

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

LUÍS PHILIPPE RIBEIRO ALMEIDA

**Modelos Probabilísticos para Análise de Propagação de Fissuras
em meios Coesivos via Método dos Elementos de Contorno**

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Toledo de Lima Junior
Coorientador: Prof. Dr. João Carlos Cordeiro Barbirato

MACEIÓ-AL
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

LUÍS PHILIPPE RIBEIRO ALMEIDA

**Modelos Probabilísticos para Análise de Propagação de Fissuras
em meios Coesivos via Método dos Elementos de Contorno**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Toledo de Lima Junior
Coorientador: Prof. Dr. João Carlos Cordeiro Barbirato

MACEIÓ-AL
2020

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

A447m Almeida, Luís Philipe Ribeiro.
Modelos probabilísticos para análise de propagação de fissuras em meios
coesivos via método dos elementos de contorno / Luís Philipe Ribeiro Almeida. -
2020.
178 f. : il.

Orientador: Eduardo Toledo de Lima Junior.
Co-orientador: João Carlos Cordeiro Barbirato.
Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de
Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2020.

Bibliografia: f. 156-171.
Anexos: f. 173-178.

1. Mecânica da fratura. 2. Métodos de elementos de contorno. 3.
Confiabilidade (Engenharia). I. Título.

CDU:624.07



**MODELOS PROBABILÍSTICOS PARA ANÁLISE DE PROPAGAÇÃO DE FISSURAS EM
MEIOS COESIVOS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

LUÍS PHILIPPE RIBEIRO ALMEIDA

Dissertação submetida à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas e aprovada no dia 27 do mês de março do ano de 2020.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Eduardo Toledo de Lima Junior
(Orientador – PPGEC/UFAL)

Prof. Dr. João Carlos Cordeiro Barbirato
(Coorientador - CTEC/UFAL)

Prof. Dr. Edson Denner Leonel
(Avaliador Externo – USP)

Prof. Dr. Fábio Carlos da Rocha
(Avaliador Externo – UFS)

Prof. Dr. Josealdo Tonholo
Reitor da Universidade Federal de
Alagoas

Prof. Dr. Vladimir Caramori Borges de Souza
Diretor do Centro de Tecnologia

Prof. Dr. Wayne Santos de Assis
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a minha família e em especial a meus pais, Rivaldo e Elisângela, pelo carinho e suporte que me deram durante toda essa jornada. Também gostaria de agradecer a minha vó Leni, por todo o carinho e frases motivacionais concedidas, e meus irmãos Thiago e Ana Júlia.

Agradeço aos meus orientadores, Prof. Eduardo Toledo e Prof. Barbirato, por todos os conselhos, todo o suporte concedido e disponibilidade em incontáveis momentos para desenvolvimento deste trabalho. Toda a coerência e ética profissional de vocês corroboraram diretamente para meu desenvolvimento como pesquisador. Acredito que esta parceria continuará por muito tempo.

Aos professores do PPGEC-UFAL que participaram da minha formação durante o mestrado, em especial aos professores Eduardo Nobre, William Lira, Severino Marques e Adeildo Soares, os quais ministraram disciplinas importantes para minha formação acadêmica.

Aos professores do departamento de Engenharia Civil da UFS, Profs. Fábio Carlos, David Amorim, Higor Argolo, Jorge Costa por toda a contribuição dada enquanto graduando em Engenharia Civil. Em especial ao Prof. Fábio, por ter me introduzido ainda na graduação a este universo.

Ao professor Edson Denner Leonel, pela disponibilidade e aceite para participação da banca examinadora deste trabalho.

Aos amigos de mestrado, Lucas Menezes, Francisco, Lucas Muniz, Wallison, Wiu, Mariana, Jéssica e Weverton. Acredito que todas essas amizades perdurarão por muito tempo.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro, o qual possibilitou a minha dedicação exclusiva à esta pesquisa.

Agradeço também ao Laboratório de Computação Científica e Visualização (LCCV) por toda infraestrutura disponibilizada, e em especial, a todas as novas amizades que fiz durante esta reta final do Mestrado.

RESUMO

Apresenta-se neste trabalho o emprego de formulações do Método dos Elementos de Contorno (MEC) em problemas de sólidos fraturados, incluindo análise probabilística. O MEC é um método adequado para resolução desses tipos de problemas, uma vez que a ausência de malha de domínio resulta em uma modelagem mais eficiente de regiões com alta concentração de tensões. Além disso, a redução de dimensionalidade da malha diminui fortemente os dados de entrada e também o trabalho de *remeshing* no processo de propagação de fissuras. Com relação à formulação não linear do MEC, será utilizada uma alternativa à formulação clássica dual, com a introdução de um campo de tensões iniciais para representação da resistência residual do material ao longo da zona coesiva, a partir do conceito de dipolos. Esta formulação é particularmente interessante por conseguir representar matematicamente a presença da Zona de Processos Inelásticos (ZPI) em apenas três equações algébricas (equações relacionadas à correção de tensões) por ponto fonte situado no caminho da fissura. Em contraste, a formulação dual requer quatro equações algébricas (deslocamentos e forças) por ponto fonte. Quanto aos efeitos pertinentes ao sistema não linear, serão utilizados dois algoritmos distintos de resolução iterativa, Operador Constante (OC) e Operador Tangente (OT). No acoplamento com modelos da confiabilidade, apenas o OT será utilizado por apresentar respostas satisfatórias em um número menor de iterações. Com relação à análise probabilística, duas abordagens são consideradas, a primeira refere-se ao acoplamento direto entre o modelo numérico e um método de transformação (HLRF/FORM), já a segunda consiste no acoplamento mais simples com o emprego do Método de Monte Carlo. Os parâmetros de fraturamento são tratados como aleatórios. Por fim, a técnica de Amostragem inteligente por Hipercubo Latino é também empregada, por apresentar melhores taxas de convergência. Exemplos são apresentados para validar o uso da formulação de dipolos na análise de propagação de fissuras, à luz da confiabilidade estrutural.

Palavras chave: Mecânica da Fratura Coesiva, Método dos Elementos de Contorno, Confiabilidade estrutural.

ABSTRACT

This work deals with the use of formulations of the Boundary Element Method (BEM) in fracture problems, in a probabilistic framework. The BEM is a suitable method for solving these types of problems, since the absence of a domain mesh translates into a more efficient modeling of regions with high concentration of stresses. Besides, reducing the dimensionality of the mesh results in a convenient *remeshing* process. Regarding the non-linear BEM formulation, an alternative to the classic dual formulation will be used, with the introduction of an initial stress field to represent the cohesive zone, based on the concept of dipoles. This formulation is particularly interesting because it is able to represent mathematically the presence of the Inelastic Process Zone (IPZ) with only three algebraic equations (equations related to stress correction) per source point located in the crack path. In contrast, dual formulation requires four algebraic equations (displacements and forces) per source point. As for the effects relevant to the non-linear system, two distinct iterative resolution algorithms will be used, Constant Operator (CO) and Tangent Operator (TO). When coupling with reliability models, only TO will be used because it presents satisfactory responses in a smaller number of iterations. Regarding the probabilistic analysis, two approaches are considered, the first refers to the direct coupling between the numerical model and a transformation method (HLRF / FORM), while the second consists of the most straightforward coupling using the Monte Carlo Method. The fracture parameters are treated as random. Finally, the Latin Hypercube sampling technique is also employed, as it presents better convergence rates. Some examples are presented to validate the use of dipole formulation in crack propagation analysis, in the light of structural reliability.

Keywords: Cohesive Fracture Mechanics, Boundary Element Method, Structural Reliability.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.	Geometria real (a) Discretização por elementos de contorno lineares (b).....	29
Figura 2.	Solução para singularidade em ponto fonte no contorno.....	32
Figura 3.	Ponto de colocação em contorno anguloso.....	33
Figura 4.	Coordenadas adimensionais e funções de aproximação.....	34
Figura 5.	Representação dos componentes locais e cartesianos das forças de superfície (a) Deslocamentos e coordenadas nodais de um elemento (b).	37
Figura 6.	Esquema para elementos descontínuos.....	39
Figura 7.	Cavidade em meio semi-infinito submetida a forças de domínio.....	41
Figura 8.	Trecho ABC após deformação com coeficiente de empuxo $k=0$	42
Figura 9.	Tensões de von Mises ao longo da linha L.....	42
Figura 10.	Distribuição de tensões na cavidade circular para $k=1$ (a) σ_{22} (KN/m ²) (b) σ_{12} (KN/m ²)	43
Figura 11.	Distribuição de tensões na cavidade circular para $k=0,5$ (c) σ_{22} (KN/m ²) (d) σ_{12} (KN/m ²)	43
Figura 12.	Distribuição de tensões na cavidade circular para $k=0$ (e) σ_{22} (KN/m ²) (f) σ_{12} (KN/m ²)	44
Figura 13.	Definição da função de falha.....	47
Figura 14.	Exemplo ilustrativo da simulação ($n_s = 1000$) de Monte Carlo.....	50
Figura 15.	Hipercubo Latino para duas variáveis e cinco realizações.....	52
Figura 16.	Histograma de frequência na (a) Amostragem simples (b) Amostragem por Hipercubo Latino	52
Figura 17.	Representação gráfica da busca do ponto de projeto para um problema com duas variáveis.....	55
Figura 18.	Principais modos de sollicitação.....	59
Figura 19	Modelo de Dugdale: (a) Descrição geométrica da região de fraturamento efetivo, (b) Sistema de forças atuando no processo de fratura.....	62
Figura 20.	Modelo de Hillerbor <i>et al.</i> (1976).....	63
Figura 21.	Lei constitutiva Linear.....	64
Figura 22.	Lei constitutiva bilinear.....	65
Figura 23.	Lei constitutiva exponencial.....	66
Figura 24.	Distribuição de pontos internos a frente da extremidade da fissura	67

Figura 25. Esquema de adição dos novos elementos de fissura.....	68
Figura 26. Corpo sem a presença de descontinuidades.....	69
Figura 27. Corpo com a presença de uma descontinuidade transversal ao carregamento	70
Figura 28. Ilustração do dipolo qz	70
Figura 29. Sub-região estrita de tensões iniciais.....	72
Figura 30. Representação local dos quadripolos (a) $q1$ (composto pelo dipolo $q11$ e $q21$) e (b) $q2$ (composto pelo dipolo $q12$ e $q22$)	75
Figura 31. Esquema de discretização dos novos elementos de fissura	80
Figura 32. Esquema de atualização da parcela matricial $SQ = \sigma$	80
Figura 33. Interpretação geométrica do OC (critério coesivo linear).	82
Figura 34. Sistemas global e local de referência.....	84
Figura 35. Interpretação geométrica do OT (lei coesiva linear)	86
Figura 36. Principais módulos do algoritmo de fratura mecânica.	87
Figura 37. Módulo I: Análise elástica linear	88
Figura 38. Módulo II: Algoritmo incremental	89
Figura 39. Módulo II: Algoritmo iterativo	90
Figura 40. Chapa tracionada.	92
Figura 41. Força vs Deslocamento para as três leis coesivas.	93
Figura 42. Tensão coesiva (MPa) vs Abertura de fissura (m) para as três leis coesivas.....	94
Figura 43. Deslocamento nos pontos B1 e B2 (m)	95
Figura 44. Deslocamento horizontal (m) para pontos internos em escala de cores	96
Figura 45. Geometria da viga sob flexão em três pontos	97
Figura 46. Carga vs deslocamento da estrutura.....	98
Figura 47. Campos de deslocamento (m) horizontal (a) vertical (b) nos pontos internos	99
Figura 48. Evolução da fissura coesiva.....	100
Figura 49. σ_1 (MPa) para o ultimo instante da análise.....	100
Figura 50. Força versus deslocamento para diferentes índices de fragilidade s_0	101
Figura 51. Comparação entre OC e OT (a) Força <i>versus</i> deslocamento (b) Tensão <i>versus</i> abertura de fissura.....	102
Figura 52. Propriedades geométricas e do material para o Exemplo 3.	103
Figura 53. Resposta força <i>versus</i> deslocamento da estrutura.....	104
Figura 54. Respostas da tensão coesiva na interface.....	105

Figura 55	Evolução da fissura para alguns instantes da análise.....	106
Figura 56.	Campos de deslocamento (m) horizontal (a) vertical (b) para pontos internos.....	107
Figura 57.	Comparação entre OC e OT (a) Força <i>versus</i> deslocamento (b) Tensão <i>versus</i> abertura de fissura.....	108
Figura 58.	Comparação entre OC e OT (a) Bilinear (b) Exponencial	108
Figura 59.	Exemplo 4 – Shi <i>et al.</i> experimento.....	110
Figura 60.	Resposta de Força <i>versus</i> deslocamento vertical da estrutura	111
Figura 61.	Configuração final da fissura.....	112
Figura 62.	Evolução da fissura em escala de cores	112
Figura 63.	Comparação entre OC e OT para as três leis coesivas	113
Figura 64.	Geometria do exemplo 5.....	114
Figura 65.	Resposta em Força <i>versus</i> deslocamento da estrutura	115
Figura 66.	Configuração final da fissura.....	116
Figura 67.	Campos de deslocamentos nos pontos internos.....	116
Figura 68.	Comparação entre OC e OT para as três leis coesivas	117
Figura 69.	Viga de concreto com entalhe duplo submetida a modo misto	118
Figura 70.	Resposta não linear da estrutura	119
Figura 71.	Configuração final da fissura.....	119
Figura 72.	Campos de deslocamento (m) horizontal (a) vertical (b) nos pontos internos	120
Figura 73.	Máxima tensão principal (MPa) para um instante da análise	121
Figura 74.	Estratégia de acoplamento direto entre o modelo mecânico elástico linear e o FORM.	124
Figura 75.	Estratégia de acoplamento direto entre o modelo de fratura coesiva e o FORM. ...	125
Figura 76.	Aleatoriedade em parâmetros de fraturamento (lei bi-linear).....	126
Figura 77.	Esquema do procedimento de simulação para caracterização da carga de ruptura (Inferência estatística).....	127
Figura 78.	Probabilidade de falha <i>vs</i> coeficiente de empuxo com acoplamento direto entre dois modelos de confiabilidade.	129
Figura 79.	Probabilidade de falha (a) Índice de confiabilidade (b) considerando variáveis normais e não normais.	130
Figura 80.	Caracterização da carga de ruptura (a) desvio padrão (b) média.....	133
Figura 81.	Histograma da densidade de probabilidade da carga de ruptura (2500 simulações)	134
Figura 82.	Frequência Relativa Acumulada da carga de ruptura (2500 simulações).....	134

Figura 83. Fatores de importância para os parâmetros coesivos na curva Força <i>versus</i> deslocamento.	136
Figura 84. Caracterização estatística ao longo da curva Força <i>versus</i> deslocamento para f_t aleatório	137
Figura 85. Caracterização estatística ao longo da curva Força <i>versus</i> deslocamento para G_f aleatório	138
Figura 86. Caracterização estatística ao longo da curva Força <i>versus</i> deslocamento para f_t e G_t aleatórios.....	138
Figura 87. Caracterização estatística ao longo da curva Força <i>versus</i> deslocamento para f_t , G_t e E aleatórios.....	139
Figura 88. Resultado para 300 simulações de Monte Carlo simples para caso 1	140
Figura 89. Resultado para 300 simulações de Monte Carlo simples para caso 2	141
Figura 90 Processo de sub-elementação.	169

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.	Comparação de iterações entre OC e OT.	102
Tabela 2.	Comparação de iterações entre OC e OT.	109
Tabela 3.	Comparação de iterações entre OC e OT.	113
Tabela 4.	Economia de iterações	117
Tabela 5.	Economia de iterações	121
Tabela 6.	Definição dos dados estatísticos para os três parâmetros.	128
Tabela 7.	Análise de confiabilidade para o Exemplo 1 (caso1) considerando variáveis gaussianas.	128
Tabela 8.	Pontos de projeto e fatores de importância para o caso 1	129
Tabela 9.	Análise de confiabilidade para o Exemplo 1 (caso2) considerando variáveis não gaussianas.	130
Tabela 10.	Definição dos dados estatísticos da Etapa 1	132
Tabela 11.	Probabilidade de falha para 2500 simulações.....	135

LISTA DE ABREVIACOES

DBEM	Dual Boundary Element Method
CSDA	Continuum Strong Discontinuity Approach
FORM	First Order Reliability Method
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
XFEM	Extended Finite Element Method
MFEL	Mecânica da Fratura Elástica Linear
MFF	Modelo de Fissuras Fictícias
MFNL	Mecânica da Fratura Não Linear
MRP	Método dos Resíduos Ponderados
OC	Operador Constante
OT	Operador Tangente
FIT	Fatores de Intensidade de Tensão
MRM	Método da Reciprocidade Múltipla
PVC	Problema de Valor de Contorno
HLRF	Hasofer-Lind - Rackwitz-Fiessler
MRD	Método da Reciprocidade Dual
MIR	Método da Integrao Radial
ZPI	Zona de Processos Inelásticos
EPT	Estado Plano de Tensão
EPD	Estado Plano de Deformao
MDF	Método das Diferenças Finitas
PDF	Funo Densidade de Probabilidade
CDF	Funo de Distribuo Acumulada

Sumário

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	Considerações iniciais.....	18
1.2	Objetivos.....	19
1.3	Metodologia	19
1.4	Estrutura do trabalho	22
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	23
2.1	Método dos Elementos de Contorno	23
2.2	Método dos Elementos de Contorno na Mecânica da Fratura.....	24
2.3	Confiabilidade Estrutural.....	25
2.4	Método dos Elementos de Contorno na Confiabilidade Estrutural.....	27
3	FORMULAÇÃO LINEAR DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	29
3.1	Solução Fundamental	30
3.2	Equações integrais de Contorno.....	31
3.3	Método dos Elementos de Contorno	33
3.3.1	Discretização.....	33
3.4	Análise em pontos internos	36
3.5	Tensões no Contorno	37
3.6	Descontinuidade em pontos de canto	38
3.7	Forças de domínio.....	39
3.7.1	Método da Reciprocidade Múltipla	40
3.8	Aplicação: Cavidade em meio semi-infinito considerando forças de domínio... 	40
4	TÓPICOS EM CONFIABILIDADE ESTRUTURAL	45
4.1	Definição da probabilidade de Falha	46
4.2	Problema fundamental de Confiabilidade	47
4.3	Método de simulação de Monte Carlo	48
4.4	Amostragem por hipercubo Latino (LHS).....	51
4.5	Método de Confiabilidade de Primeira Ordem – FORM.....	52
4.5.1	Algoritmo HLRF	53
4.5.2	Algoritmo do Método FORM.....	55

5	MECÂNICA DA FRATURA.....	57
5.1	Mecânica da Fratura Elástico Linear	58
5.2	Mecânica da Fratura Não Linear.....	61
5.2.1	Modelo de Fissuras Fictícias (MFF).....	62
5.3	Cálculo do estado de tensão na extremidade da fissura.....	66
5.4	Processo evolutivo da fissura	67
5.5	Formulação do MEC para problema de tensões iniciais	68
5.5.1	Elementos de Contorno para o problema de fissuração.....	76
5.6	Discretizações	78
5.7	Resolução do sistema não linear pelo Operador Tangente.....	82
5.8	Algoritmo para Fratura Mecânica.....	86
5.9	Aplicações	91
5.9.1	Exemplo 1: Chapa tracionada.....	92
5.9.2	Exemplo 2: Viga sob flexão em três pontos submetida a modo I	96
5.9.3	Exemplo 3: Viga sob flexão em 4 pontos submetida a modo I-II	102
5.9.4	Exemplo 4: Chapa com 2 entalhes modo misto I-II	110
5.9.5	Exemplo 5: Espécime de concreto em Modo I (“Wedge Splitting”).....	114
5.9.6	Exemplo 6: Viga de concreto com entalhe duplo e modo de solitação misto I-II	118
6	ACOPLAMENTO ENTRE MEC E MODELOS DE CONFIABILIDADE	122
6.1	Acoplamento direto entre o MEC e o algoritmo HLRP/FORM	123
6.2	Acoplamento entre o MEC e o método de Monte Carlo	125
6.3	Aplicações	127
6.3.1	Exemplo 1: Cavidade em meio semi-infinito com força de domínio.....	127
6.3.2	Exemplo 2: Viga sob flexão em 3 pontos (Modo I)	131
6.3.3	Exemplo 3: Viga sob flexão em 4 pontos (Modo I-II)	140
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	142
7.1	Conclusões	142
7.2	Sugestões para pesquisas futuras	145
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	149
	ANEXO A – Fundamentos da Teoria da Elasticidade.....	165

A.1 Equação de equilíbrio.....	165
A.2. Equação de Compatibilidade.....	165
A.3. Relações Constitutivas.....	166
ANEXO B – Integração numérica e quadratura de Gauss-Legendre.....	168
ANEXO C – Procedimento de Sub-Elementação	169

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações iniciais

Este trabalho propõe a abordagem de dois tópicos amplamente difundidos no meio científico e de grande importância para o campo da engenharia de estruturas: o primeiro tópico, refere-se à aplicação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) na construção de modelos que abordem o processo de surgimento e crescimento de fissuras; o segundo, fundamenta-se no acoplamento com modelos da confiabilidade para consideração das incertezas presentes no fenômeno de propagação em domínios bidimensionais.

O MEC tem se destacado como uma importante ferramenta na análise de problemas da engenharia. Seu vasto campo de aplicação contribuiu significativamente para sua maior difusão no meio acadêmico, destacando-se problemas onde as grandezas de interesse apresentam elevados gradientes (tensões e deformações), além de problemas que tenham seu domínio estendido ao infinito ou semi-infinito (com destaque para problemas geomecânicos). A grande atratividade do método muito se deve a redução de dimensionalidade do problema, para o caso bidimensional (2D), apenas o contorno da geometria precisa ser discretizada, e para problemas tridimensionais (3D), apenas a superfície do domínio precisa ser discretizada. Isso significa que, comparado a métodos de domínio, a análise pelo MEC resulta em uma redução substancial nos dados requeridos para pré-processamento e um sistema de equações muito menor a ser resolvido. Além disso, a representação mais simples do sólido resulta em uma modelagem mais eficiente de regiões com alta concentração de tensões. Uma vez que, conforme necessário, a inserção de uma malha mais refinada nessas regiões, limita-se a uma dimensão a menos. A maior facilidade em representar elevados gradientes de tensão eficientemente têm sido uma das principais razões para sua maior difusão no campo da Mecânica da Fratura. De fato, a análise da propagação de fissuras tem sido a área especializada mais ativa de pesquisa do MEC, e provavelmente a mais explorada na indústria (ALIABADI, 2002). Por fim, a redução da dimensionalidade da malha verifica-se também, como vantagem no processo de propagação, uma vez que o processo de *remeshing* fica restrito apenas às novas superfícies das fissuras.

A análise de sólidos fraturados é um campo de estudos de grande relevância, reconhecido pelo número de abordagens distintas que envolvem a caracterização do estado limite último de resistência dos sólidos (ROCHA, 2010). Para este fim, A mecânica da fratura é uma ferramenta eficiente e robusta para representação realista da ruptura dos sólidos. Considerando-se que o

surgimento e crescimento das descontinuidades explicam o colapso do material. Uma grande parcela dessas contribuições concentra-se na aplicação de modelos numéricos para análise da propagação de fissuras, concentrando-se em aspectos determinísticos do comportamento de sólidos planos. A incorporação de incertezas inerentes ao modelo mecânico torna-se um problema fundamental para o tratamento probabilístico em estruturas complexas influenciadas pela aleatoriedade de seus parâmetros, uma vez que a consideração das incertezas no desenvolvimento de modelos numéricos conduz a uma abordagem mais realista da integridade estrutural do problema em análise.

A teoria da mecânica da fratura estabelece a relação entre o máximo carregamento atuante em um dado componente estrutural e o tamanho e posição da fissura pertencente a este componente (HUANG; ALIABADI, 2011). Na análise a partir de modelos de confiabilidade, o processo de propagação é considerado como um fenômeno aleatório e a teoria da confiabilidade estrutural define como incertezas presentes nas propriedades físicas, tamanho da fissura, configuração inicial da fissura e/ou carregamento atuantes afetam diretamente a integridade da estrutura.

1.2 Objetivos

O objetivo principal consiste no acoplamento entre algoritmos de confiabilidade com a formulação não linear do MEC dipolo para análise de propagação de fissuras. O segundo objetivo refere-se à implementação do Operador Tangente (OT), considerando-se três leis coesivas (linear, bilinear e exponencial).

1.3 Metodologia

O presente trabalho se insere no contexto da mecânica da fratura coesiva com a consideração de incertezas presentes no fenômeno de propagação em domínios bidimensionais. Classicamente utiliza-se a formulação dual do MEC para simulação do processo de fraturamento. Aqui será utilizada uma formulação alternativa que consiste na introdução de um campo de tensões iniciais e degeneração do termo de domínio presente na integral clássica do MEC ao longo da linha de crescimento da fissura. A necessidade de um menor número de equações algébricas para representação da ZPI em detrimento a outros métodos, se traduz em vantagem no ponto de vista computacional em ambas abordagens, determinística e principalmente a probabilística.

A primeira etapa consistiu na revisão bibliográfica de temas de interesse, como a formulação linear do MEC e tópicos da Confiabilidade Estrutural. Nesta etapa, foi também implementada, a formulação linear do MEC para problemas elastostáticos. Além disso, o acoplamento com modelos da confiabilidade também foi realizado. Por fim, a validação das implementações foi desenvolvida com exemplos que evidenciassem a eficiência do MEC em problemas que envolvessem concentração de tensões. A validação da formulação elástica foi proveniente de análises numéricas realizadas pelo MEF, utilizando-se o *software* ABAQUS.

Na etapa seguinte, foi feita uma revisão bibliográfica, bem como levantamento de artigos sobre assuntos mais específicos. Nesta etapa, buscou-se estudar a formulação não linear do MEC para problemas da mecânica da fratura coesiva em sólidos bidimensionais. Além disso, foi feita uma busca mais aprofundada de artigos que contemplassem a incorporação de incertezas durante o processo de propagação de fissuras. Para isto, as bases de dados *Web of Science* e *Scopus* foram utilizadas.

Em seguida, a implementação da formulação não linear do MEC baseada em dipolos de tensão foi realizada, para a análise de problemas da mecânica da fratura coesiva utilizando-se OC e OT na solução do sistema não linear. O comportamento não linear foi desenvolvido a partir da técnica de correções sucessivas do comportamento elástico da estrutura por meio de algoritmos incrementais e iterativos. Elementos isoparamétricos lineares foram utilizados para a discretização do contorno do problema e elementos descontínuos lineares para a discretização das fissuras.

A validação numérica da formulação proposta foi efetuada, mediante exemplos clássicos da literatura. Nesta etapa, foram testados desde exemplos simples da mecânica da fratura, e exemplos mais complexos que envolvessem múltiplas fissuras e modo misto I-II de sollicitação. Os exemplos extraídos da literatura foram confrontados com suas respostas analíticas ou experimentais.

No que diz respeito à análise probabilística, dois esquemas de acoplamento foram considerados. O primeiro refere-se à utilização do modelo de acoplamento direto (HLRF/FORM) na análise de confiabilidade, com os gradientes das funções limite obtidos numericamente, via diferenças finitas. Essa técnica aproxima a equação do estado limite por um hiperplano tangente à superfície de falha no ponto de projeto, o que pode conduzir a erros, principalmente quando a função limite é altamente não linear. Assim, a utilização do Método de simulação de Monte Carlo foi também considerada. As técnicas de simulação permitem a

solução de problemas altamente não lineares de forma simples e robusta. No entanto, o custo computacional passa a ser uma séria limitação. Desta forma, a introdução de ferramentas que possam reduzir o número de chamadas do modelo mecânico, é de grande importância dentro da confiabilidade estrutural.

Dente as técnicas de amostragem inteligente, a Amostragem por Hipercubo Latino é escolhida devido sua grande relevância no âmbito da confiabilidade de estruturas. Essa técnica tem por objetivo a geração de amostras mais esparsas, de modo que uma distribuição mais uniforme seja obtida. Desta forma, precisão satisfatória pode ser encontrada, na estimativa da probabilidade de falha, com uma quantidade menor de realizações do modelo numérico.

A inserção de rotinas de confiabilidade na análise de propagação de fissuras baseia-se no desenvolvimento de duas etapas, a primeira consiste na estimativa, via simulação, dos valores aleatórios de parâmetros de performance (inferência estatística). A segunda consiste na avaliação da influência de parâmetros de fratura coesiva no comportamento da estrutura. As formulações desenvolvidas neste trabalho foram implementadas em linguagem FORTRAN.

Todas as análises numéricas foram realizadas com um computador pessoal com as especificações: Intel ® Core™ i7-6500U CPU, 2.5GHz com 4 cores e 4 Processadores lógicos e 16 GB de RAM.

1.4 Estrutura do trabalho

Os demais capítulos deste trabalho estão organizados da seguinte maneira,

No capítulo 2, realiza-se uma breve revisão bibliográfica acerca dos principais tópicos abordados neste trabalho.

No capítulo 3, apresenta-se a formulação do MEC para elasticidade linear com suas representações integrais e correspondentes equações algébricas. É também abordada a obtenção de grandezas internas, além de técnicas computacionais como Método da Reciprocidade Múltipla (MRM). Por fim apresenta-se um exemplo numérico para validação da formulação do MEC elástico linear.

No capítulo 4 discutem-se alguns modelos de confiabilidade estrutural, como o método de transformação FORM e o método de simulação de Monte Carlo, além da definição de conceitos essenciais como probabilidade de falha, índice de confiabilidade e ponto de projeto. Por fim apresentam-se algoritmos para busca do ponto de projeto e aplicações.

A análise de propagação de fissuras com a apresentação do modelo de fissuras fictícias proposto por Hillerborg *et al.* (1976) é abordada no capítulo 5, com a introdução da formulação do MEC para análise da mecânica da fratura baseando-se na imposição de um campo de tensões iniciais caracterizando a zona de descontinuidade (fissura). Por fim, apresentam-se aplicações para validação da implementação proposta.

No capítulo 6 é apresentado o acoplamento entre o MEC e modelos de confiabilidade na análise elástico linear, e na análise não linear. Neste capítulo apresentam-se fluxogramas de rotinas importantes, além das formas de acoplamento utilizadas. Por fim são mostrados exemplos objetivando-se avaliar o acoplamento proposto.

O capítulo 7 trata de conclusões finais a cerca dos assuntos abordados, com as possibilidades de extensão para futuros trabalhos.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A seguir, apresenta-se uma breve revisão do estado da arte para cada tópico abordado neste trabalho.

2.1 Método dos Elementos de Contorno

A aplicação de técnicas que envolvam a discretização do domínio do problema através de elementos ou células é bem estabelecida no meio acadêmico, com destaque para o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método das Diferenças Finitas (MDF). Tais técnicas são classificadas como métodos de domínio (BREBBIA, 1978), e uma alternativa, consiste na utilização de funções de interpolação que satisfaçam as equações de domínio, mas não nas condições de contorno do problema. O MEC (Método dos Elementos de Contorno) é o principal representante deste campo de estudos e sua origem se deve aos trabalhos que surgiram em meados da década de 1960, com a aplicação de integrais de contorno para problemas de potencial e de análise de tensão. O problema potencial 2D foi primeiro formulado por Jaswon (1963), e em 1967, Rizzo apresentou uma formulação direta para o tratamento de equações integrais com aplicações na elasticidade linear bidimensional. Alguns autores abordaram esse campo de estudos, com destaque para os trabalhos de Cruse (1969, 1973 e 1974), que estendeu a formulação em duas dimensões para problemas tridimensionais da elasticidade linear, e Rizzo e Shippy (1968) que apresentaram o emprego de sub-regiões para o tratamento de domínios não homogêneos.

Um progresso ainda maior foi observado durante a década de 70, com o destaque para os trabalhos de Lachat (1975) e Brebbia (1978a, 1978b e 1984). Consta que esse último apresentou o nome de “Método dos Elementos de Contorno” pela primeira vez, contribuindo com o início de uma maior difusão do método em vários centros de pesquisa.

O MEC destaca-se como uma poderosa alternativa ao Método dos Elementos Finitos, particularmente em casos que lidam com concentração de tensões e/ou problemas cujo domínio seja estendido ao espaço semi-infinito ou infinito. Além disso, como já mencionado, a redução da dimensionalidade se torna um grande atrativo principalmente para problemas tridimensionais (3D), com a redução dos dados requeridos para entrada. Um dos seus grandes diferenciais refere-se à necessidade de uma solução fundamental, que segundo Becker (1992), reflete-se como um positivo diferencial às demais técnicas por proporcionar uma maior versatilidade e precisão ao

método.

2.2 Método dos Elementos de Contorno na Mecânica da Fratura

A análise do fraturamento em sólidos planos representa um campo de estudos bastante desafiador, uma vez que a presença de fissuras em estruturas leva à necessidade de uma análise mais aprofundada a cerca dos fenômenos que envolvem o seu surgimento e sua forma de propagação. Alguns trabalhos apresentaram formas alternativas para modelagem de estruturas com fissuras, uma dessas alternativas diz respeito à utilização da técnica de sub-regiões para a análise do crescimento de fissuras entre dois contornos (BLANDFORD *et al.*, 1981). Outra importante alternativa é chamada de método de descontinuidade de deslocamentos, cuja abordagem consiste na introdução de parâmetros desconhecidos através da diferença de deslocamentos entre as superfícies da fissura (CROUCH, 1976).

Segundo Portela (1993), a introdução de uma equação integral de contorno em uma das superfícies da fissura deve-se a Watson (1988) para elasticidade linear e Gray e Giles (1988) para problemas de potencial. O avanço dessa estratégia em termos de equações integrais de deslocamentos e de forças de superfícies foi proporcionada por Hong e Chen (1988), servindo como base teórica para o que hoje é conhecido como *Dual Boundary Element Method - DBEM*

Destacam-se alguns trabalhos no uso do DBEM: Portela (1992), Portela *et al.* (1992, 1993), Mi (1996), Mi e Aliabadi (1992a, 1992b, 1994a, 1994b e 1995), Mellings e Aliabadi (1994), Sollero e Aliabadi (1994), Saleh e Aliabadi (1995), Saleh (1997), além dos trabalhos de Kzam (2009) e Leonel *et al.* (2010, 2011a, 2011b e 2012).

Outra metodologia para análise do processo de fratura é baseada no emprego de um campo de tensões iniciais para a correção das tensões coesivas, sendo formulado a partir da definição de dipolos. Seguindo esta linha de pesquisa, deve-se destacar o trabalho de Rocha (1988) que serviu como base inicial no que se refere ao uso dos dipolos na representação de problemas com descontinuidades. O autor estudou a segurança de escavações em maciços de solos com presença de descontinuidades, mostrando que a análise de meios com descontinuidades poderia ser realizada, com a introdução de forças virtuais auto-equilibradas. Neste sentido, Lopes Jr. (1996) apresentou uma formulação para modelar o comportamento não linear das estruturas através de sucessivas correções do comportamento elástico linear partindo-se da combinação de algoritmos incrementais e iterativos. Neste trabalho, considerou-se o modelo de fissura fictícia proposto por

Hillerborg *et al.* (1976).

Barbirato (1999) expandiu os conceitos inicialmente propostos por Lopes Jr. (1996) para o estudo tridimensional da mecânica da fratura aplicada a problemas dinâmicos. O autor empregou o conceito de dipolos na análise de modelos da fratura não linear e a integração temporal foi realizada através dos algoritmos de Newmark e Houbolt.

Oliveira (2013) apresentou contribuições a esse campo de estudos na análise da degradação mecânica de estruturas constituídas por materiais quase frágeis com a implementação do operador tangente (OT), objetivando-se acelerar o sistema de equações não lineares obtidos a partir da formulação do MEC considerando o campo de tensões iniciais.

Alguns trabalhos mais recentes devem ser mencionados, por apresentarem contribuições para esse campo de estudos. Cordeiro *et al.* (2016) apresentou uma análise da propagação de fissuras em estruturas de madeira via MEC Dual e OT para resolução do sistema não linear, Cordeiro e Leonel (2018, 2019) desenvolveram estudos com ênfase no MEC Dual 3D isogeométrico em problemas da mecânica da fratura e fenômenos de fadiga, Peixoto *et al.* (2018) apresentou uma formulação implícita do MEC aplicada a problemas bidimensionais com ênfase na mecânica da fratura coesiva e considerando fortes descontinuidades, CSDA (Continuum Strong Discontinuity Approach) MEC, Andrade e Leonel (2019) apresentaram um estudo da propagação de múltiplas fissuras sob fadiga em meios não homogêneos via MEC Dual.

2.3 Confiabilidade Estrutural

No campo das engenharias, decisões técnicas fazem parte de um necessário processo para o planejamento e execução de problemas estruturais, de fato, uma das principais responsabilidades de um engenheiro diz respeito à tomada de decisões. Tais decisões devem ser aplicadas baseando-se em informações disponíveis, contendo inevitavelmente incertezas presentes em parâmetros de projeto ou até mesmo em fatores humanos. Sobre tais aspectos, a análise de risco torna-se indispensável, e por meio da confiabilidade estrutural, incertezas podem ser adequadamente incorporadas e seus efeitos quantificados. Desta forma, o risco associado a cada tomada de decisão pode ser avaliado, e se necessário, medidas de prevenção e mitigação de falhas são tomadas para garantir um bom desempenho estrutural.

Podem ser citados alguns trabalhos que serviram como base para a evolução dos conceitos de confiabilidade ao ponto em que se encontra atualmente. Destacam-se os trabalhos de Mayer

(1926), Wierzbick (1936) e Streletzkii (1947) que apresentaram as primeiras formulações matemáticas para problemas de segurança estrutural. Freudenthal (1947) evoluiu os conceitos apresentados até então com a proposição de que a probabilidade de falha deva ser calculada por meio da integração de uma região caracterizada pelas distribuições de probabilidade das variáveis, definida como domínio de falha. Segundo Nowak e Collins (2000), a análise de confiabilidade em problemas práticos não era possível até os pioneiros trabalhos de Cornell (1969) e Hasofer e Lind (1974). Cornell (1969) apresentou o índice de confiabilidade em segundo momento e Hasofer e Lind (1974) propuseram que a função estado limite fosse avaliada no ponto de projeto, e o índice de confiabilidade poderia ser obtido através da distância da origem do sistema de coordenadas no espaço normal padrão até o ponto de projeto localizado na superfície de falha da estrutura. Rackwitz e Fiessler (1978) propuseram um procedimento que considerava variáveis com distribuição não gaussiana, com as transformações em variáveis normais equivalentes.

O índice de confiabilidade proposto por Hasofer e Lind (1974) para casos com variáveis gaussianas correlacionadas e o método de confiabilidade de primeira ordem, para casos com variáveis não normais correlacionadas é bem explanado nos trabalhos de Ditlevsen (1981), Shinozuka (1983), Ang e Tang (1984), Madsen *et al.* (1986), Melchers (1999), Haldar e Mahadevan (1999), Baecher e Christian (2003), Low e Tang (2007), Li e Low (2010) e Beck (2019).

No que diz respeito à mecânica da fratura, sabe-se que o acoplamento entre modelos de confiabilidade e modelos para fraturamento em sólidos é uma reconhecida ferramenta na avaliação de parâmetros de segurança em problemas estruturais. A confiabilidade fornece a teoria necessária para quantificação de incertezas presentes, e as derivadas dos fatores de intensidade de tensão (FIT) são quase sempre necessárias na avaliação da probabilidade de falha do início do fraturamento e/ou instabilidade de estruturas com fissuras. Importantes trabalhos como ênfase no acoplamento entre a mecânica da fratura e a confiabilidade estrutural podem ser mencionados: Grigoriu *et al.* (1990), Provan (1987), Besterfield *et al.* (1990 e 1991), Rahman (1995 e 2001), Rahman e Kim (2000), Chen *et al.* (2001). O modelo de fratura coesiva com a consideração de modelos de confiabilidade foi bem empregado nos trabalhos de Espinosa e Zavattieri (2003), Zhou e Molinari (2004), Tomar e Zhou (2005), Most (2005), Pearce e Kaczmarczyk (2008), Bruggi *et al.* (2008), Yang e Xu (2008) e Yang *et al.* (2009), os três últimos com a caracterização dos parâmetros de fratura coesiva com campo de distribuição do

tipo Weibull. Mais recentemente, Long *et al.* (2019) apresentou um estudo no âmbito da mecânica da fratura probabilística na análise de estruturas tridimensionais considerando as propriedades de fraturamento com variação espacial via MEF.

2.4 Método dos Elementos de Contorno na Confiabilidade Estrutural

Na literatura, a aplicação do MEC em análise probabilística de estruturas, lida, em sua maioria com a aleatoriedade de carregamentos externos e condições de contorno. Alguns destes trabalhos podem ser citados: Burczilisky, 1985, Cheng e Lafe, 1991, Kaljević e Saigal, 1993 aplicaram o MEC estocástico na resolução de problemas de potencial. Duas distintas formulações para o tratamento de problemas considerando a aleatoriedade das condições de contorno foram apresentadas por Burczyński (1985) utilizando o MEC direto. Kaljević e Saigal (1995) apresentaram a formulação por elementos de contorno no tratamento de problemas planos com potencial em domínios homogêneos e Drewniak (1985) analisou problemas com condução de calor através da formulação do MEC estocástico.

Kaljević e Saigal (1993) e Ettouney *et al.* (1989) aplicaram o MEC estocástico na análise de problemas estruturais em estado plano e meio elástico linear. O primeiro utilizou o método para análise de problemas de valor de contorno em meio bidimensional na elasticidade linear considerando a aleatoriedade na geometria do problema (a) e a aleatoriedade nos parâmetros dos materiais (b). O último ilustrou a utilidade da abordagem probabilística para aplicações da engenharia utilizando simples procedimentos de perturbação na resolução de problemas na análise estrutural, considerando o caráter aleatório das propriedades dos materiais: módulo de elasticidade (E) e coeficiente de Poisson (ν)

A Mecânica da Fratura probabilística caracteriza-se como uma ferramenta que permite a avaliação mais realista de problemas sobre fraturamento, por incorporar as incertezas presentes nos parâmetros estruturais. Os trabalhos que se inserem neste campo, em sua maioria, lidam com as incertezas presentes nas propriedades dos materiais, condições de contorno, carregamentos e/ou tamanho das fissuras. Dentre estes trabalhos, pode ser mencionado o estudo de Lu (1992), tendo este apresentado um problema em meio elástico linear com a presença de uma única fissura e com a consideração da aleatoriedade do carregamento imposto e do tamanho da fissura. Leonel *et al.* (2010, 2011a e 2012), apresentou o acoplamento entre modelos de confiabilidade estrutural e o MEC Dual na análise de propagação de fissuras no âmbito da MFEL e em

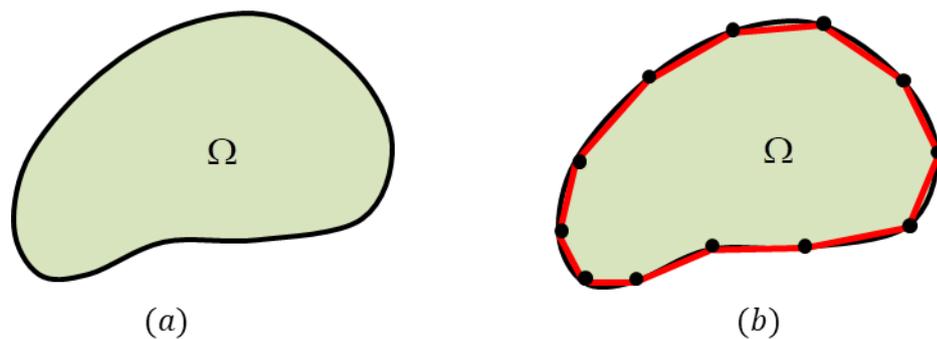
problemas de fadiga. Huang e Aliabadi (2011) apresentaram a formulação do MEC Dual acoplado a modelos de confiabilidade na análise de problemas de fratura elástica linear.

Nesse contexto, é importante mencionar trabalhos mais recentes, que apresentam contribuições para esse campo de estudo. Su e Xu (2015) apresentaram uma análise baseada em confiabilidade de problemas de flexão em placas de Reissner via MEC estocástico. Cordeiro *et al.* (2017) apresentou um procedimento estocástico para quantificação de parâmetros do concreto por meio de duas abordagens numéricas: a formulação do MEC para mecânica da fratura não linear e inferência Bayesiana para ajuste probabilístico. Oliveira *et al.* (2018) apresentou um modelo mecano-probabilístico para análise de fluência em concreto via MEC. Destaca-se também o trabalho de Morse *et al.* (2018), tendo este apresentado uma nova metodologia para inferência estatística para representação da propagação de fissuras sob fadiga no âmbito na MFEL via MEC Dual. Já nos trabalhos de Morse *et al.* (2019a e 2019b), uma nova metodologia para análise baseada em confiabilidade via MEC Dual com o método de diferenciação implícita foi apresentada. As análises baseadas em confiabilidade foram conduzidas com o método de simulação de Monte Carlo e o método de primeira ordem FORM.

3 FORMULAÇÃO LINEAR DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Avanços recentes no campo computacional permitiram uma maior difusão de técnicas numéricas para análise de problemas da engenharia. Dentre tais técnicas, destaca-se o Método dos Elementos de Contorno (MEC). O MEC é uma ferramenta numérica que se caracteriza pela não necessidade de definição de malhas sobre o domínio em problemas clássicos da elastoelasticidade. Tal estratégia torna-se uma elegante e econômica alternativa às técnicas chamadas de métodos de “domínio”. Algumas áreas de atuação podem ser citadas: mecânica dos fluidos, elasticidade linear ou não linear, mecânica da fratura, dinâmica das estruturas, eletromagnetismo, acústica, dentre outras. A discretização da geometria do contorno através de elementos unidimensionais é apresentada na Figura 1.

Figura 1. Geometria real (a) Discretização por elementos de contorno lineares (b).



Fonte: autor (2020).

