

# V Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional

SBMAC Regional 04 - Alagoas - Bahia - Sergipe



## ANAIS

# V Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional

ISBN 978-85-8215-089-4

25, 26 e 27 de Julho de 2018

Universidade Federal de Alagoas, Campus Maceió

Apoio e



**FAPEAL**  
FUNDAÇÃO DE AMPARO À PESQUISA  
DO ESTADO DE ALAGOAS

Organização



PROEX  
Pró-reitoria de Extensão



---

# V Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional

---

**Editores:**

Rinaldo Vieira da Silva Júnior  
Isnaldo Isaac Barbosa  
Francisco Bruno Souza Oliveira  
João Frederico Costa Azevedo Meyer

ISBN: 978-85-8215-089-4

Maceió-AL, Julho de 2018.

---



Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

---

# V Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional

---

**Editors:**

Rinaldo Vieira da Silva Júnior  
Isnaldo Isaac Barbosa  
Francisco Bruno Souza Oliveira  
João Frederico Costa Azevedo Meyer

ISBN: 978-85-8215-089-4

Maceió-AL, Julho de 2018.

---



Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 - 1767

E56 Encontro regional de Matemática Aplicada e Computacional (5. : 2018 : Maceió, AL);  
V Encontro regional de matemática aplicada e computacional / editores, Rinaldo Vieira da Silva Júnior ... [et al.]. – Maceió: UFAL : SBMAC, 2018.  
279 p. : il.

Anais do encontro promovido pela Universidade Federal de Alagoas, Instituto de Matemática e Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, Regional 4, realizado em Maceió, de 25 a 27 de julho de 2018.

ISBN 978-85-8215-089-4

1. Matemática aplicada. 2. Geometria e modelagem computacional. I. Silva Júnior, Rinaldo Vieira da. II. Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. III. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional. IV. Título.

CDU: 519.67(063)

## Prefácio

Este livro contém alguns dos recentes avanços na área de matemática aplicada e computacional, uma área de pesquisa ativa e crescente no cenário mundial. Especificamente, essa obra contém 66 contribuições escritas em português. Todas as contribuições foram avaliadas por um comitê científico que atestou a relevância das mesmas. Além disso, elas foram selecionadas para serem apresentadas na forma oral durante o Quinto Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional (V ERMAC), regional 04 Alagoas, Bahia e Sergipe, realizado entre 25 e 27 de Julho de 2018, na cidade de Maceió – Alagoas, Brasil.

O V ERMAC reuniu 140 participantes, incluindo palestrantes e membros da comissão organizadora, divididos entre professores, estudantes e profissionais interessados em matemática aplicada e computacional. O congresso contou com 10 palestras, 01 minicurso, 01 mesa redonda e diversas sessões técnicas nos quais os trabalhos aprovados pelo comitê científico foram apresentados na forma oral ou pôster. Durante a chamada de trabalhos do V ERMAC, foram submetidas 82 contribuições distribuídas entre 25 trabalhos completos e 57 resumos estendidos. Cada trabalho completo foi avaliado por pelo menos dois revisores anônimos que, de um modo geral, atribuíram uma nota no conjunto  $\{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\}$ , no qual  $-3$  representa “rejeita enfaticamente” e  $+3$  corresponde à “aceita enfaticamente”. Foram aceitos somente os trabalhos completos que receberam notas positivas de todos os revisores. Com isso, foram selecionados 66 contribuições, que corresponde à uma taxa de rejeição de 20%. Os 48 trabalhos completos foram organizados em 16 temas tal como esse livro.

Aproveitamos a oportunidade para agradecer a todos envolvidos no V ERMAC: os palestrantes que dedicaram seu tempo compartilhando seus conhecimentos conosco, Lino Marcos, João Coelho, Raquel Cabral, Tatiana Rocha (In memoriam), Wesley Wagner, Juliana Verga, Edson Leite, Ana Wyse, Antônio Boness, Mário Henrique, e ao amigo Joni por todo apoio e responsável pelo excelente minicurso *A Modelagem Matemática de Fenômenos da vida - e da Natureza*, os colegas da mesa redonda *Perspectivas da Matemática Aplicada e Computacional na região Nordeste*, os autores que submeteram suas contribuições, os membros do comitê científico que avaliaram os trabalhos e a todos os membros da comissão organizadora. Agradecemos também à Universidade Federal de Alagoas (UFAL) e ao Instituto de Matemática (IM) pela realização do V ERMAC, à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Alagoas (FAPEAL) pelo suporte financeiro e ao apoio da Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC) e da Fundação Universitária de Desenvolvimento de Extensão e Pesquisa (FUNDEPES).

Maceió, Julho de 2018.  
Rinaldo Vieira da Silva Júnior  
Coordenador Geral do V ERMAC

# Organização

## Comissão Organizadora

Rinaldo Vieira da Silva Júnior (UFAL) ..... Coordenador Geral.  
Francisco Bruno Souza Oliveira (UESC) ..... Vice-coordenador Geral.  
Isnaldo Isaac Barbosa (UFAL) ..... Coordenador Científico.  
João Frederico Costa Azevedo Meyer (UNICAMP) ..... Vice-coordenador Científico.

## Organização Geral e Colaboradores

Ana Paula Pintado Wyse, Universidade Federal da Paraíba.  
Antonio José Boness dos Santos, Universidade Federal da Paraíba.  
Cássia Ferreira Sampaio, Universidade Federal de Alagoas.  
Edson Leite Araújo, Universidade Federal do Vale do São Francisco.  
Francisco Bruno Souza Oliveira, Universidade Estadual de Santa Cruz.  
Gastão Florêncio Miranda Junior, Universidade Federal de Sergipe.  
Ingrid Araújo Sampaio, Universidade Estadual de Ciências da Saúde de Alagoas.  
João Coelho Silva Filho, Universidade Estadual do Maranhão.  
João Frederico Costa Azevedo Meyer, UNICAMP  
Juliana Verga Shirabayashi, Universidade Federal do Paraná.  
Lino Marcos da Silva, Universidade Federal do Vale do São Francisco.  
Mario Henrique de Castro, Universidade Federal de Uberlândia.  
Raquel da Silva Cabral, Universidade Federal de Alagoas.  
Tatiana Rocha de Souza, Universidade Estadual da Paraíba.  
Wesley Vagner Inês Shirabayashi, Universidade Estadual de Maringá.

## Avaliadores

Adina Rocha Dos Santos, Instituto Federal de Alagoas.  
Alejandro César Frery Orgambide, Universidade Federal de Alagoas.  
Arlyson Alves do Nascimento, Instituto Federal de Alagoas.  
Fernando Santos Silva, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia.  
Francisco Bruno Souza Oliveira, Universidade Estadual de Santa Cruz.  
Gastão Florêncio Miranda Junior, Universidade Federal de Sergipe.  
Gildson Queiroz de Jesus, Universidade Estadual de Santa Cruz.  
Hassan Sherafat, Universidade Federal de Sergipe.  
Isnaldo Isaac Barbosa, Universidade Federal de Alagoas.  
Jair da Silva, Universidade Federal do Paraná.  
Juliana Verga Shirabayashi, Universidade Federal do Paraná.  
Junior Cesar Alves Soares, Universidade do Estado de Mato Grosso.  
Lino Marcos da Silva, Universidade Federal do Vale do São Francisco.  
Márcia Pragana Dantas, Universidade Federal Rural de Pernambuco.  
Marcio Antonio de Andrade Bortoloti, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia.  
Mirela Vanina de Mello, Universidade Estadual de Santa Cruz.  
Polyane Alves Santos, Instituto Federal da Bahia.

## Realização

Universidade Federal de Alagoas (UFAL)  
Instituto de Matemática (IM)  
Regional 04 da Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC)

## **Suporte Financeiro**

Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Alagoas (FAPEAL)  
Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC)  
Universidade Federal de Alagoas (UFAL)

## **Apoio**

Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC)  
Fundação Universitária de Desenvolvimento de Extensão e Pesquisa (FUNDEPES)

# Sumário

---

## I Modelagem Matemática e Aplicações

---

- Um modelo discreto 3D para verificação dos fatos observáveis conhecidos da encefalopatia espongiforme bovina . . . . . 1  
*Elthon Allex da Silva Oliveira, Antônio Igor Cavalcante Lima e Samuel Silva Albuquerque*

---

## II Biomatemática

---

- Comportamento Dinâmico de um Sistema Tumor-Imune com Quimioterapia e Controle Ótimo Quadrático . . . . . 5  
*Jéssica Correia Santos Alves, Paulo de Souza Rabelo e Gastão Florêncio Miranda Junior*
- Um Modelo Matemático para a Dinâmica de Transmissão da Hanseníase . . . . . 8  
*Claudia Mazza Dias e Erito Marques de Souza Filho*
- Modelagem, Aplicação e Determinação de Parâmetros Epidemiológicos Para o Surto de Cólera no Iémem em 2017 . . . . . 13  
*Marina Lima, Graziane Sales Teodoro e João Frederico C. A. Meyer*

---

## III Ensino

---

- O Jogo Matemático como um Instrumento de fomento à prática dos sete saberes necessários à Educação do futuro propostos por Edgar Morin . . . . . 15  
*Claudiene dos Santos*
- Desenvolvimento do Processo de Mínimos Quadrados com Aplicações em ajuste de dados físicos utilizando o GeoGebra . . . . . 23  
*Marcos Henrique Fernandes Marcone e Fabiana Tristão de Santana*
- Estudo de Distâncias entre Planos e Retas utilizando a Janela CAS do Software GeoGebra . . . . . 30  
*Igor Michael Araujo de Macedo e Fabiana Tristão de Santana*
- Origami: Introdução aos Sete Axiomas de Huzita-Hatori e contribuições no Ensino da Matemática 36  
*Edmilson Santos de Oliveira Júnior, Samara Gomes Lima e Andressa dos Santos Lima*
- Uso de Fractais no Ensino Básico como incentivo ao Estudo da Matemática . . . . . 43  
*Damares da Silva Cavalcante, Roque Barbosa da Costa Junior, Jean Santana de Souza e Elthon Allex da Silva Oliveira*
- Algumas Áreas de Aplicação da Geometria Fractal . . . . . 45  
*Damares da Silva Cavalcante, Roque Barbosa da Costa Junior, Jean Santana de Souza e Elthon Allex da Silva Oliveira*
- A Importância das disciplinas de Cálculo para o Curso de Engenharia Elétrica . . . . . 45  
*Jennifer Nogueira Leite, Júlio César Silva Andrade e Polyane Alves Santos*
- Uma Proposta de Implementação da aprendizagem baseada em problemas (PBL) nas ciências exatas no curso de engenharia civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia (IFBA) campus de Vitória da Conquista sob o ponto de vista dos estudantes . . . . . 52  
*Lucas Gomes Sousa Silva, Polyane Alves Santos, Domingos Teixeira da Silva Neto e Yuzo Iano*



Webquest: Probabilidade Aplicada a Genética .....	58
<i>Elvis Gomes Souza, Clewerton dos Santos Silva e Mayra Tais Albuquerque Santos</i>	
Os Desdobramentos Teóricos da Proporcionalidade na Escola de Educação Básica .....	65
<i>Mayra Tais Albuquerque Santos, Clewerton dos Santos Silva e Elvis Gomes Souza</i>	
O uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação como Recurso Educacional no Ensino e Aprendizagem de Matemática .....	71
<i>Williane Costa Ferreira</i>	
A Utilização de Materiais Manipuláveis na Resolução de Problemas da OBMEP .....	77
<i>Amanda Maria Barros Tenório e Elielson Magalhães Lima</i>	
Estudo de projeções ortogonais utilizando a janela CAS do software GeoGebra .....	79
<i>Jade Marina Dias Gomes e Fabiana Tristão de Santana</i>	

---

#### IV Modelagem Computacional em Educação

---

Uma Proposta de Análise de Órbitas Celestes com o Estudo do Hodógrafo .....	81
<i>Rafael Peres, Daniela Pereira Mendes Peres e Juliana G. Ferreira de Souza</i>	
Integração entre os Indicadores de gestão do Scrum e Indicadores de gestão do PMBOK .....	84
<i>Giseldo da Silva Neo, Alana Viana Borges da Silva Neo e José do Carmo Rodrigues</i>	

---

#### V Sistemas Fuzzy

---

Temporização de Semáforos por Algoritmo Fuzzy .....	91
<i>Pedro Ricardo da Silva Goethen e Regina Serrão Lanzillotti</i>	
Lógica Fuzzy em Sistema de jogo num combate bélico hipotético .....	98
<i>Izabel Cristina Reis Ramos e Regina Serrão Lanzillotti</i>	
O Processamento das Emoções no Cérebro: uma Análise de EEG usando Lógica Fuzzy .....	105
<i>Giselle Couto Falcão</i>	

---

#### VI Otimização

---

Condições de Otimalidade para problemas de Otimização Irregular: uma abordagem via formalismo de Dubovitskii-Milyutin .....	111
<i>Adson Sampaio Melo, Lucelina Batista dos Santos e Marko Antônio Rojas Medar</i>	
Uma versão atualizada da fatoração controlada de Cholesky aplicada ao condicionamento híbrido de Sistemas Lineares decorrentes do Método de pontos interiores .....	119
<i>Leonardo Cavalcanti Prado, Lino Marcos Silva</i>	
Otimização usando rede social: uma nova metaheurística para problemas gerais de otimização ....	125
<i>Victor Hugo Resende Lima e Hassan Sherafat</i>	
Coleta de Resíduos Sólidos: um estudo de caso via Técnicas de Otimização .....	131
<i>Juliana Verga Shirabayashi, Eric Batista Almeida Santos, Antonio Henrique Meira e Jair da Silva</i>	
Problemas de corte: um Estudo via técnicas de Otimização .....	131
<i>Juliana Verga Shirabayashi, Nádyá Zanin Muzulon, Jair da Silva</i>	

---

## VII Problemas Inversos

---

Aplicação do método das soluções fundamentais na reconstrução de fontes com suporte distribuído 133  
*José Paes da Costa Neto, Jairo Rocha de Faria e Thiago José Machado*

Reconstrução de Fontes concentradas: Uma abordagem utilizando a equação de Helmholtz  
Modificada ..... 135  
*Romulo da Silva Lima, Jairo Rocha de Faria, Thiago José Machado e Raul Renner Martins de Sá*

---

## VIII Processamento de Sinais

---

Amostragem de dados em Redes de Sensores baseada em Teoria da Informação ..... 137  
*Givanildo Lima do Nascimento Júnior, Christopher G. de Sousa Freitas e André Luiz Lins Aquino*

---

## IX Métodos Estocásticos e Estatísticos

---

Mapa perceptual para hierarquização das universidades públicas da região nordeste de acordo com o conceito quadrienal da Capes (2013-2016) aos programas acadêmicos de mestrado e doutorado ..... 145  
*Jorge Luiz de Jesus Goulart, Regina Regina Serrão Lanzillotti, Marcello Montillo Provenza e Paulo Henrique Couto Simões*

Avaliação da Viabilidade para Instalação de Aerogeradores na cidade de Maceió-AL ..... 153  
*Vanessa Kaline Kaline Wanderley, Joelma Mayara da Silva, Denise Stephanie de Almeida Ferreira, Tatijana Stosic, Ikaro Daniel de Carvalho Barreto, Catiane da Silva Barros Ferreira*

Mecanismos de Redundância para a Infraestrutura de Refrigeração baseado em Modelos Estocásticos ..... 161  
*Alan Pereira da Silva e Almir Pereira Guimarães*

