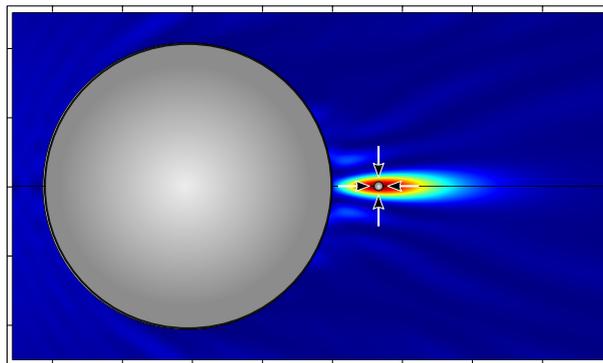




UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

EVERTON BRITO DE LIMA

APRISIONAMENTO DE MICROPARTÍCULAS EM FEIXES ACÚSTICOS
SUPERFOCALIZADOS



MACEIÓ - BRASIL
ABRIL - 2019

Everton Brito de Lima

**APRISIONAMENTO DE MICROPARTÍCULAS EM FEIXES ACÚSTICOS
SUPERFOCALIZADOS**

Dissertação apresentada no instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas - Ufal, como requisito necessário para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. José Henrique Araújo Lopes de Andrade
Co-orientador: Prof. Dr. Glauber José Ferreira Tomaz da Silva

MACEIÓ - BRASIL
ABRIL - 2019

INSTITUTO DE FÍSICA - UFAL

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

L732a Lima, Everton Brito de.
Aprisionamento de micropartículas em feixes acústicos superfocalizados /
Everton Brito de Lima. – 2020.
79 f. : il. color.

Orientador: José Henrique Araújo Lopes de Andrade.
Co-orientador: Glauber José Ferreira Tomaz da Silva.
Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto
de Física. Maceió, 2020.

Bibliografia: f. 74-79.

1. Pinças acústicas. 2. Força de radiação acústica. 3. Método dos elementos
finitos. I. Título.

CDU:531.772.3-142.36

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

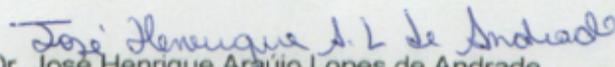
***“Aprisionamento de micro-partículas em feixes
acústicos superfocalizados”***

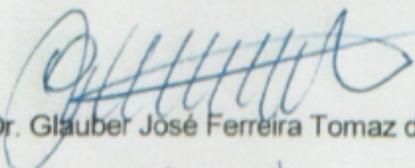
por

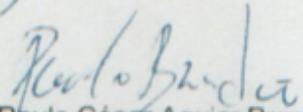
Everton Brito de Lima

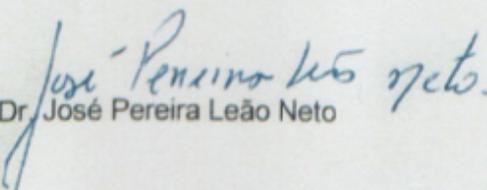
A Banca Examinadora composta pelos professores José Henrique Araújo Lopes de Andrade (president da banca e orientador), do Campus Arapiraca da Universidade Federal de Alagoas, Glauber José Ferreira Tomaz da Silva (coorientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Paulo César Aguiar Brandão Filho, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas e José Pereira Leão Neto, do Campus Arapiraca da Universidade Federal de Alagoas consideram o candidato aprovado com grau "A".

Maceió, 12 de abril de 2019


Prof. Dr. José Henrique Araújo Lopes de Andrade


Prof. Dr. Glauber José Ferreira Tomaz da Silva


Prof. Dr. Paulo César Aguiar Brandão Filho


Prof. Dr. José Pereira Leão Neto

*Dedico este trabalho aos meus pais,
Everaldo Gonçalves e Sandra Valéria.
E aos meus irmãos, Allison Gustavo
e Samara Lorrany.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por ser uma constante em minha vida. Sem a Sua presença, sem dúvidas, eu não teria prosseguido.

Sou eternamente grato aos meus pais, Everaldo e Sandra, pelo carinho, preocupação, confiança e exemplos de seres humanos que são. Aos meus irmãos, Gustavo e Samara, por me representarem em casa, sempre dando assistência aos meu pais, além de sempre expressarem orgulho e confiança no seu "mano".

Agradeço à Iara Melo, pela compreensão mediante a distância. Pela saudade sincera, pela presença reconfortante, pelo carinho e confiança.

Agradeço a todos os meus familiares, tias, tios, primos, primas... pelas reuniões acolhedoras. Às minhas avós, Glória, Helena e Elisabete, pelo carinho dignos de mãe. Aos meus avôs, especialmente ao vô "Chinino" (*in memorian*) e ao vô "Bila" (*in memorian*), pois jamais serão esquecidos.

Sou grato, aos amigos de infância Willames, Fernando e Gilmar, pela mesma amizade de sempre, independente do tempo ou distância.

Agradeço aos até então colegas de cela, Ari, Giclênio e Raul, pois hoje já posso chamar de amigos, por terem essa integridade que é tão difícil de ser encontrada nos dias de hoje.

Aos meus amigos de disciplina, jogatina e RU, Júlio, Alysson, Vinícius, Ícaro, Laís, Pâmela, Fernanda e Dimitry. Sem a companhia deles, meus momentos de lazer, madrugadas de estudo e almoços de conversação, com certeza não teriam a mesma graça.

Aos amigos do GAF, Giclênio, Eliete e Victor, por tornarem o ambiente de laboratório mais amigável e acolhedor, e ao Prof. Bágio, por toda prontidão e conselhos.

Ao corpo docente do IF, pela contribuição significativa na minha formação. Em especial aos professores, Iram Gléria e Thiago Mariz.

Aos professores da banca por aceitarem participar deste momento importante para mim, e por contribuírem com este trabalho.

Ao professor Glauber T. Silva pela disponibilidade, pelas orientações com seu conhecimento admirável em força de radiação acústica, além dos conselhos mediante sua experiência sobre o funcionamento do meio científico como um todo.

Obviamente, ao meu orientador Henrique Lopes, por me trazer para acústica e para esse grupo, o qual me orgulho muito de fazer parte, por seus incentivos, por sempre acreditar em meu trabalho, e por me orientar em mais essa jornada.

E a CAPES pelo apoio financeiro indispensável durante o mestrado.

*“Se você continua vivo é porque ainda não chegou aonde devia.”
- Albert Einstein*

Resumo

O aprisionamento e manipulação de partículas sem contato, proporcionados pelos fenômenos de força de radiação acústica, tem despertado grande interesse no meio científico, principalmente devido às suas aplicações em diversos ramos de biotecnologia. As pinças acústicas são técnicas de aprisionamento de partículas por meio de feixes acústicos, sendo uma das primeiras aplicações dos estudos de força de radiação. Dessa forma, neste trabalho, utilizamos o método de elementos finitos para analisar os critérios de aprisionamento de micropartículas, mediante a força de radiação acústica gerada pela imersão destas partículas em um meio perturbado por um feixe acústico superfocalizado. Através do modelo numérico utilizado, estudamos o comportamento da força de radiação acústica em partículas posicionadas na direção axial do feixe. Ao comparar os resultados obtidos com o método analítico de expansão por ondas parciais, pudemos analisar as componentes, conservativa, de espalhamento, e de absorção da força de radiação acústica nas partículas, o que nos permitiu propor algumas explicações quanto ao comportamento das partículas no feixe. Já o método numérico, nos deu liberdade de aumentar o tamanho das partículas analisadas, ultrapassando o limite em que o modelo analítico utilizado é válido, neste caso, o limite de partículas muito menores que o comprimento de onda, também conhecido como o limite de *Rayleigh*. Assim, além de identificarmos um padrão entre as partículas que foram aprisionadas, também propomos uma explicação para a variabilidade no tamanho máximo de partícula que pode ser aprisionada no feixe.

Palavras-chave: Pinças acústicas, força de radiação acústica, feixes superfocalizados, método de elementos finitos.

Abstract

Non-contact acoustic trapping and particle manipulation, provided by the phenomena of acoustic radiation force, has aroused great interest in the scientific environment, mainly due to its applications in various branches of biotechnology. Acoustic tweezers are techniques for trapping particles through acoustic beams, being one of the first applications of radiation force studies. Thus, in this work, we use the finite element method to analyze the microparticle entrapment criteria, by means of the acoustic radiation force generated by the immersion of these particles in a medium disturbed by a superfocalized acoustic beam. Through the numerical model used, we studied the behavior of the acoustic radiation force in particles positioned in the axial direction of the beam. By comparing the results obtained with the analytical method of partial wave expansion, we were able to analyze the components, conservative, scattering, and absorption of the acoustic radiation force in the particles, which allowed us to propose some explanations regarding the behavior of the particles in the beam. On the other hand, the numerical method gave us the freedom to increase the size of the analyzed particles, exceeding the limit at which the analytical model used is valid, in this case, the limit of particles much smaller than the wavelength, also known as the *Rayleigh*. Thus, in addition to identifying a pattern among the particles that were trapped, we also propose an explanation for the variability in the maximum particle size that can be trapped in the beam.

Keywords: Acoustic tweezers, acoustic radiation force, superfocus beams, finite element method.

Lista de Figuras

1.1	Ilustração de uma onda plana gerada por um transdutor, que posteriormente é superfocalizada na região de sombra de uma lente bola.	15
2.1	Ilustração das forças atuando em um elemento de fluido de volume V_0 ocupado por partículas de massa m_i e velocidade v_i	19
2.2	Ilustração da deformação de um meio contínuo de volume V_0 e superfície S_0 resultando em um volume V'_0 e superfície S'_0	26
2.3	Ilustração do vetor de tração \mathbf{q} em um meio contínuo de volume V_0 e superfície S_0 devido às forças externas $f_i (i = 1, 2, 3)$	27
3.1	Exemplo de discretização em 3D.	41
3.2	Exemplo de discretização em 2D.	41
3.3	Exemplo de utilização de uma função peso (\tilde{P}), onde a terceira curva é o produto da primeira curva com uma função peso genérica (segunda curva) definida apenas nas proximidades de um ponto x_0	43
3.4	Exemplo de funções de base lineares ($\psi_{1E}, \psi_{1D}, \psi_{2E}, \dots$), definidas nos subintervalos (ou elementos) do domínio, os quais são delimitados por nós (1, 2, ...).	46
3.5	Exemplo de aproximação a partir das funções de base lineares, observe que obtemos a aproximação ao determinarmos os coeficientes ($a_{1E}, a_{1D}, a_{2E}, \dots$).	47
3.6	Exemplo de aproximação a partir das funções de base, tomando a condição de <i>Lagrange elements</i>	48
3.7	Ilustração da combinação das funções de base adjacentes, a partir dos pontos nodais em comum.	49
3.8	Exemplo de aproximação com funções de base nodais.	50
3.9	Ilustração de uma onda plana gerada por uma cerâmica piezoelétrica, que posteriormente é superfocalizada na região de sombra de uma lente bola, onde calculamos a força de radiação acústica em partículas.	55
3.10	Ilustração da geometria da simulação.	55
3.11	Malha obtida a partir dos parâmetros da Tab. 3.3 ($n = 40, n_2 = 35$), para uma partícula de raio $a = 0.1 \lambda$	57
3.12	Gráfico da convergência de malha para a força em uma partícula de raio $a = 0.04\lambda$, com $n = 150$ (demais parâmetros estão apresentados na Tab. 3.3).	59
3.13	Gráfico da convergência de malha para a força em uma partícula de raio $a = 0.04\lambda$ (em azul) e $a = 0.1\lambda$ (em vermelho), com $n_2 = 35$ (demais parâmetros estão apresentados na Tab. 3.3).	59

4.1	Caracterização do feixe, perfis axial e transversal da componente z da intensidade média, \bar{I}_z	61
4.2	Força para uma partícula compressível devido uma onda plana estacionária, conforme o raio desta partícula é aumentado.	63
4.3	Reprodução dos resultado de <i>Glynnne-Jones</i> e colaboradores, Fig. 4.2, onde temos a força de radiação acústica para uma partícula compressível devido uma onda plana estacionária, conforme o raio desta partícula é aumentado.	63
4.4	Força de radiação acústica devido o feixe superfocalizado, para uma partícula de Benzeno com raio $a = 0.04\lambda$. Temos a componente axial da força em (a), onde verificamos uma configuração de aprisionamento pela força de radiação via método numérico (FEA), e também pela soma das componentes do modelo analítico (\mathbf{F}_z^{rad}), de modo, que o ponto de aprisionamento neste caso é $z = 1.04\lambda$ e magnitude da força é da ordem de 10^{-10} N. Enquanto que em (b), temos as componentes transversais da força de radiação pelo modelo analítico, medidos no ponto de aprisionamento axial mencionado, note que também temos aprisionamento transversal (em $r = 0$) e que a magnitude da força transversal (\mathbf{F}_r^{rad}) é maior que a sua correspondente axial (\mathbf{F}_z^{rad}).	65
4.5	Força de radiação acústica devido o feixe superfocalizado, para uma partícula de Silicon Dow com raio $a = 0.04\lambda$. Temos a componente axial da força em (a), onde verificamos uma configuração de aprisionamento pela força de radiação via método numérico (FEA), e também pela soma das componentes do modelo analítico (\mathbf{F}_z^{rad}), de modo, que o ponto de aprisionamento neste caso é $z = 1.61\lambda$ e magnitude da força é da ordem de 10^{-11} N. Enquanto que em (b), temos as componentes transversais da força de radiação pelo modelo analítico, medidos no ponto de aprisionamento axial mencionado, note que também temos aprisionamento transversal (em $r = 0$) e que a magnitude da força transversal (\mathbf{F}_r^{rad}) é maior que a sua correspondente axial (\mathbf{F}_z^{rad}).	66
4.6	Força de radiação acústica devido o feixe superfocalizado, para uma partícula de RTV-615 com raio $a = 0.04\lambda$. Temos a componente axial da força em (a), onde verificamos uma configuração de aprisionamento pela força de radiação via método numérico (FEA), e também pela soma das componentes do modelo analítico (\mathbf{F}_z^{rad}), de modo, que o ponto de aprisionamento neste caso é $z = 1.24\lambda$ e magnitude da força é da ordem de 10^{-10} N. Enquanto que em (b), temos as componentes transversais da força de radiação pelo modelo analítico, medidos no ponto de aprisionamento axial mencionado, note que também temos aprisionamento transversal (em $r = 0$) e que a magnitude da força transversal (\mathbf{F}_r^{rad}) é maior que a sua correspondente axial (\mathbf{F}_z^{rad}).	67
4.7	Análise do limiar de aprisionamento axial de uma partícula esférica de RTV-615 em um feixe superfocalizado. Notemos que, conforme o radio da partícula foi aumentado a posição de aprisionamento axial se distanciou da lente, além disso, partículas com raio a partir de $a = 0.09\lambda$ já não são mais aprisionadas, por não possuírem componente negativa da força, com isso sendo apenas afastadas da lente.	69

-
- 4.8 Análise do limiar de aprisionamento axial de uma partícula esférica de Benzeno posicionada em um feixe superfocalizado. Observe que, que mantemos o mesmo padrão de afastamento do ponto de aprisionamento conforme aumentos o raio da partícula, no entanto em comparação com os resultados para partículas de RTV-615 (Fig. 4.7), temos amplitudes menores da força de radiação, porém a componente negativa da força é anulada penas para partículas com raio próximo à $a = 0.11\lambda$, de modo a não serem mais aprisionadas. 70
- 4.9 Análise do limiar de aprisionamento axial de uma partícula esférica de Silicon Dow posicionada em um feixe superfocalizado. Onde averiguamos que, conforme aumentamos o raio da partícula o ponto de aprisionamento é distanciado da lente, no entanto há o aprisionamento de partículas grandes (com raios maiores que $a = 1.0\lambda$) ao ponto de proporcionarem múltiplas reflexões com a lente, interferindo nos resultados e consequentemente no perfil da curva de força de radiação, percebeba que quanto maior o raio da partícula, maior é a deflexão da curva para direita. 71

Lista de Símbolos

Símbolo	Nome	Unidade (S.I.)
T	período	s
ω	frequência angular	rad/s
$i = \sqrt{-1}$	unidade imaginária	
V_0	volume do elemento do fluido ideal	m^3
S_0	superfície do elemento de fluido ideal	m^2
\mathbf{r}	vetor posição	m
ρ_0	densidade (homogênea) do fluido ideal	kg/m^3
ρ	densidade	kg/m^3
\mathbf{v}	velocidade	m/s
m	massa	Kg
∇	operador gradiente	m^{-1}
$\nabla \cdot$	operador divergente	m^{-1}
$\nabla \times$	operador rotacional	m^{-1}
∇^2	operador <i>Laplaciano</i>	m^{-2}
p	pressão acústica	Pa
\mathbf{I}	tensor unitário	
\mathbf{S}	tensor de tensões	Pa
p_0	pressão inicial homogênea do elemento de fluido ideal	Pa
c_0	velocidade do som no fluido ideal	m/s
\mathcal{M}	número de <i>Mach</i>	
ϕ	potencial de velocidade dos elementos do fluido	m^2/s
k	número de onda	m^{-1}
\mathbf{w}	vetor deslocamento	m
ϵ	tensor de deformação em um sólido	
σ	tensor de tensões em sólidos	
c_L	velocidade do som longitudinal	m/s
c_S	velocidade do som de cisalhamento	m/s
τ_L	tempo de relaxação longitudinal	s
τ_S	tempo de relaxação de cisalhamento	s
$\psi_{S,1}, \psi_{S,2}$	potenciais escalares de <i>Debye</i>	m^2/s
k_L	número de onda longitudinal	m^{-1}
k_S	número de onda de cisalhamento	m^{-1}

Símbolo	Nome	Unidade (S.I.)
$\tilde{\alpha}$	coeficiente de absorção adimensional	
α_0	coeficiente de absorção	Np/m
α_L	coeficiente de absorção longitudinal	Np/m
α_S	coeficiente de absorção de cisalhamento	m ⁻¹
n_c	índice de refração complexo	
n_R	índice de refração do material	
\mathbf{F}^{rad}	força de radiação acústica (FRA)	N
λ	comprimento de onda	m
f	frequência	1/s
a	raio da partícula	m
ρ_p	densidade da partícula	kg/m ³
c_p	velocidade do som na partícula	m/s
n	número de elementos finitos por comprimento do a	
n_2	número de elementos finitos por λ	
\mathbf{F}^{grad}	componente conservativa da força de radiação acústica	N
\mathbf{F}^{sca}	componente da FRA referente ao espalhamento	N
\mathbf{F}^{rad}	componente da FRA referente à absorção	N
$\bar{\mathbf{I}}$	média temporal da intensidade	W/m ³
k_p	número de onda da partícula	m ⁻¹
κ	número de onda de uma partícula absorvedora	m ⁻¹
β	compressibilidade do meio	Pa ⁻¹
β_p	compressibilidade da partícula	Pa ⁻¹
K_p	<i>bulk modulus</i> da partícula	Pa
μ_p	<i>shear modulus</i> da partícula	Pa

Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Figuras	ix
Lista de Símbolos	xii
Sumário	xiv
1 Introdução	13
2 Equações do modelo	16
2.1 Média temporal	16
2.2 Equações de conservação em um fluido ideal	17
2.2.1 Conservação de massa	18
2.2.2 Conservação de momento	18
2.2.3 Conservação da energia	21
2.3 Propagação de ondas em um fluido ideal	22
2.3.1 Equação linear da onda	23
2.3.2 Equação de <i>Helmholtz</i>	24
2.4 Equações de conservação para sólidos	25
2.4.1 Deformação	25
2.4.2 Tensão	27
2.4.3 Conservação da massa	27
2.4.4 Conservação do momento	28
2.4.5 Conservação da energia	29
2.5 Modelo de <i>Kelvin-Voigt</i>	30
2.5.1 Modelo de <i>Kelvin-Voigt</i> Fracionário	33
2.6 Força de Radiação Acústica	35
2.6.1 Revisão histórica	36
2.6.2 Força de radiação por um feixe aleatório	37
3 Modelo numérico	40
3.1 Método de elementos finitos	40
3.1.1 <i>Weak Formulation</i>	40
3.1.2 Discretizando equações no <i>weak formulation</i>	46
3.2 Descrição do modelo numérico	53
3.2.1 Geometria e parâmetros	54

3.2.2	Malha e carga computacional	54
4	Resultados e discussões	60
4.1	Caracterização do feixe	60
4.2	Validação do modelo	61
4.3	Aprisionamento de partículas no feixe superfocalizado	64
4.3.1	Tamanho máximo de partículas aprisionadas axialmente	69
5	Conclusões	73
	Referências Bibliográficas	74

1

Introdução

Podemos definir ondas acústicas como perturbações em um meio que transportam energia e momento. Esse momento pode ser transferido para objetos contidos no meio perturbado, assim dando origem a força de radiação acústica [King 1934].

Caso hajam partículas suspensas em um fluido, se esse fluido for perturbado por uma onda acústica, essas partículas podem ser afetadas pela força de radiação acústica. Com isso, a manipulação de partículas por ultrassom usufrui da força de radiação acústica para proporcionar métodos de manipular partículas sem contato. A utilização desses métodos tem se mostrado promissora, principalmente em diversos ramos de biotecnologia, ao permitir a manipulação de células biológicas e outros microrganismos [Shi et al. 2009], [Ding et al. 2012], além da análise de substâncias sem que haja contaminação devido o contato [Santesson e Nilsson 2004].

Dentre os métodos de manipulação por ultrassom, destacam-se a levitação de partículas, a acustofluídica e as pinças acústicas.

A levitação acústica consiste em suspender um objeto em uma posição estável através de ondas sonoras, dessa forma, sem que haja um contato direto com o objeto levitado. Geralmente, um sistema de levitação é composto basicamente por um ou mais transdutores, que possuem uma superfície que vibra harmonicamente em uma frequência específica gerando a onda sonora, e dependendo do tipo de configuração talvez seja utilizado um refletor, responsável por produzir um padrão estacionário ao refletir a onda gerada pelo transdutor [Brandt 2001], [Foresti et al. 2013], [Andrade, Pérez e Adamowski 2015]. Além dos métodos acústicos, existem outros tipos de levitação, como a levitação magnética [Geim et al. 1999], levitação óptica [Ashkin e Dziedzic 1971] e levitação eletrostática [Rhim et al. 1993]. No entanto, com os métodos acústicos, não só de levitação como qualquer manipulação por força de radiação acústica, temos dependência apenas das propriedades mecânicas do meio e da partícula (como densidade, velocidade do som e atenuação), não tendo restrições quanto a magnetização, índices de refração, eletrização ou condutividade, por exemplo.

Por sua vez, a microfluídica pode ser descrita como a ciência que estuda os fluidos conti-

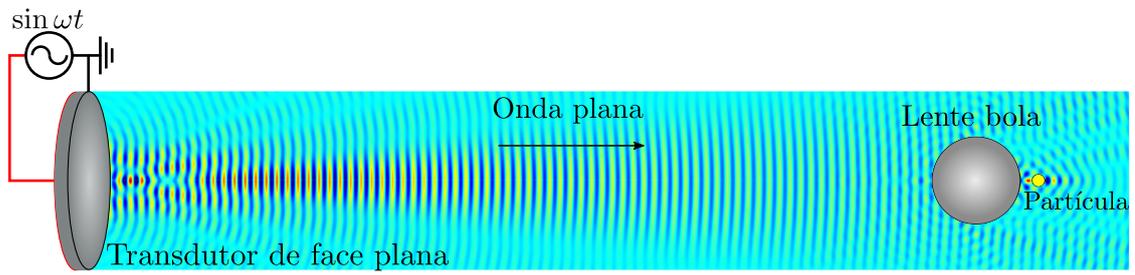
dos em canais cujos cortes transversais tem dimensões micrométricas. Com isso, a acustoflúidica é uma técnica que recorre aos campos acústicos para manipular partículas suspensas em microfluídica. O uso de ondas estacionárias na microfluídica é o mais comum, pois proporciona, além do aprisionamento, a separação de partículas a depender de suas propriedades mecânicas como tamanho, geometria, densidade e compressibilidade, visto que algumas partículas podem ser atraídas para os nós, e outras para os antinós da onda acústica estacionária [Laurell, Petersson e Nilsson 2007], [Wang e Zhe 2011]. Com o advento do conceito de laboratório em um chip (*lab-on-a-chip*) e o avanço das tecnologia de microfluídica, a manipulação de partículas mediante a força de radiação acústica tem ganhado destaque em aplicações biomédicas, se tornando um padrão em manipulação de células e partículas em chips microfluídicos [Ding et al. 2012], [Wiklund, Nilsson e Hertz 2001], [Hultström et al. 2007].

E finalmente, as pinças acústicas denominam as técnicas de aprisionamento de partículas por meio de feixes acústicos. Sendo uma das primeiras aplicações para ondas acústicas, as pinças acústicas, normalmente são desenvolvidas de dois modos distintos, ou usufruindo da intensificação da força de radiação que é proporcionada pelas ondas estacionárias [Wu 1991], [Kozuka et al. 1998], ou desfrutando das praticidades de não ter a necessidade de utilizar um refletor, ao aprisionar partículas por meio de um único feixe acústico. Os meios mais comuns de aprisionamento de partículas por feixe único são aplicados através de transdutores focalizados, [Lee et al. 2009], [Lam et al. 2013], ou ainda por feixe de *Bessel* [Choe et al. 2011].

Neste trabalho fazemos a análise numérica de uma nova forma de aprisionar partículas por meio de um único feixe, a pinça acústica de um feixe superfocalizado. O feixe que iremos explorar, é formado ao superfocalizar uma onda plana na região de sombra de uma lente em formato de bola [Lopes et al. 2017] (ver ilustração na Fig. 1.1). Além da versatilidade intrínseca devido o aprisionamento com um único feixe, o método estudado tem vantagens com relação aos seus antecessores (via transdutor focalizado, ou feixe de *Bessel*), pois é possível utilizar transdutores de face plana, que são mais comuns e de fabricação menos elaborada, permitindo que o procedimento seja reproduzido com mais facilidade.