Em geral, o MEC pode ser classificado em duas formas distintas. Na primeira, definida como abordagem indireta as incógnitas do problema não são as grandezas de interesse (deslocamentos ou forças de superfície), mas sim, funções de densidade fictícias ou funções de tensões (BECKER, 1992). A depender do tipo de campo vetorial adotado como contínuo, caracterizam-se como: *source method* (deslocamentos contínuos) e *dipole method* (forças de superfície contínuas). Na segunda abordagem, definida como método dos elementos de contorno direto, as grandezas físicas de interesse, como deslocamentos e forças de superfície, são obtidas diretamente. O presente trabalho considera em seu desenvolvimento a segunda abordagem proposta.

3.1 Solução Fundamental

Embora diversas soluções possam ser aplicadas, aqui a solução de Kelvin (1848) é utilizada. Inicialmente faz-se necessária a definição do meio em elástico linear com uma força unitária aplicada no ponto s (ponto fonte) ao longo da direção i e mede-se o efeito desta carga unitária no ponto q . Em seguida, na equação de equilíbrio, substitui-se a parcela referente à força de volume b_i pela função Delta de Dirac,

$$b_i(q) = \delta(s, q)c_i(s) \quad (3.1)$$

em que $c_i(s)$ é o cosseno do ângulo entre a força e o eixo. Reescrevendo-se tomando os referentes cuidados com a função delta de Kronecker δ_{ik} . A equação de equilíbrio (A.1a,b), pode então ser escrita da forma:

$$\sigma_{kij,j}^*(s, q) + \delta(s, q)\delta_{ki} = 0 \quad (3.2)$$

sendo $\sigma^*(s, q)$ o tensor de tensões no estado fundamental. A partir da equação (A.4), e da relação deformação-deslocamento (A.3), e derivando-se com relação á x_j .

$$\frac{1}{1-2\nu}u_{kj,ij}^* + u_{ki,jj}^* + \frac{\delta(s, q)\delta_{ki}}{G} = 0 \quad (3.3)$$

em que $u^*(s, q)$ representa o campo de deslocamentos no estado fundamental. As soluções para a equação (3.3), em ambos os casos bi e tridimensional, são:

$$u_{ij}^*(s, q) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)G}[(3-4\nu)\ln\left(\frac{1}{r}\right)\delta_{ij} + r_i r_j] \quad (2-D)$$

$$u_{ij}^*(s, q) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr}[(3-4\nu)\delta_{ij} + r_i r_j] \quad (3-D) \quad (3.4)$$

Derivando-se a equação (3.4), para o caso 2-D, com respeito a x_k e substituindo-se na relação deformação-deslocamento (A.3), obtém-se:

$$\varepsilon_{ijk}^*(s, q) = \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)r}[(1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ik}) - r_{,i}\delta_{jk} + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \quad (3.5)$$

De forma geral:

$$\varepsilon_{ijk}^*(s, q) = \frac{-1}{8\alpha\pi G(1-\nu)r^\alpha}[(1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ik}) - r_{,i}\delta_{jk} + \beta r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \quad (3.6)$$

onde para o caso 2D $\rightarrow \alpha = 1, \beta = 2$, e para o caso 3D $\rightarrow \alpha = 2, \beta = 3$.

Aplicando-se a equação (3.6) na lei de Hooke:

$$\sigma_{ijk}^*(s, q) = \frac{-1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} [(1-2\nu)(r_k \delta_{ij} + r_j \delta_{ik} - r_i \delta_{jk}) + \beta r_i r_j r_{,k}] \quad (3.7)$$

Por fim, aplicando-se na fórmula de Cauchy, obtém-se na forma geral:

$$P_{ij}^*(s, q) = \frac{-1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} \{[(1-2\nu)\delta_{ij} + \beta r_i r_{,j}]r_{,n} - (1-2\nu)(r_i n_j - r_j n_i)\} \quad (3.8)$$

3.2 Equações integrais de Contorno

Existem três principais maneiras de obter a formulação do MEC, seja por meio do método dos resíduos ponderados, através do teorema da reciprocidade de Betti ou até mesmo utilizando uma formulação variacional semelhante à utilizada no MEF. Embora o procedimento via resíduos ponderados seja amplamente utilizado no meio acadêmico, adota-se aqui a formulação baseada no teorema da reciprocidade de Betti, proposto por Somigliana (1886). Seja um domínio Ω , limitado por um contorno Γ , submetido a dois estados de carregamento: o primeiro o problema em estudo e o segundo, o problema de Kelvin. A partir do teorema da reciprocidade de Betti:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk}(q) \varepsilon_{ijk}^*(s, q) d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(s, q) \varepsilon_{jk}(q) d\Omega \quad (3.9)$$

em que σ_{jk} e ε_{jk} são as componentes de tensão e deformação e σ_{jk}^* e ε_{jk}^* , são as componentes do problema de Kelvin. Considerando-se a relação deformação-deslocamento, equação (A.3), pode-se chegar à seguinte expressão partindo-se de (3.9).

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} u_{ij,k}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^* u_{j,k} d\Omega \quad (3.10)$$

Integrando-se em ambos os termos por partes, chega-se a:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{jk,k} u_{ij}^* d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma_{jk} u_{ij}^* n_k d\Gamma = -\int_{\Omega} \sigma_{ijk,k}^* u_j d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma_{ijk}^* u_j n_k d\Gamma \quad (3.11)$$

Substituindo-se a equação (3.11) na expressão de Cauchy, equação (A.1a,b), no problema real e no fundamental, obtém-se:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{jk,k} u_{ij}^* d\Omega + \int_{\Gamma} P_j u_{ij}^* d\Gamma = -\int_{\Omega} \sigma_{ijk,k}^* u_j d\Omega + \int_{\Gamma} u_j P_{ij}^* d\Gamma \quad (3.12)$$

acoplado a equação de equilíbrio tanto do problema real quanto do problema fundamental:

$$\int_{\Omega} b_j u_{ij}^* d\Omega + \int_{\Gamma} P_j u_{ij}^* d\Gamma = \int_{\Omega} \delta(s, q) \delta_{ij} u_j d\Omega + \int_{\Gamma} u_j P_{ij}^* d\Gamma \quad (3.13)$$

Resolvendo a integral $\delta_{ij} u_j = u_j \int \delta(s, q) d\Omega = \delta_{ij} u_j$, sabendo-se que $\delta_{ij} u_j = u_i$ e lembrando-se que para $s \notin \Omega \rightarrow u_i(s) = 0$:

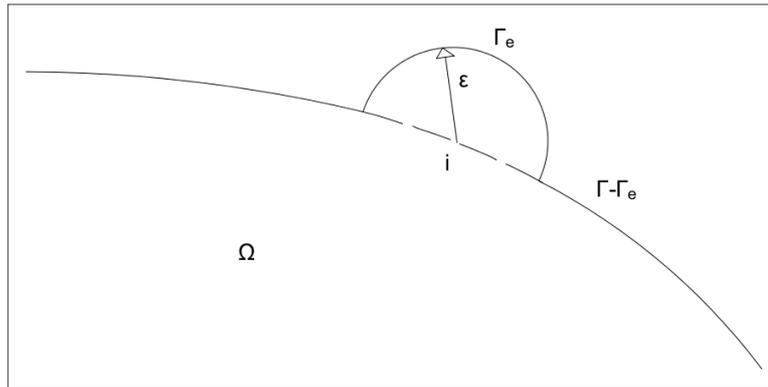
$$u_i(s) = -\int_{\Gamma} P_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, q) P_j(q) d\Gamma + \int_{\Omega} b_j(q) u_{ij}^*(s, q) d\Omega \quad (3.14)$$

A equação de Somigliana, definida na equação (3.14), representa o campo de deslocamentos em um ponto de colocação s . A partir da Lei de Hooke e da equação Somigliana (3.14), obtêm-se a equação integral de tensões para pontos internos (3.15):

$$\begin{aligned} & -\int_{\Gamma} \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} P_{ik,l}^* + G(P_{ik,j}^* + P_{jk,i}^*) \right] u_k d\Gamma \\ \sigma_{ij}(s) = & + \int_{\Gamma} \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} u_{ik,l}^* + G(u_{ik,j}^* + u_{jk,i}^*) \right] P_k d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma} \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} u_{ik,l}^* + G(u_{ik,j}^* + u_{jk,i}^*) \right] b_k d\Gamma \end{aligned} \quad (3.15)$$

A identidade de Somigliana (3.14) permite a obtenção dos valores de deslocamentos em qualquer ponto do domínio, a partir de valores de forças e deslocamentos no contorno, das forças que atuam no domínio (caso existam) e da solução fundamental. Como a identidade Somigliana é válida apenas para pontos no domínio, a representação integral dos deslocamentos no contorno é necessária. Para tal, considera-se a existência de uma semicircunferência de raio ε centrada no ponto do contorno suave i , Figura 2. Fazendo-se o raio tender a zero, chega-se à equação de Somigliana modificada para o contorno:

Figura 2. Solução para singularidade em ponto fonte no contorno.



Fonte: autor (2020).

$$c_{ij}(s) u_j(s) = -\int_{\Gamma} P_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, q) P_j(q) d\Gamma + \int_{\Omega} b_j(q) u_{ij}^*(s, q) d\Omega \quad (3.16)$$

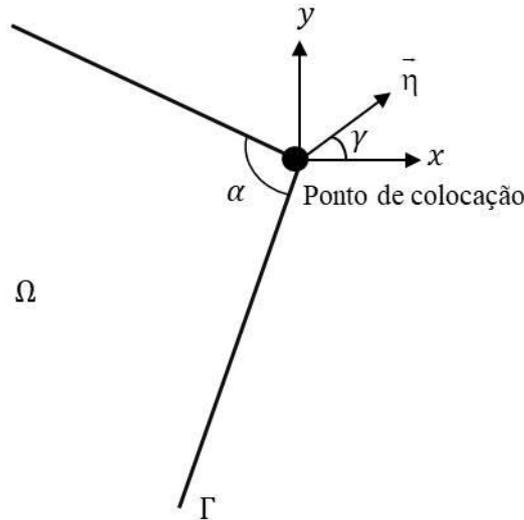
Para contorno suave $c_{ij}(s)$ assume o valor,

$$c_{ij}(s) u_j(s) = \frac{1}{2} \delta_{ij} u_j(s) \quad (3.17)$$

Para contorno com angulosidade, $c_{ij}(s)$ assume o valor,

$$c_{ij}(s)u_j(s) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\cos 2\gamma \operatorname{sen}\alpha}{4\pi(1-\nu)} & \frac{\operatorname{sen}2\gamma \operatorname{sen}\alpha}{4\pi(1-\nu)} \\ \frac{\operatorname{sen}2\gamma \operatorname{sen}\alpha}{4\pi(1-\nu)} & \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\cos 2\gamma \operatorname{sen}\alpha}{4\pi(1-\nu)} \end{bmatrix} u_j(s) \quad (3.18)$$

Figura 3. Ponto de colocação em contorno anguloso.



Fonte: autor (2020).

3.3 Método dos Elementos de Contorno

Foi apresentada a formulação baseada nas equações integrais de contorno, as quais foram desenvolvidas a partir do teorema de reciprocidade de Betti proposto por Somigliana (1886), permitindo então a análise de sólidos elásticos bidimensionais ou tridimensionais, isotrópicos e homogêneos. Para sua utilização prática, é necessária a transformação da formulação integral de contorno em equações algébricas, o que consolida sua forma discretizada, obtendo-se um sistema de equações algébricas linear que será resolvido após aplicação das condições de contorno do problema.

3.3.1 Discretização

No presente trabalho, o contorno será discretizado através de elementos com aproximação linear. Parte-se então da forma discretizada da equação (3.16) considerando força de domínio:

$$[c][\phi]^i \{u\}^i + \sum_{j=1}^{Ne} \left\{ \int_{\Gamma_j} [p^*] \{u\} d\Gamma_j \right\} = \sum_{j=1}^{Ne} \left\{ \int_{\Gamma_j} [u^*] \{p\} d\Gamma_j \right\} + \int_{\Omega} u^* b_k d\Omega \quad (3.19)$$

Os deslocamentos e forças de superfícies em cada elemento são escritos em função de seus valores nodais, 3.20 e 3.21.

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

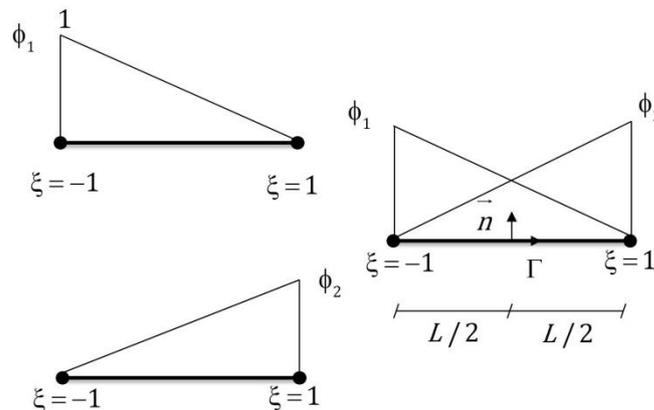
$$\{p\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

As funções de interpolação ϕ_1 e ϕ_2 são mapeadas no espaço adimensional definido de $[-1,1]$, e expressas como:

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1-\xi) \\ \phi_2(\xi) &= \frac{1}{2}(1+\xi) \end{aligned} \quad (3.22)$$

As duas funções são empregadas em termos da coordenada homogênea ξ , como apresentado na Figura 4:

Figura 4. Coordenadas adimensionais e funções de aproximação.



Fonte: autor (2020)

A avaliação da integral referente às forças de volume será apresentada na seção 3.7, e dá origem ao vetor de cargas independentes nas duas direções globais, $\{F_m\}_{2n,1}$. Assim a equação (3.19) pode então ser reescrita como em (3.23).

$$[c][\phi]^i \{u\}^i + \sum_{j=1}^{Ne} [H_w]^{ij} \{u\}^j = \sum_{j=1}^{Ne} [G_w]^{ij} \{p\}^j + \{F_m\} \quad (3.23)$$

Esta equação relaciona os valores de u nos pontos nodais ‘ i ’ com os valores de u e p em todos os pontos do contorno, incluindo ‘ i ’, sendo:

$$[\bar{H}_w] = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma} p_{11}^* \phi_1 d\Gamma & \int_{\Gamma} p_{12}^* \phi_1 d\Gamma & \int_{\Gamma} p_{11}^* \phi_2 d\Gamma & \int_{\Gamma} p_{12}^* \phi_2 d\Gamma \\ \int_{\Gamma} p_{21}^* \phi_1 d\Gamma & \int_{\Gamma} p_{22}^* \phi_1 d\Gamma & \int_{\Gamma} p_{21}^* \phi_2 d\Gamma & \int_{\Gamma} p_{22}^* \phi_2 d\Gamma \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$[\bar{G}_w] = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma} u_{11}^* \phi_1 d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{12}^* \phi_1 d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{11}^* \phi_2 d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{12}^* \phi_2 d\Gamma \\ \int_{\Gamma} u_{21}^* \phi_1 d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{22}^* \phi_1 d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{21}^* \phi_2 d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{22}^* \phi_2 d\Gamma \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Uma vez escrita a equação (3.24) e a (3.25) para cada ponto ‘ i ’ obtendo $2 \times n$ equações com n nós, pode-se reescrever a equação (3.23) para cada ponto do contorno, obtendo-se um sistema de equações lineares, considerando-se,

$$\begin{aligned} H_w &= [\bar{H}_w]^{ij} \text{ se } i \neq j \\ H_w &= [\bar{H}_w]^{ij} + [c][\phi]^i \text{ se } i = j \end{aligned} \quad (3.26)$$

A equação (3.23) pode ser reescrita de forma mais compacta:

$$\sum_{j=1}^{Ne} [H_w]^{ij} \{u\}^j = \sum_{j=1}^{Ne} [G_w]^{ij} \{p\}^j + \{F_m\} \quad (3.27)$$

Sabe-se que o número de graus de liberdade por nó é dois, referente a dois de deslocamentos e 2 de forças de superfície, no entanto, metade destes valores são impostos nas condições de contorno, desta forma, a solução do sistema geral demanda de $2n$ equações. Escrevendo-se as equações para todos os pontos de colocação do modelo, resulta em um sistema com ordem igual a duas vezes o número total de nós da malha:

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} + \{F_m\} \quad (3.28)$$

As integrais podem ser resolvidas numericamente, na maioria das vezes, sem um esforço adicional, contudo, é conhecido que a colocação de um ponto fonte muito próximo ao contorno do problema pode ocasionar respostas instáveis do problema. Para este caso, recorre-se à técnica de sub-elementação, a fim de se minimizar o erro de tal integração.

Outro caso que influencia a estabilidade da resposta numérica diz respeito ao problema de singularidade que acontece quando o ponto fonte está sobre o mesmo elemento integrado, introduzindo-se um problema na resolução das integrais singulares que se trata do valor principal de Cauchy. Neste trabalho, optou-se por avaliar as integrais singulares analiticamente, as quase singulares (ponto fonte muito próximo do elemento de integração) com sub-elementação (Anexo B) e para os demais casos com a convencional quadratura de Gauss-Legendre.

Após as aplicações das condições de contorno do problema, é conveniente rearranjar as matrizes [H] e [G] de modo que os valores prescritos fiquem no primeiro membro da equação (3.28) e os valores desconhecidos no segundo membro da equação (3.28). Após esse procedimento, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad (3.29)$$

Admitindo-se a possibilidade de ocorrência do movimento de corpo rígido, com forças de superfície nulas, a equação (3.29) é reescrita como,

$$[H]\{U\} = 0 \quad (3.30)$$

em que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_p} H_{2j-1} &= 0 \\ \sum_{j=1}^{N_p} H_{2j} &= 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

3.4 Análise em pontos internos

Os deslocamentos e tensões em pontos internos podem ser determinados a partir da identidade Somigliana em função dos deslocamentos e forças de contorno. Reescrevendo-se a equação Somigliana (1886) em sua forma discreta para um ponto interno P, obtém-se:

$$\begin{aligned} \{u\}^P &= -\sum_{j=1}^{ne} [\overline{H}_w]^{pj} \{u\}_n^j + \sum_{j=1}^{ne} [\overline{G}_w]^{pj} \{p\}_n^j \\ \{\sigma\}^P &= \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix}^P = \sum_{j=1}^{ne} [D]^{ijk} \{p\}_n^k - \sum_{j=1}^{ne} [S]^{ijk} \{u\}_n^k \end{aligned} \quad (3.32)$$

nas quais $\{u\}^P$ representa os deslocamentos em um ponto interno ‘p’, e os termos $[D]^{ijk}$ e $[S]^{ijk}$

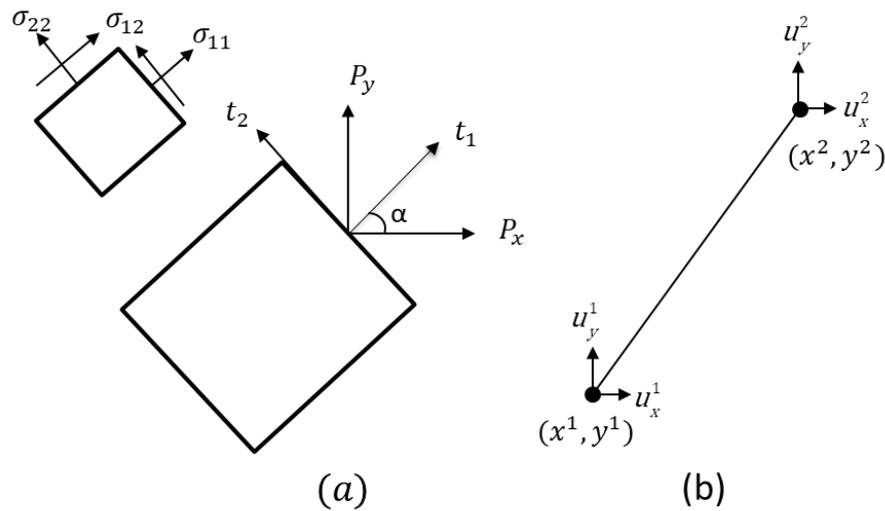
são expressos como em (3.33).

$$\begin{aligned}
 [D]^{ijk} &= \int_{\Gamma} \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{ (1-2\nu)[r_{,k}\delta_{ij} + r_{,i}\delta_{jk} - r_{,i}\delta_{jk}] + 2r_{,i}r_{,k}r_{,j} \} d\Gamma \\
 [S]^{ijk} &= \int_{\Gamma} \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} \{ 2r_{,n}[(1-2\nu)\delta_{jk}r_{,i}] - 4r_{,i}r_{,k}r_{,j} + 2\nu[n_jr_{,k}r_{,i} + n_kr_{,j}r_{,i}] \\
 &\quad + (1-2\nu)[n_i r_{,j}r_{,k} + n_k\delta_{ji} + n_j\delta_{ki}] - (1-4\nu)n_i\delta_{jk} \} d\Gamma
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

3.5 Tensões no Contorno

No presente trabalho as tensões no contorno serão calculadas a partir dos deslocamentos e forças de superfície obtidas no contorno. Define-se um sistema local de coordenadas nos pontos do contorno, tal como é apresentado na Figura 5.

Figura 5. Representação dos componentes locais e cartesianos das forças de superfície (a) Deslocamentos e coordenadas nodais de um elemento (b).



Fonte: autor (2020).

Os valores das forças de superfície no sistema de coordenadas local podem ser determinados a partir:

$$\begin{aligned}
 t_1 &= p_x \cos \alpha + p_y \operatorname{sen} \alpha \\
 t_2 &= -p_x \operatorname{sen} \alpha + p_y \cos \alpha
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

As tensões no sistema local são:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= t_1, \\
\sigma_{22} &= \left(\frac{E}{1-\nu^2}\right)\varepsilon_{22} + \left(\frac{\nu}{1-\nu}\right)\sigma_{11}, \\
\sigma_{12} &= t_2,
\end{aligned} \tag{3.35}$$

sendo ε_{22} a deformação tangencial, e possível de ser determinada por meio de:

$$\varepsilon_{22} = \frac{(u_x^2 - u_x^1)(x^2 - x^1) + (u_y^2 - u_y^1)(y^2 - y^1)}{l^2} \tag{3.36}$$

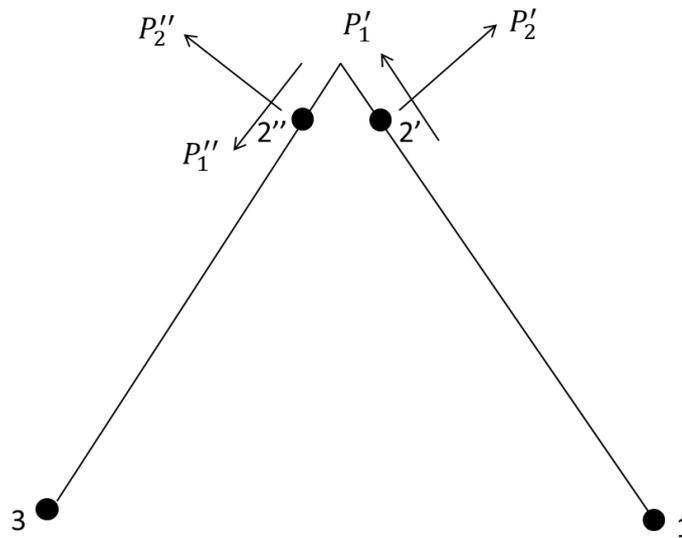
sendo l o comprimento do elemento. As tensões na direção global podem ser determinadas rotacionando na direção horária a equação (3.35).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) & -\sin(2\alpha) & \sin^2(\alpha) \\ \frac{\sin(2\alpha)}{2} & \cos(2\alpha) & -\frac{\sin(2\alpha)}{2} \\ \sin^2(\alpha) & \sin(2\alpha) & \cos^2(\alpha) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \tau_{12} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} \tag{3.37}$$

3.6 Descontinuidade em pontos de canto

Em problemas planos, quando um dos nós está localizado em um contorno não suave, ou seja, existe uma diferença de angulosidade entre dois lados que se encontram, uma descontinuidade em força de superfície é esperada de acontecer. Uma maneira de contornar esse problema consiste na utilização de elementos descontínuos, Figura 6. No emprego de problemas com singularidades, como na mecânica da fratura, os resultados convergem adequadamente para a solução esperada. (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1989). Além disso, nas formulações utilizadas, elementos descontínuos são necessários para garantir a continuidade no campo de deslocamentos.

Figura 6. Esquema para elementos descontínuos.



Fonte: Adaptado de Brebbia e Dominguez (1992).

3.7 Forças de domínio

Alguns problemas da engenharia dependem de forças que atuam no volume de um corpo (Forças de volume), e suas presenças são consideradas com integrais definidas sobre o domínio do problema. Alguns exemplos podem ser citados: forças gravitacionais, forças centrífugas, efeitos relacionados a retração de um corpo como na variação de temperatura ou inchamento, na análise não-linear, com o surgimento de termos de domínio ocasionados pela aplicação de tensões ou deformação residuais.

As integrais de domínio no MEC podem ser basicamente representadas de duas formas distintas:

- 1) Dividindo-se em células com as integrais aproximadas numericamente, similarmente ao que é feito no Método dos Elementos Finitos (MEF).
- 2) Utilizando-se de processos que transformem integrais de domínio em integrais de contorno, como o Método da Reciprocidade Dual (MRD), desenvolvido originalmente por Nardini e Brebbia (1982), Método da Reciprocidade Múltipla (MRM), desenvolvido por Nowak e Brebbia (1989) na resolução de equações de Poisson, o método de Galerkin, inicialmente proposto por Cruse (1975), e o método da integração radial (MIR), que pode ser encontrado no trabalho de Gao (2002). No presente trabalho, as forças de domínio gravitacionais serão

avaliadas pelo *Método da Reciprocidade Múltipla - MRM*.

3.7.1 Método da Reciprocidade Múltipla

Esta técnica está relacionada com a repetida aplicação do teorema da reciprocidade, originalmente desenvolvido por Nardini e Brebbia (1982) na resolução de problemas de Poisson, e posteriormente expandido para problemas da elasticidade linear (NEVES; BREBBIA, 1991) utilizando-se de uma sequência de soluções fundamentais de alta ordem, com a consequente diminuição da ordem da função da força de domínio até a convergência do procedimento.

Seja a integral de domínio para o caso de termos de valor conhecido.

$$\int_{\Omega} X^* \bar{T} d\Omega \quad (3.38)$$

Admite-se a existência de uma primitiva da solução fundamental e a integral é reescrita da na forma:

$$\int_{\Omega} X^* \bar{T} d\Omega = \int_{\Omega} \nabla^2 L \bar{T} d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \right) \bar{T} d\Omega \quad (3.39)$$

Integrando-se por partes:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \right) \bar{T} d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial L}{\partial x} n_x + \frac{\partial L}{\partial y} n_y \right) \bar{T} d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial y} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) d\Omega \quad (3.40)$$

Fazendo-se duas integrações por partes, chega-se a:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 L \bar{T} d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial L}{\partial n} \right) \bar{T} d\Gamma - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial n} \right) L d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla^2 \bar{T} L d\Omega \quad (3.41)$$

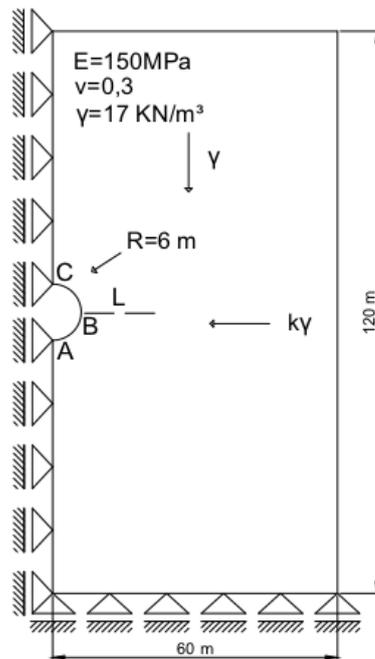
Para os casos em que \bar{T} possui uma distribuição constante, como na consideração de forças gravitacionais, é necessária uma única integração por partes, a fim de anular a integral de domínio presente no último termo da equação (3.40). Para casos em que o carregamento possui distribuição acima que linear, sucessivas integrações por partes são feitas objetivando-se anular os termos de domínio remanescentes.

3.8 Aplicação: Cavidade em meio semi-infinito considerando forças de domínio

Nesta seção será apresentado um exemplo numérico para validação da implementação da formulação linear do MEC, afim de avaliar sua eficiência em problemas que envolvam

concentração de tensões. Para este fim, o problema de uma cavidade em meio semi-infinito, simulando um túnel circular, submetida a uma força de domínio definida pelo peso específico do solo $\gamma = 17 \text{ KN/m}^3$ é apresentado. A pressão lateral do solo causada pelas tensões verticais é levada em consideração pelo coeficiente lateral k . Valendo-se da simetria do carregamento, o exemplo numérico foi modelado considerando-se apenas 1/2 da geometria real do problema e em estado plano de deformação. As propriedades físicas do material, Módulo de Elasticidade (E) e coeficiente de Poisson (ν), bem como as condições de contorno são apresentadas na figura abaixo.

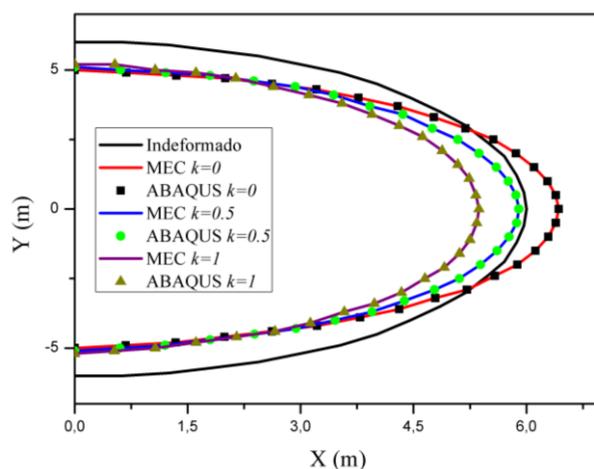
Figura 7. Cavidade em meio semi-infinito submetida a forças de domínio.



Fonte: autor (2020).

Utiliza-se uma malha com cerca de 50 elementos lineares, sendo 31 nós no contorno da cavidade circular. O problema foi analisado levando-se em conta como solução de referência uma malha de 15000 elementos finitos lineares obtidos no *software* ABAQUS. Na Figura 8, o comportamento do trecho ABC após deformação para três diferentes estados de solitação horizontal é apresentado. Percebe-se uma boa convergência da solução obtida pelo MEC quando comparado com a resposta numérica do ABAQUS.

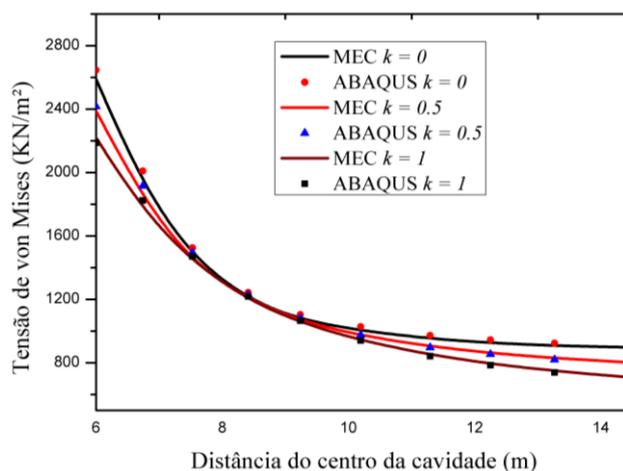
Figura 8. Trecho ABC após deformação com coeficiente de empuxo $k=0$.



Fonte: autor (2020).

Em seguida, a variação da tensão de von Mises ao longo da linha L é apresentada (Figura 9), para este fim, considera-se três diferentes coeficientes de empuxo. Destaca-se a maior concentração de tensões próximas à cavidade circular, com uma maior acentuação para o estado de carregamento sem tensões horizontais ($k = 0$).

Figura 9. Tensões de von Mises ao longo da linha L.

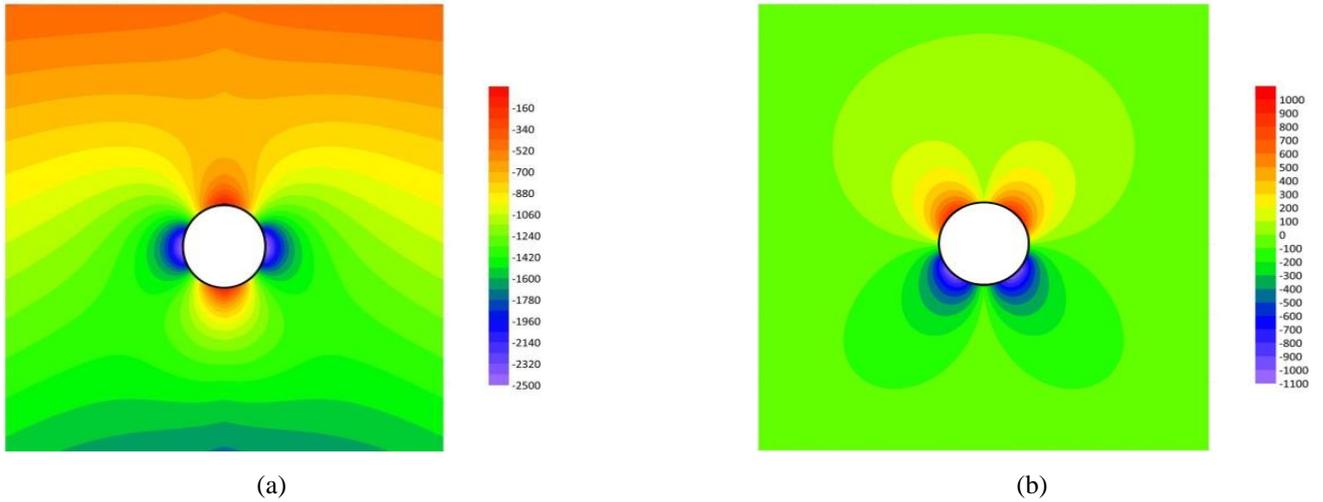


Fonte: autor (2020)

Por fim, a distribuição de tensões na região próxima a cavidade circular para σ_{22} e σ_{12} é apresentado nas Figuras (10, 11 e 12), utilizando-se cerca de 4700 pontos internos. É notável a

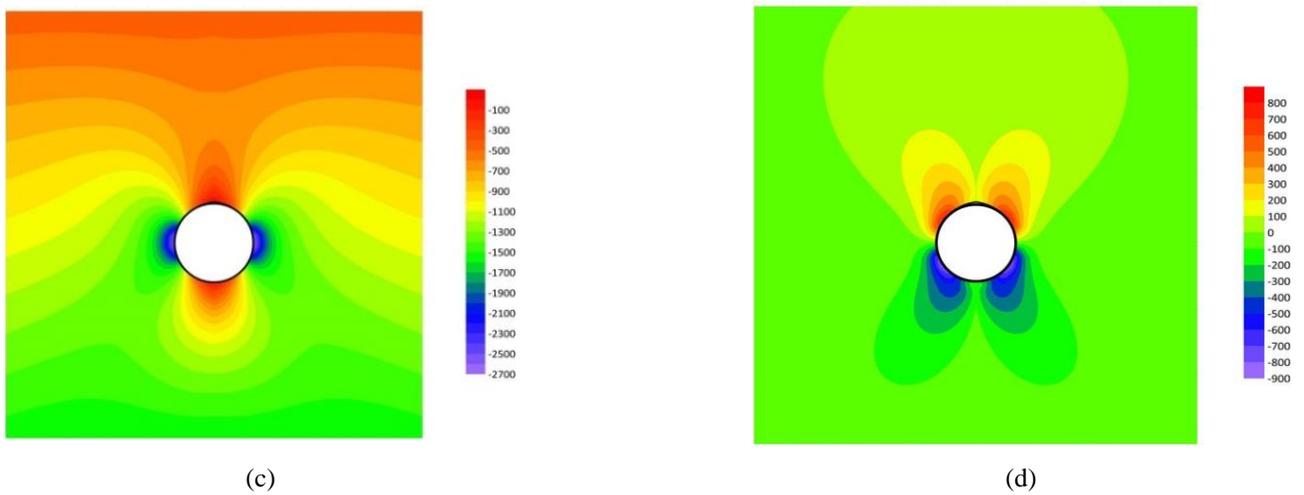
significativa mudança na distribuição de tensões com a variação no coeficiente de empuxo lateral k .

Figura 10. Distribuição de tensões na cavidade circular para $k = 1$ (a) σ_{22} (KN/m²) (b) σ_{12} (KN/m²)



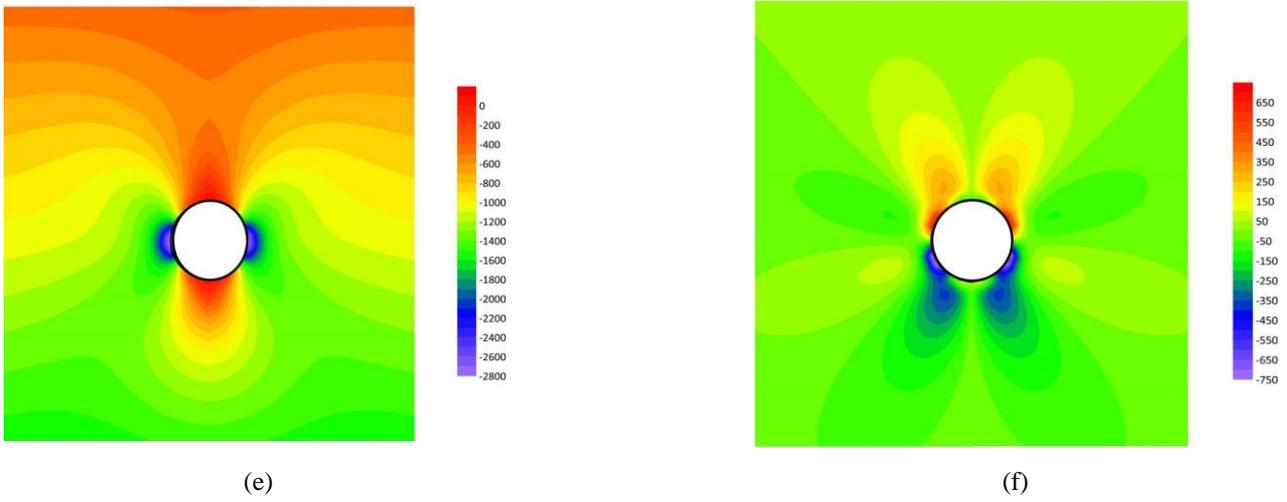
Fonte: autor (2020)

Figura 11. Distribuição de tensões na cavidade circular para $k = 0,5$ (c) σ_{22} (KN/m²) (d) σ_{12} (KN/m²)



Fonte: autor (2020)

Figura 12. Distribuição de tensões na cavidade circular para $k = 0$ (e) σ_{22} (KN/m²) (f) σ_{12} (KN/m²)



Fonte: autor (2020)

4 TÓPICOS EM CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

Na concepção e execução de projetos estruturais, incertezas originam-se de diversos fatores, como nas propriedades dos materiais, valores de carregamentos especificados, na geometria do corpo, ou qualquer combinação destas. A tomada de decisões em um contexto de incerteza é certamente frequente em situações reais. Inicialmente, a diferença entre uma variável aleatória e uma variável determinística deve ser elucidada. Variável aleatória é uma função real que atribui um valor real para cada experimento aleatório. Já as variáveis tidas como determinísticas, possuem um intervalo de valores possíveis relativamente pequeno, que praticamente não apresenta efeitos no resultado final. Um exemplo de variável determinística é a aceleração da gravidade, que pode ser assumida constante para qualquer ponto da superfície terrestre, para mais detalhes, vide Ang e Tang (1984).

Na engenharia estrutural, apesar de, quase sempre, tratar-se variáveis inerentes a determinado problema como determinísticas, as incertezas estão sempre presentes. Tais incertezas não se limitam apenas a variabilidade observadas nas variáveis básicas que envolvem determinado problema, mas sobretudo, uma série de outros fatores que podem ser mencionados:

1. Parâmetros como média e variância, baseados em dados observados os quais não estão livres de incertezas;
2. Modelos numéricos utilizados na representação de problemas sempre são modelos aproximados (erro de modelo), e de certo modo, trazem certo grau de incertezas, que podem ser mais significativas que as associadas a variabilidade inerente as variáveis básicas;
3. Incertezas inerentes a fatores humanos, como o erro associado a desgaste físico, condições do trabalho, ou até mesmo problemas imprevisíveis, os quais podem influenciar significativamente a resposta estrutural.

Em geral, as incertezas presentes em problemas da engenharia estrutural podem ser classificadas em intrínseca, epistêmica e erro humano. A epistêmica está relacionada com o nosso conhecimento sobre as variáveis e processos envolvidos, e pode ser reduzida ou eliminada através do melhor conhecimento do problema. A incerteza intrínseca, é por definição, aquela que faz parte da natureza dos processos envolvidos, desta forma, é irreduzível e não pode ser eliminada. Já erros humanos são inevitáveis, no entanto podem ser reduzidos por meio da

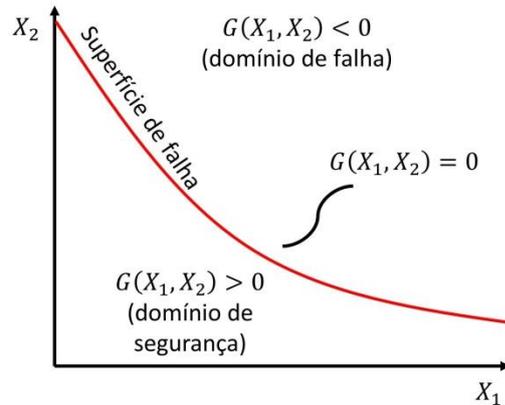
qualificação e treinamento. Para mais detalhes, vide Beck (2019). A construção de modelos probabilísticos é realizada com base na avaliação das incertezas das variáveis de projeto, as quais são descritas estatisticamente, como variáveis aleatórias. Uma etapa crucial na análise de confiabilidade estrutural consiste na caracterização das variáveis aleatórias, que em síntese trata-se da caracterização de um conjunto de dados (inferência estatística) e sua adequada representação por um modelo de distribuição. A qualidade do ajuste entre os dados da amostra e o modelo estatístico é amparado por testes de aderência. Levando-se em consideração todas as incertezas presentes nesses fatores, a probabilidade de violação de algum modo de falha torna-se não nula, caracterizando o não alcance de objetivos almejados no início da concepção estrutural. A confiabilidade estrutural permite a consideração de cada critério como um evento estatístico, levando-se em conta as consequências no que diz respeito ao bom funcionamento da estrutura. A utilização de modelos de confiabilidade objetiva-se avaliar a segurança de uma estrutura, o que consiste na estimativa de violação de um certo modo potencial de falha (MELCHERS, 1999). Segundo Leonel (2009), na análise da confiabilidade estrutural cada critério pode ser entendido como um evento estatístico e suas consequências como cenários de falha, a verificação de cada critério significa a verificação de cada modo potencial de falha, e para isto, deve-se descrever e formular o problema considerando suas variáveis com suas devidas incertezas. A caracterização das variáveis aleatórias (v.a.), trata de uma etapa crucial na análise probabilística, sendo feita a partir de técnicas de inferência estatística.

4.1 Definição da probabilidade de Falha

A avaliação da probabilidade é realizada a partir da análise de uma função de falha, denominada $G(X)$, onde X é um vetor de variáveis aleatórias consideradas na análise. Durante a avaliação de segurança de uma estrutura, quantifica-se a ocorrência de falhas, ou seja, a probabilidade de que o vetor de v.a. esteja contido na região de falha Ω_f :

$$\begin{cases} G(X) > 0 \rightarrow \textit{Seguro} \\ G(X) \leq 0 \rightarrow \textit{Falha} \end{cases} \quad (4.1)$$

Figura 13. Definição da função de falha.



Fonte: autor (2020).

A probabilidade de falha é obtida integrando-se $f_X(x)$ (função conjunta de densidade de probabilidade das variáveis aleatórias do problema) sobre o domínio de falha.

$$P_f = \int_{\Omega_f} f_X(x) dx \quad (4.2)$$

A integral (4.2) é de difícil obtenção analítica, uma vez que envolve a avaliação de uma integral n-dimensional em um domínio complexo. Além disso, muitas vezes, a função estado limite permanece implícita. Assim, faz-se necessário o uso de outros métodos capazes de avaliar a probabilidade de falha, como o tradicional método de simulação Monte Carlo e o método de Confiabilidade de Primeira Ordem – FORM.

4.2 Problema fundamental de Confiabilidade

Antes de iniciar a análise dos modelos que proporcionam avaliar a probabilidade de falha de uma estrutura, é preciso definir um conceito de confiabilidade que se inicia a partir da equação de estado limite do problema fundamental. Esta equação é definida como problema de Resistência (R) vs Solicitação (S).

$$G(R, S) = R - S = 0 \quad (4.3)$$

A variável R é tratada como função de variáveis aleatórias relacionadas à resistência, e a variável S como função de variáveis aleatórias relacionadas à solicitação. Quando R e S são variáveis gaussianas e independentes, o problema pode ser definido como problema básico de confiabilidade, adota-se a variável M (margem de segurança), associada a $G(R, S)$, sendo seus

parâmetros calculados como segue:

$$\begin{aligned}\mu_M &= \mu_R - \mu_S \\ \sigma_M &= \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}\end{aligned}\quad (4.4)$$

sendo μ e σ definidos como média e desvio padrão da variável aleatória respectivamente. A fim de obter o índice de confiabilidade, a variável aleatória M deve ser transformada em uma variável normal padrão, da seguinte forma, Beck (2019):

$$y = \frac{M - \mu_M}{\sigma_M} \quad (4.5)$$

Aplicando a definição de P_f , equação (4.2), na variável aleatória reduzida:

$$P_f = \phi\left(\frac{0 - \mu_M}{\sigma_M}\right) = \phi\left(-\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right) \quad (4.6)$$

Geometricamente, o índice de confiabilidade é definido como a menor distância entre a origem do espaço normal padrão e um ponto sobre a equação de estado de limite, correspondente a M igual a zero. Sendo válida esta afirmação, verifica-se que a distância entre o ponto correspondente a $M = 0$ e a origem do sistema cartesiano de coordenadas é expresso como a quociente $\frac{\mu_M}{\sigma_M}$, ou seja:

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (4.7)$$

Apesar de apresentar o índice de confiabilidade como um parâmetro dependente de apenas duas variáveis gaussianas, a abordagem de problemas que apresentem variáveis com qualquer distribuição é possível de ser realizada. Para este caso, a transformação intermediária para a obtenção de variáveis normais equivalentes é necessária.

