UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MATEMÁTICA LICENCIATURA

NICKSON DEYVIS DA SILVA CORREIA

ÁLGEBRA E ARITMÉTICA EM LIVROS DIDÁTICOS DE 1879 A 2018: UMA POSSÍVEL ABORDAGEM USANDO GEOMETRIA

Maceió-AL
2020

NICKSON DEYVIS DA SILVA CORREIA

ÁLGEBRA E ARITMÉTICA EM LIVROS DIDÁTICOS DE 1879 A 2018: UMA POSSÍVEL ABORDAGEM USANDO GEOMETRIA

Trabalho de conclusão de curso apresentado à banca examinadora do curso de Matemática Licenciatura, da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Viviane de Oliveira Santos

Maceió-AL

2020

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

C824a Correia, Nickson Deyvis da Silva.
Álgebra e aritmética em livros didáticos de 1879 a 2018: uma possível abordagem usando geometria / Nickson Deyvis da Silva Correia. – 2020.
100 f. : il. ; figs. color.

Orientadora: Viviane de Oliveira Santos.
Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática: Licenciatura) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2020.

Bibliografia: f. 93-100.

1.Matemática – Estudo e ensino. 2. História da matemática. 3. Álgebra. 4. Aritmética. 5. Matemática (Ensino fundamental). 6. Livro didático de matemática. I. Título.

CDU: 51(091)

Folha de Aprovação

NICKSON DEYVIS DA SILVA CORREIA

ÁLGEBRA E ARITMÉTICA EM LIVROS DIDÁTICOS DE 1879 A 2018: UMA POSSÍVEL ABORDAGEM USANDO GEOMETRIA

Trabalho de conclusão de curso apresentado à banca examinadora do curso de Matemática Licenciatura, da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática e apresentado no dia 28 de julho de 2020.

Banca examinadora:

Viviane Oliveira

Profa. Dra. Viviane de Oliveira Santos (Orientadora)
Universidade Federal de Alagoas

Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra
Universidade Federal de Alagoas

Carolina C. Pereira

Profa. Dra. Ana Carolina Costa Pereira
Universidade Estadual do Ceará

AGRADECIMENTOS

A Ògún e Ọsun, por iluminarem meus caminhos e escolhas ao longo desses anos, me fazendo forte para concluir essa etapa perante as dificuldades.

À minha família, pelo amor, compreensão e apoio durante todos esses anos.

À minha orientadora, amiga, parceira de todas as horas, profa Dra. Viviane Oliveira, pelo suporte não só na realização desse trabalho, mas também por todos os resultados obtidos ao longo do curso. Em meio a diversos momentos, acreditou no meu potencial e me incentivou. A minha admiração.

Aos companheiros do grupo de pesquisa *História da Matemática e Educação Matemática* da Universidade Federal de Alagoas, Lucas Moura e Jaqueline Freitas, pelas colaborações no desenvolvimento desse trabalho.

À toda equipe do projeto de extensão *Sem mais nem menos* do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, por proporcionarem momentos de aprendizagem e descontração ao longo desses anos.

A todos os amigos que colaboraram direta ou indiretamente na minha formação, compreendendo meus abusos e minha ausência em alguns momentos.

RESUMO

Ao estudarmos a História da Educação Matemática no Brasil, podemos perceber as mudanças ocorridas no Sistema Educacional Brasileiro e como a Aritmética e a Álgebra foram organizadas ao longo dos anos no Ensino Básico. Ao estudarmos a História da Matemática em geral, vimos que alguns problemas de Álgebra e Aritmética foram abordados de forma geométrica ao longo da história. Desse modo, o objetivo desse trabalho foi compreender como a Aritmética e a Álgebra foram abordadas nos livros didáticos de 1879 a 2018 do Ensino Fundamental II e propor uma possível abordagem geométrica para seus conteúdos ou problemas algébricos e aritméticos. Para esse trabalho documental desenvolvido no projeto de pesquisa do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação Científica (Pibic) do Grupo de Pesquisa História da Matemática e Educação Matemática da Universidade Federal de Alagoas (Ufal), utilizamos uma metodologia exploratória para verificarmos como a Álgebra e Aritmética foram abordadas em didáticos de 1879, 1914, 1922 e 1931 referentes ao Ensino Secundário, livros didáticos de 1943, 1948, 1954, 1958 e 1959 referentes ao Ensino Ginasial, livros didáticos de 1995 referentes aos anos finais do Ensino do 1º grau e livros didáticos de 2009 e 2018 referentes ao Ensino Fundamental II. Além disso, utilizamos a metodologia qualitativa para propor a abordagem geométrica em alguns conteúdos ou problemas algébricos ou aritméticos. Utilizamos livros didáticos presentes em repositório institucional on-line e em acervos pessoais de professores que vieram a colaborar, disponibilizando esses livros para esse trabalho. Ressaltamos que a obra didática de 2018 foi indicada no Guia de Livros Didáticos 2020 do Programa Nacional de Livros Didáticos (PNLD), sendo assim, esse trabalho aborda o tratamento da Álgebra e da Aritmética até 2020. Por meio desse estudo, compreendemos as principais contribuições dos matemáticos durante a História da Matemática e a organização do Ensino de Matemática no Brasil como: as leis e decretos estabelecidos, as mudanças nos programas da disciplina, as contribuições do Movimento da Matemática Moderna, os critérios exigidos nos programas dos livros didáticos, as abordagens de alguns conteúdos algébricos e aritméticos por seus autores e possíveis abordagens geométricas desses conteúdos. Com esse estudo, concluímos que abordagens geométricas podem contribuir na compreensão de conteúdos algébricos e aritméticos. Destacamos também que o fato do professor de Matemática conhecer várias metodologias para abordar um conteúdo pode facilitar na escolha do melhor modo a adotar em suas aulas, principalmente nos conteúdos de Aritmética e Álgebra.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Aritmética; Álgebra; Geometria; Livros Didáticos.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Uma das disciplinas escolares que mais dividem opiniões sobre a preferência é a Matemática. A abstração é a característica principal dessa disciplina e um dos principais objetivos do seu ensino é a formação de conceitos decorrentes de representações simbólicas que compõem uma linguagem específica. Para uns, ela simboliza satisfação, para outros, simboliza o oposto, pois constitui em uma grande dificuldade que conduz a questões como: "Para que serve isso?", "Por que estudar este conteúdo?". Gostando ou não, ninguém pode negar a importância dessa ciência inclusive fora do ambiente escolar.

A Matemática escolar abrange diversas áreas de estudo. Entre essas áreas, temos Aritmética, Álgebra e Geometria, que juntas ocupam a maior parte do Ensino Fundamental II. O professor de Matemática se desdobra entre instrumentos que auxiliam na transmissão dos conteúdos aritméticos, algébricos e geométricos para seus alunos.

Baroni e Nobre (1999) escrevem sobre modelagem matemática, etnomatemática e informática como instrumentos bastante utilizados pelo professor. Da mesma forma, a área de pesquisa História da Matemática também possibilita a criação de novos instrumentos didáticos, uma vez que problemas famosos, informações históricas concernentes a determinados eventos e biografias encontradas nas páginas de cada assunto nos livros didáticos podem ser estímulos à motivação dos alunos aumentando o interesse na aprendizagem de certos conteúdos.

Para estudar a História da Educação Matemática no Brasil, é importante nos ater aos momentos políticos, sociais e organizacionais vividos em cada epóca no país. D'Ambrosio (2008) diz ser importante o professor de Matemática conhecer a História da Matemática no Brasil e suas pesquisas para entender a dinâmica do encontro cultural de gerações, o desafio no mundo escolar, os programas escolares, os livros adotados, entre outros.

Além disso, ao estudar a História da Matemática, nota-se como a Geometria estabelece o alicerce do que conhecemos hoje como Álgebra e Aritmética. Sendo assim, concordando com esse pensamento, surgiu o interesse de compreender como a Álgebra e a Aritmética foram abordadas no Ensino de Matemática no Brasil e como foram relacionadas com a Geometria ao longo dos anos. Dessa forma, esse trabalho cujo objetivo geral foi compreender como a Aritmética e a Álgebra foram abordadas nos livros didáticos de 1879 a 2018 do Ensino Fundamental II e propor uma possível abordagem geométrica para seus conteúdos ou problemas algébricos e aritméticos, foi desenvolvido no projeto de pesquisa do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação Científica (Pibic) do Grupo de Pesquisa *História da Matemática e Educação Matemática* da Universidade Federal de Alagoas (Ufal).

Para isso, vimos que o Ensino Fundamental II nem sempre recebeu esse nome, já que o mesmo foi chamado de Ensino Secundário, Ensino Ginasial e anos finais do Ensino de 1º grau. Sendo assim, iniciamos na coleta de obras didáticas referente a esses ensinos. Optamos por utilizar livros didáticos devido a alguns motivos, tais como: são os documentos que mais possibilitam compreender o Ensino de Matemática no país, os pesos e medidas adotados, as ferramentas de aprendizagens utilizadas, entre outros; viabilizam aprender conteúdos que não são mais abordados atualmente; além de entender as organizações, algumas apresentações, metodologias e, principalmente, autores que contribuíram para a formação da disciplina Matemática que conhecemos hoje.

Algumas obras didáticas utilizadas nesse trabalho foram encontradas no Repositório Institucional da Universidade Federal de Santa Catarina (RIUFSC)[1] e em acervos pessoais de professores de Matemática que vieram a disponibilizar para essa pesquisa.

Após apanhar todas as obras possíveis, iniciamos um estudo qualitativo sobre os textos internos de todos os livros didáticos, evidenciando os conteúdos algébricos e aritméticos e como se relacionavam com a Geometria. Por meio dessa pesquisa documental, constatamos que tais livros obedeciam a algumas leis, decretos, portarias, resoluções e programas curriculares. Dessa forma, viu-se necessário compreender o Sistema Educacional Brasileiro ressaltando o Ensino de Matemática. Para isso, estudamos essas leis, decretos, portarias, resoluções, programas curriculares e textos (livros, teses, dissertações, artigos) que abordam esses aspectos. Assim, dentro de todas as obras didáticas separadas para esse estudo, selecionamos continuar a pesquisa apenas com oito obras didáticas. Essa escolha deve-se ao fato de trabalhar apenas com coleções completas, sem utilizar obras diferentes para a mesma organização do Sistema Educacional Brasileiro.

As oito obras didáticas utilizadas foram: ***Arithmetica para meninos*** (LOBO, 1879); ***Arithmetica*** (TRAJANO, 1914); ***Algebra Elementar*** (TRAJANO, 1931); ***Elementos de Matemática*** (STÁVALE, 1943a, 1943b, 1948, 1943c); ***Matemática*** (GALANTE; SANTOS, 1954a, 1958, 1957, 1954b); ***Matemática Scipione – conceitos e histórias*** (DI PIERRO NETTO, 1995a, 1995b, 1995c, 1995d); ***A conquista da Matemática*** **(**JÚNIOR; CASTRUCCI, 2009a, 2009b, 2009c, 2009d); ***Convergências – Matemática*** (CHAVANTE, 2018a, 2018b, 2018c, 2018d).

Por meio da leitura dos textos desses livros didáticos mencionados, fizemos uma lista de conteúdos aritméticos e algébricos contidos em cada livros e, posteriormente, uma pesquisa

[1] Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/

em História da Matemática evidenciando essa lista de conteúdos aritméticos e algébricos. Sendo assim, esse trabalho documental faz uso de uma metodologia exploratória e qualitativa, uma vez que os três capítulos desse trabalho são organizados em: “Caminho histórico da Aritmética, Álgebra e Geometria” que aborda o desenvolvimento dessas áreas ao longo da história, evidenciando os conteúdos algébricos e aritméticos contidos nos livros didáticos utilizados; “O Sistema Educacional Brasileiro e o Ensino de Matemática” que trata todas as resoluções, portarias, leis, decretos e programas curriculares voltados para o Ensino da Matemática, estabelecidos ao longo dos anos; e “Livros didáticos” que traz alguns aspectos dos livros didáticos, bem como alguns conteúdos aritméticos e algébricos relacionados ou não com a Geometria.

2 CAMINHO HISTÓRICO DA ARITMÉTICA, ÁLGEBRA E GEOMETRIA

Nesse capítulo, apresentaremos alguns episódios da Aritmética, Álgebra e Geometria ao longo da História da Matemática, como elas foram estabelecidas e relacionadas entre si através de algumas contribuições de estudiosos matemáticos a partir das grandes civilizações, evidenciando os conteúdos algébricos e aritméticos contidos nos livros didáticos utilizados nesse trabalho.

Segundo Saito (2015, p. 31), História da Matemática é "o estudo das formas de elaboração, transformação e transmissão de conhecimentos sobre as matemáticas, a natureza, as técnicas e as sociedades, em diferentes épocas e culturas". Além disso, não podemos tratar as áreas do conhecimento, antes ao século XVIII como nos referimos hoje, como grandes áreas de pesquisa e estudos. O autor ressalta que estudos recentes em história apontam que alguns conhecimentos matemáticos se encontravam como parte integrante de outros segmentos de conhecimento como Astronomia, Música, Agrimensura, entre outros. Esses pensamentos eram conhecidos como "matemáticas", e podemos encontrá-los na antiga Grécia, no antigo Egito, na Mesopotâmia, além da Idade Média. Historiadores veem esses conhecimentos como fontes que favoreceram a construção de novas ideias matemáticas modernas. A Matemática moderna difere das antigas e medievais pela forma que passou a tratar o objeto ciência a partir do século XVI.

Diderot e d'Alembert (2015, p. 23, p. 89) definem Álgebra como "método de realização do cálculo de toda sorte de quantidades em geral, representadas por signos de abrangência universal." e Geometria como a "ciência das propriedades da extensão, considerada simplesmente como extensa e figurada". Queiroz (2014, p. 101, p. 84, p. 267) define Aritmética como "Ramo da matemática que estuda números inteiros e racionais, juntamente com suas propriedade e operações.", Álgebra como "Ramo da matemática que utiliza letras e símbolos para representar números e valores e estuda operações com grandezas abstratas e cálculo com variáveis." e Geometria como "A ciência que estuda as propriedades, as medidas e s relações dos pontos, linhas, ângulos, superfícies e sólidos.". Assim como hoje há diferenças nas definições, ao longo da história também foram utilizadas outras definições, concepções e utilizações, o que podemos ver a seguir, iniciando com a Mesopotâmia, o Egito e a China.

2.1 Os sumérios, babilônicos, egípcios e chineses

Segundo Roque (2012), a palavra Mesopotâmia vem do grego e quer dizer "entre rios", designa uma extensão geográfica. Dentre os que habitaram a Mesopotâmia estão os sumérios, que se localizavam no sul dessa extensão. Segundo Garbi (2010), a invenção da escrita, em meados do quarto milênio a.E.C[2], deu um grande impulso à Matemática. A classe de funcionários que detinha o conhecimento de grafar[3] foi a primeira a adquirir conhecimentos sobre os números. Segundo o mesmo autor, é difícil afirmar se foram os sumérios ou os egípcios os primeiros a produzir escritos matemáticos, isso porque os documentos matemáticos mais antigos são os tabletes sumérios de aproximadamente 2200 a.E.C. No entanto, como os egípcios usavam papiros para escrever, e esse material era facilmente degradável, eles podem ter produzido documentos ainda mais antigos que se perderam.

Garbi (2010) comenta que o sistema de numeração dos sumérios usava como base o número 60 e não se preocupava com a posição dos números. Através desse sistema, hoje temos a convenção que empregamos para dividir o círculo em 360 graus, a hora em 60 minutos e o minuto em 60 segundos. Segundo Roque (2012), a região dos sumérios foi dominada pelos semitas, fundando então o Primeiro Império Babilônico (2000 a.E.C – 1600 a.E.C). Nesse período, desenvolveram o sistema de numeração sexagesimal que levava em conta a posição dos números.

Sobre os babilônicos, Garbi (2010) diz que foram produzidos textos que evidenciavam o que eles haviam herdado dos sumérios e desenvolvidos posteriormente acerca dos conhecimentos sobre Aritmética e Geometria. Nesses escritos, pode-se observar que esse povo já sabia resolver equações de primeiro e segundo graus pelo método de completar quadrado, além de conhecerem a propriedade geral dos triângulos retângulos que hoje chamamos de Teorema de Pitágoras e calcularem áreas e volumes corretamente etc. Entretanto, nada do que era escrito eram provas ou demonstrações, já que não tinha a preocupação em provar o que se afirmavam.

Segundo Roque (2012), a partir do método de completar quadrado dos babilônicos foram realizadas diversas traduções ao longo da História da Matemática, possibilitando o uso da linguagem utilizada atualmente. A mesma autora comenta que o sistema de numeração dos egípcios era decimal, uma vez que representavam os números de 1 a 9 com barras verticais e, em seguida, os demais números eram múltiplos de 10. Segundo a mesma autora, temos conhecimentos da matemática egípcia através dos papiros produzidos por eles, entre esses papiros temos o de Rhind datado cerca de 1650 a.E.C, rico em problemas de Aritmética e Geometria. Nesse papiro há diferentes grupos de problemas, cada um com um modo de ser

[2] Antes da Era Comum
[3] “Escrever uma palavra; escrever.” (QUEIROZ, 2014, p. 271)

solucionado, utilizando uma estratégia específica, dentre esses problemas temos os de "falsa posição" baseados em método de tentativa e erro.

Segundo Garbi (2010), a China começou a contribuir para o desenvolvimento matemático por volta de 1200 a.E.C. Entre as obras conhecidas temos *O livro das Permutações,* voltado à adivinhação e *Chou-Pei Suan-King*, primeira obra inteiramente dedicada à Matemática, na qual encontra-se diagrama que corresponde a uma demonstração geral do hoje chamado Teorema de Pitágoras.

Zuin e Santos (2019) comenta que em *Suan-King* encontram-se métodos que remetem à regra da falsa posição dos egípcios e à regra de três, além de resoluções para equações lineares e sistemas de equações lineares. Também completam que nos tabletes babilônicos e nos papiros egípcios também são encontrados registros acerca de sistema de equações lineares.

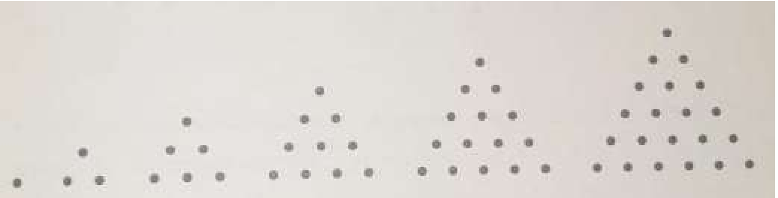
2.2 Os gregos

Entre 640 a.E.C e 564 a.E.C, viveu o primeiro filósofo e matemático grego, conhecido como Tales de Mileto. Tales se dedicou a Astronomia e a Matemática, e defendia a ideia, considerada revolucionária para o pensamento matemático: "suas verdades devem ser justificadas, demonstradas, provadas por meio do raciocínio" (GARBI, 2010, p. 22). Ainda segundo Garbi (2010), fontes históricas da Geometria mencionam que Tales foi responsável pelas demonstrações dos teoremas: dois ângulos opostos pelo vértice são iguais; qualquer diâmetro divide o círculo em duas partes iguais; qualquer ângulo inscrito em um semicírculo é reto; em um triângulo isósceles, os ângulos da base são iguais; dois triângulos que tenham um lado e os ângulos a ele adjacentes respectivamente iguais são iguais; e em triângulos semelhantes, os lados homólogos são proporcionais.

Segundo Roque (2012), Pitágoras, matemático influenciado pelas ideias de Tales, fundou na Grécia uma escola voltada ao estudo da Filosofia, Ciências Naturais e Matemática. Segundo Garbi (2010), essa escola reuniu diversos discípulos interessados nesses temas e acabou transformando em uma sociedade secreta pitagóricos, regida por estranhos rituais místicos. Além disso, acredita-se que os pitagóricos foram os primeiros a produzir demonstrações razoavelmente rigorosas.

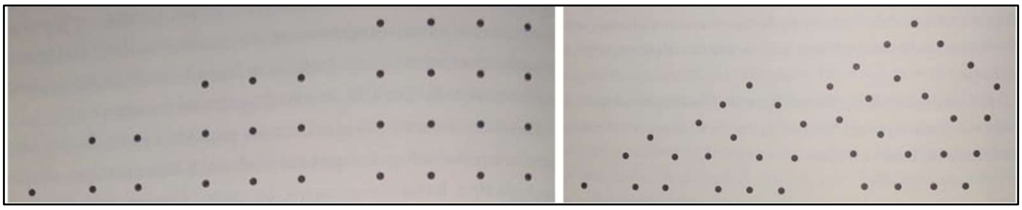
Segundo Roque (2012), a Matemática atribuída a Pitágoras é a Aritmética de pontinhos. Os números figurados dos pitagóricos eram constituídos de pontos representados por pedrinhas organizadas a um determinado padrão. O primeiro exemplo de números figurados são os números triangulares, conforme a Figura 1. Nesses números figurados, as pedrinhas formam figuras triangulares e podem ser associados aos nossos números 1, 3, 5, 6, 10, 15. Além dos números triangulares, tem também os números quadrados e números pentagonais, conforme a Figura 2.

Figura 1: Números triangulares



Fonte: Roque, 2012, p. 105.

Figura 2: Números quadrados e Números pentagonais



Fonte: Roque, 2012, p. 106.

Com os números figurados, pode-se obter algumas conclusões aritméticas, entre elas: a soma de dois números triangulares consecutivos equivale um número quadrado; para obter um número quadrado usando o número quadrado antecessor, basta adicionar a sequência dos números ímpares.

Pitágoras tinha uma teoria dos números de forma concreta, baseada em manipulações, tendo a Aritmética indutiva e sem provas. Roque (2012) diz que não se sabe ao certo se algumas contribuições matemáticas destinadas a Pitágoras é uma criação do próprio, de integrantes da escola pitagórica, ou de neoplatônicos e neopitagóricos da Antiguidade. Nessa época, muitas foram as contribuições matemáticas conhecidas hoje, tais como o "Teorema de Pitágoras" no triângulo retângulo, a descoberta dos incomensuráveis, os números amigáveis e perfeitos.

Saito (2015, p. 115) define neoplatonismo como uma "doutrina que mescla diferentes influências, pitagóricas, aristotélicas e estoicas [...]". O autor completa que essa doutrina influenciou o pensamento cristão e medieval. Saito (2015, p. 116) define neopitagorismo como "uma mescla de ideias platônicas, aristotélicas e estoicas com tendências místicas" e completa que surgiu no Egito, quando estudiosos tentavam reviver os ensinamentos de Pitágoras.

Na Grécia, por volta do século V a.E.C, quatro ciências eram consideradas matemáticas: Aritmética, Geometria, Astronomia e Música. A Geometria e a Aritmética eram consideradas duas ciências distintas porque tinham objetos de investigação diferentes. A Aritmética comumente definida como ciência dos números, era responsável pelo estudo das propriedades dos números e das quatro operações aritméticas. Além de ser orientada para fins comerciais, a Aritmética era muitas vezes distinguida da "logística", isto é, diferenciada da prática de realizar cálculos para resolver problemas do cotidiano. A Geometria era a ciência das figuras planas e na época entendiam-se Estereometria como o estudo de sólidos, o que hoje representa geometria espacial. Apesar do uso de conhecimentos geométricos em problemas diversos em antigas civilizações, foi na Grécia que surgiu a ideia de demonstrações geométricas e que inspirou outras ciências. (SAITO, 2015)

Platão (427 a.E.C. – a.E.C), segundo Garbi (2010), foi um dos mais brilhantes, lúcidos e nobres espíritos de nossa espécie. Fundou a Academia de Platão reunindo grandes geômetras desenvolvendo conhecimentos que posteriormente seriam reunidos por Euclides. Segundo Saito (2015, p. 41), Platão dizia que "a Aritmética não deveria ser ensinada apenas para finalidades banais, tal como era utilizada pelos comerciantes por exemplo, mas para elevar a alma até a essência e a verdade a respeito dos números.". Ele também se referiu à Geometria afirmando que o seu aprendizado era útil para arte militar e que seu aprendizado não deveria se restringir a resolução de problemas envolvendo áreas e volumes.

Saito (2015) comenta que Aristóteles (384 a.E.C. – 322 a.E.C) defendia que a Geometria e Aritmética não podiam demonstrar seus teoremas utilizando os mesmos princípios, ou seja, os teoremas da Geometria não poderiam ser demonstrados pelos princípios da Aritmética e vice-versa. Contudo, o mesmo observou que as demais ciências matemáticas poderiam ser demonstradas por meio da Geometria e Aritmética.

Segundo Saito (2015), entre os séculos III e II a.E.C, muitos estudiosos de matemáticas e filósofos de diferentes partes do mundo migraram para Alexandria, no Egito, devida a posse da bacia do mar Mediterrâneo pelos romanos. Nesse período, as matemáticas tinham papel estratégico ligado à arte militar e à administração econômica e política. Entre os estudiosos, temos Euclides e Arquimedes ([?] – 212 a.E.C).

O primeiro, Euclides, escreveu vários tratados dedicados a Geometria, Óptica, Música, Astronomia e Mecânica. Historiadores da ciência e Matemática indicam que Euclides tenha nascido em 355 a.E.C e lecionado em Alexandria, sua obra mais conhecida são os *Elementos*. Segundo Roque (2012, p. 151, pp. 163-164), os *Elementos* de Euclides são:

> conjunto de treze livros publicados por volta do ano 300 a.E.C., mas não temos registros da obra original, somente versões e traduções tardias. Um dos fragmentos mais antigos de uma dessas versões, encontrado entre diversos

> papiros gregos em Oxyrhynque, cidade às margens do Nilo, data, provavelmente, dos anos 100 da Era Comum.
>
> Livro I: primeiros princípios e geometria plana de figuras retilíneas: construção e propriedades de triângulos, paralelismo, equivalência de áreas e teorema de Pitágoras.
> Livro II: contém a chamada "álgebra geométrica", trata de igualdades de áreas de retângulos e quadrados.
> Livros III e IV: propriedades de círculos e adição de figuras, como inscrever e circunscrever polígonos em círculos.
> Livro V: teoria das proporções de Eudoxo, razões entre grandezas de mesma natureza.
> Livro VI: aplicações do livro V à geometria, semelhança de figuras planas, aplicação de áreas.
> Livros VII a IX: estudo dos números inteiros – proporções numéricas, números primos, maior divisor comum e progressões geométricas.
> Livro X: propriedades e classificação das linhas incomensuráveis.
> Livros XI a XIII: geometria sólida em três dimensões, cálculo de volumes e apresentação dos cinco poliedros regulares.

Roque (2012) diz que apesar de encontrarmos nos *Elementos* de Euclides resultados geométricos atribuídos a Pitágoras, se deve ter cuidado quanto a essas convicções, pois o conhecimento geométrico da escola pitagórica é semelhante ao descrito por Euclides.

Os *Elementos* de Euclides representam "o resultado dos esforços da formalização da matemática para apresentar a geometria consistente e unificada que se aplique a grandezas quaisquer" (ROQUE, 2012, p. 132).

Nos *Elementos* encontramos postulados, noções comuns e diversas definições matemáticas, entre eles temos: ponto é aquilo de que nada é parte; com todo centro e distância, descreve um círculo; as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si; unidade é aquilo segundo o qual cada uma das coisas existentes é dita uma; número é a quantidade composta de unidades.

Já Arquimedes, segundo Saito (2015), é conhecido de forma indireta, através de outros estudiosos que se referiram a ele e ao seu trabalho. Roque (2012) comenta que seus livros possuem estruturas diferentes das obras de Euclides, pois Arquimedes não se preocupava em usar ou defender os axiomas, além da forma em que apresentava seus resultados. Seus principais trabalhos matemáticos se configuram em provas de teoremas a respeito de áreas e volumes de figuras limitadas por curvas, em análises geométricas de problemas estático, hidrostáticos e aplicações da Geometria e Aritmética.

2.3 Os matemáticos do Ocidente Latino e Oriente Médio

Saito (2015) diz que devido à ascensão do poder militar romano, as matemáticas e outras ciências foram desvalorizadas, já que os romanos se interessavam apenas em conquistar terras e com isso apenas a arte militar, o comércio, a arquitetura e a Agrimensura importavam. Agrimensura era a arte de medir terras e mapeá-las. Nesse período, os procedimentos de medir altura de torres, morros, muros, utilizavam semelhança de triângulos. A Aritmética e a Geometria, bem como outras ciências foram desenvolvidas por estudiosos que estavam longe de Roma, dentre esses estudiosos destacamos Nicômaco de Gerasa (60 – 120), Ptolomeu ([?] – 68), Diofanto de Alexandria (c.200 – c.284) e Proclus (412 – 485).

Nicômaco, adepto do neopitagorismo, escreveu sobre Música e Aritmética. Seu tratado de Aritmética não era novo e original, mas foi adotado na Idade Média como material para ensinar Aritmética. Ptolomeu se dedicou a astronomia e junto com Nicômaco organizaram o conhecimento existente até o momento de forma sistemática para passar às gerações futuras os conhecimentos antigos. Diofanto na Aritmética se dedicou a teoria dos números. Proclus enalteceu a Geometria e as teorias de Platão e defendia que a Geometria era mais adequada aos homens porque com ela era possível compreender as coisas divinas. (SAITO, 2015)

Segundo Roque (2012), a contribuição mais conhecida de Diofanto é ter introduzido uma forma de representar o valor numérico desconhecido em um problema. O que hoje conhecemos como incógnita, era chamado de *arithmos* por Diofanto, além de símbolos que representavam diversos tipos de quantidades como:

> ς (Última letra da palavra *arithmos,* a quantidade desconhecida)
> Δ^{Y} (Primeira letra de *dynamis,* o quadrado da quantidade desconhecida)
> K^{Y} (Primeira letra de *kybos,* o cubo)
> $\Delta^{Y}\Delta$ (O quadrado-quadrado) [quarta potência]
> ΔK^{Y} (O quadrado-cubo) [quinta potência]
> $K^{Y}K$ (O cubo-cubo) [sexta potência]
> (ROQUE, 2012, p. 232)

Roque (2012) comenta que alguns historiadores consideram Diofanto o "pai da álgebra", pelo fato de assumir que as representações simbólicas para quantidades desconhecidas é um passo importante para a abstração, e tais representações se tornaram a principal característica de um pensamento algébrico.

Segundo Saito (2015), entre os séculos V e VIII, estudiosos do Ocidente Latino, região da Europa em que era falada a língua românica, recolheram alguns resultados de Aritmética, Astronomia, Geometria e Música, obtidos na Grécia, Egito e Roma, e cultivaram na espiritualidade cristã. A Aritmética e a Geometria foram consideradas como ciências primeiras na ordem divina e natural. Com relação a Aritmética, os estudiosos dividiram-na em "aritmética prática e utilitária" a qual se resumia as quatro operações utilizadas em comércio e a "aritmética teórica" na qual eram estudadas as propriedades dos números em geral. Segundo o mesmo autor, os latinos que se dedicavam a aritmética prática e utilitária desenvolveram diferentes técnicas para realizar as operações aritméticas, como cálculo com auxílio dos dedos, de ábacos, ou de tabelas com resultados das operações previamente preparadas.

Com a queda do Império Romano, muitos resultados do estudo da Geometria ficaram presos no Oriente, desse modo, o acervo que os estudiosos latinos tinham era fragmentado e simplificado. Com o intuito de atender suas necessidades no cotidiano, estudiosos a aproximaram com a Agrimensura. Nesse período, as demonstrações geométricas como Euclides fez receberam pouca atenção. A importância estava apenas nas propriedades e interpretação simbólica das figuras geométricas que foram bastante utilizadas para representar diferentes aspectos da criação divina. (SAITO, 2015)

Diferente do Ocidente Latino, o Oriente Médio e o Império Bizantino herdaram uma rica literatura ligada às ciências e às matemáticas. Entre os séculos VI e VIII, os estudiosos bizantinos produziram compilações de obras anteriores gregas, acrescentando pouco ao conhecimento antigo existente e os estudiosos árabes desenvolveram novas ideias matemáticas e aprimoraram alguns conhecimentos antigos que proporcionaram novas descobertas e novos métodos de investigação. (SAITO, 2015)

Os árabes entendiam que a Aritmética tinha como objeto de investigação os números inteiros e números fracionários, bem como as propriedades de números. A herança grega colaborou na prática da elevação à potência e à extração de raízes quadradas e cúbicas. Além disso, o estudo das proporções e das razões, antes estudadas na Música, passaram a ser estudadas na Aritmética, o que facilitou o estudo de regra de três, mesmo que sem o uso de fórmulas. (SAITO, 2015)

Os árabes começaram a desenvolver um novo ramo de estudo, onde os gregos tinham pouco aprofundamento, a Álgebra. Al-Khwarizmi (c.780 – c.850) deu início a algebrização através da solução de equações geralmente acompanhadas por demonstrações geométricas. (SAITO, 2015)

Roque (2012) diz que a palavra Álgebra (*al-jabr*) tem origem no livro árabe *Tratado sobre o cálculo de al-jabr e al-muqabala*, escrito por Al-Khwarizmi. As palavras *al-jabr* e *al-muqabala* eram utilizadas para designar "restauração" e "balanceamento", ambos processos utilizados na resolução de equações.

Segundo Saito (2015), no que se diz respeito à Geometria, os árabes se preocupavam mais com as questões de ordem prática, separando os problemas em: problemas de construção e problemas de cálculo. Os problemas de construção, mantiveram os métodos gregos e se dedicaram a estudar sem o uso da Aritmética e da Álgebra. Os problemas de cálculo, tais como aritméticos e algébricos tiveram suas resoluções por meio da Geometria de forma sofisticada. Segundo Roque (2012), alguns dos estudiosos que se dedicaram a esse estudo além de Al-Khwarizmi foram Ibrahim ibn Sinan (908 – 946) com o estudo da quadratura da parábola e Abu'l – Wafá com o estudo da construção de polígonos regulares que levam a equações do terceiro grau.