No Cap. 2 derivamos a equação da onda, a partir das equações de conservação de massa, energia e momento, e posteriormente, mostramos como calcular a força de radiação acústica de segunda ordem, por meio dos campos acústicos de primeira ordem, que podem ser obtidos através da solução da equação da onda. Posteriormente, no Cap. 3, apresentamos um exemplo de como o software utilizado resolve equações diferenciais, em um caso análogo à equação da onda, e dessa forma fornecendo os campos acústicos necessários para o cálculo da força de radiação acústica, além de descrevermos os parâmetros empregados no modelo numérico que utilizamos para efetuar as simulações, as quais nos forneceram os resultados que foram apresentados e discutidos no Cap. 4. E por fim, no

Figura 1.1: Ilustração de uma onda plana gerada por um transdutor, que posteriormente é superfocalizada na região de sombra de uma lente bola.



Fonte: autor, 2019.

Cap. 5 apresentamos as conclusões e perspectivas acerca dos resultados discutidos no capítulo predecessor.

2

Equações do modelo

Neste capítulo, iremos expor os princípios físicos e matemáticos que foram utilizados para obtenção dos resultados deste trabalho. Destacando-se algumas noções de média temporal de funções periódicas, além das equações de dinâmica dos fluidos derivadas das equações fundamentais de conservação de massa, energia e momento, o que por sua vez, nos permitirá mostrar como uma onda acústica se propaga em um fluido ideal, no formalismo da conceituada equação de *Helmholtz*. Assim como, também apresentaremos os conceitos básicos de conservação para sólidos, além das relações entre tensão e a deformação que regem a propagação de ondas em sólidos viscoelásticos por meio do modelo de *Kelvin-Voigt*. E finalmente, iremos descrever como expressar a força de radiação acústica de segunda ordem através dos campos acústicos de primeira ordem, obtidos através da solução da equação de *Helmholtz*.

2.1 Média temporal

Como veremos posteriormente, a força de radiação acústica pode ser expressa por campos acústicos representados por funções periódicas, dessa forma é interessante expormos alguns conceitos de média temporal.

A média temporal de uma função g ao decorrer de um período de oscilações completo $T = 2\pi/\omega$ é definido da forma a seguir:

$$\bar{g} = \frac{\omega}{2\pi} \int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega} g(t) dt. \quad (2.1)$$

Além disso, apesar de grandezas físicas como densidade, pressão e velocidade de fluido serem notoriamente quantidades reais, elas são convenientemente e corriqueiramente expressas como funções complexas. Então, é útil apresentarmos algumas características relevantes das médias de produtos de funções harmônicas complexas. Para tal, considere as seguintes funções harmônicas complexas de primeira ordem:

$$g(t) = g_1 e^{-i(\omega t + \alpha_1)}, \quad (2.2)$$

$$h(t) = h_1 e^{-i(\omega t + \beta_1)}, \quad (2.3)$$

onde g_1 e h_1 são as amplitudes, α_1 e β_1 são as fases das suas respectivas funções. Ainda que tratemos com funções complexas, quanto a força de radiação acústica apenas a parte real dessas funções tem resultados mensuráveis. Portanto, a partir da Eq. (2.1) temos que

$$\overline{\text{Re}[g]\text{Re}[h]} = \frac{\omega}{2\pi} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{2\pi}{\omega}} g_1 h_1 \cos(\omega t - \alpha_1) \cos(\omega t - \beta_1) dt, \quad (2.4)$$

onde Re representa a parte real da função. Assim, ao substituirmos a relação

$$\cos(\omega t - \alpha_1) \cos(\omega t - \beta_1) = \frac{1}{2} [\cos(2\omega t + \alpha_1 + \beta_1) + \cos(\alpha_1 - \beta_1)] \quad (2.5)$$

na Eq. (2.4), obtemos que

$$\overline{\text{Re}[g]\text{Re}[h]} = \frac{1}{2} g_1 h_1 \cos(\alpha_1 - \beta_1) = \frac{1}{2} \text{Re}[g^* h] = \frac{1}{2} \text{Re}[gh^*], \quad (2.6)$$

note que o primeiro termo após a igualdade da Eq. 2.5 sumiu ao integrarmos, pois resulta em uma subtração de funções seno defasadas em um período completo, e o asterisco (*) representa o complexo conjugado.

2.2 Equações de conservação em um fluido ideal

No estudo da dinâmica dos fluidos, convém desprezarmos as subdivisões convencionais da matéria (moléculas, átomos, ...), de modo a considerar o fluido como um meio contínuo. Com isso, suponha um fluido ideal, onde as propriedades macroscópicas do mesmo sejam constantes. Para estudarmos o movimento deste fluido, iremos subdividi-lo em pequenos elementos fixos com relação a um sistema de referencial, em qualquer tempo, t . Consideremos um elemento qualquer, de volume fixo V_0 e posição \mathbf{r} , que englobe um número suficientemente grande de átomos ou moléculas que estejam em equilíbrio termodinâmico. Assim, podemos definir grandezas físicas para o elemento de fluido, como particularmente, densidade, velocidade, pressão, energia interna e entropia [Neto 2015], [Andrade 2014].

A partir deste ponto, iremos utilizar o teorema da divergência de *Gauss* com uma certa frequência, então é oportuno salientar, que o teorema denota a seguinte relação para um determinado campo vetorial $\mathbf{B}(\mathbf{r})$:

$$\int_{V_0} \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = \int_{S_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} d^2 \mathbf{r} \quad (2.7)$$

onde \mathbf{n} é o vetor que aponta para fora, assim como normal à superfície S_0 , e por sua vez, $d^3 \mathbf{r}$ e $d^2 \mathbf{r}$ são os elementos de integração de volume e área, nessa ordem.

2.2.1 Conservação de massa

Dado o elemento de fluido de volume V_0 e posição \mathbf{r} , adotamos que o mesmo possui um número N de átomos ou moléculas em um instante de tempo t , o que nos permite definir a densidade $\rho(\mathbf{r}, t)$, como

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{V_0} \sum_{i=1}^N m_i, \quad (2.8)$$

onde, m_i representa a massa do átomo ou das moléculas dentro do volume V_0 . Por consequência, a velocidade $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ do centro de massa do elemento de volume V_0 em qualquer instante do tempo t é dado por

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{r}, t)V_0} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \quad (2.9)$$

onde \mathbf{v}_i representa a velocidade do i -ésimo átomo ou molécula do elemento de volume V_0 .

Neste sentido, como a massa não pode ser criada ou destruída dentro do elemento de fluido, então a massa total encerrada só pode variar devido a convecção. Com isso, o fluxo de massa por unidade de área e de tempo ($\text{kg m}^{-2}\text{s}^{-1}$) é definido pelo produto da densidade $\rho(\mathbf{r}, t)$ com a velocidade de convecção $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Portanto, perceba que a alteração da massa total encerrada pelo volume V_0 depende do fluxo de massa através da superfície S_0 do volume V_0 (ver Fig. 2.1) o que nos fornece a seguinte relação:

$$\partial_t \int_{V_0} \rho \, d^3\mathbf{r} + \int_{S_0} \rho \mathbf{v} \cdot d^2\mathbf{r} = 0, \quad (2.10)$$

onde $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ representa a derivada parcial com relação ao tempo. Note que, como o volume V_0 é fixo podemos aplicar a derivada diretamente na densidade. Além disso, ao empregarmos o teorema da divergência de *Gauss*, Eq. (2.7), podemos transformar a integral de superfície da Eq. (2.10) em uma integral de volume, como se segue:

$$\int_{S_0} \rho_0 \mathbf{v} \cdot d^2\mathbf{r} = \int_{V_0} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \, d^3\mathbf{r} \quad (2.11)$$

Então, ao substituirmos a Eq. (2.11) na Eq. (2.10), inferimos

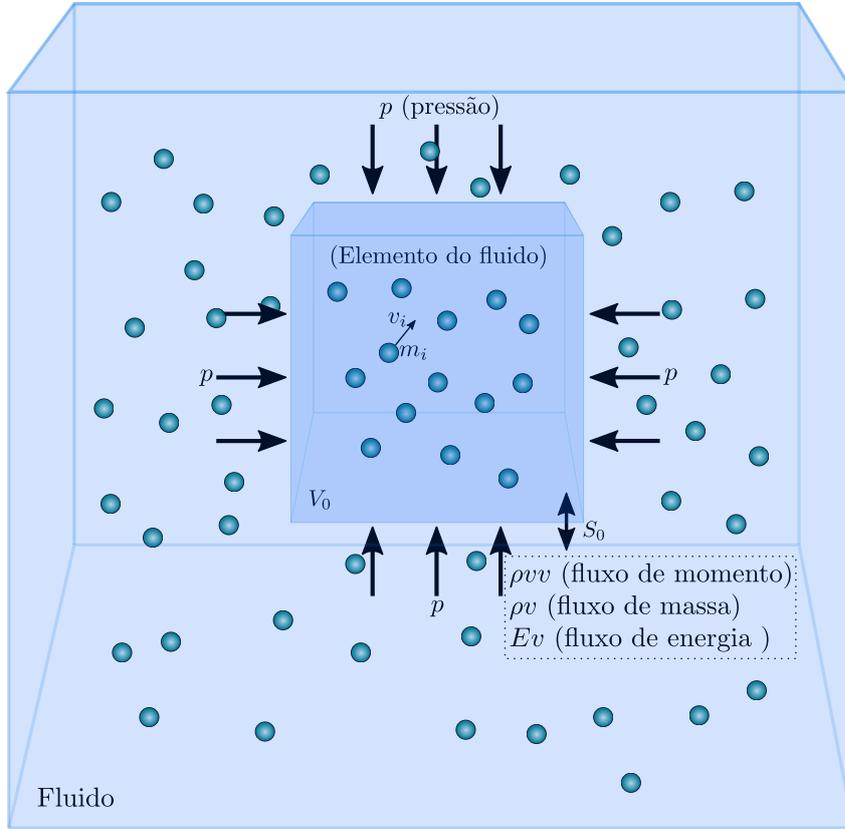
$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0, \quad (2.12)$$

que é conhecida como a equação de conservação de massa.

2.2.2 Conservação de momento

Para um instante de tempo qualquer t , o momento linear em um volume de fluido V_0 fixo é definido por $\rho \mathbf{v}$. Assim como a variação da massa, o momento linear pode mudar

Figura 2.1: Ilustração das forças atuando em um elemento de fluido de volume V_0 ocupado por partículas de massa m_i e velocidade v_i .



Fonte: autor, 2019.

em virtude da convecção, dessa forma, o fluxo de momento linear pode ser expresso por $\rho \mathbf{v} \mathbf{v}$. No entanto, além da contribuição do fluxo de momento ($\rho \mathbf{v} \mathbf{v}$), a variação da taxa de momento linear total em um volume V_0 , também tem contribuições da pressão (p) normal à superfície S_0 do referido volume, e das forças volumétricas, que são forças externas que atuam em todo o volume, um exemplo esclarecedor de força volumétrica é a força gravitacional, ou ainda a força elétrica. Sendo assim, a variação da taxa do momento linear no volume V_0 de um fluido ideal é dado por

$$\partial_t \int_{V_0} \rho \mathbf{v} d^3 \mathbf{r} + \int_{S_0} p \mathbf{n} d^2 \mathbf{r} + \int_{V_0} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d^2 \mathbf{r} + \int_{V_0} \mathbf{f}^V d^3 \mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad (2.13)$$

onde \mathbf{f}^V é a densidade de força volumétrica, $p(\mathbf{r}, t)$ é a pressão em \mathbf{r} , e note que a quantidade $\mathbf{v} \mathbf{v}$ é um diade, ou seja, um tensor de segunda ordem. Novamente podemos transformar as integrais de superfície em integrais de volume através do teorema de *Gauss*, entretanto em sua versão para tensores [Mase 1970], o que transforma a Eq. (2.13) na equação de conservação do momento linear em sua forma integral:

$$\partial_t \int_{V_0} \rho \mathbf{v} d^3 \mathbf{r} + \int_{V_0} \nabla p \mathbf{n} d^3 \mathbf{r} + \int_{V_0} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \mathbf{n} d^3 \mathbf{r} + \int_{V_0} \mathbf{f}^V d^3 \mathbf{r} = \mathbf{0}. \quad (2.14)$$

Como o volume V_0 é fixo, além de arbitrário, também temos a equação diferencial parcial da conservação do momento

$$\partial_t(\rho\mathbf{v}) + \nabla p + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) + \mathbf{f}^V = \mathbf{0}. \quad (2.15)$$

Geralmente, as forças volumétricas são muito menores que as demais forças da Eq. (2.15), ao ponto de podermos considerar $\mathbf{f}^V = \mathbf{0}$. E ainda, é possível expressarmos o gradiente da pressão em termos de um tensor de segunda ordem, como $\nabla p = \nabla \cdot (p\mathbf{I})$, onde \mathbf{I} é um tensor unitário. E assim, definimos o tensor de tensões para um fluido não viscoso como

$$\mathbf{S} = p\mathbf{I} + \rho\mathbf{v}\mathbf{v}, \quad (2.16)$$

além de reescrevermos a Eq. (2.15) da forma a seguir:

$$\partial_t(\rho\mathbf{v}) + \nabla \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0}. \quad (2.17)$$

Além desse formato da equação de conservação de momento linear, é conveniente para o cálculo da força de radiação, reescrevermos Eq. (2.17), por meio da relação matemática

$$\nabla \cdot \rho\mathbf{v}\mathbf{v} = (\nabla \cdot \rho\mathbf{v})\mathbf{v} + \rho\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v}. \quad (2.18)$$

De modo que, substituindo a equação de conservação de massa, Eq.(2.12), na relação acima, Eq. (2.18), obtemos

$$\nabla \cdot \rho\mathbf{v}\mathbf{v} = -(\partial_t\rho)\mathbf{v} + \rho\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v}. \quad (2.19)$$

Então, usamos a expressão resultante, Eq.(2.19), na equação que queremos reescrever, Eq. (2.17), que resulta em

$$\partial_t(\rho\mathbf{v}) + \nabla p - (\partial_t\rho)\mathbf{v} + \rho\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} = 0, \quad (2.20)$$

ou

$$\rho(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla p = 0, \quad (2.21)$$

onde o operador em parênteses é o operador material

$$D_t \equiv (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla). \quad (2.22)$$

Portanto, temos

$$\rho D_t \mathbf{v} = -\nabla p. \quad (2.23)$$

Sendo esta, uma outra maneira de expressarmos a equação de conservação do momento linear em um fluido ideal.

2.2.3 Conservação da energia

Quanto a conservação de energia para um fluido ideal, além das contribuições da convecção, ela também é dominada por leis da termodinâmica. Com isso, ao lidar com termodinâmica dos fluidos é proveitoso utilizar quantidades termodinâmicas por unidade de massa. Assim, usaremos a letra u para representar a energia interna por unidade de massa de um volume fixo V_0 , e a letra s para representar a entropia por unidade de massa. Isto posto, a primeira lei da termodinâmica associa o aumento da energia interna com o trabalho realizado sobre o elemento de volume, com o calor Tds , da forma a seguir:

$$du = Tds - pd(\rho^{-1}) = Tds + \frac{p}{\rho^2}d\rho, \quad (2.24)$$

onde $T(\mathbf{r}, t)$ é a temperatura na posição \mathbf{r} no instante de tempo t . Julgando que o transporte de calor no fluido é lento em comparação com a propagação acústica, o que proporciona que em um processo adiabático ($ds = 0$), a primeira lei da termodinâmica torne-se $du = p\rho^{-2}d\rho$, de modo que, tanto a energia interna, quanto a pressão possam ser escritas como equações de estado em função da densidade,

$$p = p(\rho), \quad (2.25)$$

$$u = u(\rho). \quad (2.26)$$

Por outro lado, a densidade de energia em um volume V_0 é dada pelo soma da densidade de energia cinética e a densidade de energia interna,

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho v^2(\mathbf{r}, t)}{2} + \rho u(\mathbf{r}, t). \quad (2.27)$$

De modo semelhante a variação de momento linear, Eq. (2.13), a densidade de energia em um fluido de volume V_0 pode variar por convecção através da superfície S_0 e devido a variação do trabalho realizado por uma força gerada pela pressão na superfície S_0 . Onde, a densidade de energia de convecção é dada em termos do fluxo de energia $(\rho v^2/2 + \rho u)\mathbf{v}$, à medida que a variação do trabalho devido a pressão é $p\mathbf{v}$ (ver Fig. 2.1). Com isto, a variação da taxa de densidade de energia em um volume V_0 para um fluido ideal é dada por

$$\partial_t \int_{V_0} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho u \right) d^3\mathbf{r} + \int_{S_0} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho u \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r} + \int_{S_0} p\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r} = 0. \quad (2.28)$$

Outra vez utilizando o teorema de *Gauss*, Eq. (2.7), e o fato de V_0 ser arbitrário e comum a todos, enfim chegamos a equação da conservação de energia para um fluido ideal:

$$\partial_t \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho u \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho u + p \right) \mathbf{v} \right] = 0. \quad (2.29)$$

Com esta equação completamos a exposição dos princípios de conservação e podemos partir para os fundamentos de propagação de ondas em um fluido ideal.

2.3 Propagação de ondas em um fluido ideal

A dinâmica de propagação da onda em um fluido ideal é representada por uma equação oriunda da combinação das equações de conservação de massa, Eq.(2.12), da equação de conservação de momento linear, Eq. (2.17), e da equação de estado da pressão em termos da densidade, Eq. (2.25). As quais encontram-se reunidas a seguir (na ordem citada acima):

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0, \quad (2.30a)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0, \quad (2.30b)$$

$$p = p(\rho). \quad (2.30c)$$

Além disso, ao considerar o fluido homogêneo, de forma a ter uma densidade ρ_0 e uma pressão p_0 constantes, expandimos a pressão, que é função da densidade, em séries de *Taylor* em torno da densidade ρ_0 , da maneira a seguir:

$$p - p_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (\rho - \rho_0)^n \frac{(\partial_{\rho}^n p)_{\rho_0}}{n!}, \quad (2.31)$$

onde $\partial_{\rho} = \frac{\partial}{\partial \rho}$ denota a derivada parcial com relação à densidade, no caso acima, exprime as variações de pressão com relação a densidade do fluido, em outras palavras, ondas de pressão, também conhecida como o som. Deste modo, a derivada parcial de primeira ordem $(\partial_{\rho} p)_{\rho_0}$, tem dimensão de velocidade ao quadrado, o que nos permite definir a velocidade do som por

$$c_0^2 = (\partial_{\rho} p)_{\rho_0}. \quad (2.32)$$

As equações diferenciais parciais não-lineares que descrevem a dinâmica da onda em um fluido ideal são reconhecidamente de difícil solução analítica. Felizmente, soluções aproximadas são muito satisfatórias, e podem ser alcançadas pelo método de aproximações sucessivas. Por este método, a pressão, a densidade e a velocidade são expandidas em potências de um pequeno parâmetro \mathcal{M} , o número de *Mach*, que é uma medida adimensional da velocidade definida como

$$\mathcal{M} = \frac{v_0}{c_0}, \quad (2.33)$$

onde v_0 é a magnitude máxima da velocidade do elemento de fluido e c_0 é a velocidade do som no fluido. Consequentemente, note que nossos estudos estão restritos a um regime de velocidade muito baixa, $\mathcal{M} \ll 1$. Assim, a pressão, a densidade e a velocidade são escritas da forma que se segue:

$$p - p_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}^n p^{(n)}, \quad (2.34)$$

$$\rho - \rho_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}^n \rho^{(n)}, \quad (2.35)$$

$$\mathbf{v} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}^n \mathbf{v}^{(n)}, \quad (2.36)$$

onde o índice n expõe a ordem da expansão. Para a derivação de espalhamento, a aproximação linear dos campos acústicos é suficiente. Na derivação da força de radiação acústica, utilizaremos os campos acústicos de segunda ordem, no entanto, como veremos estes campos podem ser correlacionados com os termos de primeira ordem, assim vejamos como determinar esses termos lineares.

2.3.1 Equação linear da onda

Para pequenas perturbações, o que nos fornece $\mathcal{M} \ll 1$, os campos acústicos podem ser representados pela aproximação linear, logo, da Eqs. (2.34)-(2.36), os campos acústicos de pressão, densidade e velocidade do elemento de fluido são, respectivamente

$$p - p_0 = \mathcal{M} p^{(1)}, \quad (2.37)$$

$$\rho - \rho_0 = \mathcal{M} \rho^{(1)}, \quad (2.38)$$

$$\mathbf{v} = \mathcal{M} \mathbf{v}^{(1)}. \quad (2.39)$$

Ao aplicarmos as Eqs. (2.37), (2.38) e (2.32) na Eq. (2.31), para $n = 1$, encontramos que a aproximação linear da expansão da pressão em função da densidade é dada por

$$p^{(1)} = c_0^2 \rho^{(1)}. \quad (2.40)$$

Por outro lado, partindo das equações de conservação de massa (2.30a) e conservação do momento linear (2.30b) e substituindo as Eqs. (2.37)-(2.39), mantendo apenas os termos de primeira ordem e eliminando a densidade por meio da Eq. (2.40), alcançamos

$$\frac{1}{c_0^2} \partial_t p^{(1)} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}^{(1)} = 0, \quad (2.41)$$

$$\rho_0 \partial_t \mathbf{v}^{(1)} + \nabla p^{(1)} = 0. \quad (2.42)$$

que correspondem as equações lineares de dinâmica dos fluidos.

Aplicando o rotacional na Eq. (2.42), sabendo que o rotacional de um gradiente é sempre nulo ($\nabla \times \nabla p^{(1)} = 0$), percebemos que a velocidade do elemento de fluido é irrotacional

$$\nabla \times \mathbf{v}^{(1)} = 0. \quad (2.43)$$

Com isso, por definição, podemos escrever a velocidade do elemento de fluido como o gradiente de uma função potencial escalar $\phi(\mathbf{r}, t)$, como exposto a seguir:

$$\mathbf{v}^{(1)} = \nabla \phi. \quad (2.44)$$

Substituindo esse resultado na Eq. (2.42), obtemos a pressão em função do mesmo potencial,

$$p^{(1)} = -\rho_0 \partial_t \phi. \quad (2.45)$$

Assim como, se substituirmos a velocidade e a pressão do elemento de fluido escritas em termos do potencial de velocidade, na Eq. (2.41), obtemos a equação linear da onda para o potencial de velocidade

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_0^2} \partial_t^2 \right) \phi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.46)$$

De forma direta, subtende-se que a pressão e a velocidade do elemento de fluido satisfazem a equação linear da onda.

2.3.2 Equação de *Helmholtz*

Como os campos acústicos, cujas forças de radiação acústica estão relacionados, tem variação temporal harmônica. Suponha que os mesmos oscilam com uma frequência f , e frequência angular $\omega = 2\pi f$. Com isso, o potencial de velocidade do elemento de fluido pode ser escrito como

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}. \quad (2.47)$$

Note que $\phi(\mathbf{r})$ é a amplitude do potencial de velocidade do elemento de fluido. Deste modo, ao aplicarmos a Eq. (2.47) na equação linear da onda, Eq. (2.46), a mesma pode ser reescrita como a equação de *Helmholtz*:

$$(\nabla^2 + k^2)\phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.48)$$

onde $k = \omega/c_0$ é o número de onda.

Com a solução da equação de *Helmholtz* encontramos o potencial de velocidade do fluido, e conseqüentemente os campos de pressão e velocidade do fluido, no entanto a so-

lução dessa equação depende diretamente das condições de contorno de cada configuração específica de espalhamento. Alguns exemplos de soluções analíticas podem ser vistos em [Andrade 2014] e [Neto 2015]. Todavia, neste trabalho utilizaremos soluções numéricas, que serão discutidas no Cap. 3. Contudo, veremos como expressar a força de radiação de segunda ordem, em termos desses campos acústicos de primeira ordem, na seção 2.6.

2.4 Equações de conservação para sólidos

Até o momento, vimos os conceitos básicos de conservação em fluidos, no entanto, tendo em vista que o fenômeno de superfocalização acústica também abrange meios sólidos, é válido ressaltar alguns conceitos básicos sobre os mesmos. Assim, no decorrer dessa seção apresentaremos as equações de conservação (de massa, do momento e da energia) para um sólido elástico, partindo dos conceitos de deformação e do desenvolvimento das relações constitutivas. Para contornar as complexidades dos cálculos tensoriais, apresentaremos os conceitos dessa seção por meio das coordenadas cartesianas x_i ($i = 1, 2, 3$).