A probabilidade de falha pode então ser escrita como:

$$P_f = \phi(-\beta) \quad (4.8)$$

4.3 Método de simulação de Monte Carlo

Um dos principais objetivos da confiabilidade refere-se à avaliação da integral (4.2), o que na prática depende da quantidade de variáveis aleatórias dependentes, as quais podem possuir distribuições complexas. Por este motivo, o método de simulação de Monte Carlo surge como

uma técnica alternativa baseando-se fundamentalmente no emprego, de um processo de simulação envolvendo exaustivas repetições, utilizando em cada processo uma realização particular de variáveis aleatórias do problema. Estas repetições fornecem um conjunto de soluções, uma para cada realização, representando a saída simulada do problema. Melchers (1999) retrata o método de Monte Carlo como uma técnica que envolve simular artificialmente um grande número de elementos e observar o resultado encontrado. No caso da análise da confiabilidade em estruturas, isto significa do modo mais simples, que cada variável aleatória X_i pode fornecer aleatoriamente um determinado valor. Basicamente, a técnica consiste em produzir N eventos aleatórios a serem avaliados na equação do estado limite $G(X)$, assim, a probabilidade de falha é estimada como a razão entre o número de eventos de falha (N_f) e o número total de eventos (N),

$$P_f = \frac{N_f}{N} \quad (4.9)$$

A precisão do método está relacionada com o tamanho da amostragem, e pode ser avaliado pelo coeficiente de variação (COV) da probabilidade de falha. Com o objetivo de obter uniformidade na resposta, para diferentes execuções do método, estima-se um número de cenários mínimos para, que uma probabilidade de falha P_f seja determinada com um coeficiente de variação δ especificado,

$$N_{\min} = \frac{1}{\delta^2} \frac{1 - P_f}{P_f} \quad (4.10)$$

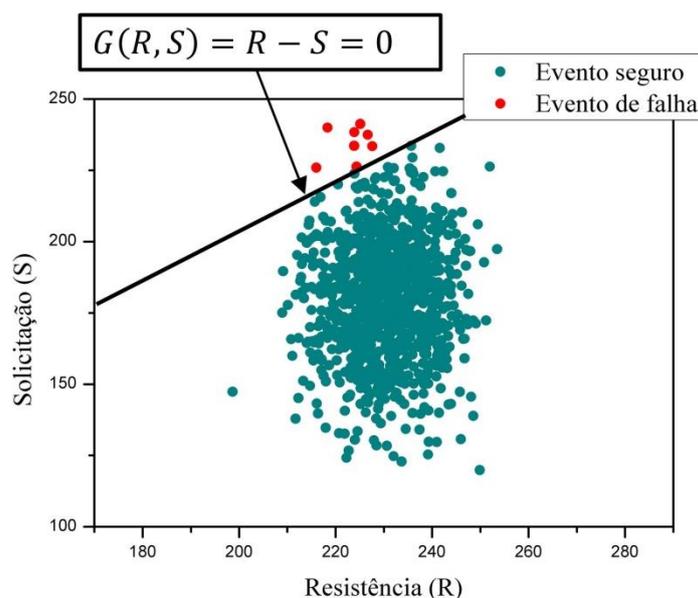
embora o cálculo envolva a P_f característica do problema, que é desconhecida a priori. A definição do índice de confiabilidade na equação (4.7), generalizada para várias v.a., pode ser utilizada para sua obtenção, representando uma maior velocidade em sua execução. Outra alternativa é definir um COV alvo e executar o mesmo método de Monte Carlo com um número reduzido de simulações, deste modo, efetua-se repetidas vezes o método até chegar ao valor do COV definido no início da análise. Portanto, invertendo-se a equação (4.10) têm-se,

$$COV = \sqrt{\frac{1 - P_f}{N_s \cdot P_f}} \quad (4.11)$$

Nas aplicações deste trabalho, adota-se como padrão o valor de $COV = 5\%$. Na Figura 14, é apresentado de maneira ilustrativa um exemplo de como acontece o procedimento de simulações

por Monte Carlo, com mil eventos randômicos gerados. Os parâmetros R e S são adotados como gaussianos, e o valor médio e desvio padrão das variáveis aleatórias são os parâmetros de entrada $N(\mu, \sigma)$. Para este exemplo, $R = N(230;8)$ e $S = N(180;20)$.

Figura 14. Exemplo ilustrativo da simulação ($n_s = 1000$) de Monte Carlo.



Fonte: autor (2020)

O número de eventos com falha para este exemplo foi quantificado em 8, considerando o total de 1000 simulações, foi obtida uma probabilidade de falha de $P_f = 0,0080$. Utilizando a equação (4.11), chega-se a um $COV = 0,3521$, indicando que a estimativa ainda não chegou no 5% adotado como padrão. Através da equação (4.11) chega-se a um $ns_{\min} = 49600$ para $COV = 0,05$ e P_f de valor igual ao encontrado na simulação com 1000 eventos. Com isso, chega-se a uma $P_f = 0,0093$. Para um último caso com um número mais confiável de simulações, $ns = 100.000$, estima-se a $P_f = 0,0103$. É evidente que quanto maior o número de simulações, mais confiável se torna a análise.

A grande desvantagem do método refere-se ao grande número de simulações necessárias para estimar a probabilidade de falha com certa precisão. Uma alternativa é o emprego de métodos que avaliem a probabilidade de falha com um reduzido número de simulações, o que

implica em um menor custo computacional. Com essa premissa, a utilização de técnicas de amostragem inteligente passa a ser uma interessante escolha, boa convergência pode ser obtida em um número menor de simulações. Dentre tais técnicas pode-se citar a Amostragem por Hipercubo Latino. Além disso, métodos analíticos de confiabilidade baseados na transformação de variáveis aleatórias em variáveis aleatórias gaussianas reduzidas podem ser empregados, particularmente o método de Confiabilidade de Primeira Ordem – FORM. Onde, respostas satisfatórias podem ser encontradas, com um número menor de chamadas do modelo mecânico.

4.4 Amostragem por hipercubo Latino (LHS)

Nesta seção, a teoria base para a técnica de amostragem por hipercubo latino é apresentada de acordo com os trabalhos de Olsson *et al.* (2003) e Elbert (2002). Esta técnica foi primeiro apresentada por McKay *et al.* (1979), onde foi realizado um estudo comparativo entre a amostragem aleatória e a amostragem estratificada.

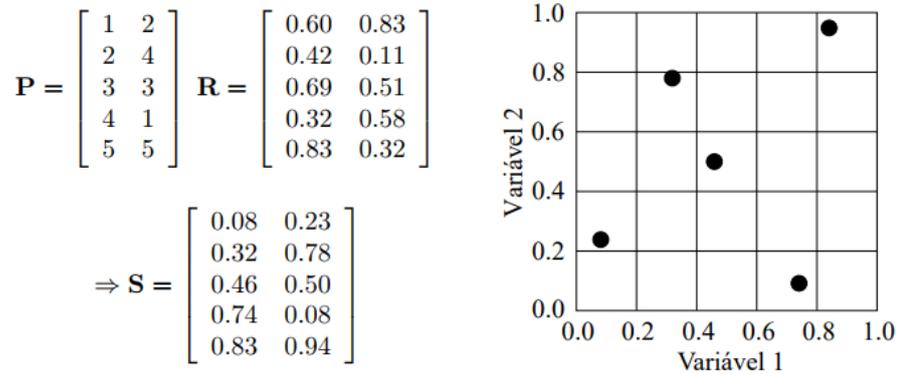
A amostragem por Hipercubo Latino pode atingir uma precisão suficiente estimando-se propriedades estatísticas com apenas algumas amostras em comparação com método de Monte Carlo simples. Em geral, divide-se o domínio de cada variável aleatória em faixas, portanto, cada faixa é amostrada uma única vez, o que resulta em uma distribuição esparsa de pontos. O que garante uma cobertura homogênea do domínio das variáveis aleatórias.

Seja a matriz P , de dimensões $(n \times n_{va})$, onde n é o número de pontos da amostra e n_{va} o número de variáveis aleatórias do problema, cada uma das n_{va} colunas é uma permutação aleatória de $1, \dots, n$. Outra matriz R , de dimensões $(n \times n_{va})$, é gerada com componentes aleatoriamente distribuídos entre $(0,1)$. A matriz S é portanto obtida por meio da combinação das matrizes R e P .

$$S = \frac{1}{n}(P - R) \quad (4.12)$$

Na Figura 15 é apresentado uma possível amostragem com duas variáveis aleatórias e cinco realizações.

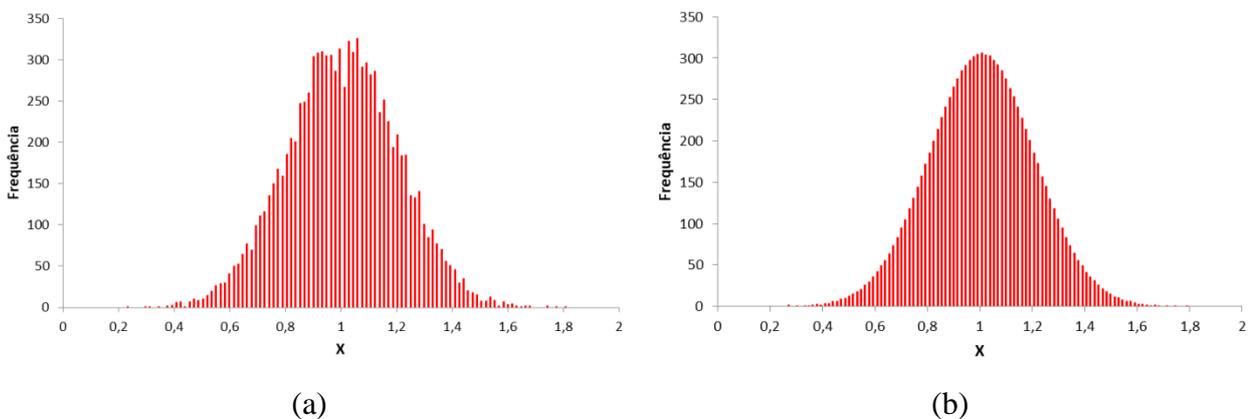
Figura 15. Hipercubo Latino para duas variáveis e cinco realizações



Fonte: Adaptado de Olsson *et al.* (2003)

Os histogramas de frequência de realizações para Amostragem Simples e Amostragem por Hipercubo Latino para uma variável aleatória normal com média 1,0 e desvio padrão de 0,2 é apresentado. Em geral, a Amostragem por Hipercubo Latino tende a apresentar um histograma com forma mais suave, como pode ser observado na Figura 16.

Figura 16. Histograma de frequência na (a) Amostragem simples (b) Amostragem por Hipercubo Latino



Fonte: autor (2020)

4.5 Método de Confiabilidade de Primeira Ordem – FORM

O método de confiabilidade de primeira ordem ou FORM (First Order Reliability Method), fornece, por conta da linearização da função estado limite em torno do ponto de projeto no espaço padrão, uma estimativa de probabilidade de alguns modos de falha. A linearização se faz através de um hiperplano tangente à superfície de falha no ponto de projeto, a qual é seguida

pela minimização da distância entre o ponto sobre o hiperplano e a origem do sistema. Em geral, essa aproximação pode conduzir a erros, principalmente quando a função limite é altamente não linear. Além disso, o FORM pode levar a divergências caso existam dois ou mais pontos de projeto.

O grande diferencial desse método está relacionado com a capacidade em representar fielmente as informações estatísticas das variáveis aleatórias que representam o problema, podendo lidar com quaisquer distribuições, inclusive considerando correlação entre variáveis. Em síntese, o FORM é baseado na definição geométrica do índice de confiabilidade, logo a função de falha deve ser avaliada no espaço reduzido de variáveis normais padronizadas independentes. As principais etapas desse método são:

- a) Transformação de distribuições originais em normais equivalentes reduzidas;
- b) Determinação de coeficientes de correlação equivalentes para distribuições marginais;
- c) Eliminação da correlação através de alguma estratégia de decomposição.

Basicamente, a primeira transformação fundamenta-se no modelo de Hasofer e Lind (1974), o qual consiste na redução das variáveis aleatórias originais dependentes X em variáveis aleatórias reduzidas dependentes Z . Em seguida, utiliza-se a transformação de Nataf (1962) para determinação de coeficientes de correlação equivalentes para distribuições marginais normais. O próximo passo consiste na eliminação da correlação entre as variáveis, transformando as variáveis aleatórias reduzidas dependentes Z em variáveis aleatórias reduzidas independentes Y . Tradicionalmente, utiliza-se a decomposição de Cholesky para fatorar a matriz de correlação, obtendo-se uma matriz triangular inferior associada. Para maiores detalhes, vide Beck (2019).

4.5.1 Algoritmo HLRF

Low e Tang (2007) apresentaram uma interpretação alternativa do índice de confiabilidade de Hasofer-Lind baseada na perspectiva de uma elipsóide expandida no espaço original das variáveis aleatórias (Figura 17),

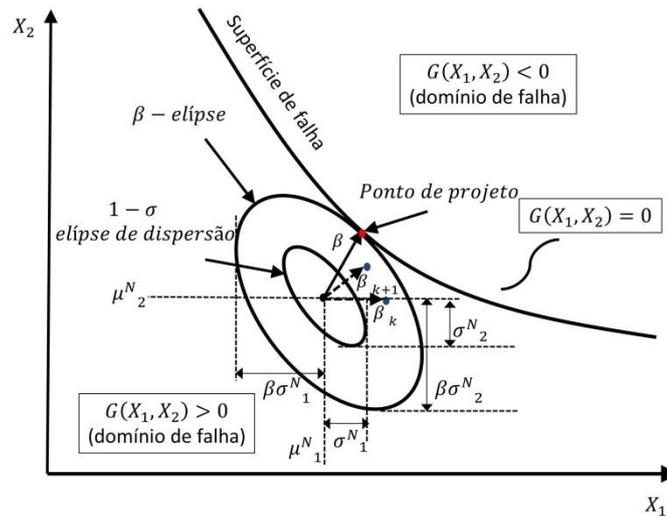
$$\beta = \min_{x \in F} \sqrt{\left[\frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \right]^T [C]^{-1} \left[\frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \right]} \quad (4.13)$$

na qual X é o vetor com todas as n variáveis aleatórias X_i envolvidas no problema, C a matriz de correlação, F o domínio de falha na qual a função $G(X) \leq 0$, σ_{X_i} e μ_{X_i} o desvio padrão e média da variável aleatória X_i , respectivamente. O índice de Hasofer-Lind, β , como já definido na seção 4.2, representa a distância entre o ponto médio e o mais próximo ponto na equação do estado limite, o qual é referido como ponto de projeto. A minimização da equação (4.13) pode ser obtida usando um método padrão de otimização não linear sujeito à restrição $G(x) = 0$, o qual é tradicionalmente resolvido através do algoritmo de Hasofer-Lind (1974) e de Rackwitz e Fiessler (1978), conhecido como HLRF (LÜ; LOW, 2011). Segundo Beck (2019) a fórmula de recorrência do algoritmo HLRF é fundamentada na aproximação de um ponto X à superfície $G(X) = 0$ e na perpendicularização entre o vetor X e a tangente à superfície no ponto. Melchers (1999), Beck (2019) apresentam o algoritmo de otimização HLRF como,

$$y_{k+1} = - \frac{G(y_k)}{\|\nabla G(y_k)\|} \left[\beta_k + \frac{G(y_k)}{\|\Delta G(y_k)\|} \right] \quad (4.14)$$

O processo de busca do ponto de projeto, segundo o algoritmo HLRF, é ilustrado na Figura 17.

Figura 17. Representação gráfica da busca do ponto de projeto para um problema com duas variáveis.



Fonte: autor (2020)

4.5.2 Algoritmo do Método FORM

Seguindo para a etapa de implementação do método, é importante definir alguns passos que permitem a aplicação do método FORM na análise confiabilística de estruturas. Descreve-se, a seguir, um algoritmo em 10 passos adaptado de Melchers (1999) e Beck (2019).

1. Avaliar as correlações equivalentes entre as variáveis aleatórias;
2. Escolher um ponto de partida no espaço original, usualmente adotado como a origem no espaço normal padrão;
3. Avaliar as médias e desvios padrões normais equivalentes através das equações;

$$\sigma_X^{neq} = \frac{\phi(\Phi^{-1}(F_{X_i}(X_i^*)))}{f_{X_i}(X_i^*)} \quad (4.15)$$

$$\mu_X^{neq} = X_i^* - \sigma_X^{neq} \Phi^{-1}(F_{X_i}(X_i^*))$$

sendo, F_{X_i} a função cumulativa da variável X_i , f_{X_i} função densidade da variável X_i , Φ a função cumulativa da distribuição normal padrão, ϕ a função densidade da distribuição normal padrão, σ_X^{neq} o desvio padrão normal equivalente no ponto X_i^* e μ_X^{neq} a média da normal

equivalente no ponto X_i^* .

4. Determinar a função de falha $G(X)$, o jacobiano e o gradiente de $G(X)$ no espaço reduzido;

$$\begin{aligned} G(y) &= G(X) \\ J &= L^{-1}\sigma^{-1}(X - m) \\ \nabla G(y) &= (J^{-1})^T \cdot \nabla G(X) \end{aligned} \quad (4.16)$$

na qual, L é a matriz triangular inferior construída a partir da decomposição de Cholesky da matriz dos coeficientes de correlação das variáveis X , σ é uma matriz diagonal contendo os desvios padrão, m é o vetor com médias das variáveis X .

5. Realizar a transformação do ponto de partida para o espaço reduzido;

$$y = J(X - m) \quad (4.17)$$

6. Aplicar o algoritmo de otimização HLRF, equação (4.14);

7. Determinar o índice de confiabilidade ;

$$\beta = \|y_{k+1}\| \quad (4.18)$$

8. Determinar o novo ponto X no espaço original;

$$X_{k+1} = X_k + (J^{-1})^T \cdot (y_{k+1} - y_k) \quad (4.19)$$

9. Repetir os passos 3 e 8 até a convergência do resultado

10. Determinar a probabilidade de falha através da equação (4.8).

5 MECÂNICA DA FRATURA

O projeto mecânico de estruturas geralmente envolve a análise do campo de tensões e deslocamentos em conjunto com a necessidade de prevenção de falhas. Uma característica presente no estudo dos materiais constituintes de uma estrutura diz respeito a presença de micro falhas, que podem dar início a um processo progressivo de fraturamento, levando-se a um possível colapso da estrutura. Essencialmente, a mecânica da fratura lida com o processo irreversível de ruptura devido à nucleação e crescimento de fissuras, o que é caracterizado por um processo complexo que depende fortemente da microestrutura do sólido, do ambiente e da carga aplicada. Como forma de tentar solucionar o problema inerente ao processo de fraturamento em estruturas, deu-se início ao estudo da Mecânica da Fratura Elástico Linear (MFEL). Um primeiro trabalho a se tratar, refere-se a Kirsch (1898), o qual desenvolveu uma solução analítica para o problema de uma placa com uma fissura central, conhecida como solução de Kirsch. Entretanto, foi em 1913 que o estudo do efeito do fraturamento ganhou forma matemática, com o trabalho de Inglis (1913), que foi base para os relevantes trabalhos de Griffith (1921) e Westergaard (1939). Inglis (1913), desenvolveu um modelo experimental de uma chapa infinita solicitada por tensão constante de tração com um furo elíptico com o raio maior na direção perpendicular ao carregamento. Notou-se que a presença do furo elíptico alterou o campo de tensões na região vizinha a ele, agindo como um concentrador de tensões e provocando o colapso do material assim que a resistência do material fosse atingida (BARBIRATO, 1999).

Embora o trabalho proposto por Inglis (1913) tenha grande importância no estudo do fraturamento em sólidos, era necessário formular um critério capaz de prever o início e o crescimento da fissura. Dois trabalhos são considerados pioneiros nesse aspecto, Griffith (1921 e 1924), o estudo de previsão do início da fratura nos sólidos começou com o desenvolvimento de um critério capaz de determinar se haveria o crescimento de um vazio elíptico preexistente em uma chapa infinita submetida a um estado de tração uniaxial (ROCHA, 2010). Segundo Griffith (1921), o crescimento da fissura poderia ser quantificado com o auxílio de um parâmetro denominado de energia superficial específica, constante física associada ao material. Segundo o seu estudo, a abertura da fissura está diretamente associada com a realização de trabalho, e este é proporcional ao aparecimento de novas faces de fissura durante o processo. Griffith (1924) assumiu que durante o processo de deformação, as dimensões do vazio elíptico achatado variavam com relação ao comprimento do maior semieixo da elipse de valor a , assim, a soma

das áreas das faces da fissura preexistente (simulada como uma elipse), para o caso de uma chapa com espessura unitária, é aproximadamente $4a$.

5.1 Mecânica da Fratura Elástico Linear

A mecânica da fratura é responsável pela análise das condições existentes ao redor da extremidade de uma fissura e a caracterização do estado de tensões próximo a ponta da fissura. Essa caracterização pode ser desenvolvida a partir do balanço energético, Griffith (1924) propôs o desenvolvimento de uma expressão em um corpo inicialmente homogêneo através da taxa de energia de deformação no surgimento de uma fissura com comprimento a ,

$$U = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{2E} \pi a^2, & \text{para estado plano de tensão;} \\ \frac{\sigma^2}{2E} \pi a^2 (1 - \nu^2), & \text{para estado plano de deformação,} \end{cases} \quad (5.1)$$

na qual ν representa o coeficiente de Poisson, σ a tensão perpendicular à fissura, E representa o módulo de elasticidade e $2a$ o comprimento da fissura.

A expressão (5.1) define a relação entre a quantidade de energia liberada durante o processo de fraturamento de um sólido, e a taxa de energia de deformação é uma propriedade intrínseca ao material, a qual permite determinar a resistência de uma peça (BARBIRATO, 1999).

Apesar de conseguir quantificar a liberação energética durante o processo de fraturamento a partir de um balanço energético (extensão do critério de Griffith), estudos futuros surgiram com o pressuposto de representar mais fielmente o fraturamento em materiais dúcteis, o qual é acompanhado de deformações permanentes,

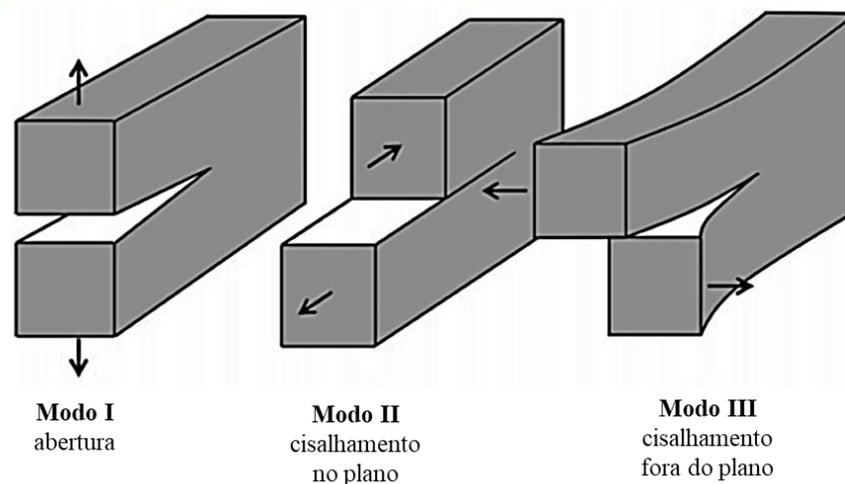
$$G \geq 2\Gamma + \Lambda \quad (5.2)$$

onde Λ representa o trabalho relacionado a deformações permanentes, Γ o trabalho necessário para a formação de uma nova fissura, e G a taxa de energia de deformação liberada. Para materiais dúcteis, o trabalho relacionado a deformações permanentes é maior quando comparado a materiais frágeis ou quase frágeis. A hipótese de desprezar o efeito de plastificação nos materiais caracteriza a Mecânica da Fratura Elástico Linear (MFEL), e diz que o comportamento das fissuras pode ser avaliado a partir de fatores de intensidade de tensão. Em geral, são

consideradas duas abordagens distintas: a fissura elástica equivalente e a fissura fictícia. Na primeira, toda a energia necessária para propagação está relacionada com a formação de novas fissuras. Desta forma, a energia Λ é desprezada em relação a Γ . Assim, os efeitos não lineares relacionados com a resistência residual do material não são incorporados. No modelo de fissura fictícia, considera-se que a energia relacionada à formação de novas fissuras Γ é desprezível frente à energia de deformações permanentes Λ . Assim, a energia de deformação liberada G é aproximadamente igual a Λ , e a propagação é definida com base na MFNL.

Uma fissura em um corpo pode ser submetida a infinitos tipos de carregamentos, no entanto, aqui, separam-se três tipos, os quais envolvem deslocamentos das superfícies das fissuras.

Figura 18. Principais modos de sollicitação.



Fonte: autor (2020).

São apresentados na Figura 18, os modos básicos de sollicitação, o modo fundamental de fratura I está relacionado com a abertura das superfícies da fissura por meio de sollicitações de tração. O modo II, com deslizamento das superfícies da fratura provocado por tensões cisalhantes e o modo III com o rasgamento entre as superfícies provocado por tensões cisalhantes.

Irwin (1957) propôs que a avaliação do campo de tensões a frente da extremidade da fissura fosse possível de ser realizada por meio do fator de intensidade de tensões, k . De modo geral, o

estado de tensão na extremidade da fissura pode ser obtido empregando-se:

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (5.3)$$

sendo K o fator de intensidade de tensão, r a distância da extremidade da fissura ao ponto considerado e θ a coordenada cilíndrica em um ponto referenciado a extremidade da fissura.

A relação entre energia crítica e o fator de intensidade de tensão pode ser expresso por (BROEK, 1982):

$$G_c = \frac{K_c^2}{E'} \quad (5.4)$$

sendo $E' = E$ para estado plano de tensão e $E' = E / (1 - \nu^2)$ para estado plano de deformação.

Para problemas planos da mecânica da fratura, o desenvolvimento de modelos analíticos passa pela determinação dos fatores de intensidade de tensão, sendo estes, grandezas fundamentais que governam o campo de tensões a frente da extremidade da fissura (LEONEL, 2009). Nesse contexto, para uma chapa infinita tracionada uniformemente em uma direção perpendicular à fissura, Westergaard (1939) empregou funções de tensão complexas para a determinação do campo de tensão para os três modos básicos de fraturamento.

Para o modo I:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Para o modo II:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{-K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

Para o modo III:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \frac{-K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \tau_{yz} &= \frac{-K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{cos}\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}\tag{5.7}$$

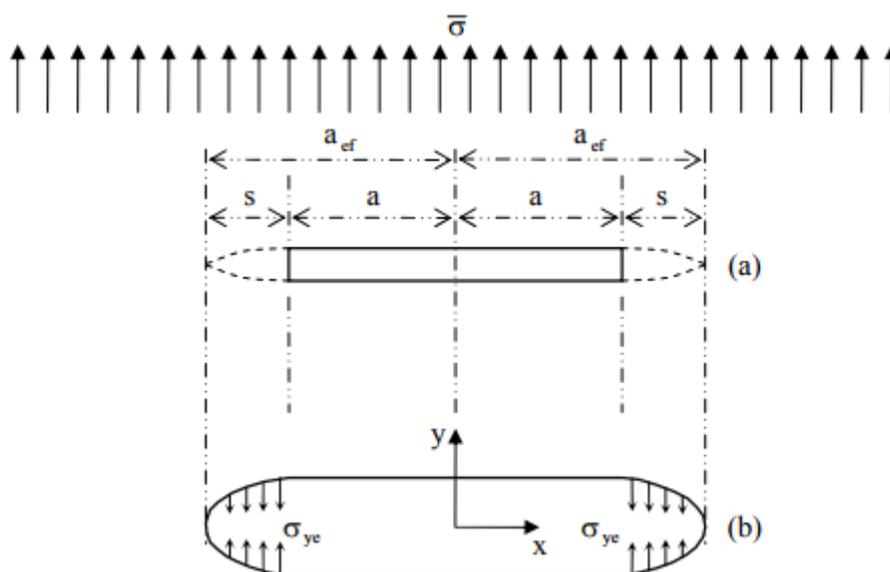
Algumas metodologias podem ser empregadas para obtenção dos FIT, dentre os quais podem ser citados métodos numéricos, experimentais e analíticos. O método de correlação de deslocamentos baseia-se na correspondência dos valores do campo deslocamento a partir de análises numéricas com expressões analíticas da MFEL. Já a integral J, fundamenta-se na determinação da taxa de liberação de energia em materiais elásticos a partir de uma integral, denominada integral J.

5.2 Mecânica da Fratura Não Linear

A taxa de energia total está diretamente associada com o trabalho necessário para a formação de uma nova fissura e ao trabalho relacionado a deformações permanentes (plastificação). Nos materiais dúcteis, essa taxa de energia liberada durante a plastificação do sólido é muito superior quando comparada com matérias frágeis e quase-frágeis. Um conceito importante na representação de modelos que incorporam a plastificação é a região conhecida como zona de processos inelásticos (ZPI), essa região está localizada a frente da fissura e é caracterizada por não responder elasticamente as solicitações externas, ou seja, uma zona de dissipação de energia capaz de transmitir esforço. Nessa região assumi-se a existência de uma tensão de fechamento (coesiva) uniforme de valor equivalente a tensão de escoamento, para representação da resistência residual do material. Na zona de processos, existe ainda um estado de tensões residuais, que assume valor nulo na ponta da fissura. Dois trabalhos são considerados os precursores na consideração dos efeitos de natureza coesiva no estudo de fraturas, os trabalhos de Dugdale (1960) e Barenblatt (1959, 1962). O modelo de Dugdale (1960) caracteriza-se como uma das primeiras propostas para avaliação do comportamento do comprimento da zona plástica no processo de fraturamento de materiais dúcteis. Neste trabalho, a avaliação do tamanho da zona plástica formada durante o processo de fraturamento em materiais dúcteis baseia-se em um critério uniaxial de tensões. Dugdale (1960) considerou o problema de uma chapa infinita com

corte interno de comprimento $2a$ sujeita a tensão uniforme de tração $\bar{\sigma}$, aplicada nas bordas da chapa e com direção perpendicular ao corte interno, Figura 19. Neste modelo a fissura real é substituída por uma fissura definida como efetiva e com um comprimento maior que o da fissura real devido ao acréscimo ocasionado pela presença da zona plástica a frente da extremidade da fissura.

Figura 19 Modelo de Dugdale: (a) Descrição geométrica da região de fraturamento efetivo, (b) Sistema de forças atuando no processo de fratura.



Fonte: Dugdale (1960)

Os trabalhos de Barenblatt (1959 e 1962) foram os precursores na consideração do efeito de forças coesivas no estudo de fraturas em materiais frágeis, seu estudo foi fundamentado na investigação do equilíbrio de superfícies fraturadas de formas arbitrárias sob ação de um dado carregamento utilizando conceitos da Teoria da Elasticidade.

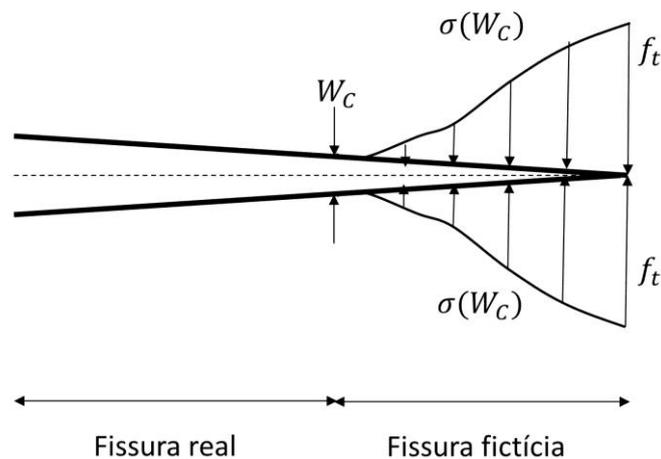
5.2.1 Modelo de Fissuras Fictícias (MFF)

Segundo Saleh e Aliabadi (1995), o modelo de fissuras fictícias é uma técnica aplicada na avaliação da propagação de fissuras em estruturas quase-frágeis ou materiais similares, o modelo é baseado nas seguintes afirmações:

1. A zona de processos se desenvolve quando a máxima tensão principal atuante na ponta da fissura fictícia alcança a resistência característica do material;
2. A zona de processos se desenvolve perpendicularmente à máxima tensão principal;
3. A zona de processos é parcialmente danificada, mas ainda é capaz de transferir tensão. A tensão é dependente da abertura corrente da fissura;
4. Fora da ZPI, as propriedades do material permanecem com características elásticas.

No trabalho proposto por Hillerborg *et al.* (1976) o modelo de fratura coesiva é utilizado para casos onde a zona de processos inelásticos é suficientemente fina ao ponto de poder representá-la por uma superfície sem perda de precisão (Figura 20), segundo o seu trabalho podem ser definidas a existência de duas extremidades para a fissura: a real, localizada sobre o ponto onde ocorre o valor crítico da abertura da fissura w_c e a fictícia, definida no ponto onde a tensão normal atinge o seu valor máximo, f_t . Segundo esse modelo, a ZPI é substituída por forças de fechamento (forças coesivas) que agem nas duas superfícies da fissura e representam a resistência residual do material ao longo da ZPI.

Figura 20. Modelo de Hillerborg *et al.* (1976)



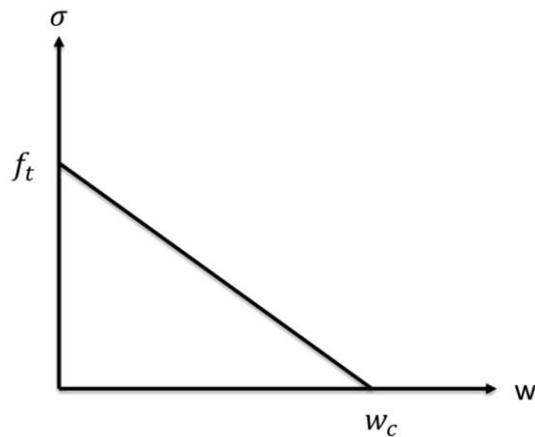
Fonte: autor (2020)

Quando a máxima tensão principal atinge o seu valor limite f_t , as fissuras coesivas aparecem, e as faces ficam submetidas à ação de forças coesivas. As faces apenas ficarão livres das tensões coesivas quando a abertura normal das faces da fissura alcançar um definido valor limite w_c . A intensidade das forças coesivas pode ser relacionada ao valor da abertura das faces da fissura por meio de leis coesivas. Existem diversas leis para este fim, entretanto serão aqui destacadas as três mais empregadas na modelagem de materiais quase-frágeis sobre fraturamento.

A primeira lei constitutiva expressa por meio de uma curva linear (Figura 21), a relação entre tensão x abertura de fissura:

$$\begin{aligned} \sigma(w) &= f_t(1 - w/w_c) && \text{se } 0 \leq w \leq w_c \\ \sigma(w) &= 0 && \text{se } w_c \leq w \end{aligned} \quad (5.8)$$

Figura 21. Lei constitutiva Linear.



Fonte: autor (2020).

A segunda lei constitutiva é a relação bilinear (Figura 22), considerando-se o modelo de Petersson (1981) para a lei coesiva bilinear:

$$\begin{aligned} \sigma(w) &= f_t - \left(\frac{f_t - f_t''}{w''} \right) w && \text{se } 0 \leq w \leq w'' \\ \sigma(w) &= \frac{f_t''}{w'' - w_c} w + f_t'' \left(1 - \frac{w''}{w'' - w_c} \right) && \text{se } w'' \leq w \leq w' \end{aligned} \quad (5.9)$$

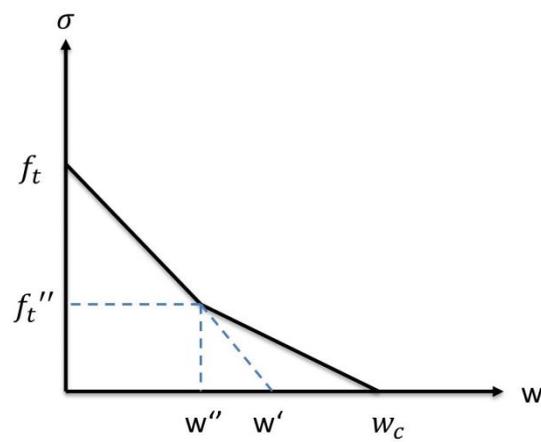
$$\sigma(w) = 0 \quad \text{se } w' \leq w$$

$$f_t'' = \frac{f_t}{3}$$

$$w'' = 0,8 \frac{G_f}{f_t}$$

$$w_c = 3,6 \frac{G_f}{f_t}$$

Figura 22. Lei constitutiva bilinear.

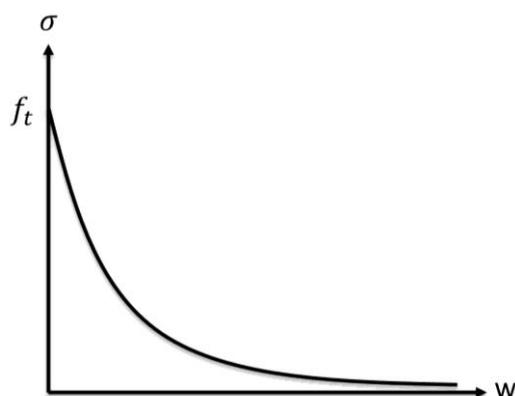


Fonte: autor (2020).

Outra lei amplamente utilizada para modelar a zona coesiva é a relação exponencial (Figura 23).

$$\sigma(w) = f_t \cdot e^{-(f_t/G_t)w} \quad \text{Se } w \geq 0 \quad (5.10)$$

Figura 23. Lei constitutiva exponencial.



Fonte: autor (2020).

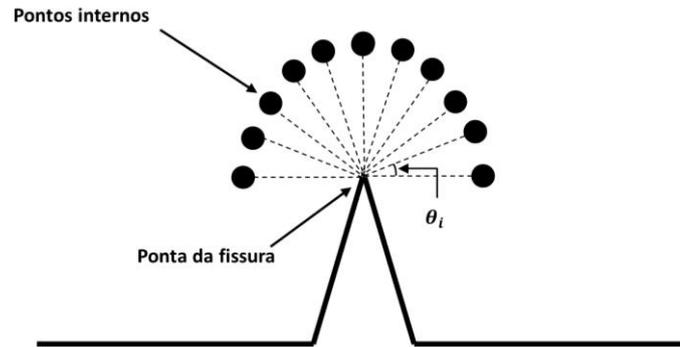
5.3 Cálculo do estado de tensão na extremidade da fissura

Um dos critérios mais utilizados para o surgimento e propagação de fissuras no contexto da mecânica da fratura coesiva é o critério de Rankine. Por meio desse critério de ruptura, a estabilidade ao crescimento da fissura é verificada com base na comparação do estado atuante na extremidade da fissura com um estado de tensão admissível. De forma geral, verifica-se se a máxima tensão principal de tração é de magnitude superior à resistência a tração do material. O critério de Rankine é verificado com base na representação integral para tensões, levando-se em conta o ponto fonte pertencente a extremidade da fissura.

Para a determinação do estado de tensão na extremidade da fissura, pontos internos localizados à frente da extremidade da fissura são posicionados em uma direção circunferencial, vide Figura 24.

A quantidade, e distanciamento entre cada ponto interno pode ser escolhido conforme a precisão desejada na análise.

Figura 24. Distribuição de pontos internos a frente da extremidade da fissura



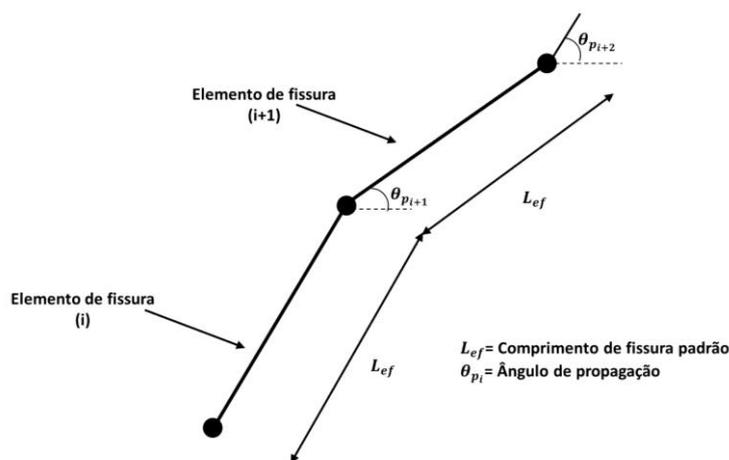
Fonte: autor (2020)

Após a determinação do estado de tensão em cada ponto interno, é verificado o ângulo de crescimento das fissuras. Utiliza-se a teoria da máxima tensão circunferencial, segundo a qual, considera-se que a fissura propague perpendicularmente à direção de maior tração principal.

5.4 Processo evolutivo da fissura

Quando o estado de tensão na extremidade da fissura é de magnitude superior à resistência a tração do material, a propagação da fissura acontece. Assim, deve-se encontrar os dois pontos extremos do próximo elemento de fissura. O ponto coincidente com a extremidade da fissura é obtido com base na direção de propagação e comprimento da fissura. Tal comprimento possui o mesmo valor, para todos os novos elementos de fissura a serem adicionados. Em geral, a cada novo incremento de carga, caso o estado de tensão na ponta ultrapasse o critério de ruptura, um novo elemento de fissura é adicionado. E esta, tem direção de propagação perpendicular à direção de maior tração principal. O tamanho dos novos elementos de fissura é definido em um ajuste, de forma que o critério da máxima tensão circunferencial seja igual ao estado limite último.

Figura 25. Esquema de adição dos novos elementos de fissura



Fonte: autor (2020)

5.5 Formulação do MEC para problema de tensões iniciais

Neste capítulo, será apresentada a formulação do MEC para análise de sólidos fraturados utilizando-se o modelo coesivo proposto por Hillerborg *et al.* (1976). Os efeitos de separação da estrutura são modelados por meio da imposição de um campo de tensões iniciais, para caracterização da descontinuidade (fissura). Os deslocamentos e tensões no regime elástico são calculados de maneira usual do MEC, e estes são corrigidos por meio da introdução dos dipolos.

O presente trabalho se utiliza da formulação do MEC para a análise de fraturas coesivas a partir da imposição de campos de tensões iniciais e o surgimento da variável denominada como dipolo, responsável por modelar os efeitos de separação da estrutura. O procedimento será apresentado de acordo com Rocha (1988), Rocha e Venturini (1988), Venturini (1994), Venturini (1995), Lopes Jr. (1996), Lopes Jr. e Venturini (1997), Barbirato (1999) e Oliveira (2013).

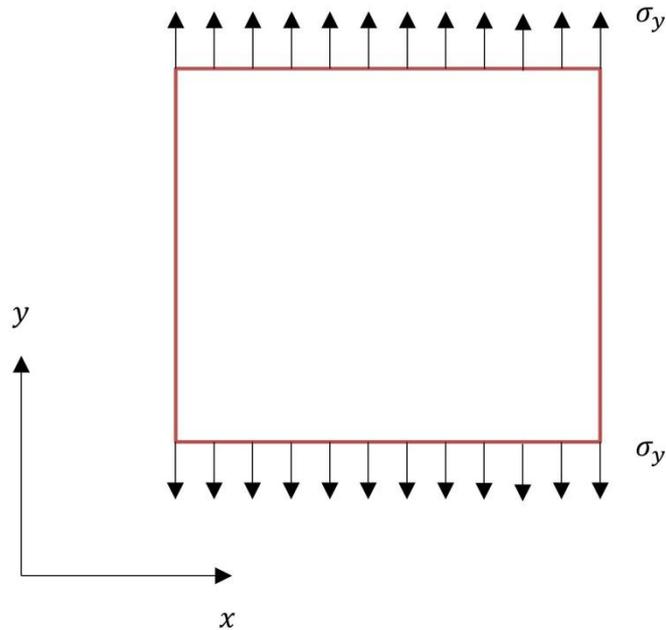
Antes de apresentar as expressões algébricas necessárias para a representação matemática da ZPI, faz-se necessário definir o conceito de dipolos. Para isto, o trabalho de Rocha (1988) é revisitado para definir a questão fundamental de como representar uma fissura em um meio contínuo.

A descontinuidade geométrica tratada neste trabalho apresenta abertura com dimensão muito menor que seu comprimento, podendo então, ser caracterizada como uma linha. Para simular essa descontinuidade, faz-se o uso de equações algébricas e introdução da variável dipolo,

constituindo-se estes, os elementos básicos para representação da presença da fissura no sólido.

Admita-se, que um corpo de material homogêneo e isotrópico é submetido a um estado de tensão uniforme em ambas extremidades.

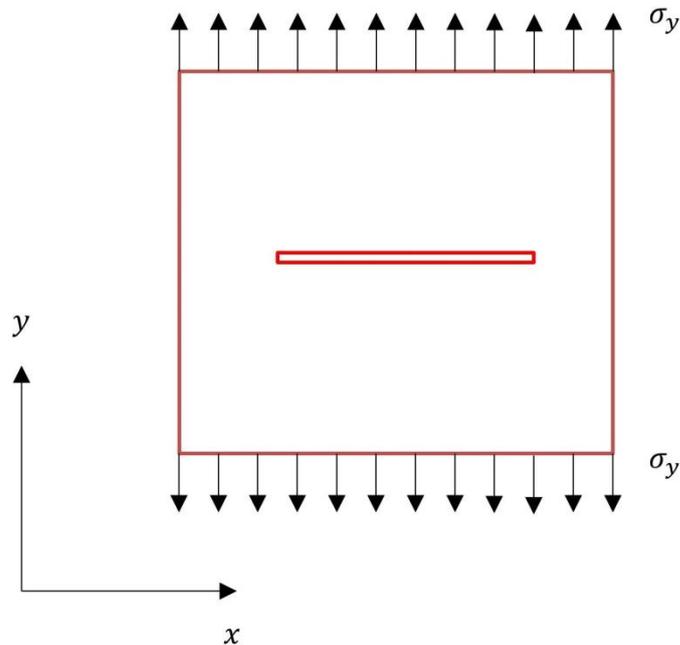
Figura 26. Corpo sem a presença de descontinuidades



Fonte: Adaptado de Rocha (1988)

Suponha-se que, por um recurso qualquer, seja feito um corte nesse corpo, sem que as condições de contorno sejam alteradas. Agora, devido à presença desta descontinuidade, as tensões não são mais constantes ao longo de todo o corpo. Para este caso, as tensões nas bordas superior e inferior da fenda são nulas, levando a uma alteração no estado de tensões ao longo do corpo.

