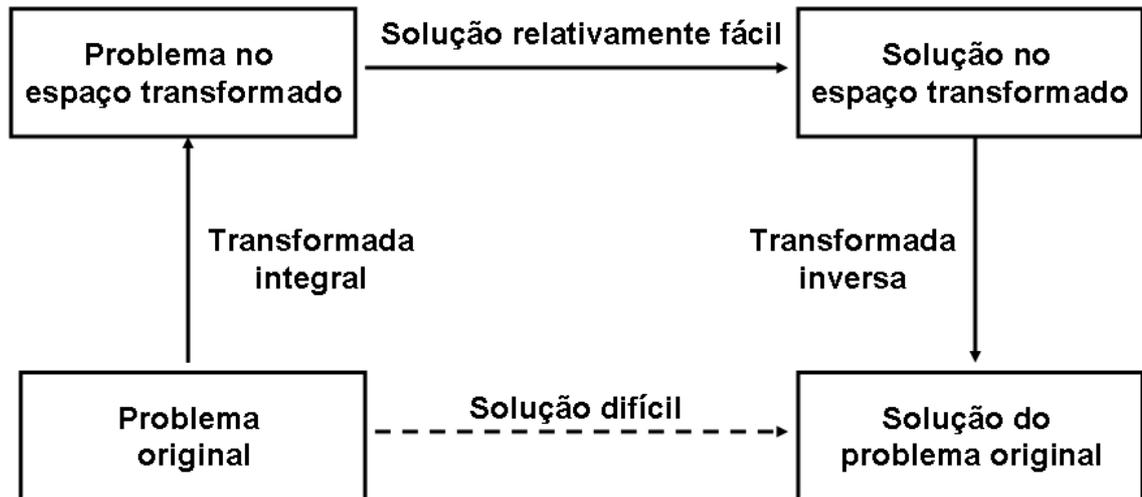


Figura 2.1: Esquema da utilização das transformadas integrais.

2.4 Método de Fourier

Como dissemos antes, tomando $K(\alpha, t) = e^{i\omega t}$ na equação (2.4), teremos uma transformada de Fourier, ou seja, a transformada de Fourier $g(\omega)$ de uma função $f(t)$ é definida por

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt. \quad (2.8)$$

e a transformada inversa é dada por

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega t} d\omega. \quad (2.9)$$

2.4.1 Transformada de Fourier de derivadas

Na seção anterior comentamos que a transformada de Fourier pode ser usada para auxiliar na resolução de equações diferenciais, nesta seção exploraremos esta aplicação.

Inicialmente consideremos que a transformada de Fourier de $f(x)$ é

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx, \quad (2.10)$$

e para $df(x)/dx$

$$g_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(x)}{dx} e^{i\omega x} dx. \quad (2.11)$$

Integrando a equação (2.11) por partes, obtemos que

$$g_1(\omega) = \left[\frac{e^{i\omega x}}{\sqrt{2\pi}} f(x) \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx. \quad (2.12)$$

Se $f(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$, teremos

$$g_1(\omega) = -i\omega g(\omega), \quad (2.13)$$

ou seja, a transformada da derivada é $(-i\omega)$ vezes a transformada da função original. Isto pode ser generalizado para a n -ésima derivada da seguinte forma,

$$g_n(\omega) = (-i\omega)^n g(\omega). \quad (2.14)$$

Esta é uma grande aplicação para a transformada de Fourier, sendo possível utilizá-la para resolver equações diferenciais parciais, onde a operação de diferenciação será substituída por uma multiplicação no espaço- ω .

2.4.2 Aplicação: Resolução da equação de onda

Como aplicação do método descrito, consideremos a equação de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (2.15)$$

Nós usaremos como condição inicial que

$$y(x, 0) = f(x), \quad (2.16)$$

com $f(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$.

Aplicaremos agora a transformada de Fourier com relação a x , para isto multipliquemos a equação (2.15) por $e^{i\alpha x}$ e integremos com relação a x , obtendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} e^{i\alpha x} dx = \frac{1}{v^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} e^{i\alpha x} dx. \quad (2.17)$$

Assim,

$$(-i\alpha)^2 Y(\alpha, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 Y(\alpha, t)}{\partial t^2}. \quad (2.18)$$

No qual nós usamos que

$$Y(\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y(x, t) e^{i\alpha x} dx, \quad (2.19)$$

e também usamos a equação (2.14) para a segunda derivada com relação a x . Vemos que não há derivadas com relação a x ou a α na equação (2.18). Portanto, transformamos uma EDP numa EDO. Usando agora a equação (2.16) na equação (2.19) teremos como condição inicial que

$$Y(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx = F(\alpha). \quad (2.20)$$

Assim, a solução para a equação (2.18) é

$$Y(\alpha, t) = F(\alpha) e^{\pm i v \alpha t}. \quad (2.21)$$

Usando agora a expressão para a transformada inversa, obteremos que

$$y(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\alpha, t) e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (2.22)$$

Por fim, substituindo a equação (2.21) em (2.22), teremos

$$y(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha(x \mp vt)} d\alpha. \quad (2.23)$$

Como $f(x)$ é a transformada inversa de Fourier de $F(\alpha)$, podemos escrever que

$$y(x, t) = f(x \mp vt). \quad (2.24)$$

correspondendo a ondas propagando-se nas direções $+x$ e $-x$, respectivamente.

Em resumo podemos dizer que a transformada de Fourier pode ser usada para converter uma EDP numa EDO. Veremos depois que a transformada de Laplace possui uma aplicação semelhante, além disso, ela pode converter uma EDO numa equação algébrica. Ambas as transformadas são de grande importância no estudo da propagação de pulsos.

2.4.3 Teorema da convolução para a transformada de Fourier

Comentaremos agora sobre o teorema da convolução, que também pode ser usado no estudo da propagação de pulsos. A convolução tem diversas utilidades, além da que já citamos, ela pode ser usada para investigar funções de transferência, conforme veremos na seção seguinte.

Consideremos inicialmente duas funções $f(x)$ e $g(x)$ com transformadas de Fourier dadas por $F(t)$ e $G(t)$, respectivamente. Nós definimos a operação

$$f * g \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(x-y)dy, \quad (2.25)$$

como a **convolução** de duas funções f e g no intervalo $(-\infty, \infty)$. Podemos usar a transformada de Fourier na equação (2.25), obtendo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(x-y)dy &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-it(x-y)} dt dy \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(x-y)dy &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{ity} dy \right] e^{-itx} dt \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(x-y)dy &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t)G(t)e^{-itx} dt. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Este resultado pode ser interpretado como segue: a transformada inversa de Fourier de um **produto** de transformadas de Fourier é a convolução das funções originais, $f * g$.

2.4.4 Função de transferência

Utilizando as transformadas de Fourier analisaremos as funções de transferência. Sabemos que um pulso elétrico dependente do tempo pode ser construído considerando uma superposição de ondas planas de diferentes frequências. Para uma frequência angular ω teremos uma contribuição da forma

$$F(\omega)e^{i\omega t}.$$

Assim, um pulso pode ser escrito como

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.27)$$

Devido ao fato de que a equação (2.27) tem a forma de uma transformada de Fourier, podemos expressar $F(\omega)$ usando a transformada inversa,

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (2.28)$$

A equação (2.28) representa a *decomposição de um pulso* $f(t)$ em suas componentes de frequência angular.

Consideremos um sistema para o qual temos uma entrada $f(t)$ e uma saída $g(t)$. Para uma entrada de uma única frequência ω , teremos que $f_{\omega}(t) = e^{i\omega t}$. Sabemos que o sistema atuando sobre $f(t)$ poderá alterar tanto sua amplitude como sua fase, e que mudança será provavelmente dependente da frequência. Assim,

$$g_{\omega}(t) = \varphi(\omega)f_{\omega}(t). \quad (2.29)$$

Esta função de modificação da fase e da amplitude $\varphi(\omega)$ é chamada de **função de transferência**. Ela pode ser escrita em forma complexa:

$$\varphi(\omega) = u(\omega) + iv(\omega), \quad (2.30)$$

com $u(\omega)$ e $v(\omega)$ sendo funções reais.

Na equação (2.29) assumimos que a função de transferência $\varphi(\omega)$ é independente da amplitude da entrada e da presença ou ausência de alguma outra componente de frequência, ou seja, estamos assumindo um mapeamento linear de $f(t)$ em $g(t)$. Para obter $g(t)$ devemos integrar sobre todas as entradas, assim,

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.31)$$

A função de transferência é característica do tipo de sistema considerado. Quando uma função de transferência é conhecida (medida ou calculada), a saída $g(t)$ pode ser calculada para alguma entrada $f(t)$.

Vamos considerar agora $\varphi(\omega)$ como a transformada inversa de Fourier de alguma função $\Phi(t)$:

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.32)$$

Assim, a equação (2.31) é a transformada de Fourier de duas transformadas inversas.

Usando o resultado da seção anterior, podemos escrever que

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \Phi(t - \tau) d\tau. \quad (2.33)$$

Interpretando a equação (2.33), vemos que temos uma entrada - uma “causa”, $f(\tau)$, modificada por $\Phi(t - \tau)$, que chamaremos de **função resposta** do meio, produzindo uma saída, um “efeito”, $g(t)$. Impondo agora a causalidade, que a causa precede o efeito, devemos requerer que $\tau < t$. Desta forma impomos que

$$\Phi(t - \tau) = 0, \quad \text{para } \tau > t. \quad (2.34)$$

Assim, a equação (2.33) será escrita como

$$g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) \Phi(t - \tau) d\tau. \quad (2.35)$$

A consideração na equação (2.34) tem conseqüências profundas na teoria de dispersão, conforme vimos no capítulo 1, no estudo das relações de Kramers-Kronig.

2.4.5 Propriedade da função resposta

Para explorarmos as propriedades de $\Phi(t)$ consideremos $f(\tau)$ como um pulso tipo função delta,

$$f(\tau) = \delta(\tau),$$

no qual, $\delta(\tau)$ é a “função” delta de Dirac. Assim, a equação (2.35) será escrita como

$$g(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau)\Phi(t - \tau)d\tau, \quad (2.36)$$

$$g(t) = \Phi(t), \text{ para } t > 0,$$

$$g(t) = 0, \text{ para } t < 0.$$

A equação (2.36) serve para estabelecer que $\Phi(t)$ é real, pois sabemos que a saída $g(t)$ é real. Usando agora esta propriedade de $\Phi(t)$, podemos mostrar que existe uma relação de correspondência entre a parte real de $\varphi(\omega)$, $u(\omega)$, e sua parte imaginária, $v(\omega)$.

Sabemos que as funções $\Phi(t)$ e $\varphi(\omega)$ são transformadas de Fourier uma da outra,

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \Phi(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (2.37)$$

mas agora, o limite inferior é tomado igual a zero por causa da imposição da causalidade, conforme imposto na equação (2.34). Como $\Phi(t)$ é real, podemos usar a equação (2.32) para separar a parte real e imaginária de $\varphi(\omega)$, escrevendo

$$u(\omega) = \int_0^{\infty} \Phi(t)\cos\omega t dt,$$

$$v(\omega) = - \int_0^{\infty} \Phi(t)\sen\omega t dt, \quad \omega > 0. \quad (2.38)$$

Assim, vemos que a parte real de $\varphi(\omega)$, $u(\omega)$, é par, e a parte imaginária de $\varphi(\omega)$, $v(\omega)$, é ímpar:

$$u(-\omega) = u(\omega), \quad \text{e} \quad v(-\omega) = -v(\omega).$$

Interpretando agora a equação (2.38) como transformadas seno e cosseno de Fourier, teremos que

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} u(\omega) \cos \omega t d\omega \\ \Phi(t) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} v(\omega) \sin \omega t d\omega, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Combinando a equação (2.38) e (2.39), obtemos

$$v(\omega) = - \int_0^{\infty} \sin \omega t \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} u(\omega') \cos \omega' t d\omega' \right\} dt, \quad (2.40)$$

mostrando que se nossa função de transferência tem uma parte real, ela necessariamente também terá uma parte imaginária associada; o inverso também é verdade.

A imposição da causalidade leva a uma dependência mútua da parte real e imaginária da função de transferência. Este resultado é uma generalização do resultado obtido no capítulo 1 para a teoria de dispersão.