Segundo Roque (2012), ao contrário de Diofanto, Al-Khwarizmi não empregava nenhum simbolismo na Álgebra, ele usava um vocabulário padrão para se referir aos objetos que surgiam nos problemas, conforme o Quadro 1.

Quadro 1: Vocabulário utilizado por Al-Khwarizmi

PALAVRA	SIGNIFICADO NA LÍNGUA CORRENTE	SENTIDO NOS PROBLEMAS
Adad	Número ou quantidade de dinheiro	Quantidade conhecida
Jidh	Raiz	Quantidade desconhecida
Mal	Possessão ou tesouro	Quadrado da quantidade desconhecida

Fonte: Roque, 2012, p. 250.

Roque (2012) comenta que Al-Khwarizmi enunciava as regras de solução combinando métodos algébricos com a Geometria dos Elementos de Euclides. Além disso, a autora apresenta os procedimentos utilizados por Al-Khwarizmi para resolver o problema "um *Mal* e dez *Jidhr* igualam 39 *dinares*" que em nossa atual notação é $x^2 + 10x = 39$, ver Quadro 2.

Quadro 2: Solução do problema $x^2 + 10x = 39$

Solução apresentada por Al-Khwarizmi	Operações correspondentes em linguagem moderna	Operações correspondentes em linguagem moderna considerando a equação genérica do tipo $x^2 + bx - c = 0$
Tome metade da quantidade de *Jidhr*	$\frac{10}{2}$	$\frac{b}{2}$
Multiplique essa quantidade por si mesma	$5^2 = 25$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2$
Some no resultado os *Adad*	$25 + 39 = 64$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$
Extraia a raiz quadrada do resultado	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$

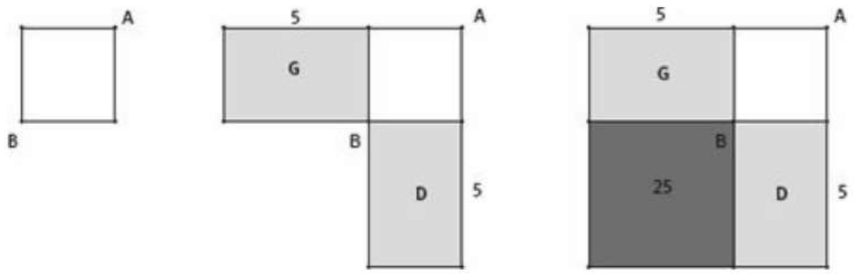
Subtraia desse resultado a metade dos *Jidhr*, encontrando a solução	$8 - 5 = 3$	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$

Fonte: Roque, 2012, p. 252.

Além disso, Roque (2012, p. 253) apresenta a solução geométrica para o problema $x^2 + 10x = 39$, conforme podemos ver na Figura 3 cujos lados são desconhecidos. Assim:

> Deve-se construir um quadrado de diagonal AB que represente o *Mal*, ou o quadrado da raiz procurada, e dois retângulos iguais, G e D, cujos lados são a raiz procurada e 5, metade de 10. A figura obtida é um gnomon de área 39. Completando essa figura com um quadrado de lado 5 (área 25), obtemos um quadrado de área 64 ($= 39 + 25$). O lado desse quadrado mede 8. Daí obtém-se que a raiz procurada é 3 ($= 8 - 5$).” (ROQUE, 2012, p. 253)

Figura 3: Representação geométrica do método de completar quadrado



Fonte: Roque, 2012, p. 253.

Roque (2012) comenta que esse tipo de argumentação geométrica era totalmente novo na Matemática, a técnica de manipulação algébrica nas equações era usada por grupos de estudiosos conhecidos como “seguidores da Álgebra”. Aos poucos *al-jabr* e *al-muqabala* foram se tornando uma ciência.

No século XI, o matemático Omar Khayam, influenciado por Al-Khwarizmi, publicou o livro *Demonstrações de problemas de al-jabr e de al-muqabala*. Nesse livro, encontramos soluções geométricas para diversas equações, entre elas: $x^2 + bx = c$ e $bx + c = x^2$. (ROQUE, 2012)

Saito (2015) comenta sobre a relação dos árabes e os indianos. Segundo ele, os indianos desenvolveram pouco a respeito da Geometria, diferente da Aritmética e da Álgebra que foram bem exploradas por alguns estudiosos, entre eles Aryabhta (476 – 550), Brahmagupta (598 – 670) e Bhaskara (1114 – 1185). Os indianos desenvolveram um sistema numérico em que o valor de um dígito era mostrado em sua posição, bem como conceitos astronômicos e o calendário. Roque (2012) diz que esse sistema de numeração foi transmitido pelos povos islâmicos ao Ocidente e aperfeiçoado até chegar ao que conhecemos hoje como o nosso sistema de numeração decimal posicional.

Segundo Roque (2012), Bhaskara, o autor de *Lilavati* e *Bija Ganita,* os livros mais populares de Aritmética e Álgebra no século XII, apresentava contribuições de Aryabhta e Brahmagupta em suas obras. No livro *Bija Ganita,* Bhaskara, apresentou regras expressas em versos para resolver problemas envolvendo quantidades desconhecidas, ou seja, equações. De modo geral, essas regras de resolução consistem em: completar o quadrado no primeiro membro de uma equação do segundo grau para tornar-se um quadrado perfeito, diminuir o grau da equação extraindo a raiz quadrada dos dois membros e resolver a equação de primeiro grau que havia tornado. Apesar dessas contribuições, Roque (2012) defende que não podemos dizer que Bhaskara criou a fórmula resolutiva de equações do segundo grau, uma vez que na época não havia simbolismo para os coeficientes de uma equação.

Segundo Saito (2015), em 1200, foram criadas as primeiras universidades de Artes, Medicina, Direito e Teologia em que obtinha o grau de bacharel e mestre. Para obter o grau de mestre, o aluno tinha que se dedicar as ciências: Gramática, Lógica, Retórica, Aritmética, Geometria, Astronomia e Música. Nesse contexto, a Aritmética continuou a ser entendida como ciência dos números e a Geometria passou a significar medição da terra.

Segundo Roque (2012), no século XIII as matemáticas se desenvolveram na Itália com as obras do matemático Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, que fez viagens ao norte da África, onde teve contato com os conhecimentos dos árabes, se aperfeiçoando em domínios como a Álgebra, estudos até então desconhecidos dos europeus. Fibonacci tem cinco obras atribuídas a si, entre elas o *Liber abaci* "Livro de ábaco" e o *Practica geometriae* "Geometria prática".

Segundo Saito (2015), Fibonacci introduziu no Ocidente latino os numerais indo-arábicos e técnicas matemáticas árabes com o seu livro de ábaco. Além disso, o livro é dividido em algumas partes. Na primeira, apresentou:

> os números romanos e o cômputo dos dedos. Em seguida, tratou dos números indianos, do sistema de numeração e das frações, apresentando, inclusive, a barra de fração. Nessa parte foram tratadas todas as operações de forma metódica por meio de numerosos exemplos. Além disso, Fibonacci procurou apresentar os resultados, verificando-os pelo método de tirar os noves fora, e finalizou com as regras para fatoração de frações em somas de fatores unitários, introduzindo vários símbolos para representar as frações. Na segunda parte, apresentou problemas práticos, necessários às transações comerciais entre as cidades banhadas pelo mar Mediterrâneo, tais como cálculo de preço de mercadorias, cômputo de taxa de juros, salários, de medidas e de conversão de moedas etc. E, na terceira parte, a mais extensa, ele tratou de vários problemas aritméticos e algébricos, juntamente com as

> diferentes técnicas utilizadas pelos árabes, para solucioná-los. (SAITO, 2015, pp. 151-152)

Roque (2012) comenta que alguns historiadores afirmam que os escritos associados às escolas de ábaco eram, em geral, resumos e adaptações dessa obra de Fibonacci. As escolas de ábaco, segundo Saito (2015), ensinavam a ler, escrever, contar, medir e calcular usando diferentes técnicas para resolver problemas matemáticos.

Saito (2015) comenta que o livro *Practica geometriae* é dividido em oito capítulos tratando basicamente a temas ligados à Agrimensura, contendo axiomas e postulados de Euclides e as medidas de superfície que eram adotados em Pisa, na época. Assim, Saito (2015, pp 152-153) diz que:

> No primeiro capítulo, ele procurou apresentar, com relação às áreas de retângulos, exemplos de multiplicação de segmentos, recordando algumas proposições do livro II de *Elementos* de Euclides. No segundo e no quinto capítulos, tratou de raízes quadradas e cúbicas. Demonstrou ainda duplicações do cubo por Arquitas, Filo de Bizâncio e Platão. No terceiro, apresentou o cálculo de segmentos e de áreas de figuras planas (triângulo, quadrado, retângulo, romboides, trapezoides, alguns outros polígonos e círculo). No quarto, tratou da divisão de áreas, tendo por base outro tratado de Euclides intitulado 'Livro sobre divisões de figuras'. No sétimo, discorreu sobre os cálculos de alturas de objetos, por exemplo, de uma árvore, fornecendo regras utilizando a semelhança de triângulos. No último capítulo, tratou do que ele denominou de 'sutilezas geométricas'. Dentre tais sutilezas, apresentou o cálculo da medida dos lados do pentágono e do decágono a partir do diâmetro dos círculos circunscritos e inscritos.

Segundo Saito (2015), os estudiosos Jordano de Nemore (século XIII) e Biagio (século XIV) se dedicaram ao estudo da Álgebra. Seus trabalhos indicam que a Álgebra entre o século XIII e XIV fazia parte da aritmética prática. Além disso, seus trabalhos influenciaram estudiosos do século XV e XVI.

2.4 A influência dos matemáticos antigos nos estudos a partir do século XV

No século XV, segundo Saito (2015), começou a corrida pela busca de documentos e conhecimentos antigos dos gregos, chineses e indianos, e também dos egípcios e mesopotâmicos, cujo são anteriores aos gregos. Assimilando-os com o intuito de corrigi-los e completá-los. Com a consciência histórica que os egípcios e os mesopotâmicos eram os povos mais antigos surgiu daí o "mito da origem" que influenciou as diversas formas de escrever história nos séculos posteriores.

Segundo Eves (2011), o primeiro registro dos símbolos $+$ e $-$ ocorreu numa publicação de Aritmética em Leipzig no ano de 1489 de autoria de Johann Widman, nascido cerca de 1460 na Boêmia. Mas esses símbolos eram usados apenas para indicar excesso e deficiência, não tinham os significados operacionais de hoje.

Ao longo dos séculos XV e XVI, houveram algumas mudanças nas matemáticas Aritmética, Geometria, Astronomia e Música. Em relação à Geometria e à Aritmética, continuaram a ser consideradas ciências distintas, a primeira como a ciência das grandezas e a segunda como a ciência dos números. (SAITO, 2015)

Com a influência da Álgebra desenvolvida pelos árabes, Simon Stevin (1548 – 1620) escreveu um tratado de Aritmética, onde fundamentava o número associado a grandezas geométricas, tornando essa prática muito comum em vários setores da sociedade que resolviam problemas do cotidiano. Roque (2012) diz que a tradução para o alemão da palavra “coisa” que se referiam a incógnita, deu origem ao termo *coss*, deixando a prática de resolver equações conhecida como arte “cossista”. Ao longo do século XVI, difundiram-se diversos textos “cossistas”, que, além do simbolismo, não traziam grandes inovações em relação às técnicas árabes. A partir dessa época, muitos outros tratados que ensinavam procedimentos geométricos e aritméticos a sociedade para seu uso no cotidiano foram escritos. Segundo Saito (2015), a Geometria que era relacionada a práticas de Agrimensura e aos estudos astronômicos, passou a ser utilizada nos estudos de pintores, da mecânica, da arquitetura e da óptica.

Eves (2011) comenta que Robert Recorde (c. 1510 – c. 1558) foi o mais influente autor inglês de textos escolares no século XVI, seus textos continham diálogos compreensíveis entre o mestre e o estudante. Ele escreveu sobre Astronomia, Medicina, Geometria, Aritmética, Álgebra e provavelmente outros trabalhos que se perderam. No texto de Álgebra, publicado em 1557, Robert Recorde fez o uso pela primeira vez do moderno símbolo de igualdade (=), justificando que “não pode haver duas coisas mais iguais” do que um par de segmentos de reta paralelos. Christoff Rudolff em seu livro de Álgebra intitulado *Die Coss* apresentou, em 1525, o símbolo moderno radical (√), talvez por lembrar a letra r minúscula da palavra raiz.

Segundo Roque (2012), o matemático francês François Viète (1540 – 1603) introduziu uma representação padrão na Álgebra, onde as incógnitas eram representadas pelas vogais e os coeficientes representados pelas consoantes do alfabeto. A incógnita era uma quantidade desconhecida que passaria a ser conhecida a partir da equação e o coeficiente era uma quantidade conhecida genérica. Apesar de Viète ter colaborado, Roque alerta que nem mesmo ele pode ser visto como o inventor da fórmula de resolução de equações.

Eves (2011) comenta que uma das maiores contribuições matemáticas do século XVI foi a solução algébrica de equações do terceiro grau e quarto grau, realizada pelos matemáticos italianos. Além disso, o matemático John Napier (1550 – 1617) presenteou a Matemática com seus significantes trabalhos, entre eles a invenção dos logaritmos e as barras de Napier. As barras de Napier ou ossos de Napier, é um instrumento utilizado para efetuar mecanicamente multiplicações, divisões e extrair raízes quadradas de números. Já a tábua de logaritmos, publicada em 1614, despertou a curiosidade de diversos estudiosos da época, em especial o professor de Geometria Henry Briggs (1561 – 1631) de Londres que juntos desenvolveram os logaritmos briggsianos ou comuns, que que utilizamos nos dias de hoje.

O século XVII, segundo Saito (2015), foi uma época em que ocorreram grandes mudanças sociais, políticas e econômicas na Europa. Foi uma época em que os estudiosos se voltaram para o novo, criticando as velhas políticas e os conhecimentos. A ciência moderna surgiu de um esforço colaborativo de professores universitários, médicos, juristas, teólogos, artesãos, praticantes de matemáticas, pintores, escultores, arquitetos, entre outros que se reuniram e discutiram sobre o conhecimento da natureza e das artes. Estudiosos como Descartes (1596 – 1650), Isaac Newton (1643 - 1727), Pascal (1623 – 1662), Fermat (1601 – 1665), Leibniz (1646 – 1716) impulsionaram o movimento da ciência moderna, contudo alguns aceitavam a ideia aristotélica em que as ciências não podiam demonstrar seus teoremas por meio dos mesmos princípios.

Segundo Eves (2011), o matemático francês Descartes apresentou o plano cartesiano e a geometria analítica, o matemático francês Fermat estabeleceu os fundamentos da teoria dos números moderna, Newton e Leibniz contribuíram memoravelmente com a criação do cálculo diferencial e o francês Pascal contribuiu com estudos das secções cônicas, além do seu famoso triângulo aritmético, conforme podemos ver na Figura 4.

Figura 4 – Triângulo aritmético de Pascal

1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	...
1	3	6	10	15	21	...
1	4	10	20	35	56	...
1	5	15	35	70	126	...
1	6	21	56	126	252	...
.	.	.	.	.	.	...

Fonte: Eves, 2011, p. 364

Segundo Roque (2012), Descartes, além da introdução de um sistema de coordenadas para representar equações indeterminadas, substituiu as vogais usadas por Vietè para representar as incógnitas, pelas últimas letras do alfabeto x, y, z, w, em seus estudos geométricos. A autora completa que na mesma época, Fermat não conhecia a Geometria de

Descartes, mas em sua obra também estabelecia uma correspondência entre lugares geométricos e equações indeterminadas, ou seja, mostrava com notações usadas por Vietè, que uma equação do primeiro grau é satisfeita por dois pontos em uma reta. Além disso, Fermat estudou equações do segundo grau utilizando técnicas algébricas desenvolvidas por ele para definir cônicas e estudar suas interseções aplicando-as em resolução de problemas, mostrando que o lugar geométrico dos pontos que satisfazem a equação é um círculo ou uma cônica. Desse modo, a nova Geometria constituía-se com introdução de novas curvas e de seu uso tanto no estudo de problemas determinados mais gerais quanto na resolução de equações de grau mais elevado. Segundo a mesma autora:

> A segunda metade do século XVII sentiu os efeitos dessa mudança e o trabalho com curvas, incluindo a busca de tangentes e áreas, incentivou o desenvolvimento dos métodos infinitesimais. Uma discussão relativa ao modo de justificar a matemática acompanhou essas transformações técnicas. Para que a matemática pudesse se libertar dos padrões gregos, associados ao cânone euclidiano, pensadores do século XVII, incluindo Leibniz, defendiam suas práticas como uma arte da invenção, para qual não importavam tanto os critérios de demonstração e sim o que as ferramentas permitiam obter em termos de novidade. (ROQUE, 2012, p. 345)

Eves (2011) diz que os *Elementos* de Euclides, a Geometria de Descartes, trabalhos de Vietè e entre outros ajudaram o britânico Newton a gostar do mundo matemático. No período de 1673 a 1683, ele se concentrou na Álgebra e na teoria das equações. Newton se dedicou a várias outras ciências, tais como química, alquimia, teologia, mecânica e física deixando várias contribuições. Além da criação do teorema do binômio generalizado, Newton descobriu por volta de 1669 o método dos fluxos, o que hoje chamamos de cálculo diferencial. O autor ainda comenta que todas as importantes publicações de Newton só apareceram anos depois dele descobrir seus conteúdos e quase sempre por pressões de amigos, como o método dos fluxos que foi escrito em 1671, mas publicado apenas em 1736, quando Newton já havia falecido.

Eves (2011) chama o alemão Leibniz de “o grande gênio universal do século XVII e rival de Newton na invenção do cálculo”. Essa última denominação vem da polêmica com Newton, fomentada por outros, a respeito da criação do cálculo diferencial. Leibniz inventou o seu cálculo entre 1673 e 1676. Em 1675 usou pela primeira vez o símbolo de integral $\int$, derivado da primeira letra da palavra latina *summa* (soma). Leibniz deduziu muitas das regras e fórmulas de diferenciação que conhecemos hoje, em especial a fórmula da derivada enésima do produto de duas funções conhecida em geral por regra de Leibniz. Apesar da descoberta de Newton ser anterior a de Leibniz, Leibniz foi o primeiro a publicar seus resultados. Seu primeiro artigo sobre o cálculo diferencial foi em 1684.

Roque (2012, pp. 364-365) comenta que as pesquisas de Leibniz e Newton seguiam direções diferentes, onde para Leibniz:

> os problemas de fundamento do cálculo eram preocupações que não deviam interferir no desenvolvimento dos algoritmos diferenciais. Ao passo que o segundo se esforçou para expressar sua teoria em uma linguagem rigorosa, no caso, a da geometria clássica. Leibniz promoveu sua teoria e o uso dos infinitesimais como uma maneira de descobrir novas verdades. Já Newton, para fazer com que sua teoria fosse aceita, se preocupou em garantir uma continuidade histórica entre seus métodos e os dos antigos. Essa diferença se reflete no estilo e na regularidade das publicações de ambos. Uma singularidade de Leibniz reside justamente no fato de publicar sem grandes receios de cometer equívocos, podendo rever suas posições em outros artigos. Por exemplo, em relação às justificativas para os métodos infinitesimais, algumas das quais já descrevemos, Leibniz possuía diferentes versões, muitas contraditórias entre si, não se importando tanto em manter uma coerência. Newton, ao contrário, talvez ciente da fragilidade dos novos procedimentos infinitesimais, trabalhava bem seus argumentos antes de torná-los públicos e considerava o padrão da geometria grega mais adequado para transmitir suas ideias.

Segundo Eves (2011), essa polêmica envolvendo os dois matemáticos fez os britânicos negligenciar por muito tempo os progressos da Matemática no continente, o que prejudicou sua própria Matemática.

Eves (2011) menciona o matemático francês Marin Mersenne (1588 – 1648) como um dos contribuintes a teoria dos números no século XVII, conhecido hoje devido aos chamados os números “primos de Mersenne”, cujo são os números primos da forma $2^p - 1$.

Segundo Saito (2015), o século XVIII foi o século da Matemática, visto que novos e engenhosos desdobramentos do conhecimento matemático surgiram do século anterior. Nesse período, a Matemática começou a se especializar, ganhando corpo e se constituindo como área autônoma de conhecimento. Eves (2011) diz que muitos absurdos e contradições ocorreram na Matemática nesse período, desse modo, estudiosos sentiram necessidade de examinar as bases da análise para obter uma fundamentação lógica rigorosa. Esse trabalho foi difícil, ocupando, em suas várias ramificações matemáticas, a maior parte dos 100 anos seguintes. Os fundamentos de todos os ramos da Matemática, bem como o refinamento de muitos conceitos importantes foram realizados. A ideia de função e noções como limite, continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade foram cuidadosa e claramente definidas. Essa tarefa de refinar conceitos básicos da Matemática acarretou a generalizações complexas, e com isso, conceitos como os de espaço, dimensão, convergência e integrabilidade, entre outros, se tornaram muito abstratos.

As principais contribuições à Matemática no século XVIII, segundo Eves (2011), foram dadas por membros da família Bernoulli. Os irmãos Jakob Bernoulli (1654 – 1705) e Johann

Bernoulli (1667 – 1748) mantiveram contato com Leibniz e aplicaram o cálculo diferencial à uma gama ampla de problemas. Entre suas contribuições, tem o uso das coordenadas polares, o teorema de Bernoulli da estatística e da teoria das probabilidades, a equação de Bernoulli utilizada hoje em um curso de equações diferenciais, os números de Bernoulli e os polinômios de Bernoulli de interesse da teoria dos números. Johann Bernoulli teve três filhos: Nicolaus (1695 – 1726), Daniel (1700 – 1782) e Johann II (1710 – 1790). Nicolaus escreveu sobre curvas, equações diferenciais e probabilidade, Daniel se dedicou a probabilidade, Astronomia, Física e Hidrodinâmica e Johann II estudou direito, mas se tornou professor de Matemática.

Eves (2011) comenta sobre outros matemáticos que também contribuíram no século XVIII além da família Bernoulli, como o inglês Brook Taylor (1685 – 1731) com a série de Taylor e a teoria da perspectiva aplicada na fotogrametria, ciência que utiliza o recurso das fotografias tiradas de aviões nas Agrimensuras e o escocês Colin Maclaurin (1698 – 1746) que mostrou o grande alcance da aplicação da Geometria clássica a problemas físicos. Os trabalhos de Taylor e Maclaurim viriam a integrar futuramente o cálculo diferencial. O matemático francês Michel Rolle (1652 – 1719) escreveu sobre Geometria e Álgebra, contribuiu com o cálculo por meio do teorema: “entre duas raízes reais sucessivas de $f(x) = 0$ sempre há pelo menos uma raiz de $f(x) = 0$”. Com esse teorema, os atuais textos de cálculo diferencial deduzem comumente o importantíssimo “teorema do valor médio”. Leonhard Euler (1707 – 1783), durante sua vida, foi aluno de Johann Bernoulli e chegou a publicar 530 trabalhos entre livros e artigos e, após sua morte, uma série de manuscritos enriqueceram as publicações da Academia de São Petersburgo, o qual foi membro por mais 47 anos. As contribuições de Euler na Matemática são muitas, entre elas temos as notações: $f(x)$ para funções; e para a base dos logaritmos naturais; a, b, c para os lados de um triângulo ABC; s para o semiperímetro do triângulo ABC; r para o inraio do triângulo ABC; R para o circunraio do triângulo ABC; $\sum$ para somatórios; i para a unidade imaginária $\sqrt{-1}$. Euler também contribuiu na geometria plana com a reta de Euler, na teoria das equações com o método de Euler de resolução das quárticas; e nos cursos de teoria dos números com o teorema de Euler.

> Euler foi um escritor magistral, caracterizando-se seus livros pela grande clareza, riqueza de detalhes e abrangência. Entre eles, figuram com destaque: *Introductio in analysin infinitorum* de 1748, em dois volumes, que alcançou grande prestígio; *Institutiones calculi differentialis* de 1755, uma obra extremamente rica e o aparentado *Institutiones calculi integralis*, em três volumes (1768-1774). Esses livros, mais outros de mecânica e álgebra, superando trabalhos da mesma natureza, serviram para modelar o estilo, a notação e o alcance de muitos dos livros dos cursos superiores atuais.
> (EVES, 2011, p. 474)

Segundo Roque (2012), a partir da publicação *Introductio in analysin infinitorum* de Euler, a ideia de que a análise matemática é uma ciência geral das variáveis e de suas funções exerceu grande influência sobre a Matemática do século XVIII, já que Euler se restringia à análise pura, sem recorrer a figuras geométricas para explicar as regras do cálculo. Além disso, o objetivo de Euler não era reduzir a Matemática à Álgebra das séries, mas estender o máximo possível a análise usando ferramentas algébricas.

> Ele pretendia unificar a matemática com base na álgebra, que não era encarada somente como uma linguagem para representar objetos matemáticos. Para ele, a álgebra permitia uma definição interna desses objetos. As quantidades podiam ser tidas como abstratas e não demandavam considerações sobre sua natureza específica (como números ou grandezas). O que importava eram suas relações operacionais com outras quantidades similares, dadas por funções. (ROQUE, 2012, p. 375)

Segundo Eves (2011), foi no século XVIII que veio a ser provado que o número π é irracional. O primeiro a provar rigorosamente isso foi Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777). Também no mesmo século, segundo Zuin e Sant'Ana (2017), deu-se início a elaboração de um novo sistema científico de pesos e medidas na França, fundamentado no metro, do grego "metron", que significa "medir". Os submúltiplos desse sistema foram determinados a partir dos prefixos latinos: déci, centi, milli, e os múltiplos foram determinados a partir dos prefixos gregos: deca, hecto, kilo.

Zuin e Sant'Ana (2017) diz que em 20 de maio de 1875, o tratado internacional conhecido como Convention du Mètre (Convenção do Metro) foi assinado por 17 países, unificando o uso do sistema científico de pesos e medidas.

Saito (2015) comenta que no século XIX, os conhecimentos desenvolvidos em XVI adiante que estavam fragmentados passaram a ser incorporados num único corpo de conhecimentos. As ciências passaram novamente por uma organização, dessa vez baseada na filosofia de Auguste Comte (1798 – 1857). Desse modo as ciências matemáticas, por estarem na base das demais ciências, foram classificadas em matemática concreta (Geometria geral e mecânica racional) e matemática abstrata (cálculo) onde definia o cálculo como algo puramente instrumental. Segundo Eves (2011), nesse período a Matemática começou a se libertar dos laços que a ligavam à Mecânica e à Astronomia.

Eves (2011) se refere ao matemático Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) como o príncipe dos matemáticos. Além do método utilizado para somar os naturais de 1 a 100 cujo recebe seu nome como homenagem, Gauss contribuiu significativamente a diversas áreas com seus trabalhos, entre eles o teorema fundamental da Álgebra cujo diz que uma equação polinomial, com coeficientes complexos e de grau $n > 0$, tem pelo menos uma raiz complexa, e o trabalho *Disquisitiones arithmeticae* que é de importância fundamental na moderna teoria dos números. Além disso, Gauss foi um dos primeiros a associar os números complexos com pontos reais dos planos, esse trabalho fez com que outros matemáticos se sentissem mais à vontade trabalhar com os números imaginários, já que agora podiam visualizar esses números. Segundo Roque (2012), para Gauss, o processo de generalização da Álgebra, que abrange a extensão numérica, é um dos principais instrumentos da Matemática. Além disso, defendia que a Aritmética era superior a Geometria, pois foi possível estender o estudo dos números passo a passo: dos inteiros a frações, dos racionais aos irracionais, dos reais aos complexos. Gauss dizia que "a matemática é a rainha das ciências, e a teoria dos números é a rainha da matemática." (EVES, 2011, p. 521).

Roque (2012) e Eves (2011) comentam os avanços da Geometria no século XIX, tais avanços possibilitaram o surgimento de novas geometrias, como a analítica, a diferencial, a não euclidiana, a projetiva. E também o surgimento de uma nova Álgebra com estruturas algébricas que não obedeciam aos padrões aritméticos.

Segundo Saito (2015), no final do século XIX, David Hilbert (1862-1943) reformulou o conjunto de definições e axiomas de Euclides e publicou na obra *Fundamentos da Geometria* um novo conjunto de axiomas para a Geometria, muito maior do que o sistema original de *Elementos* de Euclides.

Nesse capítulo, apresentamos o caminho percorrido pela Aritmética, Álgebra e Geometria ao longo da História da Matemática, desde as grandes civilizações a.E.C até o século XIX. Por meio desse texto, pode-se compreender como essas áreas foram estabelecidas e relacionadas entre si, além de conhecer algumas contribuições de estudiosos matemáticos.

Ressaltamos que dentre as contribuições mencionadas aqui, muitas estão relacionadas aos conteúdos inseridos nos livros didáticos que serão analisados ao longo do trabalho. No próximo capítulo, iremos abordar a evolução do Sistema Educacional Brasileiro e o Ensino de Matemática do período Brasil Império ao período Nova República, apresentando algumas leis estabelecidas, programas de ensino e parâmetros curriculares adotados.

3 O SISTEMA EDUCACIONAL BRASILEIRO E O ENSINO DE MATEMÁTICA

Nesse capítulo, trataremos o Ensino de Matemática no Brasil por meio das leis, decretos, portarias, resoluções e programas curriculares que organizaram o Sistema Educacional Brasileiro ao longo dos anos.

Iniciaremos com alguns aspectos sobre o Ensino de Matemática no período Brasil Império. Em seguida, abordaremos as principais reformulações ocorridas na disciplina e no seu ensino provenientes da instalação da Era Vargas. Também serão destacadas as mudanças dos programas curriculares de Matemática ocorridas nos períodos República Populista e Ditadura Militar. Por fim, trataremos o Ensino de Matemática do período Nova República, cujo vivemos atualmente.

3.1 Brasil Império (1822 – 1889)

O Brasil colônia é o período que compreende entre os anos 1500 e 1822. Em 7 de setembro de 1822, o príncipe Dom Pedro proclamou a independência do Brasil, se tornando o Imperador Pedro I. Em 1840, seu filho, Pedro de Alcântara assumiu o governo, se tornando o Imperador Pedro II e iniciando o período denominado Segundo Império, caracterizado pelo progresso econômico e intelectual. (D'AMBROSIO, 2008)

Zotti (2006) afirma que a primeira lei a tratar a educação no Brasil foi o Decreto Imperial de 15 de outubro de 1827, sob o título "Manda crear escolas de primeiras letras em todas as cidades, villas e logares mais populosos do Império" (BRASIL, 1827, p.71 *apud* Zotti, 2006, p. 5). Segundo Zotti (2006), essa lei estabelecia que:

> Os professores ensinarão a ler, escrever, as quatro operações de aritmética, pratica de quebrados, decimaes e proporções, as noções mais geraes de geometria pratica, a grammatica da lingua nacional, os principios de moral christã e de doutrina da religião catholica e apostolica romana, proporcionados à comprehensão dos meninos; preferindo para o ensino da leitura a Constituição do Imperio e Historia do Brazil. (BRASIL, 1827, p. 72 *apud* ZOTTI, 2006, p. 5).

Desse modo surgiram o Ensino Primário e as primeiras obras didáticas nacionais para uso nas escolas de Ensino Primário do Brasil. A definição de livro didático, segundo Batista (1999, p. 534), é "aquele livro ou impresso empregado pela escola, para desenvolvimento de um processo de ensino ou de formação".

Segundo Valente (1999), em 1837, inspirado na organização dos colégios franceses, foi criado o Imperial Collegio de Pedro Segundo (Colégio Pedro II) no Rio de Janeiro com o intuito de servir como modelo de Ensino Secundário no Brasil. Gomes (2013) comenta que esse colégio atribuía o grau de bacharel em letras aos alunos aprovados em todas as disciplinas durante os oitos anos do curso e os alunos concluintes eram dispensados dos exames de ingresso aos cursos superiores.

Valente (1999) comenta que o modelo de Ensino Secundário no Colégio Pedro II tinha como objetivo a preparação dos estudantes para os exames de acesso às academias militares e às poucas escolas superiores existentes no país. Além disso, distribuía as disciplinas matemáticas em: os três primeiros anos destinados à Aritmética, o quarto e quinto anos destinados à Geometria, o sexto ano destinado à Álgebra e o sétimo e oitavo anos destinados à Trigonometria e à Mecânica. Essas áreas eram ensinadas de modo separadas, sem relação uma com a outra, mas como o ensino não era obrigatório, muitos não completaram o ensino da Geometria, Álgebra, Trigonometria e Mecânica.

Em 1841, o Colégio Pedro II alterou a sequência estabelecida das disciplinas matemáticas para Aritmética – Álgebra – Geometria, levando em conta as orientações de Lacroix que defendia: “[...] não há razão para colocar a Geometria entre a Aritmética e a Álgebra, pois não é preciso separar duas partes que, propriamente ditas, formam uma só, a saber: a ciência do cálculo das grandezas (a Aritmética) ou a aritmética universal (a Álgebra)”. (LACROIX, 1803, XXXI *apud* VALENTE, 1999, p. 120)

Zotti (2006) afirma que Carlos Leôncio de Carvalho[4] (1847 – 1912), na condição de ministro do Império, através do Decreto nº 7.247 de 19 de abril de 1879, estabeleceu a obrigatoriedade do ensino para ambos os sexos dos 7 aos 14 anos. Porém, o Ensino de Matemática para as meninas limitava-se na instrução da Aritmética, excluindo-se a Geometria e, em seu lugar, os educadores ensinavam “prendas domésticas” que serviam à economia doméstica.