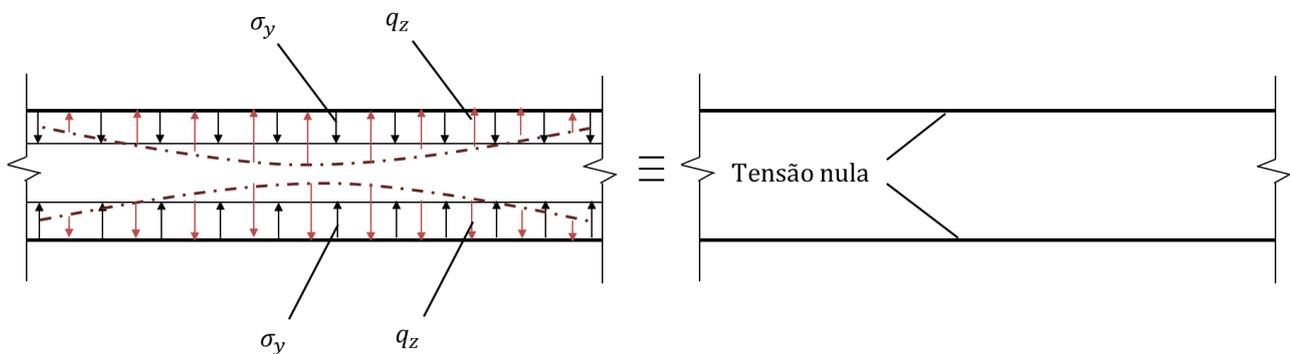
Figura 27. Corpo com a presença de uma descontinuidade transversal ao carregamento



Fonte: Adaptado de Rocha (1988)

A solução adotada para resolução deste problema é assumir, no corpo com a fenda, o mesmo estado de tensão do corpo sem a descontinuidade. Em seguida, faz-se correções do campo tensorial utilizando o efeito de forças virtuais auto-equilibradas, aplicadas no contorno da fenda, vide Figura 28.

Figura 28. Ilustração do dipolo q_z



Fonte: Adaptado de Rocha (1988)

Em termos gerais, a ideia central fundamenta-se na distribuição conveniente de forças

virtuais ao longo do contorno da descontinuidade, de modo a garantir o atendimento das condições requeridas. Essas forças são introduzidas para representar algebricamente os efeitos físicos da não linearidade decorrente da presença da descontinuidade (fissura). Essas forças são chamadas de dipolos, em semelhança ao dipolo elétrico existente na Eletrostática (ROCHA, 1988).

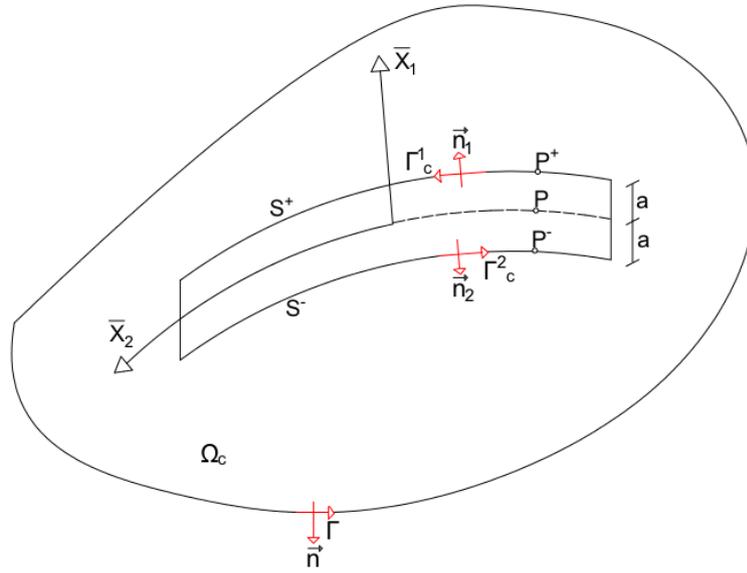
Deste modo, os dipolos podem ser utilizados para o atendimento das condições de contorno necessárias pela lei constitutiva, na representação matemática da presença da ZPI. Em geral, a formulação em termos de dipolos é adequada para o campo da Mecânica da Fratura, pela necessidade de introdução das descontinuidades (fissuras) existentes, sendo estas representadas, por meio do uso conveniente de forças auto-equilibradas. (OLIVEIRA, 2013).

A representação integral do campo de deslocamentos considerando tensões iniciais σ_{jk}^0 é desenvolvida com base no trabalho de Brebbia (1978a), excluindo-se o termo de forças de volume, a integral tem a seguinte forma:

$$c_{ik}u_k + \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ik}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega_c} \varepsilon_{ijk}^* \sigma_{jk}^0 d\Omega_c \quad (5.11)$$

na qual p_{ik}^* , u_{ik}^* e ε_{ijk}^* representam os valores da solução fundamental de Kelvin para forças de superfície, deslocamentos e deformações respectivamente e Ω_c a parte do domínio onde a parcela das tensões iniciais atua. Considerando a região Ω_c definida na Figura 29, estreita e limitada pelo contorno Γ_c , é possível estabelecer que Γ_c é composto por Γ_c^1 e Γ_c^2 .

Figura 29. Sub-região estreita de tensões iniciais.



Fonte: Adaptado de Venturini (1995).

Pode-se então reescrever a parcela que contém os termos das tensões iniciais na equação (5.11) integrando-se por partes e sabendo-se que $p_j^{01} = \sigma_{jk}^0 n_k$.

$$\int_{\Omega_c} \varepsilon_{ijk}^* \sigma_{jk}^0 d\Omega_c = \int_{\Omega_c} \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_k} \sigma_{jk}^0 d\Omega_c = \int_{\Gamma_c} u_{ij}^* p_j^{01} d\Gamma_c - \int_{\Omega_c} u_{ij}^* \sigma_{jk,k}^0 d\Omega_c \quad (5.12)$$

Sabendo-se que a é a semi-largura da faixa estreita que representa a fratura, com uma dimensão muito menor que a do seu comprimento, e as variáveis S^+ e S^- que definem as superfícies da sub-região definidas tomando-se um ponto médio S . Pode-se então reescrever a equação (5.12) como,

$$\int_{\Gamma_c} u_{ij}^*(p, S) p_j^{01}(S) d\Gamma_c = \int_{\Gamma_c^1} u_{ij}^*(p, S^-) p_j^{01}(S^-) d\Gamma_c^1 + \int_{\Gamma_c^2} u_{ij}^*(p, S^+) p_j^{01}(S^+) d\Gamma_c^2 \quad (5.13)$$

Assumindo-se que as superfícies estão suficientemente próximas e que o eixo coordenado local \bar{x}_1 é normal ao elemento de fratura, pode-se determinar as seguintes expressões tomando-se os dois primeiros termos da expansão de Taylor para aproximação de $u_{ij}^*(p, S^+)$ e $u_{ij}^*(p, S^-)$:

$$\begin{aligned}
u_{ij}^*(p, S^+) &= u_{ij}^*(p, S) + \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_1}(p, S)a \\
u_{ij}^*(p, S^-) &= u_{ij}^*(p, S) - \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_1}(p, S)a
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Para que a sub-região se torne uma linha ($\bar{\Gamma}$), deve-se fazer com que a largura a tenda a zero, desta maneira, os pontos S^- , S^+ e S se confundem, e além, $d\Gamma_c^1 = d\bar{\Gamma}$, $d\Gamma_c^2 = -d\bar{\Gamma}$, $p = P$. Substituindo-se a equação (5.14) em (5.13), chega-se a:

$$\int_{\Gamma_c} u_{ij}^*(p, S) p_j^{01}(S) d\Gamma_c = \int_{\bar{\Gamma}} 2a \frac{\partial u_{ij}^*(P, S)}{\partial x_1} p_j^{01} d(S) \bar{\Gamma} \tag{5.15}$$

O termo p_j^{01} representa o dipolo de forças que introduz um campo de tensões no meio contínuo. A última parcela da equação (5.12) ainda contém uma integral de domínio a ser desenvolvida, para isto, considera-se que a componente de tensão σ_{jk}^0 é constante ao longo da direção \bar{x}_1 , uma vez que a dimensão ($2a$) nessa direção é muito menor.

$$\sigma_{jk,k}^0 = \frac{\partial \sigma_{j1}^0}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{j1}^0}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{j2}^0}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{j2}^0}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_2} \tag{5.16}$$

ou seja,

$$\sigma_{jk,k}^0 = \frac{\partial}{\partial x_2} (\sigma_{jk}^0 m_k) \tag{5.17}$$

Levando-se em conta que na direção normal não é considerada a variação da componente de tensão,

$$\int_{\Omega_c} u_{ij}^* \sigma_{jk,k}^0 d\Omega_c = \int_{\Omega_c} u_{ij}^* \frac{\partial (\sigma_{jk}^0 m_k)}{\partial x_2} d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 = \int_{x_2} u_{ij}^* \frac{\partial (\sigma_{jk}^0 m_k)}{\partial x_2} 2a d\bar{x}_2 \tag{5.18}$$

Integrando-se por partes,

$$\int_{\Omega_c} u_{ij}^* \sigma_{jk,k}^0 d\Omega_c = u_{ij}^* \sigma_{jk}^0 m_k 2a(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - \int_{\bar{x}_2} \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_2} \sigma_{jk}^0 m_k 2a d\bar{x}_2 \quad (5.19)$$

Levando-se em conta que $p_j^{02} = \sigma_{jk}^0 m_k$, e que o termo independente da equação (5.19) anula-se quando a abertura da fratura tende a zero (quando a região tende a uma linha, $\bar{\Gamma}$),

$$\int_{\Omega_c} u_{ij}^* \sigma_{jk,k}^0 d\Omega_c = - \int_{\bar{x}_2} 2a \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_2} p_j^{02} d\bar{x}_2 = - \int_{\bar{\Gamma}} 2a \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_2} p_j^{02} d\bar{\Gamma} \quad (5.20)$$

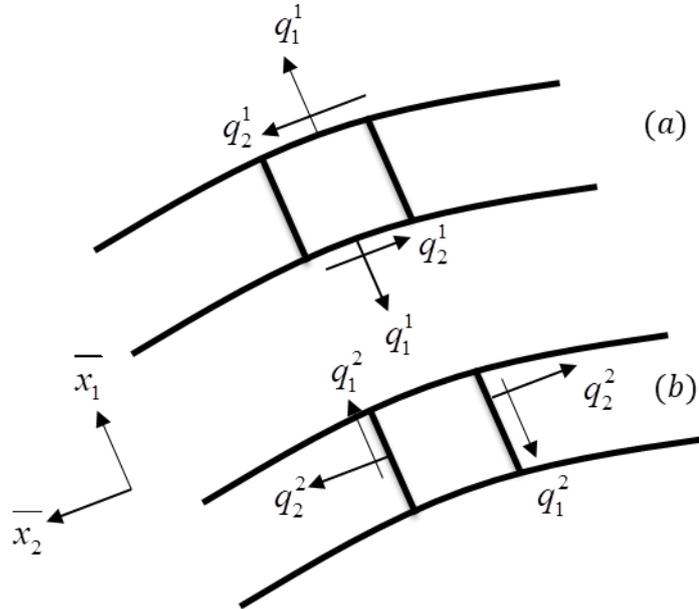
O termo $2ap_j^{02}$ representa um dipolo de forças, e a integral que contém a parcela das tensões iniciais, equação (5.11), torna-se definida, uma vez que os termos que a compõe foram todos determinados,

$$\int_{\Omega_c} \varepsilon_{ijk}^* \sigma_{jk}^0 d\Omega_c = \int_{\bar{\Gamma}} 2a \frac{\partial u_{ij}^*(P,S)}{\partial x_1} p_j^{01}(S) d\bar{\Gamma} + \int_{\bar{\Gamma}} 2a \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_2} p_j^{02} d\bar{\Gamma} = \int_{\bar{\Gamma}} 2a \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_k} p_j^{0k} d\bar{\Gamma} \quad (5.21)$$

Segundo Lopes Jr. (1996), as grandezas dipolo podem ser definidas considerando-se os valores dos dipolos finitos equivalentes a um campo de tensões infinitas, portanto:

$$\begin{aligned} 2ap_j^1 &= q_j^1 \\ 2ap_j^2 &= q_j^2 \end{aligned} \quad (5.22)$$

Figura 30. Representação local dos quadripolos (a) q^1 (composto pelo dipolo q_1^1 e q_2^1) e (b) q^2 (composto pelo dipolo q_1^2 e q_2^2)



Fonte: Adaptado de Lopes Jr. (1996).

Segundo Rocha (1988), a aplicação de um dipolo é responsável por caracterizar uma descontinuidade em deslocamentos, contudo para assegurar o equilíbrio, os dipolos devem ser aplicados em conjunto formando um quadripolo, de modo que:

$$q_2^2 = \frac{\nu}{(1-\nu)} q_1^1 \quad (5.23)$$

A equação (5.11) pode ser simplificada considerando-se que $\bar{x}_1 = x_1$, $\bar{x}_2 = x_2$ (fratura vertical ascendente) e sabendo-se que $\int_{\Omega_c} \varepsilon_{ijk}^* \sigma_{jk}^0 d\Omega = \int_{\Gamma_c} G_{ij}^l q_j^l d\Gamma$,

$$c_{ik} u_k + \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ik}^* p_k d\Gamma + \int_{\bar{\Gamma}} G_{ij}^k q_j^k d\bar{\Gamma} \quad (5.24)$$

na qual,

$$G_{ij}^k = \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_k} = -\frac{1}{8\pi G(1-\nu)r} \left\{ (3-4\nu) r_{,k} \delta_{ij} - r_{,j} \delta_{ik} - r_{,k} \delta_{jk} + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \quad (5.25)$$

A equação integral que fornece o estado de tensão em pontos internos é obtida por meio da representação integral para deslocamentos, equação (5.24), diferenciando-a e a substituindo na lei de Hooke generalizada,

$$\begin{aligned} \sigma_{im} = & -\int_{\Gamma} S_{imk} u_k d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{imk} p_k d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_c} G_{ij}^{ml} q_j^l d\Gamma_c + g_{ij}^{ml} [\sigma_{jl}(p)] \end{aligned} \quad (5.26)$$

sendo,

$$g_{ij}^{ml}(p) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \sigma_{im}^0(p) \end{Bmatrix} \quad (5.27)$$

A partir da equação (5.24) os deslocamentos para quaisquer pontos no domínio para uma dada distribuição de quadripolos podem ser obtidos, e para tanto, a representação da abertura normal da fissura pode ser realizada. Essa abertura é tratada como uma diferença de deslocamentos entre dois pontos (P^+ e P^-) situados em faces opostas, sobre os contornos Γ_c^1 e Γ_c^2 respectivamente (LOPES Jr., 1996), levando-se em consideração que a equação (5.24) contém uma singularidade r^{-1} , a diferença de deslocamentos entre os dois pontos deve ser avaliada a partir de uma análise limite, esse procedimento permite a obtenção de termos independentes dados em função de dipolos (OLIVEIRA, 2013). A diferença de deslocamentos entre os dois pontos pertencentes a faces opostas fornece a relação entre abertura da fissura, o que conduz ao resultado:

$$\{\Delta w\} = \begin{Bmatrix} \Delta w_1 \\ \Delta w_2 \end{Bmatrix} = \left| \{u\}^{P^+} - \{u\}^{P^-} \right| = \begin{bmatrix} \left(\frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \end{Bmatrix}^P \quad (5.28)$$

5.5.1 Elementos de Contorno para o problema de fissuração

A equação (5.24) representa a equação integral considerando-se a presença da fratura, a etapa seguinte refere-se ao processo de transformação da equação integral (5.24) em notação matricial, com a reorganização de seu último termo, e considerando-se $q_2^1 = q_1^2$.

$$G_{ij}^{ml} q_j^l = \begin{bmatrix} G_{11}^{ml} & (G_{12}^{ml} + G_{21}^{ml}) & G_{22}^{ml} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \\ q_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K} \end{bmatrix} \{q\} \quad (5.29)$$

reescreve-se então a equação (5.24) em notação matricial,

$$[c]\{u\}^P = -\int_{\Gamma} [p^*]\{u\} d\Gamma + \int_{\Gamma} [u^*]\{p\} d\Gamma + \int_{\bar{\Gamma}} [\bar{K}]\{q\} d\bar{\Gamma} \quad (5.30)$$

em que $\bar{\Gamma}$, representa as descontinuidades existentes.

De forma similar, pode-se reorganizar o último termo contido na equação integral para tensões em pontos internos, equação (5.26),

$$G_{ij}^{ml} q_j^l = \begin{bmatrix} G_{11}^{ml} & (G_{12}^{ml} + G_{21}^{ml}) & G_{22}^{ml} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \\ q_2^2 \end{pmatrix} = [\bar{K}']\{q\} \quad (5.31)$$

Em notação matricial, a equação (5.26) torna-se,

$$\{\sigma\}^P = -\int_{\Gamma} [S]^{imk} \{u\} d\Gamma + \int_{\Gamma} [D]^{imk} \{p\} d\Gamma + \int_{\bar{\Gamma}} [\bar{K}']\{q\} d\bar{\Gamma} \quad (5.32)$$

A avaliação da equação (5.30) é somente realizada discretizando-se o contorno da geometria do problema e as descontinuidades existentes. O campo de distribuição de dipolos não é conhecido, e semelhante ao que é feito com deslocamentos e forças de superfície, também pode ser interpolado ao longo dos elementos de fissura. Adotam-se, elementos isoparamétricos lineares pra aproximação dos quadripolos ao longo dos elementos de fissura. Algumas informações podem ser mencionadas, a primeira refere-se ao fato que os elementos de fissura são descontínuos, ou seja, seus nós foram deslocados das extremidades do elemento, e a segunda que são fictícios e servem para simular a existência de fissuras não incorporadas no contorno do problema (LOPES Jr., 1996).

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \\ q_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^{1(1)} \\ q_2^{1(1)} \\ q_2^{2(1)} \\ q_1^{1(2)} \\ q_2^{1(2)} \\ q_2^{2(2)} \end{Bmatrix} \quad (5.33)$$

Reorganizando os últimos termos das equações (5.30) e (5.32),

$$\int_{\bar{\Gamma}} [\bar{K}]\{q\} d\bar{\Gamma} = \sum_{j=1}^{nef} \int_{\bar{\Gamma}_j} [\bar{K}]\{q\} d\bar{\Gamma}_j = \sum_{j=1}^{nef} \int_{\bar{\Gamma}_j} [\bar{K}][\phi]\{q\}^j d\bar{\Gamma}_j = [K]\{Q\} \quad (5.34)$$

$$\int_{\bar{\Gamma}} [\bar{K}'] \{q\} d\bar{\Gamma} = \sum_{j=1}^{nef} \int_{\bar{\Gamma}_j} [\bar{K}'] \{q\} d\bar{\Gamma}_j = \sum_{j=1}^{nef} \int_{\bar{\Gamma}_j} [\bar{K}'] [\Phi] \{q\}^j d\bar{\Gamma}_j = [K'] \{Q\} \quad (5.35)$$

Observe-se que são necessárias apenas três equações algébricas para representação matemática da ZPI. Convém mencionar que as equações (5.34) e (5.35) servem de base para o início da solução não linear do sistema de equações, e a avaliação das tensões sobre os pontos fonte da fissura devem ser calculados recorrendo-se equação (5.35). No entanto a avaliação desta integral pode apresentar hiper-singularidades (presença do termo $1/r^2$) quando o ponto de colocação e os pontos de integração pertencerem a um mesmo elemento de fissura. Para este caso, utiliza-se uma abordagem semelhante à integração singular mencionada na seção 3.3.1, consistindo na avaliação analítica das integrais hiper-singulares. A abordagem aqui utilizada pode ser encontrada no trabalho de Lopes Jr. (1996) com mais detalhes.

5.6 Discretizações

Com a definição da equação integral para tensões iniciais, equação (5.26), e da contribuição dos dipolos na abertura das fissuras, equação (5.28), faz-se necessária a transformação dessas equações para a forma matricial, a fim de facilitar a implementação computacional desses termos. A equação (5.30) é matricialmente escrita como,

$$HU = GP + KQ \quad (5.36)$$

A matriz $[K]$ representa matematicamente os efeitos das forças coesivas, e as matrizes $[H]$ e $[G]$ são os termos usuais do MEC. Faz-se a troca de colunas de modo usual ao descrito na seção 3.3.1, com a finalidade de que as incógnitas sejam representadas em um único vetor e os valores prescritos em outro. Por fim, o seguinte sistema de equações algébricas pode ser definido,

$$X = M + RQ \quad (5.37)$$

na qual,

$$\begin{aligned} M &= A^{-1}F \\ R &= A^{-1}K \end{aligned} \quad (5.38)$$

A equação (5.37) pode ser usada na forma incremental, para o cálculo dos efeitos dos incrementos de carga dados por M ou ΔM , ou incrementos de dipolos, ΔQ , para correção do

nível de tensão sobre a superfície da fissura. A equação (5.32) pode ser transformada de modo semelhante ao que foi realizado para a determinação dos deslocamentos,

$$\sigma = -H'U + G'P + K'Q \quad (5.39)$$

De maneira similar a equação (5.37), a expressão de tensões pode ser escrita separando-se em duas parcelas, uma elástica e outra para correção do comportamento elástico pelo emprego de dipolos. Após a reordenação dos termos, a equação que relaciona o campo de tensões para uma dada distribuição de dipolos pode ser definida,

$$\sigma = N + SQ \quad (5.40)$$

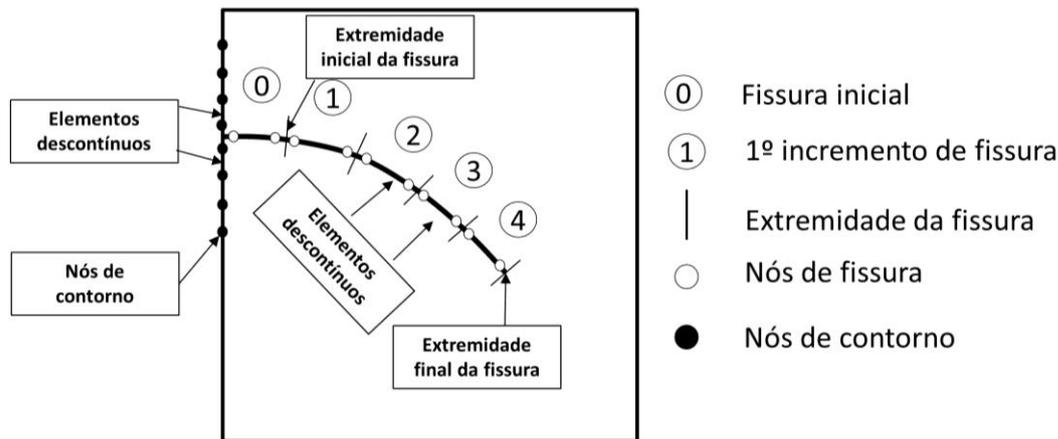
na qual,

$$\begin{aligned} N &= F' - A'M \\ S &= K' - A'R \end{aligned} \quad (5.41)$$

A equação (5.41) permite obter o campo de tensões para uma determinada distribuição de dipolos. É importante destacar que a própria equação (5.40) é utilizada para estimar o vetor Q , partindo-se do campo de tensões a ser corrigido (com base no modelo coesivo adotado). Além disso, é conveniente mencionar, que este vetor é avaliado a partir dos valores locais de tensões de cada elemento de fissura. Desta forma, utiliza-se sub-matrizes de S , que carregam informações da matriz global S , referentes a cada nó do elemento de fissura.

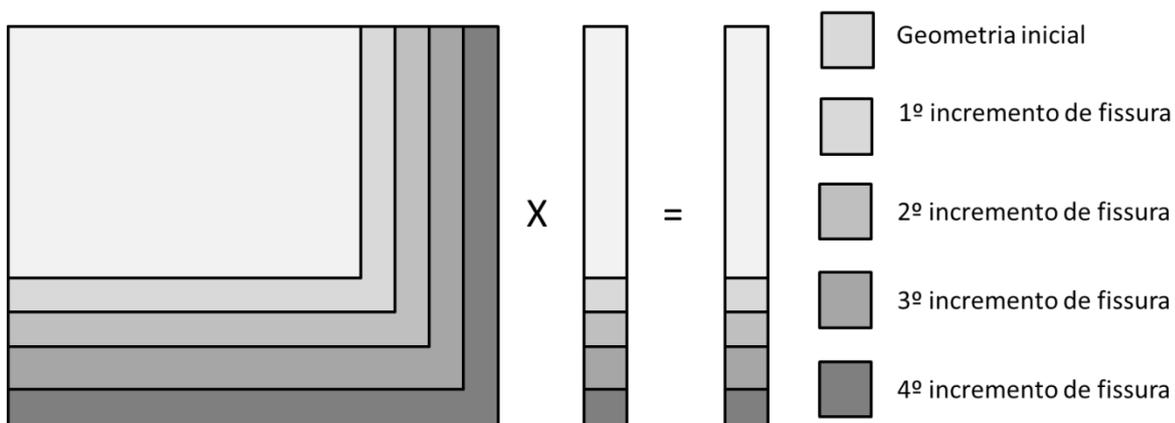
A simulação da propagação da fissura é envolvida no procedimento incremental. Nisto, fissuras são adicionadas a partir de um tamanho inicial especificado. Uma vez que os nós do contorno não sofrem alterações durante toda a análise, apenas os nós de fissura são adicionados ao longo do processo. Cada nova fissura é discretizada com elementos lineares isoparamétricos descontínuos. E todo o processo incremental depende do critério especificado na seção 5.4.

Figura 31. Esquema de discretização dos novos elementos de fissura



Fonte: autor (2020)

É importante mencionar que durante o processo evolutivo da fissura, as matrizes K e K' têm o seu tamanho modificado. Desta forma, essas matrizes têm sua dimensão aumentada a cada nova fissura adicionada, implicando em um aumento da matriz S em seu número de linhas e colunas. Semelhante a formulação Dual, o sistema de equações não é totalmente reconstruído, uma vez que o contorno externo é o mesmo durante todo o processo. Desta forma, é apenas necessária a inserção das informações dos novos elementos de fissura nas matrizes já existentes. Em geral, esse procedimento gera novas linhas e colunas nas matrizes que representam a presença da fissura. Na Figura 32, é apresentado o esquema de atualização da parcela matricial $SQ = \sigma$.

Figura 32. Esquema de atualização da parcela matricial $SQ = \sigma$ 

Fonte: autor (2020)

Neste trabalho, a estratégia baseada no operador constante (OC) para solução do sistema não linear é utilizado. As matrizes que compõe o sistema algébrico permanecem constantes, enquanto as forças de superfície não equilibradas são atualizadas a cada iteração. Essa estratégia leva a bons resultados, no entanto, requer um número significativo de iterações. O procedimento de resolução do sistema não linear considerando o operador constante é a seguir apresentado.

Para cada passo de carregamento,

1. Cálculo do excesso de tensão,

$$\Delta\sigma = \sigma^{\text{critério}} - \sigma^{\text{elástico}} \quad (5.42)$$

2. Transformação do excesso de tensão em dipolos e atualização do valor acumulado,

$$\Delta Q = S^{-1} \Delta\sigma \quad (5.43)$$

3. Cálculo do incremento na abertura da fissura e atualização do valor acumulado,

Equação (5.28)

4. Verificação do atendimento ao equilíbrio considerando determinada tolerância,

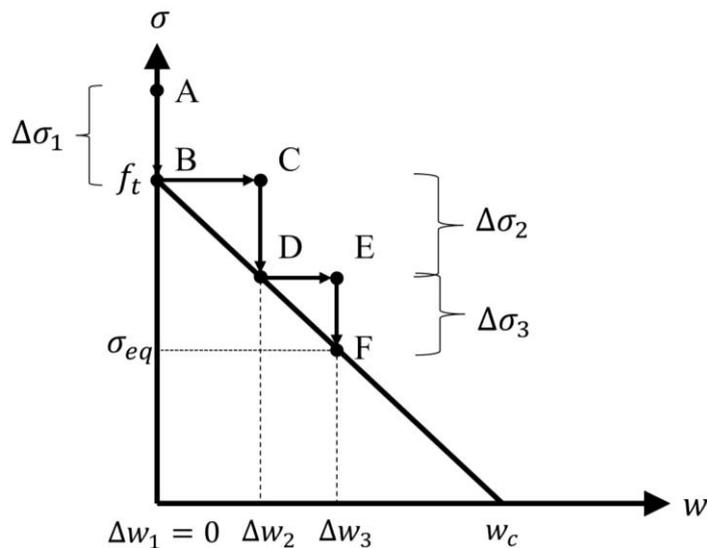
Equação (5.40)

5. Caso 4 não se verifique, repetir os passos 1 e 4 com $\sigma^{\text{critério}}$ atual.

A interpretação geométrica do processo de correção do sistema não linear pelo operador constante (critério coesivo linear) é ilustrada na Figura 33. À medida que o processo de fraturamento no sólido avança, a abertura de fissura evolui até o momento em que todos os pontos fonte atendam ao critério coesivo adotado, antes do início do fraturamento, todos os pontos fonte são associados à uma abertura nula. Considerando-se um desses pontos e supondo que sua tensão normal seja A, como $\sigma(A)$ é superior a resistência a tração f_t , o excesso de tensão é reaplicado na estrutura chegando-se a B (etapa 1). O excesso de tensão é transformado em uma parcela de dipolos (etapa 2), o que gera uma abertura de fissura Δw_1 (etapa 3), chegando-se a C. Repete-se então o cálculo do excesso de tensão (etapa 1), desta vez, verificando-se a diferença entre o ponto C e o ponto D, $\Delta\sigma^{(2)}$. Caso $\Delta\sigma^{(2)}$ seja maior que uma

determinada tolerância (etapa 4), esse excesso de tensão é reaplicado na estrutura gerando um novo incremento de abertura Δw_2 acumulado. Repete-se o procedimento i vezes (etapa 5) até que $\Delta\sigma^{(i)}$ esteja próximo de zero dentro de certa tolerância. No final, $w_{equilíbrio}$ representará a abertura acumulada da fissura correspondente ao equilíbrio, e a tensão coesiva real estará definida.

Figura 33. Interpretação geométrica do OC (critério coesivo linear).



Fonte: autor (2020)

5.7 Resolução do sistema não linear pelo Operador Tangente

Apesar de ser um procedimento robusto e eficiente, a clássica metodologia baseada no OC pode levar a um maior número de iterações até obter convergência. Desta forma, o procedimento de resolução do sistema não linear considerando o operador tangente é a seguir apresentado conforme o trabalho de Oliveira (2013) e pode ser simplificado em alguns passos que serão descritos a seguir.

A equação (5.40) pode ser reescrita em sua forma incremental,

$$Y(\Delta Q_k) = -\sigma_k(\Delta Q_k) + \Delta N_k + S\Delta Q_k \quad (5.44)$$

na qual k indica o incremento de carga atual,

A resolução do sistema não linear é atingida através de um esquema de Newton-Raphson para

correção dos passos incrementais. De forma a determinar as correções e encontrar o equilíbrio, admite-se que para encontrar o incremento, a solução esteja suficientemente próxima e que por isso se possa expandir a equação (5.44) nas vizinhanças de ΔQ_n^i .

$$Y(\Delta Q_k^{i+1}) = Y(\Delta Q_k^i) + \frac{\partial Y(\Delta Q_k^i)}{\partial \Delta Q_k^i} \delta \Delta Q_k^i + o(\delta \Delta Q_k^i) \quad (5.45)$$

A equação (5.45) deve ser aproximadamente nula. Desta forma, tomando-se apenas os primeiros termos da expansão de Taylor,

$$\delta \Delta Q_k^i = - \left[\frac{\partial Y(\Delta Q_k^i)}{\partial \Delta Q_k^i} \right]^{-1} Y(\Delta Q_k^i) \quad (5.46)$$

Desta forma, é possível calcular o acréscimo de dipolo com base no próprio resíduo da iteração atual. O termo relacionado a derivada de Y com relação a Q é denominado de operador tangente e é definido como,

$$K_i = \frac{\partial Y(\Delta Q_k^i)}{\partial \Delta Q_k^i} = - \frac{\partial [\Delta \sigma_k^i(Q_k^i)]}{\partial \Delta Q_k^i} + S \quad (5.47)$$

Convém mencionar que para determinação da abertura da fissura é necessário ter o estado de dipolo referenciado no sistema local de coordenadas. Desta forma, caso a fissura seja inclinada, deve-se transformar o dipolo global para o sistema local considerando-se a seguinte matriz de rotação,

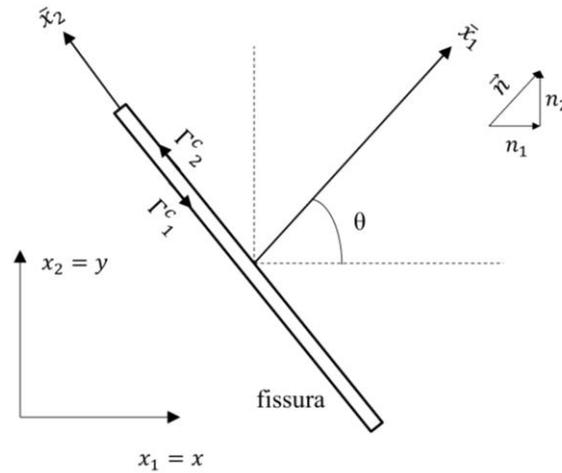
$$T = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \text{sen}(2\theta) & \text{sen}^2(\theta) \\ -\frac{1}{2} \text{sen}(2\theta) & \cos(2\theta) & \frac{1}{2} \text{sen}(2\theta) \\ \text{sen}^2(\theta) & -\text{sen}(2\theta) & \cos^2(\theta) \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

Assim, as tensões e dipolos podem ser transformados para o sistema local de coordenadas,

$$\begin{aligned} \overline{\Delta \sigma_k^i} &= T \Delta \sigma_k^i \\ \overline{\Delta Q_k^i} &= T \Delta Q_k^i \end{aligned} \quad (5.49)$$

A barra indica referência local. Na Figura 34 é apresentado o sistema de referência supracitado,

Figura 34. Sistemas global e local de referência



Fonte: autor (2020)

O termo do lado direito da equação (5.47) contendo a derivada pode ser escrito como,

$$\frac{\partial \Delta \sigma_k^i}{\partial \Delta Q_k^i} = T^{-1} \frac{\partial \overline{\Delta \sigma_k^i}}{\partial \overline{w_k^i}} \frac{\partial \overline{\Delta w_k^i}}{\partial \overline{Q_k^i}} \frac{\partial \overline{\Delta Q_k^i}}{\partial Q_k^i} \quad (5.50)$$

O termo da primeira derivada no lado direito da equação (5.50) é obtido de acordo com o critério coesivo adotado, este qual, relaciona tensões coesivas na abertura de fissura. Já a segunda derivada é definida com base na equação (5.28), como segue,

$$\frac{\partial \overline{\Delta w_k^i}}{\partial \overline{\Delta Q_k^i}} = \begin{bmatrix} \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

Por fim, a última derivada presente no lado direito da equação (5.50) é definida com base na transformação apresentada em (5.49).

$$\frac{\partial \overline{\Delta Q_k^i}}{\partial \Delta Q_k^i} = T \quad (5.52)$$

A equação (5.50) pode ser reescrita, da forma

$$\frac{\partial \Delta \sigma_k^i}{\partial \Delta Q_k^i} = \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \frac{\partial \Delta \bar{\sigma}_{\text{critério}}}{\partial \Delta w} R \quad (5.53)$$

onde R é definida a seguir,

$$R = \begin{bmatrix} \cos^4(\theta) & 2\cos^3(\theta)\text{sen}(\theta) & \cos^2(\theta)\text{sen}^2(\theta) \\ \cos^3(\theta)\text{sen}(\theta) & 2\cos^2(\theta)\text{sen}^2(\theta) & \cos(\theta)\text{sen}^3(\theta) \\ \cos^2(\theta)\text{sen}^2(\theta) & 2\cos(\theta)\text{sen}^3(\theta) & \text{sen}^4(\theta) \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

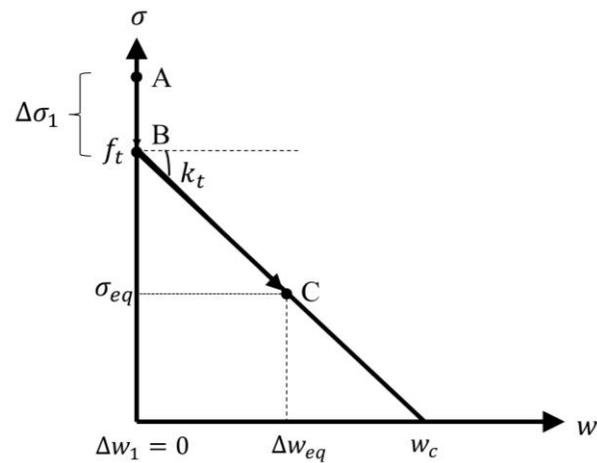
Por fim, de acordo com os resultados apresentados na equação (5.53) o OT considerando a formulação de dipolos do MEC é definido como,

$$K_t = \frac{\partial Y(\Delta Q_k^i)}{\partial \Delta Q_k^i} = S - \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \frac{\partial \Delta \bar{\sigma}_{\text{critério}}}{\partial \Delta w} R \quad (5.55)$$

Na equação (5.55), o OT está bem definido e é dito consistente por incorporar a lei coesiva em sua definição. É importante mencionar que o processo de parada da etapa iterativa depende do excesso de tensões, $(\Delta \sigma / f_t) > Tol$. O termo $\frac{\partial \Delta \bar{\sigma}_{\text{critério}}}{\partial \Delta w}$ representa a derivada da lei coesiva adotada. Desta forma, o OT considera as características de degradação da ZPI existentes.

A interpretação geométrica do processo de correção do sistema não linear pelo operador tangente (lei coesiva linear) é ilustrado na Figura 35. Semelhante ao OC, caso a tensão normal de um determinado ponto fonte supere a resistência a tração do material, esse excesso deve ser reaplicado na estrutura gerando um incremento de dipolo. Entretanto, diferentemente do OC esse incremento é calculado com base na derivada do critério coesivo adotado. Desta forma, o incremento é calculado com base na reta tangente a esse critério no ponto B.

Figura 35. Interpretação geométrica do OT (lei coesiva linear)

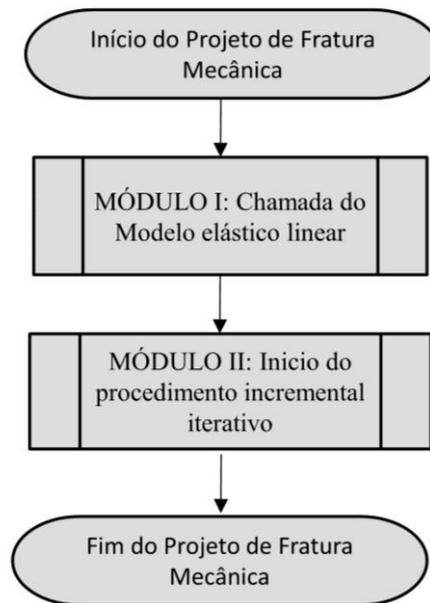


Fonte: autor (2020)

5.8 Algoritmo para Fratura Mecânica

O Algoritmo de Fratura Mecânica tem como base dois principais módulos. O primeiro constitui-se na chamada do modelo elástico linear para avaliação de parâmetros estruturais importantes. Já o segundo caracteriza-se por ser um procedimento incremental iterativo. É importante destacar que a chamada do modelo elástico linear acontece uma única vez durante toda análise. Desta forma, no Módulo II, o comportamento linear da estrutura é corrigido por meio de um processo incremental iterativo.

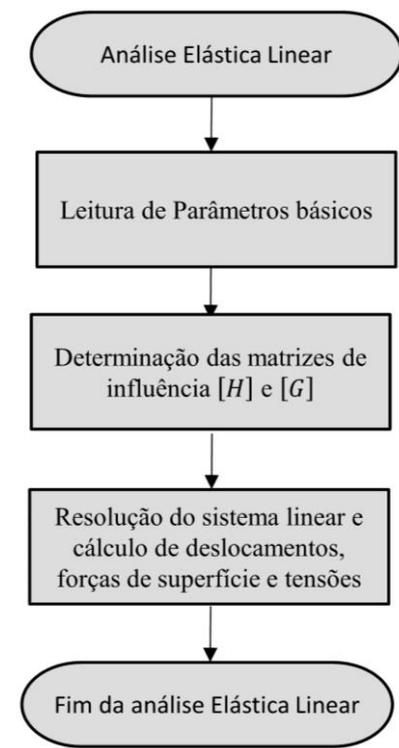
Figura 36. Principais módulos do algoritmo de fratura mecânica.



Fonte: autor (2020)

O módulo I segue a sequência apresentada na Figura 37, e fundamenta-se na avaliação das matrizes de influência $[H]$ e $[G]$ para posterior resolução do sistema linear e cálculo dos deslocamentos, forças de superfície e tensões.

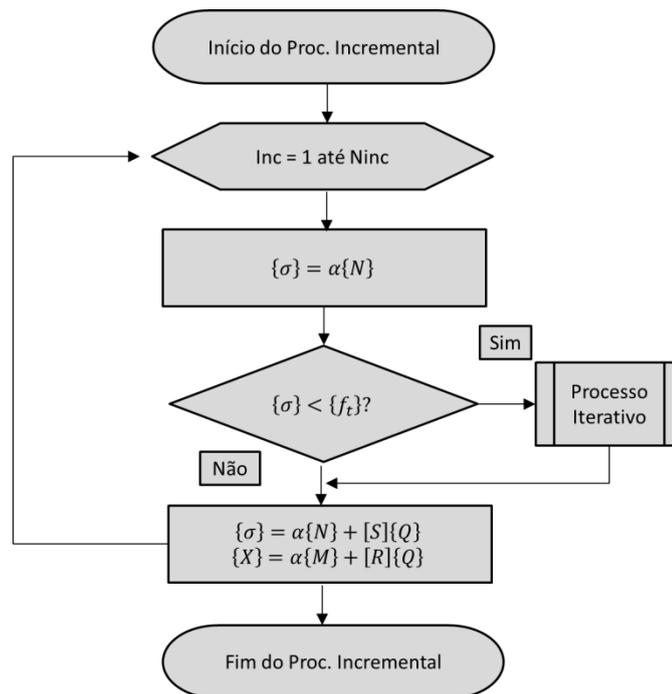
Figura 37. Módulo I: Análise elástica linear



Fonte: autor (2020)

O segundo módulo principal calcula, para cada passo incremental (deslocamento), deslocamentos e forças de superfície com o sólido no regime elástico e verifica se o critério de ruptura foi atingido. O surgimento da fissura acontecerá, a partir do momento que o limite de resistência estabelecido for ultrapassado. A partir desse momento, um novo elemento de fissura é adicionado e é chamada a sub-rotina iterativa que calcula os valores dos dipolos correspondentes à fissura. Antes do procedimento iterativo, existe uma verificação se a fissura irá propagar, tomando como base o critério exposto na seção. 5.3.

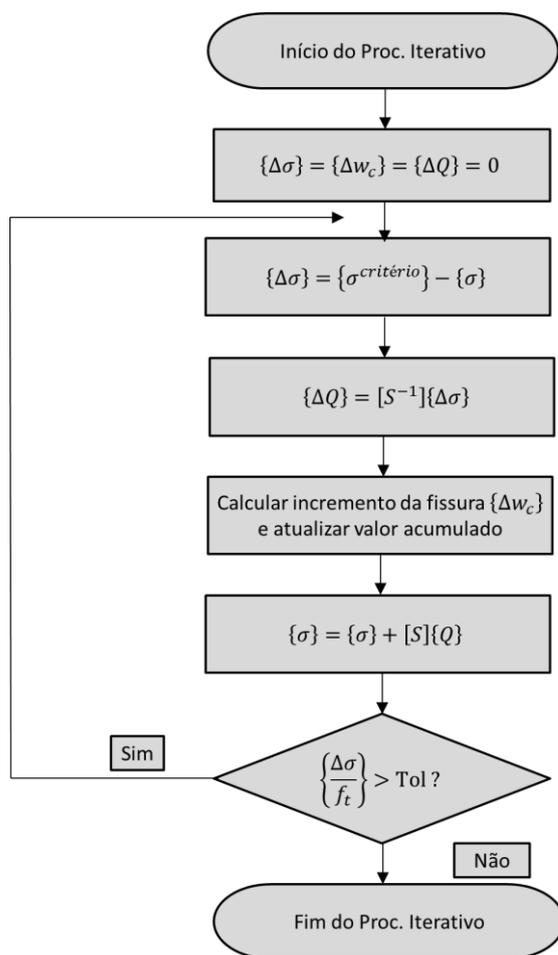
Figura 38. Módulo II: Fluxograma incremental



Fonte: autor (2020)

O procedimento iterativo apresenta o processo para determinação dos valores dos dipolos responsáveis pela correção do comportamento elástico do sólido. Calcula-se o excesso de tensão, os valores de dipolos correspondentes e o incremento na abertura da fissura. Uma vez que a relação excesso de tensão e resistência a tração atinja um valor limite, o procedimento é finalizado, estabelecendo-se antes os novos valores para deslocamentos e forças de superfície, considerando-se agora o corpo fraturado.

Figura 39. Módulo II: Fluxograma iterativo



Fonte: autor (2020)

5.9 Aplicações

Nesta seção seis aplicações são apresentadas para validação da implementação da formulação do MEC baseada em um campo de tensões iniciais em problemas da mecânica da fratura coesiva. No primeiro exemplo, as leis coesivas apresentadas na seção 5.2.1 são aplicadas à análise da fratura em uma chapa de concreto tracionada onde a solução analítica é conhecida.