2.5 Método de Laplace

Nesta seção tomaremos $K(\alpha, t) = e^{-\alpha t}$ na equação (2.4), obtendo assim a transformada de Laplace, ou seja, a transformada de Laplace de $f(s)$ de uma função $F(t)$ é definida por

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-sx} F(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-sx} F(t) dt. \quad (2.41)$$

Considerando duas funções $F(t)$ e $G(t)$ para as quais existem as transformadas de Laplace, teremos que

$$\mathcal{L}\{aF(t) + bG(t)\} = a\mathcal{L}\{F(t)\} + b\mathcal{L}\{G(t)\}, \quad (2.42)$$

a operação denotada por \mathcal{L} é **linear**, como já tínhamos comentado antes.

2.5.1 Transformada de Laplace de derivadas

Do mesmo modo como usamos a transformada de Fourier para auxiliar na resolução de equações diferenciais, também podemos usar a transformada de Laplace.

Calculemos inicialmente a transformada da primeira derivada de $F(t)$:

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{dF(t)}{dt} dt.$$

Integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{F'(t)\} &= [e^{-st} F(t)]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \\ \mathcal{L}\{F'(t)\} &= s\mathcal{L}\{F(t)\} - F(0). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Portanto, de forma geral podemos escrever que,

$$\mathcal{L}\{F^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{F(t)\} - s^{n-1} F(+0) - \dots - F^{(n-1)}(+0). \quad (2.44)$$

Colocamos explicitamente $F(+0)$ ao invés de somente $F(0)$ para ressaltar que a aproximação ao zero é feita pela direita.

2.5.2 Algumas propriedades

Substituição

Se nós substituirmos o parâmetro s por $s - a$ na definição da transformada de Laplace na equação (2.41), obteremos que

$$\begin{aligned} f(s - a) &= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} F(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} F(t) dt. \\ f(s - a) &= \mathcal{L}\{e^{at} F(t)\}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Assim, a substituição de s por $s - a$ equivale a multiplicar $F(t)$ por e^{at} . Isto pode ser útil para se estender alguns resultados conhecidos da transformada de Laplace. Por exemplo, é conhecido que

$$\mathcal{L}\{\text{sen}kt\} = \frac{k}{s^2 + k^2}, \quad (2.46)$$

logo,

$$\mathcal{L}\{e^{at}\text{sen}kt\} = \frac{k}{(s-a)^2 + k^2}. \quad (2.47)$$

Translação

Multipliquemos $f(s)$ por e^{-bs} , com $b > 0$:

$$\begin{aligned} e^{-bs} f(s) &= e^{-bs} \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \\ e^{-bs} f(s) &= \int_0^{\infty} e^{-s(t+b)} F(t) dt. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Agora, tomando $t + b = \tau$, a equação (2.48) se torna

$$e^{-bs} f(s) = \int_b^{\infty} e^{-s\tau} F(\tau - b) d\tau \quad (2.49)$$

$$e^{-bs} f(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} F(\tau - b) u(\tau - b) d\tau, \quad (2.50)$$

no qual,

$$u(\tau - b) = 1, \quad \text{para } \tau > b$$

$$u(\tau - b) = 0, \quad \text{para } \tau < b. \quad (2.51)$$

A relação da equação (2.50) é conhecida como **teorema de deslocamento de Heaviside**.

Devido ao fato de que é assumido que $F(t)$ é zero para $t < 0$, teremos que $F(\tau - b) = 0$ para $0 \leq \tau < b$. Portanto, podemos estender o limite inferior para zero na equação (2.49) sem mudar o valor da integral. Notando que τ é apenas uma variável de integração, podemos escrever que

$$e^{-bs} f(s) = \mathcal{L}\{F(t - b)\}. \quad (2.52)$$

2.6 Aplicação: Resolução da equação de onda

Vamos novamente utilizar a equação de onda para mostrar como a transformada de Laplace pode ser usada para auxiliar na resolução de uma EDP. Consideremos a seguinte equação de onda

$$\frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (2.53)$$

Transformando esta equação com relação a t , pela transformada de Laplace, obteremos

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}\{E(x, t)\} - \frac{s^2}{v^2} \mathcal{L}\{E(x, t)\} + \frac{s}{v^2} E(x, 0) + \frac{1}{v^2} \left[\frac{\partial E(x, t)}{\partial t} \right]_{t=0} = 0. \quad (2.54)$$

Se tivermos como condições iniciais que $E(x, 0) = 0$ e $[\partial E(x, t)/\partial t]_{t=0} = 0$, teremos que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}\{E(x, t)\} = \frac{s^2}{v^2} \mathcal{L}\{E(x, t)\}. \quad (2.55)$$

Assim, mais uma vez convertemos uma EDP numa EDO. A solução (para esta EDO) é

$$\mathcal{L}\{E(x, t)\} = c_1 e^{-(s/v)x} + c_2 e^{+(s/v)x}. \quad (2.56)$$

As “constantes” c_1 e c_2 são obtidas através das demais condições de contorno do problema. Elas são constantes com relação a x mas podem depender de s . Se a onda permanece finita quando $x \rightarrow \infty$, $\mathcal{L}\{E(x, t)\}$ também deve permanecer finita, disto, $c_2 = 0$. Se $E(0, t)$ é escrito como $F(t)$, teremos que $c_1 = f(s)$ e

$$\mathcal{L}\{E(x, t)\} = f(s) e^{-(s/v)x}. \quad (2.57)$$

Pela propriedade de translação, vista anteriormente, nós obteremos que

$$\begin{aligned} E(x, t) &= F\left(t - \frac{x}{v}\right), & \text{para } t \geq \frac{x}{v}, \\ E(x, t) &= 0, & \text{para } t < \frac{x}{v}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Estas soluções representam uma onda (ou pulso) propagando-se na direção positiva x com velocidade v . Notemos que para $x > vt$ a região permanece sem perturbação, ou seja, o pulso ainda não chegou na região.

2.6.1 O teorema da convolução usando a transformada de Laplace.

Vamos agora demonstrar o teorema da convolução analogamente ao que fizemos quando tratamos da transformada de Fourier.

Tomemos duas transformadas,

$$f_1(s) = \mathcal{L}\{F_1(t)\} \quad \text{e} \quad f_2(s) = \mathcal{L}\{F_2(t)\}. \quad (2.59)$$

Multipliquemos agora as duas expressões, mudando a variável de integração para evitar possíveis confusões,

$$f_1(s)f_2(s) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-sx} F_1(x) dx \int_0^{a-x} e^{-sy} F_2(y) dy. \quad (2.60)$$

Fazendo agora uma mudança de variável da forma $x = t - z$ e $y = z$, e usando o Jacobiano para transformar o elemento de área, obteremos

$$dx dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} dt dz = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} dt dz$$

$$dx dy = dt dz. \quad (2.61)$$

Substituindo estas relações na integral da equação (2.60), teremos que

$$f_1(s)f_2(s) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-st} \int_0^t F_1(t-z) F_2(z) dz dt.$$

Portanto,

$$f_1(s)f_2(s) = \mathcal{L} \left\{ \int_0^t F_1(t-z) F_2(z) dz \right\}. \quad (2.62)$$

A integral entre colchetes pode ser representada como

$$\int_0^t F_1(t-z) F_2(z) dz = F_1 * F_2, \quad (2.63)$$

que corresponde a *convolução* de F_1 com F_2 , analogamente ao que fizemos na seção anterior. Se substituirmos $w = t - z$ na última equação encontraremos que

$$F_1 * F_2 = F_2 * F_1, \quad (2.64)$$

demonstrando que a relação é simétrica.

Por fim, tomando a transformada inversa, nós podemos escrever que

$$\mathcal{L}^{-1}\{f_1(s)f_2(s)\} = \int_0^t F_1(t-z)F_2(z)dz. \quad (2.65)$$

2.7 Método de Green

Nesta seção usaremos as funções de Green para encontrar a solução de uma equação diferencial. Mas, como uma breve introdução às funções de Green é útil revisarmos o caso eletrostático. Sabemos que na presença de cargas o potencial eletrostático satisfaz a equação não-homogênea de Poisson

$$\nabla^2\psi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.66)$$

no qual ρ corresponde a densidade de cargas e ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo. Temos também que o potencial deverá satisfazer a equação de Laplace na ausência de cargas, ou seja,

$$\nabla^2\psi = 0. \quad (2.67)$$

Se tivermos cargas pontuais q_i , sabemos que a solução será dada por

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \quad (2.68)$$

Se, em vez de cargas pontuais, tivermos uma distribuição contínua de cargas, obteremos

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad (2.69)$$

Nossa solução da equação de Poisson, equação (2.69), pode ser interpretada como a convolução de uma distribuição de carga, $\rho(\mathbf{r}')$, e uma função peso, $1/(4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$.

Aqui, ψ é o potencial correspondente a uma certa distribuição de carga e que satisfaz a equação de Poisson (2.66). Consideremos agora uma função G , que será chamada de

função de Green, que satisfaça a equação de Poisson para uma carga pontual da forma,

$$\nabla^2 G = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.70)$$

Fisicamente G corresponde a um potencial em \mathbf{r} devido a uma carga pontual em \mathbf{r}' .

Usando o teorema de Green [14] para G e ψ , teremos que

$$\int (\psi \nabla^2 G - G \nabla^2 \psi) d^3 r' = \int (\psi \nabla G - G \nabla \psi) \cdot d\boldsymbol{\sigma}. \quad (2.71)$$

no qual, $d\boldsymbol{\sigma}$ corresponde ao elemento de área da superfície que limita o volume de integração. Devido ao fato de que o integrando é proporcional a $1/r^2$, se tomarmos o volume de integração suficientemente grande obteremos que

$$\begin{aligned} \int (\psi \nabla^2 G - G \nabla^2 \psi) d^3 r' &= 0 \\ \int (\psi \nabla^2 G) d^3 r' &= \int (G \nabla^2 \psi) d^3 r'. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Usando agora as equações (2.66) e (2.70), obteremos

$$-\int \psi(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 r' = -\int \frac{G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}')}{\epsilon_0} d^3 r'. \quad (2.73)$$

E integrando o lado direito encontraremos que

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3 r'. \quad (2.74)$$

Assim, uma vez conhecida a função de Green G , para uma dada situação física, e a distribuição de cargas ρ , poderemos encontrar o potencial eletrostático ψ .

Encontraremos agora uma expressão explícita para G , para isto, usaremos o fato de que

$$\int \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|} \right) d^3 r = \begin{cases} 0 \\ -4\pi \end{cases}. \quad (2.75)$$

A integral é igual a 0 se a integração não inclui a origem, e é igual a -4π se a origem é incluída na integração. Este resultado pode ser escrito ainda como,

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.76)$$

Comparando agora esta expressão com a equação (2.70), notamos que

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.77)$$

Estes resultados podem ser generalizados para uma certa EDP de segunda ordem linear e não-homogênea dada por

$$\mathcal{L}y(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r}'). \quad (2.78)$$

no qual, \mathcal{L} é um operador diferencial linear. A função de Green deverá ser tomada para ser solução de

$$\mathcal{L}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.79)$$

Portanto, a solução da equação (2.78) será

$$y(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d^3r'. \quad (2.80)$$

Utilizaremos agora a função de Green para resolver a equação de onda. Temos que

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\mathbf{r}, t). \quad (2.81)$$

Onde c é a velocidade de propagação da luz no vácuo.