3.2 República Velha e a Era Vargas (1889 – 1945)

Com o enfraquecimento da monarquia, em 15 de novembro de 1889, Marechal Manuel Deodoro da Fonseca[5] (1827 – 1892) conduziu a Proclamação da República. Esse período conhecido como República Velha, segundo D’Ambrosio (2008, p. 59), foi “uma fase que, do ponto de vista matemático e científico em geral, pouca inovação trouxe ao país”. Contudo, tiveram início as ideias modernizadoras no Ensino de Matemática no Colégio Pedro II, apresentando uma proposta de alteração do curso de Ensino Secundário trazendo mudanças nos

[4] Nasceu em Iguaçu no Rio de Janeiro, formou-se na Faculdade de Direito de São Paulo em 1868 e anos depois iniciou sua carreira como professor nessa faculdade. (FUNAG, on-line)
[5] Nasceu em Alagoas, foi o primeiro presidente da República.

programas da disciplina. Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria foram unificadas em uma única disciplina que ficou intitulada *Mathematica*.

Até o ano de 1920, a educação brasileira se comportava como um instrumento de mobilidade social sendo procurada pelas classes consideradas médias como a principal via de ascensão social, prestígio e integração a então alta sociedade. A oferta de escola era restrita, praticamente, a algumas iniciativas do setor privado. (OEI; MEC, 2002)

A revolução liderada por Getúlio Dornelles Vargas[6] (1882 – 1954) em 1930 foi instalada, popularizando esse período como Era Vargas e propiciando inúmeras alterações, tanto sociais quanto econômicas no país. Foi criado o Ministério da Educação e Saúde em 1930, tendo Francisco Luis da Silva Campos[7] (1891 – 1968) como ministro que proclamou o Decreto nº 19.890 – 18/04/1931 que dispõe sobre a organização do ensino secundário (BRASIL, 1931), e o Decreto nº 21.241 – 04/04/1932 o qual consolida as disposições sobre a organização do ensino secundário (BRASIL, 1932).

Os Decretos de Francisco Campos introduziram nas demais escolas secundárias do país a mudança ocorrida no Colégio Pedro II mencionada acima, estabeleceram o currículo seriado em todo o Ensino Secundário do país e dividiram o Ensino Secundário em cinco séries, mas os que desejavam fazer um curso complementar em áreas juridicas, saúde ou engenharias cursavam mais dois anos. Em relação à disciplina de Matemática, Gomes (2013) comenta que os decretos enfatizavam a necessidade de que o estudante fosse um descobridor e não um receptor passivo de conhecimentos e, por isso, a prática da memorização de definições e regras de modo abusivo veio a acabar.

Nesse momento, os manuais passaram a ser organizados de acordo com a série à qual se destinavam. Segundo Alves (2005, p. 23), esses decretos exigiram do mercado editorial de livros didáticos uma adaptação das obras existentes à essa nova tendência, onde pôde-se verificar:

> [...]o surgimento de obras que inovam ao apresentar os textos matemáticos de forma a estimular o aluno no sentido de descobrir e não de simplesmente receber os conhecimentos, atendendo aos novos objetivos propostos pelo ensino de Matemática.

As primeiras obras que atendiam o Decreto Nº 21.241 de 1932 foram "Curso de Matemática" de Euclides Roxo e "Curso de Matemática" de Cecil Thiré e Mello e Souza. Como

---

[6] Nasceu em Rio Grande do Sul, em 1882. Foi bacharel pela Faculdade de Direito de Porto Alegre, em 1907. Político, responsável pela instalação do período Era Vargas, no Brasil. (FGV, 2001a)

[7] Nasceu em Minas Gerais, formou-se na Faculdade Livre de Direito de Belo Horizonte em 1914. (TRIPOLI, 2005)

nem todas as escolas tinham fácil acesso as novas obras, os professores da Universidade Federal do Paraná Arthur Barthelmess e Lauro Esmanhoto lembram-se de que para ensinar Matemática nesse período “retiravam os conteúdos – uma parte do Compêndio de Aritmética, outra do livro de Álgebra, e o mesmo ocorria com os de Geometria e Trigonometria” (ALVES, 2005, p. 25).

A Constituição de 1934 foi a primeira a estabelecer a necessidade de elaboração de um Plano Nacional de Educação que coordenasse e supervisionasse as atividades de ensino em todos os níveis, implantando-se a gratuidade e obrigatoriedade do ensino primário, tendo o ensino religioso opcional. (BRASIL, 1934)

Entre os anos 1937 e 1945, o Ministério da Educação e Saúde sob o comando de Gustavo Capanema Filho[8] (1900 – 1985), decretava mais umas mudanças na educação brasileira. O decreto nº 1.006 de 30 de dezembro de 1938 criou a Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD) que estabelecia as condições de produção, importação e utilização do livro didático e ditava as obras autorizadas em uma relação para o uso nas escolas pré-primárias, primárias, normais, profissionais e secundárias, em todo o país, sejam elas escolas públicas ou privadas. (BRASIL, 1939)

Segundo Telo (2017), os dois principais objetivos do CNLD eram fiscalizar as obras didáticas a serem usadas nas escolas de todo país eliminando as que tivessem qualquer tipo de informação contra a honra nacional e controlar a parte técnica ou científica dos livros e sua linguagem. Dentre os artigos contidos no CNLD encontra-se os:

> Art. 20. Não poderá ser autorizado o uso do livro didático:
> a) que atente, de qualquer forma, contra a unidade, a independência ou a honra nacional;
> b) que contenha, de modo explícito ou implícito, pregação ideológica ou indicação da violência contra o regime político adotado pela Nação;
> c) que envolva qualquer ofensa ao Chefe da Nação, ou às autoridades constituídas, ao Exército, à Marinha, ou às demais instituições nacionais;
> d) que despreze ou escureça as tradições nacionais, ou tente deslustrar as figuras dos que se bateram ou se sacrificaram pela pátria;
> e) que encerre qualquer afirmação ou sugestão, que induza o pessimismo quanto ao poder e ao destino da raça brasileira;
> f) que inspire o sentimento da superioridade ou inferioridade do homem de uma região do país com relação ao das demais regiões;
> g) que incite ódio contra as raças e as nações estrangeiras;
> h) que desperte ou alimente a oposição e a luta entre as classes sociais;
> i) que procure negar ou destruir o sentimento religioso ou envolva combate a qualquer confissão religiosa;
> j) que atente contra a família, ou pregue ou insinue contra a indissolubilidade dos vínculos conjugais;

[8] Nasceu em Minas Gerais, ingressou na Faculdade de Direito de Minas Gerais, em 1920, foi político e responsável pela reformulação na educação brasileira através da então conhecida Reforma Capanema. (FGV, sd)

> k) que inspire o desamor à virtude, induza o sentimento da inutilidade ou desnecessidade do esforço individual, ou combata as legítimas prerrogativas da personalidade humana.
>
> Art. 21. Será ainda negada autorização de uso ao livro didático:
> a) que esteja escrito em linguagem defeituosa, quer pela incorreção gramatical quer pelo inconveniente ou abusivo emprego de termo ou expressões regionais ou da gíria, quer pela obscuridade do estilo;
> b) que apresente o assunto com erros de natureza científica ou técnica;
> c) que esteja redigido de maneira inadequada, pela violação dos preceitos fundamentais da pedagogia ou pela inobservância das normas didáticas oficialmente adotadas, ou que esteja impresso em desacordo com os preceitos essenciais da higiene da visão;
> d) que não traga por extenso o nome do autor ou dos autores;
> e) que não contenha a declaração do preço de venda, o qual não poderá ser excessivo em face do seu custo.
>
> Art. 22. Não se concederá autorização, para uso no ensino primário, de livros didáticos que não estejam escritos na língua nacional.
>
> Art. 23. Não será autorizado o uso do livro didático que, escrito em língua nacional, não adote a ortografia estabelecida pela Lei.
> (BRASIL, 1938 *apud* TELO, 2017, p. 56)

Nesse contexto, pode-se observar as cláusulas que autores e editoras deveriam seguir para publicar seus livros didáticos.

Gustavo Capanema estabeleceu também o Decreto nº 4.244 de 9 de abril de 1942, que ficou conhecido como Reforma Capanema. Nesse momento, o Ensino Secundário tinha como objetivo formar, em prosseguimento da obra educativa do ensino primário, a personalidade integral dos adolescentes, destacando formação espiritual dos adolescentes, a consciência patriótica e a consciência humanística, preparando intelectualmente a estudos mais elevados do Ensino Superior. O Ensino Secundário foi dividido em Ensino Ginasial e Ensino Colegial. No geral, a educação brasileira estava estruturada em: Ensino Pré-primário (composto por maternal e jardim de infância), Ensino Primário com duração de quatro anos, Ensino Ginasial com duração de quatro anos, Ensino Colegial com duração de três anos e Ensino Superior. (BRASIL, 1942)

Gustavo Capanema também estabeleceu os programas curriculares que cada disciplina deveria abordar. No Quadro 3 podemos ver o programa curricular de Matemática para o Ensino Ginasial.

Quadro 3: Reforma Capanema

Conteúdos de Matemática estabelecidos para o Ensino Ginasial	
1ª série: Geometria intuitiva (noções fundamentais e figuras geométricas) e Aritmética Prática (operações fundamentais, números inteiros, múltiplos e divisores, frações ordinárias e decimais, números complexos).	2ª série: Geometria intuitiva (áreas e volumes) e Aritmética Prática (sistema métrico, potências e raízes, razões e proporções).
3ª série: Álgebra (números relativos, expressões algébricas, operações algébricas, frações algébricas, equações do primeiro grau) e Geometria Dedutiva (introdução à Geometria dedutiva, reta e círculo).	4ª série: Álgebra (equações e desigualdades do primeiro grau, números irracionais, equações do segundo grau) e Geometria Dedutiva (linhas proporcionais, semelhanças, relações métricas o triângulo, circunferências, polígono regulares, áreas planas).

Fonte: Autor, 2020.

Gomes (2013) comenta que vários autores e editoras publicaram coleções de livros didáticos em cinco volumes atendendo aos decretos de Francisco Campos, mas com a Reforma Capanema, reorganizaram essas coleções em quatro volumes para atender a nova estruturação do Ensino Secundário, em especial o Ensino Ginasial.

3.3 República Populista (1945 – 1964)

Com o fim da Era Vargas em 1945, deu-se início o período da República Populista. Segundo Marques (2005), no início da década de 1950, o ministro da educação e saúde Ernesto Simões da Silva Freitas Filho[9], movimentava mais uma reforma no Ensino Ginasial e Ensino Colegial. Em 2 de outubro de 1951, a portaria nº 1045 conhecida como “Portaria de 1951” estabelecia programas mínimos como referências oficiais para o ensino das disciplinas, podendo essas serem acrescidas conforme a vontade da instituição.

Em relação à Matemática, a sua carga horária semanal era de 3 horas no mínimo e era facultado aos estabelecimentos elevar esse número. O programa mínimo de Matemática para o Ensino Ginasial organizava os conteúdos conforme apresentado no Quadro 4.

[9] Nasceu na Bahia, formou-se pela Faculdade Livre de Direito da Bahia, em 1907, político. Sua atuação à frente do ministério da educação e saúde na década de 50 foi bastante condicionada pela tramitação, no Congresso, do projeto de lei sobre Diretrizes e Bases da Educação Nacional, que desde 1946 vinha ocupando grande espaço nas discussões sobre o assunto no país (e continuaria a ocupar até 1961, quando seria finalmente aprovada). (FGV, 2001b)

Quadro 4: Portaria de 1951

Conteúdos de Matemática estabelecidos para o Ensino Ginasial	
1ª série: números inteiros, operações fundamentais, números relativos, divisibilidade, números primos, números fracionários, sistema legal de unidades de medir.	2ª série: potências e raízes, expressões irracionais, cálculo literal, polinômios, binômio linear, equações e inequações do primeiro grau, sistema de equações com duas incógnitas.
3ª série: razões e proporções, aplicações aritméticas, figuras geométricas planas, reta, círculo, linhas proporcionais, semelhança de polígonos, relações trigonométricas no triângulo retângulo, tábuas naturais.	4ª série: trinômio do segundo grau, equações e inequações do segundo grau, relações métricas em polígonos e círculo, cálculo de π, áreas de figuras planas.

Fonte: Autor, 2020.

Segundo Marques (2005), em 1955, a carga horária semanal da disciplina de Matemática no Ensino Ginasial passou a ser quatro horas no mínimo. Dos muitos debates travados, foi aprovada em 1961 a Lei n.º 4.024, que estabelecia as diretrizes e bases da educação nacional, garantindo que o ensino obrigatório seria restrito à escola primária de quatro anos e tanto o setor público como o setor privado teria o direito de ministrar o ensino em todos os níveis.

De 1955 a 1962 aconteceram diversos congressos sobre o Ensino de Matemática. Burigo (1989) diz que Ubiratan D'Ambrosio[10] (1932 –), em um desses congressos, noticiou a existência do Movimento da Matemática Moderna (MMM) no exterior, e que a criação do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM) em São Paulo foi o grande impulso do movimento no Brasil, realizando reuniões e encontros pelo país para discutir pautas acerca do movimento estimulando o surgimento de grupos em outras regiões e produção de materiais didáticos.

O MMM, segundo Gomes (2013), tinha como um de seus principais objetivos, integrar os campos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria no ensino, mediante a inserção de alguns elementos unificadores, tais como a linguagem dos conjuntos, as estruturas algébricas, o estudo das relações e funções.

Segundo Burigo (1989), nos discursos do GEEM, a Matemática Moderna recomendava a substituição do uso de técnicas complicadas pela compreensão das operações e problemas aproveitando os estados mentais do estudante. Osvaldo Sangiorgi (1921 – 2017), professor de Matemática reconhecido como um grande autor de livros didáticos e responsável por alguns

[10] Bacharel e licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP), doutor em Matemática pela Escola de Engenharia de São Carlos (USP) e pós-doutorado pela Brown University nos Estados Unidos. Atua nos seguintes temas: História e Filosofia da Matemática, História e Filosofia das Ciências, Etnomatemática, Educação Matemática, entre outros. (D'AMBROSIO, 2020)

cursos de aperfeiçoamento realizados pelo GEEM, comenta que "A matemática moderna era apresentada mais como uma matemática muito mais simplificada." (SANGIORGI, 1963b, *apud* BURIGO, 1989, p. 128).

Apresentaremos três declarações feitas por Sangiorgi acerca do MMM.

> "O aluno era obrigado a decorar uma técnica para achar o máximo divisor comum. Atualmente, dentro do espírito da matemática moderna, o aluno deve entender o máximo divisor comum como sendo uma operação, tal como é a adição, por exemplo. (...) O aluno está assim aprendendo o conceito da operação. Depois de aprender o que é essa operação, o aluno se apodera conscientemente de técnicas tradicionais, chegando mesmo a criar suas próprias técnicas, conforme a experiência tem demonstrado a inúmeros mestres renovadores." (SANGIORGI, 1965c, *apud* BURIGO, 1989, p. 129)

> "A diferença fundamental entre o velho e o moderno método de ensino da matemática reside no fato de que o aluno atualmente não é mais obrigado a aceitar receitas fixas que o impediam de fazer uso de seu espírito de criatividade, e tem permissão para empregar diversos tipos de raciocínio, tendo assim a possibilidade de contribuir também para o aperfeiçoamento da técnica moderna." (SANGIORGI, 1966b, *apud* BURIGO, 1989, p. 129)

> "Habituou-se o indivíduo a ter uma idéia gostosa da matemática. Entendeu-se qual era a operação que se pretendia. Por exemplo, máximo divisor comum. (...) coisa que ele (o aluno) não entendia, (...) então ele está entendendo." (SANGIORGI, depoimento oral, *apud* BURIGO, 1989, p. 130)

3.4 Ditadura Militar (1964 – 1985)

Durante o período da Ditadura Militar, D'Ambrosio (2008) diz que surgiram associações científicas especializadas, como a Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, a Sociedade Brasileira de Lógica, e a Sociedade Brasileira de Matemática.

No mesmo período, a Lei n.º 5.692 de 1971 (BRASIL, 1971) fundia o Ensino Primário e o Ensino Ginasial denominando-os de Ensino de 1º grau com oito séries, o Ensino Colegial passou a se chamar Ensino de 2º grau com três séries e o ensino obrigatório estendeu-se para oito anos. O Ensino de 1º e 2º grau tinha como objetivo "proporcionar ao educando a formação necessária ao desenvolvimento de suas potencialidades como elemento de auto-realização, qualificação para o trabalho e preparo para o exercício consciente da cidadania." (BRASIL, 1971)

O artigo 4 da lei 5.692 (BRASIL, 1971) diz que os currículos do Ensino de 1º e 2º graus seguiam um núcleo comum, obrigatório em âmbito nacional e, além disso, seguiam uma parte diversificada para atender as necessidades e possibilidades peculiares aos locais e aos planos das escolas. O núcleo comum era estruturado em: Comunicação e Expressão (Língua Portuguesa); Estudos Sociais (Geografia, História, Organização Social e Política Brasileira) e

Ciências (Matemática, Ciências Físicas e Biológicas). Santos (2014) comenta que essa lei disponibilizava uma flexibilidade, uma vez que não ficava estabelecido um programa de ensino padrão, os conteúdos eram selecionados pela equipe de professores de acordo com as especificidades do ambiente escolar.

O Ensino das Ciências tinha como objetivo o desenvolvimento do raciocínio lógico e a utilização do método científico que colaborassem com a sociedade. Além do núcleo comum estabelecido, havia também uma programação dos estudos para cada matéria do núcleo comum. Essa programação considerava algumas experiências e conhecimentos que poderiam orientar os estabelecimentos de ensino na escolha dos conteúdos. A programação de Matemática era: Teoria de conjuntos, Sistema de numeração, Operações, Frações, Sistema de medidas e Geometria. (BRASIL, 1980)

Nesse período já estava em prática o ensino da Matemática moderna. Segundo Silva (2010), Oswaldo Sangiorgi descreve os principais efeitos do novo ensino da Matemática, entre eles, o desaceleramento do ritmo com que vinha sendo ensinada a Matemática nas escolas e o prevalecimento das operações sobre conjuntos.

3.4 Nova República (1985 – atual)

Nesse período, houveram debates realizados por educadores sem a repressão do Regime Militar, permitindo avaliar a educação brasileira e os seus problemas de uma forma mais crítica. (BESSA; BRAGA; QUEIROZ, 2011)

Em relação às avaliações de livros didáticos, em 1985 foi criado o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), substituindo o CNLD.

Em 1996, com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira (BRASIL, 1996), o Ensino Pré-primário passou a ser chamado de Ensino Infantil composto por maternais, jardins de infância e a alfabetização, tendo como a finalidade o desenvolvimento integral da criança até seis anos de idade. O Ensino de 1º grau passou a ser chamado de Ensino Fundamental dividido em Ensino Fundamental I (quatro primeiras séries) e o Ensino Fundamental II (quatro últimas séries), tendo como finalidade a formação básica do cidadão tendo como meios básicos o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo, e o Ensino de 2º grau passou a ser chamado de Ensino Médio durando três anos.

Com a finalidade de elaborar um currículo que atendesse a Educação Básica de modo nacional, foram criados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) em 1998, composto por uma série de objetivos[11] a serem cumpridos no âmbito escolar acerca de diversas áreas. Referente às áreas Aritmética, Álgebra e Geometria, o estudo de Matemática no Ensino Fundamental II deveria conter a aprendizagem referente aos números e suas operações nos campos da Aritmética e da Álgebra, o estudo do espaço e das formas no campo da Geometria e o estudo das grandezas e medidas relacionando os campos da Aritmética, Álgebra, Geometria com outros campos de conhecimento. (BRASIL, 1998)

Se tratando da Álgebra e Aritmética, os PCN (BRASIL, 1998) comentam que o aluno deverá perceber a existência de diversos tipos de números, trabalhando os conjuntos numéricos, bem como seus diferentes significados, além de compreender as operações fundamentais. Através da exploração de diversas situações-problemas, o aluno deverá reconhecer a Álgebra através de padrões aritméticos, além de compreender a relação entre as duas áreas, diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas e conhecendo as fórmulas.

Além da elaboração dos PCN (BRASIL, 1998), o PNLD foi aperfeiçoado na década de 90 e trouxe as análises e a avaliações prévias dos conteúdos pedagógicos de algumas obras. Com o PNLD, o professor passou a avaliar os livros mais adequados às características de sua região, de seus alunos e de sua escola. (MENEZES; SANTOS, 2001)

Em 2006, com o projeto de Lei n° 144/2005 e a Lei nº 11.274, a alfabetização passou a pertencer o Ensino Fundamental. Dessa forma, o Ensino Fundamental I passou a durar cinco anos e o Ensino Fundamental passou a durar nove anos com matrícula obrigatória a partir dos seis anos de idade e a ser obedecida pelos municípios, estados e Distrito Federal. Todas as escolas tinham o prazo de até 2010 para contemplar essa mudança. Com isso, muitos autores e editoras tiveram que adaptar seus livros, ou seja, os livros do Ensino Fundamental II da 5ª série, 6ª série, 7ª série e 8ª série passaram a ser chamados de 6º ano, 7º ano, 8º ano e 9º ano respectivamente. (BRASIL, 2006)

Com a Lei nº 144/2005, o PNLD 2011 adotou novos critérios para a aprovação de obras didáticas. Esses critérios são divididos em: comuns a todas as áreas e específicos para cada componente curricular como podemos ver a seguir.

> Critérios eliminatórios comuns a todas as áreas:
> I. respeito à legislação, às diretrizes e às normas oficiais relativas ao ensino fundamental;
> II. observância de princípios éticos necessários à construção da cidadania e ao convívio social republicano;

[11] Entre as páginas 71 e 90 dos PCN (BRASIL, 1998), encontra-se a lista de conceitos e procedimentos acerca da Aritmética, Álgebra e Geometria a ser trabalhada durante o Ensino Fundamental II.

> III. coerência e adequação da abordagem teórico-metodológica assumida pela coleção, no que diz respeito à proposta didático-pedagógica explicitada e aos objetivos visados;
> IV. correção e atualização de conceitos, informações e procedimentos;
> V. observância das características e finalidades específicas do manual do professor e adequação da coleção à linha pedagógica nele apresentada;
> VI. adequação da estrutura editorial e do projeto gráfico aos objetivos didático-pedagógicos da coleção.
>
> Critérios eliminatórios específicos para o componente curricular Matemática:
> - apresentar erro ou indução a erro em conceitos, argumentação e procedimentos matemáticos, no livro do aluno, no manual do professor e, quando houver, no glossário;
> - deixar de incluir um dos campos da Matemática escolar, a saber, números e operações, álgebra, geometria, grandezas e medidas e tratamento da informação;
> - der atenção apenas ao trabalho mecânico com procedimentos, em detrimento da exploração dos conceitos matemáticos e de sua utilidade para resolver problemas;
> - apresentar os conceitos com erro de encadeamento lógico, tais como: recorrer a conceitos ainda não definidos para introduzir outro conceito, utilizar-se de definições circulares, confundir tese com hipótese em demonstrações matemáticas.
> - deixar de propiciar o desenvolvimento, pelo aluno, de competências cognitivas básicas, como: observação, compreensão, argumentação, organização, análise, síntese, comunicação de ideias matemáticas, memorização; supervalorizar o trabalho individual;
> - apresentar publicidade de produtos ou empresas.
>
> (BRASIL, 2010, pp. 25-26)

Com base nesses critérios, podemos perceber que a aprendizagem em Matemática no Ensino Fundamental II deve contemplar a Aritmética, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e o Tratamento de informação. Além disso, vale destacar que deve estar estritamente colaborando para o desenvolvimento de diversas competências do aluno.

A Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014, regulamenta o Plano Nacional de Educação (PNE), com vigência de dez anos. Dentre as metas contidas no PNE, quatro se referiam a elaboração da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). (BRASIL, 2014)

A partir da homologação da BNCC em 2017, começou o processo de articulação e capacitação dos professores das redes estaduais e municipais para a elaboração e adequação dos currículos escolares. Em 06 de março de 2018, os educadores do país tinham acesso a BNCC (BRASIL, 2018a) correspondente às etapas da Educação Infantil e Ensino Fundamental. (BRASIL, 2018b)

A BNCC (BRASIL, 2018a) é um documento oficial que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. A BNCC (BRASIL, 2018a, p. 8) assegura o desenvolvimento de diversas competências que são definidas como a "[...] mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho"

Em relação à Matemática no Ensino Fundamental, a BNCC (BRASIL, 2018a) diz que por meio das áreas Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade, a Matemática precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real, representações em tabelas, figuras ou esquemas e associem a uma atividade matemática considerando conceitos e propriedades, fazendo induções e conjecturas, desenvolvendo a capacidade de utilizar a Matemática para resolver problemas em diversas situações.

A BNCC (BRASIL, 2018a) propõe cinco unidades temáticas correlacionadas que orientam a formulação de habilidades a serem desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental, são elas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas, Probabilidade e estatística.

A unidade temática Números tem como objetivo desenvolver o pensamento numérico, obtendo o conhecimento de quantificar, julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. Além disso, ter a noção de número, desenvolvendo ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência, ordem e o estudo de campos numéricos. No Ensino Fundamental II:

> [...] a expectativa é a de que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos. Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais. Os alunos devem dominar também o cálculo de porcentagem, porcentagem de porcentagem, juros, descontos e acréscimos, incluindo o uso de tecnologias digitais. No tocante a esse tema, espera-se que saibam reconhecer, comparar e ordenar números reais, com apoio da relação desses números com pontos na reta numérica. Cabe ainda destacar que o desenvolvimento do pensamento numérico não se completa, evidentemente, apenas com objetos de estudos descritos na unidade Números. Esse pensamento é ampliado e aprofundado quando se discutem situações que envolvem conteúdos das demais unidades temáticas: Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística. (BRASIL, 2018a, p. 269)

A unidade temática Álgebra tem como objetivo o desenvolvimento do pensamento algébrico, essencial na utilização de modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas fazendo uso de letras e outros símbolos, enfatizando o desenvolvimento de uma linguagem e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações. As ideias matemáticas fundamentais vinculadas à essa unidade, segundo BNCC

(BRASIL, 2018a), são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. No Ensino Fundamental II:

> [...] os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos.
> (BRASIL, 2018a, p. 270-271)

A unidade temática Geometria tem como objetivo o estudo da posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais, além de desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. A BNCC (BRASIL, 2018a) considera importante o pensamento geométrico para compreender as transformações geométricas, sobretudo as simetrias, as construções, representações e interdependência. No Ensino Fundamental II:

> [...] devem ser enfatizadas também as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/ reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança. Esses conceitos devem ter destaque nessa fase do Ensino Fundamental, de modo que os alunos sejam capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo. Outro ponto a ser destacado é a aproximação da Álgebra com a Geometria, desde o início do estudo do plano cartesiano, por meio da geometria analítica. As atividades envolvendo a ideia de coordenadas, já iniciadas no Ensino Fundamental – Anos Iniciais, podem ser ampliadas para o contexto das representações no plano cartesiano, como a representação de sistemas de equações do 1º grau, articulando, para isso, conhecimentos decorrentes da ampliação dos conjuntos numéricos e de suas representações na reta numérica.
> Assim, a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam "fazer a quadratura de uma figura"). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação do 2º grau. (BRASIL, 2018a, p. 272-273)

Nas unidades temáticas Número, Álgebra, Geometria e as outras, a BNCC (BRASIL, 2018a, p. 267) apresenta as competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental, são elas:

> 1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
> 2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
> 3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
> 4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
> 5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
> 6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
> 7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
> 8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Com base nessas passagens referentes as unidades temáticas Números, Álgebra e Geometria e nas competências gerais da Matemática, podemos observar que a BNCC (BRASIL, 2018a) enfatiza a relação das áreas Aritmética, Álgebra e Geometria, bem como na necessidade de o aluno desenvolver a capacidade de argumentar matematicamente, usando o raciocínio lógico, o espírito de investigação e outras áreas do conhecimento. Além dessas competências, a BNCC também estabelece diversas habilidades[12] matemáticas que os alunos devem adquirir durante a Educação Básica.

Com a BNCC (BRASIL, 2018a), o PNLD 2020 adotou critérios para a aprovação das obras didáticas. O Guia do Livro Didático PNLD 2020 comenta que as obras de Matemática aprovadas para o Ensino Fundamental II, em geral:

> [...] utilizam imagens, gráficos, tabelas, infográficos, fluxogramas e charges, com boa qualidade e adequados à faixa etária e para o fim a que se destinam. Esses recursos estão bem distribuídos nas páginas de cada LE e buscam representar a pluralidade e a diversidade étnica da população brasileira, bem como retratar a pluralidade social e cultural do país, configurando-se, dessa forma, em projeto gráfico-editorial adequado. O trabalho com situações-problema é, em maior ou menor grau, valorizado nas obras, tanto como estratégia motivadora aos(às) estudantes – com incentivo ao trabalho em grupo, à expressão e ao registro de ideias e procedimentos –, quanto para o desenvolvimento de estratégias de construção de conceitos matemáticos. No entanto, há um predomínio de situações-problema já elaborados. Ainda são incipientes, nas obras, tarefas de investigação e de modelagem, que solicitam aos(às) estudantes a elaboração e a criação de problemas. Em algumas obras, há incentivo ao uso de tecnologias, com predomínio do uso de calculadora e softwares educacionais, com especial atenção aos de geometria dinâmica. Entretanto, o uso de tecnologias de informação e comunicação poderia ser mais valorizado e incentivado nas obras.
> De modo geral, observa-se nas obras que os conteúdos estão articulados com os objetos de conhecimento e as unidades temáticas – números, álgebra, geometria, grandezas e medidas e probabilidade e estatística – presentes na BNCC, buscando-se enfatizar as habilidades específicas com as quais se relacionam. Os objetos de conhecimento e as atividades propostas estão contextualizadas, tendo em vista o interesse relativo à faixa etária de ensino. (BRASIL, 2019, p. 22)

Com base nesse fragmento, pode-se notar que apesar das obras aprovadas no Guia do Livro Didático 2020 utilizarem recursos tecnológicos no Ensino de Matemática, o PNLD 2020 comenta sobre a necessidade de utilizar ainda mais esses recursos tecnológicos. Assim, numa rápida comparação, constatamos que aquele Ensino de Matemática do Brasil Império que separava as áreas de estudos Aritmética, Geometria e Álgebra, sem um programa curricular estabelecido, onde os autores escreviam seus livros didáticos conforme desejavam, com muitas regras e procedimentos de memorização, foi reformulado ao longo dos anos, se tornando nesse Ensino de Matemática rico em imagens, gráficos, tabelas, além de estar adequado à faixa etária, que estabelece uma relação entre os conteúdos algébricos e aritméticos com a Geometria. Ademais contém problemas contextualizados que possibilitam o desenvolvimento de diversas habilidades.

[12] Entre as páginas 300 e 319 da BNCC (BRASIL, 2018a), encontram-se as habilidades de Matemática referentes as unidades temáticas Número, Álgebra e Geometria no Ensino Fundamental II.

Nesse capítulo, apresentamos as principais mudanças ocorridas no Sistema Educacional Brasileiro que impulsionaram o Ensino de Matemática que vivenciamos atualmente. Por meio desse texto, pode-se compreender que o ensino das áreas Aritmética, Álgebra e Geometria não eram relacionadas entre si. Além disso, cada ano era destinado a somente uma dessas área, o que foram mudados com o passar dos anos.

A reforma de Francisco Campos foi a responsável por unificar tais áreas e popularizar a disciplina que conhecemos hoje como Matemática. Destacamos também as reuniões e debates que impulsionaram mudanças significativas no ensino dessa disciplina, bem como a fiscalização das comissões e programas nacionais dos livros didáticos.

Após essas considerações sobre o Sistema Educacional Brasileiro e o Ensino de Matemática, iremos tratar no próximo capítulo alguns aspectos e abordagens dos conteúdos de Álgebra e Aritmética em livros didáticos de 1879 a 2018 do Ensino Fundamental II, além dos problemas algébricos e aritméticos resolvidos com o auxílio da Geometria.

4 LIVROS DIDÁTICOS

Visto que o Ensino Fundamental II nem sempre recebeu esse nome entre os anos de 1879 e 2018, trataremos nesse capítulo a descrição da abordagem de alguns conteúdos aritméticos e algébricos em livros didáticos do Ensino Secundário, Ensino Ginasial, anos finais do Ensino do 1º grau e no Ensino Fundamental II, bem como a abordagem de alguns problemas de Aritmética e Álgebra contidos nos livros que podem ser resolvidos com o auxílio da Geometria.

Dessa forma, utilizamos as obras didáticas: ***Arithmetica para meninos*** (LOBO, 1879); ***Arithmetica*** (TRAJANO, 1914); ***Algebra Elementar*** (TRAJANO, 1931); ***Elementos de Matemática*** (STÁVALE, 1943a, 1943b, 1948, 1943c); ***Matemática*** (GALANTE; SANTOS, 1954a, 1958, 1957, 1954b); ***Matemática Scipione – conceitos e histórias*** (DI PIERRO NETTO, 1995a, 1995b, 1995c, 1995d); ***A conquista da Matemática*** **(**JÚNIOR; CASTRUCCI, 2009a, 2009b, 2009c, 2009d); e ***Convergências – Matemática*** (CHAVANTE, 2018a, 2018b, 2018c, 2018d).

Como critério de escolha para essas oito obras didáticas, utilizamos as leis, decretos, portarias, resoluções, programas curriculares, PCN, BNCC, CNLD e PNLD descritos no capítulo anterior, de modo que tivesse uma obra ou coleção completa para cada momento do Sistema Educacional Brasileiro possível. Vale destacar que algumas dessas obras didáticas mencionadas foram encontradas no Repositório Institucional da Universidade Federal de Santa Catarina (RIUFSC)[13]. As demais, foram adquiridas em acervos pessoais de professores de Matemática que vieram a disponibilizar para essa pesquisa.