O segundo exemplo trata de uma viga de concreto com entalhe inicial sob flexão em três pontos (modo I de abertura). O resultado experimental utilizado como referência é fornecido na literatura (Leonel e Venturini, 2010). O terceiro exemplo trata de uma viga de concreto com entalhe inicial e submetido a um ensaio de cisalhamento (Modo I-II de abertura). Para tal viga, o resultado experimental pode ser encontrado em Galvez *et al.* (1998).

O quarto exemplo traz uma chapa tracionada de concreto com dois entalhes modelada experimentalmente por Shi *et al.* (2000). Este exemplo visa validar a formulação proposta em um problema com múltiplas fissuras.

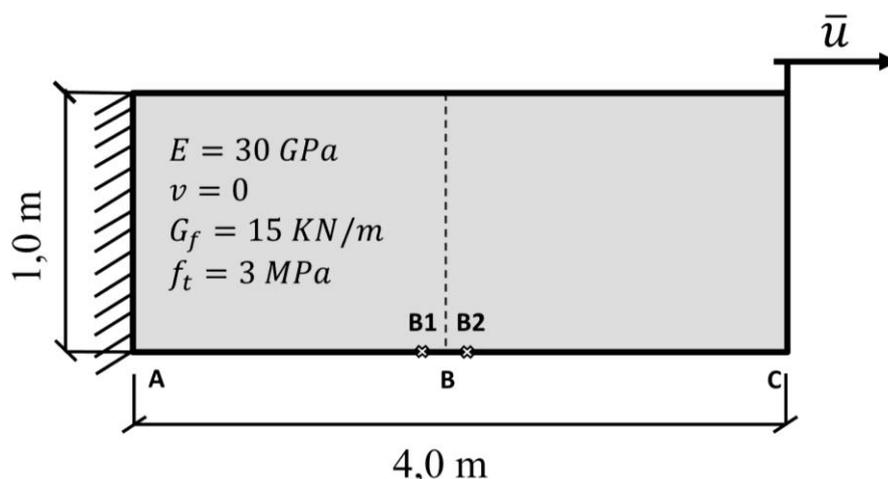
O quinto exemplo traz um espécime de concreto submetido a uma carga de aplicação descendente, o que produz forças perpendiculares às suas superfícies inclinadas. Sua resposta experimental pode ser encontrada em Winkler (2001) e caracteriza-se por sua carga de ruptura ser melhor representada pelas leis coesivas Bilinear e Exponencial. O último exemplo traz uma viga de concreto submetida a um ensaio de cisalhamento (modo misto de fratura) contendo dois entalhes. Para este exemplo, resultados numéricos são fornecidos na literatura. Em todos os exemplos em que a análise da Força *versus* deslocamento foi requerida, a carga equivalente resultou da integração das forças de superfície ao longo dos elementos adjacentes ao ponto de aplicação. As respostas em mapas de cores apresentadas em todas as aplicações foram determinadas utilizando-se o *software* SURFER.

Por fim, quanto ao processo de solução do sistema não linear, um estudo comparativo de eficiência em iterações é empregado na análise de cinco últimos exemplos numéricos. Desta forma, a redução no número iterações durante toda a análise é apresentada. A tolerância adotada para convergência do sistema não linear foi de 10^{-2} MPa em todos os exemplos analisados.

5.9.1 Exemplo 1: Chapa tracionada

O presente exemplo para validação da implementação proposta trata de uma chapa retangular com dimensões (m) 4 x 1, engastada na extremidade esquerda e com deslocamento horizontal prescrito no valor de $0,02\text{ m}$ na extremidade direita. As propriedades físicas adotadas foram, módulo de elasticidade ($E = 30\text{ GPa}$), coeficiente de Poisson ($\nu = 0,0$), resistência à tração ($f_t = 3\text{ MPa}$), abertura máxima de fissura ($w_c = 0,01\text{ m}$) e energia de fraturamento ($G_f = 0,015\text{ MN/m}$). A discretização consistiu de 12 elementos de contorno lineares com 6 nós duplos totalizando 18 nós de contorno.

Figura 40. Chapa tracionada.

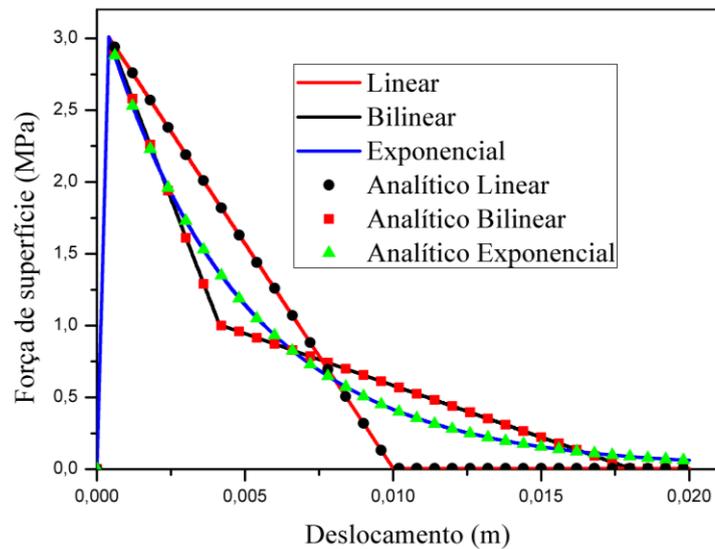


Fonte: autor (2020).

Na Figura 41, relaciona-se a força e o deslocamento horizontal para o ponto C, fixado no lado direito do problema. O operador para correção do sistema não linear utilizado foi o constante (OC). Inicialmente, a curva apresenta um comportamento linear até o momento que atinge o valor limite à tração, surge então o primeiro elemento de fissura. A partir desse momento, inicia-se o processo de abertura da fissura através do surgimento das tensões coesivas que obedecem a lei estabelecida. Para o caso da lei coesiva linear, percebe-se que a partir do momento que a abertura da fissura atinge o seu valor limite ($w_c = 0,01\text{ m}$) o gráfico não mais apresenta um comportamento descendente, sendo caracterizado por uma reta constante ocasionada pelo término da transferência de tensão para a abertura da fissura. O término da etapa descendente da Figura 41 caracteriza a total separação das faces opostas representantes da

fissura, e a partir deste momento, uma nova fissura visível provocará a conseqüente separação do sólido em duas partes independentes. No caso da lei Bilinear, uma mudança da inclinação surge no ponto $w' = 0,004 \text{ m}$, e o término do comportamento descendente acontece em $w_c = 0,018 \text{ m}$, indo de acordo com o critério coesivo definido na seção 5.2.1, equação (5.9). O modelo exponencial caracteriza-se por se assemelhar ao bilinear no início do trecho descendente, passando a responder de forma diferente deste, inicialmente com valores de força maiores e depois menores (para valores aproximadamente maiores que $w = 0,007 \text{ m}$).

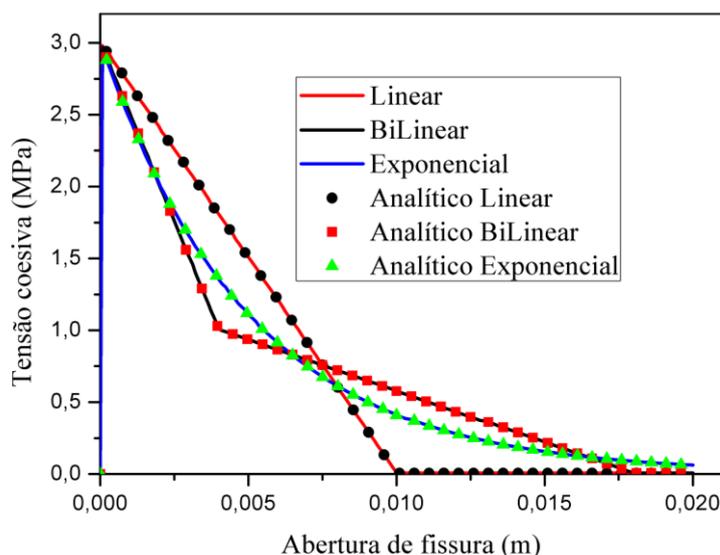
Figura 41. Força vs Deslocamento para as três leis coesivas.



Fonte: autor (2020).

Na Figura 42 é apresentada a relação entre a tensão coesiva e a abertura do primeiro elemento de fissura para o primeiro ponto de colocação. Destaca-se a variação das tensões coesivas durante o processo de abertura de fissura, observando-se que cada curva conseguiu obedecer ao critério coesivo estabelecido. Coerentemente com o modelo empregado, a fissura surge com a interceptação no eixo $(0,0; f_i)$ e a propagação tem fim com o término da transferência de tensões coesivas, ou seja, quando as curvas interceptam o eixo das abscissas.

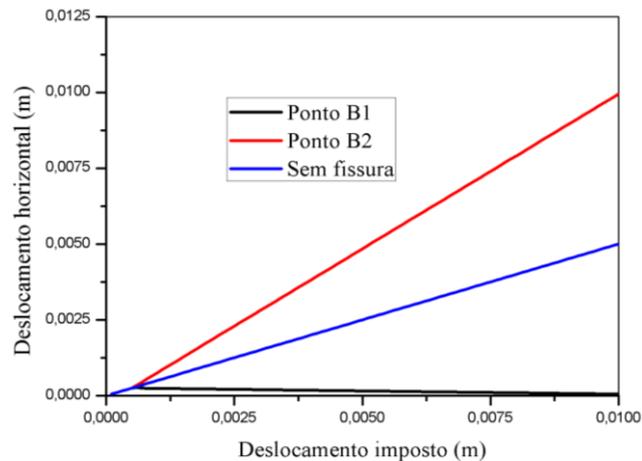
Figura 42. Tensão coesiva (MPa) vs Abertura de fissura (m) para as três leis coesivas.



Fonte: autor (2020).

Levando-se em conta o deslocamento horizontal dos dois pontos pertencentes a região intermediária da chapa, evidencia-se um maior deslocamento referente ao ponto localizado à direita do ponto B (B2), enquanto o ponto situado à esquerda (B1), passa a se deslocar cada vez menos. O momento em que o ponto B1 não se desloca mais coincide com o instante em que ocorre a separação física do sólido. No pré-pico, os dois pontos possuem deslocamentos coincidentes, e após o pico, a reta referente ao ponto B2 tem seu valor máximo após todas as parcelas de deslocamento serem impostas à estrutura.

Figura 43. Deslocamento nos pontos B1 e B2 (m)

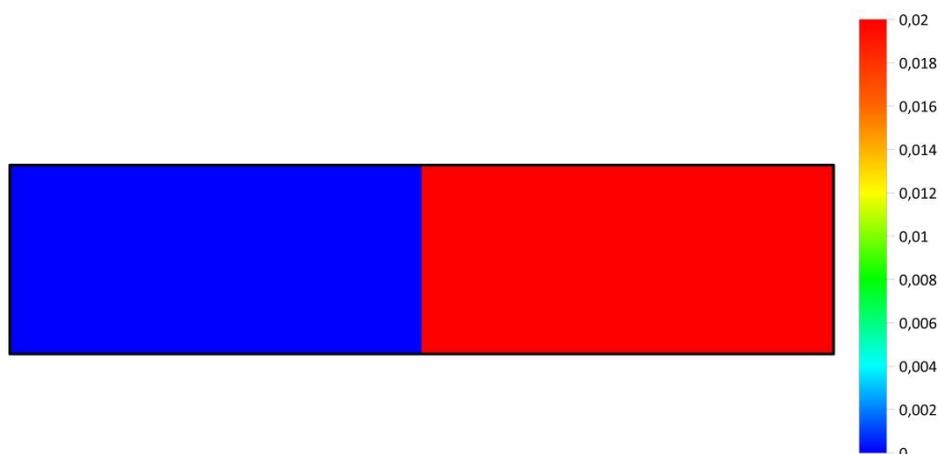


Fonte: autor (2020).

A natureza simples deste exemplo, Figura 40, permite a verificação da resposta numérica com base na própria definição dos modelos coesivos em si. Os resultados obtidos nas Figura 41 e Figura 42, foram comparados com a resposta analítica considerando as três leis coesivas citadas na seção 5.2.1, apresentando resultados numéricos satisfatórios. A análise aqui apresentada pode ser encontrada no trabalho de Oliveira e Leonel (2013), com respostas semelhantes ao estudo aqui realizado.

Além da resposta não linear, é apresentado, na Figura 44, deslocamentos internos em escala de cores avaliados em 380 pontos internos. Esta análise foi realizada após o último passo incremental imposto na estrutura. Nota-se a visível descontinuidade de deslocamentos na região de fratura, esta qual, ocupando o trecho correspondente à altura do sólido. Além disso, é possível observar a separação física do sólido em duas partes, com a metade direita se movendo como corpo rígido à parte da metade esquerda, como é de se esperar.

Figura 44. Deslocamento horizontal (m) para pontos internos em escala de cores

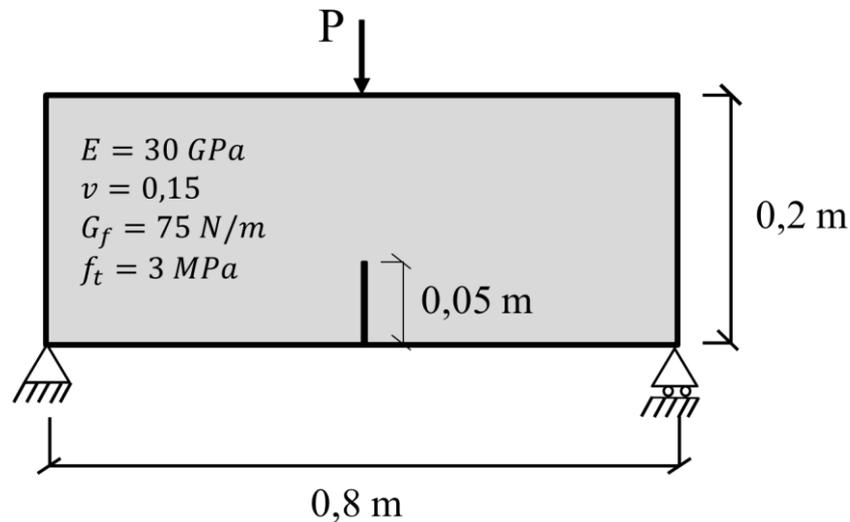


Fonte: autor (2020)

5.9.2 Exemplo 2: Viga sob flexão em três pontos submetida a modo I

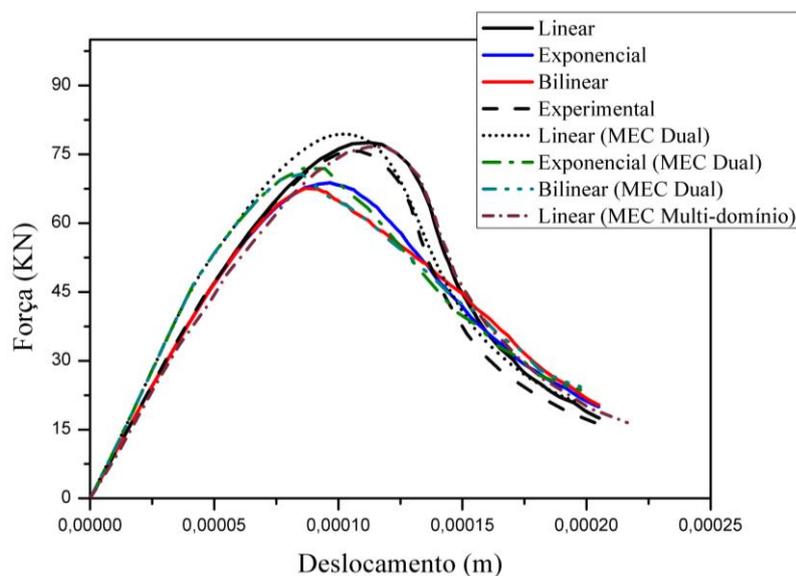
No segundo exemplo, é apresentada a análise de uma viga de concreto com entalhe inicial submetida a um ensaio de flexão em três pontos, com resultados experimentais em Saleh e Aliabadi (1995) e resultados numéricos em Leonel e Venturini (2010), MEC dual, e Ferreira e Venturini (2010), MEC Multi-domínio. As propriedades do material, geométricas e de vinculação da viga são apresentadas na Figura 45.

Figura 45. Geometria da viga sob flexão em três pontos



Fonte: autor (2020)

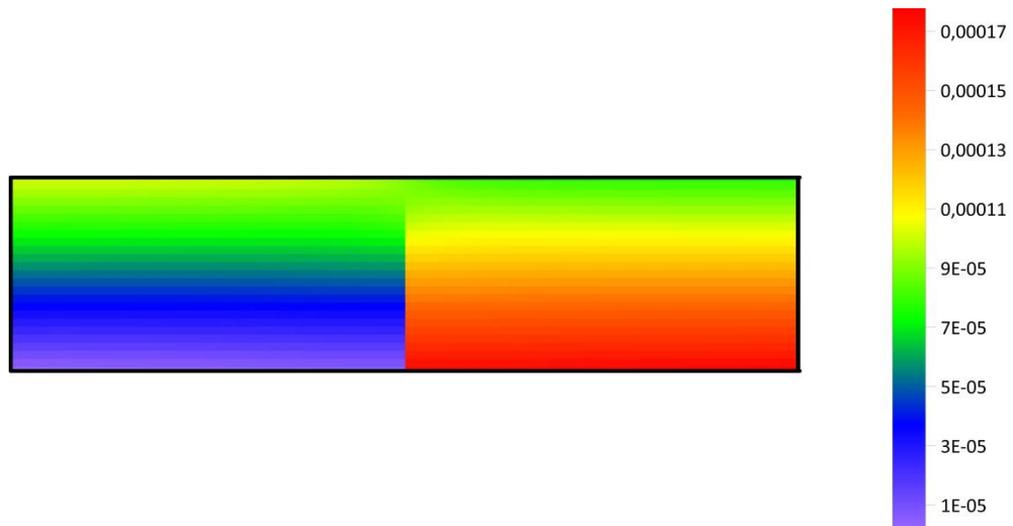
A malha do contorno constitui-se de cerca de 250 elementos lineares, com 2 elementos lineares descontínuos na extremidade do entalhe, para propiciar a abertura. Na Figura 46 é apresentado um gráfico de Força vs deslocamento da estrutura, medidos no ponto de aplicação da carga e na parte superior do entalhe, respectivamente. A força equivalente foi determinada para cada passo de carga, considerando-se os elementos adjacentes ao ponto de aplicação e espessura da viga unitária. Consideram-se as três leis coesivas (Linear, Bilinear e Exponencial), além do resultado experimental. É notável a boa resposta numérica para a lei coesiva linear, obtendo-se uma boa aproximação para a carga de pico. Nos casos Bilinear e Exponencial, a carga crítica correspondente a um menor deslocamento vertical apresentou magnitude inferior ao caso linear. Entretanto, todas as três leis coesivas apresentaram comportamento similar a partir de um deslocamento vertical de aproximadamente 0,14 mm. Além disso, os resultados obtidos pelo MEC dipolo foram equivalentes aos obtidos pelo MEC Dual e MEC Multi-domínio.

Figura 46. Carga *versus* deslocamento da estrutura.

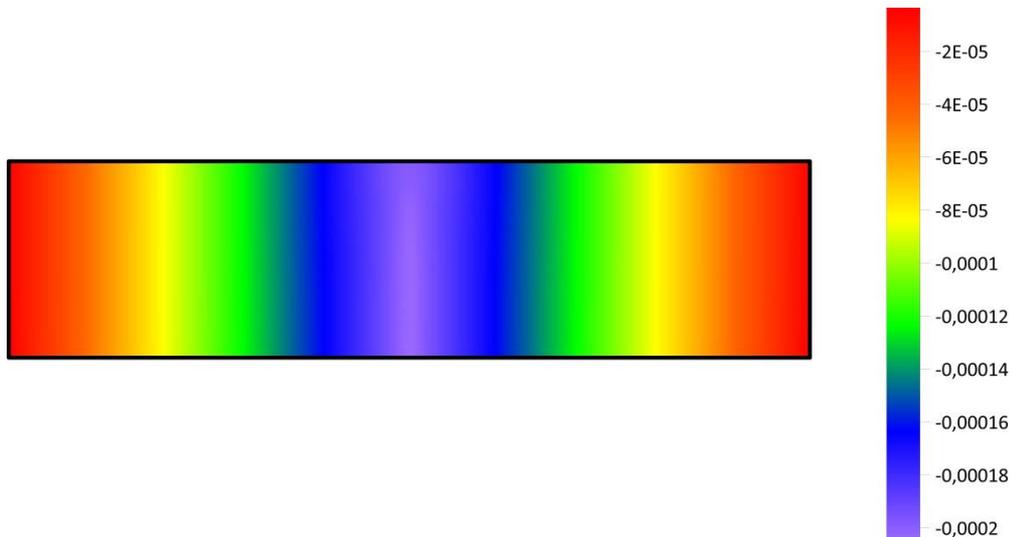
Fonte: autor (2020)

Em seguida, apresentam-se os deslocamentos em 1349 pontos internos considerando o último passo incremental da análise. É possível observar claramente a descontinuidade dos deslocamentos na região de fratura que ocorre, nesse caso, para o deslocamento horizontal.

Figura 47. Campos de deslocamento (m) horizontal (a) vertical (b) nos pontos internos



(a)

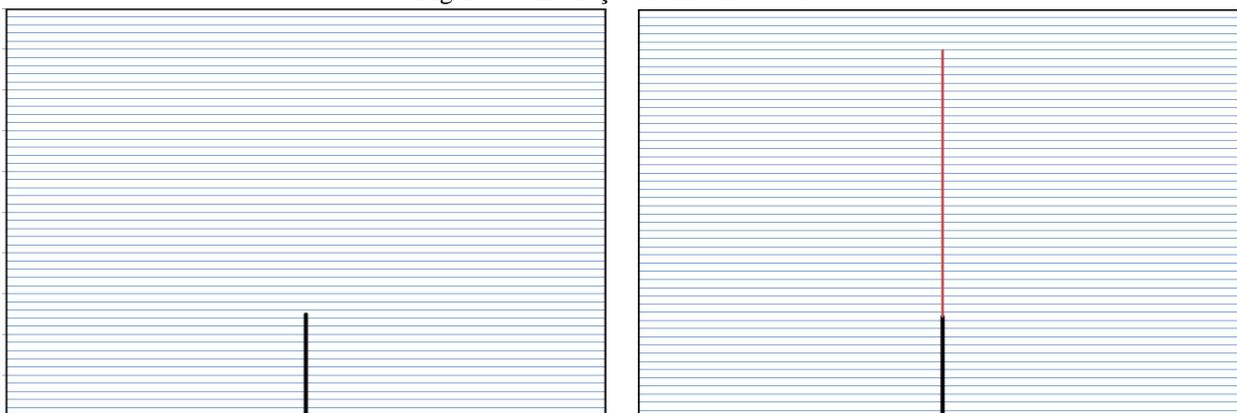


(b)

Fonte: autor (2020)

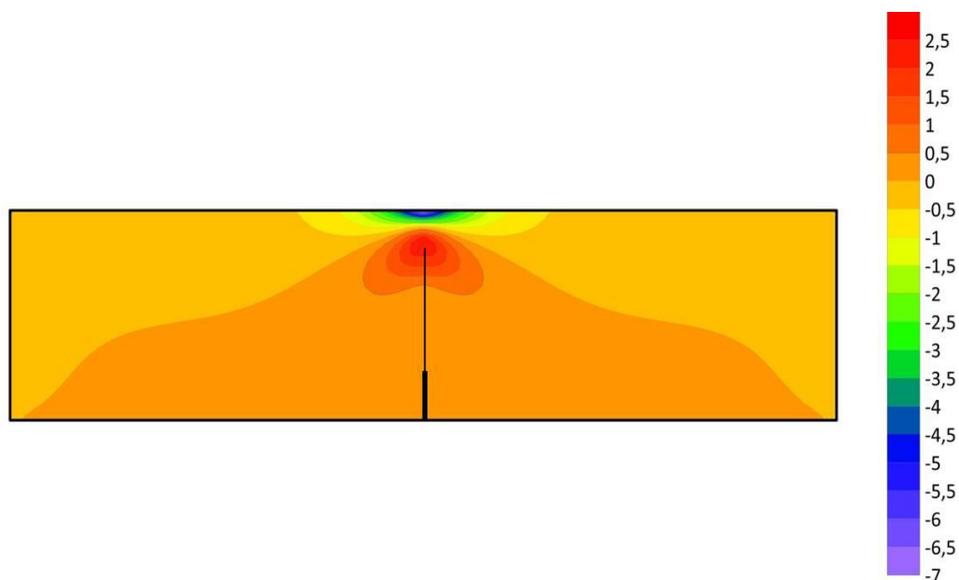
Na Figura 48, é ilustrado o processo de propagação da fissura partindo-se do entalhe central até a borda superior, em direção ao ponto de aplicação do carregamento. Observa-se que a estrutura fica muito próxima ao colapso, entretanto, não ocorrendo a separação da estrutura em duas partes.

Figura 48. Evolução da fissura coesiva.



Fonte: autor (2020)

Na Figura 49, é apresentada em escala de cores para o mesmo número de pontos da Figura 47, a tensão σ_1 (MPa) para o último passo incremental da análise. É possível notar a concentração de tensões na região próxima a ponta da fissura.

Figura 49. σ_1 (MPa) para o último instante da análise

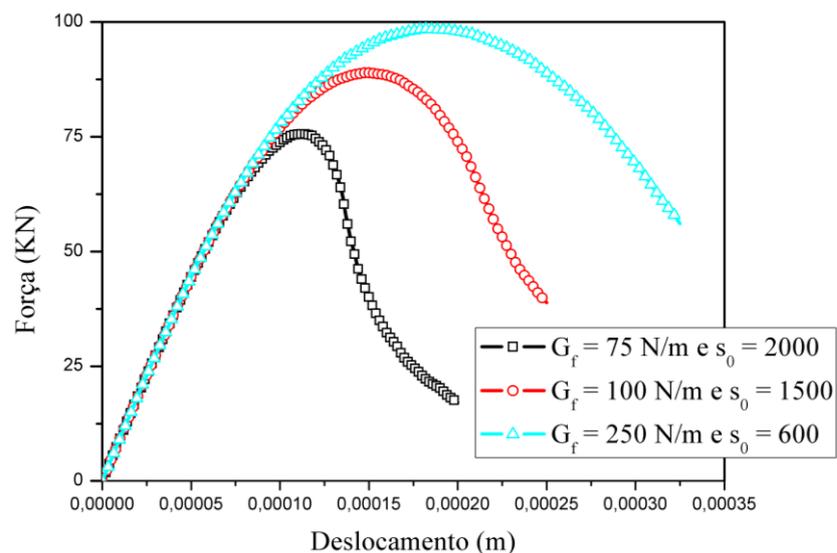
Fonte: autor (2020)

Em seguida, a implementação aqui desenvolvida será validada considerando-se o índice de fragilidade s_0 , equação (5.56),

$$s_0 = \frac{a_0 \cdot f_t}{G_f} \quad (5.56)$$

em que a_0 é o tamanho inicial da fissura. A partir das investigações realizadas por Häussler-Combe (2001) entende-se que espécimes com dimensões diferentes, mas com o mesmo índice de fragilidade s_0 , levam exatamente às mesmas curvas de deslocamento e carga. Aqui, o estudo será realizado modificando unicamente a energia de fraturamento G_f , a qual é inversamente proporcional a s_0 . Destaca-se a tendência de aparecimento do fenômeno *snap back*, o qual será comentado melhor no Exemplo 3, à medida que o índice de fragilidade tende a aumentar, ou seja, com a diminuição da energia de fraturamento.

Figura 50. Força versus deslocamento para diferentes índices de fragilidade s_0

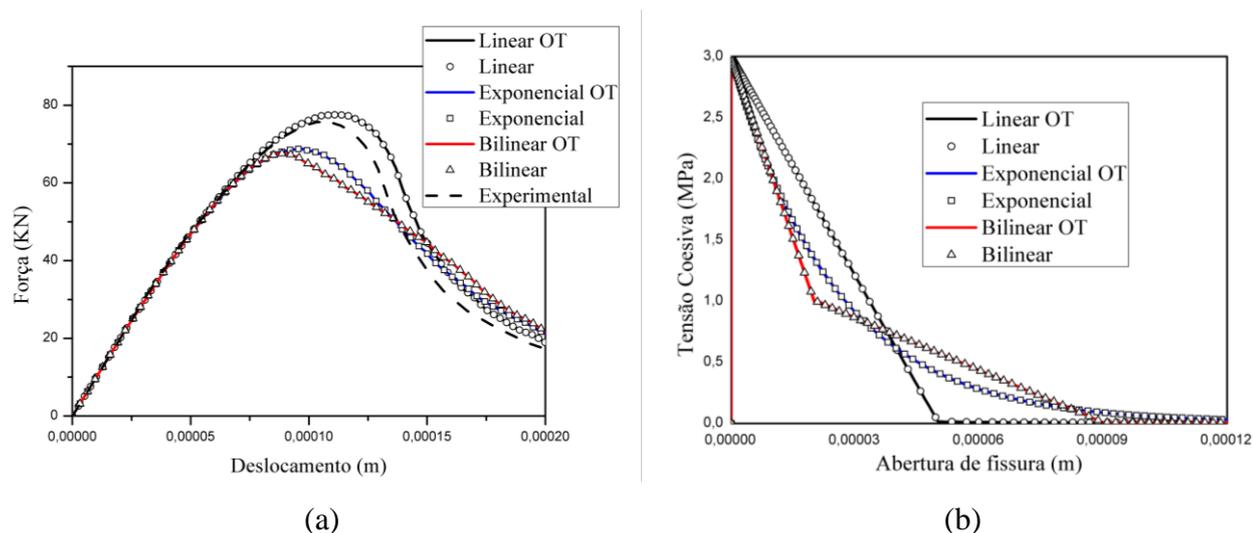


Fonte: autor (2020)

Quanto aos efeitos pertinentes à solução do sistema não linear, foi realizado um estudo comparativo entre a eficiência do OC e OT. Ambos os operadores foram capazes de reproduzir de modo semelhante os resultados apresentados. No entanto, o OT conseguiu chegar ao mesmo resultado em um número menor de iterações (Figura 51). A maior diferença percentual entre OC e OT foi de 0,149 % correspondente ao deslocamento de 0,138 mm para a lei coesiva linear. Para o caso Exponencial a maior diferença foi de 0,043% também correspondente ao

deslocamento de 0,138 mm. Para o último caso (lei Bilinear), a maior diferença obtida entre OC e OT foi de 0,041% para o deslocamento correspondente de 0,170 mm.

Figura 51. Comparação entre OC e OT (a) Força *versus* deslocamento (b) Tensão *versus* abertura de fissura



Fonte: autor (2020)

Tabela 1. Comparação de iterações entre OC e OT.

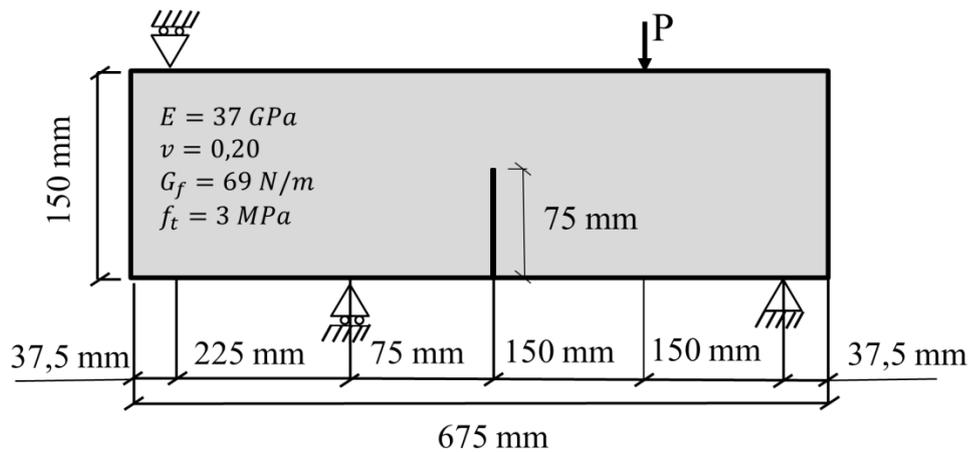
Lei coesiva	OC (iterações)	OT (iterações)	Economia (%) no número de iterações
Linear	10922	2109	~80,69
Exponencial	11266	1906	~83,08
Bilinear	7224	1229	~82,98

Fonte: autor (2020)

5.9.3 Exemplo 3: Viga sob flexão em 4 pontos submetida a modo I-II

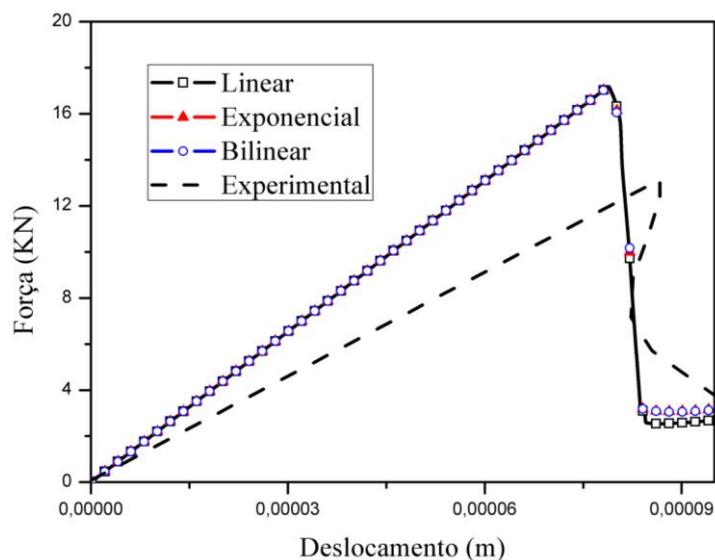
Neste exemplo, a implementação computacional desenvolvida é utilizada na simulação de uma viga de concreto com entalhe central submetida a um ensaio de cisalhamento. As propriedades geométricas, do material e de vinculação do modelo são apresentadas na Figura 52.

Figura 52. Propriedades geométricas e do material para o Exemplo 3.



Fonte: autor (2020)

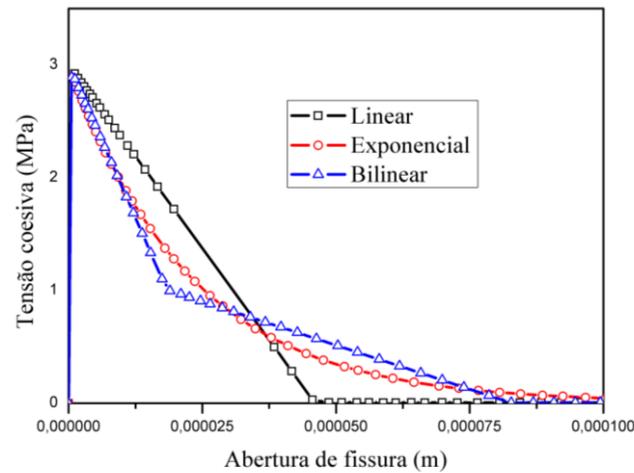
De forma semelhante aos exemplo anteriores, as três leis coesivas foram adotadas. A malha do contorno constitui-se de cerca de 250 elementos lineares, com 2 elementos lineares descontínuos na extremidade superior do entalhe, para propiciar a abertura. Os resultados de força equivalente versus deslocamento vertical medidos no ponto de aplicação da carga foram comparados com o resultado experimental de Galvez *et al.* (1998) considerando a espessura da viga de 50 mm. A partir do gráfico da Figura 53 é possível perceber que o resultado numérico para as três leis coesivas adotadas apresentou comportamento mais rígido no trecho ascendente em relação ao experimental. Tal fato é explicado por se tentar reproduzir infinitos graus de liberdades por meio de um número discreto de pontos no contorno. No ramo descendente, foi observada a perda de estabilidade do algoritmo, caracterizada pelos longos trechos retos na curva da reposta não linear. De modo geral, pode-se observar que as três leis coesivas conseguiram capturar o comportamento não linear por meio da formulação de dipolos, e o valor de ruptura para as três leis coesivas se mostrou superior, para um correspondente deslocamento vertical menor. No resultado experimental da estrutura, observa-se a presença de uma instabilidade conhecida como *snap back*. Tal fenômeno caracteriza-se por uma grande perda de rigidez ocasionando regressão dos deslocamentos após a carga de ruptura.

Figura 53. Resposta força *versus* deslocamento da estrutura

Fonte: autor (2020)

Em seguida, foi avaliada a resposta de tensão coesiva do primeiro nó da interface a entrar no regime coesivo (Figura 54). Como mencionado acima, no comportamento real da estrutura se observa a presença da instabilidade conhecida como *snap back*. Essa instabilidade acontece nos longos trechos sem pontos quando a estrutura apresenta uma grande perda de rigidez após a carga de ruptura. Desta forma, o algoritmo OC baseado no deslocamento como variável guia não conseguiu lidar adequadamente com esse fenômeno. Uma alternativa é o emprego de uma estratégia de controle, como a baseada no comprimento de arco (*arc length*), ou segundo Venturini (1995), o correto rearranjo das equações do sistema não linear de modo a obter outra variável guia que não seja o deslocamento, como exemplo, a abertura de fissura.

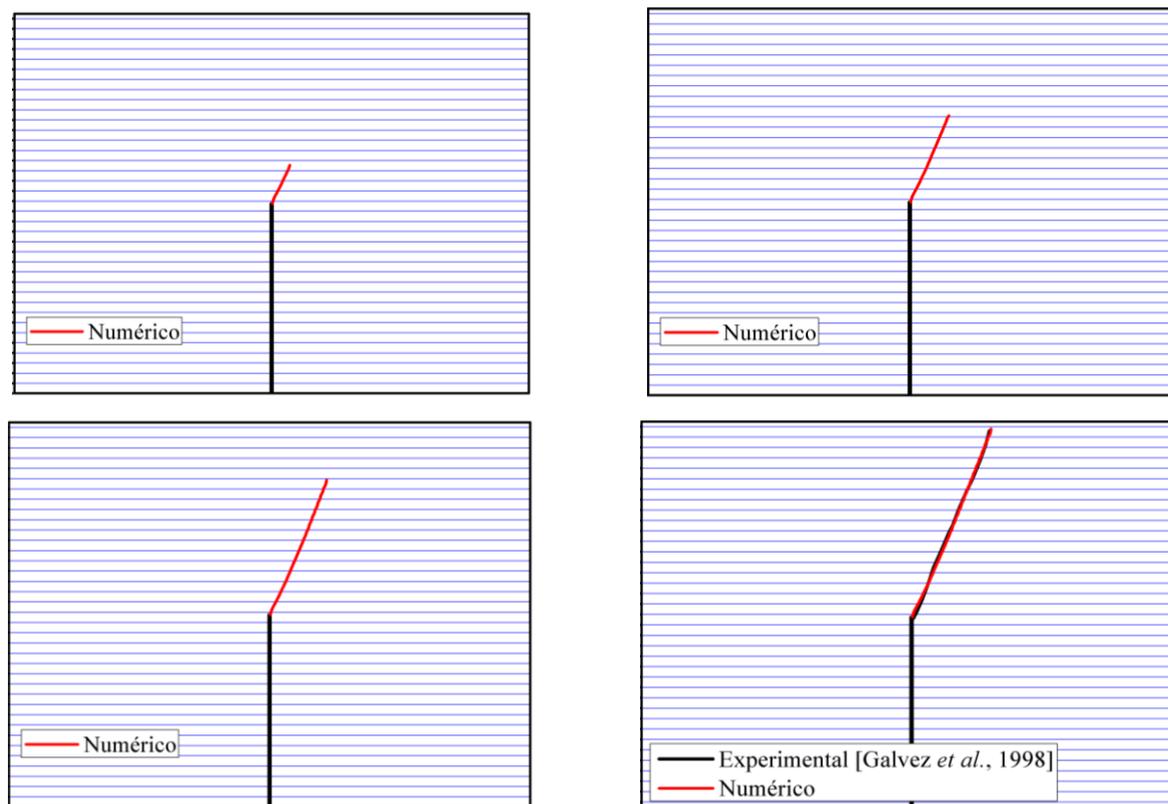
Figura 54. Respostas da tensão coesiva na interface



Fonte: autor (2020)

Na Figura 55, é apresentado a propagação da fissura em determinados instantes da análise. Nota-se que a fissura parte do entalhe central em direção a borda superior próxima a região de onde o carregamento é aplicado. É possível observar boa concordância com o resultado experimental.

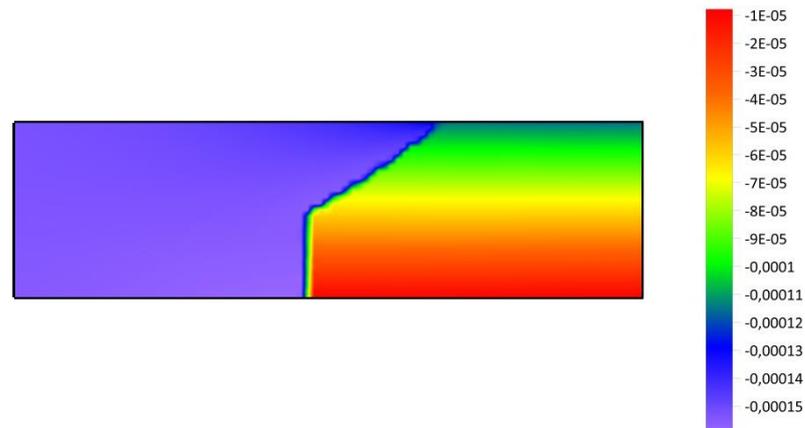
Figura 55. Evolução da fissura para alguns instantes da análise



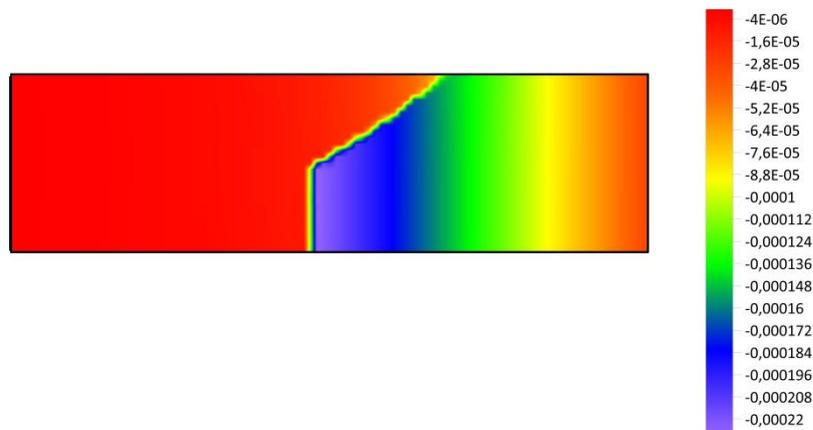
Fonte: autor (2020)

Por fim, para fins qualitativos, é apresentado o perfil dos deslocamentos avaliados em 2891 pontos internos. É possível observar a descontinuidade dos deslocamentos na região onde a fissura propaga para ambos deslocamentos vertical e horizontal.

Figura 56. Campos de deslocamento (m) horizontal (a) vertical (b) para pontos internos



(a)

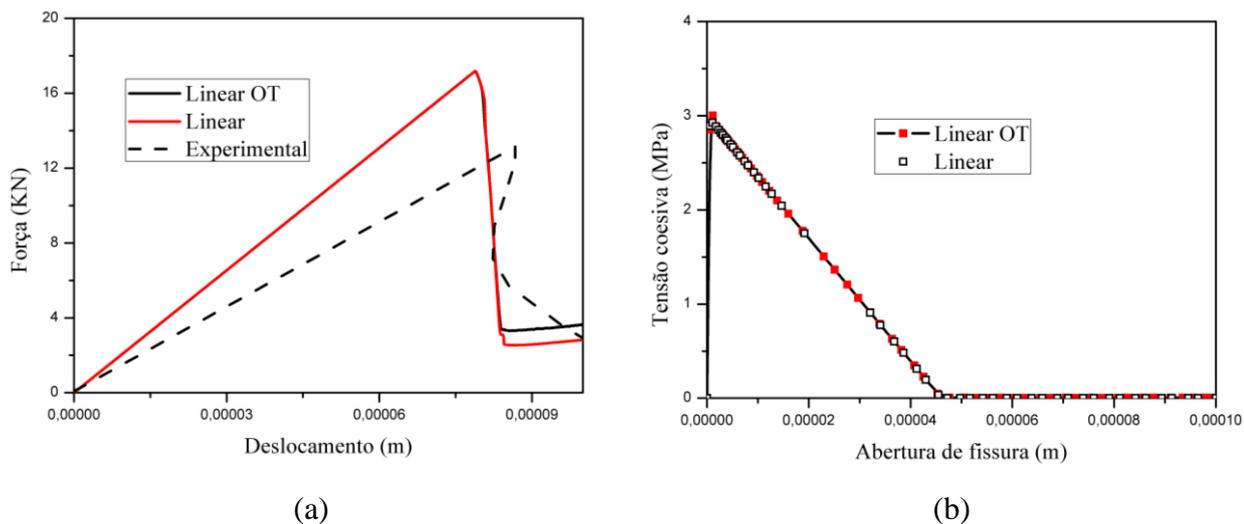


(b)

Fonte: autor (2020)

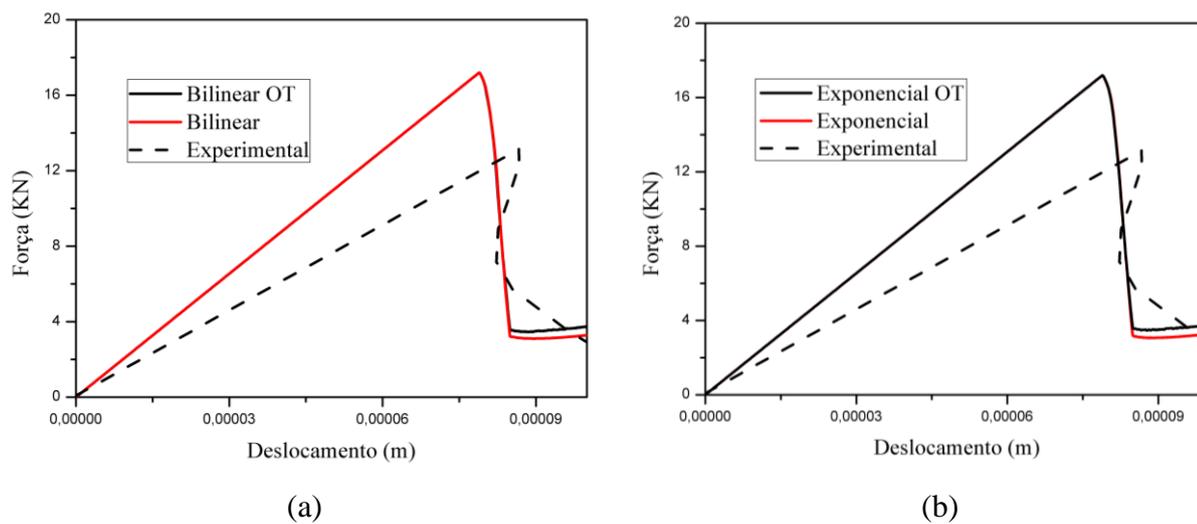
No que se refere ao uso do OT, deve-se destacar que os resultados obtidos no gráfico Força *versus* deslocamento divergiram apenas no trecho descendente a partir do deslocamento de 0,085 mm. Na Figura 57b, é possível observar que o OC apresentou trechos sem pontos mais longos que o OT, indicando uma melhor resposta numérica para o OT no exemplo aqui analisado.