Para resolver a equação (2.81) suponhamos inicialmente que as transformadas de Fourier de $\Psi(\mathbf{r}, t)$ e $f(\mathbf{r}, t)$ são dadas por

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.82)$$

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.83)$$

com as transformadas inversas dadas por

$$\Psi(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt \quad (2.84)$$

$$f(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt. \quad (2.85)$$

Substituiremos agora as equações (2.82) e (2.83) na equação (2.81), obtendo

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, \omega) - \frac{\omega^2}{c^2} \Psi(\mathbf{r}, \omega)) e^{-i\omega t} d\omega = -4\pi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Disto,

$$(\nabla^2 + k^2) \Psi(\mathbf{r}, \omega) = -4\pi f(\mathbf{r}, \omega). \quad (2.86)$$

no qual, $k = \omega/c$ é o número de onda associado com a frequência ω . Assim, a função de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ apropriada para a equação (2.86) deve satisfazer a seguinte equação não-homogênea

$$(\nabla^2 + k^2) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.87)$$

Se não há superfícies limitadoras, as funções de Green irão depender somente de $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, e terão simetria esférica, ou seja, dependerão somente de $R = |\mathbf{R}|$. Usando o operador de Laplace em coordenadas esféricas, teremos que

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (RG_k) + k^2 G_k = -4\pi \delta(\mathbf{R}). \quad (2.88)$$

Em toda região, exceto em $R = 0$, RG_k irá satisfazer a seguinte equação homogênea

$$\frac{d^2}{dR^2} (RG_k) + k^2 (RG_k) = 0, \quad (2.89)$$

cuja solução é,

$$RG_k = Ae^{ikr} + Be^{-ikr}. \quad (2.90)$$

No limite que $R \rightarrow 0$, a equação se reduz a equação de Poisson, pois $kR \ll 1$. Neste limite temos que

$$\lim_{kR \rightarrow 0} G_k(R) = \frac{1}{R}. \quad (2.91)$$

Assim, a solução geral para a função de Green será

$$G_k(R) = AG_k^{(+)}(R) + BG_k^{(-)}(R), \quad (2.92)$$

com

$$G_k^{(\pm)}(R) = \frac{e^{\pm ikR}}{R} \quad (2.93)$$

O primeiro termo na equação (2.92) corresponde a propagação de uma onda esférica divergindo da origem, enquanto que o segundo termo representa uma onda esférica convergindo. A escolha de A e B depende das condições de contorno no tempo especificadas no problema físico.

Para expressarmos no tempo a diferença que existe entre $G_k^{(+)}$ e $G_k^{(-)}$, necessitamos construir as correspondentes funções de Green dependente do tempo que satisfaça

$$\left(\nabla_r^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t'). \quad (2.94)$$

Calculando a transformada de Fourier do elemento no lado direito da equação acima, obteremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t')) e^{i\omega t} dt = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')e^{i\omega t'}.$$

Comparando com a equação (2.87), vemos que as soluções para a equação (2.94) serão da forma $G_k^{(\pm)} e^{i\omega t'}$. Usando a equação (2.82), as funções de Green dependente do tempo serão dadas por

$$G_k^{(\pm)}(R, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{\pm ikR}}{R} \cdot e^{i\omega t'} \right] e^{-i\omega t} d\omega$$

$$G_k^{(\pm)}(R, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm ikR}}{R} \cdot e^{-i\omega\tau} d\omega, \quad (2.95)$$

com $\tau = t - t'$. Vemos que a função de Green é função somente da distância relativa R e do tempo relativo τ entre a origem e o ponto de observação. Para o caso de um meio

sem dispersão, $k = \omega/c$, a integral na equação (2.95) será

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm ikR} \cdot e^{-i\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\tau \mp R/c)\omega} d\omega = 2\pi\delta\left(\tau \mp \frac{R}{c}\right),$$

assim,

$$G_k^{(\pm)}(R, \tau) = \frac{1}{R} \delta\left(\tau \mp \frac{R}{c}\right), \quad (2.96)$$

ou mais explicitamente,

$$G^{(\pm)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{\delta\left(t - \left[t' \pm \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right]\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (2.97)$$

Por fim, as soluções para a equação não-homogênea (2.81) serão

$$\Psi^{(\pm)}(\mathbf{r}, t) = \iiint G^{(\pm)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') f(\mathbf{r}', t') d^3r' dt'. \quad (2.98)$$

2.8 Condições de Cauchy-Riemann e a analiticidade

Nós agora estudaremos as condições nas quais uma função é considerada analítica.

Sabemos que um número complexo z pode ser escrito como

$$z = x + iy. \quad (2.99)$$

no qual $i = \sqrt{-1}$, e x e y são números reais. Assim, podemos construir uma função $f(z)$ que pode ser escrita da seguinte forma

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \quad (2.100)$$

com $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sendo funções reais.

A definição para a derivada de uma função complexa é análoga ao que é feito para a derivada das funções reais, teremos aqui que

$$\lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \delta z) - f(z)}{(z + \delta z) - z} = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{\delta f(z)}{\delta z} = \frac{df}{dz} = f'(z), \quad (2.101)$$

considerando que o limite é *independente* de alguma aproximação particular ao ponto z . Para funções com variáveis reais dizemos que o limite pela direita ($x \rightarrow x_0$) e o limite pela esquerda ($x \rightarrow -x_0$) da derivada $df(x)/dx$ deve ser o mesmo, para que a derivada exista em $x = x_0$. Analogamente, para z correspondendo a algum ponto no plano complexo, nós consideramos que o valor da derivada $df(z)/dz$ deve ser independente da direção de aproximação ao ponto z .

Consideremos agora incrementos δx e δy das variáveis x e y respectivamente. Assim

$$\delta z = \delta x + i\delta y, \quad (2.102)$$

e,

$$\delta f = \delta u + i\delta v. \quad (2.103)$$

Deste modo,

$$\frac{\delta f}{\delta z} = \frac{\delta u + i\delta v}{\delta x + i\delta y}. \quad (2.104)$$

Vamos tomar o limite indicado na equação (2.101) por duas aproximações diferentes, primeiro, com $\delta y = 0$, e $\delta x \rightarrow 0$, conforme mostrado na figura 2.2. Portanto, usando a equação (2.101) e (2.102), teremos que

$$\lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{\delta f(z)}{\delta z} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\delta u}{\delta x} + i \frac{\delta v}{\delta x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.105)$$

assumindo aqui que as derivadas parciais existem. Para a segunda forma de aproximação ao ponto z_0 , tomaremos que $\delta x = 0$ e $\delta y \rightarrow 0$, obtendo que

$$\lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{\delta f(z)}{\delta z} = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \left(-i \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta y} \right) = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.106)$$

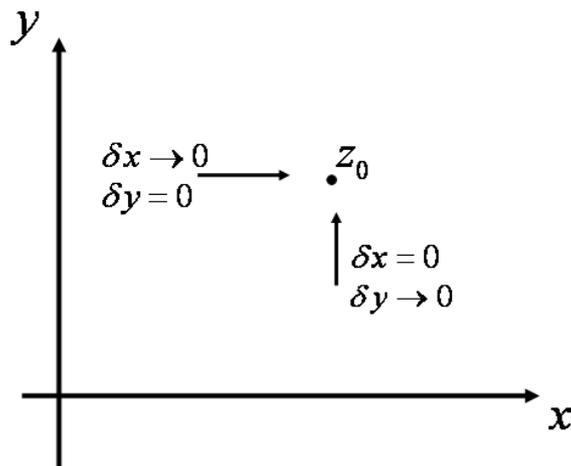


Figura 2.2: Esquema mostrando as duas formas de aproximação escolhidas para demonstração das relações de Cauchy-Riemann.

Se queremos que as derivadas de $df(z)/dz$, nas equações (2.105) e (2.106) sejam iguais, deveremos ter que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.107)$$

Essas são as *condições de Cauchy-Riemann*. Elas foram descobertas por Cauchy e muito usadas por Riemann em sua teoria de funções analíticas. Essas condições de Cauchy-Riemann são necessárias para a existência da derivada de $f(z)$, ou seja, se $df(z)/dz$ existe, as condições de Cauchy-Riemann devem ser satisfeitas.

Reciprocamente, se as condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas e as derivadas parciais de $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são contínuas, a derivada de df/dz existe, conforme demonstraremos. Vamos inicialmente escrever que

$$\delta f = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \delta y. \quad (2.108)$$

A validade desta expressão depende da continuidade das derivadas parciais de u e v . Dividindo a última equação por δz , obteremos

$$\frac{\delta f}{\delta z} = \frac{(\partial u/\partial x + i(\partial v/\partial x))\delta x + (\partial u/\partial y + i(\partial v/\partial y))\delta y}{\delta x + i\delta y}$$

$$\frac{\delta f}{\delta z} = \frac{(\partial u/\partial x + i(\partial v/\partial x)) + (\partial u/\partial y + i(\partial v/\partial y))\delta y/\delta x}{1 + i(\delta x/\delta y)}. \quad (2.109)$$

Se $\delta f/\delta z$ deve ter um único valor independente da direção de aproximação ao ponto z , a dependência em relação a $\delta y/\delta x$ deve ser eliminada. Para isto, apliquemos as condições de Cauchy-Riemann para as derivadas com relação a y , obtendo

$$\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.110)$$

Substituindo a equação (2.110) na equação (2.109), nós eliminaremos a dependência de $\delta y/\delta x$,

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta z} &= \frac{(\partial u/\partial x + i(\partial v/\partial x)) + (-\partial v/\partial x + i(\partial u/\partial x))\delta y/\delta x}{1 + i(\delta x/\delta y)} \\ \frac{\delta f}{\delta z} &= \frac{\partial u/\partial x(1 + i\delta y/\delta x) + \partial v/\partial x(i + -\delta y/\delta x)}{1 + i(\delta x/\delta y)} \\ \frac{\delta f}{\delta z} &= \frac{(\partial u/\partial x + i\partial v/\partial x)(1 + i\delta y/\delta x)}{1 + i(\delta x/\delta y)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\delta f}{\delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.111)$$

que mostra que o $\lim \delta f/\delta z$ é independente da direção de aproximação no plano complexo, necessitando apenas que as derivadas parciais sejam contínuas. Assim, df/dz existe e f é dita ser analítica em z .

Em resumo, se $f(z)$ é diferenciável em $z = z_0$ e em uma região em torno de z_0 , nós dizemos que $f(z)$ é **analítica** em $z = z_0$. Se $f'(z)$ não existe em $z = z_0$, então z_0 é dito ser um ponto singular.

2.9 Derivadas

A integral de Cauchy pode ser usada para obter uma expressão para a derivada de $f(z)$. Para uma função analítica $f(z)$ temos que a integral de Cauchy é dada por

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0). \quad (2.112)$$

A integração é feita num contorno fechado C , e z_0 corresponde a algum ponto no interior da região delimitada por C . Usando a equação (2.112) podemos escrever que

$$\frac{f(z_0 + \delta z_0) - f(z_0)}{\delta z_0} = \frac{1}{2\pi i \delta z_0} \left(\oint \frac{f(z)}{z - z_0 - \delta z_0} dz - \oint \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right).$$

Usando agora a definição da equação (2.101), obteremos que

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\delta z_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i \delta z_0} \oint \frac{\delta z_0 f(z)}{(z - z_0 - \delta z_0)(z - z_0)} dz. \\ f'(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Esta técnica pode ser repetida. Assim, para a segunda derivada teremos que

$$\begin{aligned} \frac{f'(z_0 + \delta z_0) - f'(z_0)}{\delta z_0} &= \frac{1}{2\pi i \delta z_0} \left(\oint \frac{f(z)}{(z - z_0 - \delta z_0)^2} dz - \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \right) \\ \frac{f'(z_0 + \delta z_0) - f'(z_0)}{\delta z_0} &= \frac{1}{2\pi i \delta z_0} \left(\oint \frac{(z - z_0)^2 f(z) - (z - z_0 - \delta z_0)^2 f(z)}{(z - z_0 - \delta z_0)^2 (z - z_0)^2} dz \right) \end{aligned}$$

mas,

$$(z - z_0)^2 - (z - z_0 - \delta z_0)^2 = 2(z - z_0) - \delta z_0^2,$$

disto,

$$\frac{f'(z_0 + \delta z_0) - f'(z_0)}{\delta z_0} = \frac{1}{2\pi i \delta z_0} \left(\oint \frac{[2(z - z_0) - \delta z_0^2] f(z)}{(z - z_0 - \delta z_0)^2 (z - z_0)^2} dz \right).$$

Assim, tomando o limite que $\delta z_0 \rightarrow 0$, obteremos que

$$\begin{aligned} f''(z_0) \equiv f^{(2)}(z_0) &= \lim_{\delta z_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \left(\oint \frac{[2(z - z_0) - \delta z_0] f(z)}{(z - z_0 - \delta z_0)^2 (z - z_0)^2} dz \right) \\ f^{(2)}(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\oint \frac{2(z - z_0) f(z)}{(z - z_0)^4} dz \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$f^{(2)}(z_0) = \frac{2}{2\pi i} \left(\oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz \right). \quad (2.114)$$

Seguindo o raciocínio descrito acima, podemos escrever de forma geral que

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \quad (2.115)$$

Assim, se $f(z)$ for uma função analítica, existirá não somente a primeira, mas **todas as** derivadas.