Estimação da Intensidade de Tráfego de Filas Markovianas Multi-Servidoras via SIR ..... 168  
*Sandy P. Alves, Frederico R. B. Cruz e Roberto C. Quinino*

---

## X Matemática Aplicada à Física

---

Matemática Intervalar com Método de Mínimos Quadrados no tratamento de incerteza de dados Experimentais com uso de Software Educacional ..... 175  
*Tobias Silva Aguiar e Fabiana Tristão de Santana*

Métodos de Mínimos Quadrados por diferentes abordagens aplicado no ajuste de dados Experimentais e uso de Softwares ..... 182  
*Eulália Costa Ribeiro, Fabiana Tristão de Santana e André Bessa Moreira*

Estabilidade no sentido de Lyapunov ..... 189  
*Luciana Menezes Vasconcelos*

Aplicações de Modelagem Matemática com um breve estudo sobre a Transformada de Fourier .... 191  
*Jhonatan Brunno Ferreira da Silva Lino e Taynan Lima de Moraes Rego*

---

## XI Métodos Numéricos e Aplicações

---

- Método de Runge Kutta na Simulação da Encefalopatia Espongiforme Bovina ..... 203  
*Elthon Alex da Silva Oliveira, João Vitor Nascimento e Samuel Silva Albuquerque*
- Método Numérico Aplicado na Equação Diferencial da Curva de Deflexão da Viga ..... 206  
*Silene Costa Batista e Adson Mota Rocha*
- Método de Euler na Simulação da Encefalopatia Espongiforme bovina ..... 209  
*Elthon Alex da Silva Oliveira, João Vitor Nascimento e Samuel Silva Albuquerque*

---

## XII Controle e Teoria de Sistemas

---

- Robust Kalman Filter in a Data Fusion Scenario ..... 211  
*Gildson Queiroz de Jesus e Bruno Martins Calazans Silva*
- Robust Filtering for Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems in a Data Fusion Scenario ... 218  
*Gildson Queiroz de Jesus e Bruno Martins Calazans Silva*

---

## XIII Matemática Aplicada à Economia e a Finanças

---

- Calibration of Local Volatility Surfaces with Uncertain Asset Price: an EnKF-EnKF Approach ... 225  
*Xu Yang*

---

## XIV Computação Científica

---

- O uso do Método dos Multipolos rápidos aplicado ao Método das soluções fundamentais ..... 233  
*Éwerton Veríssimo da Silva*
- Um breve estudo sobre Análise não-paramétrica de Séries Temporais utilizando descritores causais oriundos da Teoria da Informação ..... 235  
*Eduarda T. C. Chagas, Milena B. Nunes e Alejandro C. Frery*

---

## XV Computação Gráfica

---

- Segmentação de imagens pulmonares em Tomografia Computadorizada a partir do modelo de Chan-Vese com influência de ruído ..... 241  
*Italo Messias Felix Santos, Luiz Cláudio de Mesquita Aquino e Gastão Florêncio Miranda Junior*

---

## XVI Modelagem Computacional em Saúde

---

- Modelagem Bidimensional da Dinâmica e Espalhamento de Mosquitos Selvagens e Transgênicos... 249  
*Marlos Antônio Pinheiro Rolim, Ana Paula Pintado Wyse, Antônio José Boness dos Santos e Cristiane Oliveira de Faria*



## Parte I

# Modelagem Matemática e Aplicações

## Um modelo discreto 3D para verificação dos fatos observáveis conhecidos da encefalopatia espongiforme bovina

*Antônio Igor Cavalcante Lima*

*Universidade Federal de Alagoas - Campus Arapiraca  
igorcavlim@gmail.com*

*Elthon Oliveira*

*Universidade Federal de Alagoas - Campus Arapiraca  
elthon@arapiraca.ufal.br*

*Samuel Albuquerque*

*Universidade Federal de Alagoas - Campus Arapiraca  
ss.albuquerque@gmail.com*

**Resumo:** A Encefalopatia Espongiforme Bovina (EEB) é uma doença degenerativa fatal e transmissível, do sistema nervoso central de bovinos, caracterizada por um longo período de incubação seguido de um rápido desenvolvimento. Neste trabalho, é apresentado um modelo computacional 3D que simula a dinâmica da doença. Tal modelo faz uso dos conceitos de autômatos celulares e simulação de Monte Carlo.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática e Aplicações. Autômato Celular. Monte Carlo. Modelo 3D.

### Introdução

A EEB é uma doença neurodegenerativa e fatal. Causa dificuldade de locomoção e sensibilidade alta à estímulos externos. Além disso, possui um longo período de incubação que antecede uma fase de desenvolvimento acelerado. Há uma proteína (príon) no corpo do sujeito que, a depender de sua configuração geométrica, é chamada de  $PrP^c$  ou  $PrP^{Sc}$ . A primeira é instável e destruída facilmente pelo corpo. A segunda é mais estável e resistente a enzimas, raios gama, raios ultravioletas e alta temperatura, sendo a responsável pelo desenvolvimento da EEB. A proteína  $PrP^{Sc}$  converte proteínas  $PrP^c$  em  $PrP^{Sc}$ .

Destacam-se os seguintes fatos conhecidos observados da EEB: longo tempo de incubação, morte rápida após o surgimento do sintomas, dependência dos tempos de incubação e de morte na concentração da dose inicial de contaminação, e existência de contaminação mínima para a detecção da doença.

Este trabalho é derivado de Galdino et al. (2001), que fez uso de equações diferenciais para a modelagem. Lima et al. (2017) faz uso de autômatos celulares e apresenta seis modelos que serviram de base para o modelo unidimensional que reproduziu os fatos observados. Já em Lima, Oliveira e Albuquerque (2018) é apresentado o modelo bidimensional como evolução do primeiro. Neste trabalho, apresenta-se outra evolução, um modelo que herda características do modelo antecessor, mas numa estrutura tridimensional.

### Model 2D versus modelo 3D

Devido às restrições de espaço, detalhes sobre as características dos modelos 1D e 2D podem ser vistos nos trabalhos de Lima et al. (2017) e de Lima, Oliveira e Albuquerque (2018). De forma simplificada, o corpo do animal é abstraído matematicamente numa estrutura discreta tridimensional, onde cada célula representa um príon com valor *true* (infectada) ou *false* (sadia).

O processo de simulação ocorre, em linhas gerais, da seguinte forma: primeiro, é construída a estrutura em que apenas uma célula encontra-se infectada (*true*). Em seguida, células aleatórias são sorteadas

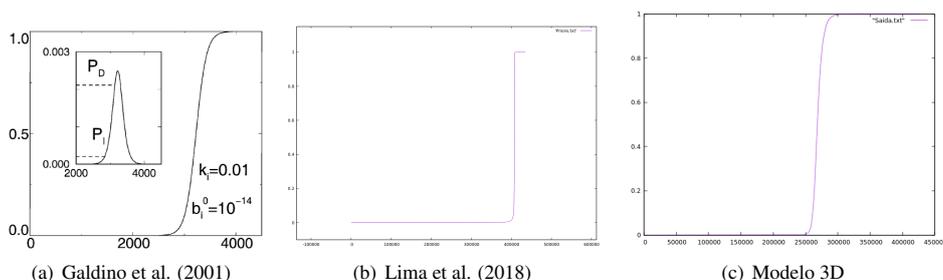


Figura 1: Gráficos obtidos pelos diferentes trabalhos.

até que esta infectada seja escolhida e, assim, dada uma probabilidade ela começa a tentar infectar suas vizinhas. Continuam sendo sorteadas células aleatórias e, caso a sorteada esteja infectada, ela pode tentar infectar as vizinhas. O processo se repete até que todas as células estejam infectadas, quando ocorre a morte do indivíduo.

Um conceito chave é o de vizinhança, definida como um raio de atuação de uma célula infectada. Ou seja, uma sadia pode ser infectada caso esteja presente na área de influência (vizinhança) de uma contaminada.

O modelo 3D segue como uma “evolução” ao modelo 2D, mas com uma diferença quanto à vizinhança das células. Além de considerar como vizinhas células em duas direções (direita-esquerda e acima-abaixo), o modelo apresentado neste trabalho considera como vizinhas também as células a frente e atrás. Os gráficos ilustrados na Figura 1 demonstram o desenvolvimento da doença (taxa de contaminação) em função do tempo obtido pelo modelo original e os modelos 2D e 3D. Há um longo período de incubação e, após o início da propagação de príons infectados, um rápido desenvolvimento.

## Conclusões

A partir do modelo 3D aqui apresentado, juntamente com os modelos (unidimensional e bidimensional) descritos nos trabalhos anteriores, pode-se concluir que todos descrevem os fatos observáveis da EEB. O *core* comum aos modelos garante a dinâmica da doença, independentemente da quantidade de dimensões adotada. Desta forma, conclui-se que o aumento no número de dimensões não é uma vantagem na simulação da EEB. Pelo contrário, há um aumento considerável na complexidade do modelo sem um ganho significativo na expressividade.

## Referências

GALDINO, M. et al. Thermo-kinetic model for prion diseases. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 295, n. 1, p. 58-63, 2001.

LIMA, A. I. C. et al. Encefalopatia espongiforme bovina: Seis modelos de simulação que não condizem com a dinâmica da doença. In: Workshop de Trabalhos de Iniciação Científica e Graduação da ERBASE, 2017, Cruz das Almas. **Anais...**, p. 67-76, 2017.

LIMA, A. I. C., OLIVEIRA, E., and ALBUQUERQUE, S. Discretização e Simulação Computacional de uma Doença Neurodegenerativa. In: 70ª Reunião Anual da SBPC, 2018, Maceió. **Anais...**, 2018.





Parte II

**Biomatemática**

## Comportamento Dinâmico de um Sistema Tumor-Imune com Quimioterapia e Controle Ótimo Quadrático

ALVES, J.C.S

Universidade Federal de Sergipe  
jessica.correia.santos@gmail.com

RABELO, P.S

Universidade Federal de Sergipe  
rabelo@ufs.br

MIRANDA, GASTÃO FLORÊNCIO

Universidade Federal de Sergipe  
gastao@ufs.br

**Resumo:** O câncer é uma classe de doenças caracterizada pelo crescimento celular desordenado. Nosso corpo é composto de muitos tipos de células e normalmente, essas células crescem e se dividem de maneira controlada. No entanto, às vezes, nesse processo o material genético (DNA) de uma célula pode sofrer mutações de forma que a morte programada da célula é adiada e ela passa a se dividir descontroladamente formando caroços ou massas de tecido chamadas tumores. Existem mais de 100 tipos diferentes de câncer e cada um é classificado pelo tipo de célula que é inicialmente afetada. Em nosso trabalho, analisamos um modelo de crescimento tumoral que contempla o efeito de interação entre drogas quimioterápicas e imunoterápicas. O modelo proposto analisa os efeitos desses agentes sobre a biomassa de células tumorais, imunes e normais é expresso pelo sistema de equações diferenciais ordinárias abaixo:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= r_1T(1-p_1T) - \alpha_1TI - \alpha_2TN - q_1(1-e^{-D_1})T, \\ \frac{dI}{dt} &= s + \frac{\rho T^2 I}{h+T^2} + \frac{\beta D_2 I}{g+D_2} - \alpha_3TI - \mu I - q_2(1-e^{-D_1})I, \\ \frac{dN}{dt} &= r_2N(1-p_2N) - \alpha_4TN - q_3(1-e^{-D_1})N, \\ \frac{dD_1}{dt} &= u(t) - \gamma_1 D_1, \\ \frac{dD_2}{dt} &= v(t) + \frac{mT}{T+l} - \gamma_2 D_2.\end{aligned}\tag{1}$$

Com condições iniciais,

$$T(0) \geq 0, N(0) > 0, I(0) > 0, D_1(0) \geq 0, D_2(0) \geq 0.\tag{2}$$

Aqui:

$T(t)$  : é a biomassa de células tumorais;

$I(t)$  : é a biomassa de células imunes;

$N(t)$  : é a biomassa de células normais;

$D_1(t)$  : é a quantidade(ou concentração) de drogas quimioterápicas na corrente sanguínea;

$D_2(t)$  : é a quantidade (ou concentração) de drogas imunoterápicas na corrente sanguínea.

$u(t), v(t)$ : dose da droga quimioterápica e imunoterápica (respectivamente) administrada;

Inicialmente, analisamos a existência e estabilidade do modelo nos pontos de equilíbrio livre de tumor e de co-existência, no sentido de obter condições sobre os parâmetros para que tenhamos estabilidade. A seguir usamos controle linear quadrático para minimizar o número de células tumorais e a administração de quimioterápicos e

imunoterápicos, sendo o controle colocado nas doses desses agentes. Para isso, usamos o Princípio do Máximo de Pontryagin para obtermos um sistema que fornece o controle ótimo. De posse desse sistema, usamos o método de Runge-Kutta de 4ª ordem nas simulações numéricas para obtermos resultados sobre o comportamento dinâmico das populações de células envolvidas.

Em nosso modelo, consideramos o efeito de decaimento da ação da droga quimioterápica ao longo do tempo nos três tipos de células, bem como a influência do tamanho do tumor na variação do agente imunoterápico. Além disso, diferentemente dos trabalhos referidos, consideramos a dinâmica da população de células normais, uma vez que é importante que essas células não ultrapassem um patamar mínimo.

**Palavras-chave:** Biomatemática. Câncer. Sistema Tumor-Imune. Controle Ótimo Quadrático.

## Referências

LIBERZON, D. **Calculus of Variations and Optimal Control Theory**. 1.ed. Princeton: Princeton University Press, 2012.

SHARMA, S.; SAMANTA, G. Analysis of the Dynamics of a Tumor-Immune System with Chemotherapy and Immunotherapy and Quadratic Optimal Control. **Differential Equations and Dynamical Systems**, v. 24, n.2, p. 149-171, 2016.

LEDZEWICZ, U.; SCHÄTTLER, H. An Optimal Control Approach to Cancer Chemotherapy with Tumor - Immune System Interactions. **Mathematical Models of Tumor - Immune System Dynamics**, v. 107, p. 157-196, 2014.

PILLIS, L.G.; RADUNSKAYA, A. A Mathematical Tumor Model with Immune Resistance and Drug Therapy: an Optimal Control Approach. **Journal of Theoretical Medicine**, v. 3, p. 79-100, 2000.

CHILDRESS, R.P. **Comparative Analysis of Various Continuous Time Deterministic Models of Tumor-Immune Interactions**. 2015. 90 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – University of Texas at Arlington, Texas, 2015.

## Um modelo matemático para a dinâmica de transmissão da hanseníase

*Claudia Mazza Dias*

*Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro; PPG Modelagem Matemática e Computacional  
mazzaclaudia@gmail.com*

*Erito Marques de Souza Filho*

*Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro; Departamento de Tecnologias e Linguagens  
eritomarkes@yahoo.com.br*

**Resumo:** O trabalho trata da modelagem matemática da hanseníase, uma doença infectocontagiosa considerada negligenciada. É analisado um modelo compartimental na investigação da dispersão da hanseníase em uma população visando prever a transmissão à novos pacientes e permitindo analisar diferentes grupos de indivíduos frente a exposição à infecção.