2.4.1 Deformação

Suponhamos que um meio contínuo de volume V_0 e superfície S_0 foi submetido a uma deformação. A princípio (antes da deformação), um ponto P_0 desse volume encontra-se localizado pelo vetor $\mathbf{R}(x_1, x_2, x_3)$, enquanto um ponto P_1 , posicionado nas proximidades de P_0 , é localizado pelo vetor $d\mathbf{R}$ em relação a P_0 . Com a deformação, passemos a denominar o volume e a superfície por V'_0 e S'_0 , respectivamente, o ponto P_0 agora passa a ser referido por P'_0 e localizado por $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$, enquanto o ponto P_1 será simbolizado por P'_1 e situado pelo vetor $d\mathbf{r}$ em relação a P'_0 , como ilustrado na Fig. 2.2. Assim como, o deslocamento de P_0 para P'_0 é mensurado pelo vetor $\mathbf{w}(w_1, w_2, w_3)$. Com isso, as relações entre os vetores representadas na Fig. 2.2 são dadas por

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{w}, \quad (2.49)$$

$$\mathbf{w} + d\mathbf{r} = d\mathbf{R} + \mathbf{W}. \quad (2.50)$$

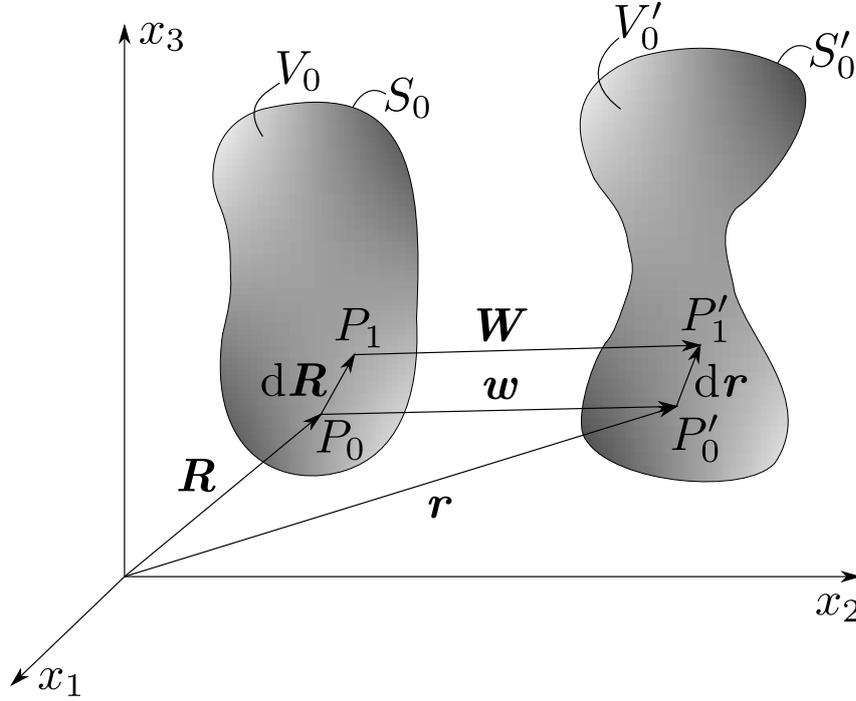
Note que, a partir da Eq. (2.49), deduzimos que $d\mathbf{r} = d\mathbf{R} + \mathbf{W}$. Com isso, substituindo essa equação na Eq. (2.50), podemos obter

$$\mathbf{W} = \mathbf{w} + d\mathbf{w}. \quad (2.51)$$

Sendo que também podemos expressar dw_i da forma a seguir:

$$dw_i = \partial_j w_i dx_j \quad (2.52)$$

Figura 2.2: Ilustração da deformação de um meio contínuo de volume V_0 e superfície S_0 resultando em um volume V'_0 e superfície S'_0 .



Fonte: autor, 2019.

onde $\partial_j = \partial/\partial x_j$. Além disso, podemos reescrever essa equação como

$$dw_i = \frac{1}{2}(\partial_j w_i + \partial_i w_j) dx_j + \frac{1}{2}(\partial_j w_i - \partial_i w_j) dx_j. \quad (2.53)$$

Dessa forma, podemos definir os tensores infinitesimais de deformação e rotação para pequenas deformações como

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j w_i + \partial_i w_j), \quad w_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j w_i - \partial_i w_j), \quad (2.54)$$

ou na forma vetorial, onde a deformação é dada por

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T), \quad (2.55)$$

onde $\nabla \mathbf{w}$ é o tensor de segunda ordem e o sobrescrito T remete à transposta do tensor referido.

Em suma, a Eq. (2.53) nos revela que a cinemática de um ponto arbitrário na vizinhança de um ponto P_0 é regida pelo campo gradiente local $\partial_j w_i$ e que esse movimento é resultante da combinação de efeitos locais de distorção ϵ_{ij} e a rotação de corpo rígido w_{ij} .

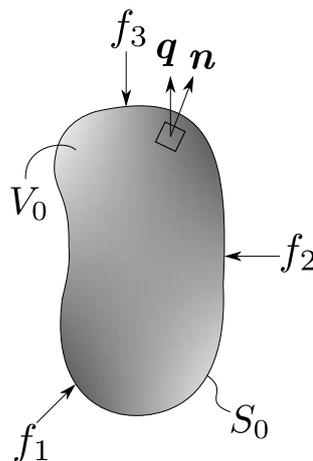
2.4.2 Tensão

Assuma um meio contínuo de volume V_0 e superfície S_0 onde atuam forças f_i ($i = 1, 2, 3$), como retratado na Fig. 2.3. Se o objeto for deformado pela ação dessas forças, a distribuição de suas moléculas é alterada, então dizemos que o corpo já não se encontra em seu estado de equilíbrio original. Em contrapartida, o vetor de tração interna \mathbf{q} atua como reação a aplicação dessas forças, tendendo a restaurar o corpo ao equilíbrio. Agindo sobre um elemento de superfície arbitrário com vetor normal \mathbf{n} , em relação a essa superfície, como apresentado na Fig. 2.3, o vetor tração é definido como

$$\mathbf{q} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \quad (2.56)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões, que é diretamente associado às forças internas que tendem a restituir o corpo ao seu equilíbrio. Logo, se não ocorre deformação, não há tensão interna.

Figura 2.3: Ilustração do vetor de tração \mathbf{q} em um meio contínuo de volume V_0 e superfície S_0 devido às forças externas f_i ($i = 1, 2, 3$).



Fonte: autor, 2019.

2.4.3 Conservação da massa

Temos que, a massa compreendida por um volume V_0 e superfície S_0 para qualquer intervalo de tempo t é definida por

$$m = \int_{V_0} \rho_1 \, d^3\mathbf{r}, \quad (2.57)$$

onde $\rho_1 = \rho_1(\mathbf{r}, t)$ é a densidade de massa de um sólido. Para haver a conservação de massa, é necessário que a taxa de variação da mesma seja nula, isto é, $dm/dt = 0$. Portanto,

$$\int_{V_0} [\partial_t \rho_1 d^3 \mathbf{r} + \rho_1 \partial_t (d^3 \mathbf{r})] = 0. \quad (2.58)$$

Sabendo que, o deslocamento de uma partícula ocasionado pela deformação do volume V_0 após um instante dt , é dado por $\mathbf{v} dt$, e que \mathbf{n} é o vetor unitário normal à superfície S_0 , então o volume deslocado pelas partículas de um elemento de área $d^2 \mathbf{r}$ na superfície S_0 é delimitado por $d^3 \mathbf{r} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dt d^2 \mathbf{r}$. Assim,

$$\int_{V_0} \partial_t \rho_1 d^3 \mathbf{r} + \int_{S_0} \rho_1 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d^2 \mathbf{r} = 0. \quad (2.59)$$

Empregando o teorema da divergência de *Gauss*, Eq. (2.7), na integral de superfície tornando-a uma integral de volume novamente, obtemos

$$\int_{V_0} \partial_t \rho_1 d^3 \mathbf{r} + \int_{V_0} \nabla \cdot \rho_1 \mathbf{v} d^3 \mathbf{r} = 0. \quad (2.60)$$

Visto que, o volume V_0 é arbitrário, então a equação de conservação de massa é definida por

$$\partial_t \rho_1 + \nabla \cdot \rho_1 \mathbf{v} = 0. \quad (2.61)$$

2.4.4 Conservação do momento

Partindo do pressuposto, que a variação da taxa de momento linear em um meio contínuo de volume V_0 e superfície S_0 é igual a força total aplicada sobre esse volume. Sabendo que, para um instante de tempo qualquer, t , o momento linear no volume contínuo V_0 é definido por $\rho_1 \mathbf{v}$, e o que o corpo está sujeito a forças de superfície e volumétricas. Temos que, a taxa de variação do momento linear de um corpo é dado por

$$\partial_t \int_{V_0} \rho_1 \mathbf{v} d^3 \mathbf{r} = \int_{S_0} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d^2 \mathbf{r} + \int_{V_0} \mathbf{f}^V d^3 \mathbf{r}, \quad (2.62)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões em um sólido. Efetuando a derivada temporal do lado esquerdo da equação, e utilizando o relação vista na seção anterior, onde a derivada no tempo do elemento de volume é $\partial_t (d^3 \mathbf{r}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d^2 \mathbf{r}$, temos

$$\int_{V_0} (\mathbf{v} \partial_t \rho_1 + \rho_1 \partial_t \mathbf{v}) d^3 \mathbf{r} + \int_{S_0} \rho_1 \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d^2 \mathbf{r} = \int_{S_0} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} d^2 \mathbf{r} + \int_{V_0} \mathbf{f}^V d^3 \mathbf{r}. \quad (2.63)$$

Utilizando a relação da Eq. (2.59) podemos eliminar o primeiro e o terceiro termo à esquerda da igualdade, além de substituímos $\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{w}$ no segundo termo, e ainda empregando o teorema de *Gauss*, Eq. (2.7), na integral de superfície do lado direito, chegamos na seguinte equação

$$\int_{V_0} (\rho_1 \partial_t^2 \mathbf{w} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{f}^V) d^3 \mathbf{r} = 0. \quad (2.64)$$

Em virtude do volume V_0 ser arbitrário, a equação de conservação do momento linear para sólidos é expressa por

$$\rho_1 \partial_t^2 \mathbf{w} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{f}^V = \mathbf{0}. \quad (2.65)$$

Em casos específicos, onde as forças volumétricas \mathbf{f}^V forem muito menores que as demais forças da Eq. (2.65) podemos desprezá-las, o que nos leva a

$$\rho_1 \partial_t^2 \mathbf{w} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (2.66)$$

Sendo está a equação de conservação de momento linear para sólidos que utilizaremos nas próximas seções.

2.4.5 Conservação da energia

Para que a energia seja conservada, é necessário que a variação da taxa de energia total seja igual ao trabalho realizado sobre o corpo, trabalho este proporcionado por todas as forças externas por unidade de tempo. Para tal, a energia cinética E_c é definida como

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{V_0} v^2 \rho_1 d^3 \mathbf{r}. \quad (2.67)$$

Enquanto, a energia interna U é definida como

$$U = \int_{V_0} u \rho_1 d^3 \mathbf{r}, \quad (2.68)$$

onde u é a energia interna por unidade de massa. Com isso, a conservação de energia é dada por

$$\partial_t \int_{V_0} \left(\frac{1}{2} v^2 + u \right) \rho_1 d^3 \mathbf{r} = \int_{S_0} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} d^2 \mathbf{r} + \int_{V_0} \mathbf{f}^V \cdot \mathbf{v} d^3 \mathbf{r}. \quad (2.69)$$

Aplicando a derivada temporal do lado esquerdo, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{V_0} \left[(\mathbf{v} \partial_t \mathbf{v} + \partial_t u) \rho_1 + \left(\frac{1}{2} v^2 + u \right) \partial_t \rho_1 \right] d^3 \mathbf{r} + \int_{S_0} \left(\frac{1}{2} v^2 + u \right) \rho_1 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d^2 \mathbf{r} \\ &= \int_{S_0} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} d^2 \mathbf{r} + \int_{V_0} \mathbf{f}^V \cdot \mathbf{v} d^3 \mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.70)$$

Utilizando a teorema de *Guass*, Eq. 2.7, nas integrais de superfície e mudando a posição de alguns termos, temos

$$\int_{V_0} (\mathbf{v} \partial_t \mathbf{v} + \partial_t u) \rho_1 \, d^3 \mathbf{r} + \int_{V_0} \left(\frac{1}{2} v^2 + u \right) [\partial_t \rho_1 + \nabla \cdot \rho_1 \mathbf{v}] \, d^3 \mathbf{r} = \int_{V_0} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v} \, d^3 \mathbf{r} + \int_{V_0} \mathbf{f}^V \cdot \mathbf{v} \, d^3 \mathbf{r}. \quad (2.71)$$

Perceba que o termo entre colchetes é igual a zero, pois corresponde a equação de conservação de massa, Eq. (2.61), assim como, se substituirmos $\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{w}$ e organizando os termos novamente, obtemos

$$\int_{V_0} [(\rho_1 \partial_t^2 \mathbf{w} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{f}^V) \partial_t \mathbf{w} + (\rho_1 \partial_t u - \boldsymbol{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{v})] \, d^3 \mathbf{r} = \mathbf{0}. \quad (2.72)$$

onde o primeiro parenteses também é igual a zero, pois se trata da equação de conservação do momento, Eq. (2.64), e enfim, como o volume V_0 é arbitrário, a equação se resume a

$$\rho_1 \partial_t u - \boldsymbol{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (2.73)$$

Sendo está a equação de conservação da energia para sólidos.

2.5 Modelo de *Kelvin-Voigt*

Uma propriedade importante em materiais elásticos é a sua rigidez, visto que a mesma conecta a tensão com a deformação, pois caracteriza a resistência de um material à deformação, em reação à aplicação de uma força. Assumindo um meio isotrópico, *Cauchy* generalizou a lei de *Hooke*, considerando que as componentes da tensão são linearmente associadas com as componentes da deformação. Deste modo, somos capazes de expressar a equação tensorial na notação de *Einstein*, onde um índice repetido corresponde a um somatório sobre esse mesmo índice, como a seguir:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad (2.74)$$

onde o σ_{ij} é o tensor de tensões, ϵ_{kl} é o tensor de deformação e C_{ijkl} é o tensor das constantes elásticas, ou módulos, do material, sendo intitulado de tensor do módulo de elasticidade.

Caso queiramos considerar o comportamento viscoelástico, teremos que assumir a taxa de variação da deformação com dependência temporal, em resposta à aplicação de uma força, ou seja, podemos generalizar a Eq. (2.74) adicionando termos proporcionais às derivadas temporais da tensão e da deformação,

$$\left[1 + \sum_{m=1}^{M_1} A_{ijkl}^m \partial_t^m \right] \sigma_{ij} = \left[C_{ijkl} + \sum_{m=1}^{M_2} B_{ijkl}^m \partial_t^m \right] \epsilon_{kl}, \quad (2.75)$$

onde $\partial_t^m = \partial^m / \partial t^m$. Sendo que essa equação compreende os quatro tipo de comportamento

viscoelástico clássico (*Kelvin-Voigt*, *Maxwell*, *Zener* ou anti-*Zener*), mudando de acordo com os valores de $A_{ijkl}^m, B_{ijkl}^m, M_1$ e M_2 . Ao passo que, para $M_1 = 0$ e $M_2 = 1$, tratamos com o modelo de *Kelvin-Voigt* [Mainardi 2010],

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} + B_{ijkl}\partial_t\epsilon_{kl}. \quad (2.76)$$

Podemos desenvolver a equação acima, utilizando o seguinte teorema: Um tensor isotrópico de quarta ordem D_{ijkl} pode ser escrito da forma a seguir [Segel 2007]:

$$D_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \kappa(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (2.77)$$

onde λ, μ e κ são constantes e $\delta_{nm}(n, m = i, j, k, j)$ é a função delta de *Kronecker*. Assim, aplicando esse teorema nos tensores de quarta ordem da relação tensão-deformação do modelo de *Kelvin-Voigt*, Eq. (2.76), obtemos

$$\sigma_{ij} = \lambda_e\delta_{ij}\epsilon_{kk} + 2\mu_e\epsilon_{ij} + \lambda_v\delta_{ij}\partial_t\epsilon_{kk} + 2\mu_v\partial_t\epsilon_{ij}, \quad (2.78)$$

isto é,

$$\boldsymbol{\sigma} = [(\lambda_e + \lambda_v\partial_t) \text{tr } \boldsymbol{\epsilon}] \mathbf{I} + 2(\mu_e + \mu_v\partial_t)\boldsymbol{\epsilon}, \quad (2.79)$$

onde, \mathbf{I} é o tensor unitário de segunda ordem, ‘tr’ simboliza o traço de um tensor, λ_e e μ_e são as constantes elásticas longitudinal e de cisalhamento em unidades Pa · s, enquanto que λ_v e μ_v são os coeficientes de viscosidade longitudinal e de cisalhamento em unidades Pa · s.

Empregando o tensor de deformação da Eq. (2.54) e a relação de tensão-deformação para um sólido viscoelástico isotrópico, Eq. (2.78), na equação da conservação do momento, Eq. (2.66), podemos reformular essa relação em termos do deslocamento w , como a seguir:

$$\rho_1\partial_t^2 w_i = (\lambda_e + \mu_e)\partial_{ij}^2 w_j + \mu_e\partial_j^2 w_i + (\lambda_v + \mu_v)\partial_{ij}^2\partial_t w_j + \mu_v\partial_j^2\partial_t w_i \quad (2.80)$$

Ou de modo equivalente, na forma vetorial

$$\rho_1\partial_t^2 \mathbf{w} = (\lambda_e + \mu_e)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}) + \mu_e\nabla^2 \mathbf{w} + (\lambda_v + \mu_v)\nabla(\nabla \cdot \partial_t \mathbf{w}) + \mu_v\nabla^2 \partial_t \mathbf{w}. \quad (2.81)$$

De modo que, ao aplicarmos a identidade vetorial $\nabla^2 \mathbf{w} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{w}$, a equação acima se torna

$$\partial_t^2 \mathbf{w} = c_L^2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}) - c_S^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{w} + \tau_L c_L^2 \nabla(\nabla \cdot \partial_t \mathbf{w}) - \tau_S c_S^2 \nabla \times \nabla \times \partial_t \mathbf{w}, \quad (2.82)$$

Tal que, a velocidade do som longitudinal e de cisalhamento no sólido são expressas por [Ayres e Gaunaurd 1987]:

$$c_L = \sqrt{\frac{(\lambda_e + 2\mu_e)}{\rho_1}}, \quad (2.83)$$

$$c_S = \sqrt{\frac{\mu_e}{\rho_1}}. \quad (2.84)$$

Assim como, os tempos de relaxação longitudinal e de cisalhamento são apropriadamente

$$\tau_L = \left(\frac{\lambda_v + 2\mu_v}{\rho_1 c_L^2} \right), \quad (2.85)$$

$$\tau_S = \left(\frac{\mu_v}{\rho_1 c_S^2} \right). \quad (2.86)$$

Observando a natureza complexa da equação de movimento do deslocamento, Eq. (2.82), se faz necessário reescrever essa equação de uma forma mais compacta, para tal, utilizaremos o teorema da decomposição de *Helmholtz* [GRAFF 1975], ao definir o vetor deslocamento \mathbf{w} em termos do potencial escalar ϕ_L e do potencial vetor \mathbf{A} ,

$$\mathbf{w} = (\nabla\phi_L + \nabla \times \mathbf{A})e^{-i\omega t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (2.87)$$

onde ϕ_L e \mathbf{A} são as amplitudes das funções potenciais escalar e vetor referentes às ondas longitudinais longitudinais e de cisalhamento, nessa ordem. Logo, a Eq. (2.82) se torna,

$$\nabla [\partial_t^2 \phi_L - c_L^2 \nabla^2 \phi_L - \tau_L c_L^2 \partial_t \nabla^2 \phi_L] e^{-i\omega t} + \nabla \times [\partial_t^2 \mathbf{A} - c_S^2 \nabla^2 \mathbf{A} - \tau_S c_S^2 \partial_t \nabla^2 \mathbf{A}] e^{-i\omega t} = 0. \quad (2.88)$$

Para que essa equação seja satisfeita, os termos entre colchetes devem ser nulos, de tal modo que as equações de onda em um sólido podem ser escritas de forma independente para cada potencial,

$$[(1 + \tau_L \partial_t) \nabla^2 - c_L^{-2} \partial_t^2] \phi_L e^{-i\omega t} = 0, \quad (2.89)$$

$$[(1 + \tau_S \partial_t) \nabla^2 - c_S^{-2} \partial_t^2] \mathbf{A} e^{-i\omega t} = 0. \quad (2.90)$$

Em virtude da função potencial \mathbf{A} ser um campo vetorial solenoidal, podemos reescrevê-la em termos de dois potenciais escalares $\psi_{S,1}$ e $\psi_{S,2}$, ou seja, os denominados potenciais escalares de *Debye* [Gray e Nickel 1978],

$$\mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{r}\psi_{S,1}) + \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r}\psi_{S,2}). \quad (2.91)$$

Dessarte, aplicando esse nova representação do potencial na Eq. (2.90), encontramos as equações de *Helmholtz* escalares

$$(\nabla^2 + k_L^2)\phi_L = 0, \quad (2.92)$$

$$(\nabla^2 + k_S^2) \begin{pmatrix} \psi_{S,1} \\ \psi_{S,2} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.93)$$

onde k_L e k_S são os números de onda longitudinal e de cisalhamento, nessa ordem. Enquanto, as relações de dispersão das ondas longitudinais e de cisalhamento são

$$k_j^2 = \left(\frac{\omega}{c_j}\right)^2 n_c^2(\omega\tau_j), \quad j \in \{L, S\}, \quad (2.94)$$

sendo n_c o índice de refração complexo do material viscoelástico,

$$n_c(\omega\tau_j) = \frac{1}{\sqrt{1 + (-i\omega\tau_j)}}, \quad j \in \{L, S\}. \quad (2.95)$$

Se mostra conveniente evidenciar o tempo de relação adimensional $\varepsilon_j = (\omega\tau_j)$. Ademais, é possível expressarmos o índice de refração complexo em função da sua parte real n_R e imaginária

$$n_c(\varepsilon_j) = n_R(\varepsilon_j) + i\tilde{\alpha}(\varepsilon_j), \quad (2.96)$$

onde a parte imaginária associada à quantidade $\tilde{\alpha}$, definida como função de absorção adimensional, caracteriza a absorção do meio, à medida que a parte real denota a dispersão do mesmo, sendo n_R o índice de refração do material, configurando assim, um meio dispersivo e absorvedor.

2.5.1 Modelo de *Kelvin-Voigt* Fracionário

Ao lidarmos com o espalhamento de uma partícula de material sólido viscoelástico, é importante considerarmos que a absorção acústica tanto de ondas longitudinais quanto de ondas de cisalhamento em vários materiais viscoelásticos seguem uma lei de potência da frequência ([Szabo e Wu 2000], [Chen e Holm 2003], [Holm e Näsholm 2014])

$$\alpha(\omega) = \alpha_0\omega^{y_0}, \quad (2.97)$$

onde α_0 é o coeficiente de absorção e y_0 é o expoente da lei de potência que é definido entre 0 e 2, a depender das propriedades viscoelásticas do material.

Partindo do mesmo princípio, ocorre a generalização do modelo de *Kelvin-Voigt* retratado anteriormente. Para tal, inserimos um operador de cálculo fracionário, isto é, uma derivada fracionária, na relação tensão-deformação. Com isso, as derivadas temporais com expoentes inteiros da Eq. (2.75) são trocados por derivadas fracionárias [Mainardi 2010]

$$\left[1 + \sum_{m=1}^{M_1} A_{ijkl}^m \partial_t^{m+\nu-1} \right] \sigma_{ij} = \left[C_{ijkl} + \sum_{m=1}^{M_2} B_{ijkl}^m \partial_t^{m+\nu-1} \right] \epsilon_{kl}, \quad (2.98)$$

onde $\partial_t^\nu (\nu > 0)$ é o operador derivada fracionária temporal. Sendo este operador definido, ao atuar em uma função dependente do tempo $f(t)$, pela transformada de *Fourier* a seguir [Holm e Näsholm 2014]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\partial_t^\nu f(t)] e^{-i\omega t} dt = (-i\omega)^\nu F(\omega), \quad (2.99)$$

onde $F(\omega)$ é a transformada de *Fourier*. Ao passo que, podemos compreender a derivada arbitrária ∂^ν como uma generalização da derivada de m -ésima ordem, ao substituímos o número inteiro m por um número real ν .

Assim como no caso não fracionário, dependendo do valores de M_1 e M_2 esta expressão é capaz de representar quatro tipos de comportamento viscoelástico clássico. Novamente, assumiremos $M_1 = 0$ e $M_2 = 1$ para recuperarmos o modelo de *Kelvin-Voigt*, só que agora coma derivada fracionária [Mainardi 2010],

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} + B_{ijkl} \partial_t^\nu \epsilon_{kl}. \quad (2.100)$$

De forma análoga, o modelo de *kelvin-Voigt* para o caso isotrópico fracionário pode ser definido por

$$\sigma_{ij} = \lambda_e \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu_e \epsilon_{ij} + \lambda_v \delta_{ij} \partial_t^\nu \epsilon_{kk} + 2\mu_v \partial_t^\nu \epsilon_{ij}, \quad (2.101)$$

ou na forma vetorial,

$$\boldsymbol{\sigma} = [(\lambda_e + \lambda_v \partial_t^\nu) \text{tr } \boldsymbol{\epsilon}] \mathbf{I} + 2(\mu_e + \mu_v \partial_t^\nu) \boldsymbol{\epsilon}, \quad (2.102)$$

sendo que neste caso, os coeficientes de viscosidade longitudinal λ_v e de cisalhamento μ_v possuem unidade de $\text{Pa} \cdot \text{s}^\nu$ em virtude da derivada fracionária. Efetuando as mesmas manipulações e utilizando os mesmo artifícios matemáticos da seção anterior, a equação acima pode ser reescrita e decomposta em uma equação de onda para cada potencial individualmente,

$$[(1 + \tau_L^\nu \partial_t^\nu) \nabla^2 - c_L^{-2} \partial_t^2] \phi_L e^{-i\omega t} = 0, \quad (2.103)$$

$$[(1 + \tau_S^\nu \partial_t^\nu) \nabla^2 - c_S^{-2} \partial_t^2] \mathbf{A} e^{-i\omega t} = 0. \quad (2.104)$$

onde, os tempos de relaxação longitudinal e de cisalhamento são consequentemente

$$\tau_L = \left(\frac{\lambda_\nu + 2\mu_\nu}{\rho_1 c_L^2} \right)^{1/\nu}, \quad (2.105)$$

$$\tau_S = \left(\frac{\mu_\nu}{\rho_1 c_S^2} \right)^{1/\nu}. \quad (2.106)$$

Notemos que, para $\nu = 1$ resgatamos o modelo clássico de *Kelvin-Voigt*.

Por conseguinte, para adquirirmos as amplitudes dos potenciais ϕ_L , $\psi_{S,1}$ e $\psi_{S,2}$, verificamos por meio da Eq. (2.99) que $\partial_t^\nu e^{-i\omega t} = (-i\omega)^\nu e^{-i\omega t}$, e novamente de maneira equivalente a da seção anterior recuperamos as equações de *Helmholtz*

$$(\nabla^2 + k_L^2) \phi_L = 0, \quad (2.107)$$

$$(\nabla^2 + k_S^2) \begin{pmatrix} \psi_{S,1} \\ \psi_{S,2} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.108)$$

No entanto, os índices de refração complexos do material viscoelástico das ondas longitudinais e de cisalhamento passam a ser definidos como

$$n_c(\omega\tau_j) = \frac{1}{\sqrt{1 + (-i\omega\tau_j)^\nu}}, \quad j \in \{L, S\}. \quad (2.109)$$

Como mencionado ao final da seção de propagação de ondas em um fluido ideal (Sec. 2.3), neste trabalho utilizaremos meios numéricos para descrever o espalhamento das ondas acústicas, através da solução da equação de Helmholtz, meios estes que serão retratados no Cap. 3. Contudo, algumas soluções analíticas podem ser consultadas na referência [Neto 2015].