2.10 Expansão de Taylor

Veremos agora que podemos expandir uma função através de uma série de potência, esta expansão é chamada de expansão Taylor. Os coeficientes dos sucessivos termos da série envolvem sucessivas derivadas da função. Inicialmente consideraremos o caso de uma função com variável real.

Nós assumiremos que nossa função $f(x)$ é contínua e tem a n -ésima derivada no intervalo $a \leq x \leq b$. Assim, integrando a n -ésima derivada n vezes,

$$\begin{aligned} \int_a^x f^{(n)}(x_1) dx_1 &= [f^{(n-1)}(x_1)]_a^x = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a), \\ \int_a^x dx_2 \int_a^{x_2} f^{(n)}(x_1) dx_1 &= \int_a^x [f^{(n-1)}(x_2) - f^{(n-1)}(a)] dx_2 = \\ &= f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(a) - (x-a)f^{(n-1)}(a). \end{aligned} \quad (2.116)$$

Continuando,

$$\begin{aligned} \int_a^x dx_3 \int_a^{x_3} dx_2 \int_a^{x_2} f^{(n)}(x_1) dx_1 &= f^{(n-3)}(x) - f^{(n-3)}(a) - (x-a)f^{(n-2)}(a) \\ &\quad - \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(n-1)}(a). \end{aligned} \quad (2.117)$$

Finalmente, após a n -ésima integração,

$$\begin{aligned} \int_a^x dx_n \dots \int_a^{x_2} f^{(n)}(x_1) dx_1 &= f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) - \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) \\ &\quad - \dots - \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a). \end{aligned} \quad (2.118)$$

Notemos que a expressão acima é exata. Agora, resolvendo a equação acima para $f(x)$ obteremos que

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n. \quad (2.119)$$

O termo complementar R_n , corresponde a

$$R_n = \int_a^x dx_n \dots \int_a^{x_2} f^{(n)}(x_1) dx_1. \quad (2.120)$$

Quando a função $f(x)$ for uma tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0, \quad (2.121)$$

a equação (2.119) para a série de Taylor será escrita como,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a). \quad (2.122)$$

A série de Taylor especifica o valor de uma função num ponto x em termos do valor da função, e suas derivadas, com relação ao ponto a .

Derivaremos agora a expansão de Taylor para uma função que possui variável complexa. Suponhamos que queremos expandir $f(z)$ em torno de $z = z_0$ e que temos $z = z_1$ próximo de um ponto no qual $f(z)$ não é analítica. Nós consideraremos um círculo C centrado em $z = z_0$ com raio menor que $|z_1 - z_0|$, ver figura 2.3. Como assumimos que z_1 está próximo de um ponto no qual $f(z)$ não é analítica, $f(z)$ é necessariamente analítica em C .

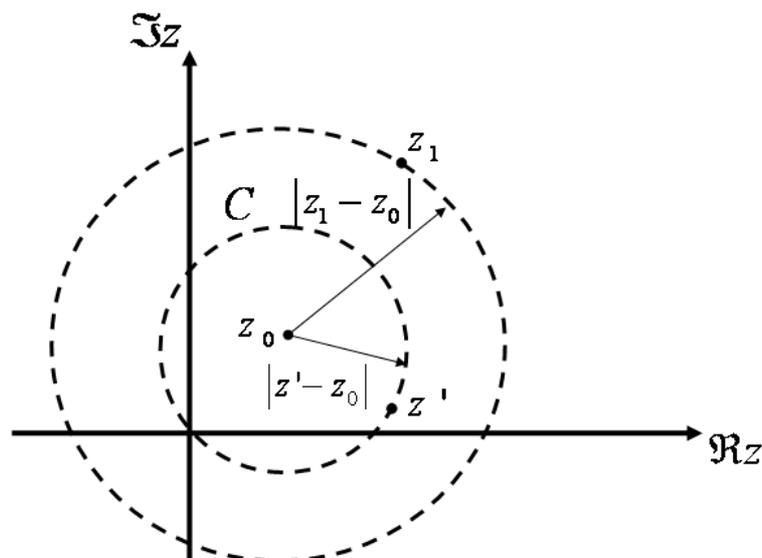


Figura 2.3: Domínio circular para a expansão de Taylor de uma função complexa.

Usando a integral de Cauchy, equação (2.112), podemos escrever que,

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z')}{z' - z} dz' \\
 f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0) - (z - z_0)} \\
 f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0) [1 - (z - z_0)/(z' - z_0)]}. \tag{2.123}
 \end{aligned}$$

Aqui, z' é um ponto no contorno C e z é um ponto interior a C . É conhecido que

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \tag{2.124}$$

no qual $|t| < 1$. Assim, para um ponto interior a C , $|z - z_0| < |z' - z_0|$, usando as equações (2.123) e (2.124) podemos escrever que

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n f(z') dz'}{(z' - z_0)^{n+1}} \\
 f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \oint_C \frac{f(z') dz'}{(z' - z_0)^{n+1}}. \tag{2.125}
 \end{aligned}$$

Usando agora a equação (2.115) na equação (2.125), obteremos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \tag{2.126}$$

que corresponde a expansão de Taylor para o caso de uma função com variável complexa. Notemos que a única suposição feita foi que $f(z)$ é analítica para $|z - z_0| < |z' - z_0|$. Ressaltamos que aqui, e no caso da expansão para variável real, a expansão de Taylor é única.

2.11 Definição de um ponto não analítico

Definiremos agora o que é um ponto não analítico. Este conceito é de central importância em nosso trabalho, pois temos como objetivo associar a informação a um ponto não analítico.

Se a expansão de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} \left[\frac{d^n f(x)}{dx^n} \right]_{x=x_0}, \quad (2.127)$$

de uma certa função em um determinado ponto convergir e for única, dizemos que este é um *ponto analítico*. Para uma função analítica, a partir de qualquer ponto da função e uma região infinitesimal ao redor do mesmo, podemos obter todos os valores da função nos outros pontos. Uma ilustração deste tipo de função pode ser vista na figura 2.4.

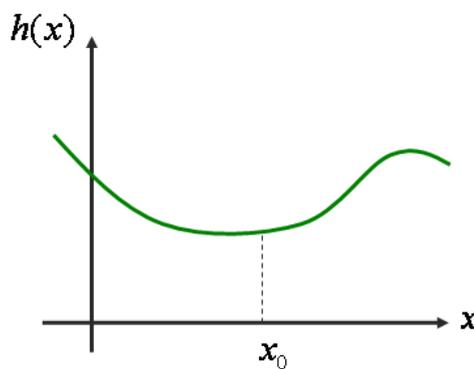


Figura 2.4: Esquema de uma função analítica.

A partir de x_0 podemos encontrar toda a distribuição restante da função. Assim, podemos dizer que não existe nenhuma informação que não esteja contida na série de Taylor. E além disso, poderíamos ter escolhido qualquer outro ponto que não x_0 , para aplicarmos a expansão de Taylor e calcularmos o restante da distribuição da função, em outras palavras, qualquer ponto contém toda a informação da função.

Por outro lado, se em algum ponto não houver unicidade ou convergência da série de Taylor, chamamos a este ponto de um *ponto não analítico*. Um esquema de dois tipos de funções com pontos não analíticos pode ser visto na figura 2.5

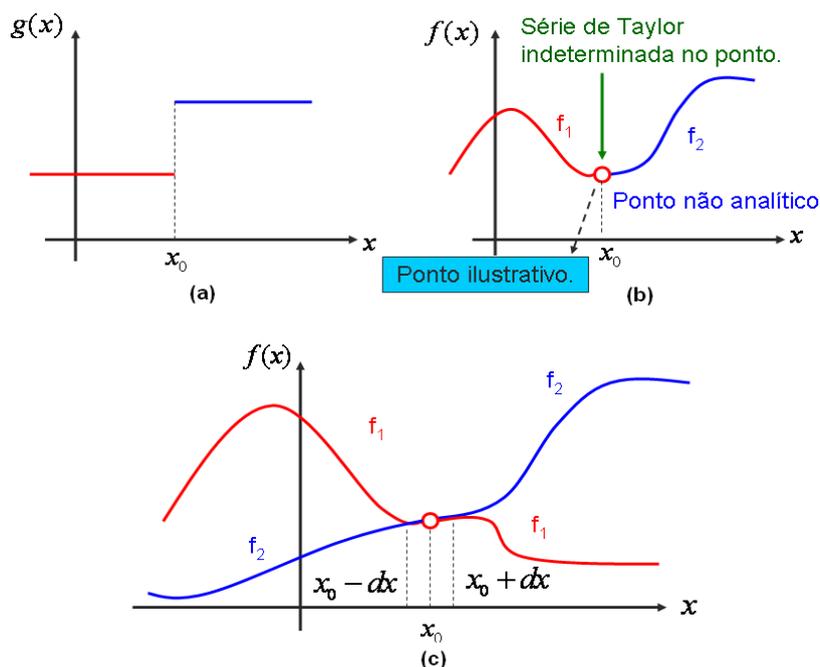


Figura 2.5: Esquema ilustrativo de duas funções com pontos não analíticos.

Na figura 2.5 tanto a função $g(x)$ como a função $f(x)$ possuem pontos não analíticos em x_0 . Na figura 2.5a temos uma função descontínua, em contraste, colocamos uma função contínua em 2.5b que também possui um ponto não analítico. Ambas as funções são funções geradas a partir de duas outras funções. Usamos na ilustração cores diferentes para reforçar este fato.

Analisemos agora a figura 2.5c, que é uma extensão da figura 2.5b. Vemos que a partir do ponto x_0 podemos fazer duas escolhas, podemos usar a expansão de Taylor para calcular o valor da função f_1 no ponto $x_0 + dx$, ou encontrar o valor da função f_2 neste mesmo ponto. Analogamente, a partir de x_0 podemos encontrar o valor correspondente a função f_2 para o ponto $x_0 - dx$ ou o valor correspondente a f_1 . Ou seja, a partir de x_0 temos dois valores possíveis para a expansão de Taylor, tanto à direita como à esquerda deste ponto. Deste modo, como o valor da expansão não é unicamente determinado, temos que este ponto é um ponto não analítico. A mesma análise vale para o outro exemplo na

figura 2.5.

No capítulo seguinte abordaremos a noção de um ponto não analítico numa função com suporte compacto. Uma função com suporte compacto é uma função que, como o próprio nome sugere, existe numa região limitada, no nosso caso, do tempo. Como ela é uma função gerada a partir de duas outras funções, como mais tarde trataremos em nosso estudo, as noções aqui comentadas sobre um ponto não analítico se aplicam.

2.12 Conclusão

Neste capítulo estudamos várias formas de resolver uma equação diferencial. Vimos que utilizando a transformada de Fourier, ou de Laplace, podemos transformar uma EDP numa EDO, tornando assim a resolução da equação diferencial bem mais fácil. Um outro método bastante útil que também tratamos foi o método de Green. Em seguida, estudamos as condições para a existência da derivada de uma função. Vimos que no caso das funções com variáveis complexas, as condições de Cauchy-Riemann devem ser satisfeitas para que a função seja analítica. Mostramos também que uma função analítica pode ser expandida em uma série de potência, e a esta expansão chamamos de expansão de Taylor. E vimos que quando não houver unicidade ou convergência da série de Taylor, teremos na função um ponto não analítico.

Capítulo 3

Resultados e discussões

3.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos os resultados obtidos em nossos estudos, sobre a propagação de um pulso com pontos não-analíticos em uma região de dispersão anômala. Em nosso trabalho associamos a informação a pontos não analíticos utilizando um pulso com suporte compacto. Este tipo de pulso é particularmente interessante porque ele existe numa região bem definida do espaço (ou do tempo), diferentemente do que ocorre no caso de um pulso Gaussiano, por exemplo.

Como já ressaltamos nos capítulos anteriores, embora muitos trabalhos tenham sido feitos considerando a propagação de pulsos em regimes superluminais, ainda não existe um consenso sobre o que é informação. Alguns trabalhos foram feitos neste sentido para tentar entender o que é a informação [15], mas, a discussão continua em aberto.

Veremos também neste capítulo que o pico de um pulso pode se propagar com uma velocidade maior que a da luz no vácuo, sem contudo violar o princípio da causalidade, segundo o qual nenhum objeto material, ou informação, pode viajar mais rápido que a velocidade da luz no vácuo. Assim, a velocidade da luz é a velocidade limite para o envio de informação.