Figura 57. Comparação entre OC e OT (a) Força *versus* deslocamento (b) Tensão *versus* abertura de fissura



Na Figura 58, é apresentado o estudo comparativo entre OC e OT para as leis Bilinear e Exponencial. Por fim, a Tabela 2 traz informações referentes ao número total de iterações, bem como a economia alcançada.

Figura 58. Comparação entre OC e OT (a) Bilinear (b) Exponencial



Fonte: autor (2020)

Tabela 2. Comparação de iterações entre OC e OT.

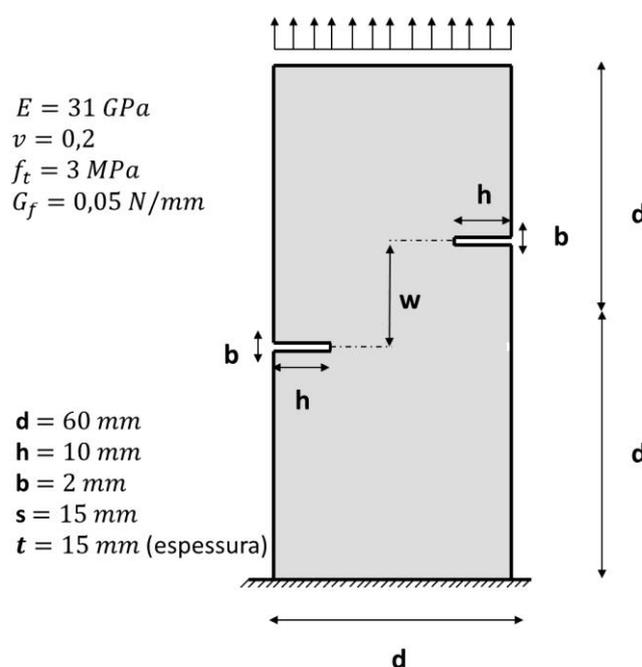
Lei coesiva	OC (iterações)	OT (iterações)	Economia (%) no número de iterações
Linear	47006	19384	~58,76
Exponencial	42472	18956	~55,36
Bilinear	41738	19303	~53,75

Fonte: autor (2020)

5.9.4 Exemplo 4: Chapa com 2 entalhes modo misto I-II

Neste exemplo, um espécime de concreto com dois entalhes analisado experimentalmente por Shi *et al.* (2000) e numericamente por Peixoto et al. (2018), com a formulação indireta do MEC baseada em fortes discontinuidades (MEC CSDA), é apresentado. Desta forma, a análise de propagação de múltiplas fissuras é realizada. As propriedades geométricas, do material e de vinculação do espécime são apresentadas na Figura 59. A malha de contorno constitui-se de 304 elementos lineares, com 2 elementos lineares descontínuos nas extremidades de cada entalhe.

Figura 59. Exemplo 4 – Shi *et al.* experimento

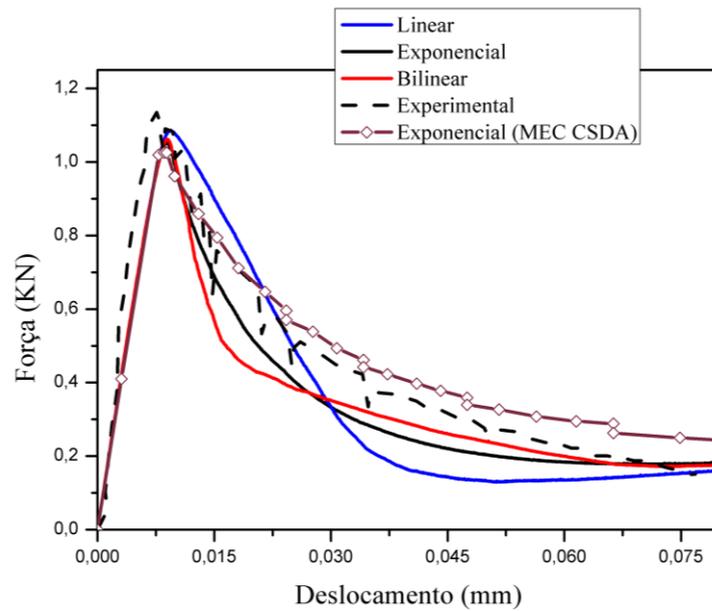


Fonte: autor (2020)

Na Figura 60, é apresentada a resposta numérica do carregamento aplicado para um deslocamento vertical imposto na extremidade superior do espécime. É possível constatar que o trecho ascendente apresenta comportamento menos rígido em relação ao resultado experimental. Ainda assim, todas as leis coesivas consideradas obtiveram boa aproximação para a carga de ruptura. É importante mencionar que a lei linear apresentou respostas satisfatórias até o deslocamento de 0,023 mm. Logo após, as leis bilinear e exponencial melhor representaram o

comportamento experimental. Além disso, equivalência dos resultados entre a formulação de dipolos e MEC CSDA pode ser observado.

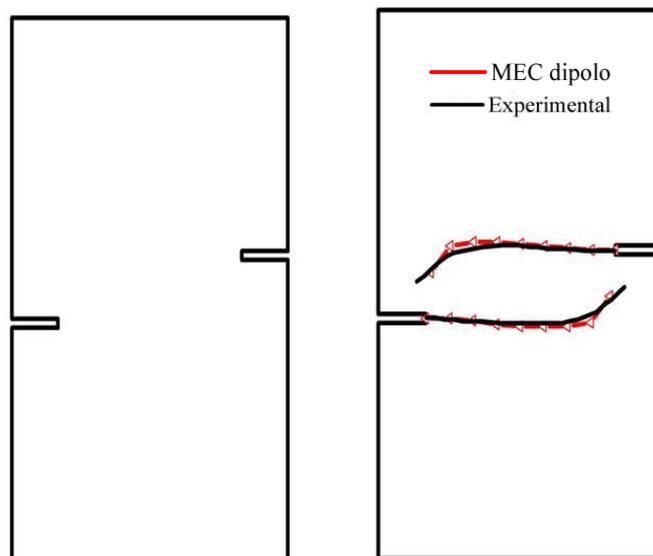
Figura 60. Resposta de Força *versus* deslocamento vertical da estrutura



Fonte: autor (2020)

Na Figura 61, é ilustrada a configuração das fissuras para o incremento final da análise. É possível notar a tendência das fissuras de se encontrarem.

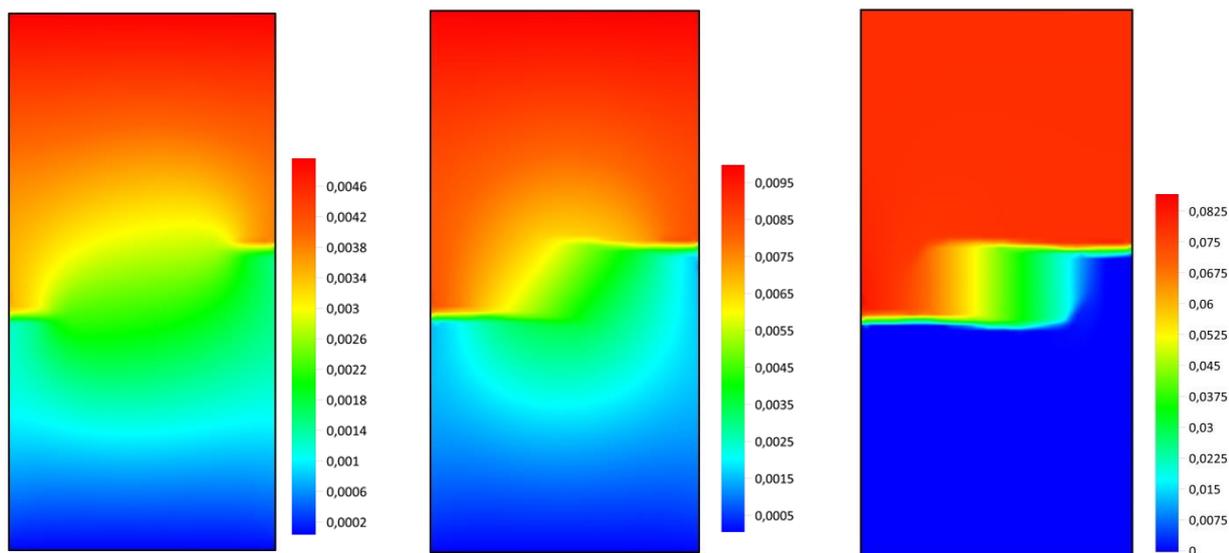
Figura 61. Configuração final da fissura



Fonte: autor (2020)

Outra análise realizada refere-se à evolução das fissuras em três instantes diferentes da propagação. Nota-se a tendência de separação do sólido em duas partes independentes, com a evolução do deslocamento imposto. Aproximadamente 6500 pontos internos foram utilizados nesta análise.

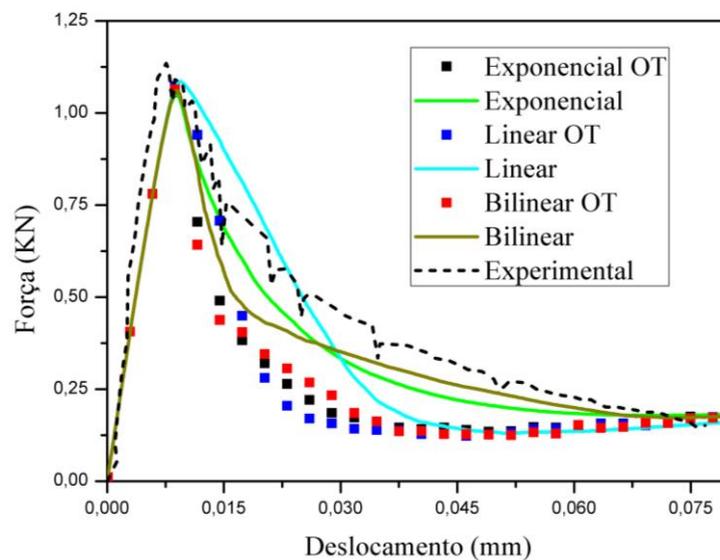
Figura 62. Evolução da fissura em escala de cores



Fonte: autor (2020)

Na Figura 63, é apresentado um estudo comparativo entre os operadores OC e OT considerando-se as três leis coesivas. É possível observar que os dois operadores obtiveram respostas semelhantes no trecho ascendente, divergindo a partir do início do trecho descendente. Apesar de apresentarem respostas diferentes no trecho pós pico, nota-se que todas as curvas apresentaram respostas semelhantes a partir do deslocamento de 0,07 mm (indo de encontro com o resultado experimental). A comparação de eficiência entre o OC e OT desse exemplo é apresentada na Tabela 3.

Figura 63. Comparação entre OC e OT para as três leis coesivas



Fonte: autor (2020)

Tabela 3. Comparação de iterações entre OC e OT.

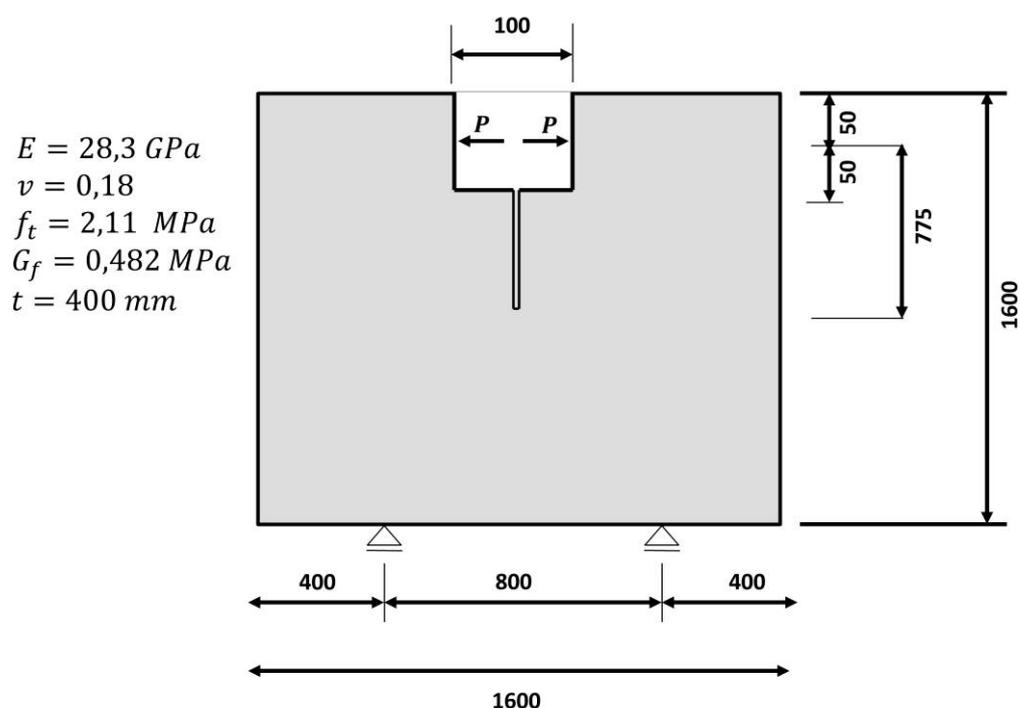
Lei coesiva	OC (iterações)	OT (iterações)	Economia (%) no número de iterações
Linear	4176	2471	~40,83
Exponencial	4052	2502	~38,25
Bilinear	4130	2500	~39,46

Fonte: autor (2020)

5.9.5 Exemplo 5: Espécime de concreto em Modo I (“Wedge Splitting”)

O presente exemplo trata de um espécime de concreto submetido a uma carga de aplicação descendente, produzindo forças perpendiculares às suas superfícies inclinadas. A geometria do sólido, bem como as propriedades do material e condições de contorno, é apresentada na Figura 64. Este exemplo é investigado experimentalmente por Winkler (2001), e numericamente por Uger et al. (2007), XFEM. A malha do contorno constitui-se de 365 elementos lineares, com 2 elementos lineares descontínuos na extremidade inferior do entalhe.

Figura 64. Geometria do exemplo 5

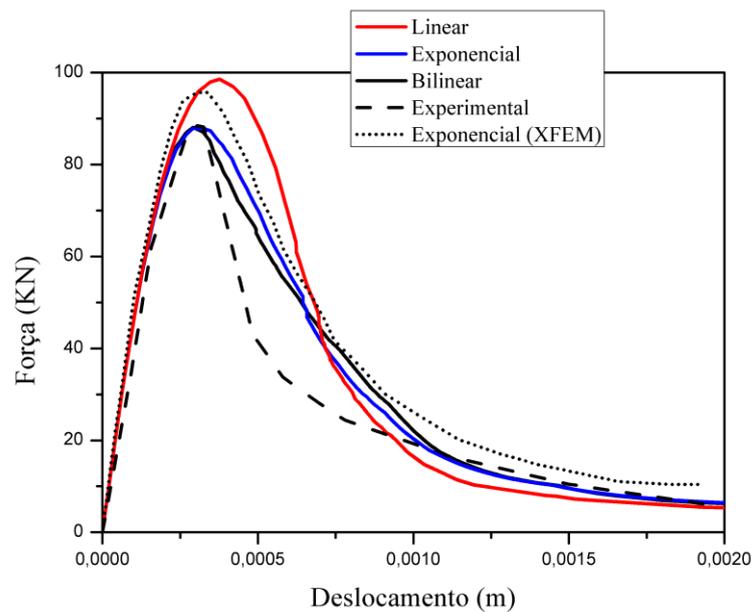


Fonte: autor (2020)

Na Figura 65, é apresentado a resposta da estrutura em termos de Força *versus* deslocamento horizontal no ponto de aplicação da carga, comparados com o resultado experimental de Winkler (2001). A partir da Figura 65, é possível perceber que todos os modelos coesivos tiveram comportamento próximo ao experimental em seu trecho ascendente. Além disso, as leis Bilinear

e Exponencial apresentaram boa aproximação da carga de ruptura. No trecho descendente, os modelos Bilinear e Exponencial apresentaram melhor aproximação com o resultado experimental até o deslocamento de 0.75 mm. Logo após, as três leis coesivas adotadas apresentaram respostas semelhantes. Além disso, comportamento semelhante é notado entre a formulação de dipolos e o XFEM.

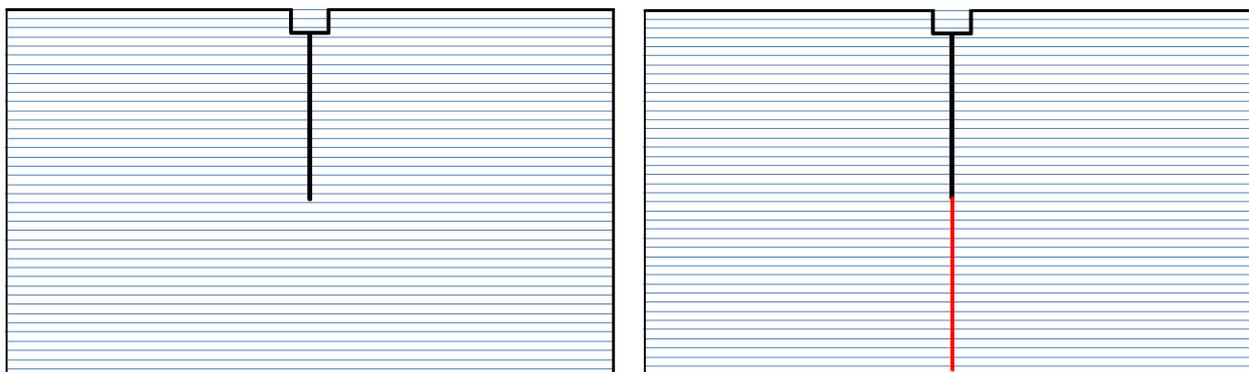
Figura 65. Reposta em Força versus deslocamento da estrutura



Fonte: autor (2020)

Na Figura 66, é ilustrada a configuração final da fissura após o último incremento de carga. A fissura apresentou direção de propagação fixa durante toda a análise.

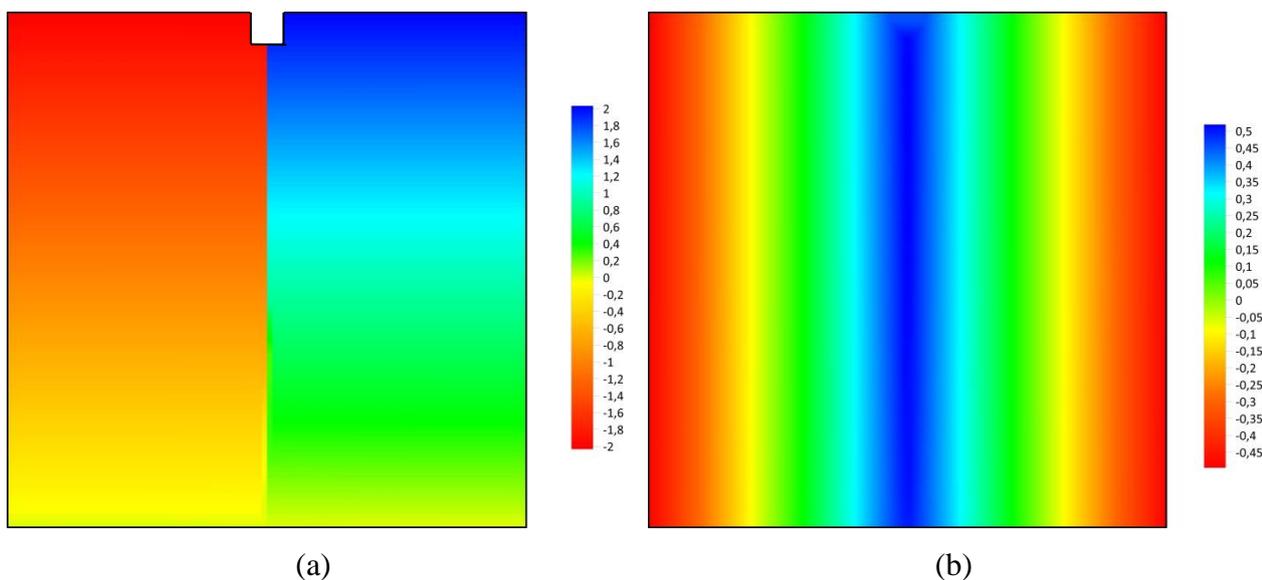
Figura 66. Configuração final da fissura



Fonte: autor (2020)

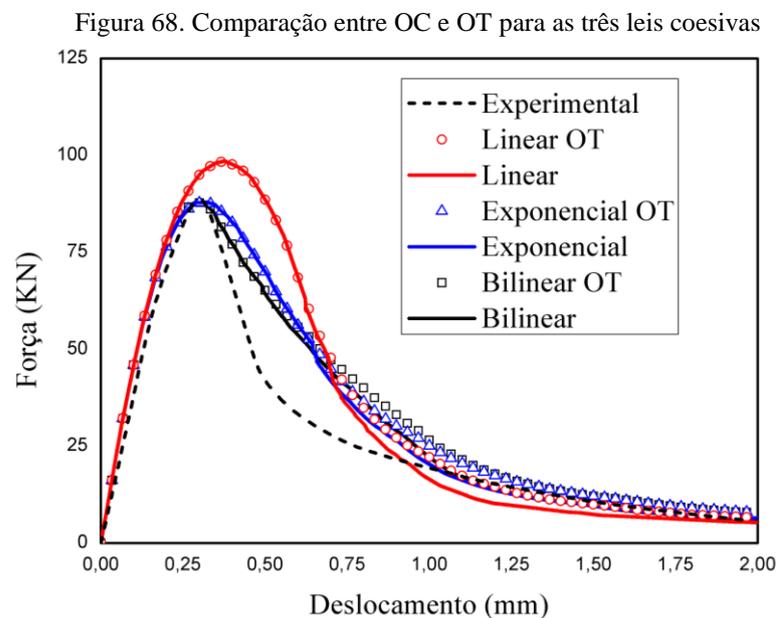
São apresentados dois gráficos em escala de cores para representação dos campos de deslocamentos nos pontos internos. Ao total, 3911 pontos internos foram adotados. Assim como nos exemplos anteriores, é possível observar a descontinuidade em deslocamento devido ao processo de fratura do espécime (Figura 67a). Além disso, nota-se que para pontos próximos a superfície superior do sólido, os deslocamentos horizontais tiveram maior magnitude, o que é de se esperar, uma vez que o carregamento foi imposto nessa região. Na Figura 67b, é ilustrado os deslocamentos verticais para o mesmo número de pontos internos.

Figura 67. Campos de deslocamentos nos pontos internos



Fonte: autor (2020)

Por fim, na Figura 68, é apresentado um estudo comparativo entre os dois operadores para a curva Força *versus* deslocamento. É possível observar que, até o deslocamento aproximadamente igual a 0,75 mm, os dois operadores apresentaram respostas semelhantes para todas as três leis coesivas. Após esse deslocamento, houve uma tendência de divergência entre os operadores OC e OT para todas as leis analisadas. Percebe-se também, assim como no exemplo 4, uma maior tendência para todas as curvas, de apresentarem resultados próximos ao experimental no trecho final da curva descendente. Na Tabela 4, é apresentada a comparação de eficiência entre OC e OT. Para este caso a lei coesiva exponencial apresentou melhor economia no número de iterações, ~61,53%.



Fonte: autor (2020)

Tabela 4. Economia de iterações

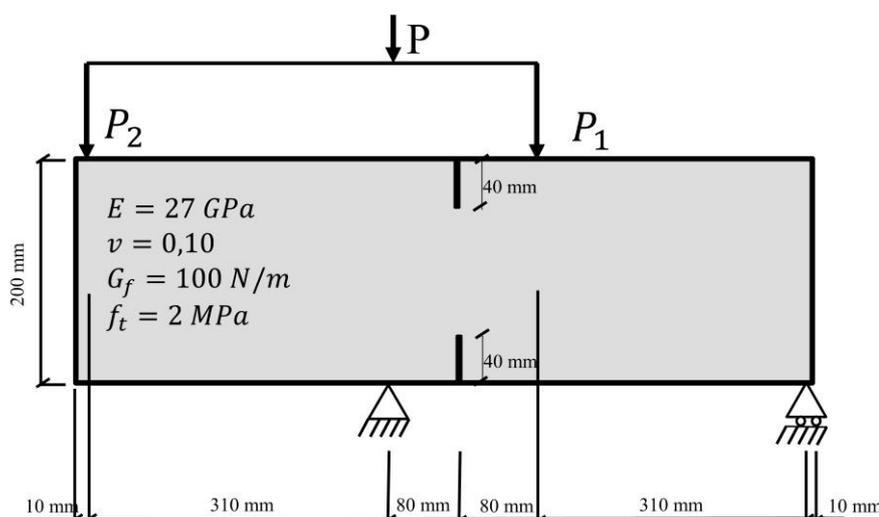
Lei coesiva	OC (iterrações)	OT (iterrações)	Economia (%) no número de iterrações
Linear	17558	7582	~56,82
Exponencial	17028	6550	~61,53
Bilinear	15340	6785	~55,77

Fonte: autor (2020)

5.9.6 Exemplo 6: Viga de concreto com entalhe duplo e modo de solicitação misto I-II

Um espécime de concreto com entalhe duplo e submetido a modo I-II de fraturamento é apresentado na Figura 69. Assim como no exemplo 5.9.4, a análise de múltiplas fissuras é realizada. Este exemplo foi simulado por Carpinteri (1994) com uma formulação coesiva baseada no MEF e por Saleh e Aliabadi (1995) com a formulação do MEC Dual. Foram utilizados 540 elementos lineares para discretização desse problema.

Figura 69. Viga de concreto com entalhe duplo submetida a modo misto

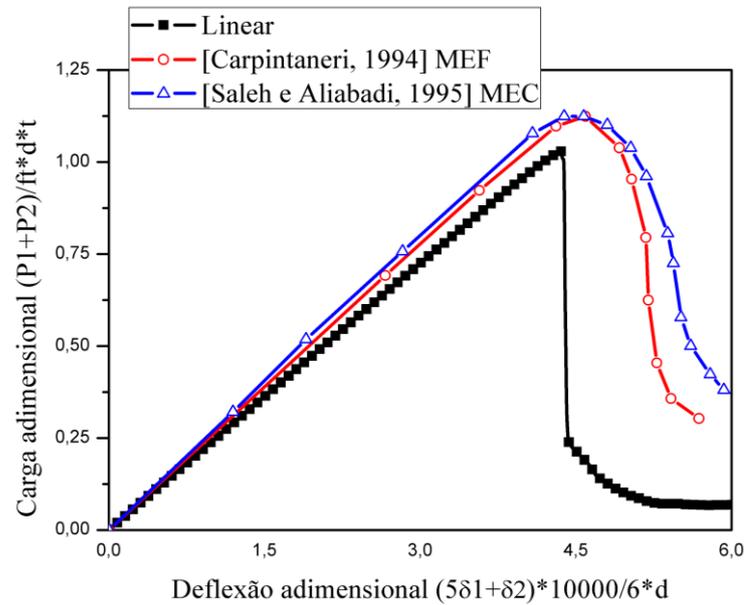


Fonte: autor (2020)

A resposta não linear da estrutura foi avaliada em termos de força e deflexão adimensionais. A força adimensional é calculada como $P_{adm} = (P_1 + P_2) / f_t \cdot d \cdot t$, na qual $d = 200 \text{ mm}$ é a altura da viga e $t = 1 \text{ mm}$ é a espessura unitária. A deflexão adimensional pode ser calculada como $D_{adm} = (5\delta_1 + \delta_2) \cdot 10^4 / (6d)$ sendo δ_1 e δ_2 os deslocamentos dos pontos de aplicação 1 e 2. Na Figura 70 é apresentada a resposta não linear da estrutura considerando a lei coesiva Linear apenas, uma vez que os demais autores também utilizaram a mesma lei.

Nota-se que a formulação baseada em dipolos conseguiu capturar de maneira satisfatória o trecho ascendente, apresentando um valor de carga de ruptura um pouco menor em comparação com os demais autores.

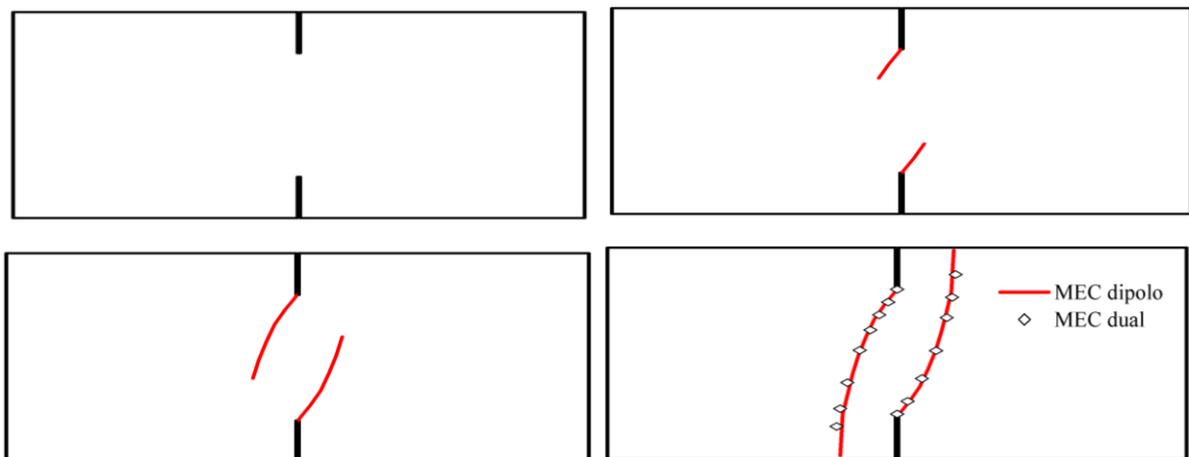
Figura 70. Resposta não linear da estrutura



Fonte: autor (2020)

Quanto à propagação, na Figura 71, é apresentado a configuração da fissura para alguns instantes da análise. Nota-se que ao contrário do exemplo passado, a fissura se dá em modo misto ao longo de todo o ensaio. Portanto, a direção de fissuração se altera durante toda a análise.

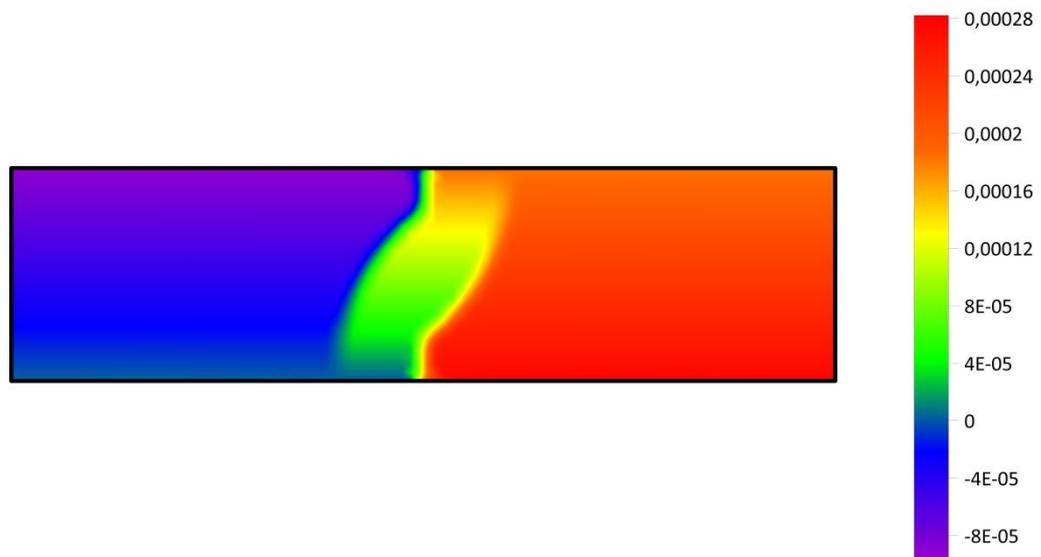
Figura 71. Propagação da fissura



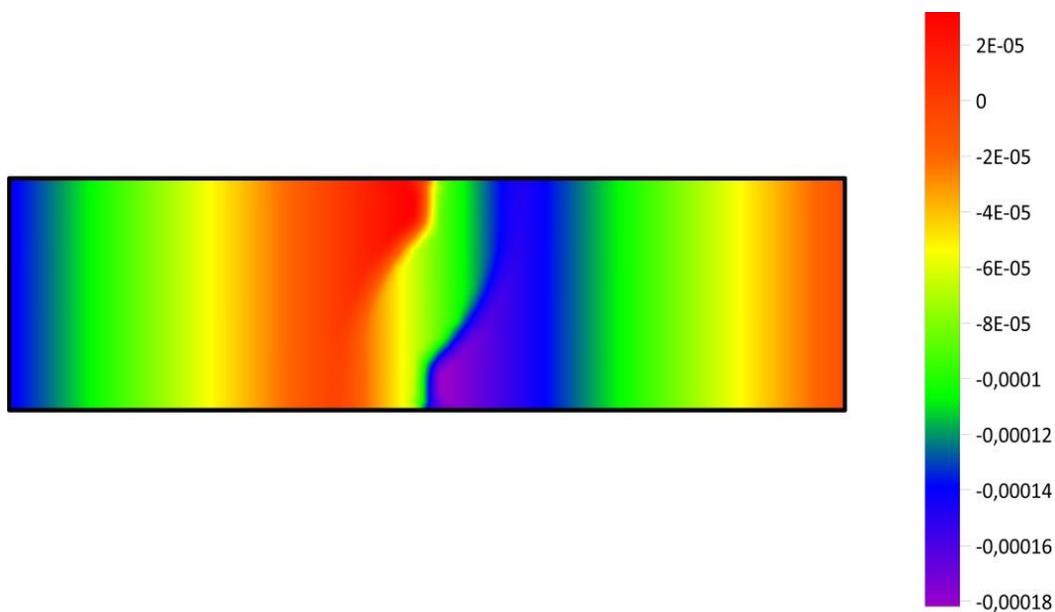
Fonte: autor (2020)

São apresentados gráficos em escala de cores para representação dos deslocamentos internos utilizando-se cerca de 7000 pontos internos. É possível observar claramente as descontinuidades de deslocamento devido a fissura em ambas as direções.

Figura 72. Campos de deslocamento (m) horizontal (a) vertical (b) nos pontos internos



(a)

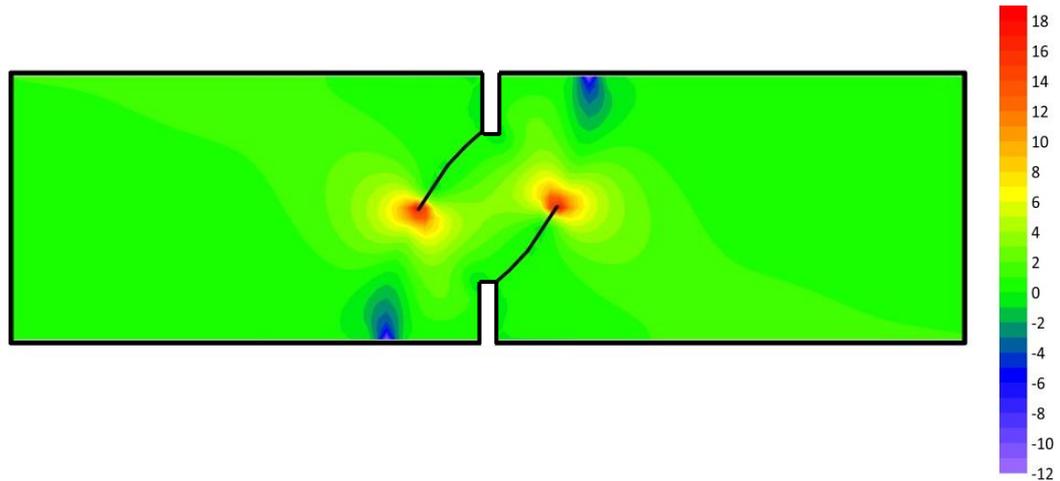


(b)

Fonte: autor (2020)

Na Figura 73, apresenta-se o campo de máxima tensão principal para um instante da análise quando as fissuras propagaram até altura central da viga. Nota-se a visível concentração de tensões de tração próxima a ponta da fissura. Além disso, é importante destacar a concentração de tensões de compressão na região do apoio e de aplicação da carga.

Figura 73. Máxima tensão principal (MPa) para um instante da análise



Fonte: autor (2020)

Quanto aos efeitos pertinentes a solução do sistema não linear, apresenta-se na Tabela 5, o número de iterações para o OT e OC para a lei coesiva linear.

Tabela 5. Economia de iterações

Lei coesiva	OC (iterações)	OT (iterações)	Economia (%) no número de iterações
Linear	24410	4698	~83,33

Fonte: autor (2020)

6 ACOPLAMENTO ENTRE MEC E MODELOS DE CONFIABILIDADE

Neste capítulo objetiva-se analisar o acoplamento entre modelos mecânicos regidos pela elasticidade linear e não linear e os modelos de confiabilidade estrutural. No acoplamento com a formulação não linear do MEC, os modelos mecânicos simulam o comportamento de estruturas planas sujeitas ao surgimento de fissuras e regidas pela teoria mecânica da fratura coesiva. No que diz respeito a confiabilidade estrutural três exemplos são aqui considerados, os quais objetivam determinar parâmetros importantes da confiabilidade estrutural.

O primeiro exemplo traz uma cavidade em meio semi-infinito, simulando um túnel, com a consideração de forças gravitacionais. Esse exemplo foi validado deterministicamente na seção 3.8, com a utilização da solução de referência obtida no *software* ABAQUS. Desta forma, a análise desenvolvida nesse capítulo objetiva validar o acoplamento da formulação elástica do MEC com algoritmos da confiabilidade. Para isto, o acoplamento direto via (HLRF-FORM) é empregado e confrontado com as respostas obtidas pelo Método de Monte Carlo por Amostragem simples. Os dados estatísticos da Tabela 6 foram adaptados de Hamrouni *et al.* (2017).

No exemplo dois, a aplicação apresentada na seção 5.9.2 é revisitada no sentido de avaliar a influência de parâmetros da mecânica da fratura na resposta mecânica da estrutura. Duas etapas são consideradas, a primeira objetiva caracterizar a carga de ruptura por meio de um processo de simulação considerando-se a abordagem por Amostragem simples e Amostragem por Hipercubo Latino. Já na segunda etapa, a avaliação da influência dos parâmetros aleatórios é realizada por meio do acoplamento direto e por uma simulação para levantamento de dados estatísticos ao longo da curva Força *versus* deslocamento.

No último exemplo, a aplicação apresentada na seção 5.9.2 é revisitada para avaliação a influência da aleatoriedade dos parâmetros que definem as leis coesivas na direção de propagação da fissura.

No acoplamento com uma rotina de confiabilidade do tipo FORM, a equação de estado limite permanece implícita e expressa através de um modelo mecânico, desta forma, os gradientes da função de estado limite, utilizados na estimativa da probabilidade de falha do problema, podem ser calculados numericamente por meio da equação (6.1), através de consultas ao modelo numérico.

Desta forma, as derivadas da função de falha podem ser calculadas numericamente por

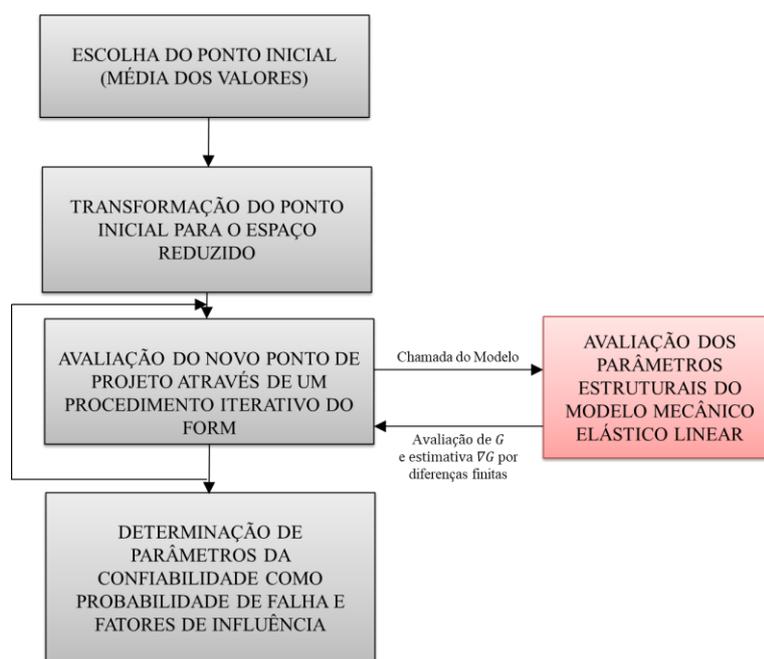
diferenças finitas, para cada chamada do modelo mecânico do MEC. Para este trabalho, estimou-se o Δ como 0,1% do valor médio da variável aleatória (X). É importante destacar que o cálculo dos gradientes pode ser altamente custoso, a depender da não linearidade envolvida. Além disso, caso as variáveis envolvidas apresentem ordem de grandeza diferentes, o cálculo dos gradientes pode ser dificultado, sendo importante adimensionalizar o tamanho do passo entre variáveis com diferentes ordens de grandeza.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial G(a_1, a_2, \dots, a_n)}{\partial a_1} &= \lim_{\Delta_{a_1}} \frac{G(X_1 + \Delta_{X_1}, X_2, \dots, X_n) - G(X_1 - \Delta_{X_1}, X_2, \dots, X_n)}{2\Delta_{X_1}} \\
 \frac{\partial G(a_1, a_2, \dots, a_n)}{\partial a_2} &= \lim_{\Delta_{a_2}} \frac{G(X_1, X_2 + \Delta_{X_2}, \dots, X_n) - G(X_1, X_2 - \Delta_{X_2}, \dots, X_n)}{2\Delta_{X_2}} \\
 \frac{\partial G(a_1, a_2, \dots, a_n)}{\partial a_n} &= \lim_{\Delta_{a_n}} \frac{G(X_1, X_2, \dots, X_n + \Delta_{X_n}) - G(X_1, X_2, \dots, X_n - \Delta_{X_n})}{2\Delta_{X_n}}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

6.1 Acoplamento direto entre o MEC e o algoritmo HLRF/FORM

O modelo de confiabilidade baseado no acoplamento entre o modelo mecânico e o FORM quase sempre apresenta soluções estáveis com boa convergência, além de apresentar esses resultados em um menor número de chamadas que o modelo envolvendo o método de Monte Carlo. É importante destacar que os resultados obtidos por meio desta metodologia e apresentados nesta primeira etapa se limitaram a um estudo em domínios planos, no regime elástico linear, ressaltando-se que a estabilidade e a acurácia do método sofrem alterações no regime não linear. Apresenta-se na Figura 74 um ilustrativo esquema da estratégia de acoplamento direto entre o modelo mecânico elástico linear e o FORM.

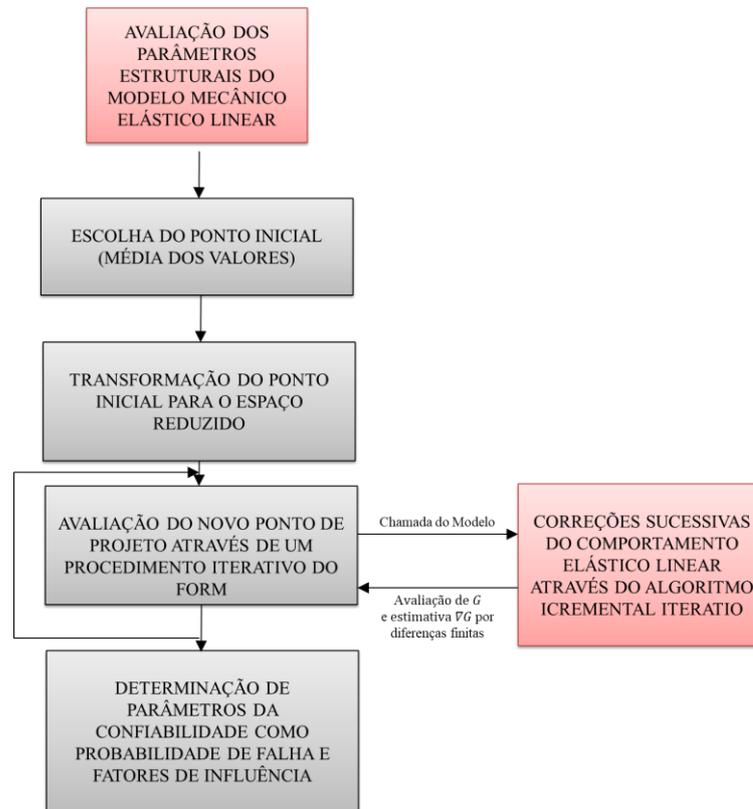
Figura 74. Estratégia de acoplamento direto entre o modelo mecânico elástico linear e o FORM.