2.6 Força de Radiação Acústica

Quando uma onda acústica interage com um objeto colocado em seu caminho, parte do momento (linear e/ou angular) da mesma é transferido para o objeto. Em particular, a transferência do momento linear resulta no aparecimento de uma força conhecida como força de radiação acústica. Essas forças são utilizadas em diversas aplicações como aprisionamento, separação, padronização e aglomeração de partículas em diversas áreas

de pesquisa. Nesta seção, faremos uma breve revisão histórica do fenômeno de força de radiação acústica, e logo a seguir, apresentaremos o formalismo utilizado neste trabalho.

2.6.1 Revisão histórica

As primeiras análises relevantes da força de radiação acústica em partículas suspensas em um fluido são atribuídas a *King* [King 1934]. Neste trabalho precursor, *King* considerou uma esfera rígida (tamanho qualquer) em um fluido ideal, tanto com ondas planas como com ondas estacionárias.

O trabalho de *King* serviu como inspiração para diversos autores, que promoveram novos métodos e melhorias retirando algumas das restrições do seu formalismo. *Yosioka* e *Kawasima* [Yosioka e Kawasima 1955], desenvolveram estudos em partículas esféricas compressíveis em um fluido ideal, onde perceberam que a depender do contraste das propriedades mecânicas das partículas e do fluido, elas podem ser atraídas para os nós ou antinós de pressão de um feixe estacionário.

Westervelt [Westervelt 1957] obteve uma expressão para a força de radiação em termos da função de espalhamento assintótico de uma onda plana ao interagir com um obstáculo de geometria arbitrária.

Posteriormente, *Gor'kov* [Gor'Kov 1962] refinou o trabalho de *Yosioka* e *Kawasima* com partículas esféricas compressíveis, ao propor uma expressão elegantemente simples para a força de radiação devido o espalhamento de um feixe de geometria arbitrária. Apesar de ainda ser limitada a partículas muito menores que o comprimento de onda ($ka \ll 1$), a expressão se destacou por sua clareza e abrangência com relação a geometria do feixe.

Assim como *Gor'kov* refinou os dados de *Yosioka* e *Kawasima*, *Nyborg* [Nyborg 1967] combinou os trabalhos de *King* com esfera rígida e de *Embleton* [Embleton 1954] com ondas esféricas e encontrou uma expressão para a força de radiação acústica em pequenas partículas rígidas devido uma onda esférica. Por sua vez, o primeiro estudo da força de radiação acústica em partículas elásticas suspensas em um fluido ideal em virtude de uma onda plana progressiva, foi realizado por *Hasegawa* [Hasegawa e Yosioka 1969].

Por outro lado, *Wu* e *Du* [Wu e Du 1990] foram os responsáveis pelo estudo da força de radiação acústica em feixes esféricos focalizados.

Marston, em seus trabalhos [Marston 2006], [Marston 2007], expôs as circunstâncias necessárias para ocorrer força de radiação acústica negativa (ou seja, no sentido oposto a propagação do feixe) em partículas devido um feixe de *Bessel* de ordem zero, e posteriormente [Marston 2009], expandiu seus trabalhos ao obter força negativa devido um feixe de *Bessel* de primeira ordem. Enquanto *Mitri* [Mitri 2009], demonstrou que os feixes de *Bessel* de alta ordem também proporcionam força de radiação de sentido oposto à direção de propagação da onda, assim como desenvolveu estudos com um feixe de *Bessel* de onda

estacionária, com o objetivo de utilizá-los como pinças acústicas [Mitri 2008], [Mitri 2009], [Mitri 2014].

Uma solução para a força de radiação acústica foi proposta por Silva [Silva 2011], seu método é válido em feixes de forma arbitrária ao interagir com um objeto de geometria qualquer, de modo que a força é expressa como função dos coeficientes de forma do feixe incidente e dos coeficientes de espalhamento. Além disso, propôs [Silva 2014] equações exatas para a força de radiação em uma pequena partícula compressível devido uma onda harmônica arbitrária.

Neste trabalho utilizamos uma abordagem do método de *Yosioka e Kawasima*, o que nos permite calcular a força de radiação acústica em espalhadores compressíveis, em um fluido não viscoso. No entanto, usufruiremos da versatilidade do método de elementos finitos (com relação a geometria, seja do espalhador ou do campo) para solucionar o espalhamento e assim calcular a força de radiação acústica de segunda ordem, visto que podemos escrever seus termos de segunda ordem em função das grandezas acústicas de primeira ordem [Bruus 2008], obtidas a partir do espalhamento. Vale ressaltar, que esta abordagem já foi validada anteriormente [Glynne-Jones et al. 2013].

2.6.2 Força de radiação por um feixe aleatório

Ao se propagar, uma onda acústica transporta energia e momento, quando ela interage com um objeto sendo absorvida e/ou espalhada por este, parte desse momento pode ser transferido para o objeto. Logo, o fluxo de momento linear médio e as tensões que atuam sobre o objeto são reconhecidas como a força de radiação acústica. Assim, consideremos uma onda incidente em uma partícula de superfície S_0 . A força de radiação acústica média \mathbf{F}_{rad} será calculada pela integral do tensor de tensão médio $\bar{\mathbf{S}}$ que age sobre a partícula:

$$\mathbf{F}_{rad} = \int_{S_0} \bar{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n} \, d^2\mathbf{r}, \quad (2.110)$$

onde a barra indica a média temporal (ver Sec. 2.1).

Pretendemos calcular os termos da força de radiação acústica até segunda ordem. Geralmente, os campos de segunda ordem são considerados desprezíveis em comparação com os termos de primeira ordem. Todavia, quando os campos lineares tem uma dependência harmônica com o tempo, eles não contribuem diretamente com a média temporal. Exemplificando, suponha que os termos de primeira ordem (como a pressão, ou a velocidade do fluido, por exemplo) são expressos por $\cos \omega t$ ou $\sin \omega t$, da Eq. (2.1) obtemos $\overline{\cos \omega t} = 0$ e $\overline{\sin \omega t} = 0$. Contudo, termos que são funções do produto de termos de primeira ordem, não geram necessariamente médias temporais nulas, como por exemplo $\overline{\cos^2 \omega t} = 1/2$ ou $\overline{\sin^2 \omega t} = 1/2$.

Força de radiação acústica de segunda ordem

Com isso, para a aproximação de segunda ordem, Eqs. (2.34)-(2.36), o tensor de tensão de radiação médio, Eq. (2.16), de segunda ordem é dado por

$$\overline{\mathbf{S}}^{(2)} = \overline{p^{(2)}}\mathbf{I} + \rho_0 \overline{\mathbf{v}^{(1)}\mathbf{v}^{(1)}}, \quad (2.111)$$

onde $p^{(2)}$ é a pressão de segunda ordem, e $v^{(1)}$ é a velocidade de primeira ordem. Sendo, que os campos acústicos na aproximação de segunda ordem das Eqs. (2.34)-(2.36), resultam em

$$p = p_0 + \mathcal{M}p^{(1)} + \mathcal{M}^2 p^{(2)}, \quad (2.112)$$

$$\rho = \rho_0 + \mathcal{M}\rho^{(1)} + \mathcal{M}^2 \rho^{(2)}, \quad (2.113)$$

$$\mathbf{v} = \mathcal{M}\mathbf{v}^{(1)} + \mathcal{M}^2 \mathbf{v}^{(2)}. \quad (2.114)$$

Ao combinar as Eqs. (2.112)-(2.114) com a Eq. (2.23), alcançamos a equação do movimento de segunda para o campo acústico

$$\rho_0 \partial_t \mathbf{v}^{(2)} = -\nabla p^{(2)} - \rho^{(1)} \partial_t \mathbf{v}^{(1)} - \rho_0 (\mathbf{v}^{(1)} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{(1)}. \quad (2.115)$$

Observe que os dois últimos termos da Eq. (2.115) são produtos de dois campos de primeira ordem. Assim, considerando a média temporal da Eq. (2.115) (ver Sec. (2.1)), temos

$$\nabla \overline{p^{(2)}} = -\overline{\rho^{(1)} \partial_t \mathbf{v}^{(1)}} - \overline{\rho_0 (\mathbf{v}^{(1)} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{(1)}}. \quad (2.116)$$

Reescrevendo a Eq. (2.116) em termos do potencial de velocidade, Eq. (2.44), obtemos

$$\nabla \overline{p^{(2)}} = -\overline{\rho^{(1)} \partial_t \nabla \phi} - \overline{\rho_0 \nabla \phi \cdot \nabla \nabla \phi}, \quad (2.117)$$

de modo que,

$$\nabla \phi \cdot \nabla \nabla \phi = \frac{1}{2} \nabla (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) = \nabla \left(\frac{v^{(1)2}}{2} \right), \quad (2.118)$$

e além disso, substituindo as aproximações de primeira ordem Eqs. (2.40) e (2.45), deduzimos a equação da pressão de segunda ordem, em termos de primeira ordem,

$$\overline{p^{(2)}} = \frac{\overline{p^{(1)2}}}{2\rho_0 c_0^2} - \frac{\rho_0 \overline{v^{(1)2}}}{2}, \quad (2.119)$$

onde $v^{(1)2} = \mathbf{v}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{(1)}$. Assim, ao substituirmos a Eq. (2.119) na Eq. (2.111) obtemos o tensor de tensões médio, apenas em termos do campos acústicos de primeira ordem

$$\overline{\mathbf{S}^{(2)}} = \left(\frac{\overline{p^{(1)^2}}}{2\rho_0 c_0^2} - \frac{\rho_0 \overline{v^{(1)^2}}}{2} \right) \mathbf{I} + \rho_0 \overline{\mathbf{v}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)}}. \quad (2.120)$$

onde o termo entre parênteses (com sinais trocados) é reconhecido como a média da *Lagrangina* acústica de segunda ordem,

$$\overline{\mathcal{L}} = \frac{\rho_0 \overline{v^{(1)^2}}}{2} - \frac{\overline{p^{(1)^2}}}{2\rho_0 c_0^2}, \quad (2.121)$$

em razão do primeiro e o segundo termo, após a igualdade, serem identificados como as energias acústicas potencial e cinética, respectivamente.

Finalmente, ao substituir a Eq. (2.120) na Eq. (2.110), obtemos a equação da força de radiação acústica média de segunda ordem em termos de campos acústicos de primeira ordem:

$$\mathbf{F}_{rad} = \int_{S_0} \left[\left(\frac{\overline{p^{(1)^2}}}{2\rho_0 c_0^2} - \frac{\rho_0 \overline{v^{(1)^2}}}{2} \right) \mathbf{I} + \rho_0 \overline{\mathbf{v}^{(1)} \mathbf{v}^{(1)}} \right] \cdot \mathbf{n} \, d^2 \mathbf{r}, \quad (2.122)$$

Sendo assim, para calcular a força de radiação acústica em um objeto, precisamos dos campos totais de pressão e velocidade do fluido na superfície do mesmo, os quais podem ser obtidos resolvendo o espalhamento através da equação diferencial de *Helmholtz* (Eq. 2.48). No capítulo a seguir, iremos apresentar como equações diferenciais são resolvidas no software utilizado neste trabalho.

3

Modelo numérico

Não só os campos acústicos (ver Cap. 2) são representados por equações diferenciais parciais (EDPs), como também as mais diversas Leis da Física. Todavia, as soluções analíticas de tais equações tem limitações, principalmente inerentes a geometria. Neste cenário, as aproximações numéricas ganham notória importância. Essas aproximações, podem ser desenvolvidas a partir de diferentes métodos de discretização. Dessa forma, neste capítulo, apresentaremos como o software COMSOL Multiphysics[®], por meio do método de elementos finitos (MEF), utiliza a discretização de domínios para calcular aproximações para as soluções exatas de EDPs [COMSOL 2016].

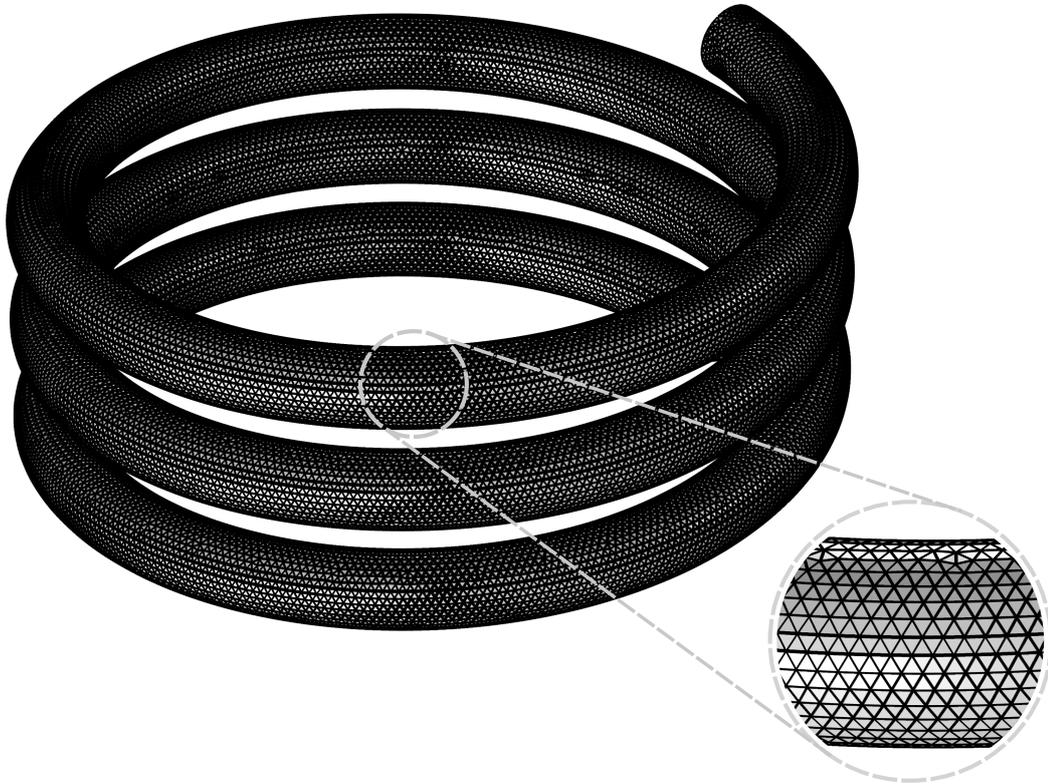
3.1 Método de elementos finitos

O método de elementos finitos possui uma grande versatilidade em discretizações, possibilitando tanto a simplificação da representação de domínios complexos (ver Fig. 3.1), como a obtenção de soluções expressas por funções mais simples (ver Fig. 3.2). Não obstante, equações diferenciais parciais exprimem pequenas alterações de variáveis dependentes, em relação a pequenas mudanças de variáveis independentes (x, y, z, t, \dots). Dessa forma, por motivos didáticos, iremos tratar de um exemplo em apenas uma dimensão. Para tal, como verificaremos a seguir, para entendermos como o MEF adotado no COMSOL funciona, é intuitivo começarmos pela *weak Formulation* [COMSOL 2014].

3.1.1 *Weak Formulation*

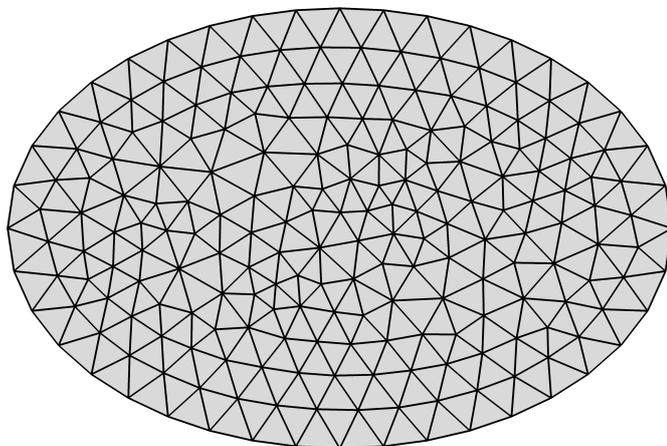
Por simplicidade, consideremos um exemplo de análise de temperatura em uma dimensão, estabelecida em um estado estacionário, a priori, sem fonte de calor. Onde pretendemos estudar a temperatura $T(x)$ em um intervalo $1 \leq x \leq 5$. Para uma melhor clareza nas equações, desconsideremos a condutividade térmica (podemos assumir que ela faz parte da unidade de medida). Logo, o fluxo de calor q , no sentido positivo de x é

Figura 3.1: Exemplo de discretização em 3D.



Fonte: Autor, 2019.

Figura 3.2: Exemplo de discretização em 2D.



Fonte: Autor, 2019.

descrito por

$$q = -\partial_x T(x), \quad (3.1)$$

onde $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ é derivada parcial com relação à x . Com isso, a conservação do fluxo de calor (visto que não consideramos fonte de calor no domínio) nos diz que

$$\partial_x q = 0. \quad (3.2)$$

As Eqs. (3.1) e (3.2), serão o foco das nossas explicações sobre o *weak formulation*, e consequentemente, sobre o MEF. Ao solucionar essas equações, obtemos o perfil de temperatura ao longo do domínio. No entanto, como mencionado anteriormente este formato de equações é recorrente na física. Como por exemplo, na eletrostática, ao substituirmos T pelo potencial elétrico e q pelo campo elétrico.

Percebemos que, como a Eq. (3.2) também é representada como a segunda derivada da temperatura T (via Eq. (3.1)), isso pode acabar dificultando a solução da mesma. Visto que, por exemplo, em casos onde tivermos analisando um domínio com materiais diferentes, os quais possuam condutividade térmicas distintas, a primeira derivada da temperatura T será descontínua, o que impossibilita a avaliação numérica da segunda derivada. Neste contexto, a ideia central da *weak formulation* é justamente suprimir esse problema, transformando a equação diferencial em uma equação integral, de maneira a retirar este peso do algoritmo numérico, durante a análise da equação.

Dessa forma, para convertermos a Eq. (3.2) em uma equação integral, em um primeiro momento, poderíamos subitamente pensar simplesmente em integrar a função em todo o domínio, $1 \leq x \leq 5$:

$$\int_1^5 \partial_x q(x) dx = 0, \quad (3.3)$$

entretanto, a equação acima só nos assegura que a média de $\partial_x q$ no domínio é zero, enquanto a equação diferencial original nos garante que $\partial_x q$ seja zero em cada ponto do domínio. Para contornarmos esse problema, primeiramente façamos a análise de um pequeno "elemento" do domínio

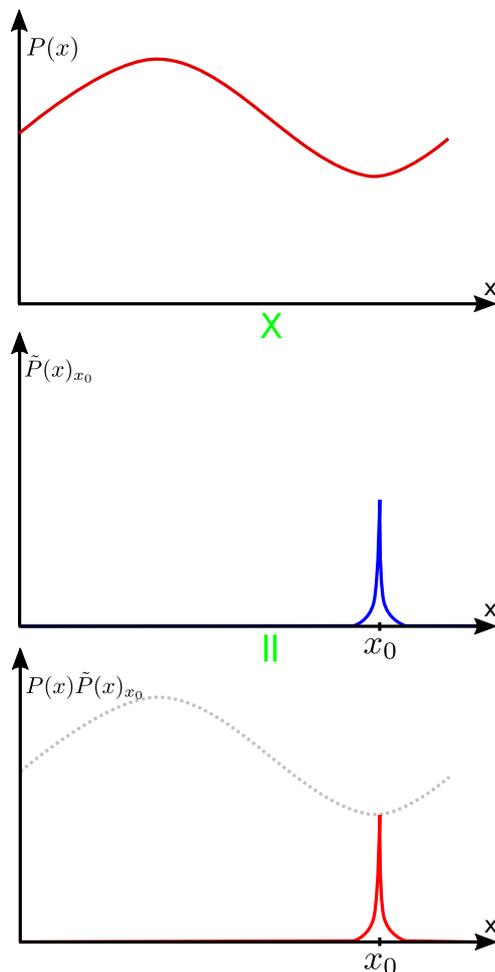
$$\int_{1.99}^{2.01} \partial_x q(x) dx = 0, \quad (3.4)$$

o que nos fornece o valor de $\partial_x q$ nas proximidades de $x = 2.0$, ou seja, $\partial_x q(2.0) \approx 0$. Podemos estender essa conceito por todo o domínio, de modo a aproximarmos a equação diferencial original em termos de integrais de pequenos elementos do domínio,

$$\int_{1.0}^{1.01} \partial_x q(x) dx = 0, \int_{1.01}^{1.02} \partial_x q(x) dx = 0, \int_{1.02}^{1.03} \partial_x q(x) dx = 0, \dots, \quad (3.5)$$

onde, quanto maior o número de elementos (integrais) e menor o tamanho deles (do

Figura 3.3: Exemplo de utilização de uma função peso (\tilde{P}), onde a terceira curva é o produto da primeira curva com uma função peso genérica (segunda curva) definida apenas nas proximidades de um ponto x_0 .



Fonte: Autor, 2019.

intervalo), melhor será a aproximação. Contudo, na prática é inviável escrevermos todas essas integrais, felizmente é possível expressar o mesmo conceito de outra forma.

Visto que, a ideia principal da Eq. (3.4) é identificar o valor de $\partial_x q$ em um intervalo estreito (pequeno elemento do domínio), podemos obter o mesmo resultado multiplicando o integrando por uma função peso $\tilde{T}_{2,0}(x)$ (escolhemos esse símbolo para manter uma correlação entre o símbolo da função (T) e da sua função peso \tilde{T} associada), a qual tem valor centrado no elemento e é zero para qualquer ponto fora deste, como no exemplo da Fig. 3.3. Com isso, essa nova abordagem nos permite integrar em todo o domínio, $1 \leq x \leq 5$, assumindo uma função peso generalizada $\tilde{T}(x)$, sendo esta a combinação de diversas funções peso ($\tilde{T}_{1,0}, \tilde{T}_{1,01}, \dots$), estando cada uma centrada em um certo elemento (pequeno intervalo) do domínio. O que nos fornece a *weak formulation*:

$$\int_1^5 \partial_x q(x) \tilde{T}(x) dx = 0, \quad (3.6)$$

onde podemos escolher uma função peso adequada para cada elemento do domínio. Mediante a tal versatilidade, essas funções "peso" são apropriadamente denominadas de funções de teste.

Reduzindo a ordem de diferenciação

Observe que até o momento ainda não alteramos a ordem da derivada, visto que ainda permanecemos com a mesma função da Eq. (3.2), no entanto como finalmente estamos lidando com uma integral isso deixa de ser um problema difícil de resolver, podemos reduzir a ordem da integral simplesmente utilizando o método de integração por partes, onde obtemos

$$q(x=5)\tilde{T}(x=5) - q(x=1)\tilde{T}(x=1) - \int_1^5 q(x)\partial_x\tilde{T}(x) dx = 0. \quad (3.7)$$

Note que a ordem da derivada foi reduzida, pois foi retirada do fluxo de calor (que já é representado naturalmente por uma derivada da temperatura, Eq. (3.1)), e aplicada na função de teste. Como a função de teste é apenas um artifício para encontrarmos a solução da equação, podemos escolher uma função que não nos traga problemas quanto a sua derivação.

Condição de contorno de *Neumann*

Como os dois primeiros termos da Eq. (3.7) relacionam o fluxo de calor e a função de teste nos limites do domínio, $x = 1$ e $x = 5$, e o fluxo de calor q foi estabelecido no sentido positivo de x , então nos é permitido expressá-los o fluxo em termos do fluxo de saída,

$$\int_1^5 \partial_x T(x)\partial_x\tilde{T}(x) dx = -\Lambda_1\tilde{T}_1 - \Lambda_2\tilde{T}_2, \quad (3.8)$$

onde Λ denota o fluxo de saída e os subscritos 1 e 2 representam os limites do domínio, $x = 1$ e $x = 5$, nessa ordem, de modo que temos as seguintes equivalências:

$$\Lambda_1 \equiv -q(x=1), \Lambda_2 \equiv +q(x=2), \tilde{T}_1 \equiv \tilde{T}(x=1), \tilde{T}_2 \equiv \tilde{T}(x=5), \quad (3.9)$$

e ainda, se substituirmos o fluxo de calor, Eq. (3.1), no integrando, para ficarmos com a integral em termo da temperatura T , e sua respectiva função de teste \tilde{T} .

Note que o lado direito da Eq. (3.8) nos permite atribuir de maneira direta as condições de contorno em termos do fluxo de calor. Por exemplo, se definirmos $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$, estabelecemos o isolamento térmico, uma vez que zeramos o fluxo de calor nos limites do domínio. Esse tipo de condição, definida ao especificarmos um fluxo nos limites de um domínio, é conhecida como condição de contorno de *Neumann*.

Condição de contorno de Dirichlet

Na condição de contorno de *Neumann* nós fixamos a primeira derivada da variável a ser resolvida, no entanto outra condição de contorno, denominada de condição de contorno de *Dirichlet*, é possível ao fixarmos especificamente a variável a ser encontrada, nesse caso a temperatura T nos limites do domínio (retratados pelo lado direito da Eq. (3.8)).

Nós observamos no exemplo acima, que a *weak formulation* nos provê uma maneira direta de definir o fluxo nos contornos do domínio. Dessa forma, utilizamos essa facilidade, e novamente o artifício das funções de teste, para fixarmos a temperatura nestes contornos. O que de certa forma é intuitivo, pois podemos fixar uma temperatura ao compensar o fluxo de calor interno com um fluxo externo, para tal atribuímos uma função teste associada, para alocar este efeito.