3.2 Exemplo sobre o envio de informação

Apresentaremos nesta seção uma motivação da importância de usarmos em nosso trabalho pontos não analíticos associados à informação.

De um modo geral, podemos dizer que precisamos de no mínimo dois estados para transmitirmos alguma informação. Estes dois estados podem, por exemplo, serem associados a amplitudes de pulsos. Deste modo, poderíamos dizer que uma amplitude de 5 volts corresponde ao bit 0 e uma amplitude de 10 volts ao bit 1. A partir destes dois elementos - bit 0 e bit 1 - podemos transmitir uma informação. Imaginemos que queremos transmitir um código que contém 4 (quatro) elementos, podemos associar o elemento 00 ao número 1, o elemento 01 ao número 2, o elemento 10 ao número 3 e por fim o elemento 11 ao número 4. Assim, para uma pessoa que possua esta relação elemento-número, saberá que quando medir 5 volts duas vezes, indicará que recebeu o número 1. Estendendo este raciocínio podemos montar uma senha, por exemplo 435, e usando o esquema descrito anteriormente enviar a senha usando as amplitudes 5 e 10 volts.

Como vimos acima, a partir de um certo conjunto de elementos podemos gerar um mecanismo de comunicação. O fato importante deste exemplo é que entre estes dois elementos, bit 0 e 1, não existe nenhuma correlação. Por exemplo, se uma pessoa medir inicialmente o bit 0, ela é incapaz de dizer se na próxima medida obterá o bit 0 novamente, ou se obterá o bit 1. Portanto, esta incapacidade de prever o próximo bit que será medido é que nos induz a associar a informação a pontos não analíticos. Quando temos pontos não analíticos num pulso não podemos usar a expansão de Taylor para a partir de um certo ponto dele, construirmos o restante de sua distribuição temporal (ou espacial).

Este comentário fica mais claro se olharmos o esquema descrito na figura 3.1, o círculo vermelho indica a localização do ponto não analítico, a partir do qual poderemos ter o bit 1 ou 0. Ao longo deste capítulo mostraremos como podemos representar estes pontos

não analíticos em funções contínuas, utilizando funções com suporte compacto.

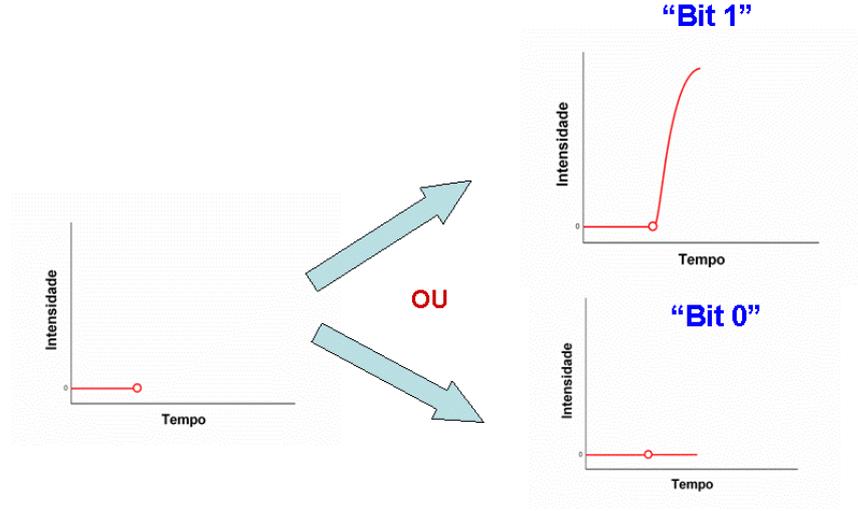


Figura 3.1: Esquema de um ponto não analítico num pulso.

3.3 Estudo da propagação

Com base no que estudamos nos capítulos anteriores, sabemos que podemos fazer o estudo da propagação de um certo pulso resolvendo a equação de Helmholtz,

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left[\frac{\omega n(\omega, z)}{c} \right]^2 \right\} \tilde{E}(z, \omega) = 0, \quad (3.1)$$

no qual,

$$n(\omega, z) = n(\omega) \text{ para } 0 \leq z \leq a.$$

$$n(\omega, z) = 1, \text{ de outro modo.} \quad (3.2)$$

A quantidade a corresponde ao tamanho da região de propagação. Sabemos que as soluções para a equação (3.1) são da forma,

$$\tilde{E}(\omega, z) = F(\omega) \left\{ \begin{array}{l} \exp\left(i\frac{\omega}{c}z\right) \text{ para } z < 0. \\ \exp\left(i\frac{n(\omega)\omega}{c}z\right) \text{ para } 0 \leq z \leq a. \\ \exp\left(i\frac{\omega}{c}[n(\omega)a + z - a]\right) \text{ para } z > a. \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

No qual, $F(\omega)$ corresponde a transformada de Fourier do pulso no tempo inicial ($t = t_0$).

No capítulo 1 obtivemos uma expressão para a constante dielétrica, assim, lembrando que $n = \sqrt{K}$, para um meio não magnético, o índice de refração será dado por,

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}}. \quad (3.4)$$

Podemos ver na figura 3.2 um gráfico da parte real e imaginária do índice de refração. Vemos claramente uma região de dispersão anômala em torno da frequência $\omega_0 = 10$ MHz, e associado a esta região de dispersão temos uma absorção, que é dada por $g = -2 \text{Im}(\omega n(\omega)/c)$, conforme vimos no capítulo 1.

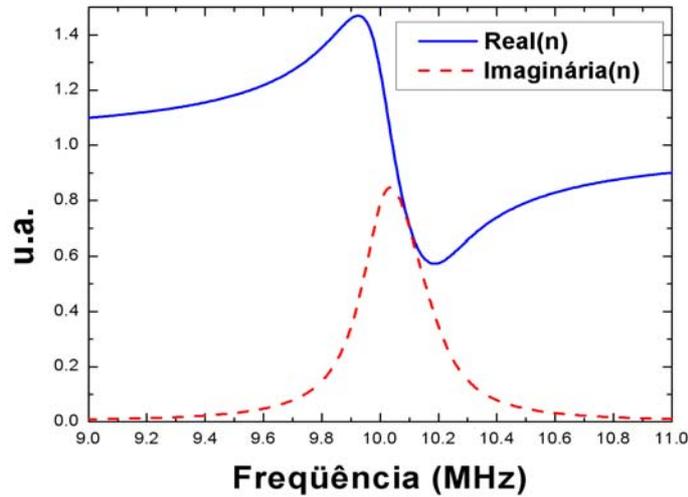


Figura 3.2: Gráfico da parte real (curva cheia azul) e imaginária (curva tracejada vermelha) do índice de refração. Parâmetros usados: $\omega_p = 2$ MHz, $\omega_0 = 10$ MHz e $\gamma = 0.2$ MHz.

O entendimento da propagação superluminal, é feito lembrando que a velocidade de grupo é dada por

$$v_g = \frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{dn(\omega)}{d\omega}}. \quad (3.5)$$

Assim, numa região em que $dn(\omega)/d\omega < 0$ (região de dispersão anômala), poderemos ter $v_g > c$.

Nas seções seguintes usaremos a equação (3.4) para o índice de refração e estudaremos a propagação do pulso com suporte compacto na região de dispersão anômala. Em nosso estudo utilizaremos também pulsos do tipo Gaussiano, como comparação.

Para o estudo da propagação utilizamos o software MatLab versões 6.5 e 7.1. Fizemos o estudo numérico utilizando tanto o método de Fourier como o método da convolução, e os resultados obtidos foram os mesmos.

3.4 Pulso Gaussiano

Antes de considerarmos o pulso com suporte compacto, é instrutivo estudarmos a propagação de um pulso do tipo Gaussiano na região de dispersão anômala. Para isto, tomaremos um pulso da seguinte forma,

$$E(z, t) = E_0 \exp\left(-\frac{(z/c - t)^2}{2\tau^2}\right) \exp[i\omega_c(z/c - t)]. \quad (3.6)$$

Este pulso corresponde a um pulso Gaussiano de largura temporal igual a τ , velocidade de propagação igual a c e com frequência central ω_c . Quando este tipo de pulso é propagado num meio com dispersão anômala, obtemos que sob certas condições a velocidade de grupo pode ser maior que a velocidade da luz no vácuo, e além disso, o pulso praticamente não sofre deformação, conforme pode ser visto na figura 3.3.

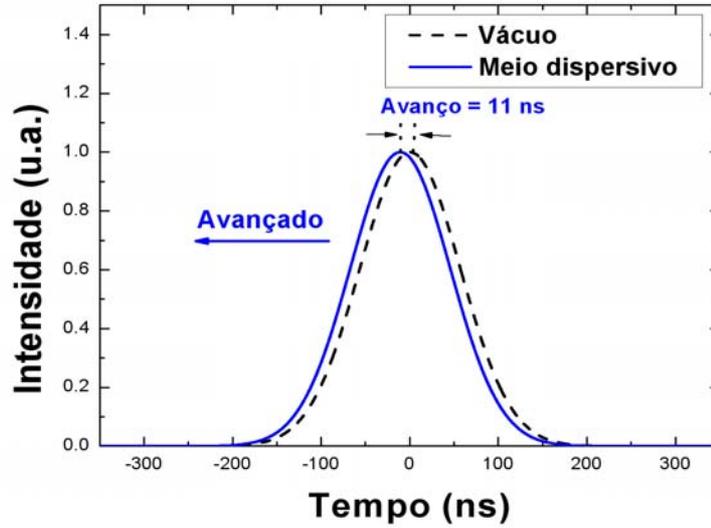


Figura 3.3: Propagação de um pulso Gaussiano no vácuo (curva tracejada preta) e numa região com dispersão anômala (curva cheia azul). Parâmetros usados: $\tau = 80$ ns, $\omega_c = 10.1$ MHz e $z = 0.3$ cm.

Vemos claramente na figura 3.3 que o pulso Gaussiano está se propagando com uma velocidade maior que a velocidade da luz no vácuo, e sem deformação. Entretanto, isto não está em desacordo com a causalidade, pois, aqui não há nenhuma informação nova que possa ser atribuída ao pico do pulso Gaussiano. Isto decorre do fato de que um pulso Gaussiano possui continuidade analítica, ou seja, a partir de qualquer ponto do pulso, podemos, através da expansão de Taylor, construir toda sua distribuição, neste caso, temporal.

Na figura 3.3 usamos $z = 0.3$ cm, este valor será usado na maioria das figuras deste capítulo. Escolhemos este valor porque observamos que acima de $z = 0.6$ cm o pulso com suporte compacto já sofreu uma forte mudança em seu perfil temporal. Deste modo, escolhemos um valor intermediário entre $z = 0$ cm e $z = 0.6$ cm, neste caso $z = 0.3$ cm. Assim, usamos este valor não somente para a propagação do pulso com suporte compacto,

mas também para a propagação do pulso Gaussiano e demais pulsos usados em nossos estudos.

É interessante estudarmos também o que acontece se tomarmos apenas a parte real do índice de refração para analisar a propagação do pulso Gaussiano, o resultado obtido pode ser visto na figura 3.4.

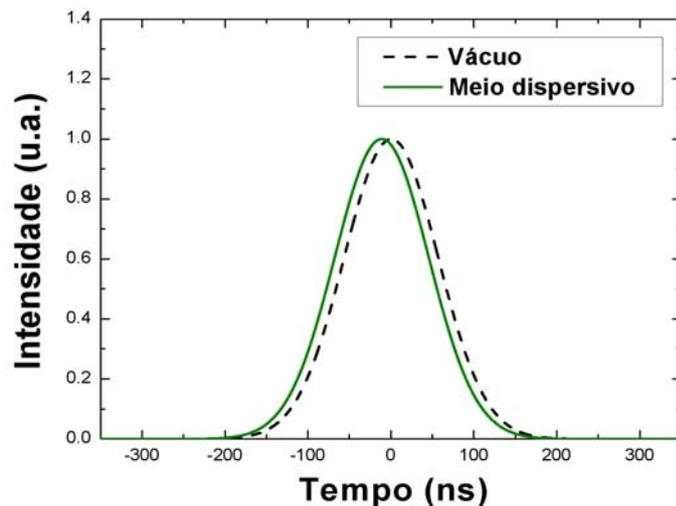


Figura 3.4: Propagação de um pulso Gaussiano através do vácuo (curva tracejada preta) e da região de dispersão (curva cheia verde) considerando apenas a parte real do índice de refração. Os parâmetros usados são os mesmos que os da figura 3.3.