**Palavras-chave:** Biomatemática. Modelagem Computacional em Saúde. Modelagem Matemática e Aplicações.

### Introdução

Segundo AZULAY et al. (2015) a hanseníase é uma “doença infectocontagiosa causada pelo *Mycobacterium leprae* acometendo principalmente pele e ou nervos periféricos. A doença pode afetar praticamente todos os órgãos e sistemas em que existam macrófagos, exceto o sistema nervoso central. Evolui de maneira crônica, podendo apresentar períodos de agudização denominados reações. É potencialmente incapacitante e, embora curável, seu diagnóstico causa grande impacto psicossocial, pelos preconceitos e estigmas que a envolvem desde a antiguidade”. Embora possua elevado índice de sucesso no tratamento na grande maioria dos casos, os países com grande incidência de casos são geralmente os menos desenvolvidos ou com condições precárias de higiene e superpopulação. Só em 2011 o Ministério da Saúde registrou no Brasil mais de 33 mil casos da doença (PORTAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE DERMATOLOGIA, 2015). A utilização de modelos matemáticos é reconhecidamente útil na prevenção, entendimento da dinâmica e incidência de doenças, assim como no planejamento de ações de controle (MURRAY, 2012). Este trabalho analisa um modelo compartimental na investigação da dispersão da hanseníase em uma população visando prever a transmissão à novos pacientes e permitindo analisar diferentes grupos de indivíduos frente a exposição à infecção. Para tal, utiliza um modelo conceitual (LECHAT et al., 1985; MEIMA et al., 1999; BLOK et al., 2015) para descrever a dinâmica da doença. Assim, um modelo matemático é construído com base no modelo conceitual. O sistema de equações diferenciais ordinárias resultante é resolvido numericamente.

### Modelagem

Tomando-se como ponto de partida o modelo conceitual esquemático proposto por MEIMA et al. (1999), que considera a heterogeneidade na susceptibilidade e o período de incubação, se constituindo em um avanço na época, este modelo, bastante complexo, foi apresentado somente em forma esquemática (Figura 1). BLOK et al. (2015) apresentou um levantamento sobre os modelos até então desenvolvidos. Um aspecto que fica evidente é que os trabalhos não apontam as estratégias de solução. Nas palavras dos mesmos autores “Embora modelos matemáticos diferentes tenham sido desenvolvidos para a hanseníase, modelos matemáticos em hanseníase não foram aplicados extensivamente. Isso se deve em parte ao

tamanho limitado do problema da hanseníase em termos numéricos em comparação com muitas outras doenças infecciosas como HIV e AIDS, tuberculose e malária. Mesmo dentro do grupo de doenças tropicais negligenciadas, a contribuição da lepra é modesta. Poucos cientistas têm tido um interesse duradouro na hanseníase e o financiamento para pesquisa é limitado.” Apesar da aparente falta de atenção com a hanseníase, os casos se multiplicam em nosso país. Em estudo recente, pesquisadores da reserva sustentável de Mamirauá, na Amazônia, apontam que: “... haja visto que a região ser endêmica com alto risco de transmissão de malária, tuberculose e hanseníase (foram mencionados seis casos). A incidência de hanseníase é alta em Uarini (15,5/100.000 habitantes em 2015) e hiperendêmica em Fonte Boa (47/100.000 habitantes em 2015)” (MEDEIROS et al., 2018).

O presente trabalho, vem a contribuir com as pesquisas sobre o tema propondo que, com base no modelo esquemático já mencionado, seja desenvolvido o correspondente sistema de equações, apresentado a seguir, que pode ser resolvido, por exemplo, através de métodos numéricos, como o método das diferenças finitas (CUMINATO, MENEGUETTE JUNIOR, 2013).

$$\frac{dA}{dt} = f_{ca} - f_z A \quad (1)$$

$$\frac{dB}{dt} = f_{cb} - f_{bd}BD + f_{db}D + f_{eb}E + f_{ib}I - f_z B \quad (2)$$

$$\frac{dC}{dt} = f_{ac}C - f_{cd}CD - f_z C \quad (3)$$

$$\frac{dD}{dt} = -f_{db}D + f_{cd}CD + f_{bd}BD - f_{de}D - f_{dh}D - f_{df}D - f_{dg}D - f_z D \quad (4)$$

$$\frac{dE}{dt} = f_{de}D - f_{eb}E - f_{eh}E - f_{ei}E + f_{je}J - f_z E \quad (5)$$

$$\frac{dF}{dt} = f_{df}D + f_{jf}J - f_{fi}F - f_{fg}F - f_z F \quad (6)$$

$$\frac{dG}{dt} = f_{fg}F + f_{dg}D + f_{jg}J - f_{gi}G - f_z G \quad (7)$$

$$\frac{dH}{dt} = f_{eh}E + f_{dh}D - f_z H \quad (8)$$

$$\frac{dI}{dt} = f_{ei}E + f_{fi}F + f_{gi}G - f_{ib}I - f_{ij}I - f_z I \quad (9)$$

$$\frac{dJ}{dt} = -f_{je}J - f_{jf}J - f_{jg}J + f_{ij}I - f_z J \quad (10)$$

Nas equações acima,  $t$  representa o tempo de análise, as letras maiúsculas correspondem aos compartimentos ou populações. Desta forma:

$A$  representa a população com imunidade natural;

$B$ , a população suscetível não vacinada;

$C$ , os indivíduos vacinados (BCG) com suscetibilidade reduzida;

$D$ , a população com infecção assintomática;

$E$ , a população com hanseníase sintomática auto-curada;

$F$ , a população com hanseníase sintomática rebaixada,

$G$ , a população com hanseníase sintomática fortemente contagiosa;

$H$ , população auto-curada imune às novas infecções;

$I$ , população diagnosticada e com tratamento polioquimioterápico; e finalmente,

$J$  corresponde a população curada através do tratamento e conseqüentemente imune às novas infecções.

Os índices em minúsculas correspondem às taxas de transferência entre compartimentos. Assim:  $f_{ca}$  representa a taxa de imunidade natural;

$f_{cb}$ , a proporção da população que não é vacinada pela BCG;  
 $f_{ac}$ , a taxa de vacinação pela BCG;  
 $f_{eb}$ , taxa correspondente a parcela que não adquire imunidade à doença sintomática e se torna suscetível;  
 $f_{db}$ , taxa de infecção assintomática;  
 $f_{bd}$ , infecção assintomática de suscetíveis;  
 $f_{cd}$ , infecção assintomática de vacinados;  
 $f_{ib}$ , cura sem imunidade, diagnosticada e tratada por polioquimioterapia;  
 $f_{dh}$ , infecção assintomática auto-curada e imunidade às novas infecções;  
 $f_{de}$ , infecção sintomática auto-curada e imunidade às novas infecções;  
 $f_{df}$ , infecção assintomática rebaixada e imunidade às novas infecções;  
 $f_{dg}$ , infecção assintomática rebaixada fortemente contagiosa;  
 $f_{fg}$ , infecção sintomática, rebaixada e fortemente contagiosa;  
 $f_{eh}$ , infecção sintomática auto-curada e imunidade adquirida;  
 $f_{ei}$ , infecção sintomática auto-curada, diagnosticada e tratada com polioquimioterapia;  
 $f_{fi}$ , infecção sintomática rebaixada diagnosticada e tratada com polioquimioterapia;  
 $f_{gi}$ , infecção sintomática rebaixada fortemente contagiosa;  
 $f_{je}$ , doença sintomática com cura via tratamento e auto-curada;  
 $f_{jf}$ , doença sintomática com cura via tratamento rebaixada;  
 $f_{jg}$ , doença sintomática com cura via tratamento fortemente contagiosa;  
 $f_{ij}$ , doença diagnosticada, tratada e curada.  
 Além disso,  $f_z$  é a taxa de mortalidade.

Embora o sistema dinâmico acima corresponda fielmente ao esquema da Figura, entendemos que a separação da população em diferentes grupos no nascimento não representa fielmente a realidade, onde a vacina é administrada em duas doses, geralmente após o nascimento até 1 ano. Assim, o modelo proposto elimina o compartimento A, coorespondente aos indivíduos com imunidade natural, entendendo que toda a população nasce imune e parte dela é vacinada e parte não. Assim, segue o sistema dinâmico:

$$\frac{dB}{dt} = f_{cb} - f_{bc}B - f_{bd}BD + f_{db}D + f_{eb}E + f_{ib}I - f_zB \quad (11)$$

$$\frac{dC}{dt} = f_{bc}B - f_{cd}CD - f_zC \quad (12)$$

$$\frac{dD}{dt} = -f_{db}D + f_{cd}CD + f_{bd}BD - f_{de}D - f_{dh}D - f_{df}D - f_{dg}D - f_zD \quad (13)$$

$$\frac{dE}{dt} = f_{de}D - f_{eb}E - f_{eh}E - f_{ei}E + f_{je}J - f_zE \quad (14)$$

$$\frac{dF}{dt} = f_{df}D + f_{jf}J - f_{fi}F - f_{fg}F - f_zF \quad (15)$$

$$\frac{dG}{dt} = f_{fg}F + f_{dg}D + f_{jg}J - f_{gi}G - f_zG \quad (16)$$

$$\frac{dH}{dt} = f_{eh}E + f_{dh}D - f_zH \quad (17)$$

$$\frac{dI}{dt} = f_{ei}E + f_{fi}F + f_{gi}G - f_{ib}I - f_{ij}I - f_zI \quad (18)$$

$$\frac{dJ}{dt} = -f_{je}J - f_{jf}J - f_{jg}J + f_{ij}I - f_zJ \quad (19)$$

## Conclusões

O trabalho apresenta um modelo matemático para a dinâmica da hanseníase e busca investigações a respeito da aplicabilidade do modelo conceitual de MEIMA et al. (1999). Não se encontrou na literatura informações claras sobre o tratamento numérico do modelo que, embora desenvolvido em 1999, nos parece ser um dos últimos modelos desenvolvidos para a doença. Da observação dos resultados numéricos verifica-se que o modelo pode ser uma ferramenta importante para o controle da transmissão da hanseníase, doença considerada negligenciada, ou seja, endêmica em populações de baixa renda e com investimentos reduzidos em pesquisas, produção de medicamentos e em seu controle. O modelo é capaz de investigar certas incertezas na epidemiologia da doença e considera imunidade natural, período de incubação, infecção assintótica, entre outros fatores. Seu desenvolvimento matemático e o tratamento numérico são passos importantes no desenvolvimento de novos modelos que considerem principalmente a heterogeneidade na susceptibilidade e os novos avanços sobre os mecanismos da imunidade natural e da susceptibilidade das formas paucibacilar e multibacilar.

Visamos através do desenvolvimento dos modelos matemáticos, propostos pela pesquisa, ter como resultado um modelo que descreva bem a dinâmica da doença, buscando um impacto importante no entendimento de sua transmissão e no planejamento de uma estratégia de controle. Os modelos matemáticos permitem uma discussão dos fatores mais importantes nesse processo e o desenho de estratégias de utilização dos medicamentos que minimizem o aparecimento da resistência à medicação, por exemplo.

## Referências

- AZULAY, R. D. **Dermatologia**. 6a Ed., Guanabara Koogan, 2015.
- BLOK, D. J.; FISCHER, E. A. J.; RICHARDUS, J. H. Mathematical Modelling of Leprosy and Its Control. **Advances in Parasitology**, p 33-51, 2015. DOI:10.1016/bs.apar.2014.12.002.
- CUMINATO, J. A.; MENEGUETTE JUNIOR, M. **Discretização de Equações Diferenciais Parciais**. 1a Ed., SBM, 2013.
- LECHAT, M. F. ; C. B. MISSON, C. B. ; LAMBERT, A. Simulation of vaccination and resistance in leprosy using an epidemiometric model. **International Journal of Leprosy and Other Mycobacterial Disease**, v. 53, p. 461-467, 1985.
- MEDEIROS, M. S. et al. A saúde no contexto de uma reserva de desenvolvimento sustentável: o caso de Mamirauá, na Amazônia Brasileira. **Saúde e Sociedade**, v. 27, n. 1, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S0104-12902018170514>. Acesso em: 06 jun. 2018.
- MEIMA, A.; GUPTE, M. D.; VAN OORTMARSEN, G. J.; HABBEMA, J. D. F. SIMLEP: a simulation model for leprosy transmission and control. **International Journal of Leprosy and Other Mycobacterial Disease**, v. 67, p. 215-236, 1999.
- MURRAY, J. D. **Mathematical Biology**, 1st. Ed., Springer-Verlang, Berlin, 2002.
- PORTAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE DERMATOLOGIA. Disponível em: <http://www.sbd.org.br/doencas/hansenia>. Acesso em: 06 jun. 2015.

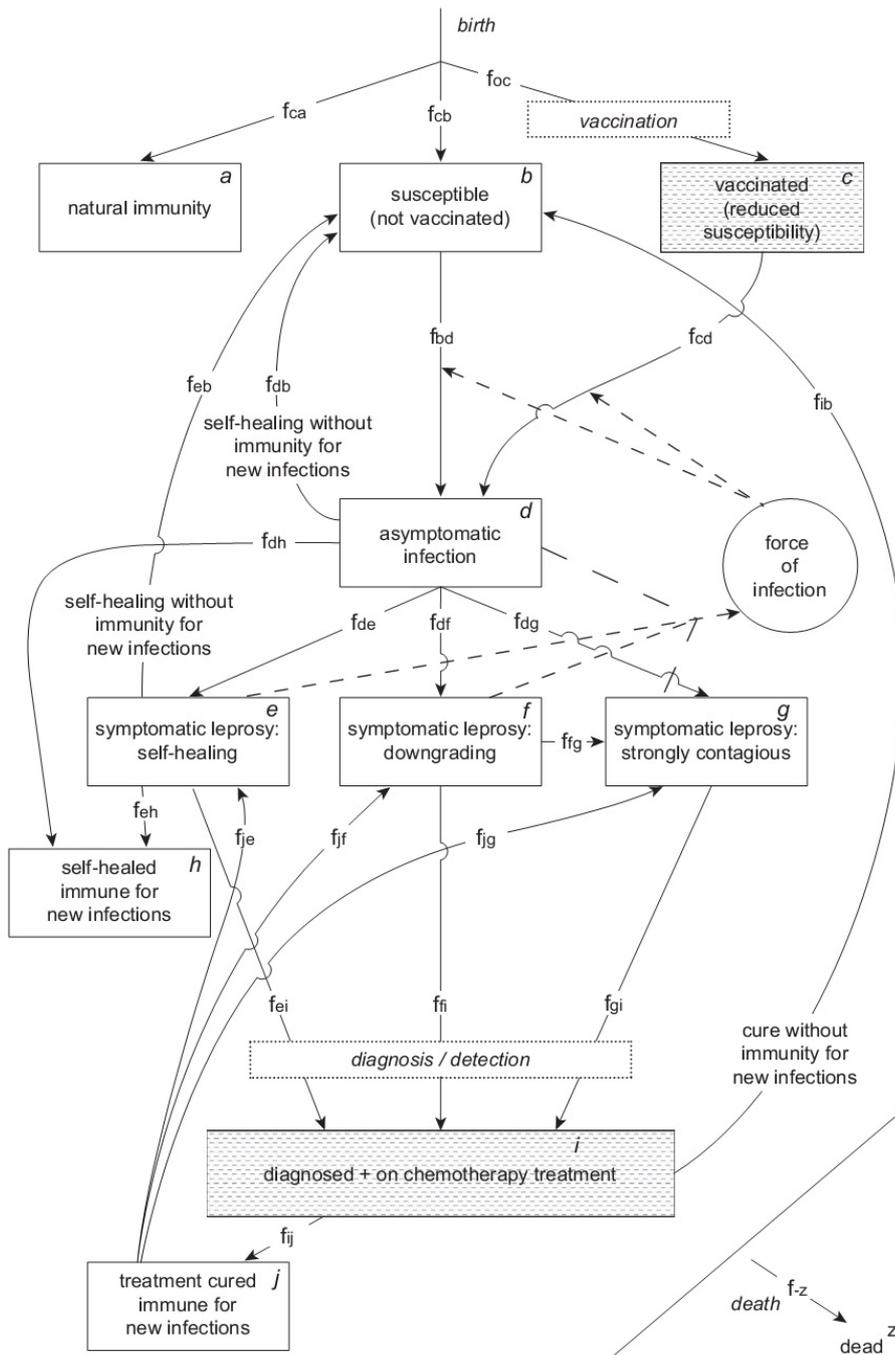


Figura 1: Esquema da Dinâmica da Hanseníase por MEIMA et al. (1999) Apud: BLOK et al. (2015).