Na prática, para deixar o exemplo mais claro fixemos um dos contornos, por exemplo o limite 1 ($x = 1$), com um fluxo qualquer, digamos $\Lambda_1 = 3$, e foquemos em expressar a temperatura a ser fixada no limite 2 ($x = 5$). Assim sendo, se desejarmos fixar a temperatura em $T = 7$ no limite 2, nós inserimos uma nova variável de fluxo de saída (desconhecida) λ_2 , e uma função de teste correspondente $\tilde{\lambda}_2$, logo a partir da Eq. (3.8) temos

$$\int_1^5 \partial_x T(x) \partial_x \tilde{T}(x) dx = -3\tilde{T}_1 - \lambda_2 \tilde{T}_2 - (T_2 - 7)\tilde{\lambda}_2, \quad (3.10)$$

onde o primeiro termo (como vimos no exemplo anterior) determina o fluxo de saída como sendo 3 no limite $x = 1$, o segundo especifica o fluxo de saída desconhecido, λ_2 , no limite $x = 5$, e finalmente o terceiro termo obriga a solução a ser $T = 7$ no limite $x = 5$, através da função de teste $\tilde{\lambda}_2$, ao seguir o mesmo princípio que foi explicado para a função de teste $\tilde{T}(x)$.

Comentários sobre o *weak formulation* em dimensões superiores

Com mencionado no início do capítulo, vamos nos restringir a explicações utilizando exemplos simples e em 1D, para que o entendimento do conceito não seja ofuscado por uma matemática mais elaborada. No entanto, em 2D e 3D o conceito permanece o mesmo.

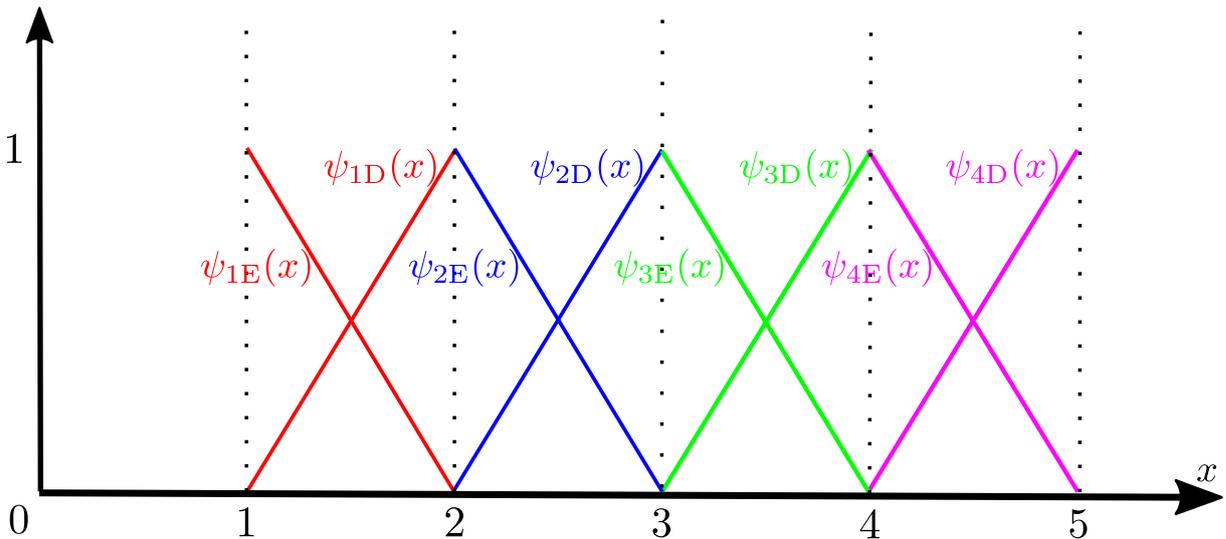
Basicamente, a *weak formulation* converte uma equação puramente diferencial em uma equação integral. Por meio da integração por partes, a ordem da diferenciação é reduzida, proporcionando benefícios numéricos e viabilizando as condições de contorno de fluxo através dos limites. No caso 1D, esses limites são pontos, já nos casos de dimensões mais altas, o procedimento de integração por partes ao utilizar o teorema da divergência, Eq. (2.7), fornece como limite uma linha fechada (no caso 2D) e uma superfície fechada (no caso 3D) que envolvem seus respectivos domínios. Em consequência, o lado direito da Eq. (3.8) é convertido em uma integral de linha ou de superfície da densidade de fluxo de

saída.

3.1.2 Discretizando equações no *weak formulation*

Continuando com nosso exemplo de calor em 1D, agora vamos nos concentrar em exemplificar uma forma de resolver numericamente a Eq. (3.10) [COMSOL 2015]. Com esse intuito, primeiramente vamos subdividir o domínio $1 \leq x \leq 5$ em quatro subintervalos (ou elementos da discretização), de modo que estes se encontram ligados por cinco nós (os pontos 1, 2, 3, 4 e 5). Com isso, podemos estipular um conjunto de funções de base (ψ_{1E} , ψ_{1D} , ψ_{2E} , ψ_{2D} , ψ_{3E} , ψ_{3D} , ψ_{4E} , ψ_{4D}), neste caso funções lineares meramente por simplicidade (mas também podem ser utilizados polinômios de ordem superiores), de forma a termos duas funções por cada elemento, como ilustrado na Fig. 3.4.

Figura 3.4: Exemplo de funções de base lineares (ψ_{1E} , ψ_{1D} , ψ_{2E} , ...), definidas nos subintervalos (ou elementos) do domínio, os quais são delimitados por nós (1, 2, ...).



Fonte: autor, 2019.

Note que, por exemplo, para o primeiro elemento ($1 \leq x \leq 2$), temos as seguintes funções de base:

$$\psi_{1E}(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{para } 1 \leq x \leq 2; \\ 0, & \text{para outros valores de } x \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\psi_{1D}(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{para } 1 \leq x \leq 2; \\ 0, & \text{para outros valores de } x. \end{cases} \quad (3.12)$$

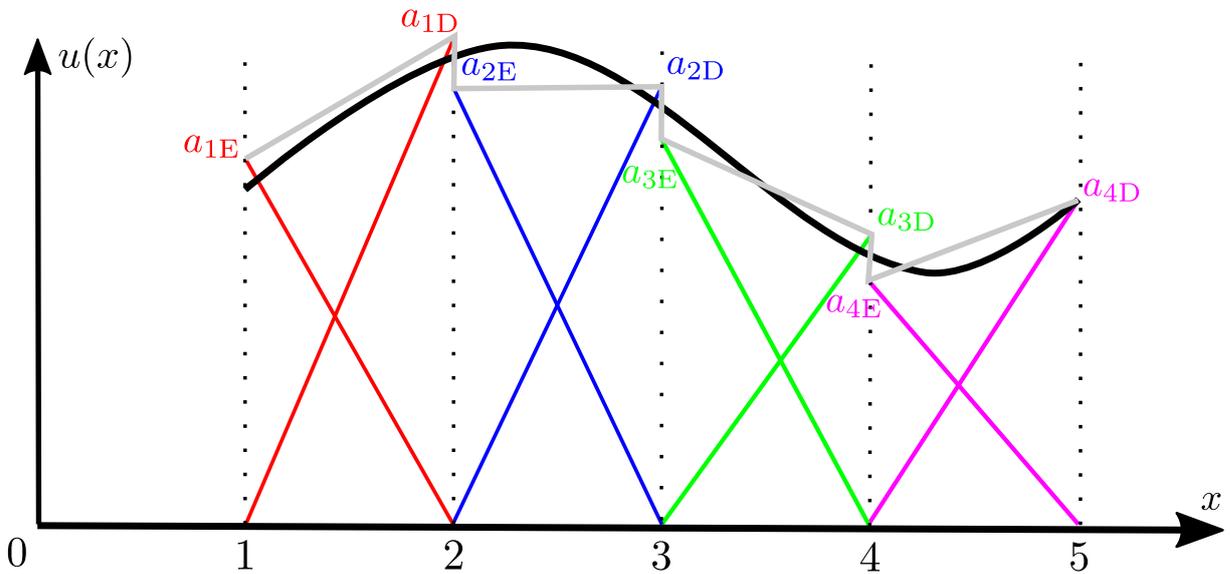
Ou seja, cada função de base varia de 0 a 1 no intervalo do seu respectivo elemento e é nula no restante do domínio. Dessa forma, podemos estimar qualquer função arbitrária ($u(x)$) definida no domínio, $1 \leq x \leq 5$, através de uma combinação linear dessas funções

de base:

$$u(x) \approx a_{1E}\psi_{1E}(x) + a_{1D}\psi_{1D}(x) + a_{2E}\psi_{2E}(x) + a_{2D}\psi_{2D}(x) + \dots, \quad (3.13)$$

onde a_{1E} , a_{1D} , a_{2E} , a_{2D} , ... são os coeficientes (constantes) para cada função de base. No gráfico da Fig. 3.5, temos a representação da curva arbitrária $u(x)$ por uma curva de cor preta, enquanto a curva de cor cinza ilustra um exemplo de aproximação descrita pela superposição das funções de base da Eq. (3.13).

Figura 3.5: Exemplo de aproximação a partir das funções de base lineares, observe que obtemos a aproximação ao determinarmos os coeficientes (a_{1E} , a_{1D} , a_{2E} , ...).



Fonte: autor, 2019.

Observe que, aproximações descritas de acordo com a Eq. (3.13) permitem descontinuidades abruptas em elementos vizinhos (ver Fig. 3.5), para contornar esse problema, as funções de base padrão para a maioria das interfaces físicas geralmente são *Lagrange elements*, o que restringe os coeficientes das funções de base, de modo a atenuar as descontinuidades das funções nas intersecções dos elementos vizinhos. Como ilustrado na Fig. 3.6. Na qual, elementos adjacentes possuem coeficientes compartilhados, logo

$$a_{1D} = a_{2E}, \quad a_{2D} = a_{3E}, \quad a_{3D} = a_{4E}, \quad (3.14)$$

o que nos permite renomear tais coeficientes, como a seguir:

$$a_1 \equiv a_{1E}, \quad (3.15a)$$

$$a_2 \equiv a_{1D} = a_{2E}, \quad (3.15b)$$

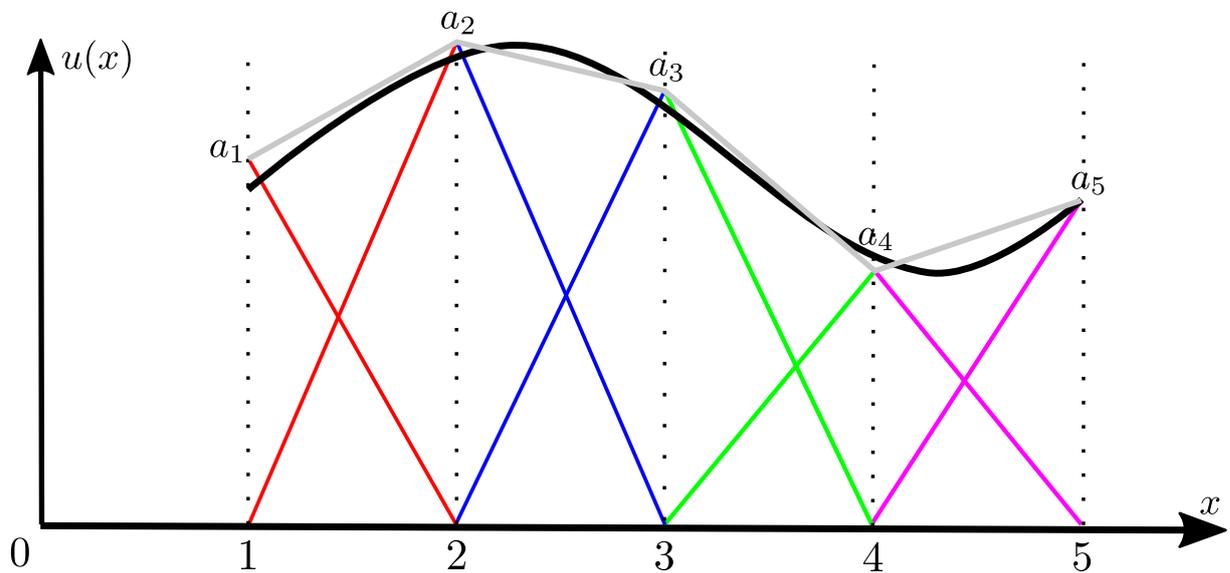
$$a_3 \equiv a_{2D} = a_{3E}, \quad (3.15c)$$

$$a_4 \equiv a_{3D} = a_{4E}, \quad (3.15d)$$

$$a_5 \equiv a_{4D}. \quad (3.15e)$$

Com isso, podemos reorganizar a Eq. (3.13) a partir das Eqs. (3.15a)-(3.15e):

Figura 3.6: Exemplo de aproximação a partir das funções de base, tomando a condição de *Lagrange elements*.



Fonte: autor, 2019.

$$u(x) \approx a_1[\psi_{1E}(x)] + a_2[\psi_{1D}(x) + \psi_{2E}(x)] + a_3[\psi_{2D}(x) + \psi_{3E}(x)] + \dots \quad (3.16)$$

Além disso, podemos simplificar a Eq. (3.16) combinando os pares de funções entre colchetes, o que nos fornece um novo conjunto de funções de base $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, $\phi_3(x)$, $\phi_4(x)$, $\phi_5(x)$, sendo que cada uma das novas funções é centrada em um ponto nodal, como ilustrado na Fig. 3.7 e descritas a seguir:

$$\phi_1(x) \equiv \psi_{1E}(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{para } 1 \leq x \leq 2; \\ 0, & \text{para outros valores de } x. \end{cases} \quad (3.17)$$

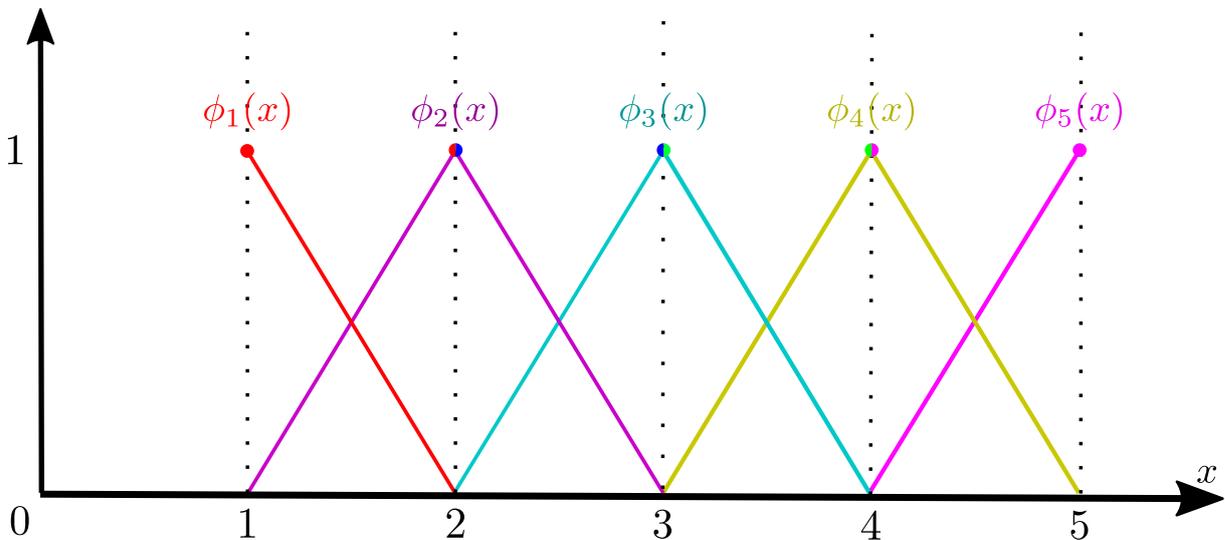
$$\phi_2(x) \equiv \psi_{1D}(x) + \psi_{2E}(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{para } 1 \leq x \leq 2; \\ 3 - x, & \text{para } 2 \leq x \leq 3; \\ 0, & \text{para outros valores de } x. \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\phi_3(x) \equiv \psi_{2D}(x) + \psi_{3E}(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{para } 2 \leq x \leq 3; \\ 4 - x, & \text{para } 3 \leq x \leq 4; \\ 0, & \text{para outros valores de } x. \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\phi_4(x) \equiv \psi_{3D}(x) + \psi_{4E}(x) = \begin{cases} x - 3, & \text{para } 3 \leq x \leq 4; \\ 5 - x, & \text{para } 4 \leq x \leq 5; \\ 0, & \text{para outros valores de } x. \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\phi_5(x) \equiv \psi_{4D}(x) = \begin{cases} x - 4, & \text{para } 4 \leq x \leq 5; \\ 0, & \text{para outros valores de } x. \end{cases} \quad (3.21)$$

Figura 3.7: Ilustração da combinação das funções de base adjacentes, a partir dos pontos nodais em comum.



Fonte: autor, 2019.

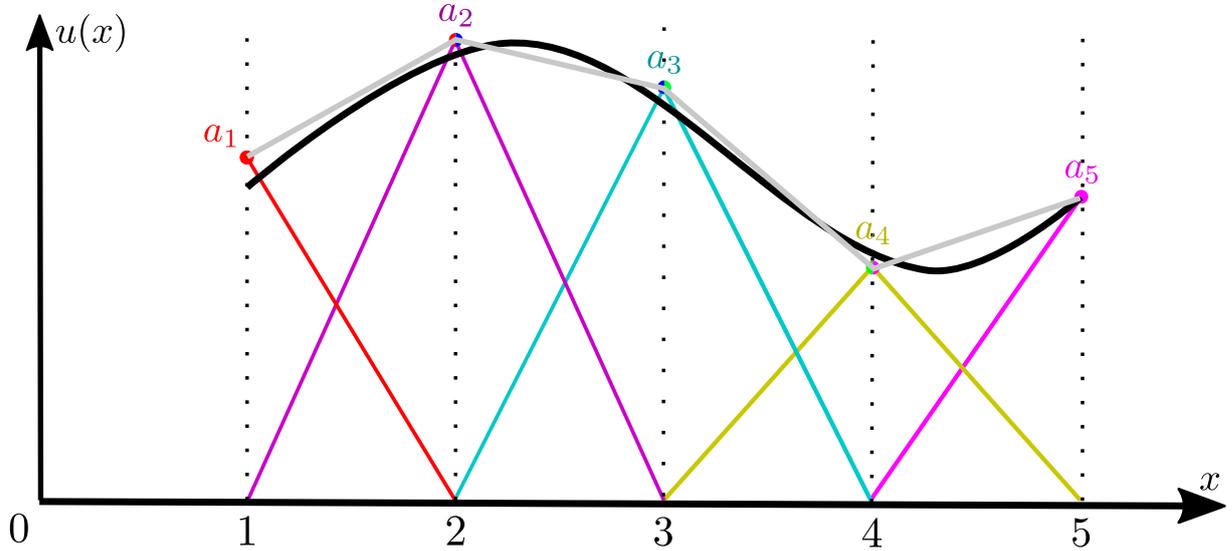
Perceba, que as funções nodais neste caso simplificado formam basicamente triângulos, mas continuam variando de zero a um, e desaparecendo fora dos intervalos de seus respectivos elementos (ver Fig. 3.7). Dessa forma, a partir das novas funções nodais, a aproximação da Eq. (3.16) é simplificada em

$$u(x) \approx a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + a_3\phi_3(x) + a_4\phi_4(x) + a_5\phi_5(x). \quad (3.22)$$

Na Fig. 3.8, podemos ver a representação gráfica da aproximação da curva arbitrária $u(x)$ (em preto), e sua aproximação (em cinza), agora a partir das funções de base nodais

(no mesmo padrão de cores da Fig. 3.7). Apesar de se tratar apenas de um exemplo com

Figura 3.8: Exemplo de aproximação com funções de base nodais.



Fonte: autor, 2019.

finalidades didáticas, podemos notar que com a discretização (ou malha) que estipulamos, a aproximação feita até o momento não é tão boa. Além da malha, outro fator que prejudica a aproximação é fato de os coeficientes nodais (a_1, a_2, \dots) não serem forçados a seguir especificamente os valores exatos da solução, a não ser que estejam sujeitos a uma condição de contorno (como no caso do a_5 , que foi fixado nas figuras que ilustram a aproximação para exemplificar um caso onde temos uma condição de contorno aplicada). Dessa forma, um estudo de refinamento de malha é indispensável para garantir uma precisão dos resultados nas simulações [COMSOL 2016].

Solução de equações discretizadas através do *weak formulation*

Agora que simplificamos a representação de funções através de funções de base, podemos aplicar esse conceito na Eq. (3.10). Dessa forma, a função de temperatura $T(x)$ pode ser aproximada por meio de um conjunto de funções de base de forma análoga a Eq. (3.22):

$$T(x) \approx a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + a_3\phi_3(x) + a_4\phi_4(x) + a_5\phi_5(x), \quad (3.23)$$

onde os coeficientes a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 são os termos desconhecidos a serem determinados.

Ao substituirmos a Eq. (3.23) na Eq. (3.10), obtemos

$$\begin{aligned} & a_1 \int_1^5 \partial_x \phi_1(x) \partial_x \tilde{T}(x) \, dx + a_2 \int_1^5 \partial_x \phi_2(x) \partial_x \tilde{T}(x) \, dx + \dots + \\ & + a_5 \int_1^5 \partial_x \phi_5(x) \partial_x \tilde{T}(x) \, dx = -3\tilde{T}_1 - \lambda_2 \tilde{T}_2 - (a_5 - 7)\tilde{\lambda}_2, \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde, visto que T_2 representa a temperatura no limite direito do domínio e as funções de base são funções localizadas, a partir da Eq. (3.23) deduzimos que $T_2 = T(x = 5) = a_5\phi_5(x = 5) = a_5$ (ver Fig. 3.8).

Note que, nos restam seis graus de liberdade, os cinco coeficientes, a_1 , a_2 , a_3 , a_4 e a_5 , e o fluxo λ_2 no limite direito do domínio. Portanto precisamos de seis equações para solucionar essas seis incógnitas. Para tal, usaremos as funções de base, por meio da função de teste. Como vimos anteriormente, a função de teste tem como objetivo restringir a solução em um determinado intervalo, de modo a anular a solução para o restante do domínio, fazendo isso de intervalo a intervalo até percorrer todo o domínio. Dessa forma, para esse objetivo podemos utilizar o nosso conjunto de funções de base, $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, \dots , $\phi_5(x)$, simplesmente ao substituí-las na função de teste \tilde{T} da Eq. (3.24), e assim conseguir as equações que precisamos.

Tabela 3.1: Substituições empregadas nas funções de teste.

\tilde{T}	$\tilde{\lambda}_2$
ϕ_1	0
ϕ_2	0
ϕ_3	0
ϕ_4	0
ϕ_5	0
0	1

Na Tab. 3.1, temos as substituições que serão feitas nas funções de teste que darão origem as seis equações que precisamos. Neste ponto, veremos a praticidade de utilizarmos funções localizadas, pois, como exemplificado a seguir, cada substituição irá gerar uma equação com um número limitado de termos. Assim, para a primeira substituição temos

$$\begin{aligned}
 & a_1 \int_1^5 \partial_x \phi_1(x) \partial_x \phi_1(x) \, dx + a_2 \int_1^5 \partial_x \phi_2(x) \partial_x \phi_1(x) \, dx + \dots + \\
 & + a_5 \int_1^5 \partial_x \phi_5(x) \partial_x \phi_1(x) \, dx = -3\phi_1(x = 1) - \lambda_2 \phi_1(x = 5) - (a_5 - 7)0.
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Perceba que ϕ_1 é diferente de zero apenas no intervalo em comum com ϕ_2 e obviamente consigo mesmo. Logo, apenas os dois primeiros termos do lado esquerdo da equação acima são diferentes de zero. Quanto ao lado direito, como ϕ_1 está localizado apenas a esquerda do domínio, o segundo termo do lado direito também é nulo, $\phi_1(x = 5) = 0$. Então nos

resta

$$a_1 - a_2 = -3, \quad (3.26)$$

onde, calculamos a partir das Eqs. (3.17) e (3.18) as integrais que restaram, de modo que

$$\int_1^5 \partial_x \phi_1(x) \partial_x \phi_1(x) dx = 1, \quad (3.27a)$$

$$\int_1^5 \partial_x \phi_2(x) \partial_x \phi_1(x) dx = -1, \quad (3.27b)$$

além de aplicarmos a definição da função ϕ_1 no limite esquerdo: $\phi_1 = 1$. De forma análoga, as outras cinco substituições da Tab. 3.1 resultam nas seguintes equações:

$$-a_1 + 2a_2 - a_3 = 0, \quad (3.28)$$

$$-a_2 + 2a_3 - a_4 = 0, \quad (3.29)$$

$$-a_3 + 2a_4 - a_5 = 0, \quad (3.30)$$

$$-a_4 + a_5 = -\lambda_2, \quad (3.31)$$

$$0 = -(a_5 - 7). \quad (3.32)$$

Assim, com as Eqs. (3.26), (3.28)-(3.32), temos seis incógnitas e seis equações, o que configura um sistema perfeitamente solúvel, logo obtemos:

$$a_1 = -5, \quad (3.33a)$$

$$a_2 = -2, \quad (3.33b)$$

$$a_3 = 1, \quad (3.33c)$$

$$a_4 = 4, \quad (3.33d)$$

$$a_5 = 7, \quad (3.33e)$$

$$\lambda_2 = -3. \quad (3.33f)$$

Dessa forma, substituindo as Eqs. (3.33a)-(3.33e), na Eq. (3.23), obtemos a solução da EDP (mediante aproximações de efeito puramente didático):

$$T(x) \approx -5\phi_1(x) + -2\phi_2(x) + 1\phi_3(x) + 4\phi_4(x) + 7\phi_5(x). \quad (3.34)$$

Note que, o termo λ_2 não faz parte da solução diretamente, pois se trata apenas de um artifício para fixarmos a temperatura estipulada como condição de contorno. Uma verificação rápida da nossa solução pode ser feita verificando a temperatura no limite

direito do nosso domínio:

$$\begin{aligned}
 T(x = 5) &\approx -5\phi_1(x = 5) + -2\phi_2(x = 5) + 1\phi_3(x = 5) + 4\phi_4(x = 5) + 7\phi_5(x = 5) \\
 &= -5 \cdot 0 + -2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 7 \cdot 1 \\
 &= 7.
 \end{aligned}
 \tag{3.35}$$

O que concorda perfeitamente com a condição de contorno de *Dirichlet* que estabelecemos na Sec. 3.1.1, onde foi determinado que a temperatura deveria ser 7 no limite direito.