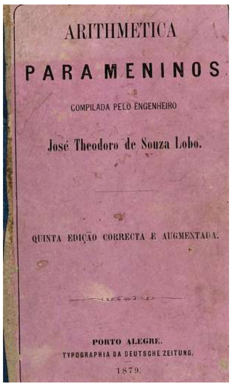
Esse capítulo está dividido em seções, onde cada seção trata uma obra didática em ordem cronológica, apresentando a lista de conteúdos presentes e descrevendo aspectos sobre alguns conteúdos aritméticos e algébricos e como foram relacionados com a Geometria. Além disso, em alguns desses conteúdos, separamos ao menos um problema proposto pelo próprio livro e resolvemos de forma geométrica, propondo então possíveis abordagens usando a Geometria e a sua relação com a Aritmética e a Álgebra.

[13] Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/

4.1 Arithmetica para meninos (LOBO, 1879)

Utilizamos a 5ª edição do livro *Arithmetica para meninos* do engenheiro José Theodoro de Souza Lobo[14] (1846 – 1913) datada em 1879. Esse livro (ver Figura 20) foi escrito antes do Decreto nº 7.247 de 19 de abril de 1879, e como vimos no capítulo anterior, provavelmente utilizado durante os três primeiros anos do Ensino Secundário destinados a Aritmética.

Figura 20: Livro *Arithmetica para meninos*



Fonte: Lobo, 1879.

Lobo (1879, p. 10) define a Aritmética como a "sciencia que trata das propriedades e combinações as mais elementares do número". O livro tem como ponto de partida alguns princípios elementares e regras básicas da Aritmética (definições e conceitos) como grandezas contínuas e descontínuas, unidades de medidas, ordem e classe de números.

Em seguida, o ensino da Aritmética resume-se às definições e exemplos das operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, raiz quadrada e raiz cúbica, sistema decimal, noções sobre restos e divisibilidade dos números, prova dos nove das quatro operações fundamentais, número primos, frações ordinárias e decimais, metrologia[15], números complexos[16], sistema métrico francês[17], razões e proporções.

No capítulo denominado metrologia e números complexos, Lobo (1879) apresenta o sistema métrico adotado no Brasil, na época (ver Figura 21). As medidas de comprimento eram:

[14] Porto-alegrense, engenheiro geógrafo, foi professor de Matemática, Português, Francês e Latim no Colégio Gomes, professor e diretor do Colégio Souza Lobo (seu próprio colégio), professor de Matemática e diretor na Escola Normal, diretor geral da Instrução Pública na Província e autor de livros didáticos voltados para o Ensino de Matemática. (HILZENDEGER, 2009).

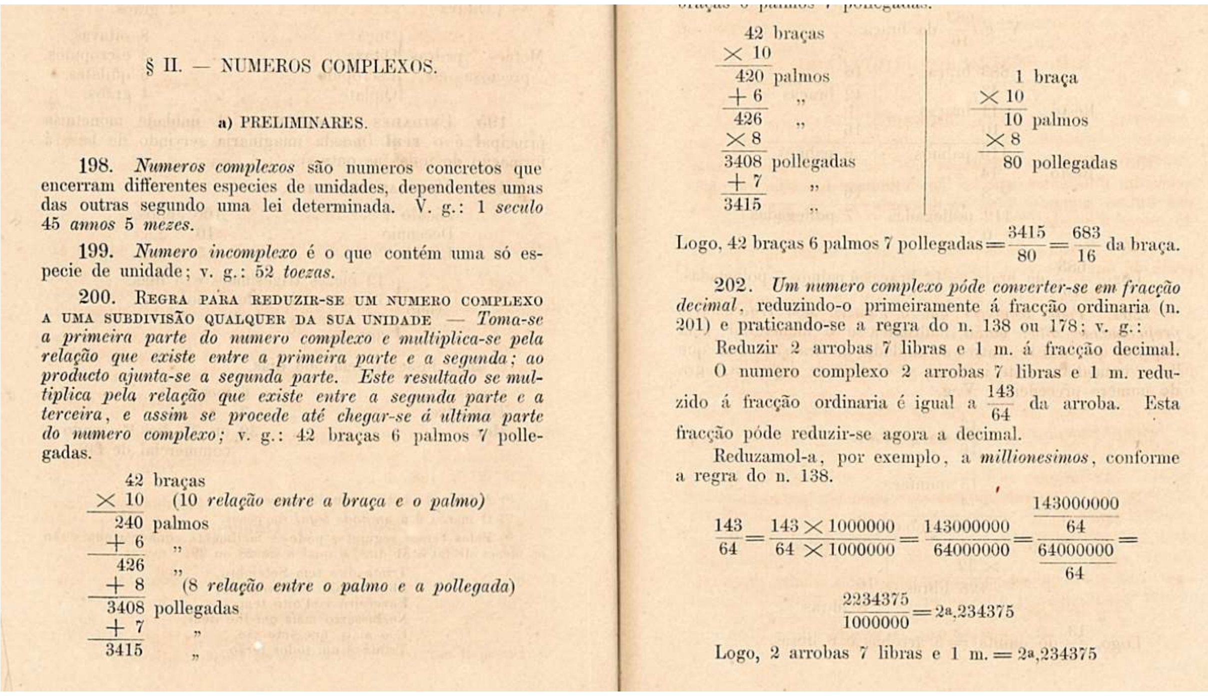
[15] Metrologia é o estudo de medidas.

[16] O conteúdo de números complexos, nessa obra, se refere ao estudo de conversão das unidades de medidas em outras, diferentemente dos números complexos que tratamos atualmente.

[17] "O sistema métrico francês é a reunião dos pesos e medidas que obedecem sempre a lei decimal e tem por base o metro." (LOBO, 1879, p. 70)

braça, vara, palmo, polegada, linha, côvado, yarda, toesa e pé, tendo como unidade principal a vara. As medidas de superfície eram: légua quadrada, braça quadrada, vara quadrada, palmo quadrado e polegada quadrada, tendo como unidade principal o palmo quadrado. As medidas de volume eram: palmo cúbico (unidade principal), vara cúbica e polegada cúbica. As medidas de capacidade eram: tonel, pipa, moio, canada e alqueire (unidades principais). As medidas de peso eram: quintal, arroba (unidade principal), libra, marco, onça e oitava.

Figura 21: Números complexos no livro *Arithmetica para meninos*



§ II. — NUMEROS COMPLEXOS.

a) PRELIMINARES.

198. *Numeros complexos* são numeros concretos que encerram differentes especies de unidades, dependentes umas das outras segundo uma lei determinada. V. g.: 1 *seculo* 45 *annos* 5 *mezes*.

199. *Numero incomplexo* é o que contém uma só especie de unidade; v. g.: 52 *toezas*.

200. Regra para reduzir-se um numero complexo a uma subdivisão qualquer da sua unidade — *Toma-se a primeira parte do numero complexo e multiplica-se pela relação que existe entre a primeira parte e a segunda; ao producto ajunta-se a segunda parte. Este resultado se multiplica pela relação que existe entre a segunda parte e a terceira, e assim se procede até chegar-se á ultima parte do numero complexo;* v. g.: 42 braças 6 palmos 7 pollegadas.

42 braças
× 10 (10 *relação entre a braça e o palmo*)
240 palmos
+ 6 „
426 „
+ 8 (8 *relação entre o palmo e a pollegada*)
3408 pollegadas
+ 7 „
3415 „

42 braças
× 10
420 palmos
+ 6 „
426 „
× 8
3408 pollegadas
+ 7 „
3415 „

1 braça
× 10
10 palmos
× 8
80 pollegadas

Logo, 42 braças 6 palmos 7 pollegadas $= \frac{3415}{80} = \frac{683}{16}$ da braça.

202. *Um numero complexo póde converter-se em fracção decimal*, reduzindo-o primeiramente á fracção ordinaria (n. 201) e praticando-se a regra do n. 138 ou 178; v. g.:

Reduzir 2 arrobas 7 libras e 1 m. á fracção decimal.

O numero complexo 2 arrobas 7 libras e 1 m. reduzido á fracção ordinaria é igual a $\frac{143}{64}$ da arroba. Esta fracção póde reduzir-se agora a decimal.

Reduzamol-a, por exemplo, a *millionesimos*, conforme a regra do n. 138.

$$\frac{143}{64} = \frac{143 \times 1000000}{64 \times 1000000} = \frac{143000000}{64000000} = \frac{\frac{143000000}{64}}{\frac{64000000}{64}} =$$

$$\frac{2234375}{1000000} = 2^{a},234375$$

Logo, 2 arrobas 7 libras e 1 m. $= 2^{a},234375$

Fonte: Lobo, 1879, pp. 60-61.

Por meio do nosso estudo, constatamos que esse livro não propõe exercícios, dessa forma não possível relacionar a Aritmética com a Geometria por meio de problemas.

4.2 Arithmetica Progressiva (TRAJANO, 1914, 1948)

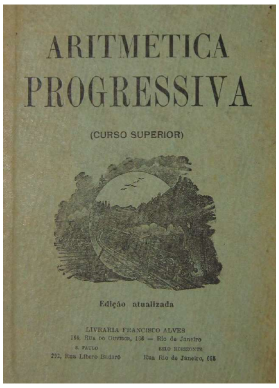
Antônio Bandeira Trajano[18] (1843 – 1921) é autor de livros didáticos de Aritmética bastantes conhecidos. Tanto Trajano como suas obras já foram objetos de pesquisas na linha de História da Matemática e História da Educação Matemática, entre elas, temos Claras (2006)

[18] Nascido em Vila Pouca de Aguiar, Portugal, foi membro da Comissão Tradutora da Bíblia, professor de Geografia e Aritmética e autor de livros didáticos de Matemática luso-brasileiro. Publicou as primeiras Aritmética e Álgebra para uso dos cursos primário e secundário do Brasil. Os seus livros foram oficialmente adotados pela Família Real Brasileira e pela Escola Militar. Alguns exemplos de tais publicações, pela Editora Francisco Alves: Álgebra Elementar; Chave de Álgebra; Álgebra Superior; Aritmética Primária; Aritmética Progressiva; Chave de Aritmética Progressiva; e Aritmética Elementar Ilustrada. (BOTELHO, 2012)

que verifica que Trajano utilizou basicamente os mesmos textos para suas obras referentes a Aritmética e fez uma ampliação das quantidades de exercícios.

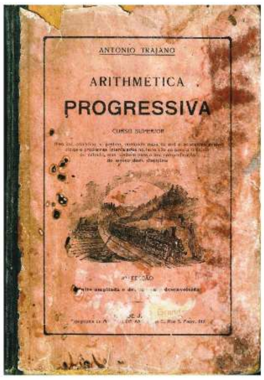
Utilizamos algumas passagens do livro *Arithmetica Progressiva* de 1914 contido em (CLARAS, 2006) e o livro *Arithmetica Progressiva* (TRAJANO, 1948) por motivos de melhor resolução em relação qualidade de algumas imagens, conforme podemos ver nas Figura 22 e Figura 23.

Figura 22: Livro *Arithmetica Progressiva* de 1948



Fonte: Trajano, 1948.

Figura 23: Livro *Arithmetica Progressiva* de 1914



Fonte: Trajano, 1914 *apud* Claras, 2006, p. 139.

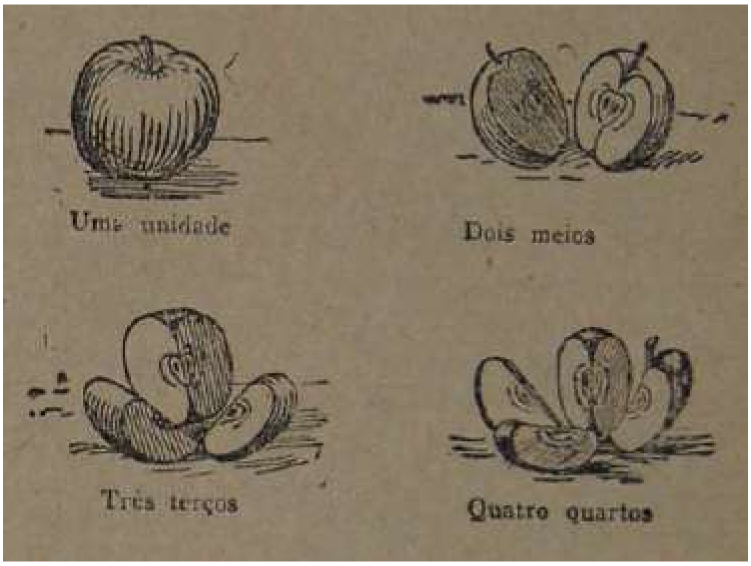
O livro *Arithmetica Progressiva* (TRAJANO, 1914 *apud* CLARAS, 2006) foi escrito quando o Sistema Educacional Brasileiro destinava os três primeiros anos do Ensino Secundário para o estudo de Aritmética.

Trajano (1948, p. 5) define a Aritmética como a “sciencia elementar dos números e a arte de calcular por meios de algarismos”.

Ambos os livros têm como ponto de partida a apresentação dos algarismos arábicos e romanos e definições como, por exemplo, quantidade, unidade e número. Em seguida, o ensino da Aritmética é abordado com as operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão) utilizando tabuadas e muitos exercícios. A obra prossegue tratando a igualdade e desigualdade aritmética, propriedades dos números como números primos, números múltiplos, divisibilidade dos números, decomposição dos números, máximo divisor comum, mínimo divisor comum, o estudo de frações ordinárias e decimais e suas operações fundamentais, números decimais, sistemas métricos e suas operações, sistema inglês de medidas, números complexos, razão e proporções, regra de três, falsa posição, financeira (porcentagem, juros, comissões, desconto), média aritmética, mistura[19], liga[20], câmbio[21], análise aritmética[22], potências, raízes 2º e 3º graus, progressões, logaritmos e peso específico e relativo.

Em ambos livros, encontramos figuras e imagens em exercícios remetendo ao conteúdo abordado (ver Figura 24). Além disso, a edição de 1948 é composta por cerca de 1600 exercícios e problemas propostos para serem solucionados.

Figura 24: Imagem usada em Frações

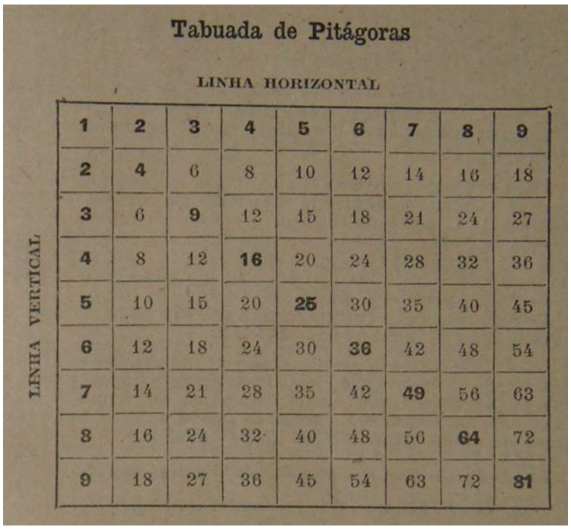


Fonte: Trajano, 1948, p. 73.

[19] "Mistura é o ajuntamento de generos seccos ou liquidos da mesma especie, mas de preços differentes." (TRAJANO, 1922, p. 112). Exemplo: comprei 5 litros de chá a 12 reais, depois comprei 1 litro do mesmo chá a 6 reais. Misturando esse chá obtenho 6 litros com o custo de 18 reais. Assim, 1 litro dessa mistura custa 3 reais.
[20] "Liga é a combinação de diversos metaes por meio da fusão. Os problemas de mistura e liga resolvem-se do mesmo modo." (TRAJANO, 1922, p. 112)
[21] "[...] troca de dinheiro de uma nação por dinheiro de outra nação." (TRAJANO, 1922, p. 113)
[22] Método para resolução de problemas sem uso de regras aritméticas, ou seja, analisa os dados do problema para obter a solução.

Ao tratar do conteúdo de multiplicação de números naturais, Trajano (1948) utiliza a tabuada de Pitágoras (Figura 25) como método de fixação de multiplicações básicas. A tabuada de Pitágoras consiste na multiplicação da linha horizontal composta por números naturais em ordem crescente, pela linha vertical composta por números naturais em ordem crescente conforme a figura a seguir:

Figura 25: Tabuada de Pitágoras



Tabuada de Pitágoras

LINHA HORIZONTAL

LINHA VERTICAL

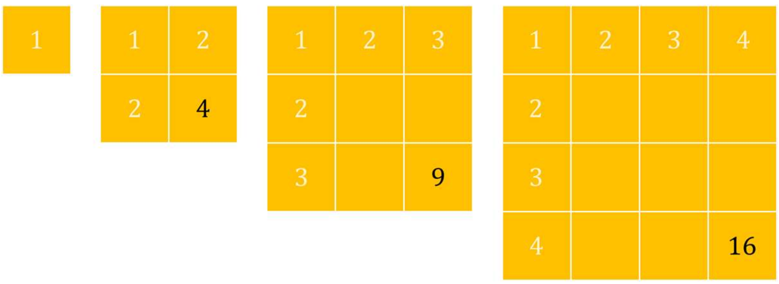
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
2	**4**	6	8	10	12	14	16	18
3	6	**9**	12	15	18	21	24	27
4	8	12	**16**	20	24	28	32	36
5	10	15	20	**25**	30	35	40	45
6	12	18	24	30	**36**	42	48	54
7	14	21	28	35	42	**49**	56	63
8	16	24	32	40	48	56	**64**	72
9	18	27	36	45	54	63	72	**81**

Fonte: Trajano, 1948, p. 35.

Apesar da tabuada de Pitágoras ser uma ferramenta aritmética, a mesma pode ser utilizada para trabalhar conceitos da Geometria e da Álgebra.

Podemos perceber na Figura 25 que a diagonal possui números destacados em negrito cujo são formados pela multiplicação de um número natural por ele mesmo. Em linguagem algébrica, os números naturais obtidos através da multiplicação $x^2 = x \times x$ são chamados de números quadrados. Desse modo, percebendo que os números $1 = 1 \times 1; 4 = 2 \times 2; 9 = 3 \times 3; 16 = 4 \times 4$, a diagonal é composta por números quadrados.

Figura 26: Números quadrados



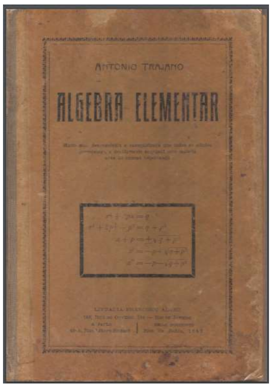
Fonte: Autor, 2020.

Separando tais multiplicações como na Figura 26, pode ser trabalhada a visão geométrica, onde os quadrados possuem lados com medidas iguais. Além disso, os números destacados em negrito equivalem as áreas dos quadrados correspondentes.

4.3 Algebra Elementar (TRAJANO, 1932)

Como mencionado na seção antecedente, Antônio Bandeira Trajano (1843 – 1921) também é autor de livros didáticos de Álgebra, entre eles, o *Algebra Elementar*. Utilizamos a 15ª edição dessa obra (ver Figura 27), que é destinada ao Ensino Secundário e foi escrita antes do Decreto nº 21.241 visto no capítulo anterior, assim, acreditamos que era utilizada durante o estudo de Álgebra por um ano.

Figura 27: Livro *Algebra Elementar*



Fonte: Trajano, 1932.

Em seu prefácio, o autor comenta que apesar da matéria ser abandonada e ignorada, contenta o fato de estar sendo introduzida nas escolas primárias e que em breve a mocidade estaria aproveitando com vantagem a força da Álgebra. Ainda no prefácio, o autor escreve

> Para ajudarmos a desenvolver o gosto por este estudo tão proveitoso, apresentamos agora este compendio, que pela sua simplicidade, clareza e methodo, muito contribuirá para despertar nos discípulos o interesse e gosto por esta matéria que, ao mesmo tempo é tão útil para a vida, é também tão recreativa para o espirito.
> Para tornarmos mais attractivo e ameno este estudo, abrandámos quanto foi possível o rigor algébrico; empregamos em todo o livro uma linguagem simples e apropriada; exemplificamos todas as theorias, resolvendo todas as difficuldades, e illustrando cada ponto com numerosos exercícios e problemas interessantes e recreativos, e finalmente, abundamos em notas, explicações e referencias, porque sabemos que muitos daquelles que hão de estudar por este compendio, não terão outro explicador nem outro auxiliar além do livro que lhes servirá de mestre.

> Aquelles que estudarem com attenção este pequeno curso de Algebra, não perderão o seu tempo, porque não sómente desenvolverão o seu raciocínio, e esclarecerão o seu espirito, mas ficarão tambem habilitados para resolver muitos calculos que, de modo algum, resolveriam só com o auxilio da Arithmetica. (TRAJANO, 1932, p. 4)

Trajano (1932, p. 5) define a Álgebra como "parte das mathematicas que resolve os problemas, e demonstra os theoremas quando as quantidades são representadas por letras.". Nesse livro, a Álgebra é iniciada pela definição e explicação de símbolos algébricos, problema, solução, quantidades algébricas e representações, teorema, sinais algébricos, coeficiente, expoente de uma potência, raiz e radical.

O ensino da Álgebra prossegue com os conteúdos expressões algébricas e as operações fundamentais soma, subtração, multiplicação e divisão. Dentro do conteúdo expressões algébricas, o autor explica os produtos notáveis chamando-os de teoremas, sem o uso de gravuras ou imagens. O livro prossegue com divisores e múltiplos, polinômios, máximo divisor comum, mínimo divisor comum, frações algébricas, equações do primeiro grau, sistema de equações do primeiro grau, demonstrações algébricas, desigualdade, potências, binômio de Newton, extração de raízes, equações do segundo grau, sistema de equações do segundo grau, equações biquadradas, razão, proporção e progressões.

Trajano (1932) em sua obra, ao apresentar as equações do segundo grau, mostra que a solução é através do método de completar quadrado e para isso os alunos devem reduzir a equação de modo a conter somente três termos.

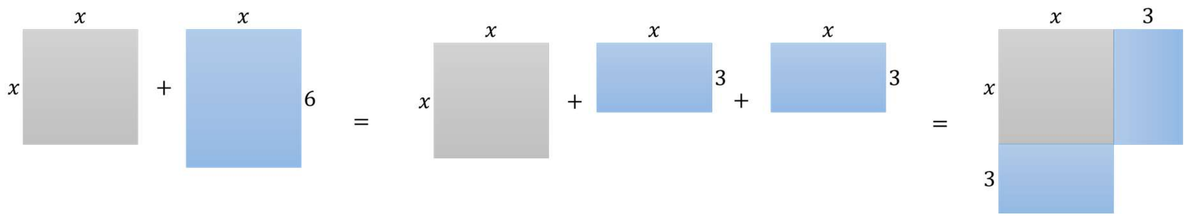
> [...] uma equação completa do segundo grau, estando reduzida, contém sómente tres termos, sendo dois do primeiro membro, e um do segundo, como: $x^2 + 6x = 40$. Ora, como o primeiro membro de uma equação completa é um binomio, precisamos saber acrescentar-lhe mais um termo para o tornar quadrado perfeito. (TRAJANO, 1932, p. 156)

Em seguida, o autor apresenta a regra para tal método: "[...] para se completar um quadrado, accrescenta-se aos dois termos dados o quadrado da metade do coefficiente de x." (TRAJANO, 1932, p. 157).

Dentre os problemas de completar quadrado propostos no livro, escolhemos esse: **"Qual o numero inteiro e positivo cujo quadrado adicionado com 6 vezes o numero dará 55."** (TRAJANO, 1932, p. 160) para resolver com o auxílio da Geometria, isso porque tanto os produtos notáveis quanto o método de completar quadrado são explicados sem auxílio da Geometria no livro em questão.

Resolução: Representaremos a equação $x^2 + 6x = 55$ como quadriláteros, conforme a Figura 28:

Figura 28: Resolução da equação $x^2 + 6x = 55$



Fonte: Autor, 2020.

Desse modo, percebemos que falta um quadrado de área igual a 9 para completarmos o quadrado cujo lados medem $x + 3$. Assim, adicionamos 9 em ambos lados da igualdade para resolvermos algebricamente.

$$x^2 + 6x + 9 = 55 + 9$$
$$(x + 3)^2 = 64$$
$$x + 3 = 8$$
$$x = 5$$

Logo, o número inteiro positivo que procuramos é 5.

4.4 Elementos de Matemática (1943a, 1943b, 1948, 1943c)

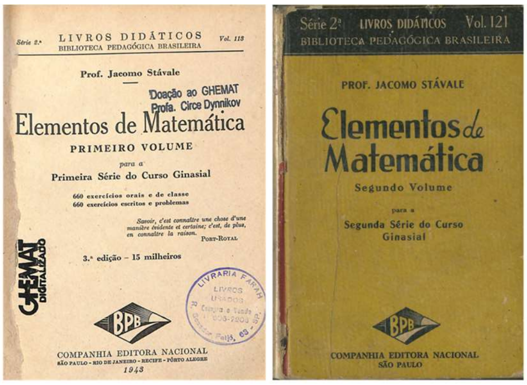
Essa obra didática de Jacomo Stávale[23] (1882 – 1956) foi produzida após a unificação dás áreas Aritmética, Álgebra e Geometria, e, além disso, atende o Decreto nº 4.244, ou seja, está organizada por séries. Desse modo, trata-se de uma coleção composta por quatro livros destinados ao Ensino Ginasial. Essa coleção didática atende os conteúdos estabelecidos na Reforma Capanema, além de ser autorizada na lista do CNLD de 1947.

Tivemos acesso aos dois primeiros volumes dessa coleção, ou seja, os livros destinados a primeira série e a segunda série do Ensino Ginasial (ver Figura 29), onde pudemos ler e fazer esse estudo do texto presente nesses livros. Destacamos que para os livros destinados a terceira

[23] Filho de imigrantes italianos, mudou-se com sua família, ainda jovem, para São Paulo, dando início à sua trajetória magistral. Lecionou em vários estabelecimentos de ensino da capital e interior, como o Colégio de Santo Agostinho (des Oiseaux), Liceu Nacional do Rio Branco e Gymnasio de São Bento. Autor de várias obras didáticas, tais como: Geometria Plana, Exercícios de Matemática para os primeiro, segundo e terceiro anos, Elementos de Matemática, entre outros. (TRIPOLI, 2005)

série e quarta série do Ensino Ginasial (ver Figura 30), nos baseamos em Alves (2005), o qual faz uma breve análise e detalha a estrutura dessa coleção em sua Dissertação de Mestrado[24].

Figura 29: Primeiros livros da coleção *Elementos de Matemática*



Fonte: Stávale, 1943a, 1943b.

Figura 30: Livros finais da coleção *Elementos de Matemática*

Fonte: Alves, 2005, p. 75.

Começaremos com o primeiro livro. Datado em 1943 (3ª edição) é destinado a primeira série do Ensino Ginasial e traz seus conteúdos divididos em duas partes: a primeira sendo Geometria Intuitiva a qual aborda noções fundamentais da Geometria e figuras geométricas; a segunda sendo Aritmética Prática a qual aborda operações fundamentais, múltiplos e divisores, frações ordinárias e decimais e números complexos[25]. Esse livro traz cerca de mil e trezentos problemas escritos, exercícios orais e exercícios de classe.

O segundo livro, datado em 1943 (1ª edição), é destinado a segunda série do Ensino Ginasial trazendo seus conteúdos divididos em duas partes: a primeira sendo Aritmética Prática

---

[24]ALVES, A. M. M. **Livro didático de matemática**: uma abordagem histórica (1943-1995). 2005. 188f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2005.

[25] O conteúdo nomeado "números complexos", nesse livro, se refere ao estudo de medir horas e ângulos.

a qual aborda conteúdos como sistema legal de unidades de medir, potências e raízes, razões e proporções e grandezas proporcionais; a segunda sendo Geometria Intuitiva a qual aborda os conteúdos de áreas e volumes. Apesar de vir com o nome “Aritmética Prática”, o livro traz informações algébricas no rodapé de alguns conteúdos. Esse livro traz mil e trezentos e setenta problemas escritos, exercícios orais e exercícios de classes.

O livro destinado a terceira série do Ensino Ginasial é de 1948 (12ª edição) e traz em seu sumário um único título geral “Álgebra”. Apesar do livro abordar conteúdos de Geometria, ele não faz uma divisão como nos livros das séries anteriores já descritos. Os conteúdos desse livro se dividem em números relativos, expressões algébricas e suas operações, frações algébricas, equações do primeiro grau, geometria dedutiva, a reta, o círculo e construções geométricas. Segundo Alves (2005), o livro apresenta oitocentos e cinquenta exercícios orais e de classes.

Por fim, o livro destinado à quarta série do Ensino Ginasial é de 1943 (11ª edição) e, assim como o primeiro e segundo livros da coleção aqui descritos, o autor traz seus conteúdos divididos em duas partes: a primeira chamada Álgebra a qual aborda os conteúdos equações do primeiro grau, teoria das desigualdades, problemas do primeiro grau, números irracionais, equações do segundo grau e problemas do segundo grau; a segunda parte é intitulada como Geometria e traz os conteúdos de linhas proporcionais, semelhança, relações numéricas no triângulo, relações numéricas no círculo, polígonos regulares, o comprimento da circunferência e áreas das figuras planas. Segundo Alves (2005), esse livro traz cerca de mil e quatrocentos problemas escritos e duzentos e oitenta exercícios orais e de classe. Contudo, diferentemente dos livros anteriores, no final dele tem quatro sequências de exercícios intitulados como “a área do triângulo”, “a área do quadrilátero”, “a área dos polígonos regulares” e “a área do círculo”.

Percebemos que essa coleção apresenta seus conteúdos separando os ramos da Aritmética, Álgebra e Geometria como exige o Decreto proposto na Reforma Capanema.

Stávale (1943a) ao abordar os conteúdos de frações utiliza muitas regras, teoremas e exemplos, como podemos ver na Figura 31.

Figura 31: Frações

Regra. *Para transformar um número mixto em fração imprópria, multiplica-se o número inteiro pelo denominador, soma-se o produto com o numerador, e ter-se-á o numerador da fração imprópria; o denominador da fração imprópria será o mesmo denominador que figura no número mixto dado.*

Teorema. *Multiplicando ou dividindo ambos os termos de uma fração por um mesmo número, o valor da fração não se altera.*

Exemplo. Simplificar a fração $\frac{84\,210}{276\,690}$

$$\frac{84\,210}{276\,690} = \frac{84\,210 \div 10}{276\,690 \div 10} = \frac{8\,421}{27\,669} = \frac{8\,421 \div 3}{27\,669 \div 3} = \frac{2\,807}{9\,223}$$

	3	3	2
9 223	2 807	802	401
802	401	00	
23	7	2	1

$$\frac{2\,807}{9\,223} = \frac{2\,807 \div 401}{9\,223 \div 401} = \frac{7}{23}$$

Resposta. $\frac{84\,210}{276\,690} = \frac{7}{23}$

Fonte: Stávale, 1943a, pp. 172-173, p. 179.

Em comparação de frações, o autor sugere utilizar a Aritmética para tornar as frações homogêneas, ou seja, com o mesmo valor no denominador. Selecionamos o problema aritmético **"Comparar as frações $\frac{3}{4}, \frac{7}{10}, \frac{11}{15}$ *e* $\frac{17}{24}$ e verificar qual é a maior e qual a menor."** (STÁVALE, 1943, p. 180) para resolvermos utilizando a Geometria.

Resolução: percebemos que as frações dadas contêm os numeradores menores que os denominadores, ou seja, são representações menores que um inteiro. Dessa forma, iremos representá-las geometricamente como barras retangulares, conforme Figura 32.

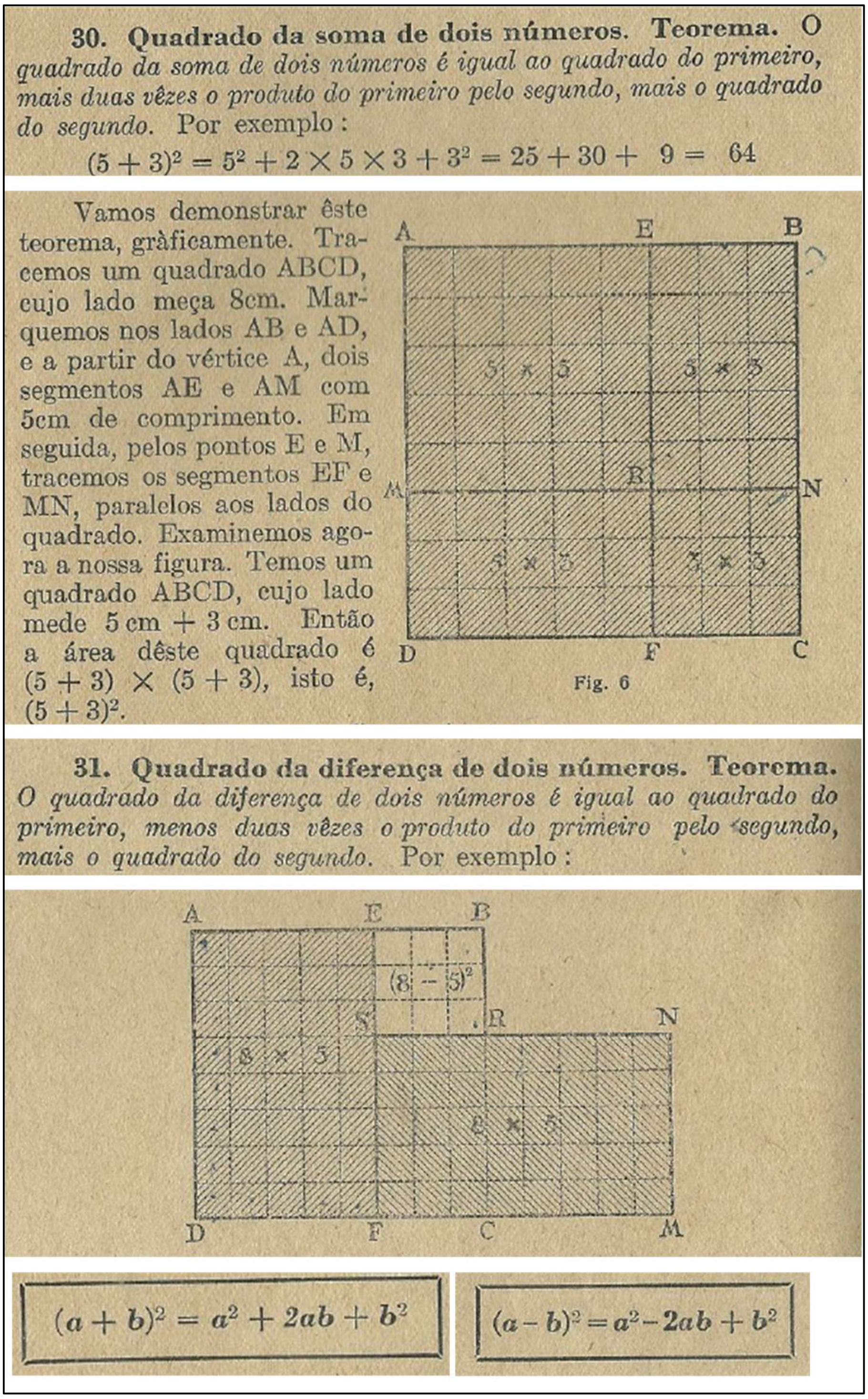
Figura 32: Resolução do Problema

Fonte: Autor, 2020.