Fonte: autor (2020).

Quanto ao acoplamento entre o modelo de fratura coesiva e o algoritmo HLR/FORM (Figura 75) destaca-se pra o caso em que a consideração de incertezas seja presente apenas nos parâmetros de fratura. Para este caso, a consulta ao modelo elástico linear ocorrerá uma única vez, com a obtenção dos parâmetros mecânicos necessários e as correções do comportamento elástico linear para cada chamada do modelo através de algoritmos incrementais iterativos.

Figura 75. Estratégia de acoplamento direto entre o modelo de fratura coesiva e o FORM.



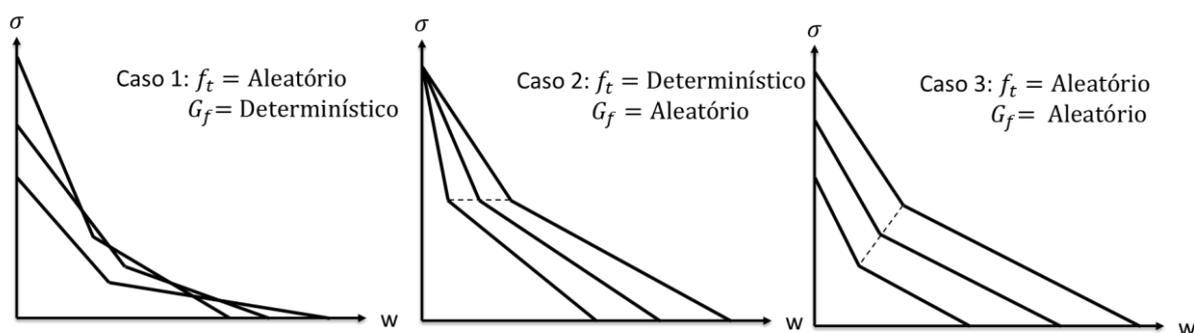
Fonte: autor (2020).

Caso variáveis como módulo de elasticidade (E), Poisson (ν) ou carregamento externo também sejam considerados aleatórios, será necessário a consulta do modelo mecânico elástico linear para cada chamada do modelo.

6.2 Acoplamento entre o MEC e o método de Monte Carlo

Com relação ao caso da simulação de Monte Carlo, a estratégia é mais intuitiva, consistindo na execução do modelo numérico a cada simulação do método. Como no algoritmo HLRf/FORM, caso a consideração da aleatoriedade esteja presente apenas nos parâmetros de fratura coesiva (Figura 76), a consulta ao modelo elástico linear ocorrerá uma única vez, e para cada simulação será realizado correções do comportamento elástico linear através de algoritmos incrementais iterativos.

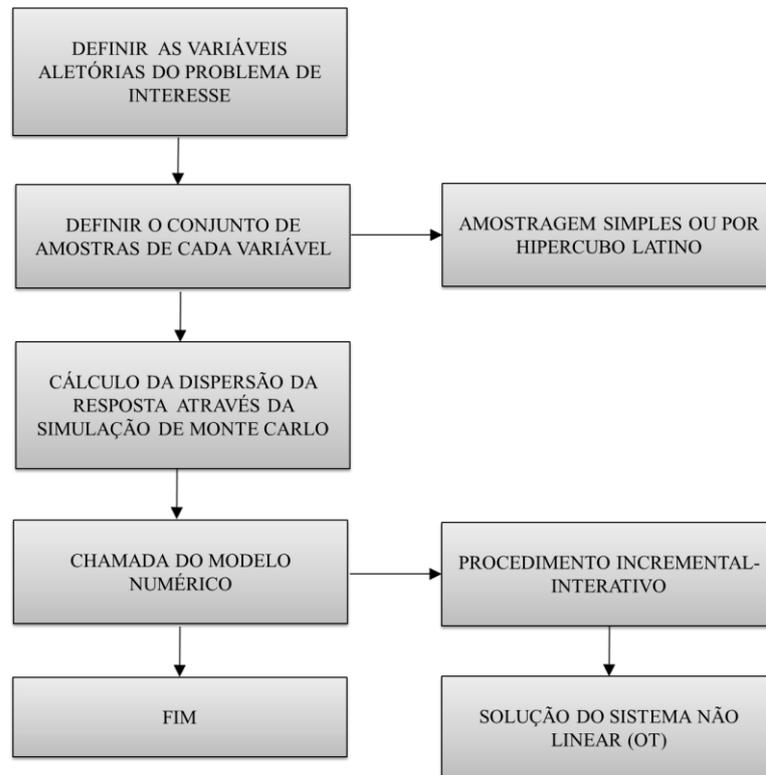
Figura 76. Aleatoriedade em parâmetros de fraturamento (lei bilinear)



Fonte: autor (2020)

Apesar de eficiente e robusto na análise de problemas altamente não lineares, a utilização do método de Monte Carlo simples apresenta uma séria limitação pelo custo computacional. Desta forma, a Amostragem por Hipercubo Latino é também utilizada para redução do número de chamadas do modelo numérico. Na Figura 77, é apresentado o procedimento para obtenção de dados estatísticos da variável carga de ruptura, utilizando-se de um processo de simulação.

Figura 77. Esquema do procedimento de simulação para caracterização da carga de ruptura (Inferência estatística)



Fonte: autor (2020)

6.3 Aplicações

Serão apresentadas a seguir algumas aplicações para validar a formulação linear e não linear do MEC considerando a aleatoriedade de parâmetros relacionados ao material, e/ou carregamento (elasticidade linear) e parâmetros relacionados ao fraturamento (elasticidade não linear).

6.3.1 Exemplo 1: Cavidade em meio semi-infinito com força de domínio

O problema apresentado na seção 3.8 é revisitado, no sentido de ilustrar a influência da aleatoriedade de três das variáveis envolvidas, vide Tabela 6. Considera-se estado plano de deformação, e dessa vez, realiza-se um estudo probabilístico através da violação da seguinte função de falha, equação (6.2):

$$G_1 = u_L - \frac{(e_v - d_0)}{d_0} \quad (6.2)$$

Os parâmetros estatísticos relacionados a média e tipo de distribuição podem ser encontrados no trabalho de Hamrouni *et al.* (2017). A razão limite u_L é avaliada em 2%, e_v é a dimensão do eixo vertical da cavidade no estado deformado e d_0 o diâmetro inicial. A seguir são apresentados os dados estatísticos das variáveis aleatórias que compõe o problema:

Tabela 6. Definição dos dados estatísticos para os três parâmetros.

Parâmetros	Média	Coefficiente de variação	Caso1	Caso 2
E (MPa)	150	15%	Normal	Lognormal
Poisson	0,3	10%	Normal	Lognormal
Peso específico (KN/m ³)	17	10%	Normal	Lognormal

Fonte: Adaptado de HAMROUNI *et al.* (2017).

A análise de confiabilidade é realizada baseando-se na variação do coeficiente de empuxo. Para este caso inicial, todos os parâmetros são considerados como gaussianos. Esta análise baseada no modelo de confiabilidade HLRF/FORM mostra-se coerente com o resultado apresentado pelo método de Monte Carlo, e é perceptível a diminuição na probabilidade de falha a medida que o coeficiente de empuxo é aumentado (Tabela 7). Na Tabela 8, os pontos de projeto e fatores de importância são apresentados. Destaca-se a maior influência da rigidez para o problema analisado.

Tabela 7. Análise de confiabilidade para o Exemplo 1 (caso1) considerando variáveis gaussianas.

k	β	Pf (%) (FORM)	Pf (%) (Monte Carlo)	Simulações mínimas
0	1,526	6,351	6,915	5900
0,1	1,663	4,812	4,949	7916
0,2	1,801	3,585	3,667	10773
0,3	1,941	2,613	2,659	14925
0,4	2,082	1,864	1,966	21105
0,5	2,224	1,305	1,201	30369
0,6	2,368	0,896	0,828	44543
0,7	2,512	0,607	0,606	66266
0,8	2,657	0,398	0,410	102164
0,9	2,804	0,251	0,246	159600
1	2,951	0,160	0,158	249600

Fonte: autor (2020).

Tabela 8. Pontos de projeto e fatores de importância para o caso 1

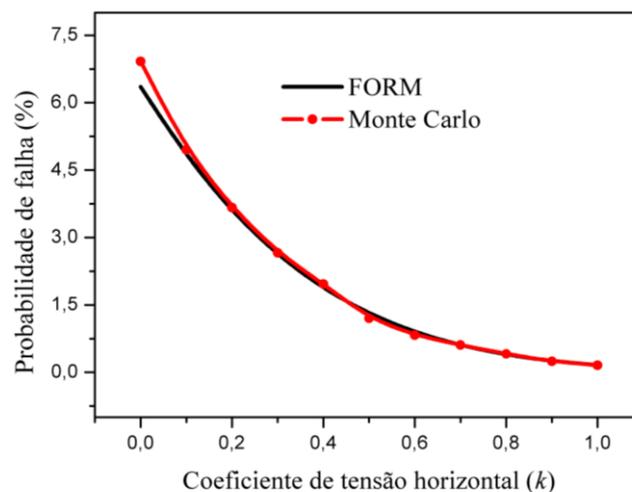
k	Pontos de projeto			Fatores de importância (%)		
	E*(MPa)	ν^*	γ^* (KN/m ³)	E*	ν^*	γ^*
0	119,274	0,2980	18,152	80,0875	0,1745	19,7378
0,1	116,315	0,2981	18,227	81,0261	0,1375	18,8362
0,2	113,300	0,2982	18,297	81,9566	0,1042	17,9391
0,3	110,230	0,2984	18,362	82,8765	0,0750	17,0484
0,4	107,107	0,2985	18,423	83,7843	0,0501	16,1655
0,5	103,934	0,2988	18,479	84,6782	0,0299	15,2918
0,6	100,712	0,2991	18,529	85,5565	0,0146	14,4288
0,7	97,445	0,2994	18,573	86,4174	0,0046	13,5779
0,8	94,135	0,2998	18,612	87,2596	0,0002	12,7401
0,9	90,784	0,3003	18,645	88,0787	0,0016	11,9195
1	87,397	0,3008	18,672	88,8761	0,0091	11,1146

Fonte: autor (2020).

Deve-se destacar que este exemplo é meramente ilustrativo, apresentando significativos valores de probabilidade de falha associados ao alto coeficiente de variação adotado.

Em seguida, apresenta-se um estudo comparativo entre a solução obtida pelo FORM e pelo método de Monte Carlo, na Figura 78.

Figura 78. Probabilidade de falha vs coeficiente de empuxo com acoplamento direto entre dois modelos de confiabilidade.



Fonte: autor (2020).

Em seguida, de maneira similar ao que foi realizado no caso 1, apresenta-se um estudo para o

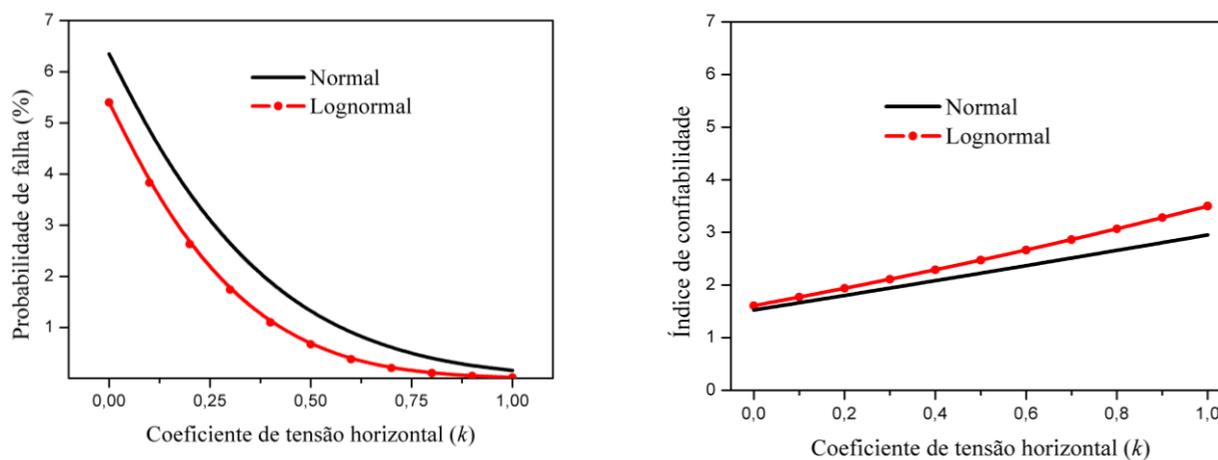
caso 2 (variáveis não normais). Assim como na Figura 78, a probabilidade de falha aumenta com o crescimento do coeficiente de empuxo, entretanto, nota-se que a abordagem considerando todas as variáveis como não gaussianas mostra-se menos conservadora (Tabela 9 e Figura 79).

Tabela 9. Análise de confiabilidade para o Exemplo 1 (caso2) considerando variáveis não gaussianas.

k	β	Pf% (FORM)	Pontos de projeto			Fatores de importância (%)		
			E^* (MPa)	ν^*	γ^* (KN/m ³)	E^*	ν^*	γ^*
0	1,607	5,412	115,733	0,2962	18,361	68,941	0,227	30,830
0,1	1,770	3,833	112,174	0,2962	18,500	68,970	0,186	30,843
0,2	1,938	2,634	108,467	0,2962	18,640	68,997	0,146	30,855
0,3	2,111	1,745	104,604	0,2964	18,784	69,023	0,110	30,866
0,4	2,289	1,112	100,575	0,2965	18,930	69,046	0,077	30,876
0,5	2,474	0,672	96,372	0,2968	19,078	69,066	0,048	30,885
0,6	2,665	0,384	91,984	0,2972	19,229	69,082	0,024	30,893
0,7	2,862	0,215	87,403	0,2977	19,383	69,093	0,008	30,898
0,8	3,067	0,111	82,616	0,2983	19,539	69,099	0,0003	30,900
0,9	3,279	0,052	77,612	0,2991	19,698	69,096	0,0036	30,899
1	3,499	0,023	72,378	0,3000	19,859	69,084	0,0213	30,894

Fonte: autor (2020).

Figura 79. Probabilidade de falha (a) Índice de confiabilidade (b) considerando variáveis normais e não normais.



Fonte: autor (2020).

6.3.2 Exemplo 2: Viga sob flexão em 3 pontos (Modo I)

O problema apresentado na Figura 45 é revisitado, no sentido de ilustrar a influência da aleatoriedade dos parâmetros que definem as leis coesivas. Os parâmetros relacionados a resistência à tração e energia ao fraturamento foram modelados considerando distribuição gaussiana, isto implica que o parâmetro que define a abertura crítica de fissura é também representado por uma distribuição aleatória. Para toda a análise aqui desenvolvida, a lei coesiva Linear foi escolhida por ter apresentado valores mais próximos ao resultado experimental, vide Figura 46. A análise completa desse problema constitui-se de duas etapas. A primeira tem por objetivo caracterizar a variável carga de ruptura por meio de um processo de simulação com a chamada do modelo mecânico repetidas vezes. Partindo deste princípio, duas abordagens são utilizadas, Método de Monte Carlo por Amostragem simples e Amostragem por Hipercubo Latino. A primeira caracteriza-se por ser uma abordagem robusta e simples na análise desse tipo de problema. No entanto, requer um número maior de realizações para obter boa estimativa das características estatísticas da variável aleatória. Uma ferramenta mais eficiente é a amostragem por Hipercubo Latino (McKay *et al.* 1979), a qual foi descrita na seção 4. Esse tipo de amostragem permite uma boa estimativa das propriedades estatísticas utilizando um menor número de realizações.

A segunda etapa tem por objetivo avaliar a influência da aleatoriedade dos parâmetros envolvidos. Isso é feito por meio de duas abordagens, na primeira, o acoplamento direto é utilizado para estimativa do fator de importância das variáveis de resistência a tração (f_t) e energia de fraturamento (G_f) ao longo da curva Força *versus* deslocamento. Para este estudo, define-se a seguinte função de falha, Eq.(6.2):

$$G_2 = f_d - f_p \quad (6.3)$$

em que f_p é a carga estimada numericamente para cada simulação, e f_d a carga de projeto estabelecida como $1,15 \cdot f_c$, com f_c sendo a carga retirada da curva determinística para o mesmo passo incremental de f_p .

A outra abordagem utilizada para essa segunda etapa refere-se à utilização de um processo de simulação por meio da amostragem por Hipercubo Latino para levantamento de estatísticas ao longo da curva Força *versus* deslocamento. Nesta última análise, o Módulo de Elasticidade (E) é também considerado como aleatório.

Etapa 1: Caracterização estatística da carga de ruptura (inferência estatística).

Para esta etapa, a caracterização estatística da carga de pico é obtida partindo-se dos dados estatísticos da Tabela 10.

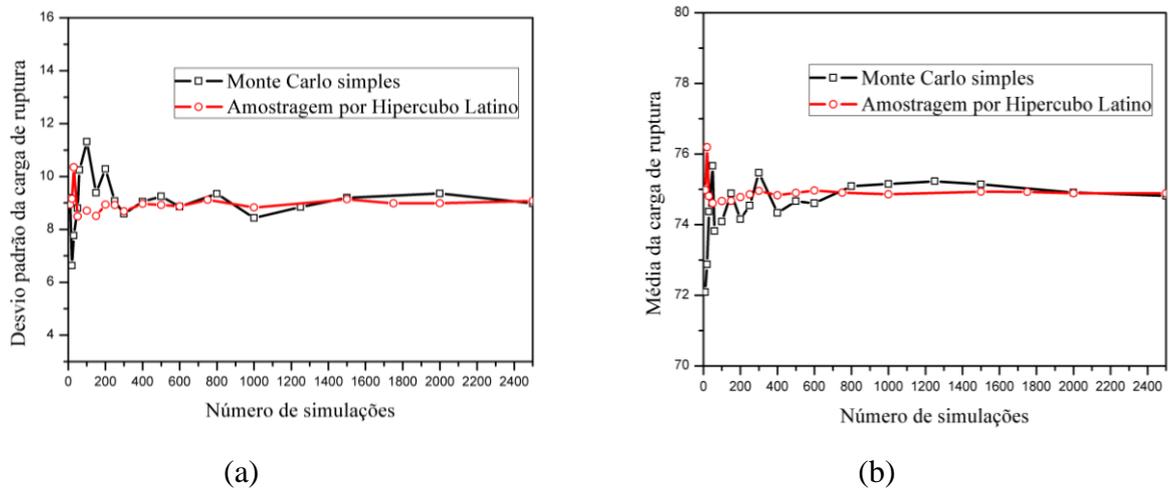
Tabela 10. Definição dos dados estatísticos da Etapa 1

Parâmetros	Média	Coefficiente de variação	Tipo de distribuição
f_t (MPa)	3	20%	Gaussiana
G_f (N/m)	75	20%	Gaussiana

Fonte: autor (2020)

Na Figura 80, a média e desvio padrão da carga de ruptura foi estimado por meio da Amostragem simples e Amostragem por Hipercubo Latino a medida que o número de simulações aumentava. Como indicado na figura, a amostragem por Hipercubo Latino apresenta bons resultados na estimativa da média e desvio padrão da carga de ruptura com um número menor de realizações (400 simulações).

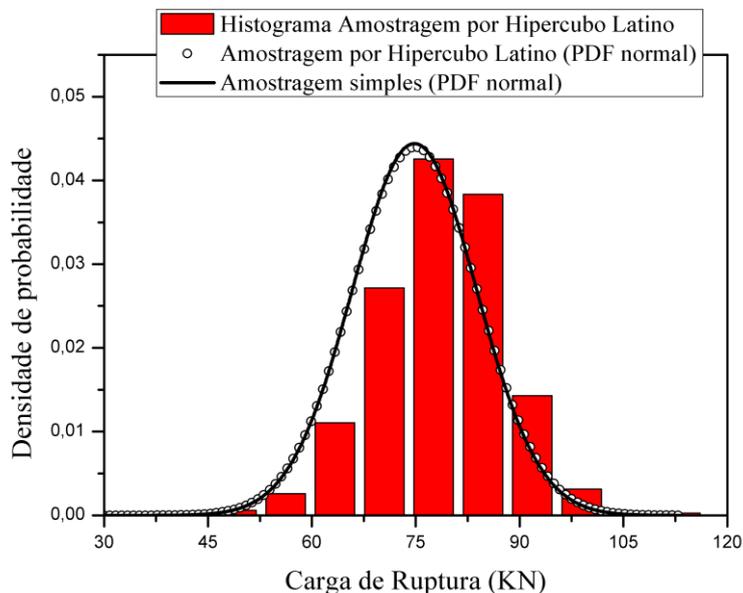
Figura 80. Caracterização da carga de ruptura (a) desvio padrão (b) média



Fonte: autor (2020)

O histograma de carga de ruptura considerando amostragem por Hipercubo Latino é apresentado na Figura 81. Além disso, as funções densidade de probabilidade para os dois tipos de amostragem são também apresentados. Percebe-se uma convergência razoável entre as duas distribuições gaussianas e o histograma para valores de carga de ruptura. Deve-se mencionar que foi realizado um teste de aderência segundo os modelos de Kolmogorov-Smirnov e Anderson-Darling. Em ambos, a distribuição gaussiana foi mais bem avaliada em detrimento das demais distribuições. É importante mencionar que foram utilizados 12 intervalos no histograma da Figura 81, como recomendado por Sturges, vide Ang e Tang (1984).

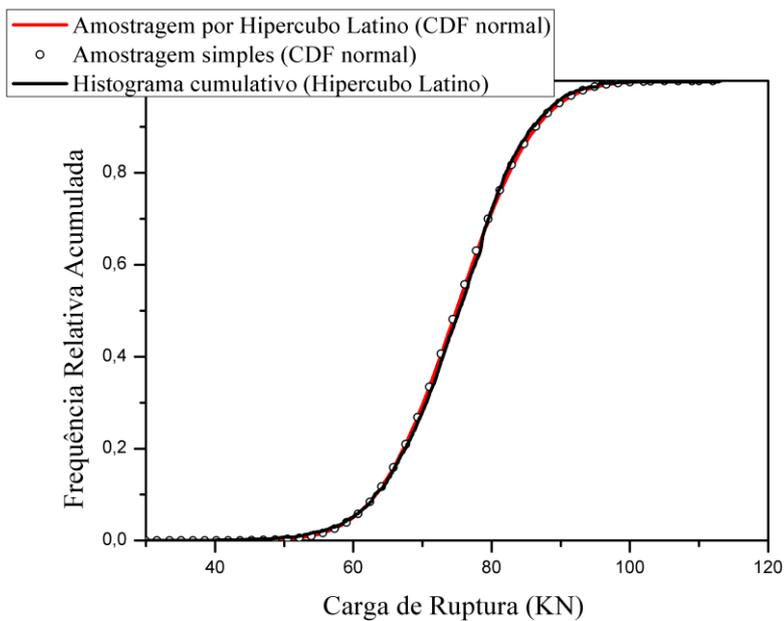
Figura 81. Histograma da densidade de probabilidade da carga de ruptura (2500 simulações)



Fonte: autor (2020)

Na Figura 82, é apresentado o histograma cumulativo (Hipercubo Latino) para 2500 chamadas do modelo mecânico. Observa-se a boa concordância do modelo com a distribuição cumulativa gaussiana para ambas as abordagens, amostragem simples e por Hipercubo Latino.

Figura 82. Frequência Relativa Acumulada da carga de ruptura (2500 simulações)



Fonte: autor (2020)

O número de amostras geradas acima é certamente um tamanho pequeno, para uma boa estimativa da probabilidade de falha. No entanto, a probabilidade de violação da função limite (6.3) é aqui apresentada apenas para fins ilustrativos, considerando-se f_p como a carga de ruptura para cada simulação e f_c a carga de ruptura da curva determinística.

Tomando-se como solução de referência a obtida pelo acoplamento direto (HLRF-FORM), é notável que a amostragem por Hipercubo Latino conseguiu resultados mais próximos com o acoplamento direto, apesar do número de simulações utilizado (2500 simulações), vide Tabela 11.

Tabela 11. Probabilidade de falha para 2500 simulações

	β	Pf	Erro β (%)
Amostragem simples	1,500	0,0668	3,16
Amostragem por Hipercubo Latino	1,430	0,0760	1,65
FORM	1,454	0,0730	-

Fonte: autor (2020)

O significativo valor de probabilidade de falha obtido deve ser interpretado com cautela, uma vez que representa uma situação severa justificada pelo alto coeficiente de variação imposto.

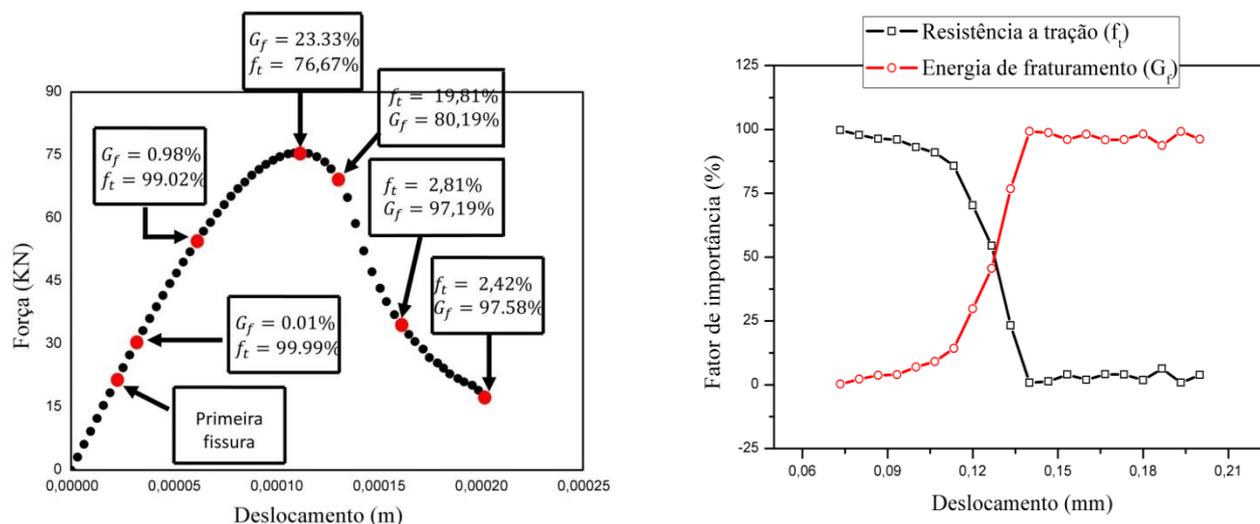
Etapa 2: Avaliação da influência dos parâmetros aleatórios envolvidos

Esta etapa tem por objetivo avaliar os fatores de importância das duas variáveis aleatórias envolvidas na análise. Para este fim, o acoplamento direto com o algoritmo FORM é utilizado, juntamente com a Equação limite (6.2). Os dados estatísticos para esta análise são apresentados na Tabela 10.

Durante a etapa elástica, os dois parâmetros aleatórios que definem a lei coesiva linear não apresentam influência na análise. No entanto, com o surgimento do primeiro elemento de fissura, a resistência a tração passa a apresentar maior influência na análise em comparação a energia de fraturamento. Já no trecho descendente, a energia de fraturamento passa a ter um

maior fator de importância na análise. Em síntese, destaca-se a maior influência da energia de fraturamento no trecho pós-pico da análise, o que se justifica por sua importância no processo de propagação da fissura. Diferentemente da resistência à tração, a qual rege o trecho ascendente, servindo como gatilho para a abertura inicial da fissura.

Figura 83. Fatores de importância para os parâmetros coesivos na curva Força *versus* deslocamento.



Fonte: autor (2020)

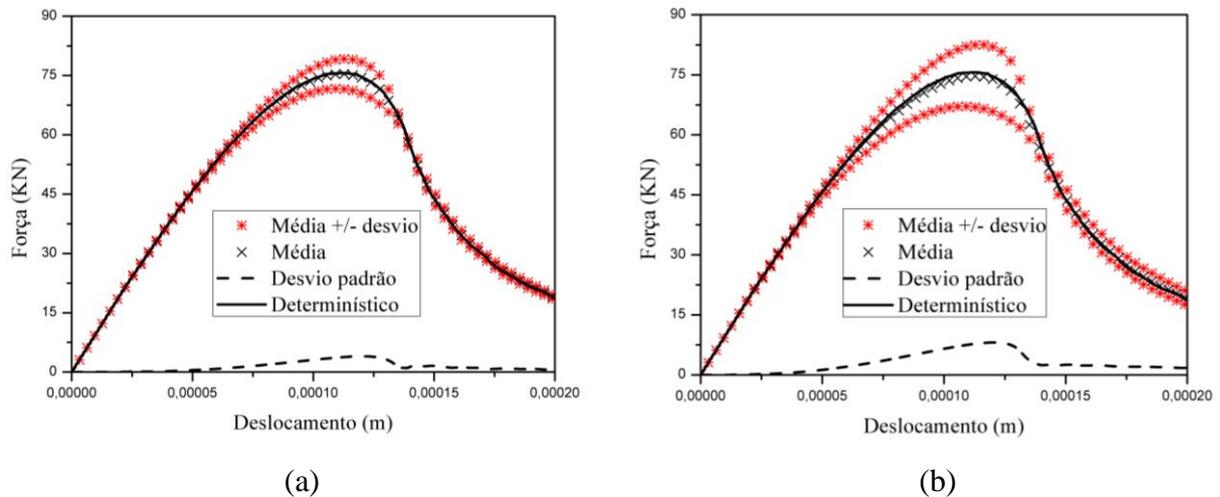
A análise a seguir tem por objetivo avaliar a influência dos parâmetros que definem as leis coesivas (f_t e G_t) por meio de um processo de simulação (Amostragem por Hipercubo Latino) ao longo da curva Força *versus* deslocamento. Em adição, o Módulo de Elasticidade também é considerado como aleatório na última análise desenvolvida. Todas as variáveis consideradas como aleatórias são tratadas como gaussianas.

Na Figura 84 a resistência a tração do material é considerada como aleatória. Além disso, dois tipos de coeficiente de variação são utilizados, (a) $COV = 10\%$ e (b) $COV = 20\%$. Os demais parâmetros que influenciam a análise são mantidos como determinísticos. Os dados estatísticos de média e desvio padrão são calculados ao longo da curva Força *versus* deslocamento.

A influência da resistência à tração na análise aqui estabelecida se inicia ainda no trecho ascendente. É notável a maior dispersão dos valores na região próxima a carga de ruptura, e essa dispersão tende a diminuir no trecho descendente, Figura 84a. É ainda possível observar, Figura 84b, que essa dispersão na região de pico aumenta com a mudança do coeficiente de variação

($COV = 0.2$), e para este caso, o trecho final da curva tende a apresentar maiores valores de dispersão do que no caso (b). De fato, para valores de carga maiores na curva ascendente, o trecho descendente tende a apresentar valores menores, de forma a manter a mesma energia de fraturamento.

Figura 84. Caracterização estatística ao longo da curva Força *versus* deslocamento para f_t aleatório

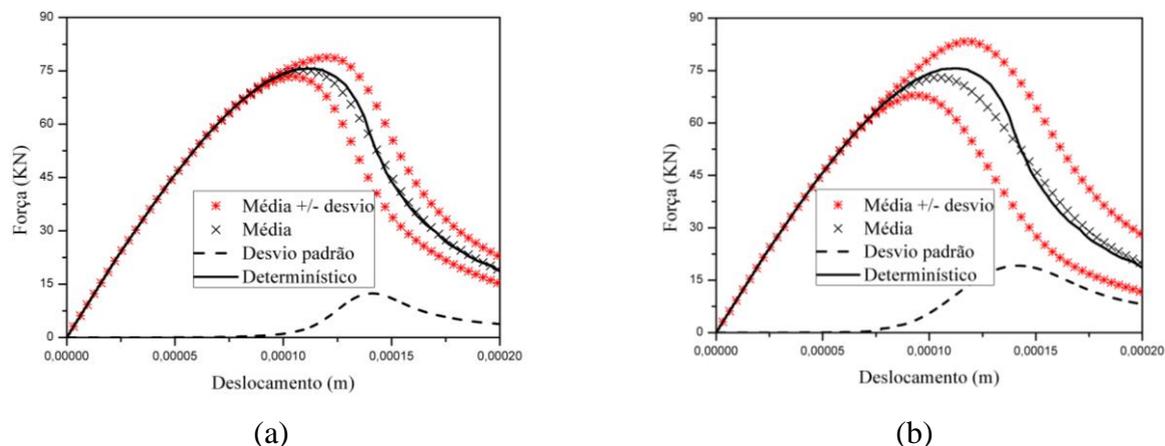


Fonte: autor (2020)

Na Figura 85, a energia de fraturamento é considerada como aleatória. E novamente, dois tipos de coeficiente de variação são adotados, (a) $COV = 10\%$ e (b) $COV = 20\%$. Todos os demais parâmetros são mantidos como determinísticos.

A influência da energia de fraturamento inicia-se próximo a região de pico, e continua durante todo o trecho descendente. Além disso, com a mudança do coeficiente de variação ($COV = 20\%$), a curva determinística tende a apresentar uma maior divergência com a curva da média, principalmente na região próxima a carga de ruptura.

Figura 85. Caracterização estatística ao longo da curva Força *versus* deslocamento para G_f aleatório

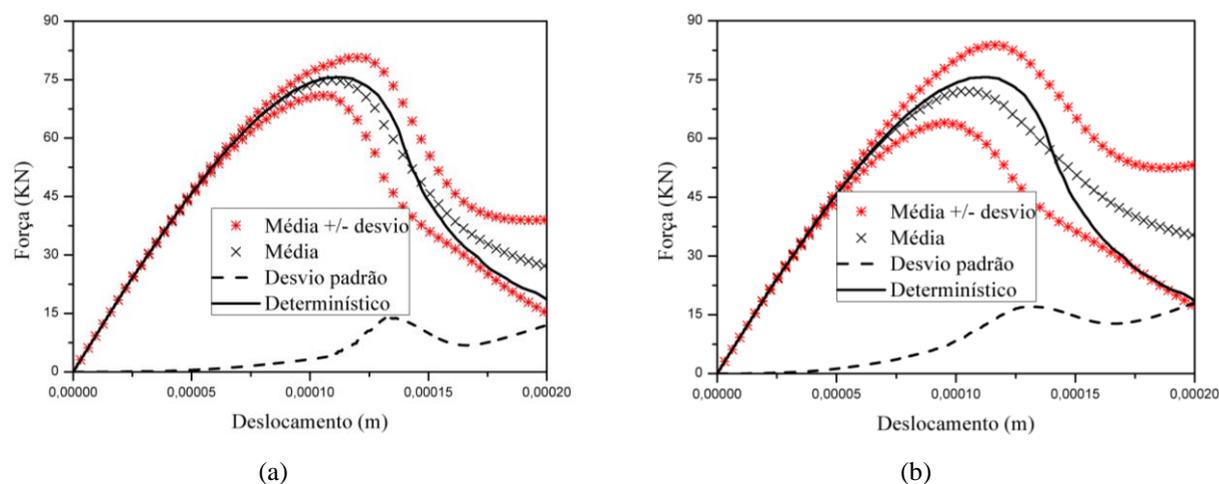


Fonte: autor (2020)

Na Figura 86, energia de fraturamento e resistência à tração são consideradas como aleatórias. Novamente, dois tipos de coeficiente de variação são adotados, (a) $COV = 10\%$ e (b) $COV = 20\%$.

Na Figura 86, a mudança no coeficiente de variação ocasionou uma maior divergência da curva determinística com a da média. Além disso, a região final do trecho descendente apresentou um nível maior de dispersão. Desta forma, a influência dos parâmetros de resistência a tração e energia de fraturamento na análise aqui desenvolvida, inicia, ainda no trecho ascendente, e tem seu valor crítico no trecho final da curva descendente do gráfico Força *versus* deslocamento.

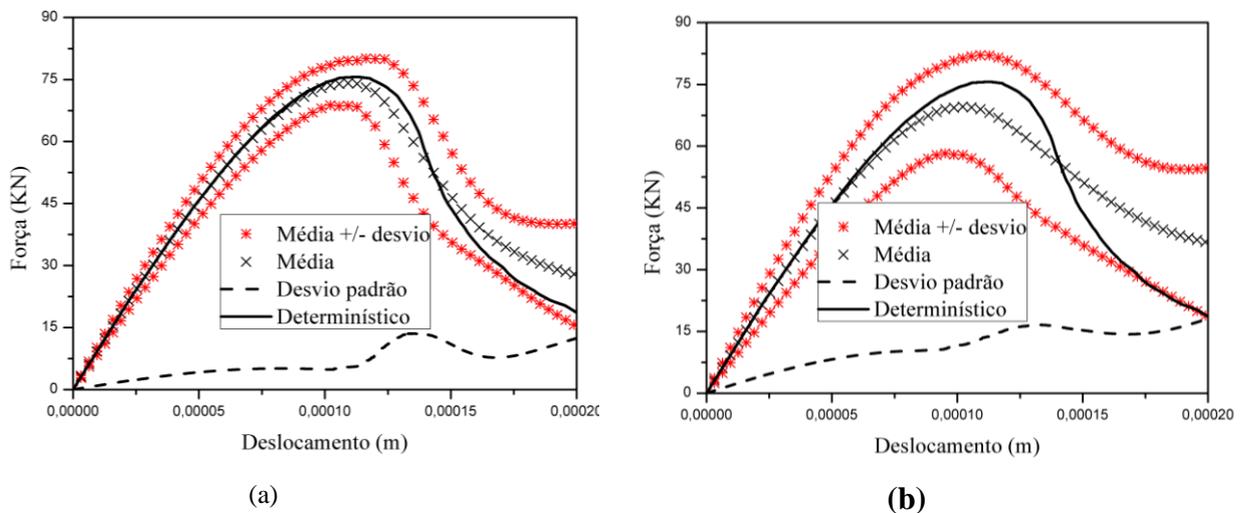
Figura 86. Caracterização estatística ao longo da curva Força *versus* deslocamento para f_t e G_t aleatórios



Fonte: autor (2020)

Por fim, é apresentado na Figura 87 um estudo da influência das variáveis que definem as leis coesivas (f_t , G_f) em adição com o Módulo de Elasticidade do material (E). A inserção do Módulo de Elasticidade como variável aleatória introduz incertezas ainda no trecho em regime elástico do material. Além disso, para um $COV = 20\%$, o nível de dispersão durante a curva Força *versus* deslocamento foi maior no trecho final da curva descendente.

Figura 87. Caracterização estatística ao longo da curva Força *versus* deslocamento para f_t , G_f e E aleatórios



Fonte: autor (2020)

Deve-se destacar que o custo computacional para uma chamada do modelo mecânico não linear foi de $12,35$ s utilizando-se o OT. Em comparativo, o OC levou $34,20$ s para completar uma chamada do modelo baseado em dipolos do MEC. Entretanto, esse tempo computacional depende de alguns parâmetros adotados no início da análise, como o comprimento padrão da fissura, tolerância adotada para convergência durante o processo iterativo e número de incrementos. Desta forma, realizando-se apenas, um comparativo entre os dois operadores, evidencia-se que o OT leva vantagem em termos de custo ao compararmos com o OC. Além disso, isso se traduz em um ótimo ganho computacional, tendo em vista a análise probabilística aqui realizada, levando-se em conta que o modelo mecânico foi chamado em um número máximo de 2500 vezes na etapa 1 desta seção.

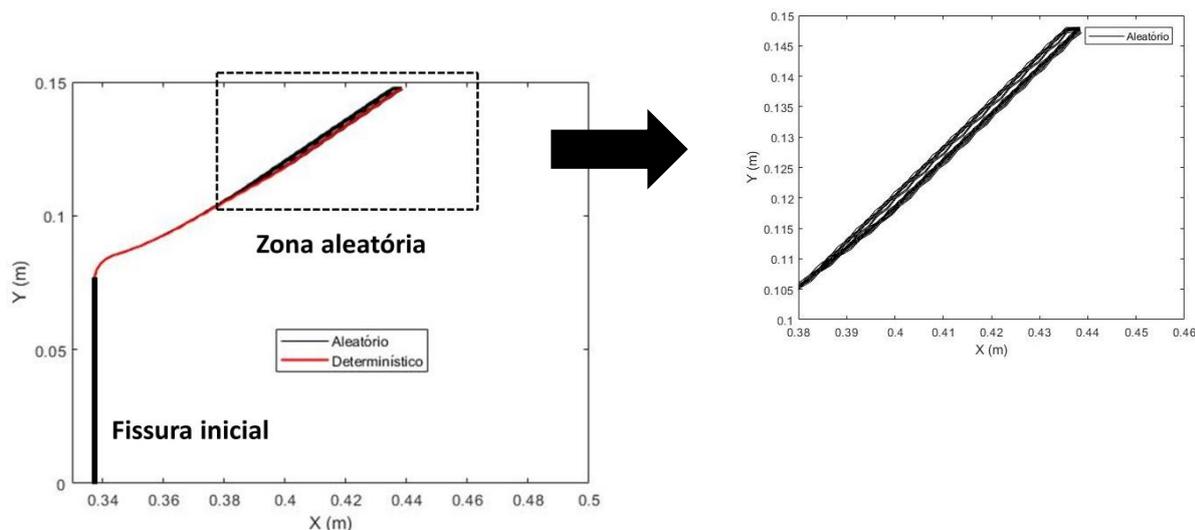
6.3.3 Exemplo 3: Viga sob flexão em 4 pontos (Modo I-II)

O problema apresentado na Figura 52 é revisitado, no sentido de ilustrar a influência da aleatoriedade dos parâmetros de fraturamento na direção de propagação da fissura. Um processo de simulação com 300 simulações de Monte Carlo por Amostragem simples é utilizado. Os parâmetros aleatórios foram considerados com distribuição gaussiana. Esta análise foi dividida em duas etapas, na primeira a resistência a tração é considerada como determinística e a energia de fraturamento como variável aleatória. Na segunda a energia de fraturamento é considerada como determinística e a resistência a tração como aleatória. Em todos os casos as variáveis tratadas como aleatórias possuem coeficiente de variação de 20 %.

Caso 1: f_t determinístico e G_f aleatório ($COV = 20\%$)

Na Figura 88, é apresentado os resultados das simulações de Monte Carlo para o caso 1. Apesar da inserção da aleatoriedade presente da energia de fraturamento, as curvas aleatórias apresentam um comportamento semelhante ao resultado determinístico, com uma leve alteração na direção de propagação para algumas curvas. É importante mencionar o erro do modelo numérico, o qual naturalmente influencia a propagação da fissura, sendo esta dependente da localização dos pontos internos.

Figura 88. Resultado para 300 simulações de Monte Carlo simples para caso 1

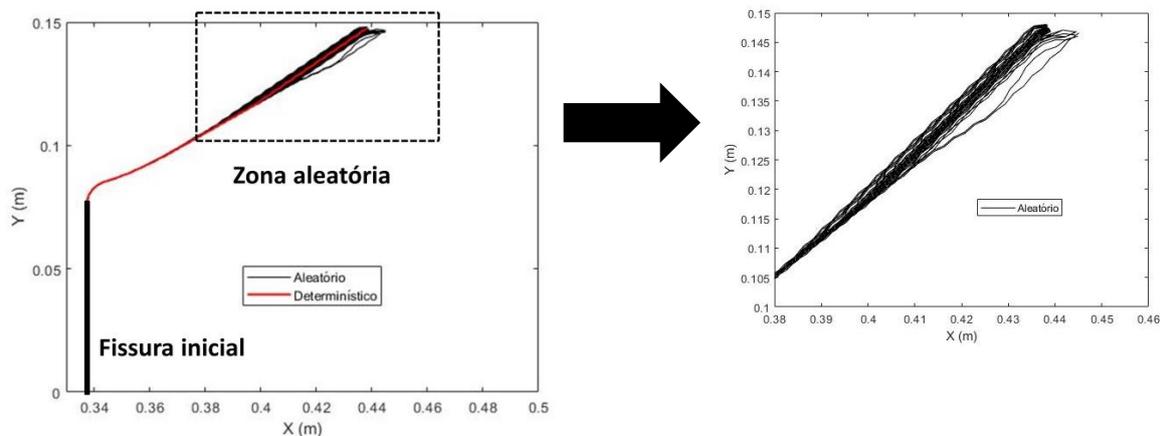


Fonte: autor (2020)

Caso 2: f_t aleatório ($COV = 20\%$) e G_f determinístico

Na Figura 89, é apresentado os resultados das simulações de Monte Carlo para o caso 2. É notável que a introdução da resistência a tração como variável aleatória na análise, ocasionou uma perturbação na direção de propagação das curvas aleatórias, tendo algumas, apresentado direção muito diferente do resultado determinístico. Isso é consistente, uma vez que a direção de propagação leva em consideração um critério baseado em tensões. É ainda importante mencionar, que para todos os casos analisados, as curvas aleatórias apenas apresentaram um nível considerável de dispersão, a partir de um determinado comprimento de fissura ($x = 0,38$, $y = 0,1$). Isso é razoável, uma vez que, no início da propagação, o sólido apresenta comportamento aproximadamente linear. Desta forma, os parâmetros de fraturamento ainda não apresentam grande influência sobre o comportamento da estrutura.

Figura 89. Resultado para 300 simulações de Monte Carlo simples para caso 2



Fonte: autor (2020)

No que diz respeito ao custo computacional de uma chamada do modelo mecânico, o OT levou 61,95 s, já o OC 168,42 s.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

7.1 Conclusões

Este trabalho teve como objetivos a utilização de formulações não lineares do MEC em problemas de fratura e também na consideração de incertezas presentes no processo de propagação de fissuras. Os dois temas são considerados relevantes no meio científico e de grande importância para o campo da engenharia de estruturas. Na abordagem determinística, foi considerada a formulação não linear do MEC baseada na introdução de um campo de tensões iniciais, com a degeneração do termo de domínio presente na representação integral e aparecimento da variável dipolo, responsável por corrigir o comportamento elástico do material. Essa formulação mostra-se eficiente na abordagem de problemas da mecânica da fratura coesiva, uma vez que o uso de dipolos permite a representação das fissuras apenas introduzindo elementos unidimensionais ao longo do crescimento das mesmas. Além disso, a correção das respostas provenientes do modelo elástico é efetuada com maior economia de tempo computacional, uma vez que as matrizes envolvidas na discretização do contorno permanecem as mesmas durante toda a análise. Sendo apenas necessário, a adição de componentes relativas aos pontos internos, a medida que as fissuras são definidas.