Representação matricial

Para termos uma visão mais ampla do sistema de equações, Eq. (3.26), (3.28)-(3.32), podemos usufruir da representação matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}
 \tag{3.36}$$

Dessa forma, é mais perceptível a quantidade de zeros que obtemos ao utilizar funções localizadas, um benefício que se destaca efetivamente na prática, pois em geral trabalhamos com malhas que possuem um número expressivamente maior de elementos do que o nosso simples exemplo, que foi subdividido em apenas quatro segmentos.

3.2 Descrição do modelo numérico

Até este momento, argumentamos de forma abrangente os métodos que utilizamos em nossa pesquisa, expondo os conceitos utilizados como fundamento, além de utilizarmos exemplos simplificados para facilitar à assimilação do que foi exposto. A partir deste ponto, iremos ser mais diretos e descreveremos especificamente o modelo numérico que utilizamos em nosso trabalho.

Isto posto, as simulações deste trabalho são voltadas para o cálculo da força de radiação acústica em partículas posicionadas em feixes superfocalizados, onde esses feixes são obtidos ao simularmos uma onda plana, que ao se propagar em água é superfocalizada na região de sombra de uma bola de rexolite [Lopes et al. 2017].

Como já mencionado, utilizamos o software computacional COMSOL Multiphysics[®], versão 5.0, mais especificamente:

- Dimensão

- 2D *Axisymmetric*
- Módulo:
 - *Acoustics Module*
- Interface Física:
 - *Acoustic-Piezoelectric Interaction*
- “*Physics*” envolvidas:
 - *Eletrostatics*
 - *Solids Mechanics*
 - *Pressure Acoustics*
- Tipo de *Study*:
 - *Frequency Domain*

Além do sub-módulo de Acústica, utilizamos os submódulos de eletrostática e mecânica dos sólidos, pois utilizamos uma cerâmica piezoelétrica para representar o transdutor que geraria a onda acústica plana, isto é, escolhemos utilizar a cerâmica nas simulações, com o intuito de obter resultados mais próximos dos obtidos em um possível experimento do que se apenas assumíssemos uma onda plana ideal (ver Fig. 3.9).

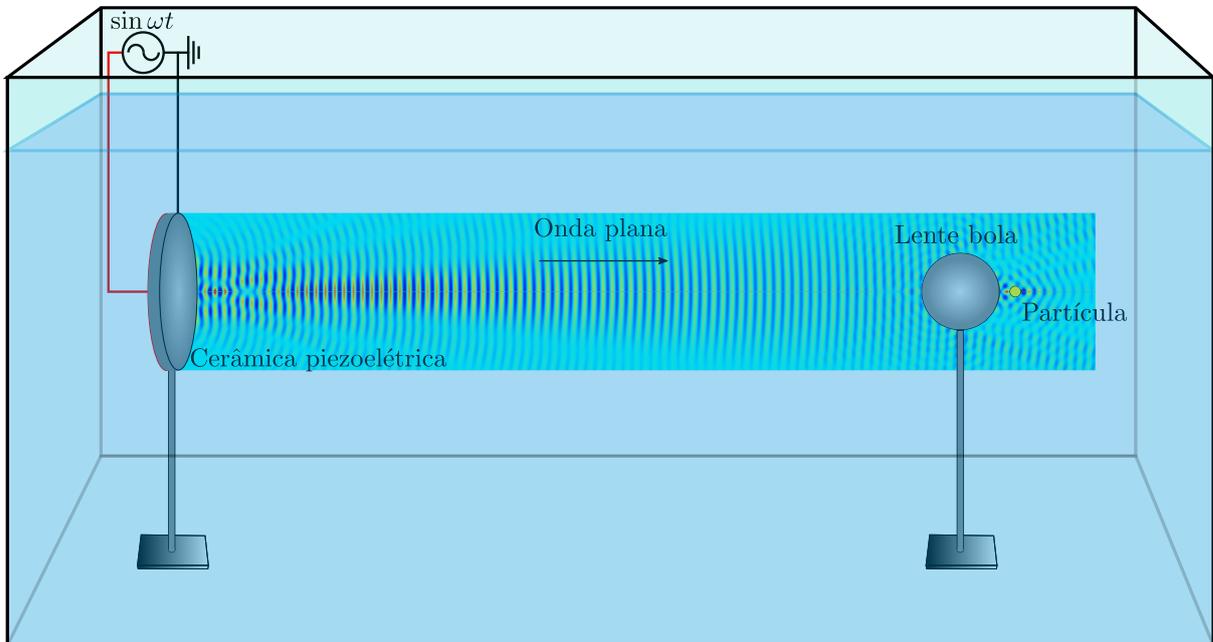
3.2.1 Geometria e parâmetros

Na Fig. 3.10, temos uma ilustração da geometria da nossa simulação, onde a PML é um artifício utilizado no COMSOL para acentuar a atenuação das ondas incidentes no domínio selecionado [COMSOL 2015], usamos deste recurso para evitar que as ondas espalhadas sejam refletidas de volta distorcendo os resultados. Como estamos utilizando o COMSOL no modo 2D-axissimétrico, na prática implementamos somente a metade do que está sendo mostrado na Fig. 3.10, ou seja, a ilustração está espelhada com relação ao eixo de simetria apenas para uma melhor visualização do problema. Na realidade a lente em formato de bola e a partícula são representadas por domínios semicirculares com base no eixo de simetria. Alguns parâmetros das simulações estão expostos na Tab. 3.2, com exceção dos parâmetros das partículas que serão apresentados nas discussões do Cap. 4.

3.2.2 Malha e carga computacional

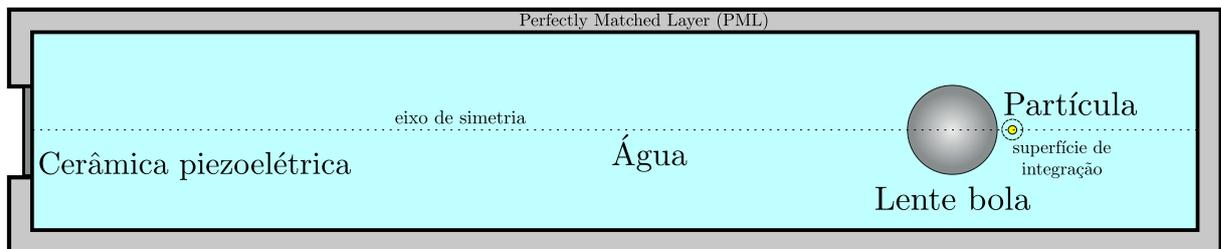
Na Fig. 3.11, temos uma demonstração de como a malha foi definida nas proximidades da partícula. Observe que demarcamos uma região de transição de malha, a qual possui

Figura 3.9: Ilustração de uma onda plana gerada por uma cerâmica piezoelétrica, que posteriormente é superfocalizada na região de sombra de uma lente bola, onde calculamos a força de radiação acústica em partículas.



Fonte: autor, 2019.

Figura 3.10: Ilustração da geometria da simulação.



Fonte: autor, 2019.

uma densidade de malha intermediária entre a malha da superfície de integração e a do meio circundante. Os parâmetros, principalmente quanto ao tamanho dos elementos da malha, estão expostos no Tab. 3.3, onde n e n_2 são parâmetros adimensionais que estabelecemos para nos auxiliar a determinar a densidade de malha necessária para uma convergência dos resultados. Definimos n_2 como o número mínimo de elementos por comprimento de onda para domínios externos à região de transição de malha, e n como o número de elementos por comprimento do raio da partícula na superfície de integração e na superfície da partícula.

Tabela 3.2: Parâmetros fixos nas simulações.

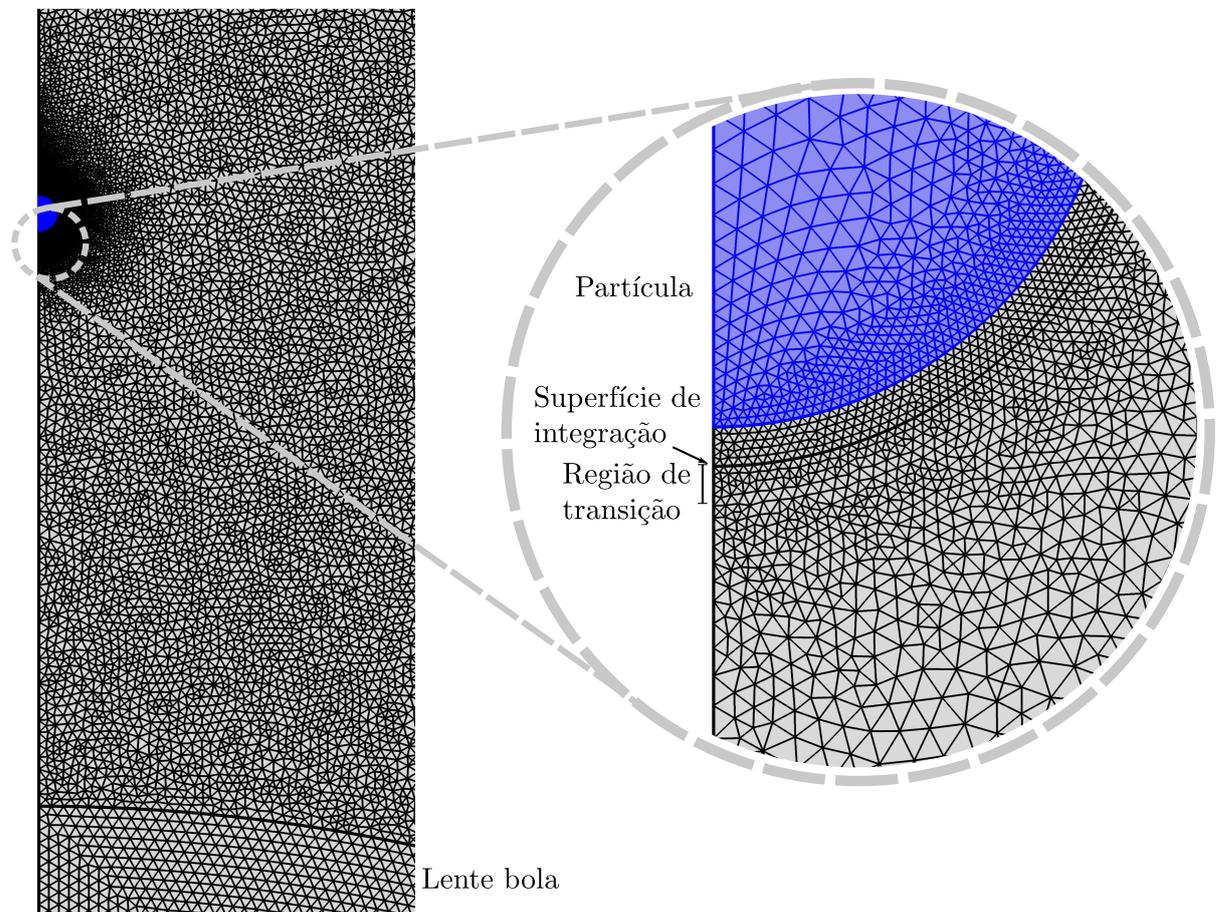
Parâmetro	Valor/especificação
Água:	
Densidade	998 kg/m ³
Velocidade do som	1493 m/s
Comprimento de onda (1.01 MHz) - λ	1.4782 mm
Cerâmica:	
Tipo	PZT-4
DDP aplicada	40 V
Frequência utilizada - f	1.01 MHz
Raio	6 mm
Espessura	1 mm
Distância da superfície da lente	120 mm
Lente bola:	
Material	Rexolite
Densidade	1049 kg/m ³
Raio	6.1 mm
Módulo de <i>Young</i>	$(3.75 \cdot 10^9 + 2.67 \cdot 10^7 i)$ Pa
Módulo de <i>Poisson</i>	$0.34 - 3.87 \cdot 10^{-4} i$

Convergência de malha

Na Fig. 3.12, temos o gráfico de convergência de malha, onde fixamos $n = 150$ e variamos n_2 . O eixo vertical representa o erro percentual em relação ao valor da força de radiação a partir de um ponto em que o resultado já convergiu ($n_2 = 100$). Note que a partir de $n_2 = 35$ temos uma variação abaixo de 0.5%. Como o valor n_2 estabelece a densidade de malha de vários domínios, o tempo de cada simulação depende diretamente deste valor, por exemplo, simulações com $n_2 = 60$ demoram o dobro do tempo de simulação com $n_2 = 35$, sendo que o erro no cálculo da força é inferior a 0.5 % de uma densidade para a outra, assim, assumimos que $n_2 = 35$ seria uma escolha mais eficiente.

Na Fig. 3.13, temos outro gráfico de convergência de malha, onde dessa vez fixamos $n_2 = 35$ e variamos n para os dois tamanhos diferentes de partícula, $a = 0.04\lambda$ e $a = 0.1\lambda$. De forma análoga, o eixo vertical denota o erro percentual em relação ao valor da força de radiação para $n = 100$. Observe que, a partir de $n = 40$ não ocorrem variações relevantes, independente do raio da partícula, ademais, quanto maior o tamanho da partícula, mais rapidamente a malha converge. Logo, seria um desperdício computacional e de tempo, colocar a mesma densidade de malha para partículas distintas, além disso evitamos a

Figura 3.11: Malha obtida a partir dos parâmetros da Tab. 3.3 ($n = 40$, $n_2 = 35$), para uma partícula de raio $a = 0.1 \lambda$.



Fonte: autor, 2019.

necessidade de fazer diversas análises de convergência de malha ao estabelecermos n proporcional ao raio da partícula, como fizemos.

Carga computacional

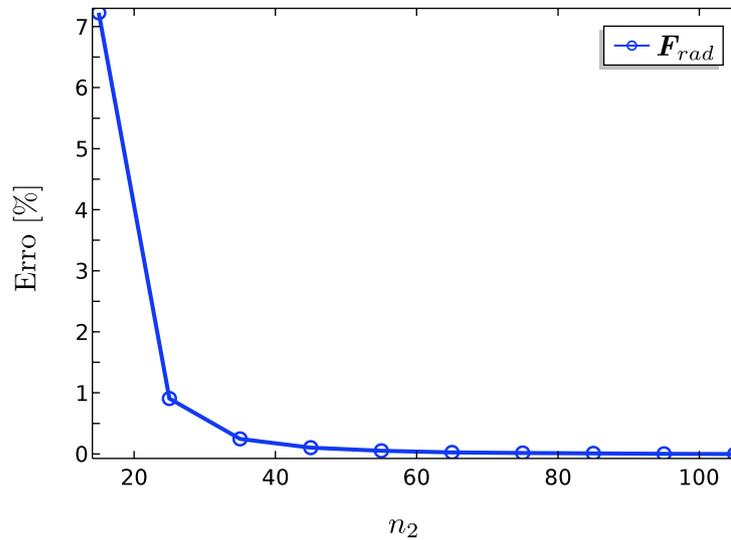
Utilizamos em todas as simulações um *desktop* com *CPU Intel® Xeon® E5-2690 v2*, com 256 GB de memória *RAM* disponível. As simulações duraram cerca de 10 minutos para calcular a força de radiação em cada ponto desejado, incluindo todo o processo de gerar a malha, calcular o espalhamento e retornar o valor da força de radiação.

Tabela 3.3: Parâmetros utilizados nas simulações de convergência de malha (além destes, os parâmetros da Tab. 3.2 foram mantidos).

Parâmetro	Valor/especificação
Partícula:	
Material	Benzeno
Raio - a	0.04λ , 0.1λ
Densidade ¹	870 kg/m^3
Velocidade do som ¹	1295 m/s
Coefficiente de absorção ¹ - $\alpha = \alpha_\nu / f^2$	$873 \times 10^{-15} \text{ Np s}^2/\text{m}$
Distância do centro da lente	5.5λ
Tipo de malha	Triangular livre
Tamanho máximo do elemento de malha	$a/10$
Tamanho máximo do elemento no contorno da partícula	a/n
Superfície de integração:	
Tamanho máximo do elemento	a/n
Região de transição da malha (partícula-meio):	
Tipo de malha	Triangular livre
Tamanho máximo do elemento de malha	$\lambda/100$
PML:	
Tipo de malha	<i>Mapped</i>
Tamanho máximo do elemento de malha	λ/n_2
Demais domínios:	
Tipo de malha	Triangular livre
Tamanho máximo do elemento de malha	λ/n_2

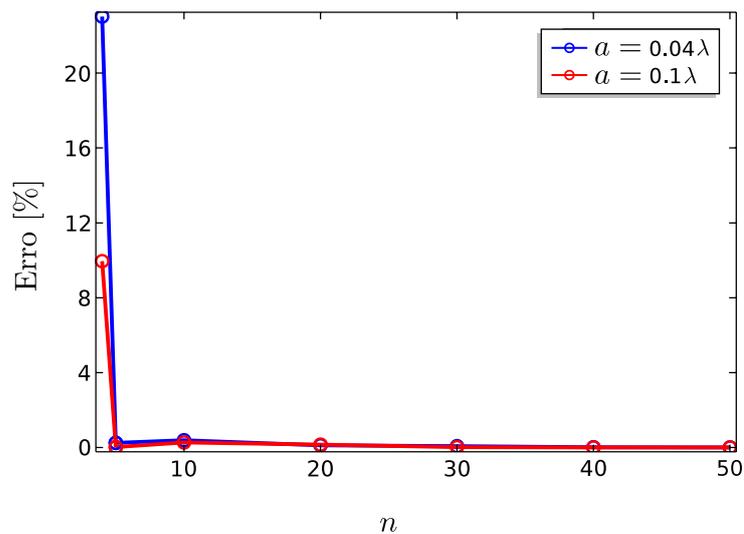
¹Fonte: [Kino 1987]

Figura 3.12: Gráfico da convergência de malha para a força em uma partícula de raio $a = 0.04\lambda$, com $n = 150$ (demais parâmetros estão apresentados na Tab. 3.3).



Fonte: autor, 2019.

Figura 3.13: Gráfico da convergência de malha para a força em uma partícula de raio $a = 0.04\lambda$ (em azul) e $a = 0.1\lambda$ (em vermelho), com $n_2 = 35$ (demais parâmetros estão apresentados na Tab. 3.3).



Fonte: autor, 2019.

4

Resultados e discussões

Quando partículas estão suspensas em um fluido, o qual é perturbado por um campo acústico, essas partículas podem ser afetadas pela força de radiação acústica. A utilização da força de radiação como método para aprisionar e manipular objetos sem contato, tem ganhado destaque em diversos ramos da biotecnologia [Shi et al. 2009], [Ding et al. 2012]. Assim o estudo de novas formas de aprisionar e manipular partículas é sempre bem vindo. Neste capítulo, iremos apresentar e discutir os resultados obtidos através da análise dos critérios de aprisionamento de uma partícula, em virtude da força de radiação acústica gerada pela imersão em um feixe acústico superfocalizado [Lopes et al. 2017].

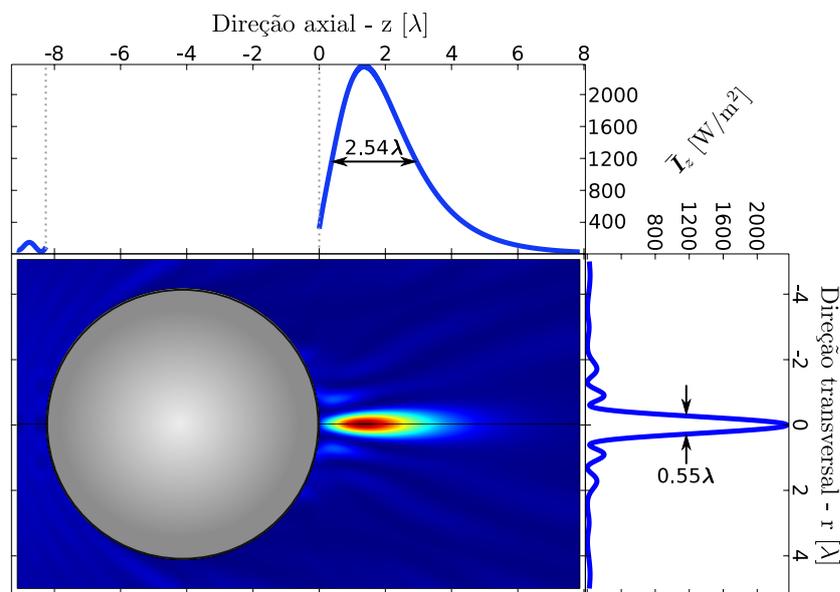
4.1 Caracterização do feixe

A possibilidade de geração de feixes focalizados na escala de comprimentos de onda utilizando objetos como lentes, têm aberto portas para diversas aplicações em imageamento médico por ultrassom e em manipulação e detecção de micropartículas, tanto em ótica quanto em acústica. Em ótica, a geração dos conhecidos jatos fotônicos têm despertado a atenção de muitos pesquisadores da área desde o trabalho seminal de *Zhi-gang Chen* [Chen, Taflove e Backman 2004]. A partir daí, diversos trabalhos estão sendo publicados em revistas conceituadas [Lecler, Takakura e Meyrueis 2005], [Li et al. 2005], [Ferrand et al. 2008]. Na acústica, um análogo aos jatos fotônicos foi primeiramente apresentado por Lopes e colaboradores [Lopes et al. 2016]. Em seguida, Mitri [Mitri 2016] apresentou um estudo teórico da formação de feixes focalizados em sub comprimentos de onda utilizando uma partícula cilíndrica fluida como lente acústica. *Minin e Minin* [Minin e Minin 2017] apresentaram um estudo numérico da formação de jatos acústicos utilizando um objeto esférico como lente acústica. Em 2017, Lopes e colaboradores [Lopes et al. 2017] apresentaram pela primeira vez uma comprovação experimental dos feixes super-focalizados abaixo do limite de difração, utilizando uma esfera de Rexolite como lente acústica e uma frente de onda plana como campo incidente.

A primeira parte do nosso trabalho foi desenvolver um estudo numérico para a geração

dos feixes superfocalizados substituindo a frente de onda plana ideal por uma excitação gerada por uma cerâmica piezoelétrica, simulando um transdutor de ultrassom com face plana. Realizamos um estudo paramétrico variando a distância entre a face do transdutor e a lente esférica, para encontrarmos a melhor configuração dos parâmetros que definem o feixe superfocalizado. A Figura 4.1 apresenta o perfil 2D do feixe gerado, bem como as componentes axial e transversal da intensidade (\bar{I}_z) do feixe o qual efetuamos os estudos quanto a força de radiação acústica. O perfil axial do feixe nos fornece a informação do seu comprimento na largura a meia altura da curva. Já o perfil transversal nos permite calcular a largura do feixe, a meia altura. Como podemos ver na Fig. 4.1, o valor encontrado para o comprimento do feixe foi 2.54λ , com ponto focal em $z = 1.37\lambda$, onde traçamos o perfil transversal que nos forneceu a largura de 0.55λ .

Figura 4.1: Caracterização do feixe, perfis axial e transversal da componente z da intensidade média, \bar{I}_z .



Fonte: autor, 2019.

4.2 Validação do modelo

É importante citar que a metodologia utilizada neste trabalho já foi devidamente aplicada no cálculo da força de radiação acústica [Glynne-Jones et al. 2013], onde foi comprovada a versatilidade do método com relação a geometria das ondas e dos objetos de estudo, como o exemplo apresentado na Fig. 4.2, onde temos a força de radiação acústica para diversos tamanhos de uma partícula compressível, devido a interação com uma onda plana estacionária. Note que independente do raio da partícula, a metodologia (nomeada de FEA pelo autor) concorda perfeitamente com os métodos analíticos correspondentes.