Com isso verificamos que: $\frac{3}{4} > \frac{11}{15} > \frac{17}{24} > \frac{7}{10}$. Logo, a maior fração é $\frac{3}{4}$ e a menor é $\frac{7}{10}$.

Stávale (1943b) ao tratar as multiplicações $(a \pm b)^2$ não menciona o termo "produtos notáveis", aborda no capítulo nomeado como "Potências e raízes", utilizando teoremas e representações gráficas juntamente com a fórmula geral, conforme podemos ver na Figura 33.

Figura 33: Produtos notáveis



30. Quadrado da soma de dois números. Teorema. *O quadrado da soma de dois números é igual ao quadrado do primeiro, mais duas vêzes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.* Por exemplo:

$$(5+3)^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times 3 + 3^2 = 25 + 30 + 9 = 64$$

Vamos demonstrar êste teorema, gràficamente. Tracemos um quadrado ABCD, cujo lado meça 8cm. Marquemos nos lados AB e AD, e a partir do vértice A, dois segmentos AE e AM com 5cm de comprimento. Em seguida, pelos pontos E e M, tracemos os segmentos EF e MN, paralelos aos lados do quadrado. Examinemos agora a nossa figura. Temos um quadrado ABCD, cujo lado mede 5 cm + 3 cm. Então a área dêste quadrado é $(5+3) \times (5+3)$, isto é, $(5+3)^2$.

Fig. 6

31. Quadrado da diferença de dois números. Teorema. *O quadrado da diferença de dois números é igual ao quadrado do primeiro, menos duas vêzes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.* Por exemplo:

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Fonte: Stávale, 1943b, p. 59, p. 61.

Ao abordar o conteúdo de raízes, Stávale (1943b, p. 66) apresenta as seguintes definições: “Quando número inteiro tem raiz quadrada exata, toma o nome de quadrado perfeito.” e “Quando um número inteiro não tem raiz quadrada exata, chama-se quadrado imperfeito.”. Em seguida, apresenta os dez primeiros quadrados perfeitos $\{1,4,9,16,25,36,49,64,81,100\}$ e mostra que para o número ser quadrado perfeito é necessário que o algarismo das unidades seja 1, 4, 5, 6, 9 ou 0.

Selecionamos o problema aritmético **“Entre 100 e 200 quantos quadrados perfeitos existem e quais são?”** (STÁVALE, 1943b, p. 67) para resolver com o auxílio da Geometria.

Resolução: Para resolvermos esse problema de forma geométrica, iremos utilizar a tabuada de Pitágoras mencionada por Trajano (1948) em *Arithmetica Progressiva*.

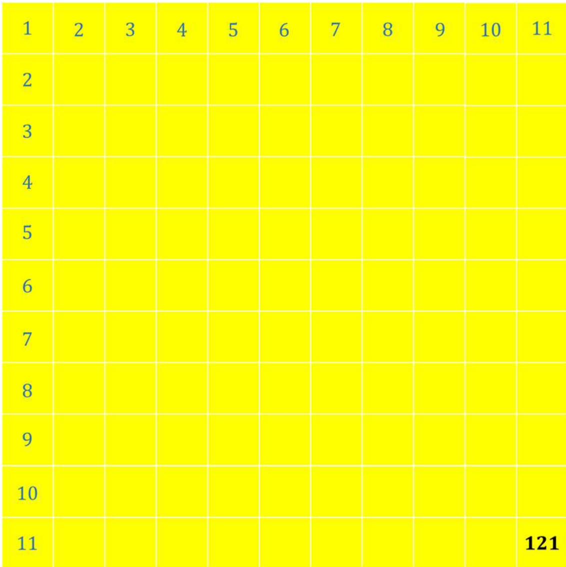
Figura 34: Resolução do Problema

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	4													
3		9												
4			16											
5				25										
6					36									
7						49								
8							64							
9								81						
10									100					
11										**121**				
12											**144**			
13												**169**		
14													**196**	
15														225

Fonte: Autor, 2020.

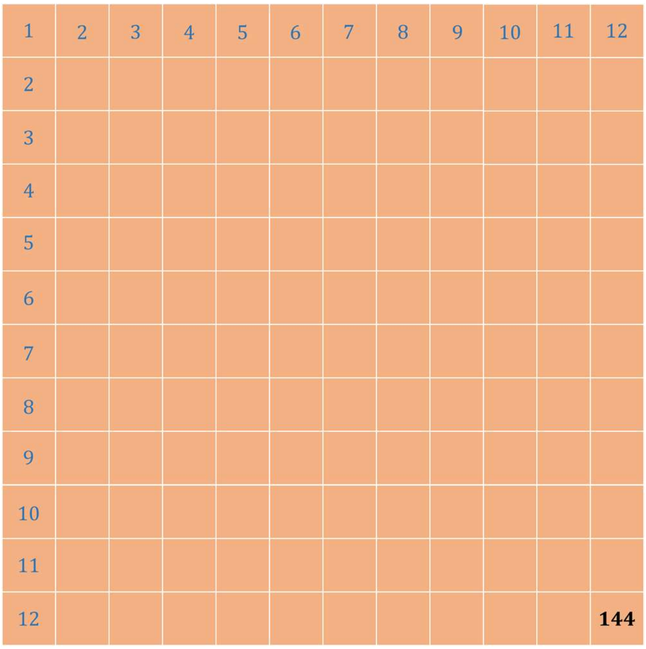
Podemos observar na Figura 34 que temos quatro quadrados perfeitos entre 100 e 200, são: 121, 144, 169 e 196. Representando esses quadrados perfeitos geometricamente na tabuada de Pitágoras, temos: o primeiro quadrado cujo lados medem 11 unidades (Figura 35), o segundo cujo lados medem 12 unidades (Figura 36), o terceiro cujo lados medem 13 unidades (Figura 37) e o quarto cujo lados medem 14 unidades (Figura 38).

Figura 35: Quadrado perfeito 121



Fonte: Autor, 2020.

Figura 36: Quadrado perfeito 144



Fonte: Autor, 2020.

Figura 38: Quadrado perfeito 169

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												
13												**169**

Fonte: Autor, 2020.

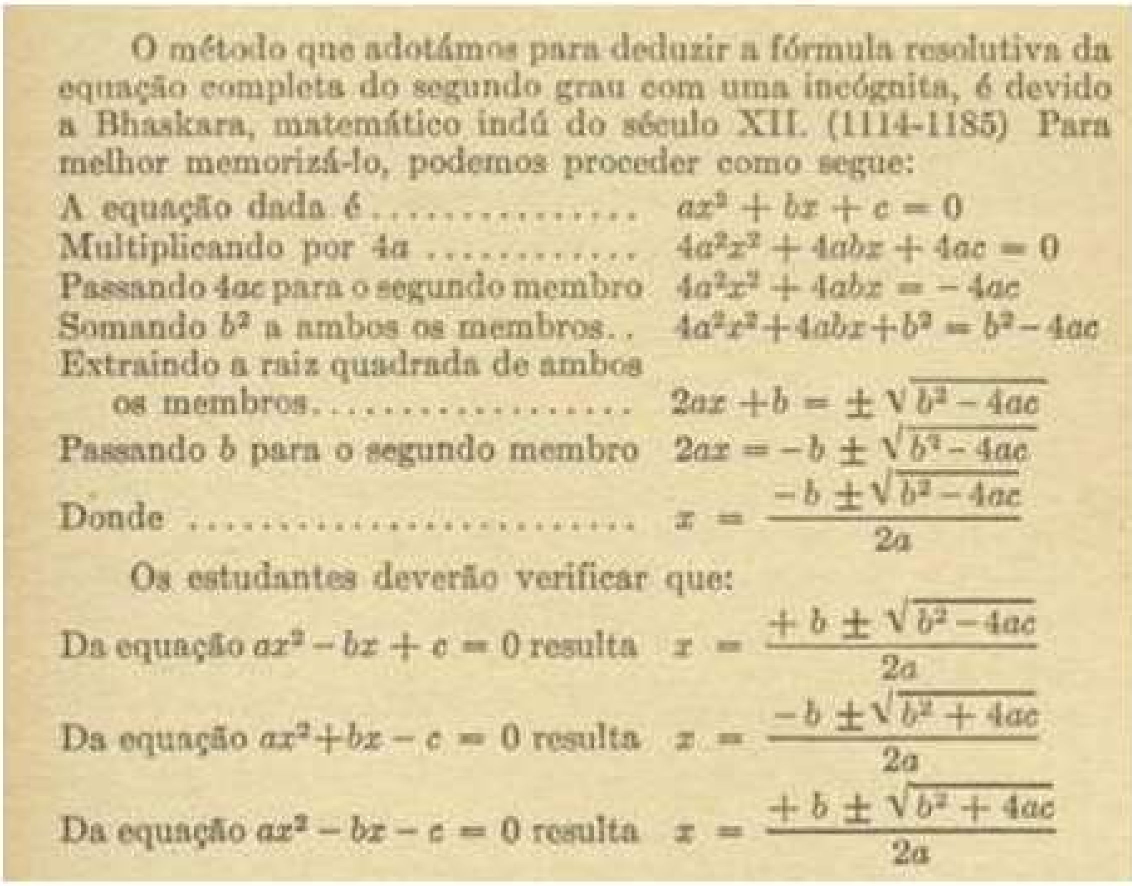
Figura 39: Quadrado perfeito 196

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													**196**

Fonte: Autor, 2020.

Stávale (1943c *apud* ALVES, 2005) utiliza imagens ao longo da obra com a função de ilustrar os conceitos apresentados. Ao abordar equações do segundo grau no quarto volume da coleção, o mesmo autor usa a fórmula resolutiva $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ de equações do segundo grau, mencionando que o método para a sua dedução é devido à Bhaskara (ver Figura 40).

Figura 40: Fórmulas resolutivas da equação completa de segundo grau



O método que adotámos para deduzir a fórmula resolutiva da equação completa do segundo grau com uma incógnita, é devido a Bhaskara, matemático indú do século XII. (1114-1185) Para melhor memorizá-lo, podemos proceder como segue:

A equação dada é .... $ax^2 + bx + c = 0$

Multiplicando por $4a$ .... $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$

Passando $4ac$ para o segundo membro $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

Somando b^2 a ambos os membros.. $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros.................. $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

Passando b para o segundo membro $2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

Donde .... $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Os estudantes deverão verificar que:

Da equação $ax^2 - bx + c = 0$ resulta $x = \frac{+b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Da equação $ax^2 + bx - c = 0$ resulta $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$

Da equação $ax^2 - bx - c = 0$ resulta $x = \frac{+b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$

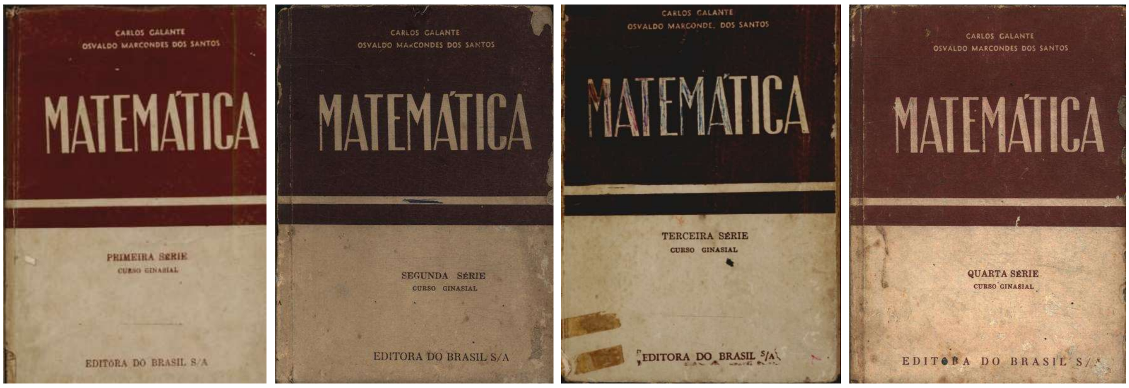
Fonte: Stávale, 1943c, p. 120 *apud* Alves, 2005, p. 147.

Observamos que Stávale (1943c *apud* ALVES, 2005) apresenta as fórmulas resolutivas apresentadas por Omar Khayam, mencionadas no primeiro capítulo. Contudo, não menciona o termo "completar quadrado" ao explicar a dedução da fórmula de resolução da equação do segundo grau e não utiliza representação geométrica.

4.5 Matemática (GALANTE; SANTOS, 1954a, 1958, 1957, 1954b)

A obra didática *Matemática* de Carlos Galante[26] (1920 – 2003) e Osvaldo Marcondes dos Santos[27], editada pela Editora do Brasil, atende a Portaria de 1951 decretada pelo ministro da educação e saúde Simões Filho, ou seja, aborda os conteúdos descritos no programa mínimo estabelecido, além de estar organizada por séries. Além disso, essa coleção foi autorizada nas listas de 1951 e 1953 do CNLD. Desse modo, trataremos dos quatros livros, apresentados na Figura 41, destinados ao Ensino Ginasial.

Figura 41: Coleção de livros *Matemática*



Fonte: Galante; Santos, 1954a, 1958, 1957, 1954b.

Começaremos com o primeiro livro, 1954 (14ª edição), o qual é destinado a primeira série do Ensino Ginasial e aborda os conteúdos número inteiro, operações fundamentais dos inteiros, unidades de medidas de grandezas, numeração, números relativos, múltiplos e divisores, números primos, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, frações ordinárias e decimais, área, volume, sistema métrico decimal, unidades de tempo e de ângulo, medidas inglesas de comprimento, números complexos, operações com números complexos, unidades de velocidade. Percebemos que todos os conteúdos propostos no livro estão compreendidos na Portaria de 1951.

O livro destinado a 2ª série do Ensino Ginasial é de 1958, 28ª edição, aborda os conteúdos potências, raízes quadradas e cúbicas, polinômios, expressões algébricas e suas operações algébricas, fatoração, frações algébricas e suas operações algébricas, mínimo

[26] Segundo Gomes (2016), Galante nasceu em São Paulo, formou-se em Matemática pela Faculdade de Filosofia da Universidade de São Paulo (USP) em 1944 e em Engenharia pela Escola Nacional de Engenharia, no Rio de Janeiro, em 1949. Exerceu o magistério por quase cinquenta anos em diversas instituições.

[27] Marques (2005) apresenta que tanto Galante como Santos eram licenciados em Matemática pela USP, engenheiros civis pela Universidade do Brasil e ex-professores do Colégio Estadual de São Paulo.

múltiplo comum, máximo divisor comum, equações do primeiro grau, inequações do primeiro grau, sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas.

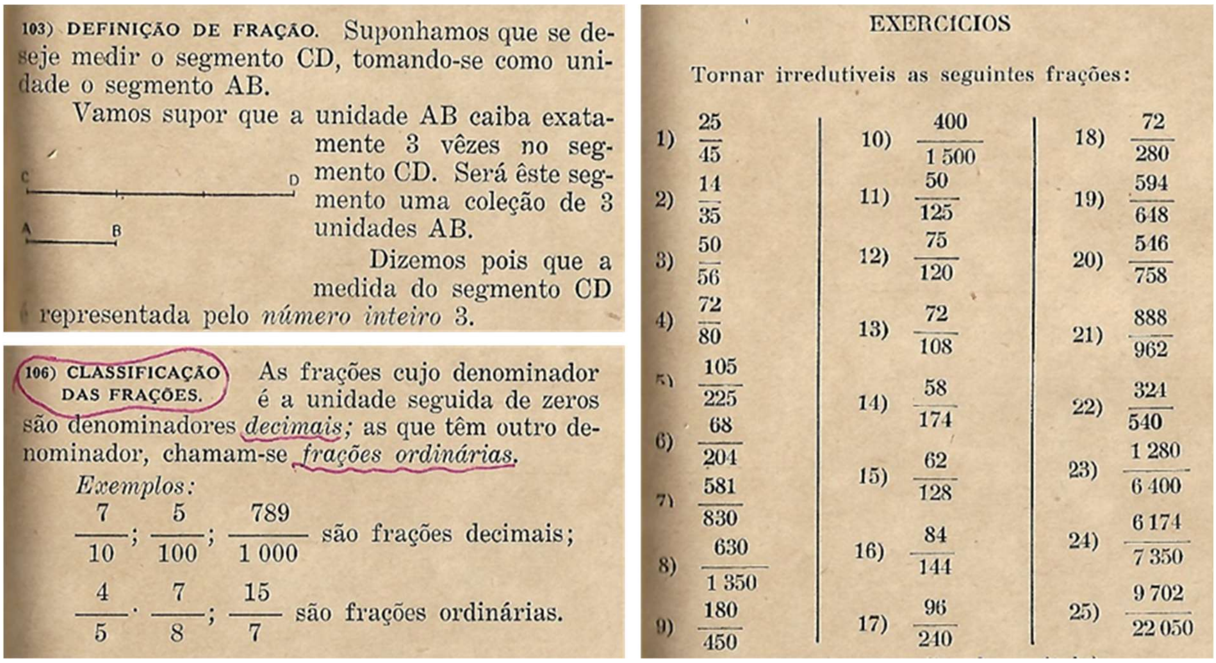
Para os livros destinados à terceira série e quarta série do Ensino Ginasial, nos baseamos em Marques (2005), o qual faz uma breve análise e detalha a estrutura dessa coleção em sua Dissertação de Mestrado[28].

Marques (2005) analisou a 16ª edição do livro destinado a 3ª série do Ensino Ginasial datado em 1957. Segundo ele, os autores abordam todos os conteúdos conforme estabelecido na Portaria 1951 e trabalham a Geometria Intuitiva no capítulo nomeado “Geometria – Noções preliminares” o qual aborda conceitos de ponto, reta e plano.

Marques (2005) também analisou a 2ª edição do livro destinado à 4ª série do Ensino Ginasial datado em 1954. Segundo ele, os autores trazem todos os conteúdos conforme a Portaria 1951 organizados em quatorze capítulos.

Ao analisarmos os livros iniciais da coleção, percebemos que o conteúdo de fração é abordado utilizando a ideia de parte de um segmento de reta considerado um inteiro, porém no desenvolvimento do assunto, os exercícios propostos privilegiam a técnica aritmética exigindo a memorização de procedimentos, como podemos ver na Figura 42.

Figura 42: Frações



103) DEFINIÇÃO DE FRAÇÃO. Suponhamos que se deseje medir o segmento CD, tomando-se como unidade o segmento AB.

Vamos supor que a unidade AB caiba exatamente 3 vêzes no segmento CD. Será êste segmento uma coleção de 3 unidades AB.

Dizemos pois que a medida do segmento CD é representada pelo *número inteiro* 3.

106) CLASSIFICAÇÃO DAS FRAÇÕES. As frações cujo denominador é a unidade seguida de zeros são denominadores *decimais*; as que têm outro denominador, chamam-se *frações ordinárias*.

Exemplos:

$\frac{7}{10}$; $\frac{5}{100}$; $\frac{789}{1\,000}$ são frações decimais;

$\frac{4}{5}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{15}{7}$ são frações ordinárias.

EXERCICIOS

Tornar irredutiveis as seguintes frações:

1) $\frac{25}{45}$	10) $\frac{400}{1\,500}$	18) $\frac{72}{280}$
2) $\frac{14}{35}$	11) $\frac{50}{125}$	19) $\frac{594}{648}$
3) $\frac{50}{56}$	12) $\frac{75}{120}$	20) $\frac{546}{758}$
4) $\frac{72}{80}$	13) $\frac{72}{108}$	21) $\frac{888}{962}$
5) $\frac{105}{225}$	14) $\frac{58}{174}$	22) $\frac{324}{540}$
6) $\frac{68}{204}$	15) $\frac{62}{128}$	23) $\frac{1\,280}{6\,400}$
7) $\frac{581}{830}$	16) $\frac{84}{144}$	24) $\frac{6\,174}{7\,350}$
8) $\frac{630}{1\,350}$	17) $\frac{96}{240}$	25) $\frac{9\,702}{22\,050}$
9) $\frac{180}{450}$		

Fonte: Galante; Santos, 1954a, p. 121, p. 125, p. 133.

[28] MARQUES, A. S. **Tempos pré-modernos**: a matemática escolar dos anos 1950. 2005. 161f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

A introdução da Álgebra é feita com a definição de constantes, variáveis e valor numérico. O conteúdo de expressões algébricas é iniciado sem nenhum método intuitivo, ou seja, é realizado de forma mecanizada com exemplos e técnicas de resolução de exercícios (ver Figura 43).

Figura 43: Expressões algébricas

3) EXPRESSÃO ALGÉBRICA. Tôda representação que indique uma ou mais operações entre números relativos, expressa por meio de *algarismos* e *letras* ou sòmente *letras*, recebe o nome de *expressão algébrica* ou *literal*.

Exemplos:

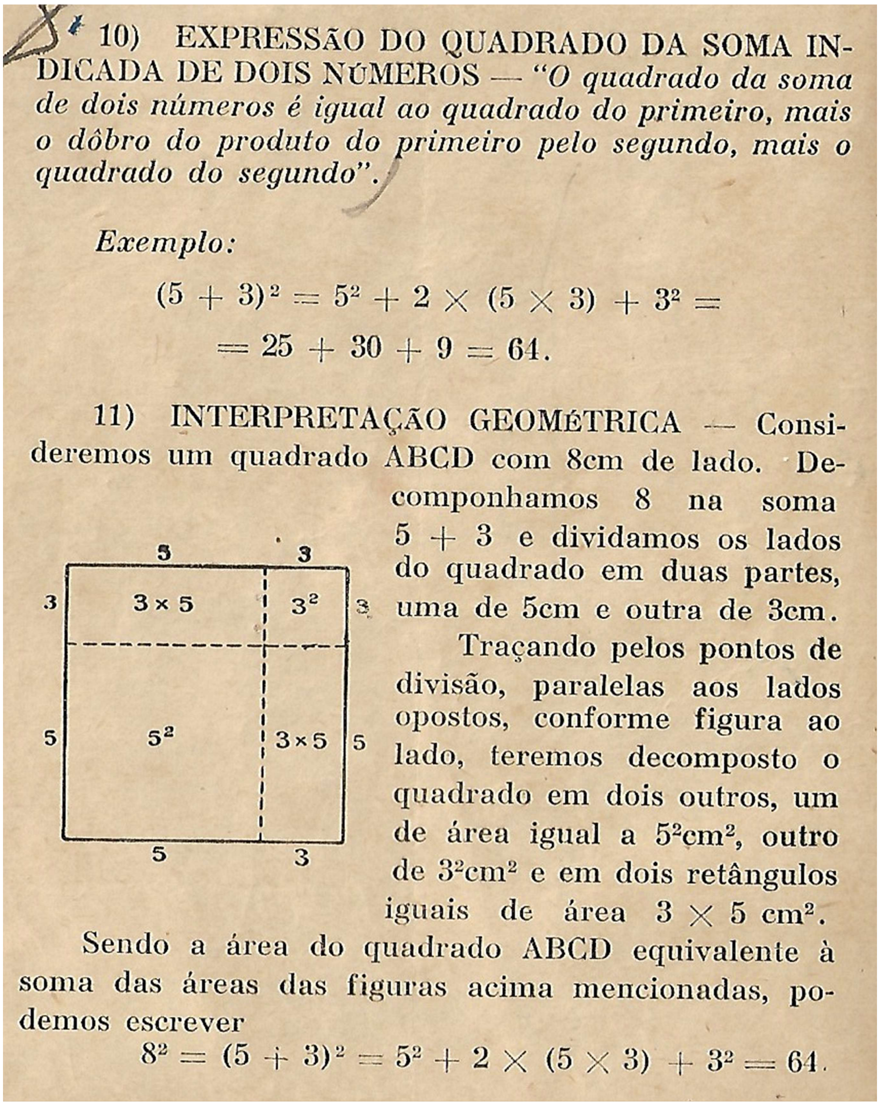
$$2a.\ \frac{x}{3}\cdot\ \frac{6a^2b}{xy} + \frac{x}{y} + 2abd.$$

4) VALOR NUMÉRICO. É o número que se obtém quando se substituem as letras de uma expressão algébrica por números e se efetuam tôdas as operações indicadas.

Fonte: Galante; Santos, 1958, p. 81.

Ao abordar o conteúdo de potências, os autores se dedicam a explicar tanto o método aritmético como a representação geométrica nos casos: quadrado da soma indicada de dois números e produto da soma indicada pela diferença. Na Figura 44 podemos ver a abordagem do quadrado da soma de dois números.

Figura 44: Quadrado da soma indicada de dois números



10) EXPRESSÃO DO QUADRADO DA SOMA INDICADA DE DOIS NÚMEROS — *"O quadrado da soma de dois números é igual ao quadrado do primeiro, mais o dôbro do produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo".*

Exemplo:

$$(5 + 3)^2 = 5^2 + 2 \times (5 \times 3) + 3^2 =$$
$$= 25 + 30 + 9 = 64.$$

11) INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA — Consideremos um quadrado ABCD com 8cm de lado. Decomponhamos 8 na soma $5 + 3$ e dividamos os lados do quadrado em duas partes, uma de 5cm e outra de 3cm.

Traçando pelos pontos de divisão, paralelas aos lados opostos, conforme figura ao lado, teremos decomposto o quadrado em dois outros, um de área igual a 5^2cm^2, outro de 3^2cm^2 e em dois retângulos iguais de área 3×5 cm^2.

Sendo a área do quadrado ABCD equivalente à soma das áreas das figuras acima mencionadas, podemos escrever

$$8^2 = (5 + 3)^2 = 5^2 + 2 \times (5 \times 3) + 3^2 = 64.$$

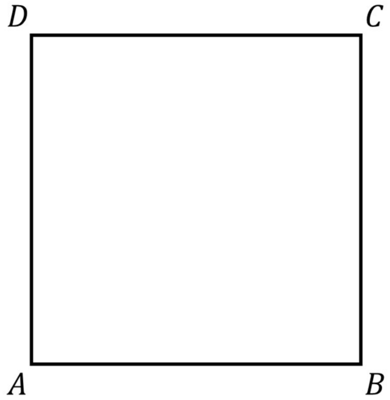
Fonte: Galante; Santos, 1958, p. 22.

Apesar da obra não exigir a resolução geométrica nos vinte e três exercícios propostos acerca dos casos quadrado da soma indicada de dois números e produto da soma indicada pela diferença, iremos utilizar a Geometria para resolver o problema: **"Desenvolver as seguintes expressões: [...] 147. $(\mathbf{10+2})(\mathbf{10-2})$"** (GALANTE; SANTOS, 1958, p. 25).

Resolução: Usaremos a sequência de resolução apresentada em Galante e Santos (1958, p. 23) para o caso produto da soma indicada pela diferença.

Consideremos um quadrado $ABCD$ com $10cm$ de lado, conforme a Figura 45.

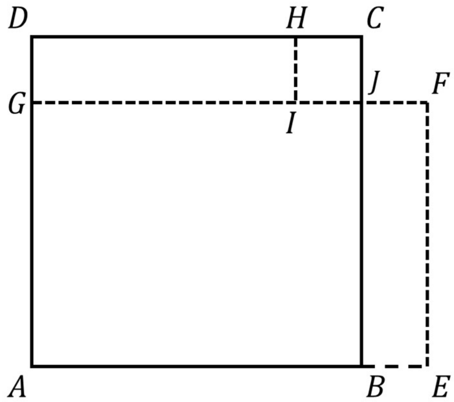
Figura 45: Resolução do problema $(10 + 2)(10 - 2)$



Fonte: Autor, 2020.

Prolonguemos o lado AB até E, sendo BE o acréscimo de $2cm$. Subtraímos agora dos lados AD e CB $2cm$, e sejam DG e CJ segmentos equivalentes a $2cm$.

Figura 46: Representação geométrica do produto $(10 + 2)(10 - 2)$



Fonte: Autor, 2020.

Percebemos que foi formado o retângulo $AEFG$. Vamos verificar que ele é equivalente à diferença entre as áreas do quadrado $ABCD$ e o quadrado $CHIJ$, tendo este último lados iguais a $2cm$.

Temos que:

(1) área $ABCD$ – área $CHIJ$ = área $ABJG$ + área $DHIG$

(2) área $AEFG$ = área $ABJG$ + área $BEFJ$

(3) área $BEFJ$ = área $DHIG$.

Portanto, substituindo (3) em (2) temos:

(4) área $AEFG$ = área $ABJG$ + área $DHIG$

Substituindo (4) em (1) temos:

(5) área $ABCD$ – área $CHIJ$ = área $AEFG$

área $ABCD = (10cm)^2$

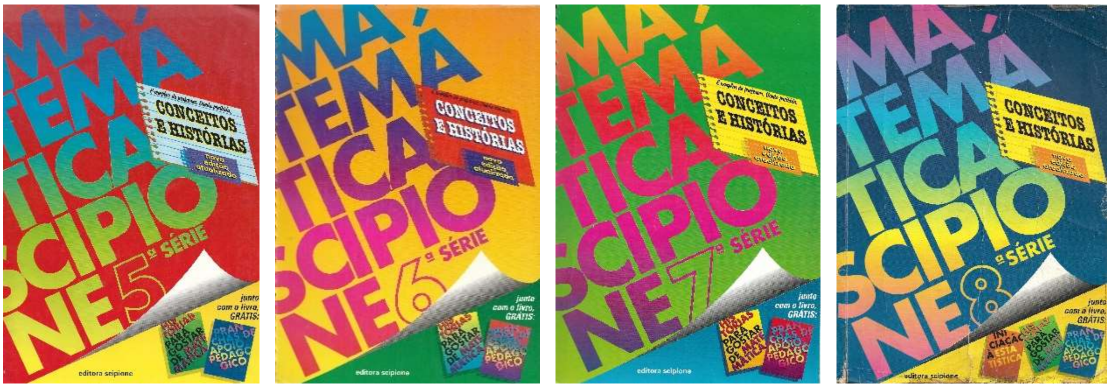
área $CHIJ = (2cm)^2$

Portanto, área $AEFG = 10^2 - 2^2 = 96cm^2$.

4.6 Matemática Scipione – conceitos e histórias (DI PIERRO NETTO, 1995a, 1995b, 1995c, 1995d)

A 2ª edição da coleção *Matemática Scipione – conceitos e histórias* de Scipione Di Pierro Netto[29] (1926 – 2005), editada pela Editora Scipione em 1995, atende a Lei n.º 5.692 de 1971. Trataremos dos quatros livros destinados às 5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries do Ensino do 1º grau (ver Figura 47.

Figura 47: Coleção de livros *Matemática Scipione – conceitos e histórias*



Fonte: Di Pierro Netto, 1995a, 1995b, 1995c, 1995d.