Notamos que o resultado obtido é o mesmo que o obtido na figura 3.3. Podemos analisar isto também na figura 3.5, onde calculamos o logaritmo da intensidade para as figuras 3.3 e 3.4. Portanto, podemos ser levados a pensar que não é necessário usar a parte imaginária no estudo da propagação de um pulso para obter o efeito superluminal, e isto poder ser reforçado se lembrarmos das relações de Kramers-Kronig, que relaciona a parte real e imaginária do índice de refração, contudo, esta conclusão é equivocada. Embora tenhamos uma relação entre as partes real e imaginária do índice de refração, se considerarmos somente a parte real no estudo da propagação poderemos obter resultados

bem diferentes do que os obtidos quando utilizamos também a parte imaginária. Isto será visto na seção seguinte.

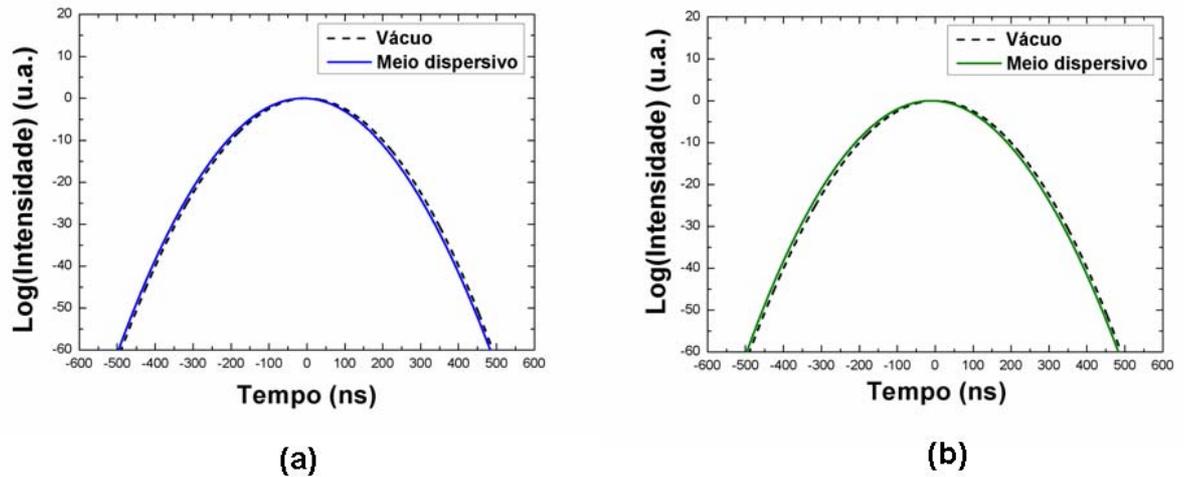


Figura 3.5: Na figura a) temos o logaritmo da intensidade para o gráfico da figura 3.3, e na figura b) o logaritmo da intensidade para a figura 3.4.

Ressaltamos que na figura 3.3 e demais figuras de propagação deste capítulo as intensidades estão normalizadas para uma melhor análise do avanço obtido. Como já comentamos no capítulo 1 temos uma absorção associada a esta região de dispersão anômala. Um gráfico sobre o efeito da absorção no pulso pode ser visto na figura 3.6.

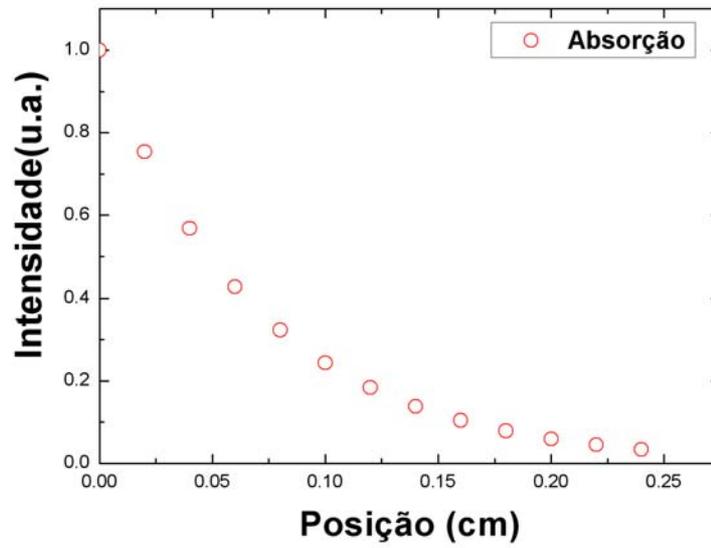


Figura 3.6: Análise da absorção de um pulso ao se propagar numa região com dispersão anômala.

Vemos na figura 3.6 que o pulso sofre uma forte absorção ao se propagar na região com dispersão anômala. Uma análise do avanço do pico do pulso Gaussiano pode ser visto na figura 3.7.

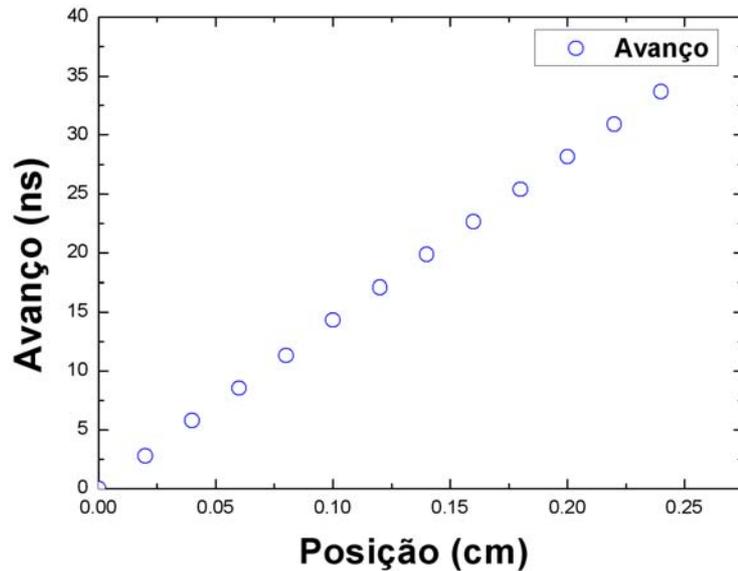


Figura 3.7: Análise do avanço do pico do pulso Gaussiano ao se propagar na região com dispersão anômala.

Nesta seção fizemos a propagação de um pulso Gaussiano, que possui continuidade analítica, na seção seguinte estudaremos a propagação de um pulso com suporte compacto, que possui pontos não analíticos.

3.5 Pulso com suporte compacto

O pulso com suporte compacto utilizado em nosso estudo foi do seguinte tipo,

$$f(t) = \exp\left(\frac{a}{b - ct^2}\right) \text{ para } |t| \leq \sqrt{b/c}. \quad (3.7)$$

$$f(t) = 0 \text{ de outro modo.}$$

A função da equação (3.7) é chamada de suporte compacto porque como vemos, ela existe numa região limitada, neste caso, do tempo. Um esquema deste pulso é visto na figura 3.8.



Figura 3.8: Esquema de um pulso com suporte compacto.

O resultado obtido da propagação de um pulso com suporte compacto numa região com dispersão anômala pode ser visto na figura 3.9.

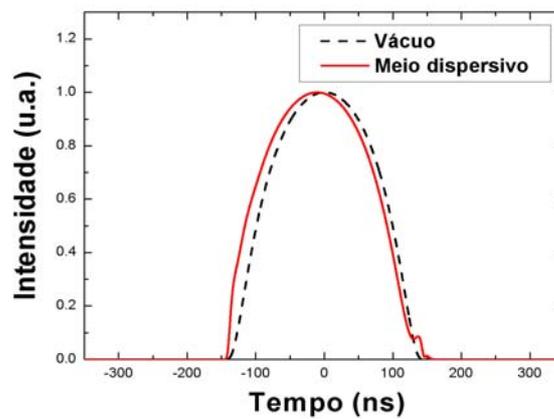


Figura 3.9: Propagação de um pulso com suporte compacto no vácuo (curva tracejada preta) e na região com dispersão anômala (curva cheia vermelha). Parâmetros: $\omega_c = 10.1$ MHz e $z = 0.3$ cm.

Vemos na figura 3.9 que embora o pico do pulso possua uma velocidade maior do que a velocidade da luz no vácuo, o ponto não analítico não se propaga mais rápido

que c (velocidade da luz no vácuo). Uma análise mais clara deste comentário pode ser visto através das derivadas do pulso com suporte compacto, conforme figuras 3.10 e 3.11. Notamos que tanto o primeiro como o segundo ponto não analítico, não excedem c .

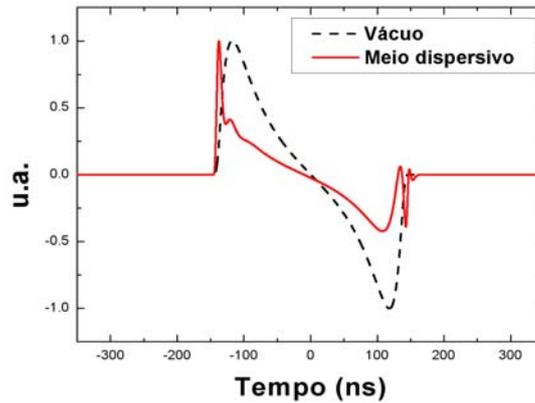


Figura 3.10: Primeira derivada do pulso com suporte compacto se propagando no vácuo (curva tracejada preta) e na região com dispersão anômala (curva cheia vermelha), referente a figura 3.8.

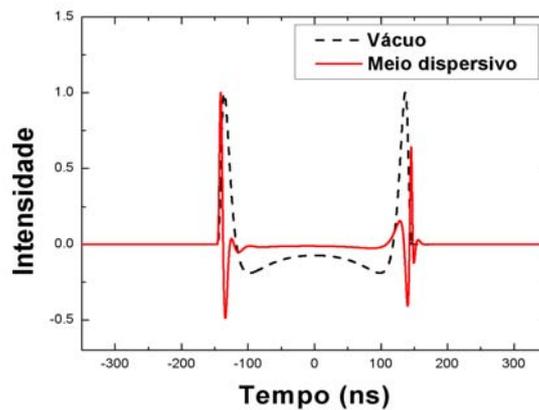


Figura 3.11: Segunda derivada do pulso com suporte compacto se propagando no vácuo (curva tracejada preta) e na região com dispersão anômala (curva cheia vermelha) mostrado na figura 3.8.

É interessante analisarmos o que ocorre quando propagamos o pulso com suporte

compacto por uma distância maior do que a considerada anteriormente. O efeito resultante pode ser visto na figura 3.12. Mais uma vez notamos que apenas o pico é que se propaga com uma velocidade maior que c . Podemos também comparar o perfil do pulso em diferentes posições, isto pode ser visto na figura 3.13.

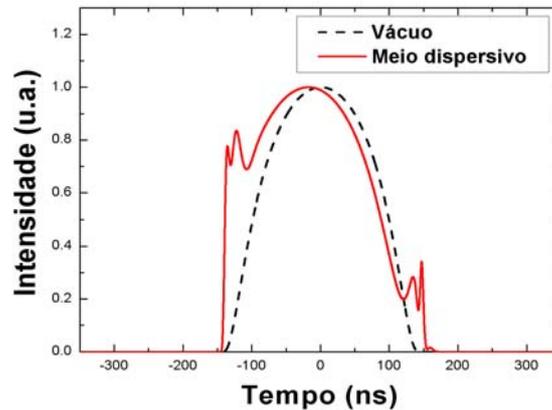


Figura 3.12: Propagação do pulso com suporte compacto no vácuo (curva tracejada preta) e na região com dispersão anômala (curva cheia vermelha) para $z = 0.5$ cm.