Isto posto, na Fig. 4.3 temos a nossa reprodução dos resultados de *Glynn-Jones* e colaboradores. Além disso, como o foco deste trabalho são feixes superfocalizados, nas Figs. 4.4.a e 4.5.a temos o cálculo da força de radiação acústica pelo método numérico (FEA) e pelo método analítico de expansão por ondas parciais [Silva 2014], apresentado a seguir:

$$\mathbf{F}^{grad} = -\pi a^3 \nabla \left(f_0 \frac{\bar{p}^2}{3\rho_0 c_0^2} - f_1 \frac{\rho_0 \bar{v}^2}{2} \right), \quad (4.1)$$

$$\mathbf{F}^{sca} = \pi a^2 (ka)^4 \left[\frac{4}{9} \left(f_0^2 + f_0 f_1 + \frac{3f_1^2}{4} \right) \frac{\bar{\mathbf{I}}}{c_0} - \frac{f_1^2}{6k} \text{Im}[\nabla \cdot \rho_0 \mathbf{v} \mathbf{v}^*] \right], \quad (4.2)$$

$$\mathbf{F}^{abs} = \pi a^2 \tilde{\alpha} ka \left[\frac{8(1-f_0)}{3} \frac{\bar{\mathbf{I}}}{c_0} - \frac{12a(1-f_0)}{5(\tilde{\rho}_p^{-1} + 2)^2} (ka) \times \text{Im}[\nabla \cdot \rho_0 \mathbf{v} \mathbf{v}^*] \right], \quad (4.3)$$

onde a é o raio da partícula, $\tilde{\rho}_p = \rho_p/\rho_0$ sendo ρ_p a densidade da partícula, $k = \omega/c_0$ é o número de onda do meio, $\bar{\mathbf{I}} = \text{Re}[p\mathbf{v}^*]/2$ é a média temporal da intensidade e $\tilde{\alpha} = \alpha_0/k_p$ é o coeficiente de absorção adimensional, sendo que o número de onda para uma partícula absorvedora é dada por

$$\kappa = k_p + i\alpha_0, \quad (4.4)$$

onde $k_p = \omega/c_p$, com c_p sendo a velocidade do som na partícula. Ademais, f_0 e f_1 são os fatores dos coeficientes de monopolo e dipolo da expansão, respectivamente, expressos por

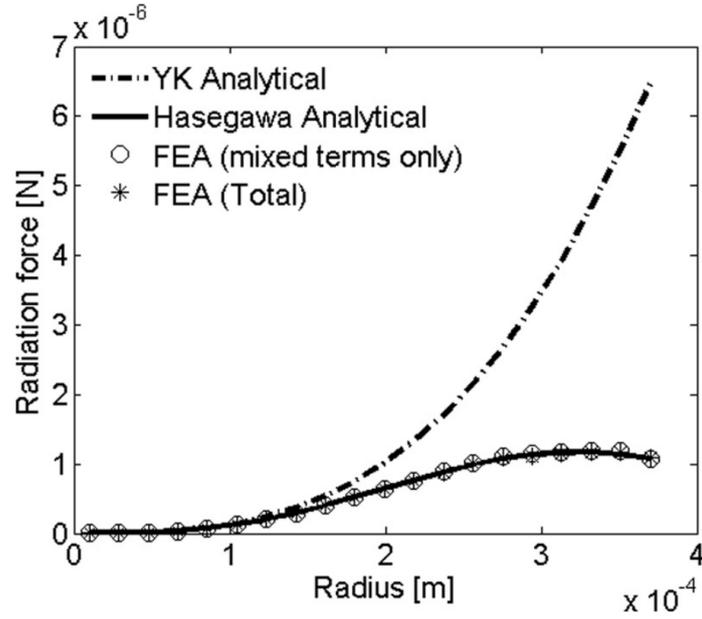
$$f_0 = 1 - \frac{\rho_0 c_0^2}{\rho_p c_p^2}, \quad (4.5)$$

$$f_1 = \frac{2(\rho_p - \rho_0)}{(2\rho_p + \rho_0)}, \quad (4.6)$$

A força de radiação acústica (\mathbf{F}^{rad}) descrita pela soma das Eq. (4.1)-(4.3) é válida para uma partícula esférica compressível absorvedora, contanto que os efeitos viscosos sejam desprezados e que a partícula seja muito menor que o comprimento de onda, ou seja, esteja dentro do limite de *Rayleigh* ($ka \ll 1$).

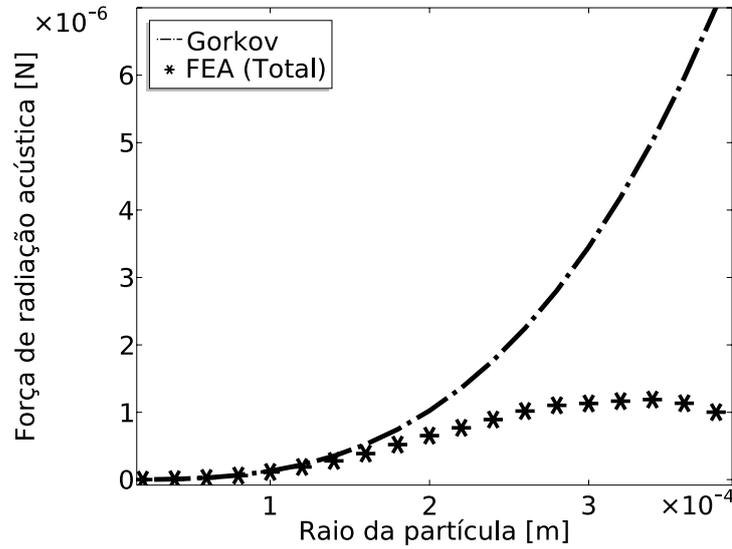
Apesar das limitações, esse modelo analítico é muito útil quando precisamos analisar as contribuições para força de radiação. A componente da força de radiação gradiente \mathbf{F}^{grad} , que foi derivada primeiramente por *Gor'kov* [Gor'Kov 1962], é responsável pela parcela conservadora da força, tendo uma forte contribuição quando a onda incidente tem uma densidade de energia com variação espacial. Já as componentes referentes ao espalhamento (\mathbf{F}^{sca}) e absorção (\mathbf{F}^{abs}) da partícula, foram derivadas para uma onda arbitrária por Silva [Silva 2014]. Posteriormente, Leão-Neto e Silva publicaram [Leão-Neto e Silva 2016] uma atualização do modelo considerando a absorção referente ao cisalhamento, o qual utilizamos ao calcular a força de radiação para a partícula de RTV-615, Fig. 4.6. Neste caso, a componente da força referente à absorção é atualizada para:

Figura 4.2: Força para uma partícula compressível devido uma onda plana estacionária, conforme o raio desta partícula é aumentado.



Fonte: [Glynne-Jones et al. 2013].

Figura 4.3: Reprodução dos resultado de *Glynne-Jones* e colaboradores, Fig. 4.2, onde temos a força de radiação acústica para uma partícula compressível devido uma onda plana estacionária, conforme o raio desta partícula é aumentado.



Fonte: autor, 2019.

$$\mathbf{F}^{abs} = -\pi a^2 (ka) \left[\frac{4f_0^{(Im)}}{3} \frac{\bar{\mathbf{I}}}{c_0} + \frac{6(ka)^2 g_1^{(Im)}}{5} \left(\frac{2\bar{\mathbf{I}}}{c_0} - \text{Im}[\tilde{\nabla} \cdot \rho_0 \mathbf{v} \mathbf{v}^*] \right) \right], \quad (4.7)$$

onde a é o raio da partícula, $\tilde{\nabla} = k^{-1}\nabla$ é o operador gradiente adimensional, e os índices

Re e Im representam, respectivamente, as partes real e imaginária dos seguintes coeficientes:

$$f_0 = 1 - \tilde{\beta}(\omega), \quad (4.8)$$

$$g_1 = \frac{\tilde{\rho}^{-2} - \tilde{\rho}^{-1} - 1 + \tilde{\beta}(\omega)}{(\tilde{\rho}^{-1} + 2)^2}, \quad (4.9)$$

onde $\tilde{\rho} = \rho_p/\rho_0$ é a densidade adimensional, $\tilde{\beta}(\omega) = \beta_p/\beta_0$ é a compressibilidade adimensional, $\beta_0 = 1/\rho_0 c_0^2$ é a compressibilidade do meio, $\beta_p = 1/K_p$ é a compressibilidade da partícula e K_p é o *bulk modulus* da partícula, o qual pode ser expresso através das expressões a seguir [Lopes, Leão-Neto e Silva 2017]:

$$K_p = -\frac{4}{3}\mu_p + \frac{\rho_p}{(k_L/\omega)^2}, \quad (4.10)$$

$$\mu_p = \frac{\rho_p}{(k_S/\omega)^2}, \quad (4.11)$$

onde μ_p é o *shear modulus* da partícula e as componentes imaginárias dos números de onda $k_L = (\omega/c_L) + i\alpha_L$ e $k_S = (\omega/c_S) + i\alpha_S$ representam, respectivamente, a absorção longitudinal e de cisalhamento, seguindo o mesmo padrão da Eq. 4.4.

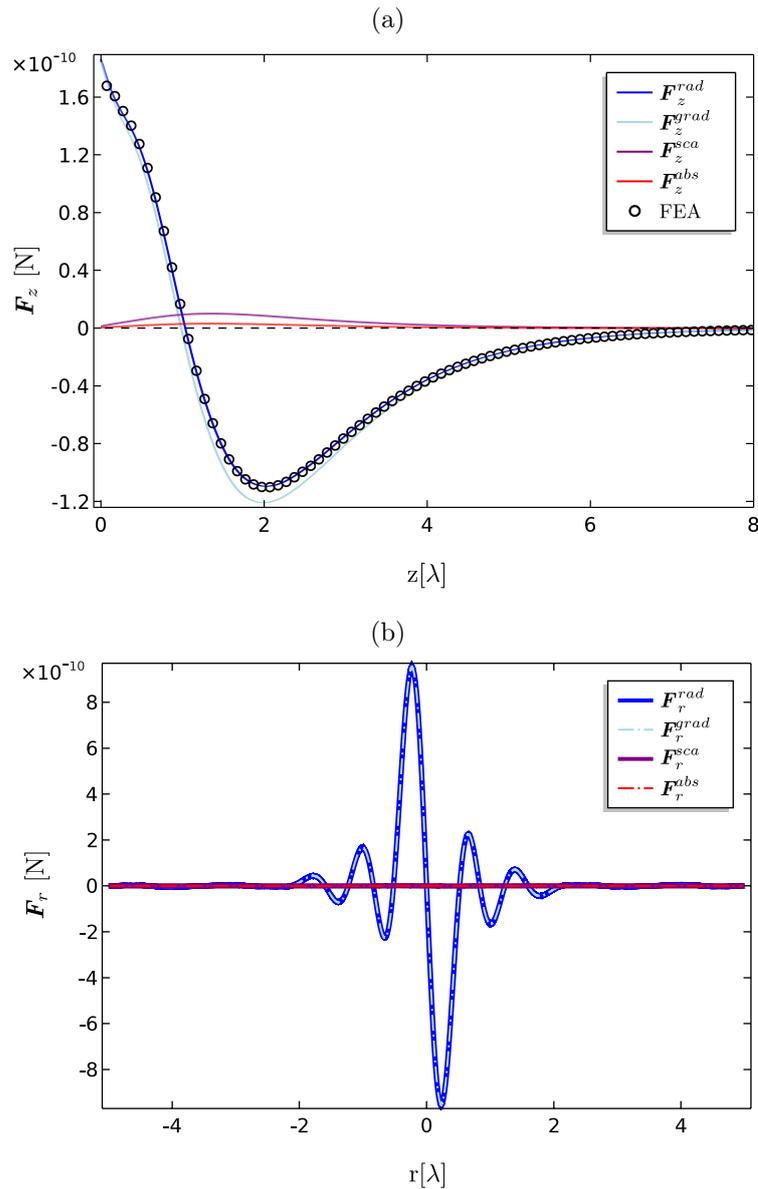
Teoricamente, pelo método numérico (FEA) nós poderíamos calcular a força de radiação para um objeto de geometria arbitrária, além de escolhermos uma posição qualquer no feixe. Contudo, esbarramos em uma limitação computacional, principalmente quanto ao consumo de memória RAM, onde fomos forçados a permanecer no modo 2D-axissimétrico do software, então só pudemos efetuar análises de objetos que tenham simetria axial e que estejam posicionados na direção axial do feixe. Todavia, ainda pudemos aumentar o tamanho de cada partícula além do limite de *Rayleigh*, de modo a deduzirmos o tamanho máximo de partícula que o feixe é capaz de aprisionar axialmente, como veremos na Sec. 4.3.1.

4.3 Aprisionamento de partículas no feixe superfocalizado

Nesta seção apresentaremos os resultados para o aprisionamento de micropartículas utilizando os feixes superfocalizados. As amostras utilizadas foram partículas líquidas (Benzeno e Silicone Dow) e uma partícula sólida (RTV - 615). Os parâmetros geométricos e acústicos das partículas estão listados na tabela 4.1.

Ao observar a Tab. 4.1, podemos notar que os materiais das partículas utilizadas tem algo em comum: suas compressibilidades são maiores que a do meio. A partir desse fato, pudemos perceber que todas as partículas testadas, que seguem esse mesmo padrão, são aprisionadas pela força de radiação acústica devido o feixe superfocalizado.

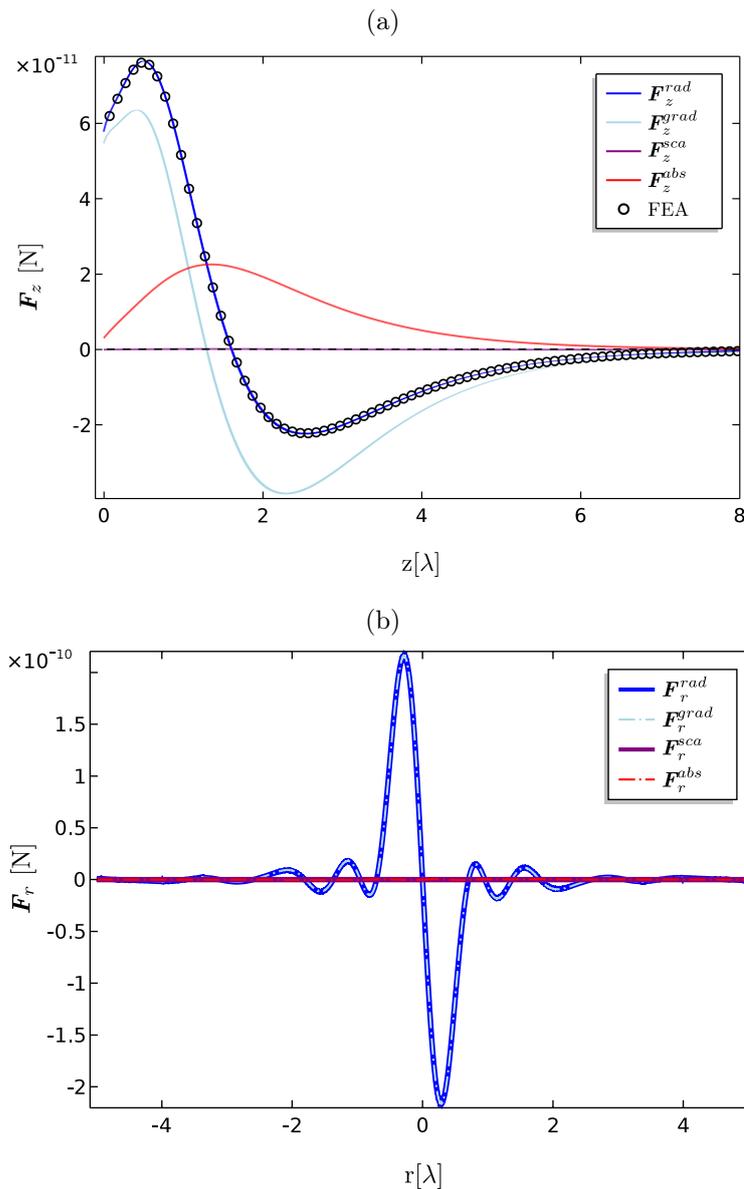
Figura 4.4: Força de radiação acústica devido o feixe superfocalizado, para uma partícula de Benzeno com raio $a = 0.04\lambda$. Temos a componente axial da força em (a), onde verificamos uma configuração de aprisionamento pela força de radiação via método numérico (FEA), e também pela soma das componentes do modelo analítico (\mathbf{F}_z^{rad}), de modo, que o ponto de aprisionamento neste caso é $z = 1.04\lambda$ e magnitude da força é da ordem de 10^{-10} N. Enquanto que em (b), temos as componentes transversais da força de radiação pelo modelo analítico, medidos no ponto de aprisionamento axial mencionado, note que também temos aprisionamento transversal (em $r = 0$) e que a magnitude da força transversal (\mathbf{F}_r^{rad}) é maior que a sua correspondente axial (\mathbf{F}_z^{rad}).



Fonte: Autor, 2019.

Isso condiz com a dificuldade que enfrentamos ao tentar encontrar partículas sólidas de materiais que fossem aprisionadas, pois além dos obstáculos naturais de escassez de materiais diversificados, que estejam caracterizados acusticamente, geralmente os sólidos tem

Figura 4.5: Força de radiação acústica devido o feixe superfocalizado, para uma partícula de Silicon Dow com raio $a = 0.04\lambda$. Temos a componente axial da força em (a), onde verificamos uma configuração de aprisionamento pela força de radiação via método numérico (FEA), e também pela soma das componentes do modelo analítico (\mathbf{F}_z^{rad}), de modo, que o ponto de aprisionamento neste caso é $z = 1.61\lambda$ e magnitude da força é da ordem de 10^{-11} N. Enquanto que em (b), temos as componentes transversais da força de radiação pelo modelo analítico, medidos no ponto de aprisionamento axial mencionado, note que também temos aprisionamento transversal (em $r = 0$) e que a magnitude da força transversal (\mathbf{F}_r^{rad}) é maior que a sua correspondente axial (\mathbf{F}_z^{rad}).

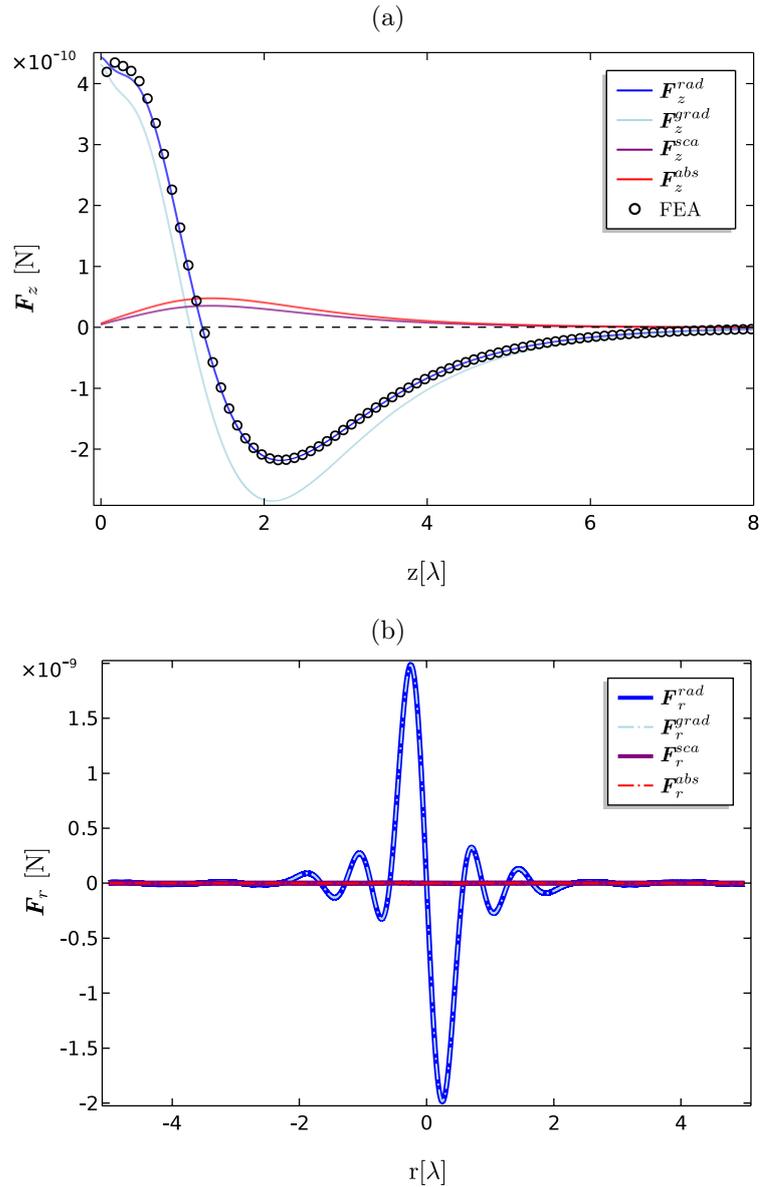


Fonte: Autor, 2019.

a compressibilidade menor que a da água.

A Fig. 4.4.a apresenta os resultados para as forças axiais de radiação gradiente, de espalhamento, de absorção e a força total exercida em uma partícula de Benzeno de raio

Figura 4.6: Força de radiação acústica devido o feixe superfocalizado, para uma partícula de RTV-615 com raio $a = 0.04\lambda$. Temos a componente axial da força em (a), onde verificamos uma configuração de aprisionamento pela força de radiação via método numérico (FEA), e também pela soma das componentes do modelo analítico (\mathbf{F}_z^{rad}), de modo, que o ponto de aprisionamento neste caso é $z = 1.24\lambda$ e magnitude da força é da ordem de 10^{-10} N. Enquanto que em (b), temos as componentes transversais da força de radiação pelo modelo analítico, medidos no ponto de aprisionamento axial mencionado, note que também temos aprisionamento transversal (em $r = 0$) e que a magnitude da força transversal (\mathbf{F}_r^{rad}) é maior que a sua correspondente axial (\mathbf{F}_z^{rad}).



Fonte: Autor, 2019.

$a = 0.04\lambda$. Podemos notar que há uma grande concordância entre o modelo numérico (FEA) e o modelo analítico apresentado na Sec. 4.2. Para esse tamanho de partícula, temos a posição de aprisionamento axial em $z = 1.04\lambda$, ou seja, um pouco antes do ponto

focal ($z=1.37\lambda$), e a magnitude da força é da ordem de 10^{-10} N. Na Fig. 4.4.b, temos a componente transversal da força de radiação acústica, por meio do modelo analítico. Pois, como mencionado anteriormente, no modelo numérico estamos limitados computacionalmente a estudos com simetria axial. Os resultados são analisados em uma linha transversal que passa pelo ponto de aprisionamento axial do feixe, $z = 1.04\lambda$. Como temos um ponto de aprisionamento em $r = 0$, temos uma configuração de aprisionamento em 3D. A força transversal, nesse caso, tem magnitude superior a quatro vezes a sua correspondente axial, além de ter uma maior simetria com relação às componentes positiva e negativa, graças a simetria do próprio feixe.

Por outro lado, na Fig. 4.5.a podemos ver os resultados para a força de radiação gradiente, de espalhamento, absorção e total, em suas componentes axiais, para uma partícula de Silicone Dow de raio $a = 0.04\lambda$. A magnitude da força é da ordem de 10^{-11} N, sendo a de menor intensidade em comparação com os demais materiais analisados, e a posição de aprisionamento axial aproximadamente em $z = 1.61\lambda$, diferente das demais a posição de aprisionamento é após o ponto focal ($z=1.37\lambda$). A Fig. 4.5.b, expõe os resultados da componente transversal das forças referentes ao modelo analítico, novamente temos aprisionamento transversal em $r = 0$, caracterizando juntamente com o aprisionamento axial, um aprisionamento em 3D. Com relação a magnitude, a componente transversal da força é quase três vezes maior do que a sua correspondente axial positiva, e quando comparamos com a componente negativa da força axial a diferença aumenta, sendo a transversal cerca de dez vezes maior.

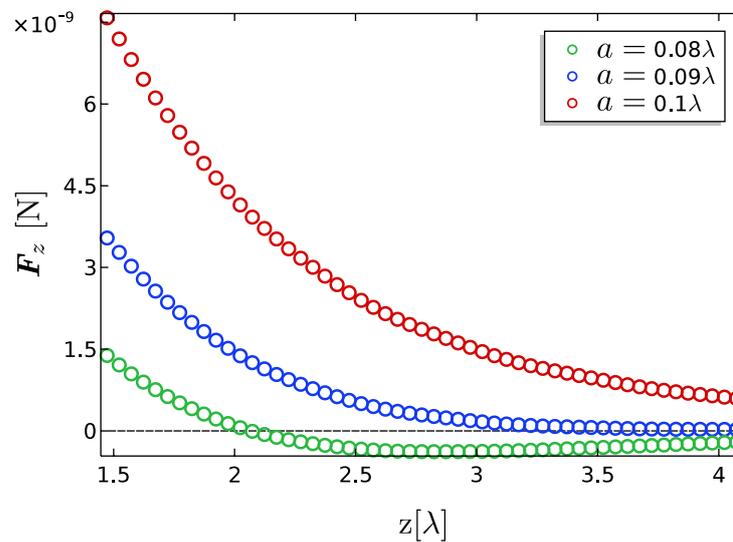
Por sua vez, a Fig. 4.6.a apresenta as componentes axiais da força de radiação acústica para uma partícula de RTV-615 de raio $a = 0.04\lambda$. A magnitude da força é da ordem de 10^{-10} , sendo a de maior intensidade em comparação com as demais partículas citadas, também é a partícula com o ponto de aprisionamento mais próximo do foco ($z=1.37\lambda$), em $z = 1.24\lambda$. Já a Fig. 4.6.b exibe os resultados para a componente transversal da força de radiação, novamente temos aprisionamento transversal em $r = 0$, também configurando o aprisionamento 3D para esta partícula. A magnitude da componente transversal também é superior a axial, neste caso cerca de cinco a dez vezes maior que as componentes axiais positiva e negativa.

Quando olhamos para os gráficos das Fig. 4.4-4.6, também podemos notar que a componente \mathbf{F}^{grad} é essencial para o aprisionamento, visto que, quando \mathbf{F}^{sca} e \mathbf{F}^{abs} assumem valores relevantes, estes possuem apenas componentes positivas. Entretanto, quando a partícula é feita de um material que é menos compressível do que a água, \mathbf{F}^{grad} tem o sinal invertido, ocasionando em uma força de repulsão, que afasta a partícula do feixe, descaracterizando o aprisionamento tanto axial quanto transversal.

4.3.1 Tamanho máximo de partículas aprisionadas axialmente

Nesta seção realizaremos uma análise numérica do tamanho máximo de partícula que pode ser aprisionada axialmente no feixe superfocalizado. Nosso objetivo é demonstrar que partículas fora do regime de *Rayleigh* podem ser aprisionadas utilizando esses feixes altamente focalizados.

Figura 4.7: Análise do limiar de aprisionamento axial de uma partícula esférica de RTV-615 em um feixe superfocalizado. Notemos que, conforme o radio da partícula foi aumentado a posição de aprisionamento axial se distanciou da lente, além disso, partículas com raio a partir de $a = 0.09\lambda$ já não são mais aprisionadas, por não possuírem componente negativa da força, com isso sendo apenas afastadas da lente.

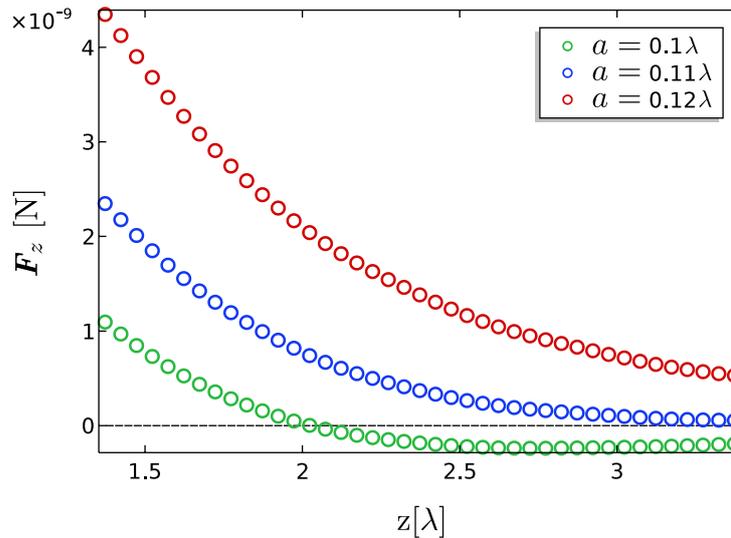


Fonte: autor, 2019.