O livro destinado à 5ª série tem seus conteúdos divididos em capítulos nomeados como: números naturais e sistemas de numeração, operações com números naturais, múltiplos e divisores, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, números fracionários, números decimais, geometria e medidas, conceito de medida e sistemas de medidas. O livro destinado à 6ª série tem seus conteúdos divididos em capítulos nomeados como: potências e raízes, números inteiros relativos, operações com números inteiros, números racionais relativos, equações e

[29] Nasceu em São Paulo, capital. Iniciou seus estudos superiores no curso de Matemática da USP, em 1948, que interrompeu após dois anos e terminou-os em 1954 na Pontifícia Universidade Católica (PUC) de São Paulo. Foi professor e autor de diversos livros didáticos e paradidáticos e fundador da editora Scipione. (ALVES, 2005)

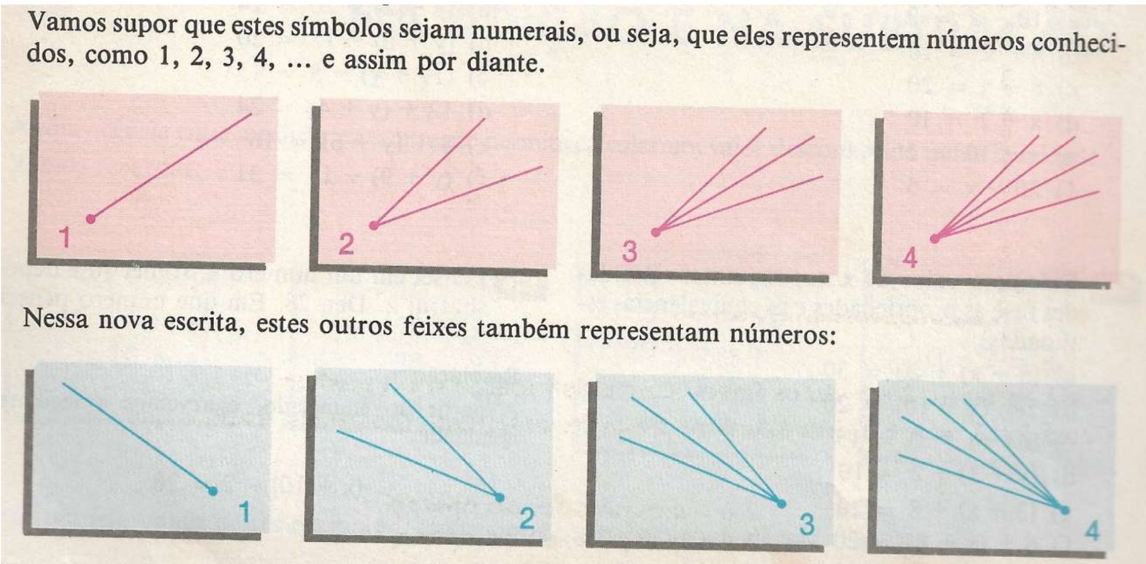
problemas numa só variável, inequações numa só variável, sistemas de equações do primeiro grau, razões e proporções, regra de três, porcentagem e juros simples, ângulos: conceitos e relações e polígonos e seus elementos. O terceiro livro, destinado à 7ª série, tem seus conteúdos divididos em capítulos nomeados como: ampliações dos conjuntos numéricos de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{I}$, introdução à Álgebra e operações com polinômios, produtos notáveis e fatoração de expressões algébricas, m.d.c. e m.m.c. de polinômios, frações algébricas, equações fracionárias e literais redutíveis ao primeiro grau, plano cartesiano e sistemas fracionários e literais redutíveis ao primeiro grau, princípios da geometria, estudo dos ângulos, revisão e complementos, triângulo, congruência, paralelismo e perpendicularismo.

Por fim, o livro destinado à 8ª série tem seus conteúdos divididos em capítulos nomeados como: potências e raízes, equações do segundo grau, equações, sistemas e problemas redutíveis ao segundo grau, segmentos proporcionais, teorema de tales, semelhança de triângulos, relações métricas nos triângulos retângulos, noções de trigonometria, relações métricas nos triângulos quaisquer, relações métricas nos polígonos inscritos na circunferência, área das figuras planas e funções.

Com base nessa apresentação dos conteúdos abordados na coleção, constatamos que apesar da obra atender a Lei n.º 5.692 de 1971 e seguir o Núcleo Comum, a mesma apresenta muitos conteúdos acrescidos do que o indicado no programa curricular vigente na época de publicação da coleção. Dentre esses conteúdos mencionados, iremos destacar alguns a seguir.

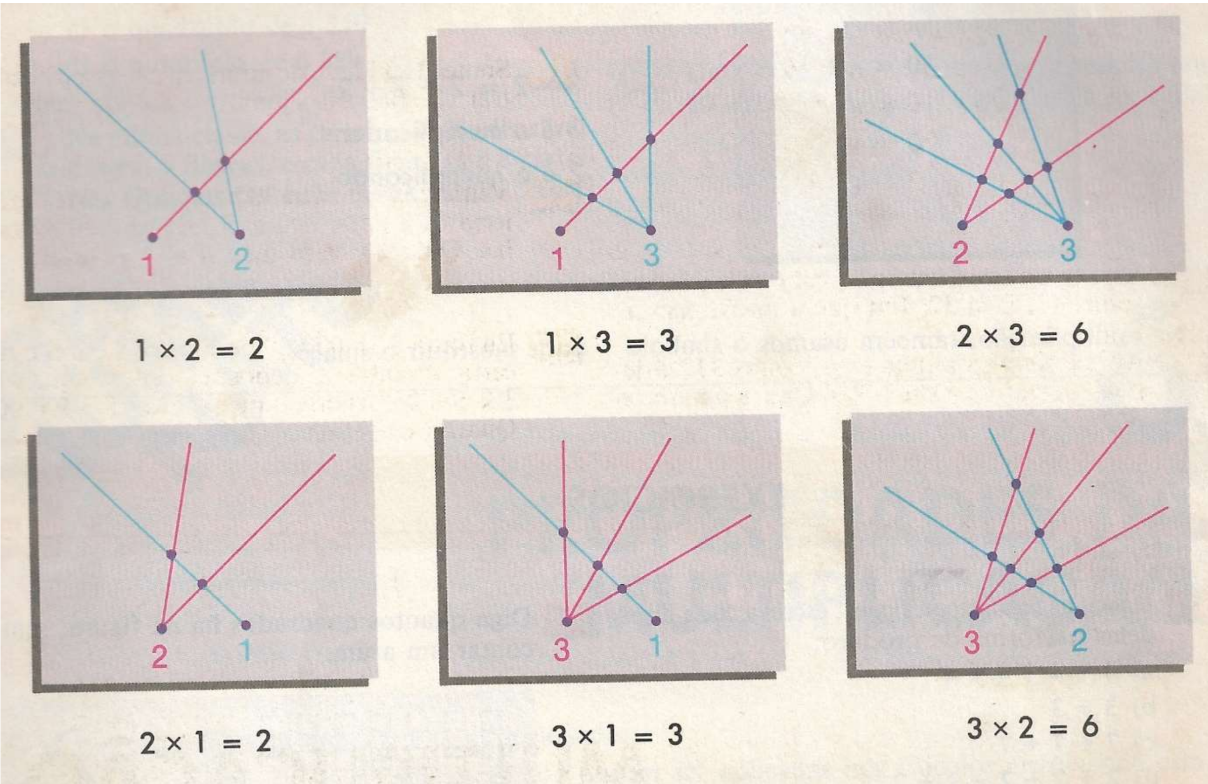
Apesar de haver no título de um capitulo o nome “sistemas de numeração”, o livro apresenta apenas o nosso sistema hindu-arábico e o sistema de numeração romana. Ao abordar multiplicações de números naturais, o livro utiliza o recurso visual chamado de cruzamento de feixes. Na Figura 48 e na Figura 49, podemos observar que os números naturais são representados por feixes e a quantidade de pontos de interseção do cruzamento dos feixes é o resultado da multiplicação entre os números naturais.

Figura 48: Representação dos números naturais utilizando feixes



Fonte: Di Pierro Netto, 1995a, p. 34.

Figura 49: Multiplicação de números naturais utilizando feixes

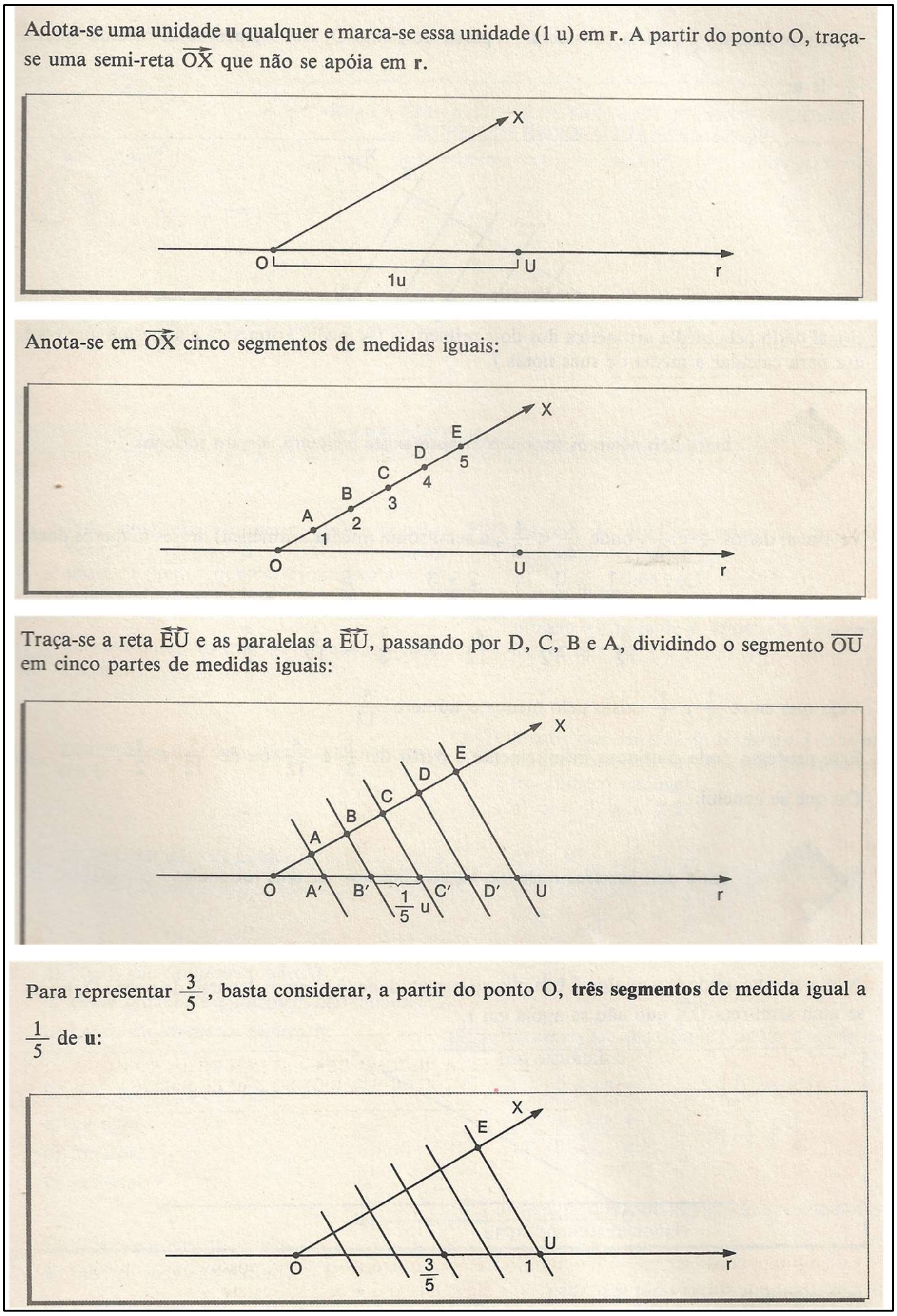


Fonte: Di Pierro Netto, 1995a, p. 34.

Ainda na Figura 49, podemos observar que Di Pierro Netto (1995a) utiliza a multiplicação por cruzamento dos feixes para apresentar a propriedade aritmética comutatividade.

Todos os conjuntos numéricos presentes na coleção são abordados de forma aritmética, e a representação geométrica é dada na marcação dos números na reta real. Para a representação geométrica dos números racionais, a obra apresenta alguns passos, vejamos na figura a seguir.

Figura 50: Representação geométrica dos números racionais


Adota-se uma unidade **u** qualquer e marca-se essa unidade (1 u) em **r**. A partir do ponto O, traça-se uma semi-reta $\overrightarrow{OX}$ que não se apóia em **r**.

Anota-se em $\overrightarrow{OX}$ cinco segmentos de medidas iguais:

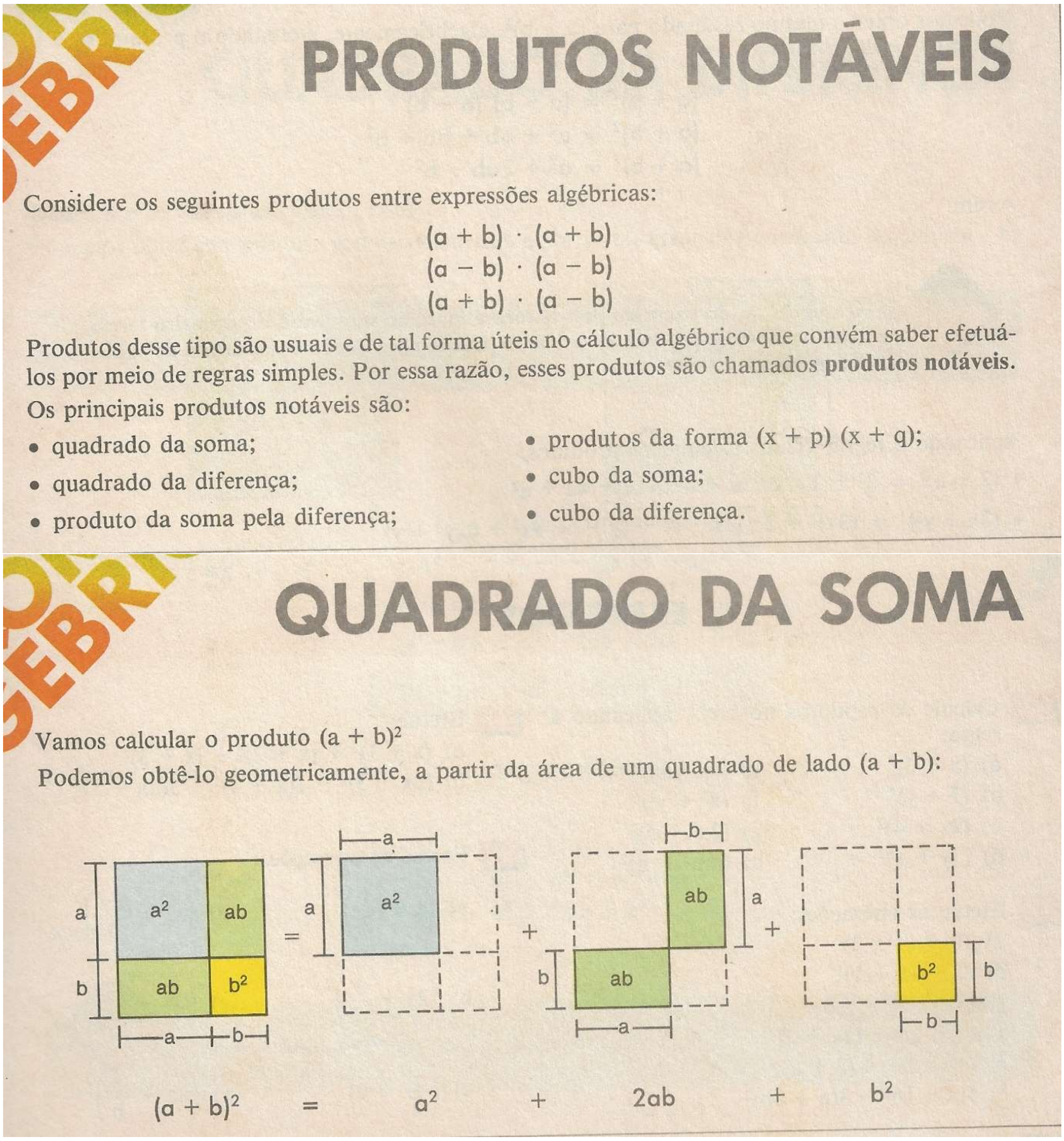
Traça-se a reta $\overleftrightarrow{EU}$ e as paralelas a $\overleftrightarrow{EU}$, passando por D, C, B e A, dividindo o segmento $\overline{OU}$ em cinco partes de medidas iguais:

Para representar $\frac{3}{5}$, basta considerar, a partir do ponto O, **três segmentos** de medida igual a $\frac{1}{5}$ de **u**:

Fonte: Di Pierro Netto, 1995b, p. 65-66.

Scipione utiliza a Geometria através do cálculo de áreas para introduzir o conceito de produto notável no livro destinado a 7ª série.

Figura 51: Produtos notáveis



PRODUTOS NOTÁVEIS

Considere os seguintes produtos entre expressões algébricas:

$$(a + b) \cdot (a + b)$$
$$(a - b) \cdot (a - b)$$
$$(a + b) \cdot (a - b)$$

Produtos desse tipo são usuais e de tal forma úteis no cálculo algébrico que convém saber efetuá-los por meio de regras simples. Por essa razão, esses produtos são chamados **produtos notáveis**.

Os principais produtos notáveis são:

- quadrado da soma;
- quadrado da diferença;
- produto da soma pela diferença;
- produtos da forma $(x + p)(x + q)$;
- cubo da soma;
- cubo da diferença.

QUADRADO DA SOMA

Vamos calcular o produto $(a + b)^2$

Podemos obtê-lo geometricamente, a partir da área de um quadrado de lado $(a + b)$:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Fonte: Di Pierro Netto, 1995c, p. 57.

Assim como a obra de Stávale (1943d *apud* ALVES, 2005), a coleção *Matemática Scipione – conceitos e histórias*, no último volume, também apresenta a fórmula resolutiva de equações do segundo grau $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, contudo se refere como fórmula de Bhaskara, e sua dedução através do método de completar quadrado, conforme a Figura 52.

Figura 52: Equação do 2º grau

Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$ e acompanhe as etapas para a obtenção da fórmula geral.
Isolamos **c** no 2º membro:

$$ax^2 + bx = -c$$

Dividimos por **a** os dois membros:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Completamos o trinômio quadrado perfeito, adicionando $\frac{b^2}{4a^2}$ a ambos os membros:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A expressão $b^2 - 4ac$ chama-se **discriminante** da equação do 2º grau, e é representada pela letra grega maiúscula Δ (delta).
Podemos então escrever a fórmula obtida assim:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac}$$

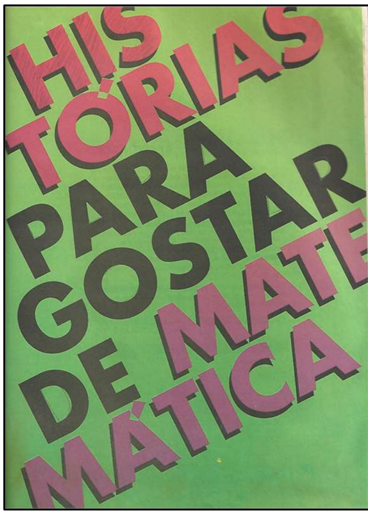
Δ
DISCRIMINANTE
$b^2 - 4ac$

Essa é a fórmula geral para a resolução de equações do 2º grau, também conhecida como **fórmula de Bhaskara** (pronuncia-se "Báscara").

Fonte: Di Pierro Netto, 1995d, p. 43.

Além disso, no final de cada livro encontra-se um complemento nomeado como "Histórias para gostar de matemática", na qual Scipione faz uso da História da Matemática de forma a saudar alunos e professores com histórias sobre a origem de conhecimentos, facilitando o despertar do aluno à curiosidade e ao gosto pela aprendizagem. Na Figura 53 podemos ver as histórias contidas no complemento do livro destinado à 8ª série.

Figura 53: Histórias para gostar de Matemática



SUMÁRIO

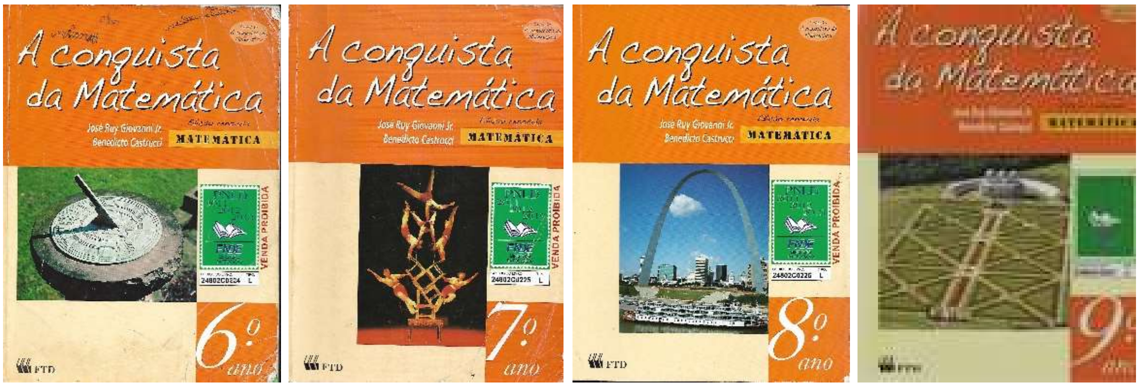
Fonte: Di Pierro Netto, 1995d.

Dessa forma, vimos que Scipione apresenta inicialmente a Aritmética para depois acrescentar o estudo da Álgebra, tendo a Geometria presente em todas as séries.

4.7 A conquista da Matemática (JÚNIOR; CASTRUCCI, 2009a, 2009b, 2009c, 2009d)

A edição renovada da coleção *A conquista da Matemática* de José Ruy Giovanni Jr[30] (1963 –) e Benedito Castrucci[31] ([?] – 1995), editada pela FTD, em 2009, foi indicada no Guia de Livros Didáticos no PNLD 2011 e atende a Lei n.º 144 de 2005. Trataremos dos quatros livros destinados ao 6º, 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental (ver Figura 54).

Figura 54: Coleção de livros *A conquista da Matemática*



Fonte: Júnior; Castrucci, 2009a, 2009b, 2009c, 2009d.

O livro destinado ao 6º ano do Ensino Fundamental tem seus conteúdos divididos em capítulos, o primeiro é nomeado como "o ser humano vive cercado de números", o qual faz uma breve introdução sobre o nosso sistema de numeração fazendo o uso da História da Matemática. Em seguida, o livro aborda operações com números naturais, raiz quadrada, múltiplos e divisores, ponto, reta, plano, ângulo, polígonos, frações, porcentagem, números racionais, perímetro, área, volume, capacidade e medidas de massa.

O livro destinado ao 7º ano do Ensino Fundamental aborda os conteúdos operações com números inteiros, operações com números racionais, potências e raiz quadrada, quadrados perfeitos, equações do primeiro grau com incógnitas racionais, inequações do primeiro grau,

---

[30] Em Júnior e Castrucci (20099a) encontramos que Júnior é licenciado em Matemática pela USP e professor de Matemática em escolas de Ensino Fundamental e Ensino Médio desde 1985. Segundo Ferreira (2008), Júnior, a exemplo de seu pai, escreve livros didáticos de Matemática desde 1990 e viaja pelo Brasil ministrando palestras e cursos para professores, conhecendo melhor a realidade da educação do país.

[31] Em Júnior e Castrucci (20099a) encontramos que Castrucci foi bacharel e licenciado em Ciências Matemáticas pela USP, professor de Matemática na PUC-SP e na USP. Além disso, foi professor de Matemática em escolas públicas e particulares de Ensino Fundamental e Ensino Médio. Segundo Ferreira (2008), Castrucci foi participante ativo do GEEM nas décadas de 60 e 70, época do MMM, mencionados no capítulo anterior.

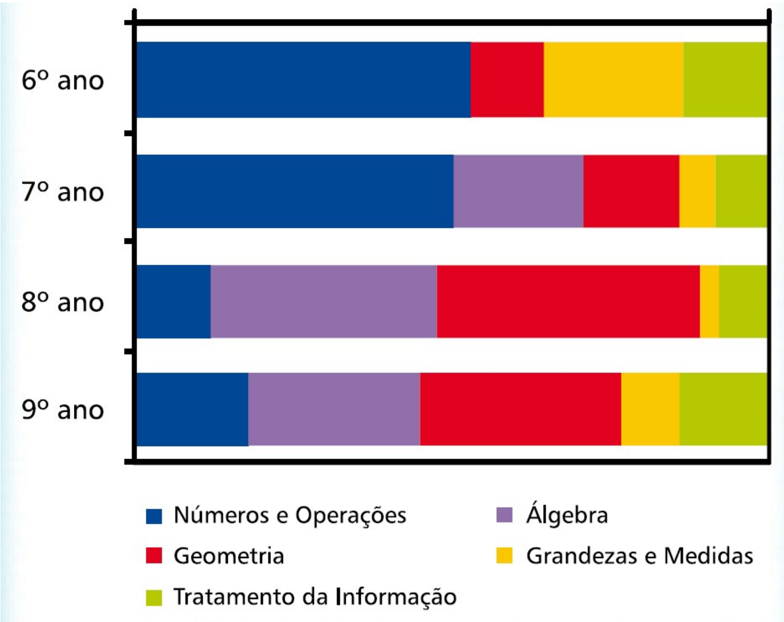
sistema de equações do primeiro grau, ângulos, polígonos, razões e proporções, grandezas proporcionais e porcentagem.

O livro destinado ao 8º ano do Ensino Fundamental aborda os conteúdos dos números irracionais, apresentando o número π e as operações com os números reais. Prossegue com a introdução ao cálculo algébrico, estudo dos polinômios e estudo das frações algébricas. Introduz ao estudo das equações, inequações e sistemas do 1º grau utilizando incógnitas reais. Aborda também o estudo de retas e ângulos, perímetros e diagonais de polígonos, finaliza com as propriedades dos triângulos, quadriláteros, círculo e circunferência.

Por fim, o livro destinado ao 9º ano do Ensino Fundamental aborda as noções elementares de estatística, as potências e suas propriedades, radicais e suas propriedades, equações do segundo grau, equações biquadradas e irracionais, coordenadas cartesianas, função polinomial do primeiro grau, função polinomial do segundo grau (ou função quadrática), segmentos proporcionais, teorema de Tales, semelhança, relações trigonométricas no triângulo retângulo, relações trigonométricas nos triângulos, áreas das figuras geométricas planas, circunferência e o círculo.

A análise da obra no Guia de Livros Didáticos no PNLD 2011 indica que os assuntos de uma mesma área estão bastante concentrados, o que dificulta as conexões com os demais. A análise apresenta o percentual de cada área nos livros da coleção, conforme a Figura 55.

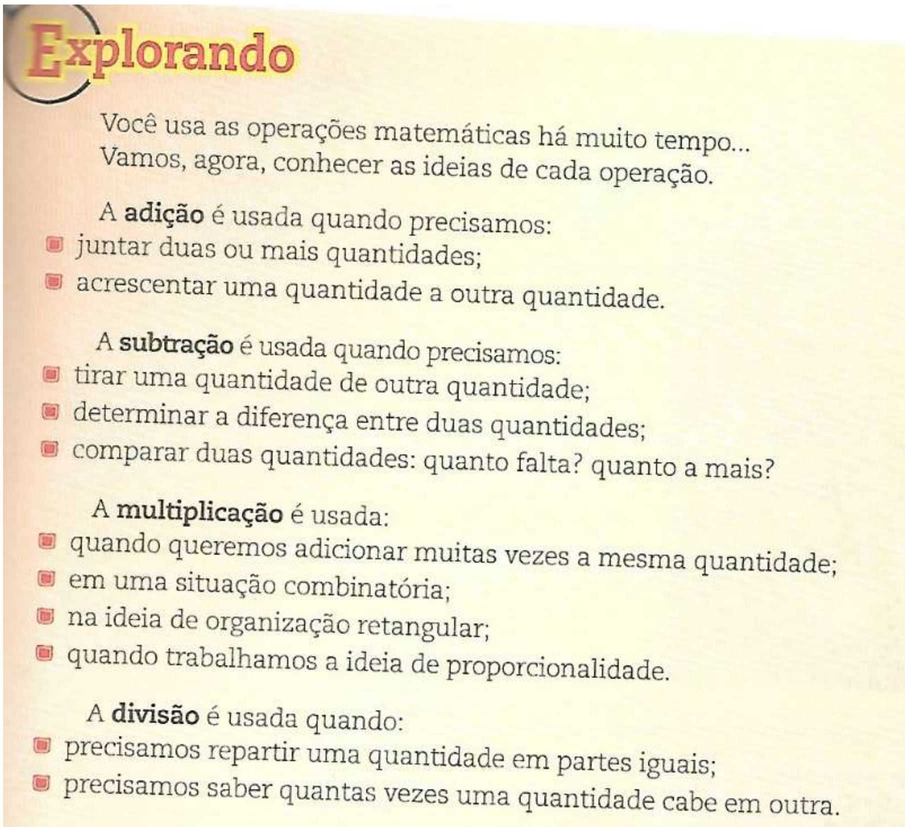
Figura 55: Percentual dos campos de Matemática na coleção



Fonte: Brasil, 2010, p. 45.

É possível notar que essa coleção traz uma linguagem mais próxima dos alunos, informando a eles o que está proposto em cada capítulo apenas com o título. Mais uma vez, trata inicialmente a Aritmética nos dois primeiros volumes para então, só depois, nos dois últimos volumes introduzir a Álgebra. A coleção aborda as operações fundamentais com os números naturais de forma simples, pois a mesma pressupõe que os alunos tenham o conhecimento adquirido nos anos iniciais do Ensino Fundamental, como podemos ver na Figura 56.

Figura 56: Operações com números naturais



Explorando

Você usa as operações matemáticas há muito tempo...
Vamos, agora, conhecer as ideias de cada operação.

A **adição** é usada quando precisamos:
- juntar duas ou mais quantidades;
- acrescentar uma quantidade a outra quantidade.

A **subtração** é usada quando precisamos:
- tirar uma quantidade de outra quantidade;
- determinar a diferença entre duas quantidades;
- comparar duas quantidades: quanto falta? quanto a mais?

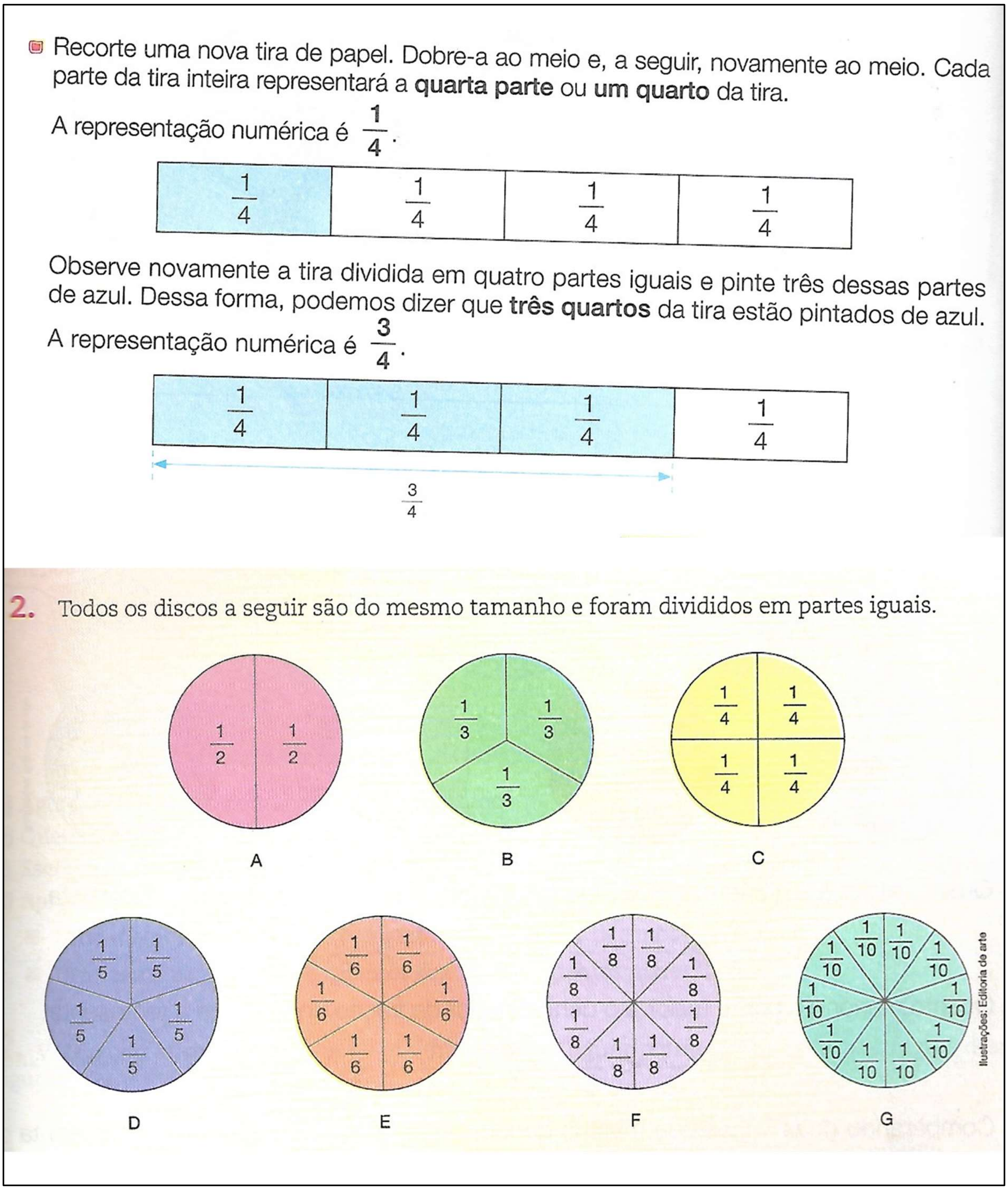
A **multiplicação** é usada:
- quando queremos adicionar muitas vezes a mesma quantidade;
- em uma situação combinatória;
- na ideia de organização retangular;
- quando trabalhamos a ideia de proporcionalidade.

A **divisão** é usada quando:
- precisamos repartir uma quantidade em partes iguais;
- precisamos saber quantas vezes uma quantidade cabe em outra.

Fonte: Júnior; Castrucci, 2009a, p. 31.

Diferente dos livros de Stávale, Galante e Santos, a obra de Júnior e Castrucci aborda o conteúdo de frações com muitas representações geométricas, como podemos observar na Figura 57.