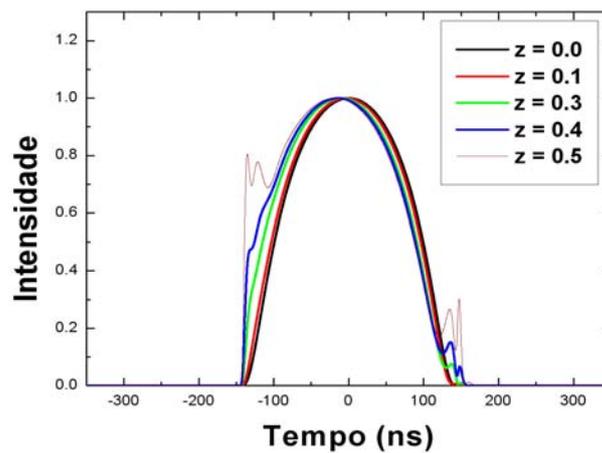


Figura 3.13: Propagação do pulso com suporte compacto na região de dispersão anômala para vários valores de z (em cm).

Fizemos um estudo variando o número de pontos nos cálculos para analisarmos se há alguma influência do número de pontos nos resultados obtidos. Para isto, usamos 2^{14} pontos para obter a figura 3.12 e 2^{20} pontos para a figura 3.14, e podemos perceber que não há diferença entre os resultados. Como para 2^{14} pontos já temos convergência dos resultados, adotamos este valor para todos os gráficos deste capítulo. Além de analisar a influência do número de pontos, analisamos também a influência do método usado na propagação. Usamos em nossos resultados o método de Fourier e para comparação usamos o método da convolução, e em ambos os casos os resultados obtidos foram os mesmos. As figuras deste capítulo são as obtidas pelo método de Fourier. E como parâmetros usamos sempre nos gráficos que $\omega_p = 2$ MHz, $\omega_0 = 10$ MHz e $\gamma = 0.2$ MHz.

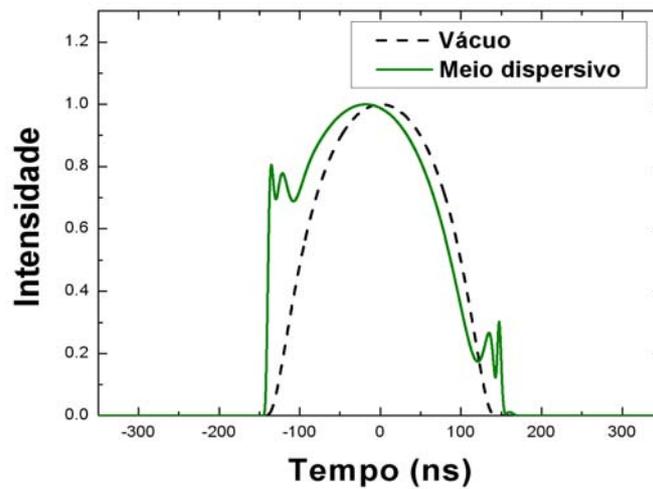


Figura 3.14: Propagação do pulso com suporte compacto no vácuo (curva tracejada preta) e na região de dispersão (curva cheia verde) usando 2^{20} pontos. Os parâmetros usados são os mesmos que os da figura 3.12.

Analogamente ao que fizemos no caso do pulso Gaussiano, vamos analisar o que ocorre se usarmos apenas a parte real do índice de refração no estudo da propagação. O resultado deste estudo pode ser visto na figura 3.15.

Vemos na figura 3.15 que o resultado é completamente diferente ao que tínhamos obtido anteriormente. Temos agora que o ponto não analítico se propaga mais rápido que a velocidade da luz no vácuo. Portanto, embora tenhamos uma relação de Kramers-Kronig entre a parte real e imaginária do índice de refração, não podemos usar apenas a parte real no estudo da propagação, pois, se isto for feito poderemos chegar a resultados errados em alguns casos. Ou seja, a maneira correta de garantir a causalidade é de utilizar a parte real e imaginária simultaneamente, garantindo desta forma que a relação de Kramers-Kronig seja respeitada.

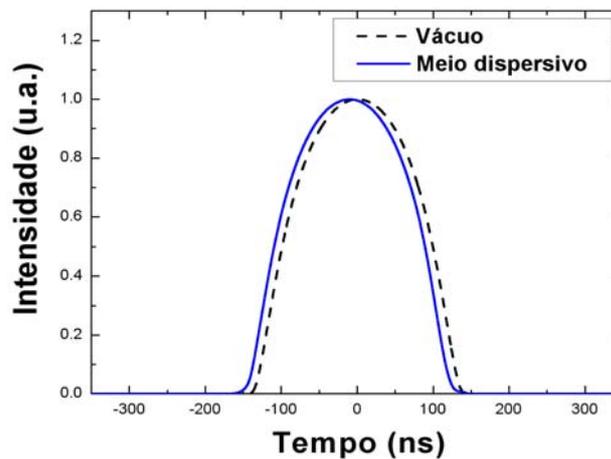


Figura 3.15: Propagação do pulso com suporte compacto no vácuo (curva tracejada preta) e na região de dispersão (curva cheia azul) usando apenas a parte real do índice de refração. Parâmetros usados $\omega_c = 10.1$ MHz e $z = 0.3$ cm.

Novamente é instrutivo analisarmos as derivadas do pulso ao se propagar no meio dispersivo, os resultados podem ser vistos nas figuras 3.16 e 3.17.

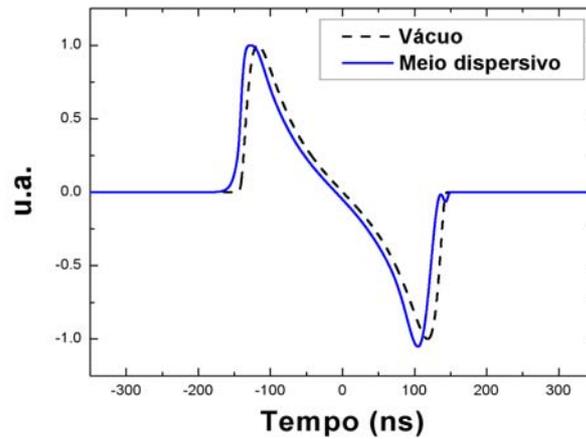


Figura 3.16: Primeira derivada para a propagação do pulso com suporte compacto, utilizando somente a parte real do índice de refração, referente a figura 3.15.

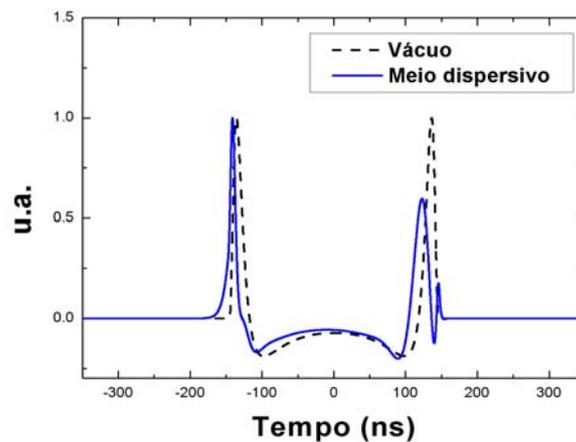


Figura 3.17: Segunda derivada para a propagação do pulso com suporte compacto utilizando apenas a parte real do índice de refração, referente a figura 3.15.

Percebemos através das figuras 3.16 e 3.17 que o resultado é diferente do que o obtido nas figuras 3.10 e 3.11, quando utilizamos tanto a parte real como a parte imaginária na propagação do pulso na região com dispersão anômala. Isto fica mais claro também se analisarmos o logaritmo da intensidade, assim como tínhamos feito para o caso do pulso

Gaussiano. O resultado pode ser visto na figura 3.18.

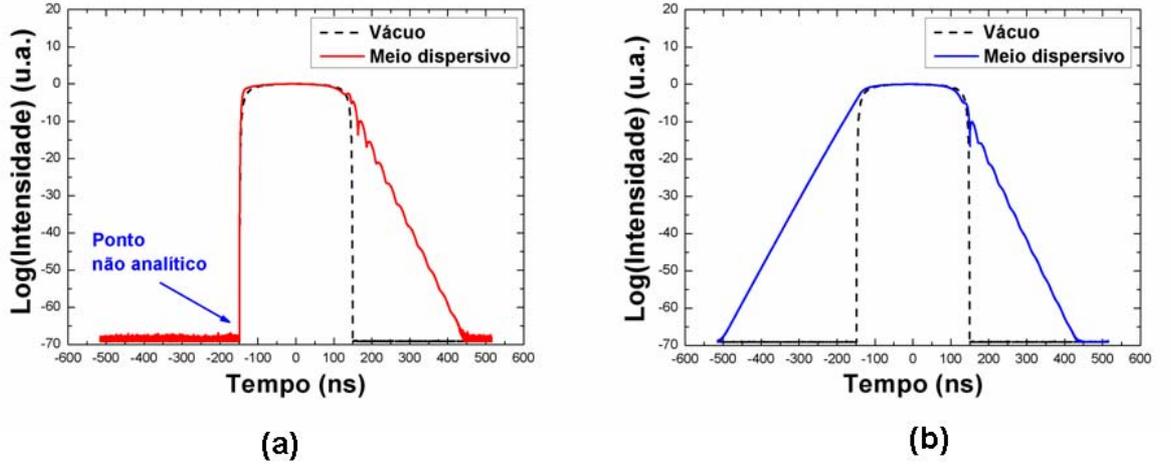


Figura 3.18: Na figura a) temos o logaritmo da intensidade para o gráfico da figura 3.9, e na figura b) o logaritmo da intensidade para a figura 3.15.

3.5.1 Entendimento da violação da causalidade

Como vimos nos últimos resultados, eles são diferentes se usarmos somente a parte real do índice de refração ou sua expressão completa no estudo da propagação. Vimos que isto só ocorre no caso do pulso que contém pontos não analíticos, pois para o pulso Gaussiano o resultado, como vimos, foi o mesmo. Isto pode ser entendido se olharmos o termo $\exp(in(\omega)\omega z/c)$ que aparece na equação (3.3). Podemos escrevê-lo da seguinte forma

$$\begin{aligned} \exp\left(i\frac{n(\omega)\omega z}{c}\right) &= \exp\left[i\frac{\omega z}{c}(\operatorname{Re}[n(\omega)] + i\operatorname{Im}[n(\omega)])\right] \\ \exp\left(i\frac{n(\omega)\omega z}{c}\right) &= \exp\left[i\frac{\omega z}{c}\operatorname{Re}[n(\omega)]\right] \exp\left[-\frac{\omega z}{c}\operatorname{Im}[n(\omega)]\right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Analisando a equação (3.8) vemos que usar somente a parte real do índice de refração no estudo da propagação é equivalente a fazer $\operatorname{Im}[n(\omega)] = 0$, mas, fazer isto é violar as relações de Kramers-Kronig, e deste modo, violamos a causalidade. Devido a isto é

que o ponto não analítico se propaga neste caso mais rápido que a luz no vácuo, pois na equação de onda não há causalidade; a causalidade vem justamente das relações de Kramers-Kronig, que é violada ao usarmos somente a parte real para o índice de refração na propagação. Não obtemos resultados diferentes para o pulso Gaussiano porque ele é um pulso analítico, assim, se ele for superluminal não viola a causalidade, deste modo, não é preciso impor causalidade, através das relações de Kramers-Kronig, no estudo da propagação deste tipo de pulso.

3.5.2 Outros tipos de pulsos com pontos não analíticos

Vamos agora analisar o que ocorre quando construímos um pulso com metade dele sendo uma distribuição tipo gaussiana e a outra metade sendo do tipo suporte compacto. Denominaremos este pulso de GSC. Um esquema deste tipo de pulso pode ser visto na figura 3.19.



Figura 3.19: Esquema de um pulso que apresenta uma distribuição tipo gaussiana com suporte compacto (pulso GSC).

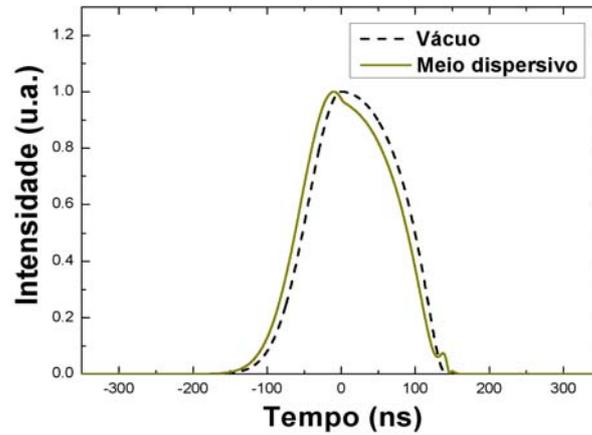


Figura 3.20: Propagação de um pulso GSC no vácuo (curva tracejada preta) e na região com dispersão anômala (curva cheia). Parâmetros usados: $\omega_c = 10.1$ MHz e $z = 0.3$ cm.