## Modelagem, Aplicação e Determinação de Parâmetros Epidemiológicos Para o Surto de Cólera no Iêmem em 2017

*Marina Lima*

*Departamento de Matemática Aplicada, IMECC - UNICAMP, Campinas, SP  
marina@ime.unicamp.br*

*Graziane Sales Teodoro*

*Departamento de Ciências Exatas, DEX - UFLA, Lavras, MG  
graziane.teodoro@dex.ufla.br*

*João Frederico C. A. Meyer*

*Departamento de Matemática Aplicada, IMECC - UNICAMP, Campinas, SP  
joni@ime.unicamp.br*

**Resumo:** O propósito deste trabalho foi a modelagem matemática para a transmissão da cólera no Iêmem, enquanto ocorria um surto em 2017. Entretanto, para a obtenção dos parâmetros do modelo, utilizamos os dados coletados e modelos de regressão, de maneira a obtermos um conjunto de equações diferenciais capazes de descrever a dinâmica da doença, incluindo, além dos infectados, outras classes de indivíduos, e o comportamento das bactérias causadoras da doença.

**Palavras-chave:** Biomatemática. Cólera. Epidemiologia. Iêmem.

### Introdução

A cólera é uma doença infecciosa aguda, causada pelo *Vibrio cholerae*, que coloniza o intestino humano, multiplica-se rapidamente e causa diarreia, vômitos, dor abdominal e, se não tratada prontamente, leva à morte. A transmissão da doença ocorre de forma direta (via fecal-oral), ou indireta (água e/ou comida contaminada).

Desde 2015, o Iêmem vive um conflito armado entre grupos rivais, que tem levado o país a enfrentar uma grave crise humanitária, pois além dos milhares de mortos em combates, um surto de cólera tem assolado o país, pois a infraestrutura de água, lixo e esgoto foi praticamente destruída e existe um bloqueio que prejudica a distribuição de alimentos.

### Modelagem

Propusemos um modelo tipo Kermack-McKendrick (*SIRS*) de curto prazo, uma vez que os dados eram fornecidos semanalmente, e o surto durou menos que 300 dias. Consideramos que a população (*B*) de bactérias possui crescimento Malthusiano e dividimos a população de humanos em indivíduos suscetíveis (*S*), infectados (*I*) e resistentes (*R*), de maneira que  $N = S + I + R$  é a população total. Os indivíduos analisados possuem a relação apresentada na Figura 1.

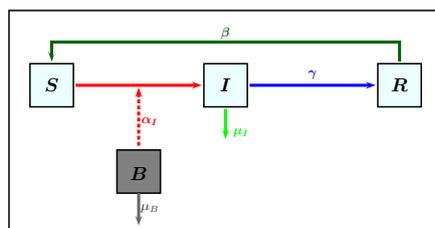


Figura 1: Relação entre os indivíduos e as bactérias *V. cholerae*.

Dessa forma, o modelo consiste do seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha_I BS + \beta R \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha_I BS - \gamma I - \mu_I I \quad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \beta R \quad (3)$$

$$\frac{dB}{dt} = \lambda B - \mu_B B + \eta I, \quad (4)$$

em que  $\alpha_I$ : taxa de suscetíveis que tornam-se infectados;  $\beta$ : taxa de resistentes que tornam-se suscetíveis;  $\gamma$ : taxa de infectados que tornam-se resistentes;  $\mu_I$ : taxa de infectados que morrem em decorrência da doença;  $\lambda$ : taxa de crescimento populacional das bactérias;  $\mu_B$ : taxa de mortes das bactérias devido às ações sociais e sanitárias;  $\eta$ : contribuição de cada infectado para a população de bactérias no ambiente aquático.

## Estudo de Caso

Para a população dos indivíduos infectados, utilizamos os dados fornecidos pelo ProMED-EDR, sobre o surto de Cólera no Iêmen, em 2017 e, para os parâmetros da equação das bactérias ( $\lambda$ ,  $\mu_B$  e  $\eta$ ), os dados apresentados por Hove-Musekwa (2011). Assim, utilizamos modelos de regressão polinomial para os dados dos indivíduos infectados e para os resistentes, de tal maneira que obtivemos os valores para os parâmetros  $\alpha_I$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\mu_I$ , o que nos permitiu fazer um ajuste dos infectados de acordo com a solução do conjunto de equações diferenciais.

## Conclusões

Concluímos que modelar fenômenos naturais é uma situação em que, muitas vezes, não é possível encontrar um modelo que descreva, exatamente, os dados obtidos. Apesar do número de infectados ser crescente, tanto nos dados fornecidos, quanto nos resultados previstos pelos modelos, ao analisarmos o número de reprodutividade basal,  $R_0$ , temos que o mesmo é menor que 1, o que indica que epidemia não irá se transformar numa endemia e tende a diminuir. Embora a epidemia de cólera tenha atingido menos que 4% da população, ainda são necessárias políticas públicas para melhorias das condições sanitárias da população, tanto para evitar o surgimento de novos casos, como para impedir que doenças infecciosas por fatores sanitários causem um número alarmante de mortes.

## Referências

HOVE-MUSEKWA, S.D. et al. Modelling and analysis of the effects of malnutrition in the spread of cholera. *Mathematical and Computer Modelling*, n.53, p.1583-1595, 2011.

ProMED-EDR. Cholera, diarrhea and Dysentery update (21): Asia (Yemen) - ProMED-mail. 2018. Disponível em: [promed@promedmail.org](mailto:promed@promedmail.org). Acesso em 30 de junho de 2018.

**Parte III**

**Ensino**

## O jogo matemático como um instrumento de fomento à prática dos sete saberes necessários à educação do futuro propostos por Edgar Morin

Claudiene dos Santos<sup>1</sup>

Universidade Federal de Sergipe

[claudienemat@hotmail.com](mailto:claudienemat@hotmail.com)

**Resumo:** O presente artigo apresenta uma proposta de trabalho do jogo como um incentivador para o desenvolvimento dos sete saberes necessários à educação do futuro, propostos por Edgar Morin (2001). Para tal, dá-se a definição de jogo de acordo com Huizinga, trata-se o jogo matemático a partir do referencial teórico de Grando (2000) e Aranão (2011), perpassando pelo interacionismo de Vigotsky e pela Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel. Dessa forma, apresenta-se o entendimento do uso do jogo para se trabalhar o erro, a compreensão, a ética, as incertezas, a condição humana, a identidade terrena e os princípios do conhecimento pertinente.

**Palavras-chave:** Jogos matemáticos. Educação do Futuro. Edgar Morin. Ensino.

### 1 Introdução

Diante da falibilidade iminente do método tradicional de ensino, entenda-se aqui método tradicional a partir das características do Formalismo Clássico, classificado como uma das tendências em educação matemática por Fiorentini (2012), e dos baixos índices das avaliações nacionais e internacionais do ensino de matemática no Brasil, percebe-se que há um anseio gritante pela busca de metodologias de ensino que auxiliem no desenvolvimento de estratégias com a finalidade de propiciar uma aprendizagem construtiva e significativa.

Assim, partindo-se da tese de Grando (2000) de que o jogo pode contribuir para a motivação dos discentes, para o desenvolvimento da criticidade e do raciocínio lógico, como também para a melhoria das relações e para a promoção da solidariedade, da ética e da compreensão; apresentam-se, através desse estudo, formas de colaboração dos jogos matemáticos com a intencionalidade de se trabalhar os sete saberes necessários à educação do futuro propostos por Morin. A partir desse entendimento, esse trabalho traz uma discussão sobre como os jogos podem fomentar a aplicabilidade desses saberes, ao passo que provocam no aluno o gosto pelos estudos e instigam o prazer pela aquisição de novos conhecimentos, através do desenvolvimento efetivo de um processo de ensino e aprendizagem.

---

<sup>1</sup> Mestranda em Ensino das Ciências e Matemática

Dessa forma, o jogo é aqui tratado como uma ferramenta que proporciona um incremento para a promoção, no indivíduo, da cidadania e de aspectos emancipatórios, os quais modificam a prática do sujeito de forma que este possa refletir/transparecer na sociedade o seu caráter cidadão.

## 2 O jogo matemático

Tratar de jogo matemático não é possível sem que primeiro haja uma definição do que é o jogo. Assim, para Huizinga (1990) jogo pode ser entendido como uma atividade não-séria, exercida dentro de limites espaciais e temporais, obedecendo a uma ordem e certas regras, na qual há perda e ganho. Partindo-se para a educação matemática, o jogo pressupõe o incentivo ao desenvolvimento cognitivo do raciocínio lógico-matemático. É importante aqui salientar que objetivando tal proposta, a aplicação do jogo não deve incentivar a tendência de ensino tecnicista<sup>2</sup>, sendo uma mera extensão da lista de exercícios do livro (como fazem os baralhos e dominós matemáticos); mas sim, é necessário que este jogo tenha um caráter construtivista, transparecendo, assim, o conceito de Piaget (1978) o qual reitera que os meios de aprendizagem são mais importantes que os fins.

Dessa forma, admitindo-se o caráter inovador e promotor de aprendizagem do jogo, para Grandó (2000):

[...] o jogo propicia um ambiente favorável ao interesse da criança, não apenas pelos objetos que o constituem, mas também pelo desafio das regras impostas por uma situação imaginária que, por sua vez, pode ser considerada como um meio para o desenvolvimento do pensamento abstrato. (GRANDÓ, 2000, p. 20)

Trazendo-se à tona o interacionismo de Vigotsky (1991), segundo este autor, a criança em idade pré-escolar tem os seus conceitos ampliados a partir de brinquedos, jogos e do uso da imaginação. Neste caso, é importante a aplicação desse instrumento lúdico desde a pré-escola até o fim da educação básica<sup>3</sup>, com o intuito de promover uma aprendizagem significativa na qual o conteúdo, a priori, pode ser posto metodologicamente através de uma situação didática, exposta, inicialmente, pelo jogo e baseada em um contexto no qual o conhecimento prévio do aluno seja valorizado e sirva

---

<sup>2</sup> Dadas as Tendências em Educação Matemática propostas por Fiorentini (2006): Formalista Clássica, Empírico-ativista, Formalista Moderna, Tecnicista, Construtivista e Socioetnoculturalista.

<sup>3</sup> A proposta da autora deste artigo não é discutir os jogos para além da Educação Básica.

como subsunçor para que aconteça o processo de ancoragem, segundo Ausubel (1980), efetivando-se, assim, a aprendizagem.

Vale ressaltar que o uso do jogo não pode ser feito sem planejamento. O docente deve preparar a sua aula construindo mentalmente e fisicamente os recursos que utilizará no momento em que estiver lecionando. Deve utilizar o jogo como uma metodologia para ministrar determinado conteúdo, ao passo que tem que prever as possíveis perguntas que fará aos alunos, bem como precisa conduzir a sua aula de maneira que o jogo o auxilie a construir, em conjunto com o discente, o conhecimento proposto naquele dia.

Dados os benefícios que o uso do jogo traz às aulas de matemática, é difícil de entender o fato desse instrumento ainda ser pouco utilizado, e quando o professor o faz, em sua maioria, não o explora da forma que deveria, para que haja uma aprendizagem significativa. Dessa maneira, Wadsworth (1984, apud Aranhã, 2011) acredita que:

Se Piaget estiver certo, o fracasso dos alunos em desenvolver compreensão da matemática não implica em qualquer falta de inteligência ou habilidade para aprender os conceitos, mas resulta do tipo de ensino ao qual as crianças são expostas nas escolas; ensino da matemática, mesmo nas primeiras séries, normalmente assume a forma de apresentações orais e escritas (simbólicas) dos conceitos e procedimentos para computação de respostas a problemas. Eles não se baseiam em métodos ativos que permitem que a criança construa conceitos matemáticos do único modo que pode adquiri-los. (WADSWORTH, 1984 apud ARANÃO, 2011, p.47)

Baseando-se no palpável e no material concreto (entenda-se aqui o uso do jogo), o cognitivo do discente será condicionado a desenvolver de forma plausível o raciocínio lógico-matemático de maneira que haja uma aprendizagem construtiva e significativa que seria exposta ao aluno de forma leve, lúdica e acolhedora através da presença do jogo e da condução adequada dessa ferramenta pelo professor, tornando, assim, a aula mais dinâmica e atrativa para o aluno.

### **3 O jogo matemático como incentivador da aplicação dos sete saberes necessários à educação do futuro**

Morin, ao escrever *Os sete saberes necessários à educação do futuro*, baseou-se em uma gama de reflexões que permeavam o ambiente educacional da época. O seu livro foi produzido a partir de um convite da UNESCO para que fossem introduzidas novas argumentações acerca de como seria a educação do século XXI. Após dez anos de debates, conversas e sugestões sobre a primeira versão dos seus escritos, Morin o

publicou depois de fazer as alterações propostas pelos líderes educacionais dos mais variados países que leram os seus escritos. Assim, expôs os seus pensamentos discorrendo sobre quais seriam os entendimentos que considerava necessários para os alunos do século XXI. Esses saberes serão comentados aqui e correlacionados com o fomento que o jogo matemático pode exercer para os seus desenvolvimentos.

### **3.1 As cegueiras do conhecimento: o erro e a ilusão**

O sujeito deve estar preparado para confrontar as diversas situações-problema que acontecem no seu cotidiano. Desta forma, o conhecimento deve ser um suporte para esse preparo. Nesse sentido, a educação deve contribuir para aprimorar aptidões mentais para evitar o erro e a ilusão. Para Morin (2001):

Devemos compreender que existem condições bioantropológicas (as aptidões do cérebro/ mente humana), condições socioculturais (a cultura aberta, que permite diálogos e troca de ideias) e condições noológicas (as teorias abertas) que permitem “verdadeiras” interrogações, isto é, interrogações fundamentais sobre o mundo, sobre o homem e sobre o próprio conhecimento. (MORIN, 2001, p. 31)

É nesse sentido que o jogo matemático pode contribuir para a evasão do erro e da ilusão. Através da aplicação do jogo como uma metodologia, o conhecimento pode ir sendo construído paulatinamente e o entendimento do conteúdo matemático em questão seria formado ao passo que o erro servisse de estratégia para o acerto e fosse sanado de imediato para que o discente fosse conduzido o mais rapidamente possível para a forma correta de raciocinar.

### **3.2 Os princípios do conhecimento pertinente**

Esse princípio coloca em evidência a importância da contextualização como promotora de uma aprendizagem efetiva. Dessa forma, para Morin (2001) o conhecimento, ao ser tratado, deve levar em conta o contexto, o global, o multidimensional e o complexo, estimulando o que o aprendiz sabe do mundo. Nesse sentido, a interpretação dos conteúdos não pode ser codificada e deve estar atrelada ao conhecimento prévio e à contextualização.