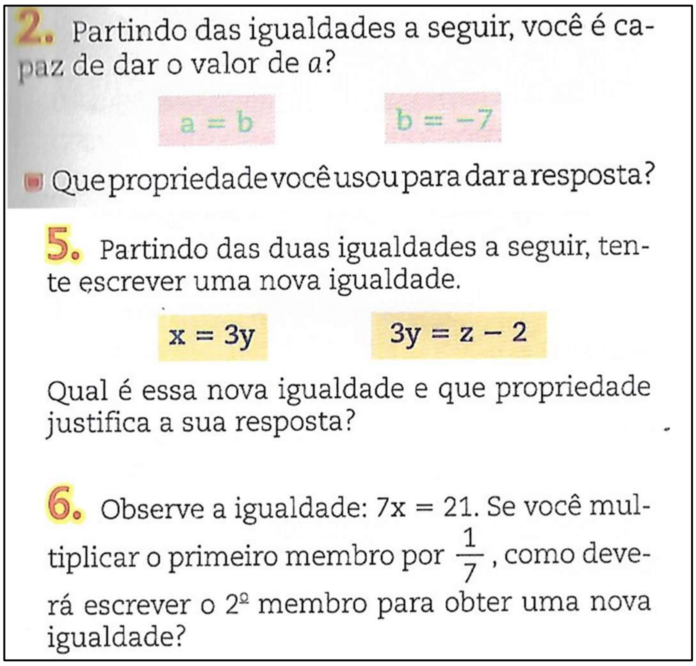
Figura 57: Frações



Fonte: Júnior; Castrucci, 2009a, p. 166, p. 175.

Os irracionais são apresentados com o estudo das raízes quadradas de alguns números naturais, e da definição do número π. A Álgebra é introduzida na generalização de propriedades numéricas tais como propriedades de igualdade e princípios de equivalência. Essa transição do raciocínio aritmético para o algébrico é feita de modo rápido nos conteúdos (ver Figura 58).

Figura 58: Transição da Aritmética para a Álgebra



2. Partindo das igualdades a seguir, você é capaz de dar o valor de a?

$a = b$ $\quad$ $b = -7$

Que propriedade você usou para dar a resposta?

5. Partindo das duas igualdades a seguir, tente escrever uma nova igualdade.

$x = 3y$ $\quad$ $3y = z - 2$

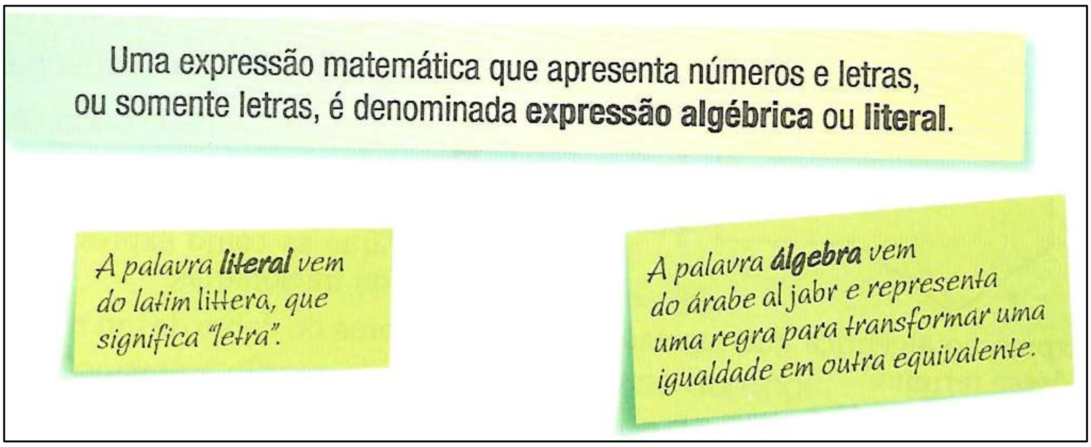
Qual é essa nova igualdade e que propriedade justifica a sua resposta?

6. Observe a igualdade: $7x = 21$. Se você multiplicar o primeiro membro por $\frac{1}{7}$, como deverá escrever o 2º membro para obter uma nova igualdade?

Fonte: Júnior; Castrucci, 2009b, pp. 119-120.

Apesar da coleção ter um cuidado em abordar cada conteúdo de acordo com o nível de cada ano, observa-se uma descontinuidade no estudo das equações, onde a mesma trabalha equações do primeiro grau com uma incógnita, em seguida aborda porcentagem e juros simples, e retoma com o estudo de sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas. Além disso, mesmo apresentando conceitos e pensamentos algébricos no livro do 7º ano, o significado da palavra Álgebra só é dada no livro do 8º ano com o conteúdo de expressões algébricas, como podemos ver na Figura 59.

Figura 59: Definição de Álgebra



Uma expressão matemática que apresenta números e letras, ou somente letras, é denominada **expressão algébrica** ou **literal**.

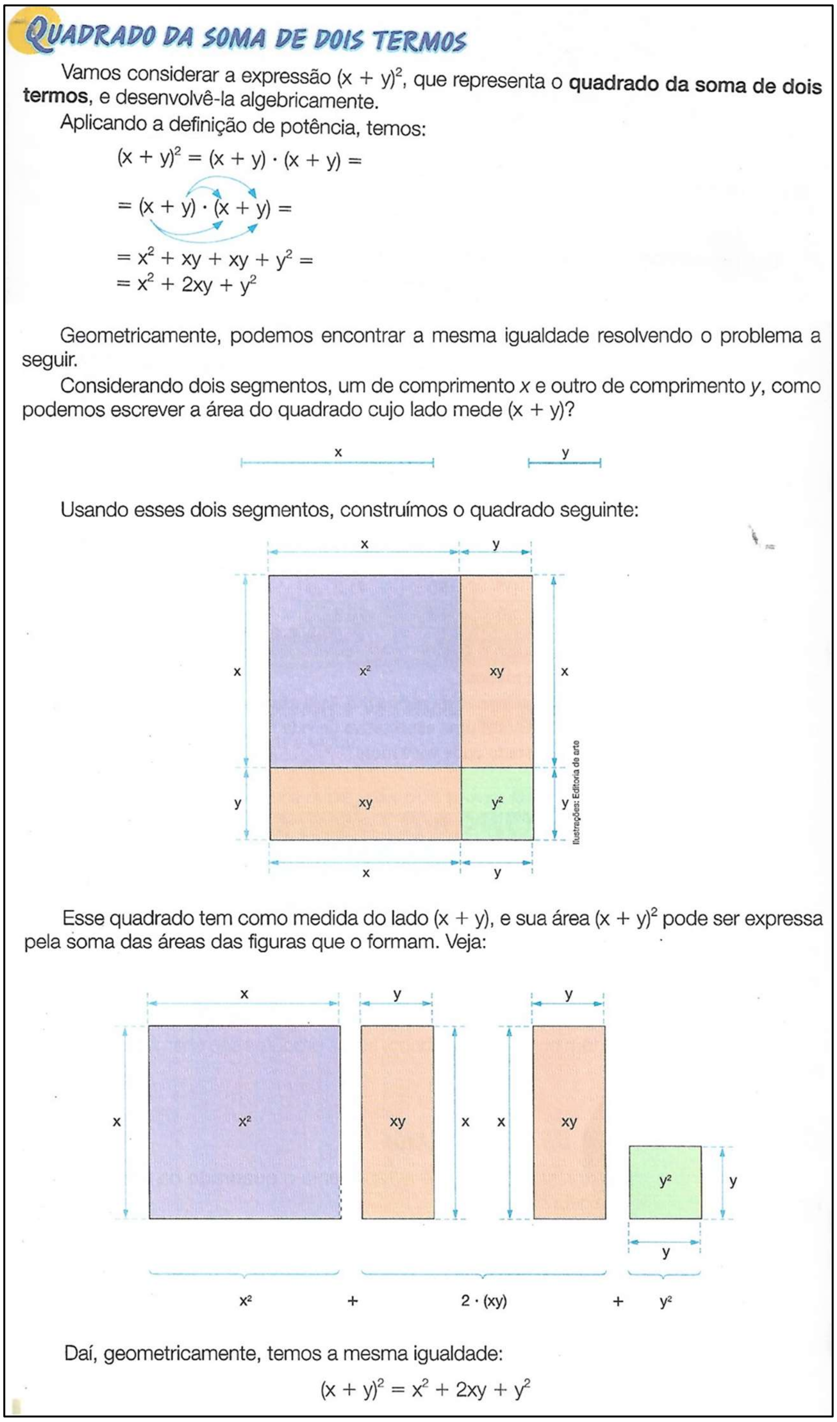
*A palavra **literal** vem do latim littera, que significa "letra".*

*A palavra **álgebra** vem do árabe al jabr e representa uma regra para transformar uma igualdade em outra equivalente.*

Fonte: Júnior; Castrucci, 2009c, p. 41.

Ao abordar os conteúdos de polinômios, a obra utiliza muitas figuras geométricas para auxiliar na compreensão. Em produtos notáveis, os autores apresentam inicialmente de forma algébrica, mas em seguida tomam segmentos com medidas x e y para mostrar geometricamente os casos "quadrado da soma de dois termos", "quadrado da diferença de dois termos" e "produto da soma pela diferença de dois termos", conforme a Figura 60.

Figura 60: Quadrado da soma de dois termos



QUADRADO DA SOMA DE DOIS TERMOS

Vamos considerar a expressão $(x + y)^2$, que representa o **quadrado da soma de dois termos**, e desenvolvê-la algebricamente.

Aplicando a definição de potência, temos:

$$(x + y)^2 = (x + y) \cdot (x + y) =$$
$$= (x + y) \cdot (x + y) =$$
$$= x^2 + xy + xy + y^2 =$$
$$= x^2 + 2xy + y^2$$

Geometricamente, podemos encontrar a mesma igualdade resolvendo o problema a seguir.

Considerando dois segmentos, um de comprimento *x* e outro de comprimento *y*, como podemos escrever a área do quadrado cujo lado mede $(x + y)$?

Usando esses dois segmentos, construímos o quadrado seguinte:

Esse quadrado tem como medida do lado $(x + y)$, e sua área $(x + y)^2$ pode ser expressa pela soma das áreas das figuras que o formam. Veja:

Daí, geometricamente, temos a mesma igualdade:

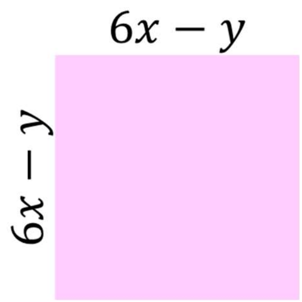
$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Fonte: Júnior; Castrucci, 2009c, pp. 91-92.

Apesar de não exigirem a representação geométrica na resolução dos problemas propostos, selecionamos o problema **"Utilizando as regras dos produtos notáveis, calcule: $(\boldsymbol{6x-y})^2$"** (JÚNIOR; CASTRUCCI, 2009c, p. 97) para resolver utilizando o auxílio da Geometria.

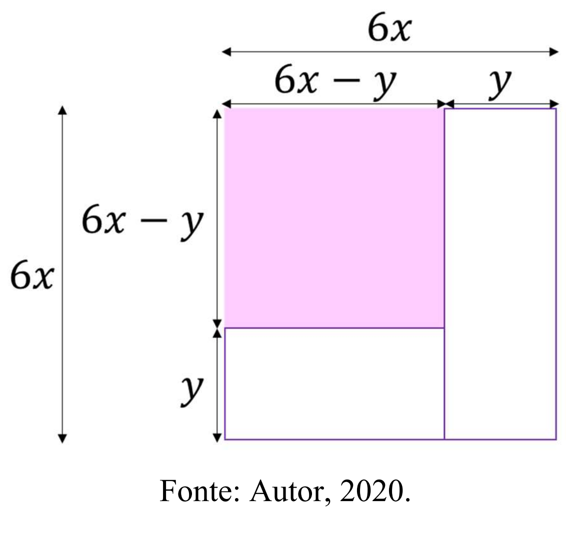
Resolução: Usaremos a representação geométrica utilizada em Júnior e Castrucci (2009c, pp. 93-94) para o quadrado da diferença de dois termos. Consideremos um quadrado de lado $6x - y$, conforme a Figura 61 e vamos compor dois retângulos, obtendo um quadrado maior com lado $6x$, conforme a Figura 62.

Figura 61: Resolução do problema



Fonte: Autor, 2020.

Figura 62: Representação geométrica de $(6x - y)^2$

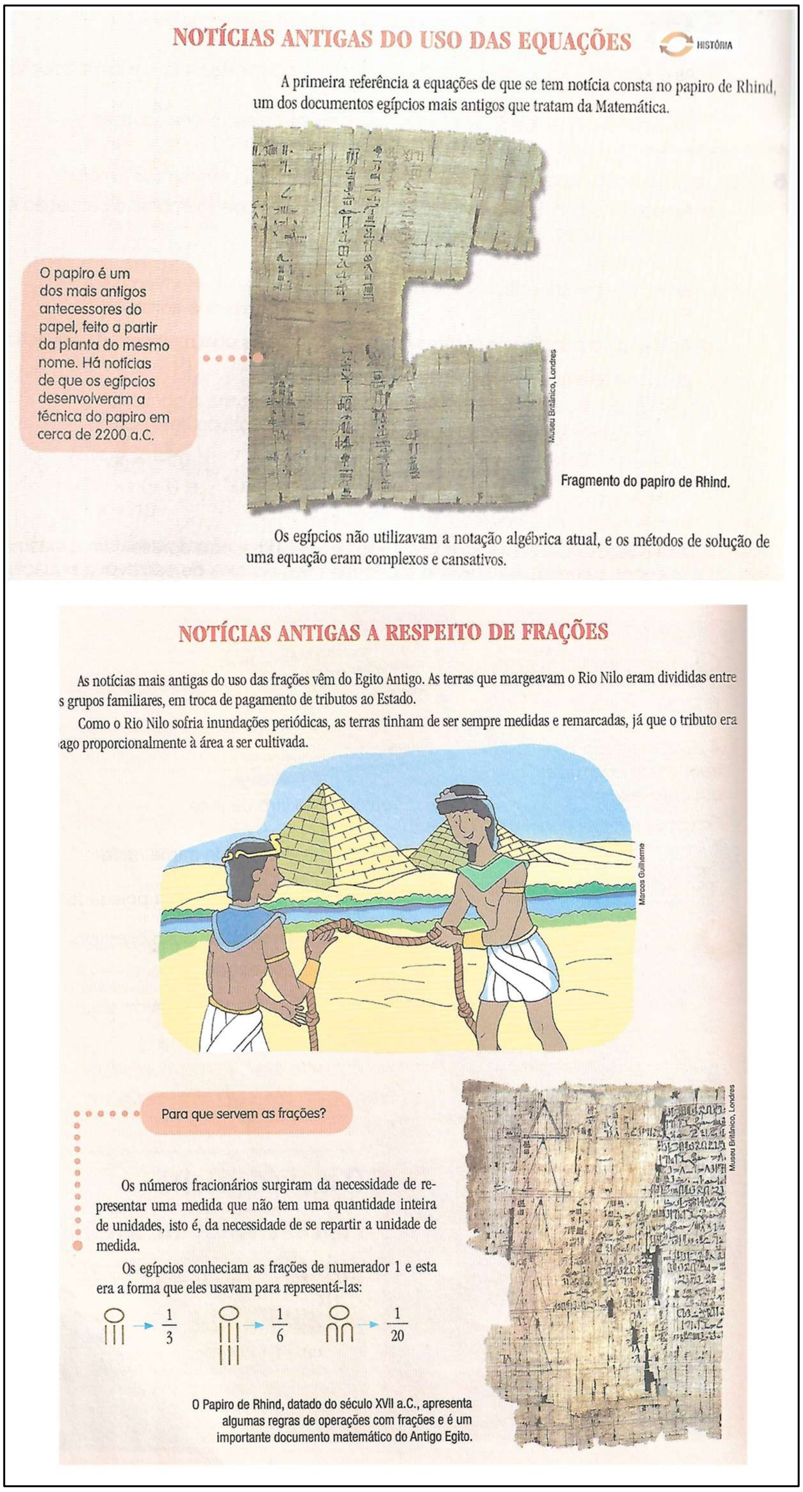


Fonte: Autor, 2020.

Podemos obter a área do quadrado de lado $6x - y$ subtraindo as áreas dos retângulos formados da área do quadrado maior, cujo é $36x^2$. Temos que as áreas dos retângulos formados são: $6xy - y^2$ e $6xy$. Portanto, $(6x - y)^2 = 36x^2 - 6xy + y^2 - 6xy = 36x^2 - 12xy + y^2$.

Assim como a obra de Scipione, essa também faz uso da História da Matemática em seus livros, dessa vez é apresentada antes de alguns capítulos a serem estudados (ver Figura 63).

Figura 63: História da Matemática

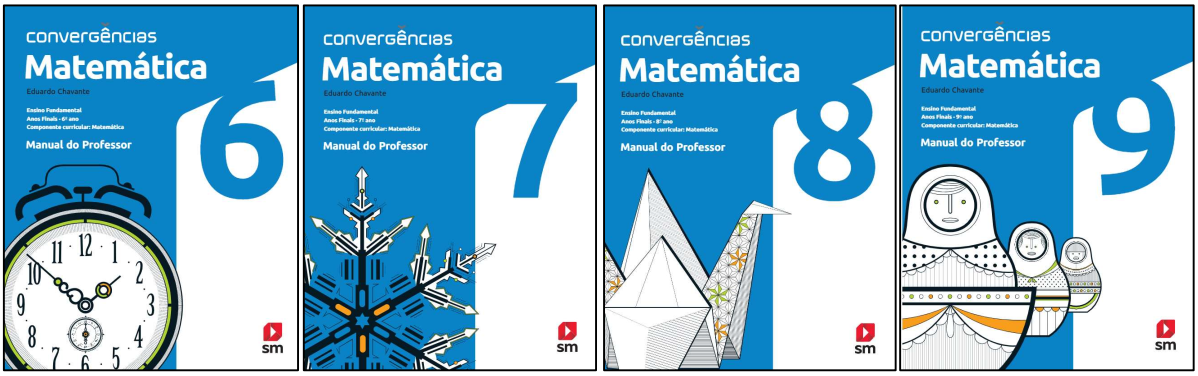


Fonte: Júnior; Castrucci, 2009a, p. 164, 2009b, p. 132.

4.8 Convergências – Matemática (CHAVANTE, 2018a, 2018b, 2018c, 2018d)

A segunda edição da coleção *Convergências – Matemática* de Eduardo Rodrigues Chavante[32], editada pela SM, em 2018, foi indicada no Guia de Livros Didáticos no PNLD 2020 e prossegue com a organização da coleção anterior. Trataremos dos quatros livros destinados ao 6º, 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental (ver Figura 64).

Figura 64: Coleção de livros *Convergências – Matemática*



Fonte: Chavante, 2018a, 2018b, 2018c, 2018d

O livro destinado ao 6º ano do Ensino Fundamental traz seus conteúdos divididos por capítulos e aborda sistemas de numeração egípcio, romano e indo-arábico; operações com os números naturais; figuras geométricas planas e espaciais; potenciação e radiciação de números naturais; múltiplos e divisores; retas e ângulos; frações; números decimais; estatística e probabilidade; plano cartesiano; medidas de comprimento, área, tempo, massa, temperatura, capacidade e volume.

O livro destinado ao 7º ano do Ensino Fundamental retoma a abordar os conteúdo de múltiplos e divisores de números naturais e introduz o estudo dos números inteiros e suas operações fundamentais; prossegue com operações com os números racionais; expressões algébricas; equações do primeiro grau; inequações do primeiro grau; razão e proporção; ângulos; transformações geométricas; polígonos; medidas de área e de volume; estatística e probabilidade.

O livro destinado ao 8º ano do Ensino Fundamental continua o estudo de conjuntos com os números irracionais e os números reais; prossegue com potências e raízes; ângulos e polígonos; transformações geométricas; estatística e probabilidade; o estudo dos triângulos e

[32] Em Chavante (2018a) encontramos que é licenciado em Matemática pela PUC do Paraná, especialista em mídias na educação pela Universidade Estadual do Centro-Oeste (Unicentro-PR), professor da rede pública de Ensino Fundamental e Ensino Médio e autor de livros didáticos para o Ensino Fundamental.

quadriláteros; cálculo algébrico; círculo e circunferência; equações do primeiro grau; sistema de equações do primeiro grau; equação do segundo grau; razão e proporção; medidas de capacidade e de volume.

O livro destinado ao 9º ano do Ensino Fundamental, inicia com uma grande revisão dos conjuntos numéricos e prossegue com potenciação e radiciação com números reais; produtos notáveis e fatoração; equações do segundo grau; razão e proporção; semelhanças de polígonos, teorema de Tales; relações no triângulo retângulo; teorema de Pitágoras; relações trigonométricas no triângulo; funções; função afim; função quadrática; matemática financeira (porcentagem e juros); estatística e probabilidade; medidas de comprimento, energia e informática; circunferência e círculo; figuras geométricas espaciais.

A análise da obra no Guia Digital de Livros Didáticos no PNLD 2020 (BRASIL, 2019) não apresenta um gráfico mostrando o percentual de cada área de estudo nos livros dessa coleção, como na coleção anterior (ver Figura 52), mas comenta que as unidades temáticas Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidades e estatística são contempladas em toda a obra. Observa um destaque maior para a Estatística, que percorre os diferentes capítulos da obra, com sugestões de análise e interpretação de gráficos e tabelas.

Nessa obra, percebemos que o autor organizou os conteúdos de modo que estivessem presentes em todos os livros, sendo abordados de forma gradativa a cada ano. Além disso, os conteúdos remetem sempre a revisões gerais de conteúdos anteriores. A coleção possui 2448 exercícios e problemas propostos além dos tópicos “Verificando a Rota”, com questões que retomam os conteúdos desenvolvidos.

A Álgebra é introduzida no conteúdo expressões algébrica no 7º ano. O autor aborda a linguagem algébrica, os conceitos de expressões algébricas, variável, incógnita e fórmulas, mas a definição de Álgebra não é apresentada, como podemos ver na Figura 65.

Figura 65: Definições algébricas

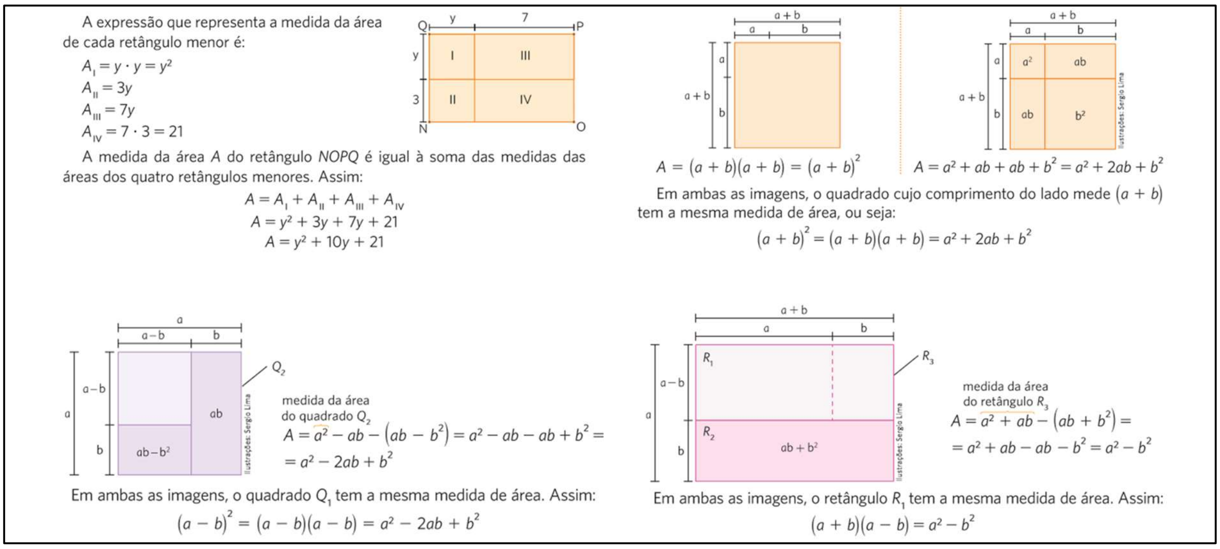
As expressões matemáticas em que aparecem letras e números são chamadas **expressões algébricas**. Nelas as letras recebem o nome de **variáveis**. Quando substituímos as variáveis de uma expressão algébrica por números e realizamos os cálculos, estamos determinando um **valor numérico** da expressão.

As **fórmulas** são sentenças matemáticas que apresentam, resumidamente, os cálculos que devem ser realizados para se obter um resultado. Nas fórmulas, as letras utilizadas para representar números são chamadas **variáveis**.

Fonte: Chavante, 2018b, p. 84, p. 88.

Ao abordar polinômios no livro do 8º ano, o autor apresenta apenas as operações, mas no livro do 9º ano é apresentado que dentre algumas multiplicações de polinômios há alguns que apresentam padrões que permitem reduzir a quantidade de cálculos, chamados de produtos notáveis. Todo o conteúdo de polinômios presente na coleção é abordado com representações geométricas e algébricas, como podemos ver na Figura 66.

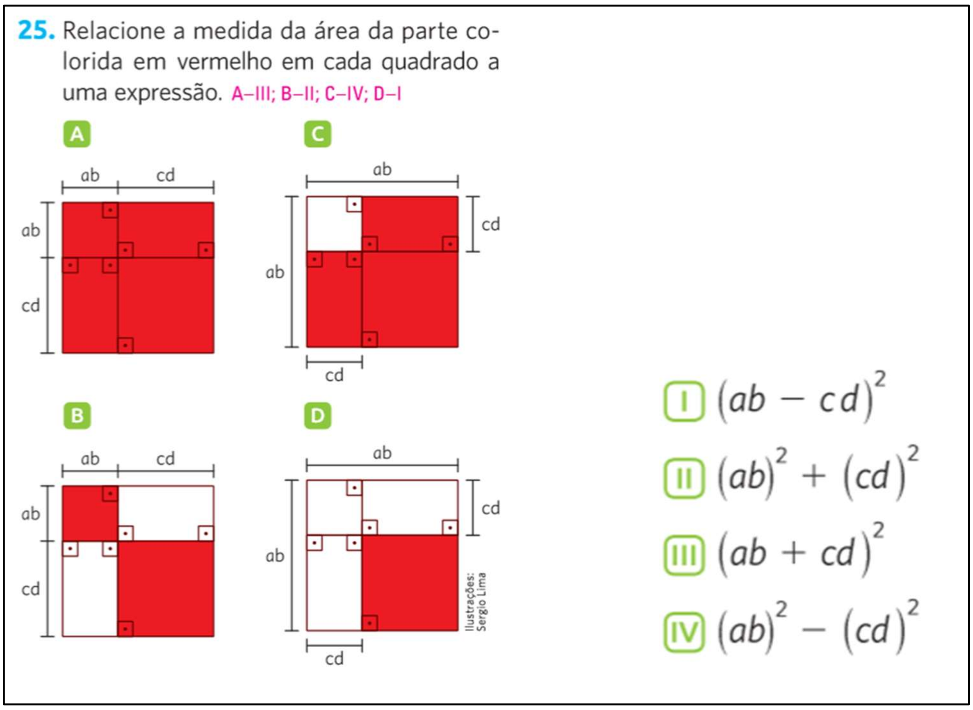
Figura 66: Conteúdo de polinômios na coleção



FONTE: Chavante, 2018c, p. 164, 2018d, pp. 30-32.

Dentre os problemas propostos de produtos notáveis que envolvem a Álgebra com a Geometria, selecionamos um para resolver (ver Figura 67).

Figura 67: Problema de produtos notáveis



Fonte: Chavante, 2018d, p. 38.

Resolução: Na letra (a), podemos notar que é um quadrado da soma, pois todas as áreas estão em vermelho. Sendo assim, basta escrever $A = (ab + cd)^2$, expressão III.

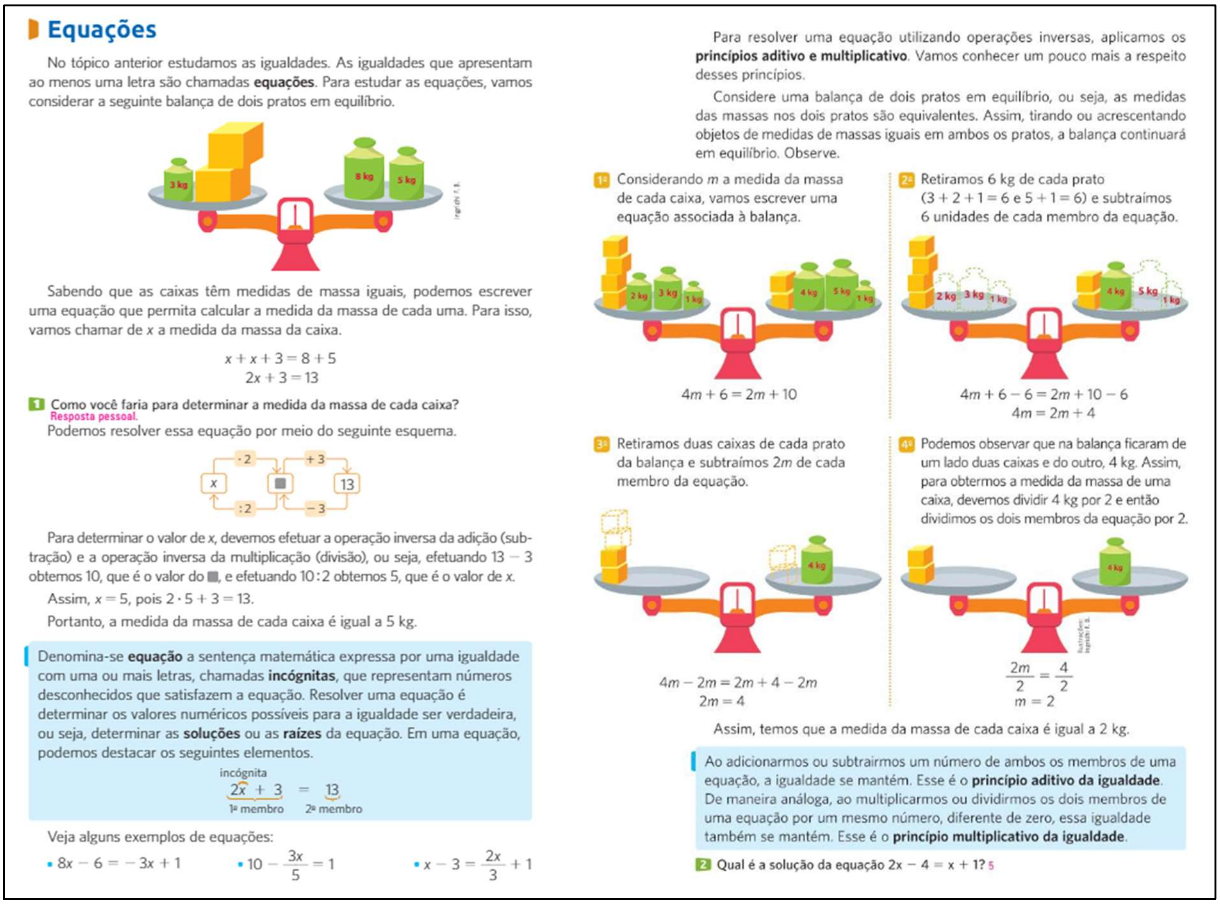
Na letra (b), podemos ver que as áreas vermelhas são dois quadrados de lados ab e cd respectivamente. Sendo assim, basta escrever $A = (ab)^2 + (cd)^2$, expressão II.

Na letra (c), temos um quadrado de lado ab pintado em vermelho com a retirada de um quadrado de lado cd. Sendo assim, basta escrever $A = (ab)^2 - (cd)^2$, expressão IV.

Na letra (d), temos apenas um quadrado em vermelho, cujo lado é $ab - cd$, logo a área é $A = (ab - cd)^2$, expressão I.

O autor apresenta o conceito de equações com muitas imagens para facilitar a compreensão do aluno. Conforme a Figura 65.

Figura 68: Equações



Equações

No tópico anterior estudamos as igualdades. As igualdades que apresentam ao menos uma letra são chamadas **equações**. Para estudar as equações, vamos considerar a seguinte balança de dois pratos em equilíbrio.

Sabendo que as caixas têm medidas de massa iguais, podemos escrever uma equação que permita calcular a medida da massa de cada uma. Para isso, vamos chamar de x a medida da massa da caixa.

$$x + x + 3 = 8 + 5$$
$$2x + 3 = 13$$

1 Como você faria para determinar a medida da massa de cada caixa?
Resposta pessoal.

Podemos resolver essa equação por meio do seguinte esquema.

$$x \xrightarrow{\cdot 2} \blacksquare \xrightarrow{+3} 13 \qquad 13 \xrightarrow{-3} \blacksquare \xrightarrow{:2} x$$

Para determinar o valor de x, devemos efetuar a operação inversa da adição (subtração) e a operação inversa da multiplicação (divisão), ou seja, efetuando $13 - 3$ obtemos 10, que é o valor do ■, e efetuando $10 : 2$ obtemos 5, que é o valor de x.

Assim, $x = 5$, pois $2 \cdot 5 + 3 = 13$.

Portanto, a medida da massa de cada caixa é igual a 5 kg.

Denomina-se **equação** a sentença matemática expressa por uma igualdade com uma ou mais letras, chamadas **incógnitas**, que representam números desconhecidos que satisfazem a equação. Resolver uma equação é determinar os valores numéricos possíveis para a igualdade ser verdadeira, ou seja, determinar as **soluções** ou as **raízes** da equação. Em uma equação, podemos destacar os seguintes elementos.

$$\underbrace{2\overset{\text{incógnita}}{x} + 3}_{1^{\text{o}}\text{ membro}} = \underbrace{13}_{2^{\text{o}}\text{ membro}}$$

Veja alguns exemplos de equações:

- $8x - 6 = -3x + 1$
- $10 - \frac{3x}{5} = 1$
- $x - 3 = \frac{2x}{3} + 1$

Para resolver uma equação utilizando operações inversas, aplicamos os **princípios aditivo e multiplicativo**. Vamos conhecer um pouco mais a respeito desses princípios.