Foram utilizados dois operadores para resolução do sistema não linear: OC e OT. O primeiro carrega a consideração da rigidez elástica da estrutura, já o segundo, considera a rigidez tangente a resposta estrutural não linear. Na abordagem Probabilística, apenas o OT é utilizado por apresentar melhores taxas de convergência.

Diante do que foi exposto, a formulação não linear implementada foi aplicada em um total de seis exemplos numéricos com solução analítica ou resultados experimentais e numéricos encontrados na literatura. Diante de poucos estudos encontrados no âmbito da mecânica da fratura coesiva considerando-se a formulação de dipolos, atenção especial foi dada na abordagem determinística, com exemplos ainda não explorados por meio dessa formulação. Dentre esses exemplos, podem ser citados os com múltipla propagação de fissuras. Em geral, a robustez e eficiência do método podem ser comprovadas diante das análises realizadas neste trabalho. Além disso, essa formulação mostrou ser uma poderosa alternativa a outros métodos mais explorados na literatura, destacando-se a boa aproximação da carga de ruptura para todos os exemplos analisados.

Com relação às comparações de eficiência entre os operadores não lineares, pode-se notar uma boa economia no número de iterações ao adotar o OT em detrimento do OC. Em alguns exemplos, essa economia chegou a ser de 83 % comparando-se com o OC. No entanto, devem ser levados em consideração alguns aspectos computacionais que influenciam tal análise. Um exemplo é a forma como as matrizes que carregam a presença da fissura são montadas. No OC, a matriz S , permanece constante ao longo de todo o processo iterativo. Já no OT, é necessário incorporar as propriedades de degradação mecânico-material existentes, o que gera a matriz do operador tangente. Essas modificações são feitas localmente, com a utilização das próprias sub-matrizes de S obtidas para cada nó da fissura. Além disso, alguns parâmetros iniciais da análise, como número de incrementos, tolerância para convergência durante o processo iterativo e comprimento da fissura, influenciam o número de iterações durante o processo iterativo. Por fim, foi também observado que o tipo de aplicação a ser analisada também influenciou esse tipo de análise. Para problemas em que houve grande perda de rigidez do material, foi observada uma maior discrepância nos resultados do OT em comparação ao OC. Isso pode ser justificado pelo fato de que a incorporação da degradação mecânico-material pode ter afetado o condicionamento de alguns componentes do sistema não linear, podendo ter levado a uma perda de estabilidade do algoritmo. Em síntese, em problemas com Modo I de solitação, o OT obteve uma redução maior de iterações em detrimento do OC para resultados numéricos semelhantes.

No que diz respeito a análise baseada em confiabilidade, foi realizada a implementação de uma ferramenta numérica para investigação dos efeitos da aleatoriedade dos materiais e/ou carregamentos no contexto da elasticidade linear e não linear por meio do acoplamento entre modelos mecânicos e de confiabilidade estrutural. No contexto não linear, a análise de propagação de fissuras considerando aleatoriedade dos parâmetros de fraturamento para problemas da mecânica da fratura coesiva é apresentado. O processo de propagação de fissuras é investigado por meio do acoplamento entre modelos de confiabilidade e o modelo do MEC baseado em um campo de tensões iniciais para a caracterização da descontinuidade (fissura). A modelagem computacional consistiu basicamente em duas etapas, a primeira com a estimativa, via simulação, de valores randômicos de parâmetros de performance, e em um segundo momento, a análise da influência da aleatoriedade desses parâmetros no comportamento estrutural das aplicações em estudo. Com relação aos modelos de confiabilidade testados, o acoplamento direto com o algoritmo HLRFFORM foi utilizado para avaliação de fatores de importância bem como probabilidade de falha. Além disso, a técnica de Amostragem por

Hipercubo Latino foi também empregada, com o único intuito de reduzir o número de chamadas do modelo mecânico durante a etapa probabilística.

O acoplamento da formulação de dipolos com algoritmos da confiabilidade na consideração de incertezas presentes do processo de propagação mostra-se ser uma interessante escolha. Uma vez que, a versatilidade na representação do fraturamento em sólidos, não necessitam de introdução de novas linhas e colunas nas matrizes envolvidas na etapa elástica do MEC e representação da ZPI com apenas três equações algébricas por ponto fonte, se configuram em vantagem neste tipo de acoplamento. Tendo em vista que, as rotinas de confiabilidade acarretam em um aumento do custo computacional por necessitarem de múltiplas chamadas do modelo mecânico para obtenção dos resultados requeridos.

De modo geral, três exemplos foram apresentados com o intuito de validar o acoplamento da formulação do MEC com algoritmos da confiabilidade. O primeiro exemplo teve unicamente o objetivo de validar as rotinas propostas com um exemplo com concentração de tensões. Para isto, o acoplamento direto via HLRF-FORM foi confrontado com respostas obtidas pelo Método de Monte Carlo por Amostragem simples. Em seguida, foi feita a análise de uma viga sob flexão em três pontos (Modo I) com a consideração de incertezas presentes nos parâmetros de fraturamento. A primeira etapa consistiu da caracterização da carga de ruptura por meio de um processo simulativo. Foi utilizado dois tipos de amostragem, simples e por Hipercubo Latino. A última conseguiu boa taxa de convergência em um número menor de simulações. A segunda etapa consistiu de uma análise da influência dos parâmetros de fraturamento, e para isto, foi feito um levantamento estatístico ao longo da curva Força *versus* deslocamento. De modo geral, a resistência a tração apresentou maior influência no trecho ascendente. Já a energia de fraturamento, no trecho descendente. Isso se verifica pela importância da energia de fraturamento no processo de propagação da fissura. Uma vez que, esta é diretamente responsável pela ação das forças coesivas ao longo do crescimento da fissura fictícia.

Diante do exposto acima, acredita-se que todos os objetivos foram atingidos no presente trabalho. Desta forma, é possível sugerir algumas possibilidades de investigações futuras. Destaca-se ainda, que o desenvolvimento deste estudo contribuiu para a formação acadêmica do autor, ressaltando-se o processo evolutivo de aprendizado vivenciado desde o início dos estudos sobre a formulação do MEC linear, com o avanço em um tema mais específico voltado para o campo da não linearidade física, e a inserção de temas da confiabilidade.

7.2 Sugestões para pesquisas futuras

Uma das características do MEC diz respeito a representação adequada de problemas com gradientes altos (tensões ou deformações), como em problemas da mecânica da fratura, onde há pontos com alta concentração de tensões. A formulação de dipolos é particularmente interessante devido a sua versatilidade e eficiência na análise desses tipos de problemas. No entanto, é possível sugerir algumas melhorias a serem feitas, de modo a garantir maior robustez ao método.

Apesar de bons resultados encontrados, a implementação desenvolvida não trouxe bons resultados na representação de situações que apresentassem o *snap back*. Logo, é de grande interesse a implementação de alternativas. A primeira, deve-se ao uso do *arc length* para solução desses problemas em destaque como algoritmo complementar. Outra alternativa, proposta por Venturini (1995), é o rearranjo do sistema de equações não linear de modo a garantir outra variável guia que não seja o deslocamento. Uma alternativa é utilizar a abertura de fissura como nova variável guia.

A utilização de técnicas de computação paralela (HPC) e algoritmos mais eficientes de integração, como exemplo, o proposto por Telles (1987), podem ser de grande interesse. Uma vez que a avaliação numérica das equações integrais do MEC exige um elevado custo computacional pela existência de núcleos singulares.

Essa formulação baseada em dipolos pode ser utilizada em problemas da MFEL, desde que seja imposta uma lei conveniente para representação do comportamento das tensões atuantes na zona de processo (OLIVEIRA, 2013).

Podem ser utilizadas aproximações de alta ordem para discretização das fissuras fictícias, utilizando-se elementos descontínuos de ordem superior. Tal abordagem caracteriza-se por apresentar maior versatilidade na representação de pontos com altos gradientes de tensão, como no caso de problemas da mecânica da fratura (KZAM, 2009).

Também é possível, a extensão dessa formulação para materiais anisotrópicos em estruturas compostas planas. Semelhante abordagem pode ser encontrada em Cordeiro (2016), este tendo utilizado a formulação dual do MEC em meios anisotrópicos, partindo-se da solução fundamental de Cruse e Swedlow.

É também sugerida a expansão da formulação 2D aqui implementada para o caso tridimensional. Desta forma, deve-se mencionar o trabalho de Barbirato (1999). Tendo este, sido o precursor na análise de sólidos fraturados utilizando-se a formulação tridimensional do MEC baseado em dipolos e aplicado a problemas dinâmicos. Sugere-se também, a utilização dessa formulação tridimensional em problemas diversos da engenharia, como em meios não homogêneos e reforçados. Para isto, um acoplamento MEC-MEC pode ser realizado em conjuntos com as técnicas não lineares propostas. Além disso, pode-se também estender essas formulações para a abordagem isogeométrica, de forma a melhorar as aproximações sobre a geometria e as grandezas de contorno.

Por fim, pode-se estender essa formulação para problemas no campo da fadiga dos materiais, com a possibilidade de representação mecânica de problemas de fadiga coesiva. Com destaque para propagação de fissuras neste regime.

No que diz respeito a análise probabilística, as sugestões são ainda maiores. Tendo em vista que este trabalho representa apenas uma introdução a esse campo de estudos. Desta forma, o acoplamento proposto mostra-se como uma poderosa ferramenta, ainda possível de ser expandida, para determinação de soluções com base nas incertezas envolvidas, resultando assim, em respostas mais realistas.

Mecanismos de falhas em materiais estão intrinsicamente ligados com a não homogeneidade e aleatoriedade de parâmetros da análise. A utilização de dados médios para representação da heterogeneidade dos materiais pode resultar na predição de trajetórias irreais e não confiáveis. Com isso, sugere-se a consideração da heterogeneidade dos materiais em modelos coesivos. Tomando-se como base, a utilização de campos aleatórios para representação da não homogeneidade em parâmetros de fraturamento na análise da propagação das fissuras. Esse estudo se insere na confiabilidade estocástica, uma vez que os parâmetros de fraturamento têm suas propriedades modificadas espacialmente.

Nesse contexto, em modelos de propagação de fissuras envolvendo o processo de *remeshing*, um critério importante fundamenta-se na determinação da direção de propagação da fissura. Desta forma, a consideração da heterogeneidade dos parâmetros de fraturamento pode resultar na necessidade de desenvolvimento de um novo critério para determinação da direção de crescimento das fissuras, tomando-se como base, não apenas o estado de tensão na ponta da

fissura, mas também, a não homogeneidade da resistência a tração. Isso justifica-se pelo fato de que a fissura tende a propagar em regiões mais frágeis, onde a resistência a tração é baixa, como vazios e interfaces fracas. Por isso, a heterogeneidade da resistência a tração juntamente com o estado de tensões na ponta da fissura devem ser considerados em conjunto para determinação da direção de propagação de fissuras. Alguns estudos em proximidade com esse campo de trabalho podem ser citados, Bruggi *et al.* (2007), Yang e Xu (2008) e Yang *et al.* (2009). No entanto, em contraste a esses trabalhos, é proposto a utilização da formulação não linear do MEC baseado em dipolos em conjunto com o modelo de confiabilidade exposto.

Um possível estudo refere-se à quantificação de parâmetros da fratura coesiva por meio do acoplamento com a formulação não linear do MEC e modelos estatísticos. Um exemplo é a utilização do modelo Bayesiano para quantificar esses parâmetros levando-se em consideração as incertezas observadas em dados experimentais. O procedimento estocástico permite o uso de diferentes leis de amolecimento para a identificação da lei que apresenta melhor concordância com respostas numéricas e experimentais. Simular estudo foi realizado em Cordeiro e Leonel (2017), com a utilização da formulação dual do MEC acoplado ao modelo Bayesiano para quantificação desses parâmetros.

Outra sugestão é a análise probabilística de propagação de fissuras em aplicações de fadiga coesiva. A utilização de modelos de fadiga coesiva é ainda pouco explorada na literatura, especialmente empregando-se a formulação não linear do MEC.

Um possível estudo futuro refere-se a utilização do acoplamento proposto juntamente com modelos de otimização, para determinação de dimensões de dado elemento estrutural ou intervalos para procedimentos de manutenção e inspeção, os quais levem ao mínimo custo e que atendam a um índice alvo de confiabilidade.

A consideração de outros tipos de incertezas na análise de sólidos fraturados pode influenciar a capacidade de convergência de métodos de transformação. Um possível exemplo pode ser encontrado na consideração da aleatoriedade da posição do entalhe e/ou condições de contorno. As técnicas de simulação se mostram mais adequadas na solução de problemas fortemente não lineares, embora o custo computacional possa ser uma limitação. Por isso, podem ser utilizadas técnicas por amostragem inteligente, além da amostragem por Hipercubo Latino utilizada neste trabalho. Como exemplo, a amostragem por importância utilizando

pontos de projeto e utilizando Hipercubo Latino.

Por fim, a estratégia aqui implementada pode ser empregada na análise de problemas diversos da engenharia, tais como os propostos para o modelo determinístico. Uma possível sugestão é a análise mecano-probabilística de materiais fissurados em sistemas estruturais não-homogêneos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, H. C.; LEONEL, E. D. **The multiple fatigue crack propagation modelling in nonhomogeneous structures using the DBEM.** Engineering Analysis with Boundary Elements, 98, 296–309, 2019.

ANG, H. S.; TANG, W. H. **Probability concepts in engineering planning and design**, Vol. 2—Decision, risk, and reliability, Wiley, New York, 1984.

ALIABADI, M. H. **The boundary element method.** Applications in solids and structures. v. 2, New York: J. Wiley, 2002.

BARENBLATT, G. I. **Equilibrium cracks formed during brittle fracture rectilinear cracks in plane plates.** Journal of applied Mathematics and Mechanics, v. 23, n. 4, p. 706-721, 1959.

BARENBLATT, G. I. **The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture,** Advances in Applied Mechanics, v. 7, p. 55-129, 1962.

BAECHER, G. B.; CHRISTIAN, J. T. **Reliability and statistics in geotechnical engineering.** Wiley, Hoboken, N.J, 2003.

BARBIRATO, J. C. C. **Método dos elementos de contorno com a reciprocidade dual para a análise transiente tridimensional da mecânica do fraturamento.** Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BECK, A.T. **Confiabilidade e Segurança das Estruturas.** 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2019.

BECKER, A.A. **The Boundary element method in engineering.** London, MacGraw-Hill, 1992.

BESTERFIELD, G. H., LIU, W. K., LAWRENCE, M. A.; BELYSTCHKO, T. B. **Brittle Fracture Reliability by Probabilistic Finite Elements.** Journal of Engineering Mechanics,

116(3), 642–659, 1990.

BESTERFIELD, G.H. LIU, W.K., LAWRENCE, M.A.; BELYSTCHKO, T. **Fatigue crack growth reliability by probabilistic finite elements**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 86(3), 297–320, 1991.

BERNHARD; R.F. KELTIE, EDS. **Numerical Techniques in Acoustic radiation**, NCA-Vol. 6, ASME, New York, 103-108, 1989.

BETTI, E., **Teoria dell elasticita**. 11 Nuovo Ciemento, p. 7-10, 1872.

BLANDFORD, G. E.; INGRAFFEA, A. R.; LIGGET, J. A. **Two-dimensional Stress Intensify Factor computations using the Boundary Element Method**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 17, n. 3, p. 387-404, 1981.

BREBBIA, C. A. **The Boundary Element Method for Engineers**, London: Pentech Press, 1978a.

BREBBIA, C. A. **Weighted residual classification of approximate methods**., Appl. Math. Modelling v.2, n.3, 1978b.

BREBBIA, C. A. **The Boundary Element for Engineers**, London, Pentech Press, 1984.

BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary element techniques: theory and applications in engineering**. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary Elements: An Introductory Course** , Southampton: McGraw Hill, 1989.

BROEK, D. **Elementary Engineering Fracture Mechanics**. 3 ed., Dordrecht : Kluwer Academic Publications, 1982.

BRUGGI, M.; CASCIATI, S.; FARAVELLI, L. **Cohesive crack propagation in a random elastic medium**. Probabilistic Engineering Mechanics, 23(1), 23–35, 2008.

BURCZYŃSKI, T. **The boundary element method for stochastic potential problems**. Applied Mathematical Modelling, 9(3), 189–194, 1985.

CHENG, A.H.D.; LAPE, O.E. **Boundary element solution for stochastic groundwater flow: Random boundary condition and recharge**, Water Resources Res., 27, 231-242, 1991.

CHEN G., RAHMAN S., PARK Y.H. **Shape sensitivity and reliability analyses of linear-elastic cracked structures**. Int J Fract 112:223–246, 2001.

CORDEIRO, S. G. F.; LEONEL, E. D. **Cohesive crack propagation modelling in wood structures using BEM and the Tangent Operator Technique**. Engineering Analysis with Boundary Elements, 64, 111–121, 2016.

CORDEIRO, S. G. F., LEONEL, E. D.; BEAUREPAIRE, P. **Quantification of cohesive fracture parameters based on the coupling of Bayesian updating and the boundary element method**. Engineering Analysis with Boundary Elements, 74, 49–60, 2017.

CORDEIRO, S. G. F.; LEONEL, E. D. **An improved computational framework based on the dual boundary element method for three-dimensional mixed-mode crack propagation analyses**. Advances in Engineering Software, 135, 102689, 2019.

CORNELL, C.A. **A Probabilistic-Based Structural Code**, Journal of the American Concrete Institute 66(12), pp. 974-985, 1969.

CROUCH, S. L.; **Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 10, n.2, p. 301-342, 1976.

CRUSE, T. A. **A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem II**, Journal of Math. Analysis and Applications, V.22, 341, 1968.

CRUSE, T. A. **Numerical solutions in three dimensional elastostatics**. Int. Journal of Solid and Structures, V.5, 1259-1274, 1969.

CRUSE, T. A. **Numerical Evaluation of elastic stress intensity factor by the boundary – integral equation method**. In: Swedlon, JL, ed. The surface crack: Physical Problems and computational solutions. New York, 1972.

CRUSE, T.A. **Application of the boundary-integral equation method to three dimensional stress analysis**. Computer and Structures, V. 3, 509-527, 1973.

CRUSE, T.A., **An Improved Boundary-Integral Equation Method for Three Dimensional Elastic Stress Analysis**. Computers and Structures, 4, pp. 741-754, 1974.

CRUSE, T.A. **Boundary integral equation method for three dimensional elastic fracture mechanics analysis**, AFOSR-TR-7S 0813 Report, 1975.

CRUSE, T. A. **Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics**, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988.

CRUSE, T. A.; RIZZO, F. J. **A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem I**, Journal of Math. Analysis and Applications, V. 22, 244, 1968.

CRUSE, T. A.; VANBUREN, W. **Three-dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack**. International Journal of Fracture Mechanics, v. 7, n. 1, p. 1- 15, 1971.

DADDAZIO, R. P.; ETTOUNEY, M. M. **Boundary Element Methods in Probabilistic Acoustic Radiation Problems**. Journal of Vibration and Acoustics, 112(4), 556, 1990.

-
- DITLEVSEN, O. **Uncertainty modeling: With applications to multidimensional civil engineering systems**, McGraw-Hill, New York, 1981.
- DREWNIAK, J. **Boundary elements for random heat conduction problems**, *Engrg. Anal.* 2, 168-170, 1985.
- DUGDALE, D. S. **Yelding of steel sheets containing slits**. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 8, n. 2, p. 100-104, 1960.
- EBERT, M. **Experimentelle und numerische Untersuchung des dynamischen Tragverhaltens von Stahlbetontragwerken unter Berücksichtigung stochastischer Eigenschaften**. Ph. D. thesis, Bauhaus-University Weimar, Germany, 2002).
- ESPINOSA, H.D., ZAVATTIERI, P.D. **A grain level model for the study of failure initiation and evolution in polycrystalline brittle materials**. Part I: theory and numerical implementation, *Mech. Mater.*, 35, 333–364, 2003.
- ETTOUNEY, M.; BENAROYA, H.; WRIGHT, H. **Boundary element methods in probabilistic structural analysis (PBEM)**, *Appl. Math. Modelling*, 13, 432-441, 1989.
- FERREIRA MDC, VENTURINI WS. **Inverse analysis for two-dimensional structures using the boundary element method**. *Adv Eng Software* 41, 1061-1072, 2010.
- FREUDENTHAL A.M. **The safety of structures**. *Transactions of ASCE*, 112: 125-180, 1947
- GAO, XW. **The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary-only discretization**. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 26, pp. 905-916, 2002.

GRAY, L.J.; GILES, G.E. **Application of the Thin Cavity Method to Shield Calculations in Electroplating**, Proc. of 10th Int. Conf. on the Boundary Element Method, C.A. Brebbia (Editor), Southampton, Vol. 2, 441-452, 1988.

GRIGORIU, M., SAIF, M.T.A., EL-BORGI, S.; INGRAFFEA, A. **Mixed-mode fracture initiation and trajectory prediction under random stresses**. International Journal of Fracture, 45(1), 19–34, 1990.

GRIFFITH, A.A. **The phenomenon of Rupture and flow in solids**. Philosophical Transactions of the Royal Society, London, A221, 163-197, 1921.

GRIFFITH, A.A. **The theory of rupture**. In: First International Congress of Applied Mechanics, 5., Delft. Proceedings...Delft, p. 55-63, 1924.

HALDAR, A.; MAHADEVAN, S. **Probability, reliability and statistical methods in engineering design**, Wiley, New York, 1999.

HÄUSSLER-COMBE, U. **Elementfreie Galerkin-Verfahren: Grundlagen und Einsatzmöglichkeiten zur Berechnung von Stahlbetontragwerken**. Habilitationthesis, University of Karlsruhe, Germany, 2001

HAMROUNI, A.; DIAS, D.; SBARTAI, B. **Reliability analysis of shallow tunnels using the response surface methodology**. Underground Space, 2(4), 246–258, 2017.

HASOFER, A.M.; LIND, N.C. **An exact and invariant first-order reliability format**. J. Eng. Mech., 100, 1974.

HILLERBORG, A.; MODEER, M.; PETERSSON, P. E. **Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements**. Cement and Concrete Research, v. 6, n. 6, p. 773-781, 1976.

- HUANG, X., ALIABADI, M. H. **Probabilistic fracture mechanics by the boundary element method**. International Journal of Fracture, 171(1), 51–64, 2011.
- INGLIS, C.E. **Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners**. Proc. Inst. Naval Architects 60, 1913.
- IRWIN, G.R. **Analysis of Stress and Strain near the end of a crack traversing a plate**, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, V.24, 361-364, 1957.
- JASWON, M.A. **Integral equation methods in potential theory**. I. Proc. Royal Society Ser., V. A275, 23-32, 1963.
- KALJEVIĆ, I.; SAIGAL, S. **Stochastic boundary elements in elastostatics**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 109(3-4), 259–280, 1993
- KALJEVIĆ, I.; SAIGAL, S. **Stochastic boundary elements for two-dimensional potential flow in homogeneous domains**. International Journal of Solids and Structures, 32(13), 1873–1892, 1995.
- KELVIN, L., **Note on the Integration of the Equations of Equilibrium of an Elastic Solid**. The Cambridge and Dublin Mathematical Journal, vol. III, pp.87-89, 1848.
- KIRSCH, G., **Verein Deutscher Ingenieure**, 1898
- KZAM, A. K. L. **Formulação Dual em Mecânica da Fratura Utilizando Elementos de Contorno Curvos de Ordem Qualquer**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.
- LACHAT, J.C. **A further development of the boundary integral technique for elastostatics**. PhD Thesis, Southampton University, Southampton, 1975.
- LEONEL, E. D. **Modelos não lineares do Método dos Elementos de Contorno para a análise de**

problemas de fratura e aplicação de modelos de confiabilidade e otimização em estruturas submetidas a fadiga. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

LEONEL, E.D.; CHATEAUNEUF, A. ; VENTURINI, W.S.; BRESSOLETTE, P. **Coupled reliability and boundary element model for probabilistic fatigue life assessment in mixed mode crack propagation.** International Journal of Fatigue, v. 32, p. 1823-1834, 2010.

LEONEL, E. D., BECK, A. T.; VENTURINI, W. S. **On the performance of response surface and direct coupling approaches in solution of random crack propagation problems.** Structural Safety, 33(4-5), 261–274, 2011a.

LEONEL, E. D.; VENTURINI, W. S. **Multiple random crack propagation using a boundary element formulation.** Engineering fracture mechanics, v. 78, n. 6, p. 1077-1090, 2011b.

LEONEL, E.D.; CHATEAUNEUF, A.; VENTURINI, W.S. **Probabilistic crack growth analyses using a boundary element model:** Applications in linear elastic fracture and fatigue problems. Engineering Analysis with Boundary Elements, 36(6), 944–959, 2012.

LIU, W. K., BELYTSCHKO, T. B., & SPANOS, P. **Computational Mechanics of Probabilistic and Reliability Analysis.** Journal of Applied Mechanics, 58(1), 299, 1991.

LI, H. Z.; LOW, B. K. **Reliability analysis of circular tunnel under hydrostatic stress field.** Computers and Geotechnics, 37(1-2), 50–58, 2010.

LOPES Jr., M. C. **Modelagem numérica do crescimento de fraturas através do método dos elementos de contorno.** Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

LOPES Jr, M. C.; VENTURINI, W. S. **Cohesive crack analysis by the boundary element method,** In: XV INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL PLASTICITY, 1997, Barcelona. Proceedings..., Barcelona: CIMNE, v.1, p. 1057 – 1062, 1997.

LONG, X.Y ; LIU, K ; JIANG, C ; HAN, X. **Probabilistic fracture mechanics analysis of three-dimensional cracked structures considering random field fracture property.** Engineering Fracture Mechanics, Vol.218, 2019

LOW, B.K.; TANG, W.H. **Efficient spreadsheet algorithm for first-order reliability method.** Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 133, No. 12, pp.1378- 1387, 2007.

LÜ, Q.; LOW, B. K. **Probabilistic analysis of underground rock excavations using response surface method and SORM.** Computers and Geotechnics, 38(8), 1008–1021, 2011.

LU, X. **Probabilistic boundary element method.** Reliability Engineering & System Safety, 37(2), 123–127,1992

MCKAY, M. D., W. J. CONOVER; R. J. BECKMANN. **A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code.** Technometrics 21, 239–245, 1979.

MADSEN, H.O., KRENK, S.; LIND, N.C. **Methods of Structural Safety**, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1986.

MAYER, M.T. **Die Sicherheit der Bauwerke und ihre Berechnung nach Grenzkraften**, Springer-Verlag, Berlin, 1926.

MELCHERS, R.E. **Structural Reliability Analysis And Prediction**, John Wiley & Sons, Chichester, 1999.

MELCHERS, R.E; BECK, A.T. **Structural Reliability Analysis And Prediction**, John Wiley & Sons, Chichester, 2018.

MELLINGS, S. C.; ALIABADI, M. H. **Three-dimensional flaw identification using sensitivity analysis**. In: Brebbia, C.A. (ed.). *Boundary Element Method XVI*, v. 7, p. 149-156, 1994.

MI, Y. **Three-dimensional analysis of crack growth**. *Topics in Engineering*, v. 28, Southampton: UK Computational Mechanics Publications, 1996.

MI, Y.; ALIABADI, M. H. **An automatic procedure for mixed-mode crack growth analysis**. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v. 11, n. 2, p. 167-177, 1995.

MI, Y.; ALIABADI, M. H. **Discontinuous crack-tip elements: application to 3-D boundary element method**. *International Journal of Fracture*, v. 67, n.3, p. 67-71, 1994b.

MI, Y.; ALIABADI, M. H. **Dual boundary element method for analysis of 3-D crack problems**. In: Brebbia C.A. (ed.). *Fourteenth International Conference on Boundary Elements*, v. 2, p.315-329, 1992a.

MI, Y.; ALIABADI, M. H. **Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis**. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 10, n. 2, p. 161-171, 1992b.

MI, Y.; ALIABADI, M. H. **Three-dimensional crack growth simulation using BEM**. *Computers & Structures*, v. 52, n. 5, p. 871-878, 1994a.

MOST, T. **Stochastic crack growth simulation in reinforced concrete structures by means of coupled finite element and meshless methods**. Ph.D. Thesis, Florida State University, 2005.

MORSE, L., SHARIF KHODAEI, Z.; ALIABADI, M. H. **A Multi-Fidelity Modelling approach to the Statistical Inference of the Equivalent Initial Flaw Size Distribution for Multiple-Site Damage**. *International Journal of Fatigue*, 2018.

MORSE, L., SHARIF KHODAEI, Z.; ALIABADI, M. H. **A multi-fidelity boundary element method for structural reliability analysis with higher-order sensitivities.** Engineering Analysis with Boundary Elements, 104, 183–196, 2019.

MORSE, L., SHARIF KHODAEI, Z.; ALIABADI, M. H. **A dual boundary element based implicit differentiation method for determining stress intensity factor sensitivities for plate bending problems.** Engineering Analysis with Boundary Elements, 106, 412–426, 2019.

NARDINI, D.; BREBBIA, C. A. **A new approach to free vibration analysis using boundary elements,** 4th Int. Conf. on B.E.M., Southampton University, Springer-Verlag, Berlin. 1982.

NEVES, A. C.; BREBBIA, C. A. **The multiple Reciprocity boundary element method in elasticity: A new approach for transforming domain integrals to the boundary.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, 31(4), 709–727, 1991.

NOWAK, A.S.; COLLINS, K.R. **Reliability of structures.** Michigan: MacGraw, 2000.

NOWAK, A. J.; BREBBIA, C.A. **The multiple-reciprocity method. A new approach for transforming B.E.M. Domain integrals to the boundary,** Eng. Anal. Boundary Elements, 6, 164-168 ,1989.

OLIVEIRA, H.L. **Uma Formulação Alternativa do Método dos Elementos de Contorno aplicadas à análise da propagação de fissuras em materiais quase frágeis.** Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

OLIVEIRA, H. L., CHATEAUNEUF, A.; LEONEL, E. D. **Probabilistic mechanical modelling of concrete creep based on the boundary element method.** Advances in Structural Engineering, 136943321878808, 2018.

OLSSON, A., G. SANDBERG; O. DAHLBLOM. **On Latin hypercube sampling for structural reliability analysis.** Structural Safety 25, 47–68, 2003.

PEARCE, C.J.; KACZMARCZYK, L. **Multi-Scale Multi-Grid Finite Element Analysis of Concrete**, in B.H.V. Topping, M. Papadrakakis, (Editors), "Trends in Computational Structures Technology", Saxe-Coburg Publications, Stirlingshire, UK, Chapter 4, pp 75-96, 2008.

PEIXOTO, R.G., RIBEIRO, G.O., PITANGUEIRA, R.L.S., **A boundary element method formulation for quasi-brittle material fracture analysis using the continuum strong discontinuity approach**, Engineering Fracture Mechanics, 2018.

PETERSSON, P.E. **Crack growth and development of Fracture Zone in Plain Concrete and similar materials**, Report N° TVBM-1006, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Lund Sweden, 1981.

POULOS, H.G.; DAVIS, E.H. **Elastic solution for soil and rock mechanics**. John Wiley e Sons Inc.; 1974.

PORTELA, A. **Dual boundary element incremental analysis of crack growth**, PhD Thesis–Wessex Institute of Technology, University of Portsmouth, Southampton, 1992.

PORTELA, A. **Dual Boundary Element Analysis of Crack Growth**. 1. ed. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1993.

PORTELA, A.; ALIABADI, M. H; ROOKE, D. P. **Dual boundary element method: Effective implementation for cracked problems**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 33, n. 6, p. 1269-1287, 1992.

PORTELA, A.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. **Dual boundary element incremental analysis of crack propagation**. Computers & Structures, v. 46, n.2, p. 237-247, 1993.

PROVAN, J. W. **Probabilistic Fracture Mechanics and Reliability**, Martinus Nijhoff Publ.,

Dordrecht, The Netherlands, 1987.

RACKWITZ, R.; FIESSLER, B., **Structural Reliability under Combined Random Load Sequences** *Computers and Structures*, Vol. 9, No. 5, pp. 489-494, 1978.

RAHMAN, S. **A stochastic model for elastic-plastic fracture analysis of circumferential through-wall-cracked pipes subject to bending.** *Engineering Fracture Mechanics*, 52, 265–288, 1995.

RAHMAN, S. **Probabilistic fracture mechanics by J-estimation and finite element methods.** *Engineering Fracture Mechanics*, 68, 107–125, 2001.

RAHMAN, S.; KIM, J.S. **Probabilistic fracture mechanics for nonlinear structures.** *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 78, 261–269, 2001.

ROCHA, F. S. **Análise de descontinuidades pelo método dos elementos de contorno.** Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1988.

ROCHA, F. S.; VENTURINI, W. S. **Boundary element algorithm to solve discontinuity problems,** In: Brebbia, C. A., *Boundary Elements X: Stress Analysis*, Southampton: Computational Mechanics Publications, v.3, p. 107 - 118, 1988.

ROCHA, J.A. **Termodinâmica da fratura: uma nova abordagem do problema da fratura nos sólidos,** Salvador: EDUFBA, 192 p, 2010.

RIZZO, F. J. **The Boundary Element Method: Some Early History--A Personal View,** *Boundary Element Methods in Structural Analysis*, Ed. D.E. Beskos, ASCE, 1989.

RIZZO, P, J. **An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics.** *Quarterly of Applied Mathematics*, n. 25, p. 83-95, 1967.

RIZZO, F.J.; SHIPPY, D.J., **A Formulation and Solution Procedure for the General Non-Homogeneous Elastic Inclusion Problem**. International Journal of Solids and Structures, 4: 1161-1179, 1968.

SAGRILO, L. V. S. **Confiabilidade estrutural: notas de aula**. Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-graduação e Pesquisa de Engenharia – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.

SALEH, A.L. **Crack growth in concrete using boundary elements**. Topics in Engineering, V. 30, Comp. Mech. Publ., 1997.

SALEH, A.L.; ALIABADI, M.H. **Crack growth analysis in concrete using boundary element method**. Engineering Fracture Mechanics , 51(4),: 533-545, 1995.

SHINOZUKA, M. **Basic analysis of structural safety**. J. Struct. Eng., 109(3), 721–740, 1983.

SHI, C.; VAN DAM, A.G.; VAN MIER, J. G. M.; SLUYS, I. J. **Crack interaction in concrete**, in: F. H. Wittmann (Ed.), Materials for Buildings and Structures EUROMAT, Weinheim, Germany, 2000, pp. 125-131.

SNYDER, M. D; CRUSE, T.A. **Boundary-integral equation analysis of cracked anisotropic plates**, Int. J. Fracture, V. 11, 315-328, 1975.

SOMIGLIANA, C., **Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotrope**, Il Nuovo Cimento, p. 17-19, 1886.

SOLLERO, P; ALIABADI, .M.H. **Anisotropy analysis of cracks emanating from circular holes in composite laminates using the boundary element**. Eng. Fract. Mech., V.49, 213-224, 1994.

STRELETSKII, N.S. **Foundations of Statistical Account of Factor of Safety of Structural Strength**, State Publishing House for Buildings, Moscow, 1947.

SU, C.; XU, J. **Reliability analysis of Reissner plate bending problems by stochastic spline fictitious boundary element method**. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 51, 37–43, 2015

TOMAR, V.; ZHOU, M. **Deterministic and stochastic analyses of fracture processes in a brittle microstructure system**, *Engrg. Fract. Mech.*, 72, 1920–1941, 2005.

UGER J.F., ECKARDT S., KÖNKE C., **Modelling of cohesive crack growth in concrete structures with the extended finite element method**, *Comput. Method Appl. M.* 196 (41–44) 4087–4100, 2007.

VENTURINI, W. S. **A new boundary element formulation for crack analysis**. In: Brebbia, C.A., *Boundary element method XVI*, Southampton: Computational Methods Publ., p. 405–4012, 1994.

VENTURINI, W. S. **Análise de problemas de fratura coesiva usando o método dos elementos de contorno**, In: XVI CILAMCE, 1995, Curitiba. *Anais, Curitiba: UFpr*, v. 2, p. 1012-2021, 1995.

WANG, X.; YANG, Z.J.; JIVKOV, A.P. **Monte Carlo simulations of mesoscale fracture of concrete with random aggregates and pores: a size effect study**. *Constr. Build. Mater.* 80, 262–272, 2015a.

WANG, X.F.; YANG, Z.J.; YATES, J.R.; JIVKOV, A.P.; ZHANG, C. **Monte Carlo simulations of mesoscale fracture modelling of concrete with random aggregates and pores**. *Constr. Build. Mater.* 75, 35–45, 2015b.

WATSON, J.O. **Hermitian cubic boundary element for the analysis of cracks of arbitrary geometry**. In: Cruse, T.A. *Advanced Boundary Element Methods*, Springer-Verlag, p. 465-

474, 1988.

WESTERGAARD, H.M. **Bearing pressures and cracks**, J. Appl. Mechanics n.6, 49-53, 1939.

WIERZBICKI, W. **Safety of structures as a Probabilistic Problem**, Przegląd, Techniczny, Polish, 1936.

WINKLER, B. J. **Traglastuntersuchungen von unbewehrten und bew. Betonstrukturen auf der Grundlage eines objektiven Werkstoffgesetzes für Beton**. Ph.D. thesis, University of Innsbruck, Austria, 2001.

WUTZOW, W.W. **Formulação do Método dos Elementos de Contorno para análise de chapas com Enrijecedores**. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

YANG, Z.; FRANK XU, X. **A heterogeneous cohesive model for quasi-brittle materials considering spatially varying random fracture properties**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 197(45-48), 4027–4039, 2008.

YANG, Z.J.; SU, X.T.; CHEN, J.F.; LIU, G.H., 2009. **Monte Carlo simulation of complex cohesive fracture in random heterogeneous quasi-brittle materials**. Int. J. Solids Struct. 46, 3222–3234, 2009.

ZHOU, F.H.; MOLINARI, J.F. **Stochastic fracture of ceramics under dynamic tensile loading**, Int. J. Solids Struct., 41, 6573–6596, 2004.

ANEXO A – Fundamentos da Teoria da Elasticidade

Neste Apêndice será apresentada uma breve explanação a cerca de considerações essenciais para o desenvolvimento do modelo numérico. Os conceitos e deduções podem ser encontrados no livro Timoshenko e Goodier (1980).

A.1 Equação de equilíbrio

Inicialmente é requerida a definição da equação de equilíbrio que representa a forma forte do problema de valor de contorno (PVC), e para isto, sabendo-se que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ são porções complementares de Γ , é suposto que um determinado corpo em equilíbrio estático está sujeito a seguintes condições de contorno:

- 1) Condições de contorno essenciais, conhecidas como condição de Dirichlet: $u_i = \bar{u}_i$ em Γ_1
- 2) Condições de contorno naturais, ou condição de Neumann: $p_i = \sigma_{ij}n_j = \bar{p}_i$ em Γ_2

as condições acima implicam que a equação de equilíbrio a ser satisfeita seja:

$$\begin{aligned} \sigma_{jk,k} + b_j &= 0 \text{ em } \Omega \\ p_i &= \sigma_{ji}n_j \end{aligned} \tag{A.1a,b}$$

A equação (A.1a,b), escrita em termos indiciais, representa o equilíbrio do sólido a partir de um conjunto de três equações diferenciais a serem atendidas, na qual σ_{ij} ou σ_{ji} são tensões internas, o vetor b_j representa as forças de volume atuantes e p_i são forças externas por unidade de superfície.

A.2. Equação de Compatibilidade

Caso a posição relativa de todos os pontos permaneça inalterada, o movimento de corpo rígido acontece, e de forma geral, pode-se definir o tensor de deformações a partir das derivadas dos deslocamentos.

$$\varepsilon_{kj}(q) = \frac{1}{2}(u_{k,j}(q) + u_{j,k}(q) + u_{i,j}u_{i,k}) \tag{A.2}$$

considerando pequenas deformações, despreza-se a derivada de ordem superior, logo

$$\varepsilon_{kj}(q) = \frac{1}{2}[u_{k,j}(q) + u_{j,k}(q)] \quad (\text{A.3})$$

A.3. Relações Constitutivas

Considerando a isotropia do material, a simetria dos tensores de 2ª ordem e o princípio de conservação de energia, pode-se escrever a lei constitutiva a partir de dois parâmetros, Módulo de Elasticidade (E) e Poisson (ν).

$$\sigma_{kj}(q) = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{kj} \varepsilon_{ll}(q) + 2G \varepsilon_{kj}(q) \quad (\text{A.4})$$

O campo de deformações pode ser expresso como:

$$\varepsilon_{kj}(q) = \frac{1}{2G} (\sigma_{kj}(q) - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{ii}(q) \delta_{kj}) \quad (\text{A.5})$$

sendo G o módulo de elasticidade transversal, $G = E / 2(1 + \nu)$. O tensor δ_{kj} , definido como delta de Kronecker, e escrito como:

$$\delta_{kj}, \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Aplicando-se a equação (A.3) em (A.4), pode-se representar as tensões em função dos deslocamentos,

$$\sigma_{kj}(q) = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{kj} u_{1,1}(q) + G[u_{k,j}(q) + u_{j,k}(q)] \quad (\text{A.7})$$

substituindo-se a equação (A.7) em (A.1a,b), o equilíbrio em termos de deslocamentos, definido como equação de Navier, é encontrado,

$$u_{k,jj}(q) + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,kj}(q) + \frac{b_k(q)}{G} = 0 \quad (\text{A.8})$$

A modelagem tridimensional de estruturas muitas vezes requer um alto custo computacional, em sua maioria pela alta discretização imposta, que se utiliza de elementos tridimensionais no Método dos Elementos Finitos e elementos bidimensionais no Método dos Elementos de Contorno. Problemas bidimensionais são comumente utilizados objetivando-se simplificar de confiável maneira um problema que, caso avaliado em seu completo domínio, apresentaria alto custo computacional. Tal simplificação é classificada em dois tipos, estado plano de deformação (EPD) e estado plano de tensão (EPT).

A formulação para estado plano de tensão (EPT) pode ser derivada a partir do EPD, redefinindo a constante elástica de Poisson,

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \nu} \quad (\text{A.9})$$

ANEXO B – Integração numérica e quadratura de Gauss-Legendre

No caso específico em que o elemento de integração não apresenta singularidade, um artifício possível de se utilizar consiste na integração numérica através da quadratura de Gauss-Legendre. De forma geral, a integração numérica pode ser empregada no cálculo de integrais que apresentam a forma seguinte:

$$\int_a^b F(x) dx \quad (\text{B.1})$$

Utiliza-se o artifício de integração numérica quando a função analisada apresenta certa dificuldade em ser integrada analiticamente. Basicamente a ideia principal consiste no mapeamento da coordenada global do problema para a local.

A Quadratura de Gauss-Legendre é uma das mais utilizadas para o cálculo numérico de integrais e consiste em aproximar uma dada integral, em um espaço adimensional definido em -1 a 1, para uma integral de um polinômio de interpolação da função nesse trecho normalizado. De forma geral, pode-se definir a formula de integração de Gauss-Legendre através de:

$$\int_a^b F(x) dx = \int_{-1}^1 F(x(\xi)) |J| d\xi \simeq \sum_{i=1}^{npg} F(\xi) |J|_i w_i \quad (\text{B.2})$$

onde,

ξ_i são os pontos-base;

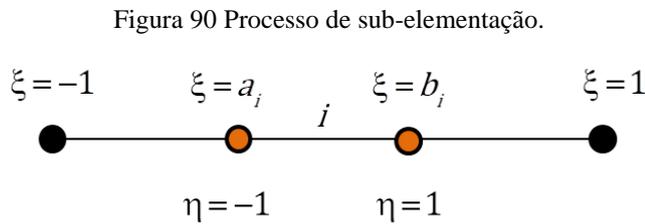
w_i são os fatores de ponderação;

$|j|_i$ Jacobiano de transformação das coordenadas, avaliado no i-ésimo ponto de Gauss.

npg Número de pontos de Gauss

ANEXO C – Procedimento de Sub-Elementação

No caso em que o ponto de colocação estiver relativamente próximo ao elemento a ser integrado ($r \rightarrow 0$), a integral torna-se quase singular com a possível condução a resultados ruins. Para melhorar os resultados obtidos através da integração numérica quando os pontos fontes estiverem muito próximos aos elementos de contorno, a utilização de técnicas que melhorem os resultados dessas integrações pode ser utilizadas. Um artifício possível de utilizar refere-se a divisão do elemento de integração em sub-elementos menores (Figura 90) com a posterior aplicação da quadratura de Gauss-Legendre em cada sub-elemento.



Fonte: autor (2019).

Normalizando-se a coordenada ao longo do sub-elemento, e considerando que o Jacobiano $J = L/2$ (caso linear), pode-se escrever:

$$\sum_{i=1}^n F(\xi) |J|_i w_i = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi = \frac{L}{2} \sum_{i=1}^{nsub} \left[\frac{b_i - a_i}{2} \int_{-1}^1 f \left(\frac{b_i - a_i}{2} \eta + \frac{b_i + a_i}{2} \right) d\eta \right] \quad (C.1)$$

onde $nsub$ é o número de sub-elementos e $(b_i - a_i)/2$ o jacobiano de cada sub-elemento (caso linear). Caso sejam utilizados elementos com padronizado comprimento:

$$\begin{aligned} a_i &= -1 + \frac{2}{nsub} (i - 1) \\ b_i &= a_i + \frac{2}{nsub} \end{aligned} \quad (C.2)$$

A equação (C.1) torna-se,

$$\frac{L}{2} \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \frac{l}{2nsubel} \sum_{i=1}^{nsub} \sum_{k=1}^{npg} f(\xi_{k_i}) w_{k_i} \quad (C.3)$$

sendo npg o número de pontos de Gauss,

$$\xi_{k_i} = \frac{1}{nsub} (n_k + 2i - 1 - nsub) \quad (C.4)$$

onde η_k é a coordenada do k-ésimo ponto de Gauss.