Obedecendo a essas características, o jogo matemático pode servir como um instrumento de fomento para a contextualização. Como exemplo, pode-se citar o Banco Imobiliário para lecionar Matemática Financeira. É um jogo que provoca o

conhecimento prévio do aluno e contextualiza o conteúdo de forma multidimensional e complexa, pois apresenta elementos econômicos, psicológicos e políticos.

### **3.3 Ensinar a condição humana**

Aqui se incentiva a interdisciplinaridade com a intencionalidade de (entendendo o aluno como um ser humano imbuído de aspectos físicos, emocionais, sociais e religiosos) desenvolver um processo de ensino e aprendizagem mais eficaz, no qual o conteúdo matemático, por exemplo, possa ser trabalhado a partir de um tema e ao lecioná-lo o docente seja capaz de cercar-se de recursos que trabalhem os aspectos supracitados com o intuito de promover no aluno uma melhor compreensão do conteúdo e a ampliação de uma visão que proporcione contextualizá-lo nas mais variadas situações. Nesse ínterim, o jogo matemático desenvolve as relações interpessoais, com a relação de perda e ganho, a relação intrapessoal e emotiva, ao lidar com o sentimento de frustração, provocado pela perda, desenvolve também o raciocínio lógico-matemático, em uma esfera individual e trabalha a pluralidade cultural no respeito às regras e à pessoa do outro.

### **3.4 Ensinar a identidade terrena**

Nesse saber, Morin referia-se à conexão das partes com o todo. Uma mudança em uma das partes refletia no todo; ou seja, acontecimentos locais refletiam em esfera global. É a partir desse contexto que o jogo matemático pode ser um norteador para que o aluno tenha uma visão panorâmica de suas atitudes e reflita sobre as consequências de suas ações. No jogo isso pode se mostrar através do processo reflexivo que se dá no momento da conjectura de uma jogada.

### **3.5 Enfrentar as incertezas**

A escola, inclusive os professores de matemática, tem o papel de preparar os alunos para as incertezas da vida. Dessa forma, o jogo matemático pode ser um instrumento para trabalhar nos discentes os desafios inesperados, pois auxilia na resolução de situações-problema (conjuntura incerta) que despertem nos alunos a capacidade de solucioná-las baseando-se em certezas prévias. Dessa forma, os alunos devem ser preparados para incertezas, frustrações e limitações. O jogo matemático mostra-se aqui como um contributo para esse saber, pois segundo Morin (2001):



Assim, a resposta às incertezas da ação é constituída pela escolha refletida de uma decisão, a consciência da aposta, a elaboração de uma estratégia que leve em conta as complexidades inerentes às próprias finalidades, que possa se modificar durante a ação em função dos imprevistos, informações, mudanças de contexto e que possa considerar o eventual torpedeamento da ação, que teria tomado uma direção nociva. (MORIN, 2001, p. 91)

Dessa maneira, o jogo trabalha as incertezas e as imprevisibilidades através dos desafios e das estratégias que são inerentes à sua prática.

### **3.6 Ensinar a compreensão**

A compreensão é trabalhada no jogo matemático ao passo que há o respeito às regras, a espera da jogada do outro, o compartilhamento de informações e o favorecimento do pensar em grupo. Para Morin (2001) “se descobirmos que somos seres fráveis, frágeis, insuficientes, carentes, então podemos descobrir que todos necessitamos de mútua compreensão.”. Partindo desse pressuposto, saber lidar com as próprias fragilidades, bem como com a falibilidade do outro em uma proposta de jogo, leva o sujeito a uma autocompreensão, como também a entender melhor o outro.

### **3.7 A ética do gênero humano**

Para Morin (2001) há uma indissociabilidade entre indivíduo/sociedade/espécie, pois “cada um destes termos é, ao mesmo tempo, meio e fim dos outros”. Segundo esse autor essa é a base para se lecionar relações morais no futuro. Para ele as relações éticas levam o sujeito a situações de solidariedade, compreensão, respeito ao outro e humanização; características estas fomentadas pelo uso do jogo matemático e reforçadas continuamente pelo tratamento de suas regras. A noosfera do jogo converge para o respeito mútuo e para o saber lidar com a pessoa do outro.

### **Conclusão**

O jogo pode ser uma ferramenta de motivação para o trabalho em grupo, no qual os participantes cumprem tarefas de forma espontânea e lúdica ao passo em que estão aprendendo. Assim, fazendo-se uma aproximação do jogo com os sete saberes necessários à educação do futuro, propostos por Morin (2001) é possível compreender que a ética, a compreensão e a condição humana são tratadas de forma recorrente nos jogos. A aplicação do jogo como metodologia de ensino também propõe o enfrentamento de incertezas e ressalta os princípios do conhecimento pertinente e da identidade terrena ao passo que também trabalham as situações de erro. Dessa forma, os

benefícios da aplicação dos jogos convergem para uma aprendizagem significativa, construtiva, identitária e formadora de um cidadão capaz de refletir e argumentar sobre a sua condição humana.

### Referências

ARANÃO, I. V. D. **A matemática através de brincadeiras e jogos**. 7. ed. Campinas/SP: Papirus, 2011.

AUSUBEL, D.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2012.

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. 2000. 224f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

HUIZINGA, J. **Homo Ludens: o jogo como elemento de cultura**. 2. ed. Trad. João Paulo Monteiro. São Paulo: Perspectiva, 1990.

MORIN, E. **Os sete saberes necessários à educação do futuro**. São Paulo: Cortez, 2001.

PIAGET, J. **A epistemologia genética e outros textos**. 4.ed. Rio de Janeiro: Abril Cultural, 1978.

VYGOTSKY, L. S. **A Formação Social da Mente**. 4.ed. Tradução José Cipolla Neto e outros. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

## Desenvolvimento do processo de mínimos quadrados com aplicações em ajuste de dados físicos utilizando o GeoGebra

Marcos H. F. Marcone

Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
marcosmarcone48@gmail.com

Fabiana T. Santana

Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
fabianasantana@ect.ufrn.br

**Resumo:** Este trabalho desenvolve o método dos Mínimos Quadrados através de importantes conceitos da Álgebra Linear, como espaços com produto interno, projeções ortogonais e sistemas lineares. Este método foi aplicado no ajuste de dados experimentais do tipo  $(t, x(t))$ , obtidos em uma aula prática da disciplina Física Experimental I, para otimizar a função que descreve o movimento de um carro com aceleração constante sob um trilho de ar inclinado. O processo foi desenvolvido no software educativo GeoGebra, especialmente com implementações na Janela CAS. Essa abordagem permitiu que o aluno acompanhasse o processo de otimização de forma detalhada e colocasse em prática, de maneira interdisciplinar, conteúdos trabalhados em diferentes disciplinas do ensino superior.

**Palavras-chave:** Ajuste de Dados. Ensino. GeoGebra. Mínimos Quadrados.

### Introdução

Sistemas de equações lineares, denotados por  $A \vec{x} = \vec{b}$ , consistem em um importante tópico da Álgebra Linear e muito utilizados na resolução de problemas práticos oriundos de observações e experimentos.

Quando o vetor  $\vec{b}$  pertence ao espaço gerado pelos vetores colunas da matriz  $A$ , denotado aqui por  $W$ , tem-se um sistema consistente. Caso contrário, isto é,  $\vec{b} \notin W$  tem-se um sistema  $A \vec{x} = \vec{b}$  inconsistente e, nesse caso, o processo de Mínimos Quadrados fornecerá a melhor solução aproximada para o sistema.

A Figura 1 ilustra que substituindo  $\vec{b}$  por  $proj_W \vec{b} \in W$  o erro  $e = \|\vec{b} - proj_W \vec{b}\|$  é mínimo, sendo este o melhor vetor que aproxima de  $\vec{b}$  em  $W$ , e o sistema  $A \vec{x} = proj_W \vec{b}$ , agora consistente, fornecerá a solução ótima.

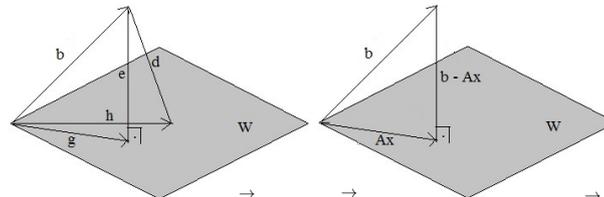


Figura 1: No gráfico da esquerda,  $\vec{g} = proj_W \vec{b}$ . No gráfico da direita,  $A \vec{x} = proj_W \vec{b}$ .

Como  $proj_W \vec{b}$  é paralelo à  $W$ , segue que  $\vec{b} - A \vec{x}$  é ortogonal à  $W$ . Por outro lado, como  $W$  é o espaço coluna de  $A$  que, por sua vez, é ortogonal ao espaço nulo de  $A^T$ , pode-se concluir que  $\vec{b} - A \vec{x}$  é um vetor deste espaço, isto é,  $A^T(\vec{b} - A \vec{x}) = \vec{0}$  é satisfeita. Esta análise resume o método dos Mínimos Quadrados, construído para se obter o erro  $e$  mínimo, com o qual obtém-se o sistema auxiliar

$$A^T A \vec{x} = A^T \vec{b} \quad (1)$$

que fornecerá a melhor solução  $\vec{x}$  para o sistema  $A\vec{x}=\vec{b}$ , (ANTON, 2001).

## Ajuste de dados por mínimos quadrados

O problema dos Mínimos Quadrados tem diversas aplicações. Considerando o conjunto de dados  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , obtidos de uma observação ou experimento, o método dos Mínimos Quadrados será utilizado aqui para obter a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que melhor se ajusta aos dados. Esta função será aquela em que se tenha o mínimo de dados fora da curva ou que a soma das distâncias dos pontos à curva seja a menor possível. A função mais adequada dependerá da distribuição dos dados. Por exemplo, na Figura 2, as funções mais apropriadas para ajustar os dados dos casos (a), (b) e (c) são  $f(x) = ax + b$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$  e  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , respectivamente.

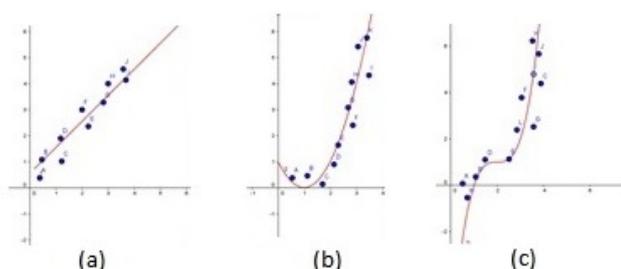


Figura 2: Exemplos de distribuição de dados.

Supondo que cada um dos dados  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  satisfaça a função  $f$  escolhida e substituindo  $y_i = f(x_i)$ , para  $i = 1, \dots, n$ , obtém-se um sistema inconsistente. A melhor solução aproximada para este sistema é dada pela equação (1), isto é, o método dos Mínimos Quadrados fornecerá os melhores coeficientes para definição da função que mais se ajustará aos dados, (KOLMAN, 2012).

## Introdução ao GeoGebra

O GeoGebra foi criado em 2001 como tese de Markus Hohenwarter na Universität Salzburg, localizada na cidade austríaca de Salzburgo. Desde sua criação, a popularidade do software tem crescido bastante e hoje já está disponível gratuitamente em muitos idiomas e sendo utilizado em 190 países, inclusive já recebeu diversos prêmios de software educacional na Europa e nos EUA (GEOGEBRA, 2017). O GeoGebra é capaz de lidar com variáveis para números, pontos, vetores, derivar e integrar funções, e ainda oferecer comandos para se encontrar raízes e pontos extremos de uma função. As principais funções e comandos utilizados no software podem ser consultados em (HOHENWARTER; HOHENWARTER, 2017).

Sem dúvida o software é mais conhecida na área geométrica. Porém, ele é muito amplo podendo ser utilizado em diversas disciplinas e auxilia em muitas aplicações, (GAMA; SANTANA, 2017). Aqui dar-se-á ênfase à Janela CAS para desenvolver o processo de Mínimos Quadrados. Esta janela é particionada em células nas quais se executam os comandos e se assemelham a um ambiente de programação em que o usuário pode salvar e editar os dados quando quiser, obtendo a atualização de todo o processo realizado, inclusive das representações gráficas na Janela de Visualização. A Figura 3 mostra algumas janelas da versão GeoGebra Classic 5.

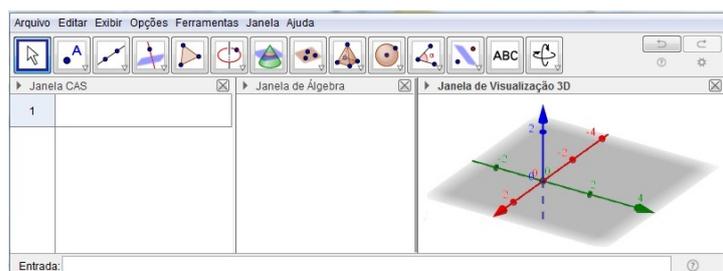


Figura 3: Algumas Janelas do GeoGebra.

Os principais comandos que serão utilizados nas células da Janela CAS para o desenvolvimento do processo de Mínimos Quadrados são:

Definição de ponto:  $P_k := (x, y)$ , onde  $k \in \mathbb{N}$ ;

Definição de vetor:  $pk := \{\{x_1\}, \dots, \{x_n\}\}$ , onde  $k \in \mathbb{N}$ ;

Definição de matriz:  $A = \{\{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}\}, \{a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}\}, \dots, \{a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}\}\}$ ;

Termos da matriz:  $Elemento[Elemento[matriz, linha], coluna]$ ;

Termos do vetor:  $Elemento[Elemento[vetor, linha], 1]$ ;

Matriz escalonada:  $MatrizEscalonada(matriz)$ ;

Matriz transposta:  $MatrizTransposta(matriz)$ ;

Definição de função:  $f(x) := \text{expressão}$ .

## Aplicação em ajuste de dados experimentais

Para aplicar os conceitos deste trabalho, foi realizada uma prática experimental em um laboratório de Física, durante uma aula da disciplina de Física Experimental I, que consistiu em analisar o movimento de um carro que se movia livremente com aceleração constante sobre um trilho de ar com uma certa inclinação, onde registrou-se o tempo  $t$  gasto necessário para um deslocamento  $x(t)$  medido com auxílio de sensores, como ilustra a Figura 4.

O processo de Mínimos Quadrados será utilizado para determinar a melhor função matemática  $x = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$ , da distância percorrida pelo carro em função do tempo, que melhor se ajusta às informações obtidas com o experimento, dadas por obtidas por (0.211, 0.25), (0.391, 0.3), (0.527, 0.35), (0.710, 0.4), (0.918, 0.5), (1.080, 0.6), (1.393, 0.8) e (1.639, 1) expressas por  $(t, x(t))$ . A função será definida encontrando os melhores coeficientes, que serão solução de um sistema equivalente à equação (1), que foram obtidos aqui com o auxílio do software GeoGebra, mais especificamente da Janela CAS, que possibilita uma espécie de programação com uma linguagem mais acessível.

A utilização do método dos Mínimos Quadrados para ajustes de dados físicos por meio do software Geogebra não está necessariamente ligada à questão da eficiência. Muitos softwares disponíveis na comunidade fornecem ajustes de forma rápida e prática, porém eles não são habilitados a mostrar como esse processo ocorre. Por isso, utilizar o Geogebra permite que o aluno acompanhe os passos dessa otimização, tendo o controle sobre o que está fazendo, ao invés de obter somente resultados prontos. Outro motivo relevante ao se usar essa abordagem é a aplicação prática do conteúdo sobre Mínimos Quadrados que é ensinado aos estudantes nas aulas de Álgebra Linear. Ao se estabelecer essa relação interdisciplinar com a disciplina de Física Experimental I, os discentes conseguem usar uma ferramenta muito poderosa, a qual, muitas vezes, fica apenas no campo abstrato durante as aulas de Álgebra Linear.