Dessa forma, na Fig. 4.7 temos os resultados para a força de radiação acústica axial obtida a partir do modelo numérico (FEA), para partículas esféricas de RTV-615, com diferentes tamanho de raio. Note que, conforme o raio da partícula foi aumentado, a posição de aprisionamento axial se distanciou da lente, neste caso, para uma partícula de raio $a = 0.08\lambda$ o ponto de aprisionamento axial é $z = 2.07\lambda$, enquanto para uma partícula de mesmo material e raio $a = 0.04\lambda$, a posição de aprisionamento axial é $z = 1.24\lambda$ (Fig. 4.6.a). Além disso, à medida que o raio da partícula é aumentado a componente negativa da força axial diminui, de modo que, para este material, partículas com raio a partir de $a = 0.09\lambda$ já não possuem componente negativa da força de radiação acústica, assim tendo o aprisionamento axial descaracterizado.

De forma análoga, a Fig. 4.8, apresenta a força de radiação acústica axial para partículas esféricas de Benzeno, com tamanhos distintos de raio. Da mesma forma, conforme o raio da partícula aumenta, além da posição de aprisionamento axial se distanciar da lente, a componente negativa da força de radiação acústica diminui. No entanto, apesar da componente positiva da partícula de Benzeno ter uma magnitude menor que a partí-

Figura 4.8: Análise do limiar de aprisionamento axial de uma partícula esférica de Benzeno posicionada em um feixe superfocalizado. Observe que, que mantemos o mesmo padrão de afastamento do ponto de aprisionamento conforme aumentamos o raio da partícula, no entanto em comparação com os resultados para partículas de RTV-615 (Fig. 4.7), temos amplitudes menores da força de radiação, porém a componente negativa da força é anulada apenas para partículas com raio próximo à $a = 0.11\lambda$, de modo a não serem mais aprisionadas.



Fonte: autor, 2019.

cula de RTV-615, a componente negativa da partícula de Benzeno é anulada apenas em partículas um pouco maiores, com raio em torno de $a = 0.11\lambda$.

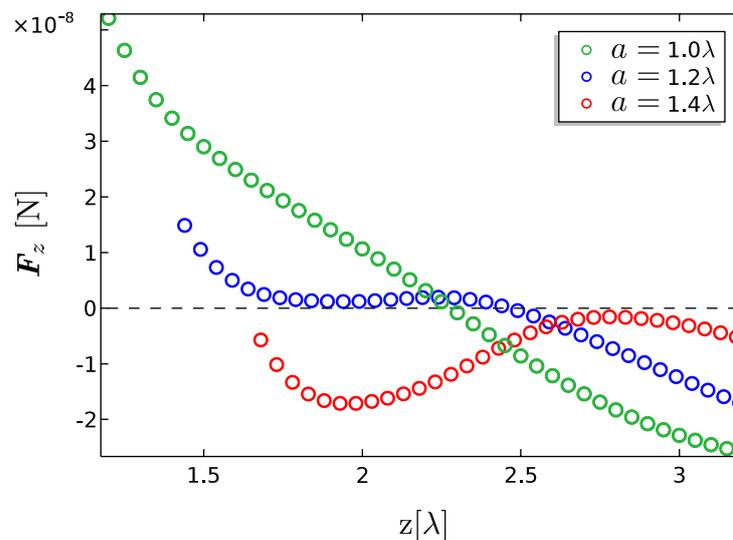
Em contrapartida, na Fig. 4.9, temos a componente axial da força de radiação acústica para partículas esféricas de Silicone Dow, com diferentes raios. Neste caso, a posição de aprisionamento axial também aumenta proporcionalmente ao raio da partícula. Contudo, observe que para esse material temos partículas com raio acima de $a = 1.0\lambda$ que ainda possuem tanto componente positiva, quanto negativa da força de radiação, em outras palavras, que ainda caracterizam aprisionamento axial. Partículas com esse tamanho de raio, já ultrapassaram a largura transversal do feixe (0.55λ) e se aproximam do comprimento axial do mesmo (2.54λ). Além disso, com este tamanho, as múltiplas reflexões entre a partícula e a lente, já influenciam os resultados, como pode ser visualizado a partir do perfil das curvas, onde quanto maior o raio da partícula, maior é a deflexão das curvas para a direita.

Como pudemos verificar, partículas com raio a partir de $a = 0.09\lambda$ para o RTV-615 e $a = 0.11\lambda$ para o Bezeno, já não são mais aprisionadas pela força de radiação acústica gerada pelo feixe superfocalizado, no entanto, para as partícula de Silicon Dow, mesmo as que possuem o raio maior que a largura transversal do feixe, continuam sendo aprisionada axialmente. Com isso, analisando mais uma vez os gráficos do modelo analítico, Fig.4.6.a, 4.4.a e 4.5.a, mais especificamente para a componente de espalhamento de cada partícula,

percebemos que quanto maior for a componente de espalhamento mais rapidamente a partícula deixa de ser aprisionada, conforme seu raio é aumentado. Além disso, como mencionado anteriormente, as partículas de RTV-615 e Silicone Dow, deixaram de ser aprisionadas quando a componente negativa da força de radiação foi anulada. Ademais, ao analisar as Eq.4.1-4.3, notamos que a componente de espalhamento tem uma dependência maior com o raio da partículas em relação às demais componentes, logo ela cresce mais rapidamente conforme o raio da partícula é aumentado. E ainda, como podemos verificar novamente nas Fig. 4.6.a, 4.4.a e 4.5.a, a componentes de espalhamento é sempre positiva na direção axial. Assim, conforme o raio da partícula é aumentado a componente de espalhamento ganha destaque, e por ser sempre positiva anula a componente negativa da força, descaracterizando o aprisionamento. Isto também explica, a razão de a posição de aprisionamento axial das partículas se distanciar conforme o raio é aumentado. E finalmente, também justifica o tamanho de aprisionamento máximo da partícula de Silicone ser muito acima dos demais, pois a componente de espalhamento desta partícula é muito menor do que as componentes de espalhamento das outras partículas analisadas, além de ser ainda menor em comparação com as componentes de absorção e gradiente dela mesma.

Assim, quanto menor for a componente de espalhamento em relação à componente gradiente, maior será o tamanho de aprisionamento máximo da partícula.

Figura 4.9: Análise do limiar de aprisionamento axial de uma partícula esférica de Silicon Dow posicionada em um feixe superfocalizado. Onde averiguamos que, conforme aumentamos o raio da partícula o ponto de aprisionamento é distanciado da lente, no entanto há o aprisionamento de partículas grandes (com raios maiores que $a = 1.0\lambda$) ao ponto de proporcionarem múltiplas reflexões com a lente, interferindo nos resultados e conseqüentemente no perfil da curva de força de radiação, percebeba que quanto maior o raio da partícula, maior é a deflexão da curva para direita.



Fonte: autor, 2019.

Tabela 4.1: Parâmetros das partículas e do meio (demais parâmetros disponíveis na Tab. 3.2).

Parâmetro	Valor/especificação
Partículas:	
Material	Benzeno
Densidade ¹ - ρ_p	870 kg/m ³
Velocidade do som ¹ - c_p	1295 m/s
Coefficiente de absorção ¹ - $\alpha(f)$	873 x 10 ⁻¹⁵ Np s ² /m
Compressibilidade - β_p	(6.85 x 10 ⁻¹⁰ - 2.49 x 10 ⁻¹³ i) Pa ⁻¹
Material	Silicone Dow
Densidade ¹ - ρ_p	1110 kg/m ³
Velocidade do som ¹ - c_p	1352 m/s
Coefficiente de absorção ¹ - $\alpha(f)$	8200 x 10 ⁻¹⁵ Np s ² /m
Compressibilidade - β_p	(4.93 x 10 ⁻¹⁰ - 1.76 x 10 ⁻¹² i) Pa ⁻¹
Material	RTV-615
Densidade ² - ρ_p	1020 kg/m ³
Velocidade do som longitudinal ² - c_L	1025 m/s
Coefficiente de absorção longitudinal ² - α_L	16.0457 Np/m
Velocidade do som de cisalhamento ³ - c_S	66.158 m/s
Coefficiente de absorção de cisalhamento ³ - α_S	103981 m ⁻¹
Compressibilidade - β_p	(9.38 x 10 ⁻¹⁰ - 3.78 x 10 ⁻¹² i) Pa ⁻¹
Meio:	
Material	Água
Densidade - ρ_0	998 kg/m ³
Velocidade do som - c_0	1493 m/s
Compressibilidade - β_0	4.49 x 10 ⁻¹⁰ Pa ⁻¹

¹Fonte: [Kino 1987]²Fonte: [Folds 1974]³Fonte: [Madsen, Sathoff e Zagzebski 1983]

5

Conclusões

Propusemos através deste trabalho, estudar os critérios de aprisionamento de partículas devido a imersão em um fluido perturbado pelo feixe acústico superfocalizado. Assim, ao analisarmos a força de radiação acústica, percebemos que as partículas com a compressibilidade maior que a do meio foram aprisionadas, enquanto partículas com a compressibilidade menor foram repelidas pelo feixe. Além disso, analisando as componentes da força de radiação acústica, notamos que a componente conservativa da força tem um papel fundamental no aprisionamento.

Ademais, quando analisamos o tamanho máximo das partículas a serem aprisionadas, percebemos uma relação com a componente referente ao espalhamento, pois a partícula que teve o maior tamanho máximo de aprisionamento, foi a partícula que teve a componente de espalhamento com a menor intensidade.

Apesar das limitações dos modelos, tanto do analítico quanto do numérico, dentro do possível, conseguimos mesclar as vantagens de cada modelo para analisar o comportamento das partículas no feixe superfocalizado.

Assim, deixamos como perspectivas futuras uma otimização do código, ou mediante a disponibilidade de mais recursos computacionais, que nos permitam o estudo da força de radiação em 3D, onde seria possível a análise da força na direção transversal do feixe, de modo a nos possibilitar a analisar também o tamanho máximo de partículas aprisionadas transversalmente. No entanto, mesmo com as presentes limitações, almejamos o estudo do comportamento de múltiplas partículas na direção axial do feixe. Também planejamos meios de otimizar o aparato de superfocalização. E ainda, o estudo do aprisionamento de partículas por meio de um padrão estacionário, gerado com feixes superfocalizados. Além é claro, das verificações experimentais.

Por fim, acreditamos que o presente trabalho, além de apontar padrões no comportamentos de partículas imersas no feixe acústico analisado, mostrou sua relevância, principalmente, através da exposição do método de estudo que foi apresentado, ao mostrar promissoras perspectivas no estudo da força de radiação acústica, especialmente em casos onde não há, previsões teóricas estabelecidas.

Referências Bibliográficas

- [Andrade 2014]ANDRADE, J. H. A. L. *Acoustic radiation force and torque on suspended objects in an inviscid fluid*. 74 p. Tese (Doutorado em Física) — Universidade Federal de Alagoas - Ufal, Maceió, Brazil, 2014.
- [Andrade, Pérez e Adamowski 2015]ANDRADE, M. A.; PÉREZ, N.; ADAMOWSKI, J. C. Particle manipulation by a non-resonant acoustic levitator. *Applied Physics Letters*, AIP Publishing, v. 106, n. 1, p. 014101, 2015.
- [Ashkin e Dziedzic 1971]ASHKIN, A.; DZIEDZIC, J. Optical levitation by radiation pressure. *Applied Physics Letters*, AIP, v. 19, n. 8, p. 283–285, 1971.
- [Ayres e Gaunaurd 1987]AYRES, V.; GAUNAURD, G. Acoustic resonance scattering by viscoelastic objects. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Acoustical Society of America, v. 81, n. 2, p. 301–311, 1987.
- [Brandt 2001]BRANDT, E. Acoustic physics: Suspended by sound. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 413, n. 6855, p. 474, 2001.
- [Bruus 2008]BRUUS, H. *Theoretical microfluidics*. [S.l.]: Oxford university press Oxford, 2008. v. 18.
- [Chen e Holm 2003]CHEN, W.; HOLM, S. Modified szabo’s wave equation models for lossy media obeying frequency power law. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Acoustical Society of America, v. 114, n. 5, p. 2570–2574, 2003.
- [Chen, Taflove e Backman 2004]CHEN, Z.; TAFLOVE, A.; BACKMAN, V. Photonic nanojet enhancement of backscattering of light by nanoparticles: a potential novel visible-light ultramicroscopy technique. *Optics express*, Optical Society of America, v. 12, n. 7, p. 1214–1220, 2004.
- [Choe et al. 2011]CHOE, Y. et al. Microparticle trapping in an ultrasonic bessel beam. *Applied physics letters*, AIP, v. 99, n. 23, p. 233704, 2011.
- [COMSOL 2014]COMSOL. *A Brief Introduction to the Weak Form*. 2014. Disponível em: <<https://br.comsol.com/blogs/brief-introduction-weak-form/>>. Acesso em: 05 fev. 2019.

-
- [COMSOL 2015]COMSOL. *Discretizing the Weak Form Equations*. 2015. Disponível em: <<https://br.comsol.com/blogs/discretizing-the-weak-form-equations/>>. Acesso em: 12 fev. 2019.
- [COMSOL 2015]COMSOL. *Using Perfectly Matched Layers and Scattering Boundary Conditions for Wave Electromagnetics Problems*. 2015. Disponível em: <<https://br.comsol.com/blogs/using-perfectly-matched-layers-and-scattering-boundary-conditions-for-wave-electromagnetics-problems/>>. Acesso em: 21 fev. 2019.
- [COMSOL 2016]COMSOL. *Finite Element Mesh Refinement*. 2016. Disponível em: <<https://br.comsol.com/multiphysics/mesh-refinement>>. Acesso em: 16 fev. 2019.
- [COMSOL 2016]COMSOL. *The Finite Element Method (FEM)*. 2016. Disponível em: <<https://br.comsol.com/multiphysics/finite-element-method>>. Acesso em: 05 fev. 2019.
- [Ding et al. 2012]DING, X. et al. On-chip manipulation of single microparticles, cells, and organisms using surface acoustic waves. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 109, n. 28, p. 11105–11109, 2012.
- [Embleton 1954]EMBLETON, T. Mean force on a sphere in a spherical sound field. ii.(experimental). *The Journal of the Acoustical Society of America*, ASA, v. 26, n. 1, p. 46–50, 1954.
- [Ferrand et al. 2008]FERRAND, P. et al. Direct imaging of photonic nanojets. *Optics express*, Optical Society of America, v. 16, n. 10, p. 6930–6940, 2008.
- [Folds 1974]FOLDS, D. Speed of sound and transmission loss in silicone rubbers at ultrasonic frequencies. *The Journal of the Acoustical Society of America*, ASA, v. 56, n. 4, p. 1295–1296, 1974.
- [Foresti et al. 2013]FORESTI, D. et al. Acoustophoretic contactless transport and handling of matter in air. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, National Acad Sciences, v. 110, n. 31, p. 12549–12554, 2013.
- [Geim et al. 1999]GEIM, A. et al. Magnet levitation at your fingertips. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 400, n. 6742, p. 323, 1999.
- [Glynne-Jones et al. 2013]GLYNNE-JONES, P. et al. Efficient finite element modeling of radiation forces on elastic particles of arbitrary size and geometry. *The Journal of the Acoustical Society of America*, ASA, v. 133, n. 4, p. 1885–1893, 2013.
- [Gor’Kov 1962]GOR’KOV, L. On the forces acting on a small particle in an acoustical field in an ideal fluid. In: *Soviet Physics Doklady*. Moscou, URSS: Doklady Akademii Nauk SSSR, 1962. v. 6, p. 773.

-
- [GRAFF 1975]GRAFF, K. W. M. I. E. Solids. *Mineola, NY USA: Dover*, 1975.
- [Gray e Nickel 1978]GRAY, C.; NICKEL, B. Debye potential representation of vector fields. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 46, n. 7, p. 735–736, 1978.
- [Hasegawa e Yosioka 1969]HASEGAWA, T.; YOSIOKA, K. Acoustic-radiation force on a solid elastic sphere. *The Journal of the Acoustical Society of America*, ASA, v. 46, n. 5B, p. 1139–1143, 1969.
- [Holm e Näsholm 2014]HOLM, S.; NÄSHOLM, S. P. Comparison of fractional wave equations for power law attenuation in ultrasound and elastography. *Ultrasound in medicine & biology*, Elsevier, v. 40, n. 4, p. 695–703, 2014.
- [Hultström et al. 2007]HULTSTRÖM, J. et al. Proliferation and viability of adherent cells manipulated by standing-wave ultrasound in a microfluidic chip. *Ultrasound in medicine & biology*, Elsevier, v. 33, n. 1, p. 145–151, 2007.
- [King 1934]KING, L. V. On the acoustic radiation pressure on spheres. In: THE ROYAL SOCIETY. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. Longon, UK, 1934. v. 147, n. 861, p. 212–240.
- [Kino 1987]KINO, G. S. *Acoustic waves: devices, imaging and analog signal processing*. [S.l.: s.n.], 1987. 548 p.
- [Kozuka et al. 1998]KOZUKA, T. et al. Control of a standing wave field using a line-focused transducer for two-dimensional manipulation of particles. *Japanese journal of applied physics*, IOP Publishing, v. 37, n. 5S, p. 2974, 1998.
- [Lam et al. 2013]LAM, K. H. et al. Ultrahigh frequency lensless ultrasonic transducers for acoustic tweezers application. *Biotechnology and bioengineering*, Wiley Online Library, v. 110, n. 3, p. 881–886, 2013.
- [Laurell, Petersson e Nilsson 2007]LAURELL, T.; PETERSSON, F.; NILSSON, A. Chip integrated strategies for acoustic separation and manipulation of cells and particles. *Chemical Society Reviews*, Royal Society of Chemistry, v. 36, n. 3, p. 492–506, 2007.
- [Leão-Neto e Silva 2016]LEÃO-NETO, J.; SILVA, G. T. Acoustic radiation force and torque exerted on a small viscoelastic particle in an ideal fluid. *Ultrasonics*, Elsevier, v. 71, p. 1–11, 2016.
- [Lecler, Takakura e Meyrueis 2005]LECLER, S.; TAKAKURA, Y.; MEYRUEIS, P. Properties of a three-dimensional photonic jet. *Optics letters*, Optical Society of America, v. 30, n. 19, p. 2641–2643, 2005.

-
- [Lee et al. 2009]LEE, J. et al. Single beam acoustic trapping. *Applied physics letters*, AIP, v. 95, n. 7, p. 073701, 2009.
- [Li et al. 2005]LI, X. et al. Optical analysis of nanoparticles via enhanced backscattering facilitated by 3-d photonic nanojets. *Optics express*, Optical Society of America, v. 13, n. 2, p. 526–533, 2005.
- [Lopes et al. 2017]LOPES, J. et al. Focusing acoustic beams with a ball-shaped lens beyond the diffraction limit. *Physical Review Applied*, APS, v. 8, n. 2, p. 024013, 2017.
- [Lopes et al. 2016]LOPES, J. et al. A theoretical analysis of acoustic jets. In: *Proceedings of the 22nd International Congress on Acoustics, Buenos Aires, Argentina*. [S.l.: s.n.], 2016.
- [Lopes, Leão-Neto e Silva 2017]LOPES, J.; LEÃO-NETO, J.; SILVA, G. Absorption, scattering, and radiation force efficiencies in the longitudinal wave scattering by a small viscoelastic particle in an isotropic solid. *The Journal of the Acoustical Society of America*, ASA, v. 142, n. 5, p. 2866–2872, 2017.
- [Madsen, Sathoff e Zagzebski 1983]MADSEN, E. L.; SATHOFF, H. J.; ZAGZEBSKI, J. A. Ultrasonic shear wave properties of soft tissues and tissuelike materials. *The Journal of the Acoustical Society of America*, ASA, v. 74, n. 5, p. 1346–1355, 1983.
- [Mainardi 2010]MAINARDI, F. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models*. [S.l.]: World Scientific, 2010.
- [Marston 2006]MARSTON, P. L. Axial radiation force of a bessel beam on a sphere and direction reversal of the force. *The Journal of the Acoustical Society of America*, ASA, v. 120, n. 6, p. 3518–3524, 2006.
- [Marston 2007]MARSTON, P. L. Negative axial radiation forces on solid spheres and shells in a bessel beam. *The Journal of the Acoustical Society of America*, ASA, v. 122, n. 6, p. 3162–3165, 2007.
- [Marston 2009]MARSTON, P. L. Radiation force of a helicoidal bessel beam on a sphere. *The Journal of the Acoustical Society of America*, ASA, v. 125, n. 6, p. 3539–3547, 2009.
- [Mase 1970]MASE, G. E. *Continuum mechanics*. [S.l.]: McGraw-Hill New York, 1970. v. 970.
- [Minin e Minin 2017]MININ, O. V.; MININ, I. V. Acoustojet: acoustic analogue of photonic jet phenomenon based on penetrable 3d particle. *Optical and Quantum Electronics*, Springer, v. 49, n. 2, p. 54, 2017.

-
- [Mitri 2008]MITRI, F. Acoustic radiation force on a sphere in standing and quasi-standing zero-order bessel beam tweezers. *Annals of physics*, Elsevier, v. 323, n. 7, p. 1604–1620, 2008.
- [Mitri 2009]MITRI, F. Acoustic radiation force of high-order bessel beam standing wave tweezers on a rigid sphere. *Ultrasonics*, Elsevier, v. 49, n. 8, p. 794–798, 2009.
- [Mitri 2014]MITRI, F. Axial and transverse acoustic radiation forces on a fluid sphere placed arbitrarily in bessel beam standing wave tweezers. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 342, p. 158–170, 2014.
- [Mitri 2016]MITRI, F. Acoustic radiation force and spin torque on a viscoelastic cylinder in a quasi-gaussian cylindrically-focused beam with arbitrary incidence in a non-viscous fluid. *Wave Motion*, Elsevier, v. 66, p. 31–44, 2016.
- [Mitri 2009]MITRI, F. G. Langevin acoustic radiation force of a high-order bessel beam on a rigid sphere. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, IEEE, v. 56, n. 5, p. 1059–1064, 2009.
- [Neto 2015]NETO, J. P. L. *Força e torque de radiação sobre uma partícula viscoelástica em um fluido ideal*. Tese (Doutorado em Física) — Universidade Federal de Alagoas - Ufal, Maceió, Brazil, 2015.
- [Nyborg 1967]NYBORG, W. L. Radiation pressure on a small rigid sphere. *The Journal of the Acoustical Society of America*, ASA, v. 42, n. 5, p. 947–952, 1967.
- [Rhim et al. 1993]RHIM, W.-K. et al. An electrostatic levitator for high-temperature containerless materials processing in 1-g. *Review of Scientific Instruments*, AIP, v. 64, n. 10, p. 2961–2970, 1993.
- [Santesson e Nilsson 2004]SANTESSON, S.; NILSSON, S. Airborne chemistry: acoustic levitation in chemical analysis. *Analytical and bioanalytical chemistry*, Springer, v. 378, n. 7, p. 1704–1709, 2004.
- [Segel 2007]SEGEL, L. A. *Mathematics applied to continuum mechanics*. [S.l.]: SIAM, 2007. v. 52.
- [Shi et al. 2009]SHI, J. et al. Acoustic tweezers: patterning cells and microparticles using standing surface acoustic waves (ssaw). *Lab on a Chip*, Royal Society of Chemistry, v. 9, n. 20, p. 2890–2895, 2009.
- [Silva 2011]SILVA, G. T. An expression for the radiation force exerted by an acoustic beam with arbitrary wavefront (1). *The Journal of the Acoustical Society of America*, ASA, v. 130, n. 6, p. 3541–3544, 2011.

-
- [Silva 2014]SILVA, G. T. Acoustic radiation force and torque on an absorbing compressible particle in an inviscid fluid. *The Journal of the Acoustical Society of America*, ASA, v. 136, n. 5, p. 2405–2413, 2014.
- [Szabo e Wu 2000]SZABO, T. L.; WU, J. A model for longitudinal and shear wave propagation in viscoelastic media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Acoustical Society of America, v. 107, n. 5, p. 2437–2446, 2000.
- [Wang e Zhe 2011]WANG, Z.; ZHE, J. Recent advances in particle and droplet manipulation for lab-on-a-chip devices based on surface acoustic waves. *Lab on a Chip*, Royal Society of Chemistry, v. 11, n. 7, p. 1280–1285, 2011.
- [Westervelt 1957]WESTERVELT, P. J. Acoustic radiation pressure. *The Journal of the Acoustical Society of America*, ASA, v. 29, n. 1, p. 26–29, 1957.
- [Wiklund, Nilsson e Hertz 2001]WIKLUND, M.; NILSSON, S.; HERTZ, H. M. Ultrasonic trapping in capillaries for trace-amount biomedical analysis. *Journal of applied physics*, AIP, v. 90, n. 1, p. 421–426, 2001.
- [Wu 1991]WU, J. Acoustical tweezers. *The Journal of the Acoustical Society of America*, ASA, v. 89, n. 5, p. 2140–2143, 1991.
- [Wu e Du 1990]WU, J.; DU, G. Acoustic radiation force on a small compressible sphere in a focused beam. *The Journal of the Acoustical Society of America*, ASA, v. 87, n. 3, p. 997–1003, 1990.
- [Yosioka e Kawasima 1955]YOSIOKA, K.; KAWASIMA, Y. Acoustic radiation pressure on a compressible sphere. *Acta Acustica united with Acustica*, S. Hirzel Verlag, v. 5, n. 3, p. 167–173, 1955.