O resultado obtido para a propagação para um pulso GSC pode ser visto na figura 3.20. E a análise da primeira e segunda derivada para este tipo de pulso é mostrado nas figuras 3.21 e 3.22.

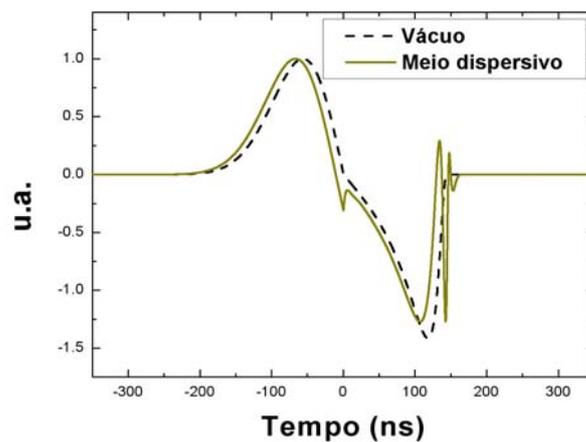


Figura 3.21: Primeira derivada para o resultado obtido na figura 3.20.

Notamos nas figuras 3.21 e 3.22 que o ponto não analítico se propaga na velocidade

da luz.

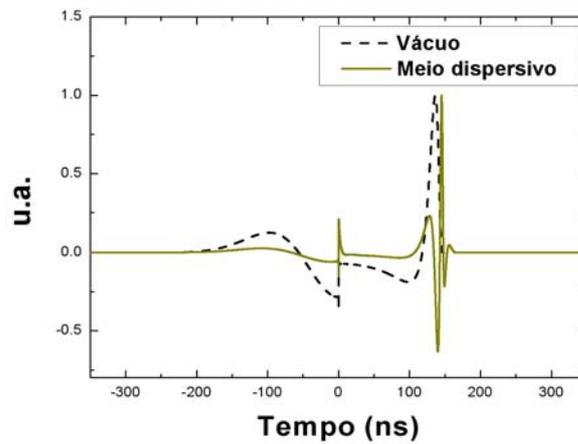


Figura 3.22: Segunda derivada para o resultado obtido na figura 3.20.

Considerando o pulso usado anteriormente, é instrutivo também analisarmos o caso em que inicialmente temos uma distribuição tipo suporte compacto e depois mudamos para uma distribuição gaussiana (pulso SCG). O esquema do pulso é visto na figura 3.23.

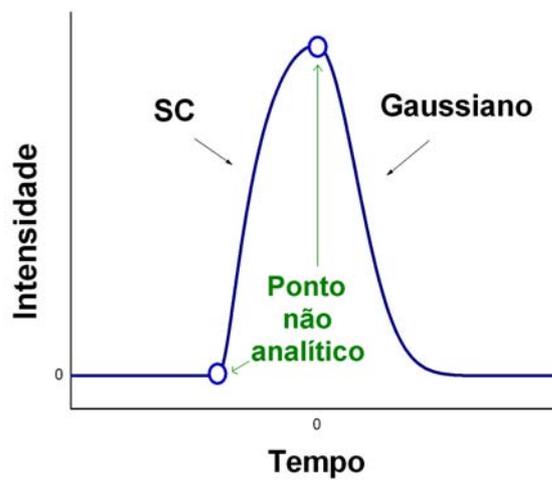


Figura 3.23: Esquema do pulso que inicia com uma distribuição tipo suporte compacto e depois muda para uma distribuição do tipo gaussiana (pulso SCG).

Na figura 3.24 temos o resultado da propagação do pulso SCG. Notamos que a velocidade do pico parece exceder a velocidade da luz no vácuo, mas uma análise das derivadas do pulso, figuras 3.25 e 3.26, mostra que a velocidade do ponto não analítico é igual a c .

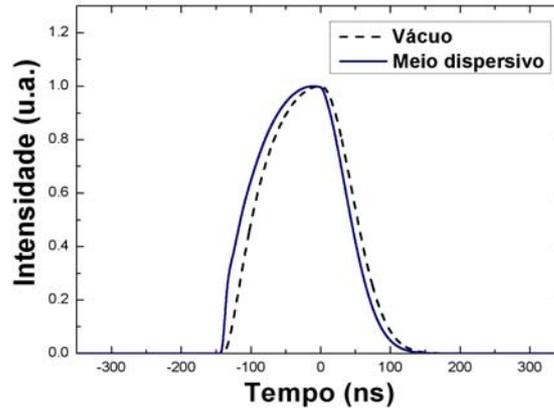


Figura 3.24: Propagação no vácuo (curva tracejada preta) e na região com dispersão anômala (curva cheia azul) de um pulso SCG. Parâmetros usados: $\omega_c = 10,1$ MHz e $z = 0,3$ cm.

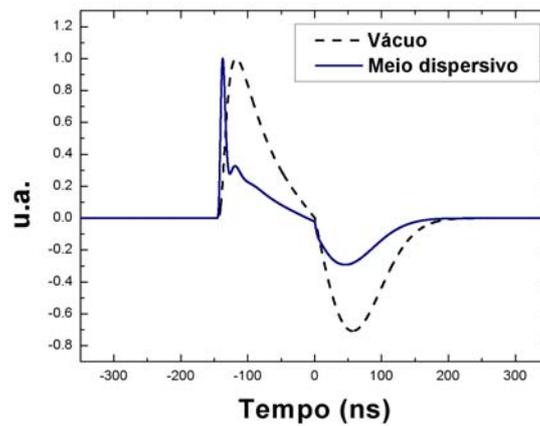


Figura 3.25: Primeira derivada para o pulso SCG, referente ao resultado obtido na figura 3.24.

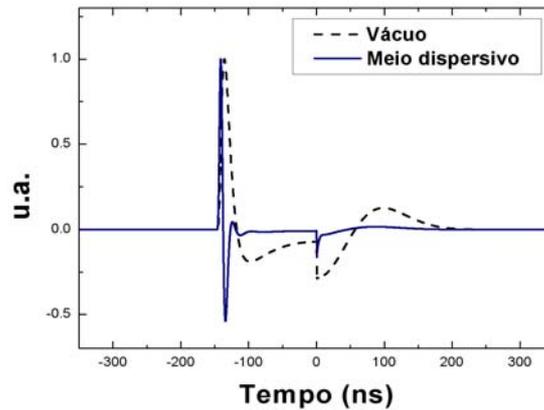


Figura 3.26: Segunda derivada para o pulso SCG, referente ao resultado obtido na figura 3.24.

Deste modo, com base nestas observações, podemos notar que os pontos não analíticos não se propagam com uma velocidade maior que a da luz. Portanto, associando a informação a um ponto não analítico notamos que ela não será transmitida a uma velocidade maior que c .

Embora todo o nosso estudo tenha sido numérico, é possível construir experimentalmente pulsos com pontos não analíticos. Isto pode ser feito utilizando um gerador de frequências, através da geração das frequências que correspondem a um pulso deste tipo.

Por fim, vale ressaltar a diferença entre o nosso estudo com pulsos do tipo suporte compacto e o trabalho feito por Sommerfeld e Brillouin [1]. No trabalho realizado pelos referidos autores, eles também usaram pontos não analíticos, no caso, utilizaram um pulso com frente de onda descontínua, contudo, sabemos que tais pulsos violam as condições de continuidade impostas pelas equações de Maxwell. Já em nosso estudo, o pulso é contínuo e infinitamente derivável, assim, fisicamente nosso estudo é mais aceitável.

Um possível estudo usando a mecânica quântica e pontos não analíticos pode ser feito, mas novamente, devemos usar funções que sejam contínuas.

Capítulo 4

Conclusão

Neste trabalho realizamos um estudo sobre a propagação de pulsos de luz em uma região com dispersão anômala, em particular, usamos pulsos do tipo gaussiano e pulsos com suporte compacto. Através de simulações numéricas, confirmamos que um pulso gaussiano pode propagar neste tipo de região com uma velocidade de grupo maior do que a velocidade da luz no vácuo, reproduzindo resultados tanto teóricos como experimentais existentes na literatura científica. Vimos que, sob certas condições, o pulso propagado praticamente não sofre mudanças. Usando somente a parte real do índice de refração, encontramos que o resultado obtido é o mesmo do que quando usamos a expressão completa, no entanto, vimos que isto não ocorre no estudo do pulso com suporte compacto. Neste caso, se considerarmos somente a parte real para o índice de refração, o resultado é bem diferente do que aquele obtido quando é usada a expressão completa. Logo, obtivemos que a utilização apenas da parte real do índice de refração implica em uma violação explícita da relação de Kramers-Kronig e da causalidade.

Em relação a propagação dos pontos não analíticos, foi observado que eles nunca se propagam mais rápido do que a velocidade da luz, deste modo, podemos dizer que uma vez que associarmos informação a um ponto não analítico, ela não poderá ser enviada mais rápida do que a luz no vácuo. Portanto, o princípio da causalidade não é violado.

Um outro tipo de pulso foi estudado a partir do pulso gaussiano e do pulso com suporte

compacto. Este outro pulso criado possuía uma parte sendo do tipo gaussiano e a outra do tipo suporte compacto, a diferença em relação ao pulso com suporte compacto é que agora temos um ponto não analítico com energia diferente de zero, na região de junção dos dois pulsos. Neste estudo, mais uma vez encontramos que o ponto não analítico não se propaga mais rápido do que a luz no vácuo.

Deste modo, podemos considerar que num pulso a informação é associada a pontos não analíticos, e que estes pontos nunca se propagam mais rápido do que a velocidade da luz no vácuo.

Uma perspectiva interessante para continuidade deste trabalho é aplicar o formalismo aqui desenvolvido para sistemas de luz lenta, onde permanece em aberto a questão de qual seria a velocidade da informação para semelhantes sistemas.

Bibliografia

- [1] L. Brillouin, *Wave propagation and Group Velocity*. Academic Press, New York, (1960).
- [2] J. D. Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, New York, pg 302 (1975).
- [3] C. G. G. Garrett and D. E. McCumber. *Propagation of a gaussian light pulse through an anomalous dispersion medium*. PRA 1,305 (1969).
- [4] J. D. Jackson. *Classical electrodynamics*. Third edition (1999).
- [5] John R. Reitz, F. J. Milford, R. W. Christy, *Fundamentos da teoria eletromagnética*, 3ª edição, editora Campus (1982).
- [6] Lord Rayleigh, Nature (London) LX, 64 (1899).
- [7] E. L. Bolda, R. Y. Chiao, et al. *Optical pulse propagation at negative group velocities due to an early gain line*. PRA 49,2938 (1994).
- [8] R. Y. Chao. *Superluminal (but causal) propagation of wave packets in transparent media with inverted atomic population*. PRA 48, R34 (1993).
- [9] Min Xiao, Yong-qing Li, Shao-zheng Jin, and Julio Gea-Banacloche. *Measurement of dispersion properties on electromagnetically induced transparency in rubidium atoms*. PRL 74,666 (1995).

-
- [10] A. M. Steinberg and R. Y. Chiao. *Dispersionless, highly superluminal propagation in a medium with a gain doublet*. PRA 49,2071 (1994).
- [11] L. J. Wang, A. Kuzmich and A. Dogariu. *Gain-assisted superluminal light propagation*. Nature 406,277 (2000).
- [12] D. R. Solli, J. M. Hickmann, et al. *Demonstration of superluminal effects in an absorptionless, nonreflective system*. PRL 91,143906 (2003).
- [13] D. R. Solli, C. F. McCormick, R. Y. Chiao, and J. M. Hickmann. *Birefringence in two dimensional bulk photonic crystals applied to the construction of quarter waveplates*. Optics Express 11,125 (2003).
- [14] George B. Arfken and Hans J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier academic press. Sixth Edition (2005).
- [15] Michael D. Stenner, et al. *The speed of information in a “fast-light” optical medium*. Nature 425,695 (2003).