Para iniciar, os dados foram definidos na Janela CAS através do comando  $P_i := (t_i, x(t_i))$  e esboçados

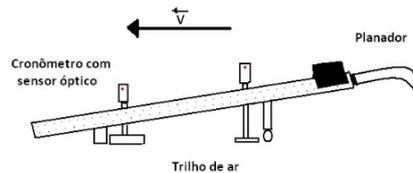


Figura 4: Trilho de ar com inclinação.

na Janela de Visualização. Em seguida, foram definidos os vetores  $p_i$  com o comando  $p_i = \{\{t_i\}, \{x(t_i)\}\}$ , para  $i = 1, \dots, 8$ . Os termos das matrizes utilizadas no desenvolvimento do problema por Mínimos Quadrados ficarão em função das coordenadas desses vetores, o que justifica esta passagem. Não se tem interesse em esboçar os vetores, apenas os pontos, por isso as células correspondentes a cada vetor ficam desabilitadas, ao contrário das células dos pontos, como pode ser visto na Figura 5.

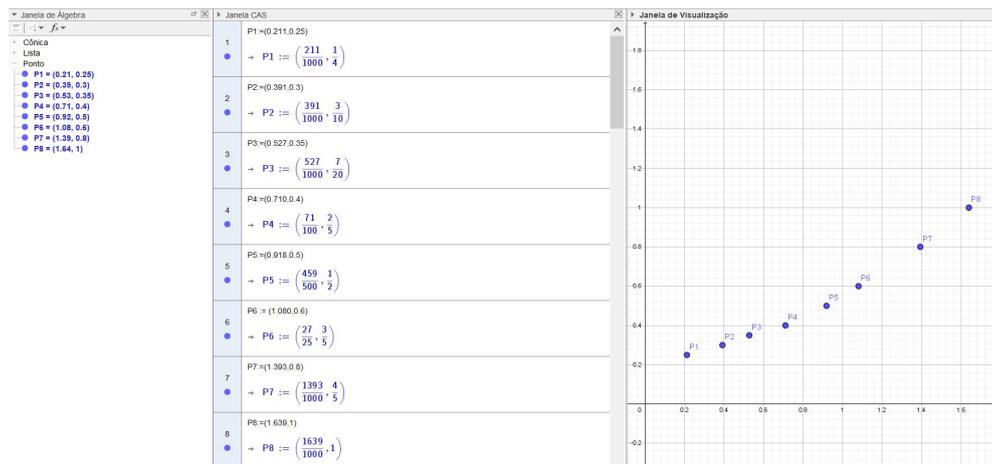


Figura 5: Esboço dos dados do experimento físico.

Supondo que cada dado  $(t_i, x(t_i))$  satisfaz a equação  $x(t) = bt^2 + v_0t + s_0$ , onde  $b = \frac{a}{2}$  obtém-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} 0.04521b + 0.211v_0 + s_0 = 0.25 \\ 0.152881b + 0.391v_0 + s_0 = 0.3 \\ 0.277729b + 0.527v_0 + s_0 = 0.35 \\ 0.5041b + 0.710v_0 + s_0 = 0.4 \\ 0.842724b + 0.918v_0 + s_0 = 0.5 \\ 1.1664b + 1.080v_0 + s_0 = 0.6 \\ 1.940449b + 1.393v_0 + s_0 = 0.8 \\ 2.686321b + 1.639v_0 + s_0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0.04521 & 0.211 & 1 \\ 0.152881 & 0.391 & 1 \\ 0.277729 & 0.527 & 1 \\ 0.5041 & 0.710 & 1 \\ 0.842724 & 0.918 & 1 \\ 1.1664 & 1.080 & 1 \\ 1.940449 & 1.393 & 1 \\ 2.686321 & 1.639 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} b \\ v_0 \\ s_0 \end{bmatrix}}_v = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.3 \\ 0.35 \\ 0.4 \\ 0.5 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1 \end{bmatrix}}_u \quad (2)$$

que será representada por  $A \vec{v} = \vec{u}$ .

As matrizes  $A$  e  $u$ , cujos termos dependem dos vetores  $p_i$ , foram definidas, respectivamente, com os comandos abaixo e podem ser visualizadas na Figura 6.

$$A := \{\{Elemento(p1, 1, 1)2, Elemento(p1, 1, 1), 1\}, \dots, \{Elemento(p8, 1, 1)2, Elemento(p8, 1, 1), 1\}\} \quad (3)$$

$$u := \{\{Elemento(p1, 2, 1)\}, \{Elemento(p2, 2, 1)\}, \dots, \{Elemento(p8, 2, 1)\}\} \quad (4)$$

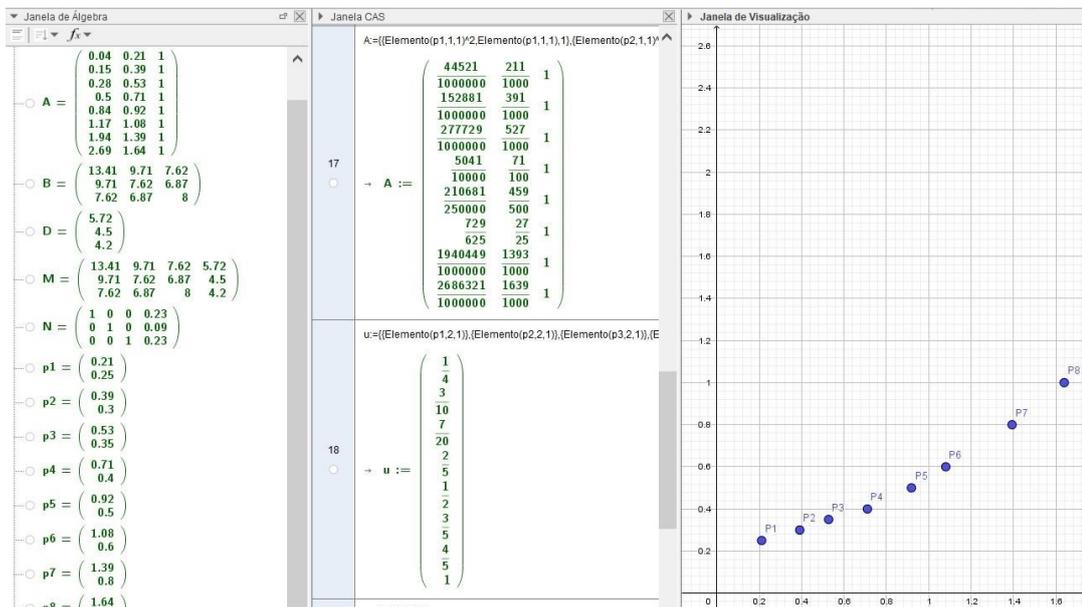


Figura 6: Definição das matrizes  $A$  e  $u$  do sistema  $A \vec{v} = \vec{u}$ .

De acordo com a equação (1), a melhor solução do sistema  $A \vec{v} = \vec{u}$  é fornecida pelo sistema auxiliar  $A^T A \vec{v} = A^T \vec{u}$ , cujas matrizes dos coeficientes, denotada por  $B = A^T A$ , e dos termos independentes, denotada por  $D = A^T \vec{u}$ , foram definidas pelos respectivamente comandos das equações (5) e (6) e podem ser visualizadas na Figura 7.

$$B := \text{MatrizTransposta}[A] * A \quad (5)$$

$$D := \text{MatrizTransposta}[A] * u \quad (6)$$

A matriz aumentada correspondente ao sistema  $B \vec{v} = D$  e seu escalonamento foram obtidos respectivamente pelos comandos das equações (7) e (8) e podem ser visualizados na Figura 8.

$$M := \{\{Elemento(B, 1, 1), Elemento(B, 1, 2), Elemento(B, 1, 3), Elemento(D, 1, 1)\}, \quad (7) \\ \{Elemento(B, 2, 1), Elemento(B, 2, 2), Elemento(B, 2, 3), Elemento(D, 2, 1)\}, \\ \{Elemento(B, 3, 1), Elemento(B, 3, 2), Elemento(B, 3, 3), Elemento(D, 3, 1)\}\}$$

$$N := \text{MatrizEscalonada}(M) \quad (8)$$

Os termos  $a = Elemento(N, 1, 4)$ ,  $b = Elemento(N, 2, 4)$  e  $c = Elemento(N, 3, 4)$  definem os coeficientes que fornecerão a melhor equação para descrever a variação da posição em função do tempo dada

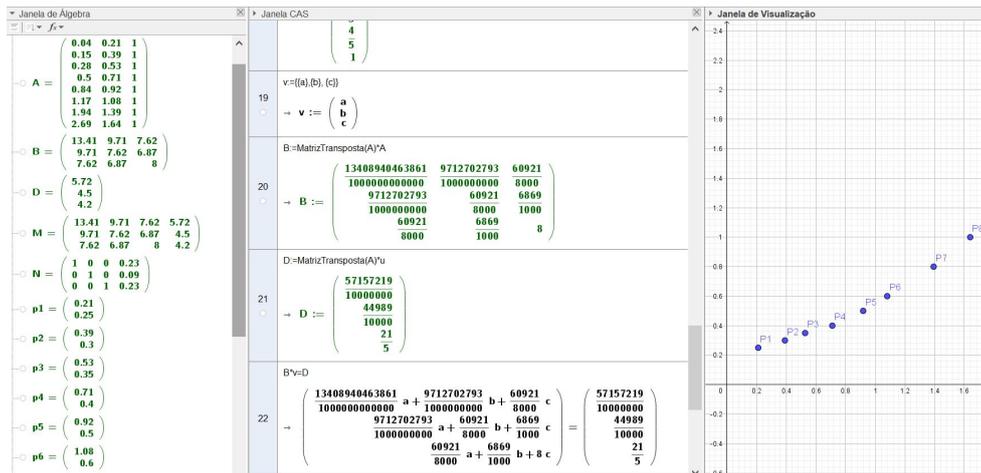


Figura 7: Definição das matrizes do sistema auxiliar  $A^T A \vec{v} = A^T \vec{u}$ .

por comando  $y = \text{Elemento}(N, 1, 4) * x^2 + \text{Elemento}(N, 2, 4) * x + \text{Elemento}(N, 3, 4)$  cuja representação pode ser vista na Figura 8, obtida habilitando as células da Janela CAS correspondentes à equação.

Ampliando um pouco a imagem obtida na Figura 8 é possível notar que existem dados fora da curva. Este fato está relacionado com o processo dos Mínimos Quadrados, o qual apresenta o melhor ajuste quadrático aos dados em questão. Com isso, não há obrigatoriedade de todos os pontos pertencerem à curva, pois são dados experimentais passíveis de erros sistemáticos e aleatórios.

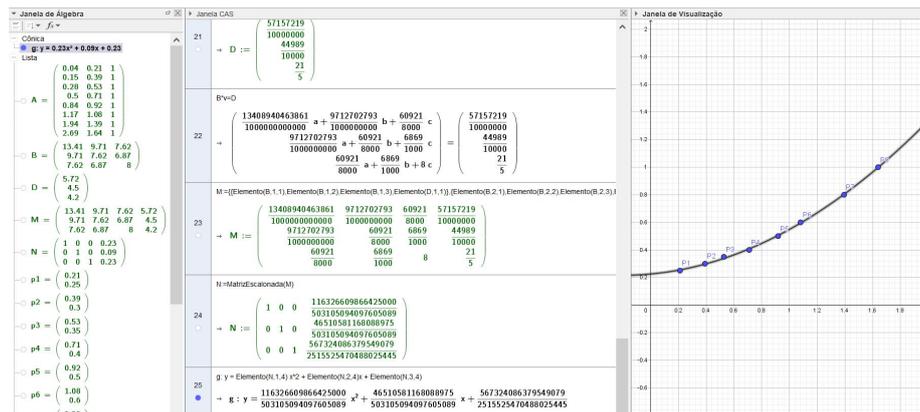


Figura 8: Matrizes aumentadas e escalonamento do sistema  $B \vec{v} = D$  e melhor curva de ajuste da posição em função do tempo.

## Conclusões

O método dos Mínimos Quadrados, trabalhado em Álgebra Linear com o enfoque matricial, é um método muito eficiente que forma a melhor solução aproximada para sistemas lineares inconsistentes sendo muito usado no processo de otimização de curvas. Neste trabalho, esse método foi usado para



otimizar a função que ajusta um conjunto de dados reais obtidos em uma aula prática de Física Experimental I por alguns dos autores do trabalho. Um ponto a ser destacado é questão da interdisciplinaridade proporcionada pela abordagem apresentada, a qual fornece uma maneira prática de se aplicar o conteúdo sobre Mínimos Quadrados visto nas aulas de Álgebra Linear, que muitas vezes é uma teoria de difícil compreensão. O uso do software Geogebra para a aplicação do método possibilitou detalhar o processo, facilitando a compreensão dos alunos. Este é um software educativo desenvolvido especialmente para ser utilizado na sala de aula, porém, ainda é pouco explorado em cursos de graduação. Seu uso pode trazer bons resultados, tanto para professores quanto alunos, auxiliando no processo de ensino e aprendizagem.

## Agradecimentos

Os autores agradecem à Universidade Federal do Rio Grande do Norte pelo apoio financeiro.

## Referências

- ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- GAMA, J. P. F; SANTANA, F. T. Utilização do software GeoGebra para aproximar funções através de mínimos quadrados. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 10, p. 1-9, dez. 2017. Edição Ermac.
- GEOGEBRA. **O que é o GeoGebra**. Disponível em: <<http://www.geogebra.org/about>>. Acesso em: 29 jul. 2017.
- HOHENWARTER, M.; HOHENWARTER, J. **Ajuda GeoGebra**: manual oficial da versão 3.2. Disponível em: <[https://app.geogebra.org/help/docupt\\_PT.pdf](https://app.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf)>. Acesso em: 29 jul. 2017.
- KOLMAN, B. **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- MANSO, W. B; SANTANA, F. T. O Processo de mínimos quadrados aplicado no ajuste de dados com o uso do software GeoGebra. **Anais do Congresso Brasileiro do GeoGebra**. Natal, RN, p. 1-6.
- TRINDADE, D.; GREGÓRIO, R. **Tutorial janela CAS**. Disponível em: <<https://www.passeidireto.com/arquivo/18235763/tutorial-janela-cas-geogebra>>. Acesso em: 29 jul. de 2017.

## Estudo de distâncias entre planos e retas utilizando a Janela CAS do software GeoGebra

*Igor Michael Araujo De Macedo*

*Universidade Federal do Rio Grande do Norte; Escola de Ciências e Tecnologia  
igor\_parellhas@hotmail.com*

*Fabiana Tristão de Santana*

*Universidade Federal do Rio Grande do Norte; Escola de Ciências e Tecnologia  
fabianasantana@ect.ufrn.br*

**Resumo:** Este trabalho discute a dificuldade existente no processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos mais abstratos presentes em cursos de Ciências Exatas e Engenharia. Alguns cálculos trabalhados na graduação, muitas vezes ficam restritos a fórmulas que não são muito intuitivas para o aluno. A proposta do trabalho é adotar um raciocínio construtivo para trabalhar as distâncias entre ponto e plano, ponto e reta, entre planos e entre retas no  $\mathbb{R}^3$  e utilizar o software GeoGebra para ilustrar o processo e obter a representação Geométrica. O desenvolvimento do projeto mostrou que a abordagem é uma boa estratégia de ensino e aprendizagem e o uso do software GeoGebra, em particular da Janela CAS, contribui significativamente para o entendimento da questão como um todo, além de fornecer resultados precisos e rápidos.