Considere uma balança de dois pratos em equilíbrio, ou seja, as medidas das massas nos dois pratos são equivalentes. Assim, tirando ou acrescentando objetos de medidas de massas iguais em ambos os pratos, a balança continuará em equilíbrio. Observe.

1º Considerando m a medida da massa de cada caixa, vamos escrever uma equação associada à balança.

$$4m + 6 = 2m + 10$$

2º Retiramos 6 kg de cada prato ($3 + 2 + 1 = 6$ e $5 + 1 = 6$) e subtraímos 6 unidades de cada membro da equação.

$$4m + 6 - 6 = 2m + 10 - 6$$
$$4m = 2m + 4$$

3º Retiramos duas caixas de cada prato da balança e subtraímos $2m$ de cada membro da equação.

$$4m - 2m = 2m + 4 - 2m$$
$$2m = 4$$

4º Podemos observar que na balança ficaram de um lado duas caixas e do outro, 4 kg. Assim, para obtermos a medida da massa de uma caixa, devemos dividir 4 kg por 2 e então dividimos os dois membros da equação por 2.

$$\frac{2m}{2} = \frac{4}{2}$$
$$m = 2$$

Assim, temos que a medida da massa de cada caixa é igual a 2 kg.

Ao adicionarmos ou subtrairmos um número de ambos os membros de uma equação, a igualdade se mantém. Esse é o **princípio aditivo da igualdade**. De maneira análoga, ao multiplicarmos ou dividirmos os dois membros de uma equação por um mesmo número, diferente de zero, essa igualdade também se mantém. Esse é o **princípio multiplicativo da igualdade**.

2 Qual é a solução da equação $2x - 4 = x + 1$? 5

Fonte: Chavante, 2008b, pp. 97-98.

Ao abordar equações do segundo grau, o livro apresenta, através do método de completar quadrado, a fórmula resolutiva $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ sem mencionar o termo “fórmula de Bhaskara”, conforme a figura 69.

Figura 69: Dedução da fórmula resolutiva da equação do 2º grau

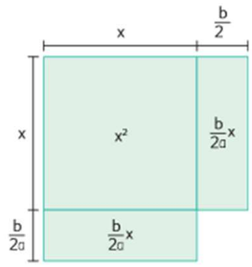
Podemos deduzir a fórmula resolutiva utilizando o método de completar quadrados. Para isso, partiremos da equação genérica $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

Como o objetivo é obtermos um trinômio quadrado perfeito no primeiro membro da equação, primeiro dividimos todos os termos por a e depois isolamos o termo independente no 2º membro da equação.

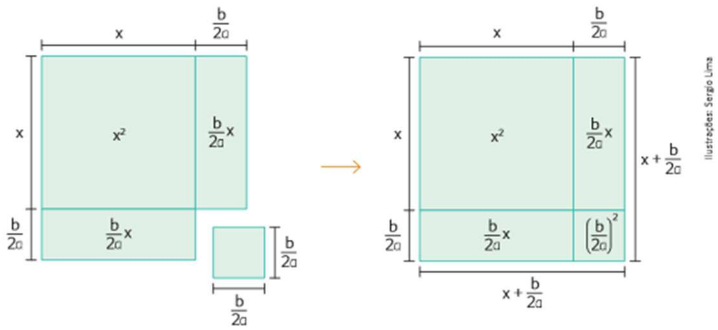
$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Em seguida, reescrevemos o primeiro membro da equação de maneira conveniente, a fim de que possamos visualizá-lo geometricamente como a soma da medida de três áreas quadrangulares. Observe.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \underbrace{x^2}_{\substack{\text{medida da área de um quadrado}\\ \text{cuja medida do comprimento do lado é } x}} + \underbrace{2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x}_{\substack{\text{medida da área de um retângulo cuja medida do}\\ \text{comprimento dos lados são } \frac{b}{2a} \text{ e } x}}$$



Para complementar a figura e obter um quadrado, temos de acrescentar um quadrado cuja medida do lado é $\frac{b}{2a}$ unidades de comprimento.



Assim, para obter um trinômio quadrado perfeito no primeiro membro da equação, adicionamos $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ a ambos os membros.

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x = -\frac{c}{a}$$
$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$
$$\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{trinômio quadrado perfeito}} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Agora, fatoramos o trinômio quadrado perfeito e isolamos a incógnita x no primeiro membro da equação.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Se $b^2 - 4ac$ for maior do que zero ou igual a zero, então podemos extrair a raiz quadrada em ambos os membros da igualdade.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$
$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fórmula resolutiva.

Fonte: Chavante, 2018d, pp. 50-51.

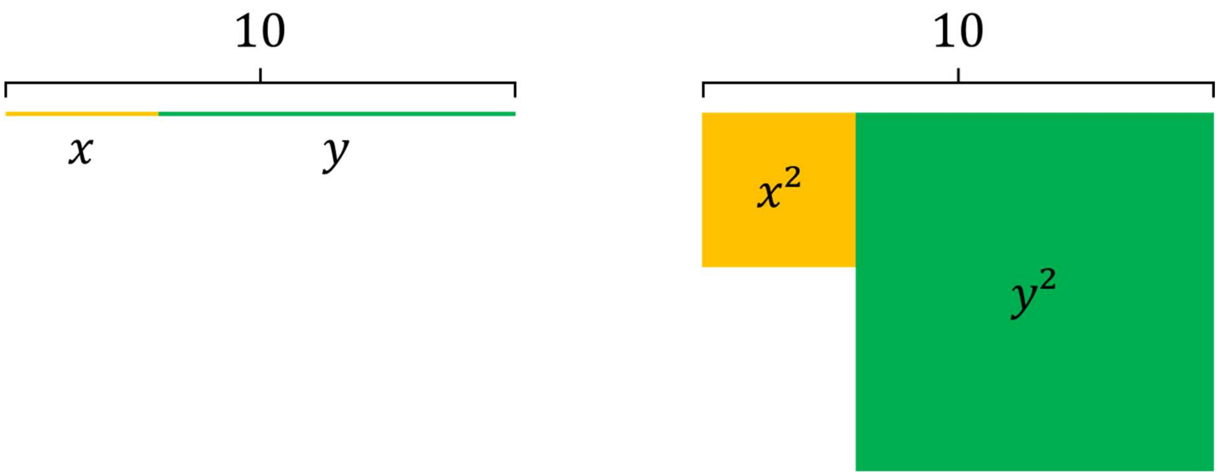
Além disso, no manual destinado ao professor, o autor alerta quanto a menção “fórmula de Bhaskara”.

> Desde 1960, é comum no Brasil dar o nome de Bhaskara à formula de resolução do segundo grau. No entanto, na literatura internacional este nome não é dado à fórmula. Realmente, a nomenclatura “fórmula de Bhaskara” não é a mais adequada. Primeiro porque Bhaskara não trabalhava com fórmulas [...] além disso, viu-se que problemas que recaem numa equação do segundo grau já apareciam muito antes de Bhaskara. (CHAVANTE, 2018c, p. 50)

Dentre os problemas de equação do segundo grau propostos na coleção, selecionamos o problema antigo **“Divida 10 unidades em duas partes, de modo que a soma dos produtos obtidos multiplicando cada parte por si mesma seja igual a 58” (**CHAVANTE, 2018d, p. 59) para resolver utilizando a Geometria.

Resolução: Como o livro mescla a Álgebra com a Geometria através do método de completar quadrados e a fórmula resolutiva $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, iremos utilizar ambos para a resolução do problema. Iniciaremos com um segmento de reta que mede 10 unidades, e dividimos ele em x e y. Em seguida, construímos dois quadrados, um com lados medindo x e outro com lados medindo y, conforme a Figura 70.

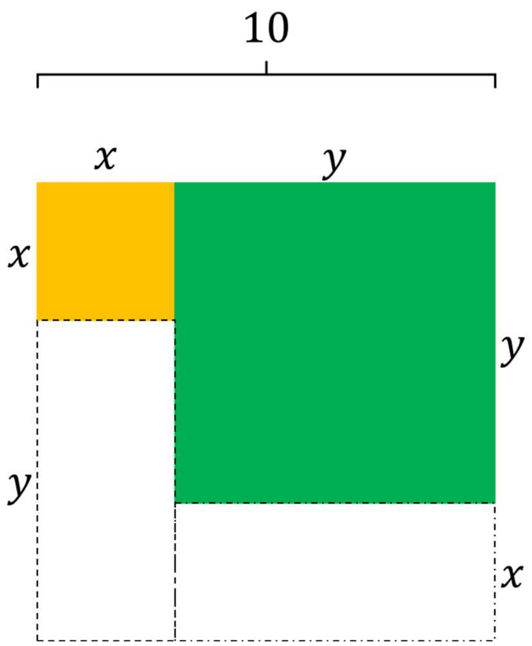
Figura 70: Resolução do problema proposto na coleção



Fonte: Autor, 2020.

Sabemos que os dois quadrados juntos equivalem a 58 unidades. E para completar um quadrado de lado 10 unidades, precisamos acrescentar dois retângulos. Vejamos a Figura 71.

Figura 71: Resolução do problema proposto na coleção



Fonte: Autor, 2020.

Com isso, temos que:

(I) $x + y = 10$ e (II) $x^2 + y^2 = 58$

Assim,

$$100 = x^2 + y^2 + xy + xy$$

$$2xy = 42.$$

Logo,

(III) $xy = 21$

De (I) temos:

$$y = 10 - x$$

Multiplicando x em ambos lados da igualdade temos:

(IV) $xy = x(10 - x)$

De (III) e (IV) temos:

$21 = 10x - x^2$ e $x^2 - 10x + 21 = 0$

Aplicando a fórmula resolutiva chegamos a

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 1 \times 21}}{2 \times 1} = \frac{10 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{10 \pm 4}{2}$$

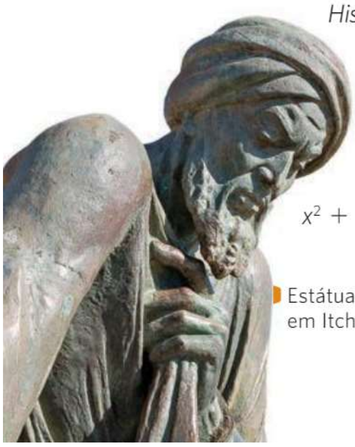
$$x = 7$$

$$x = 3$$

Utilizando (III): Para $x = 7$, temos $y = 3$ e para $x = 3$, temos $y = 7$. Portanto, os números procurados são 7 e 3.

Segundo Chavante (2018), esse problema foi proposto pelo matemático al-Khowarizmi em seu livro Hisâb al-jabr wa'l-muqâ-balah, publicado antes de 850 d.C. Além desse problema, a coleção apresenta muitas menções históricas ao longo das obras, como por exemplo, a origem do método completar quadrados (Figura 72), a descoberta dos números irracionais pelos pitagóricos (Figura 74), origem do π (Figura 73), entre outros.

Figura 72: História da Matemática – completar quadrados



Há registros do método de completar quadrados no livro *Hisâb al-jabr wa'l-muqâ-balah*, do matemático e astrônomo árabe Mohammed ibu-Musa al-Khowarizmi, que morreu pouco antes de 850 d.C. O método que consistia em construir quadrados e retângulos para obter as raízes de uma equação do 2º grau.

Observe como podemos resolver a equação $x^2 + 6x + 5 = 0$ utilizando o método de completar quadrados.

Estátua de Mohammed ibu-Musa al-Khowarizmi, em Itchan Kala, no Uzbequistão, em 2017.

Fonte: Chavante, 2018d, p. 48.

Figura 73: História da Matemática – o símbolo π

O símbolo π, que está relacionado à divisão da medida do comprimento de uma circunferência pela medida do comprimento do diâmetro, é também a 16ª letra do alfabeto grego e é a inicial da palavra grega περιφέρεια, que significa circunferência.

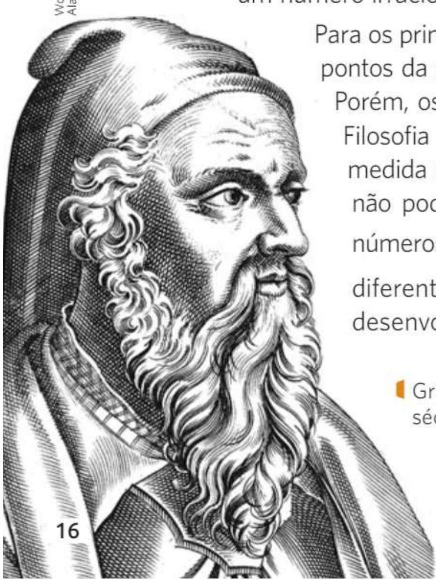
Um dos primeiros matemáticos a fazer tentativas científicas para calcular o valor de π foi o grego Arquimedes (287-212 a.C.), mas o símbolo só teve uma aceitação geral depois que o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) começou a utilizá-lo, por volta de 1737.

Arquimedes de Siracusa.

Fonte: Chavante, 2018b, p. 168.

Figura 74: História da Matemática – a descoberta dos irracionais

World History Archi
Alamy/Fotoarena



Ao realizar adições, subtrações, multiplicações e divisões envolvendo apenas números irracionais, o resultado tanto pode ser um número racional quanto um número irracional, dependendo dos números com os quais se opera.

Para os primeiros estudiosos de Matemática, parecia evidente que todos os pontos da reta numérica poderiam ser indicados por um número racional. Porém, os pitagóricos — estudiosos de Matemática, Ciências Naturais e Filosofia — chocaram os matemáticos da época ao perceberem que a medida do comprimento da diagonal de um quadrado de lado unitário não podia ser expressa por um número racional, isto é, não existiam números inteiros a e b expressando essa medida na forma $\frac{a}{b}$, com b diferente de zero. Assim, os números irracionais começaram a ser desenvolvidos e estudados.

Gravura de Pitágoras. Acredita-se que ele viveu no século V a.C. e fundou a famosa Escola Pitagórica.

16

Fonte: Chavante, 2018c, p. 16.

Aqui encerramos nossa descrição de como os livros didáticos do Ensino Secundário, Ensino Ginasial, anos finais do Ensino de 1º grau e Ensino Fundamental II abordaram alguns conteúdos aritméticos e algébricos ao longo dos anos e como relacionaram tais conteúdos com a Geometria. Além disso, nesse capítulo, apresentamos possíveis abordagens geométricas na resolução de problemas matemáticos propostos nos livros didáticos escolhidos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sabemos que nem sempre um pesquisador em História da Matemática tem fácil acesso a documentos antigos, bem como livros didáticos em acervos pessoais ou digitais. Apesar das dificuldades em conseguirmos as obras didáticas de modo que estivessem com coleções completas para compreendermos como a Aritmética e a Álgebra foram abordadas nos livros didáticos de 1879 a 2018 do Ensino Fundamental II, felizmente, alguns pesquisadores já abordaram algumas das obras utilizadas nesse trabalho, como pudemos ver no último capítulo. Essas pesquisas foram de suma importância para o direcionamento de certas informações, como biografia dos autores, endereço de repositório on-line e informações acerca do Sistema Educacional Brasileiro.

Para alcançarmos o objetivo almejado nesse trabalho, desenvolvemos a pesquisa e apresentamos nossos resultados em três capítulos. No primeiro capítulo apresentamos o caminho percorrido pela Aritmética, Álgebra e Geometria ao longo da História da Matemática. Esse estudo proporcionou compreender algumas de tantas contribuições dos estudiosos matemáticos que foram cruciais no estabelecimento dessas áreas e como foram relacionadas entre si. Além disso, como enfatizamos aspectos históricos dos conteúdos inseridos nos livros didáticos utilizados ao longo dos anos no Ensino de Matemática no Brasil, pudemos conhecer melhor o caminho percorrido na formação desses conteúdos. Ademais, para um professor de Matemática, conhecer tais informações poderá enriquecer ainda mais sua atuação em sala de aula.

No segundo capítulo abordamos a evolução do Sistema Educacional Brasileiro e o Ensino de Matemática do período Brasil Império ao período Nova República, apresentando as principais mudanças ocorridas na educação do país que impulsionaram o Ensino de Matemática que vivenciamos atualmente. Por meio desse estudo, pode-se conhecer algumas leis, decretos, portarias e resoluções estabelecidas, programas de ensino e parâmetros curriculares adotados, bem como as marcas deixadas pelos debates e reuniões acerca do Movimento da Matemática Moderna na década de 60 e a fiscalização das comissões e programas nacionais dos livros didáticos. Conhecer o Sistema Educacional Brasileiro e o Ensino de Matemática no Brasil por meio das organizações impostas pelo governo, foi de suma importância para entendermos a distribuição da Aritmética e Álgebra nos currículos escolares ao longo dos anos.

Por fim, no último capítulo, tratamos alguns aspectos e abordagens dos conteúdos de Álgebra e Aritmética em livros didáticos de 1879 a 2018 do Ensino Fundamental II, além dos problemas algébricos e aritméticos resolvidos com o auxílio da Geometria. Selecionamos oito obras didáticas, entre livros de volume único e coleções, e através dessa pesquisa exploratória selecionamos alguns conteúdos aritméticos ou algébricos para estudar, o que possibilitou a observação do método de abordagem de alguns autores e a modificação do mesmo durante o passar dos anos como, por exemplo, a menção "Fórmula de Bhaskara" para a fórmula resolutiva da equação de segundo grau e a relação da Geometria com os conteúdos aritméticos e algébricos. Essas modificações, assim como outras mencionadas ao longo do trabalho, deve-se ao fato do avanço dos estudos em História da Matemática, ao Movimento da Matemática Moderna, aos critérios exigidos nos CNLD e PNLD, e os objetivos estabelecidos nos PCN e na BNCC, vistos no segundo capítulo.

Além disso, acreditamos que trabalhar com livros didáticos, apesar das dificuldades em ter acesso, possibilitou compreender ainda mais o Ensino de Matemática no país e diversas ferramentas de aprendizagens utilizadas pelos autores como, por exemplo, a tabuada de Pitágoras e o cruzamento de feixes. Esse estudo também viabilizou aprender conteúdos que não são mais abordados atualmente como, por exemplo, pesos e medidas adotados no país no início do século XX, além de entender as organizações, metodologias e, principalmente, autores que contribuíram para a formação da disciplina Matemática que conhecemos hoje.

Como já mencionamos, alguns problemas de Álgebra e Aritmética foram abordados de forma geométrica ao longo da História da Matemática, sendo perceptível que tal abordagem é mais uma possibilidade de ensino e pode ser benéfica no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Dessa forma, ao selecionarmos alguns problemas algébricos e aritméticos propostos nos livros didáticos e, em seguida, realizarmos uma abordagem geométrica para resolvê-los, pôde-se verificar que resoluções geométricas desses problemas também podem contribuir na aprendizagem de alguns conteúdos.

Acreditamos que esse trabalho facilitará para o professor de Matemática e/ou pesquisador em História da Educação Matemática ter acesso a aspectos abordados de alguns conteúdos aritméticos e algébricos em livros didáticos, uma vez que é de suma importância perceber as modificações e, consequentemente, as diversas metodologias de abordar um conteúdo, facilitando a escolha do melhor modo a ser adotado, principalmente no ensino da Aritmética e Álgebra, ambas relacionadas com a Geometria. Isso porque se pode criar um grande abismo quando o aluno sente dificuldade em um conteúdo inicial ou quando o professor introduz os conceitos aritméticos e algébricos de maneira brusca.

REFERÊNCIAS

ALVES, A. M. M. **Livro didático de matemática**: uma abordagem histórica (1943-1995). 2005. 188f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2005.

BATISTA, A. A. G. Um objeto variável e instável: textos, impressos e livros didáticos. In: ABREU, M. (org.). **Leitura, História e História da Leitura.** São Paulo: Mercado das Letras, 1999.

BARONI, R. L. S.; NOBRE, S. A pesquisa em História da Matemática e suas relações com a educação matemática. In: BICUDO, M. A. de (org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções & perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999.

BESSA, S. F.; BRAGA, T. R. R.; QUEIROZ, Y. C. de. **A nova república: um contexto histórico e educacional**. Repositório Institucional da Universidade Federal do Ceará, Ceará, 2011.

BOTELHO, M. H. C. O livro sagrado da Matemática (Aritmética) brasileira: Aritmética Progressiva, de Antonio Trajano. In: **Brasil Engenharia**. Engenharia 611, 2012. p. 121-122. Disponível em: <http://www.eniopadilha.com.br/documentos/MHCBotelho_cronica_matematica.pdf>. Acesso em: 01 ago. 2020.

BRASIL, Decreto nº 19.890, de 18 de abril de 1931**.** Dispõe sobre a organização do ensino secundário**. Diário Oficial da União**. Rio de Janeiro, 1931. Disponível em: < https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto-19890-18-abril-1931-504631-publicacaooriginal-141245-pe.html>. Acesso em: 15 mar. 2020.

BRASIL. Decreto nº 21.241, de 4 de abril de 1932. Consolida as disposições sobre a organização do ensino secundário e dá outras providências. **Diário Oficial da União**. Rio de Janeiro, 1932. Disponível em: < https://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto-21241-4-abril-1932-503517-publicacaooriginal-81464-pe.html>. Acesso em: 15 mar. 2020.

BRASIL. Constituição de 16 de julho de 1934. Constituição da República dos Estados Unidos do Brasil de 1934. **Diário Oficial da União**. Rio de Janeiro, 1934. Disponível em: < https://www2.camara.leg.br/legin/fed/consti/1930-1939/constituicao-1934-16-julho-1934-365196-publicacaooriginal-1-pl.html>. Acesso em: 15 mar. 2020.

BRASIL. Decreto-Lei nº 1.006, de 30 de dezembro de 1938. Estabelece as condições de produção, importação e utilização do livro didático. **Diário Oficial da União**. Rio de Janeiro, 1939. Disponível em: < https://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1930-1939/decreto-lei-1006-30-dezembro-1938-350741-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 15 mar. 2020.

BRASIL. Decreto-Lei nº 4.244, de 9 de abril de 1942. Lei orgânica do ensino secundário. **Diário Oficial da União**. Rio de Janeiro, 1942. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-4244-9-abril-1942-414155-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 15 mar. 2020.

BRASIL. Lei nº 5.692, de 11 de agosto de 1971. Fixa Diretrizes e Bases para o ensino de 1° e 2º graus, e dá outras providências. **Diário Oficial da União**. Brasília, 1971. Disponível em: < https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1970-1979/lei-5692-11-agosto-1971-357752-publicacaooriginal-1-pl.html>. Acesso em: 15 mar. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Ensino de 1º e 2º Graus. **A escola de 1º grau e o currículo, (1ª parte).** 2. ed. Brasília, 1980.

BRASIL. Lei 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial da União**. Brasília, 1996. Disponível em: < https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1996/lei-9394-20-dezembro-1996-362578-publicacaooriginal-1-pl.html>. Acesso em: 15 mar. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática, Brasília, 1998.

BRASIL. Lei nº 11.274, de 6 de fevereiro de 2006. Altera a redação dos arts. 29, 30, 32 e 87 da Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, dispondo sobre a duração de 9 (nove) anos para o ensino fundamental, com matrícula obrigatória a partir dos 6 (seis) anos de idade. **Diário Oficial da União**. Brasília, 2006. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2004-2006/2006/Lei/L11274.htm>. Acesso em: 15 mar. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos PNLD 2011**: Matemática. Brasília, 2010.

BRASIL. Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014. Aprova o Plano Nacional de Educação - PNE e dá outras providências. **Diário Oficial da União**. Brasília, 2014. Disponível em: <https://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/2014/lei-13005-25-junho-2014-778970-publicacaooriginal-144468-pl.html>. Acesso em: 15 mar. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: a educação é a base. Brasília, 2018a.

BRASIL. Ministério da Educação. **Orientações para discussão da BNCC.** 2018b. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/18vtNpQjPtnygRo9DcaEVGmK-8NGk8tPN/view>. Acesso em: 15 mar. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. **Obras Didáticas – Guia Digital de livros didáticos PNLD 2020**: Matemática. Brasília, 2019.

BURIGO, E. Z. **Movimento da matemática moderna no Brasil**: estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60. 1989. 293f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1989.

CASTRO, F. de O. **A Matemática no Brasil**, 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 1999.

CENTURIÓN, M.; JAKUBOVIC, J. **Nos dias de hoje, matemática na medida certa, 6º ano.** São Paulo: LeYa, 2015a.

CENTURIÓN, M.; JAKUBOVIC, J. **Nos dias de hoje, matemática na medida certa, 7º ano.** São Paulo: LeYa, 2015b.

CENTURIÓN, M.; JAKUBOVIC, J. **Nos dias de hoje, matemática na medida certa, 8º ano.** São Paulo: LeYa, 2015c.

CENTURIÓN, M.; JAKUBOVIC, J. **Nos dias de hoje, matemática na medida certa, 9º ano.** São Paulo: LeYa, 2015d.

CHAVANTE, E. **Convergências – Matemática, 6º ano**. 2. ed. São Paulo: SM, 2018a.

CHAVANTE, E. **Convergências – Matemática, 7º ano.** 2. ed. São Paulo: SM, 2018b.

CHAVANTE, E. **Convergências – Matemática, 8º ano.** 2. ed. São Paulo: SM, 2018c.

CHAVANTE, E. **Convergências – Matemática, 9º ano.** 2. ed. São Paulo: SM, 2018d.

CLARAS, A. F. **As finalidades da aritmética no ensino primário paranaense - 1903-1932.** 2016. 221f. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2016.

D'AMBROSIO, U. **Uma história concisa da Matemática no Brasil.** Petrópolis: Vozes, 2008.

D'AMBROSIO, U. **Currículo do sistema currículo Lattes**. [Brasília], 04 jun. 2020. Disponível em: <http://lattes.cnpq.br/1531403209010948>. Acesso em: 01 ago. 2020.

DIDEROT, D.; D'ALAMBERT, J. le R. **Enciclopédia, ou dicionário razoado das ciências, das artes e dos ofícios.** Volume 3: Ciências da natureza. Organização e tradução de PIMENTA, P. P.; SOUZA, M. Das G. 1. Ed. São Paulo: Editora Unesp, 2015.

DI PIERRO NETTO, S. **Matemática Scipione – conceitos e histórias, 6ª série**. São Paulo: Scipione, 1995a.

DI PIERRO NETTO, S. **Matemática Scipione – conceitos e histórias, 7ª série**. São Paulo: Scipione, 1995b.

DI PIERRO NETTO, S. **Matemática Scipione – conceitos e histórias, 8ª série**. São Paulo: Scipione, 1995c.

DI PIERRO NETTO, S. **Matemática Scipione – conceitos e histórias, 9ª série**. São Paulo: Scipione, 1995d.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FERREIRA, R. C. **Orientações curriculares para o ensino de geometria: do período da Matemática Moderna ao momento atual**. 2008. 319f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – PROFMAT) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

FUNAG. Fundação Alexandre de Gusmão. Carlos Leôncio de Carvalho. **Centro de História e Documentação Diplomática**. on-line. Disponível em: <http://www.funag.gov.br/chdd/index.php/ministros-de-estado-das-relacoes-exteriores/61-ministros-das-relacoes-exteriores/436-carlos-leoncio-de-carvalho>. Acesso em: 01 ago. 2020.

FGV. Getúlio Vargas. In: **Dicionário Histórico Biográfico Brasileiro pós 1930**. 2ª ed. Rio de Janeiro: Ed. FGV, 2001a. Disponível em: <https://cpdoc.fgv.br/producao/dossies/AEraVargas2/biografias/getulio_vargas>. Acesso em: 01 ago. 2020.

FGV. Ernesto Simões Filho. In: **Dicionário Histórico Biográfico Brasileiro pós 1930**. 2ª ed. Rio de Janeiro: Ed. FGV, 2001b. Disponível em: <https://cpdoc.fgv.br/producao/dossies/AEraVargas2/biografias/ernesto_simoes_filho>. Acesso em: 01 ago. 2020.

FGV. Gustavo Capanema Filho. In: **Verbete biográfico.** sd. Disponível em: < http://www.fgv.br/cpdoc/acervo/dicionarios/verbete-biografico/gustavo-capanema-filho>. Acesso em: 01 ago. 2020.

GALANTE, C.; SANTOS, O. M. **Matemática – Primeira série curso Ginasial**. 14. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 1954.

GALANTE, C.; SANTOS, O. M. **Matemática – Segunda série curso Ginasial**. 28. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 1958.

GALANTE, C.; SANTOS, O. M. **Matemática – Terceira série curso Ginasial**. São Paulo: Editora do Brasil, sd.

GALANTE, C.; SANTOS, O. M. **Matemática – Quarta série curso Ginasial**. 15ª edição. São Paulo: Editora do Brasil, 1959.

GARBI, G. G. **A rainha das Ciências**: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 5 ed rev. e ampl. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GOMES, M. L. M. **História do ensino da matemática**: uma introdução. Belo Horizonte: UFMG, 2013.

GOMES, M. L. M. Carlos Galante e suas memórias: aspectos da história de formação de um professor de Matemática. In: Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM). XII. **Anais do XII ENEM**, 2016. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6439_2615_ID.pdf>. Acesso em: 01 ago. 2020.

GOMES, V.; MACHADO-TAYLOR; SARAIVA, E. V. O ensino superior no Brasil: breve histórico e caracterização. **Ciência & Trópico**, Recife: v.42, n. 1, p. 106-129, jan./jul., 2018. Disponível em: <https://periodicos.fundaj.gov.br/CIC/index>. [v. em edição]. Acesso em: 22 out. 2019.

HILZENDEGER, M.A.M. **Primeira Arithmetica para meninos e a constituição de masculinidade na província de São Pedro do Rio Grande do Sul**. 2009. 115f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009

JÚNIOR, J. R. G.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática, 6º ano.** Edição renovada. São Paulo: FTD, 2009a.

JÚNIOR, J. R. G.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática, 7º ano.** Edição renovada. São Paulo: FTD, 2009b.

JÚNIOR, J. R. G.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática, 8º ano.** Edição renovada. São Paulo: FTD, 2009c.

JÚNIOR, J. R. G.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática, 9º ano**. Edição renovada. São Paulo: FTD, 2009d.

LOBO, J. T. S. **Arithmetica para meninos**. 5. ed. Porto Alegre: Typographia da Deutshezeitung, 1879.

MARQUES, A. S. **Tempos pré-modernos**: a matemática escolar dos anos 1950. 2005. 161f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

MENEZES, E. T. de; SANTOS, T. H. dos. **Verbete PNLD (Programa Nacional do Livro Didático)**. Dicionário Interativo da Educação Brasileira - Educabrasil. São Paulo: Midiamix, 2001. Disponível em: <https://www.educabrasil.com.br/pnld-programa-nacional-do-livro-didatico/>. Acesso em: 09 abr. 2020.

MIORIM, M. Â. **Introdução à História da Educação Matemática.** São Paulo: Atual, 1998.

OEI - organización de estados iberoamericanos; MEC - Ministério da educação. Evolução Histórica Do Sistema Educacional in **Sistema Educativo Nacional de Brasil** – Madrid, 2002. Disponível em: <https://www.oei.es/historico/quipu/brasil/>. Acesso em: 10 jun. 2019.

PESSANHA, E. C; ASSIS, W. da S; SILVA, S. S. de O. **História do ensino secundário no Brasil**: o caminho para as fontes. Roteiro, Joaçaba, v. 42, n. 2, p. 311-330, mai./ago. 2017 | E-ISSN 2177-6059.

QUEIROZ, M. O. de. **Dicionário sucesso da Língua Portuguesa.** Recife: Distribuidora de Edições Pedagógicas Ltda., 2014.

ROQUE, T. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SAITO, F. **História da matemática e suas (re)construções contextuais.** São Paulo, Editora Livraria da Física, 2015.

SANTOS, B. B. M. dos. O currículo das escolas brasileiras na década de 1970: novas perspectivas historiográficas. **Ensaio: aval.pol.públ.Educ.** [online]. 2014, vol.22, n.82, pp.149-170. ISSN 0104-4036. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S0104-40362014000100008>. Acesso em: 06 jan. 2020.

SILVA, D. R. **Livro didático de Matemática**: lugar histórico e perspectivas. 2010. 152f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

STÁVALE, J. **Elementos de Matemática – Primeiro volume.** 3. ed. São Paulo: Companhia Editora do Brasil, 1943a.

STÁVALE, J. **Elementos de Matemática – Segundo volume**. São Paulo: Companhia Editora do Brasil, 1943b.

TELO, R. M. **As comissões avaliadoras de livros didáticos entre 1938 e 1971 no Brasil.** 287f. Dissertação (Mestrado Em Ensino De Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

TRAJANO, A. **Algebra Elementar**. 15. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1932.

TRAJANO, A. **Arithmetica Progressiva**. 78. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1948.

TRIPOLI, T. A. **A Matemática escolar no início do século XX**: uma análise de livros didáticos da década de 1930. 2005. 91f. Monografia (Licenciatura Matemática) – Universidade do Sagrado Coração, Bauru, 2005.

VALENTE, W. R. **Uma história da matemática escolar no Brasil (1730-1930).** São Paulo: ANNABLUME, 1999.

ZOTTI, S. A. Organização do ensino primário no brasil: uma Leitura da história do currículo oficial. In: **VII Seminário Nacional de Estudos e Pesquisa**, 2006, Campinas. Disponível em: <http://www.histedbr.fe.unicamp.br/acer_histedbr/seminario/seminario7/TRABALHOS/S/Solange%20aparecida%20zotti.pdf>. Acesso em: 01 jan. 2019.

ZUIN, E. de S. L.; SANT'ANA, N. A. dos S. **Pesos e medidas do Brasil Colonial, tradição e cultura nos dias atuais**: um novo tema para as aulas de matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

ZUIN, E. de S. L.; SANTOS, C. M. dos. **Sistemas de Equações lineares**: entre a história da matemática e a história da educação matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2019.