**Palavras-chave:** Ensino. Distâncias. GeoGebra. Posições Relativas.

### Introdução

A disciplina Vetores e Geometria Analítica ou simplesmente Geometria Analítica está presente nos currículos escolares de vários cursos de Ciências Exatas e Engenharia e, em geral, é uma disciplina trabalhada no primeiro ou segundo semestre dos cursos.

Esta disciplina tem a particularidade de fazer uma transição da Matemática mais concreta para uma Matemática mais abstrata. Apesar dos conceitos trabalhados abrangerem vetores do  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  que admitem representação geométrica, muitas vezes a explicação fica restrita à parte teórica onde o objetivo final é a dedução de uma equação matemática.

Em se tratando de distâncias, pode-se citar distância entre pontos, entre ponto e reta, entre ponto e plano, entre retas e entre planos. Cada uma dessas distâncias podem ser obtidas através de uma equação desenvolvida utilizando os conceitos estudados na disciplina. Porém, o fato é que muitas dessas equações não são intuitivas além de serem de difícil memorização.

Pensando nisso, este trabalho realiza o estudo de distâncias através de construções geométricas na Janela CAS do software GeoGebra (GEOGEBRA, 2017). Esta abordagem, em paralelo com a representação geométrica, tem por objetivo despertar no estudante o raciocínio lógico matemático e possibilitar a compreensão integral do processo. O software GeoGebra é uma ferramenta com grande potencial para ser adotado no processo de ensino e aprendizagem. Várias teorias da Matemática, trabalhados em cursos de graduação, podem se beneficiar com o uso do software, como é mostrado em (GAMA; SANTANA, 2017) e (MANSO; SANTANA, 2016).

### Janela CAS do GeoGebra

O GeoGebra é um software gratuito com linguagem acessível aplicável a todos os níveis de ensino. Suas plataformas permitem realizar construções geométricas, inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente após a construção estar finalizada (HOHENWARTER; HOHENWARTER, 2017).

A Figura 1 mostra a interface do GeoGebra e algumas de suas Janelas. As principais janelas do software são a Janela de Álgebra, a Janela de Visualização que permite representações gráficas no  $\mathbb{R}^2$ , a Janela 3D que permite representações gráficas em  $\mathbb{R}^3$  e a Janela CAS que possibilita a realização de uma espécie de programação, em que a implementação realizada pode ser salva para uso e alterações futuras. As principais funções e comandos utilizados na Janela CAS podem ser consultados em (TRINDADE; GREGÓRIO, 2017).

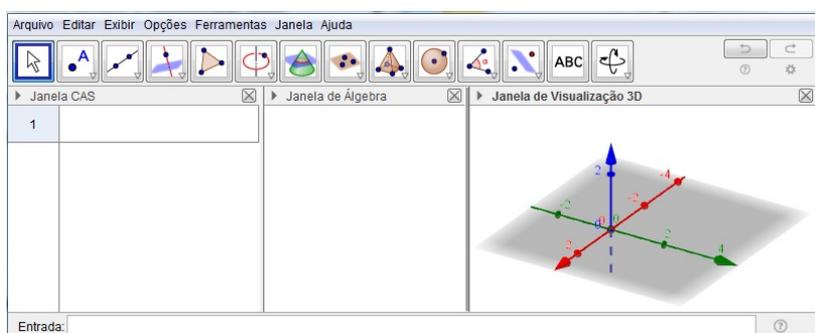


Figura 1: Algumas Janelas do GeoGebra.

A Janela CAS é formada por células onde serão inseridos os comandos necessários. Os principais comandos que serão utilizados no estudo de distâncias são:

Definição de ponto:  $P_k := (x, y)$ , onde  $k \in \mathbb{N}$ ;

Definição de vetor:  $pk := \{\{x_1\}, \dots, \{x_n\}\}$ , onde  $k \in \mathbb{N}$ ;

Termos do vetor:  $Elemento[Elemento[vetor, linha], 1]$ ;

Resolução de equação:  $Resolver(equação, variável)$ ;

Definição de função:  $f(x) := expressão$ ;

$\$N$ , onde  $N$  é o número da célula, é usado para representar o conteúdo da célula de número  $N$ .

## Distâncias por Construções Geométricas

A distância entre os pontos  $A(x_1, y_1, z_1)$  e  $B(x_2, y_2, z_2)$  é definida pelo comprimento do vetor  $\vec{AB}$ , isto é,  $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ , como ilustra a Figura 2. Todas as outras distâncias que serão apresentadas recairão na distância entre dois pontos.

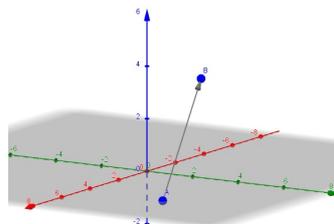


Figura 2: Distância entre A e B.

Para obter a distância do ponto  $A(x_0, y_0, z_0)$  à reta  $r : x = x_0 + at, y = y_0 + bt, z = z_0 + ct$ , primeiro define-se o plano ortogonal à  $r$  passando por  $A$  dado por  $\pi : ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0)$ . Em seguida, obtém-se o ponto  $I$  de interseção entre o plano  $\pi$  e a reta  $r$ , com o qual tem-se  $d(A, r) = d(A, I)$ .

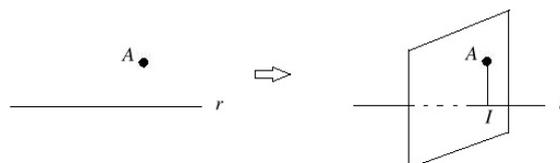


Figura 3: Distância entre A e r.

A distância entre o ponto  $A(x_0, y_0, z_0)$  e o plano  $\pi : ax + by + cz + d = 0$  é obtida encontrando primeiramente a reta  $r : x = x_0 + at, y = y_0 + bt, z = z_0 + ct$ , que é perpendicular à  $\pi$  passando pelo ponto A. Com isso,  $d(A, \pi) = d(A, I)$ , onde I é o ponto de interseção entre r e  $\pi$ .

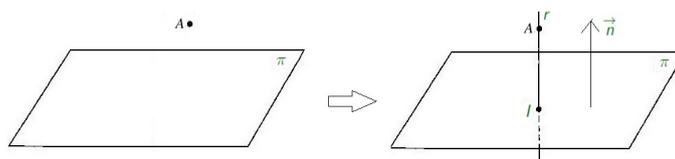


Figura 4: Distância entre A e  $\pi$ .

Se os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são paralelos, então para obter a distância entre eles basta fixar um ponto  $A \in \pi_1$  e calcular a distância entre A e  $\pi_2$ , isto é  $d(\pi_1, \pi_2) = d(A, \pi_2)$ . Se os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  não são paralelos, então  $d(\pi_1, \pi_2) = 0$ .

Outra distância que pode-se calcular é a distância entre uma reta r e um plano  $\pi$ . Se r e  $\pi$  não são paralelos, então  $d(r, \pi) = 0$ . Caso contrário, se r e  $\pi$  são paralelos, então  $d(r, \pi) = d(A, \pi)$ , onde A é algum ponto de r.

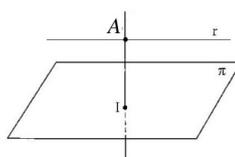


Figura 5: Distância entre reta e plano.

Por fim, a distância entre duas retas  $r_1$  e  $r_2$  depende da posição em que elas se encontram. Se  $r_1$  e  $r_2$  são concorrentes, isto é, se interceptam, então  $d(r_1, r_2) = 0$ . Se  $r_1$  e  $r_2$  são paralelas, isto é, não se interceptam e possuem a mesma direção, então  $d(r_1, r_2) = d(r_1, A_2)$ , onde  $A_2 \in r_2$ . Por fim, se  $r_1$  com direção  $\vec{v}_1$  e  $r_2$  com direção  $\vec{v}_2$  são reversas, isto é, não se interceptam e não possuem a mesma direção, então a distância entre as retas é  $d(r_1, r_2) = d(\pi, r_2)$ , onde  $\pi$  é um plano que contém o ponto  $A_1 \in r_1$  e vetor normal  $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ . Na Figura 6, pode-se observar nos itens (a), (b) e (c) os três casos descritos anteriormente.

## Aplicações Utilizando a Janela CAS do Software GeoGebra

A primeira aplicação tem por objetivo encontrar a distância do ponto  $P(2, 1, 4)$  à reta  $r : x = -1 + 2t, y = 2 - t, z = 3 - 2t$  através da construção descrita neste trabalho e fazendo uso do software GeoGebra, em particular da Janela CAS. A representação gráfica oferecida pelo software possibilita a compreensão dos passos utilizados para a obtenção da distância, como mostra a Figura 7.

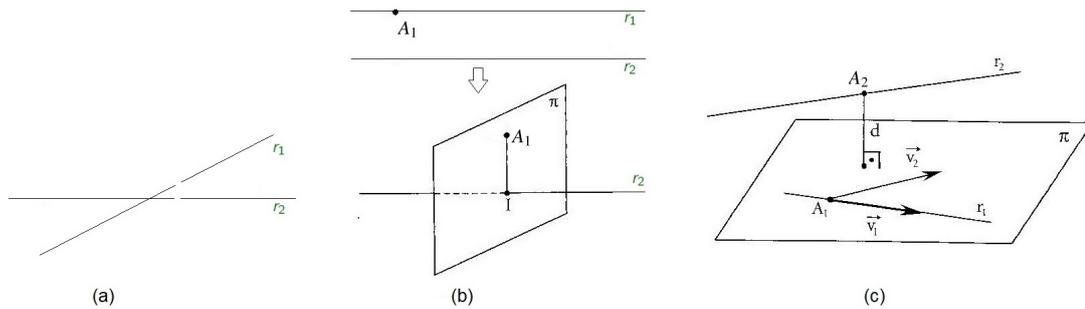


Figura 6: (a) Distância entre Retas concorrentes. (b) Distância entre retas paralelas. (c) Distância entre retas reversas.

O ponto  $P$  e a reta  $r$  foram definidos na Janela CAS do GeoGebra com os comandos  $P := (2, 1, 4)$  e  $r(t) := (-1 + 2t, 2 - t, 3 - 2t)$ . O vetor diretor da reta, que corresponde ao vetor normal ao plano que será construído, foi definido com o comando  $v := (2, -1, -2)$ . De acordo com a definição, um plano passando pelo ponto  $P$  com vetor normal  $\vec{v}$  é formado por pontos  $A(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  que satisfazem a condição  $(A - P) \cdot \vec{v} = 0$ , pois os vetores  $\vec{AP}$  e  $\vec{v}$  são ortogonais. Assim, Na Janela CAS, insira a equação

$$\text{ProdutoEscalar}[(x, y, z) - P, v] = 0 \quad (1)$$

Janela de Álgebra	Janela CAS	Janela de Visualização 3D
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Ponto</li> <li>• <math>P = (2, 1, 4)</math></li> <li>- Reta</li> <li>• <math>r: X = (-1, 2, 3) + \dots</math></li> </ul>	1 $P := (2, 1, 4)$ • $P := (2, 1, 4)$	
	2 $r(t) := (-1 + 2t, 2 - t, 3 - 2t)$ → $r(t) := (-1 + 2t, 2 - t, 3 - 2t)$ $v := \text{Vetor}[(2, -1, -2)]$ $r(t) := (-1 + 2t, 2 - t, 3 - 2t)$	
	3 • $v := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$	
	4 $a := \text{ProdutoEscalar}[(x, y, z) - P, v] = 0$ • $a : 2x - y - 2z + 5 = 0$	
	5 $\text{Resolver}2[(-1 + 2t) - (2 - t) - 2(3 - 2t) + 5 = 0, t]$ → $\left\{ t = \frac{5}{9} \right\}$	
	6 $I := (5/9)$ • $I := \left( \frac{1}{9}, \frac{13}{9}, \frac{17}{9} \right)$	
	7 $D := \text{Distância}[P, I]$ → $D = \frac{1}{3} \sqrt{74}$	

Figura 7: Representação do ponto e da reta e cálculo da distância entre eles.

A equação (1) gera o plano  $2x - y - 2z + 5 = 0$ . Ao ativar a célula na qual a equação do plano foi definida, o que é feito clicando no número da célula, localizado a esquerda, seu gráfico é automaticamente representado na Janela de Visualização 3D. Note que ao ativar a representação gráfica, automaticamente o software atribui uma letra arbitrária ao plano. Agora é possível notar que, sendo  $I$  a interseção da reta  $r$  com o plano, a menor distância entre  $P$  e  $r$  é a distância entre  $P$  e  $I$ . O ponto  $I$ , é determinado resolvendo a equação obtida ao substituir as coordenadas de  $r$  no plano, isto é,  $2(-1 + 2t) - (2 - t) - 2(3 - 2t) + 5 = 0$ ,

que fornece  $t = 5/9$ . Para obter o ponto da reta quando  $t = 5/9$ , basta aplicar o comando  $I := r(5/9)$  que fornecerá o ponto  $I(1/9, 13/9, 17/9)$ .

Por fim,  $d(P, r) = d(P, I)$  é fornecida com o comando  $D := Distancia[P, I]$ . A sequência de passos pode ser visualizada na Figura 7. Na Janela de Álgebra, clicando com o botão direito sobre as equações e, em seguida propriedades, é possível formatar os elementos da Janela de Visualização. O valor da distância obtido no passo final, pode ser exibido em decimais através do botão Valor Numérico e em Opções, arredondamento, pode-se escolher a quantidade de casas decimais, como mostrado na Figura 10.

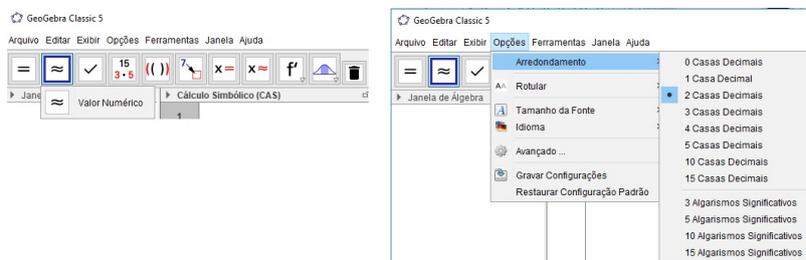


Figura 8: Opções de formatação.

A segunda aplicação tem por objetivo obter a distância entre as retas resersas  $r_1 : x = -1 + t, y = 3 - 2t, z = -1 - t$  e  $r_2 : x = t, y = -3 + t, z = 1 - t$ . Para isso, as retas foram definidas na Janela CAS do GeoGebra com os comandos  $r_1(t) := (-1 + t, 3 - 2t, -1 - t)$  e  $r_2(h) := (h, -3 + h, 1 - h)$ . Os vetores direcionais das retas  $r_1$  e  $r_2$ , definidos respectivamente por  $v_1 := (1, -2, -1)$  e  $v_2 := (1, 1, -1)$ , não são múltiplos e, além disso, não há interseção entre as retas, pois como pode ser visto na Figura 9 a resolução do sistema formado igualando as respectivas coordenadas das retas tem solução vazia.

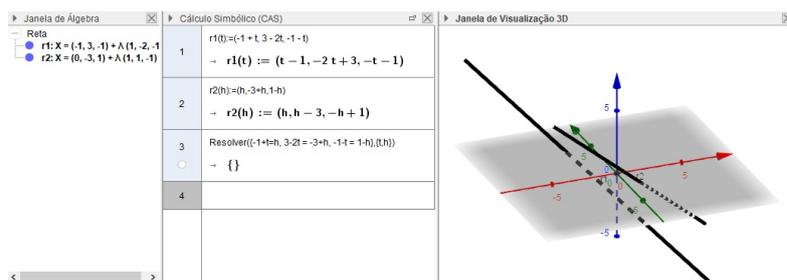


Figura 9: Retas reversas.

Para obter a distância entre as retas, o vetor normal do plano auxiliar que será definido foi obtido por  $n := ProdutoVetorial(v_1, v_2)$ . Em seguida, adotou-se o múltiplo de  $n$  dado por  $a := \frac{1}{3} * n$  e definindo os pontos  $P := (x, y, z)$ ,  $A1 := (-1, 3, -1)$  e  $A2 := (0, -3, 1)$ , a equação do plano e da reta auxiliar foram obtidas com as equações  $ProdutoEscalar(P - A1, a) = 0$  e  $r3(t) := A2 + t * a$ , respectivamente, como pode ser visto na Figura 10.

A interseção do plano auxiliar com a reta  $r3$  foi obtida substituindo o parâmetro  $t = -\frac{3}{2}$ , resultado da equação  $Resolver((t) + (t + 1) + 2 = 0)$ , em  $r3(t)$ , isto é,  $I := r3(-\frac{3}{2})$ . Por fim, a distância entre as retas  $r_1$  e  $r_2$  foi obtida com  $Distancia(A2, I)$ , como mostra a Figura 10.

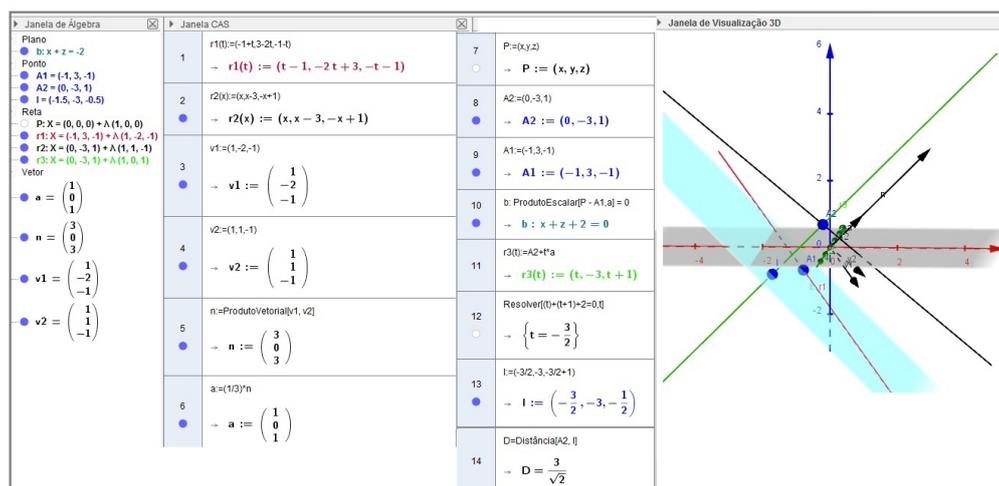


Figura 10: Distância entre retas reversas.

## Conclusões

O desenvolvimento do trabalho é uma proposta a ser adotada em cursos de graduação e tem por objetivo tornar o estudo de distâncias entre retas, pontos e planos mais interessante para o aluno. Muitas vezes observa-se que os alunos ingressantes em cursos de ciências exatas e engenharia se deparam com dificuldades logo no primeiro período do curso em assimilar conceitos novos como a Geometria Analítica. Adotar um software matemático e adotar uma abordagem construtiva é uma estratégia de ensino e aprendizagem que bem estudada e elaborada pode trazer bons resultados em sala de aula, além de possibilitar ao aluno a investigação futura e utilização em outras disciplinas e situações.

## Referências

- GAMA, J. P. F.; SANTANA, F. T. Utilização do software GeoGebra para aproximar funções através de mínimos quadrados. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 10, p. 1-9, dez. 2017. Edição Ermac.
- HOHENWARTER, M.; HOHENWARTER, J. **Ajuda GeoGebra: manual oficial da versão 3.2**. Disponível em: <[https://app.geogebra.org/help/docuapt\\_PT.pdf](https://app.geogebra.org/help/docuapt_PT.pdf)>. Acesso em: 29 jul. 2017.
- INTERNATIONAL GEOGEBRA INSTITUTE. **O que é o GeoGebra**. Disponível em: <<http://www.geogebra.org/about>>. Acesso em: 29 jul. 2017.
- MANSO, W. B; SANTANA, F. T. O Processo de mínimos quadrados aplicado no ajuste de dados com o uso do software GeoGebra. **Anais do Congresso Brasileiro do GeoGebra**. Natal, RN, p. 1-6, 2016.
- TRINDADE, D.; GREGÓRIO, R. **Tutorial janela CAS**. Disponível em: <<https://www.passeidireto.com/arquivo/18235763/tutorial-janela-cas-geogebra>>. Acesso em: 29 jul. de 2017.

## **Origami: introdução aos sete axiomas de Huzita-Hatori e contribuições no ensino da matemática.**

*OLIVEIRA JUNIOR, E. S.*

*Universidade do Estado da Bahia - UNEB  
edmol.santos@gmail.com*

*LIMA, S. G.*

*Universidade do Estado da Bahia - UNEB  
samara.lima9343@gmail.com*

*LIMA, A. S.*

*Universidade do Estado da Bahia - UNEB  
limaandressa59@gmail.com*

**Resumo:** O presente trabalho tem como objetivo, introduzir os axiomas de Huzita-Hatori e apresentar contribuições que os estudos sobre o Origami trouxeram para o processo de ensino-aprendizagem. A metodologia foi a descritivo-bibliográfica e a coleta de trabalhos de dissertação através de uma biblioteca digital (BDTD). Constata-se que o Origami não é apenas uma arte de dobrar, ela se insere e traz contribuições para a matemática a partir do estudo de importantes pesquisadores que descobriram a presença da geometria em suas construções e que atualmente podem ser aplicadas no ensino.

**Palavras-chave:** Origami. Ensino. Matemática

### **Introdução**

Criado no Japão, o Origami é uma arte antiga que nunca foi esquecida, mas tem grande importância para a Matemática. O principal objeto de estudo deste trabalho é introduzir o histórico do Origami mostrando os principais estudiosos que contribuíram para o avanço desta arte, posteriormente apresentar a descrição axiomática do Origami e os sete axiomas de Huzita-Hatori, formalizando a existência de ponto e reta nas dobragens e construções geométricas. Por fim, foram pesquisados alguns trabalhos de mestrado (dissertação) para comprovar que é possível se ensinar matemática através do Origami. A metodologia utilizada foi a descritivo-bibliográfica e coleta dos trabalhos de dissertação através da BDTD (Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações).

### **Histórico do Origami**

O Origami é uma arte de dobrar de capacidades imensas. Muitos historiadores alegam que essa arte se desenvolveu no Japão e em qualquer livro lê-se que o Origami é a arte japonesa de dobrar papel, onde “Ori” deriva do desenho de uma mão e significa dobrar e “Kami” deriva do desenho da seda e significa papel, espírito e Deus. (RAFAEL, 2011). A arte do Origami é uma arte antiga, mas que nunca foi esquecida porque ela possui importância dentro da cultura do país onde se originou e em outros países, assim como no Brasil, chama muita atenção de crianças e é utilizada como ferramenta de aprendizagem, principalmente na matemática.



Segundo Prieto (2002), a história do Origami dividiu-se em três períodos como mostra a Tabela 1:

Tabela 1 – Períodos históricos do Origami

PERÍODO	ACONTECIMENTO
PERÍODO HEIAN (794 – 1185)	Nesse período o Origami era considerado um divertimento para as classes mais ricas, pois somente elas tinham condições de adquirir papel naquela época, que era um produto de grande valor. Existia também um ritual onde dobravam borboletas macho e fêmea nos casamentos que simbolizava união entre o casal. Estudantes na Europa durante este período utilizavam para escreverem suas orações o “nú pentagonal” no estudo da geometria.
PERÍODO MUROMACHI (1338 – 1573)	O papel estava mais franqueável para as demais classes, logo a construção do Origami começou a ser desenvolvida por mais pessoas.
PERÍODO TOKUGAWA (1603 – 1867)	Surgiram os primeiros livros de Origami. Em 1797 o livro chamado Híden Senbazuru Orikata, nele continha as instruções para dobrar o pássaro sagrado do Japão, o Tsuru. Quase cinco décadas após a publicação do primeiro, outro livro Kan No Mado, publicado com 150 modelos de Origami contendo as duas bases mais importantes do Origami, a base do pássaro e a base da rã.

Posteriormente a esses períodos que a história do Origami se dividiu, os estudos e as descobertas não pararam, artistas retratavam em suas obras a ideia do Origami através de figuras geométricas e isso fez com que a história e a evolução dos estudos fossem acontecendo. Em 1950, o japonês Akira Yoshizawa<sup>1</sup> criou uma simbologia que até os dias atuais são utilizadas. Em adição, existem pessoas de todo o mundo que se dedicam ao Origami desenvolvendo figuras cada vez mais complexas e ao estudo matemático das várias dobras.

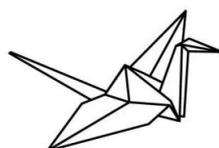


Figura 1 - Tsuru

Para conhecimento, a dobragem do Tsuru serve de base para as construções dos mais diversos animais e plantas. Antes era visto apenas como recreação para criança, mas com o passar do tempo o Tsuru, passou a ter significados como fé, esperança, longevidade.

### Descrição Axiomática do Origami

<sup>1</sup> O pai do Origami. (Prieto, 2002)

Muitos estudos ainda continuaram para o avanço do Origami. Em 1970, estudos tinham como objetivo enumerar as possíveis dobragens em Origami e entre elas descobrir diversas combinações. As seis primeiras operações, conhecidas por Axiomas de Huzita foi a primeira descrição formal, verificando as construções geométricas possíveis com Origami. Humiaki Huzita nasceu no Japão, porém viveu mais na Itália e essas seis operações só existem através dos estudos desse matemático que formalizou as seis dobragens de Jacques Justin.

Mais adiante em 2002, quando Koshiro Hatori apresentou uma dobragem não descrita pelos axiomas de Huzita, foi aí que surgiu a necessidade de formalizar um sétimo axioma. Logo, os sete axiomas ficaram conhecidos por Axiomas de Huzita-Hatori.

### Os Axiomas de Huzita-Hatori

Remetendo-se aos trabalhos de Rafael (2011) e Monteiro (2008) serão apresentados os axiomas criados por Humiaki Huzita e Koshiro Hatori.

Legenda: “P” – Ponto e “l” – Reta

*Axioma 1* - Dados dois pontos distintos  $P_1$  e  $P_2$ , existe apenas uma dobra que passa por eles.

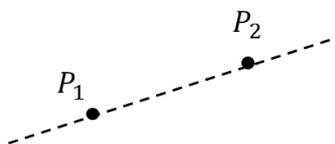


Figura 2 – Axioma 1

*Axioma 2* - Dados dois pontos distintos  $P_1$  e  $P_2$ , existe apenas uma dobra que faz coincidir  $P_1$  com  $P_2$ .

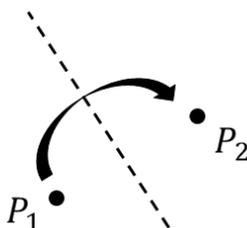


Figura 3 – Axioma 2

*Axioma 3* - Dadas as retas  $l_1$  e  $l_2$ , existe uma dobra que faz coincidir  $l_1$  com  $l_2$ .

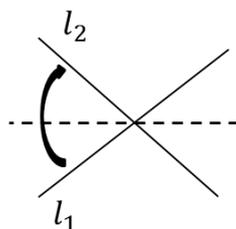


Figura 4 – Axioma 3

*Axioma 4* - Dados um ponto  $P$  e uma reta  $l$ , existe uma única dobra que é perpendicular a  $l$  e que passa por  $P$ .

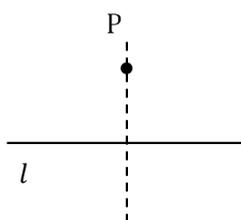


Figura 5 – Axioma 4

*Axioma 5* - Dados dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  e uma reta  $l_1$ , se a distância de  $P_1$  a  $P_2$  for superior ou igual à distância de  $P_2$  a  $l_1$  então, existe uma dobra que faz incidir  $P_1$  em  $l_1$  e que passa por  $P_2$ .

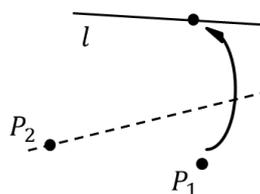


Figura 6 – Axioma 5

*Axioma 6* - Dados dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  e duas retas  $l_1$  e  $l_2$ , se as retas não forem paralelas e a respectiva distância não for superior à distância entre os pontos então, existe uma dobra que faz incidir  $P_1$  sobre  $l_1$  e  $P_2$  sobre  $l_2$ .

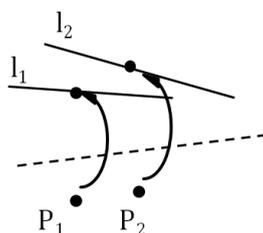


Figura 7 – Axioma 6

*Axioma 7* - Dados um ponto P e duas retas  $l_1$  e  $l_2$ , se as retas não forem paralelas então, existe uma dobra que faz incidir P1 em  $l_1$  e é perpendicular a  $l_2$ .

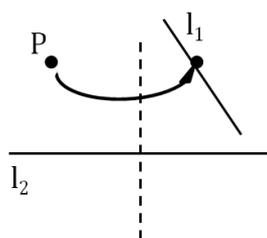


Figura 8 – Axioma 7

Diante das apresentações dos axiomas é possível constatar que a Matemática e Origami possuem relações nos mais diversos aspectos. Existem explicações desses axiomas através de análises mais rebuscadas e nelas se constatam a presença da matemática na geometria do Origami.

### Resultados e Discussões

A partir das informações retratadas nas seções anteriores, mostraremos alguns trabalhos pesquisados na plataforma do BDTD<sup>2</sup> (Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações) entre os anos de 2013 e 2018, que estudam o Origami no processo ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos, principalmente conceitos de geometria.

Tabela 2 – Coleta de Dados

TIPO/TÍTULO DO TRABALHO	OBJETIVOS	AUTOR
Dissertação/ Ensino e aprendizagem de poliedros regulares via a teoria de Van Hiele com origami.	De acordo com as atuais diretrizes pertinentes ao ensino de matemática (Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática e Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática),	Ferreira, Fabricio Eduardo (2013)

<sup>2</sup> A Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) integra e dissemina, em um só portal de busca, os textos completos das teses e dissertações defendidas nas instituições brasileiras de ensino e pesquisa. O acesso a essa produção científica é livre de quaisquer custos.

## Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional

25-27 de Julho de 2018, Maceió – AL, Brasil.

	este trabalho baseia-se na Teoria de Van Hiele, visando a aprendizagem de conceitos geométricos, em particular a aprendizagem de poliedros regulares, através da confecção de dobraduras (origami).	
Dissertação / A influência do origami no processo ensino-aprendizagem da geometria do 9º ano - ensino fundamental.	O objetivo principal desse trabalho é analisar o quanto a técnica do Origami influencia no processo ensino-aprendizagem da Geometria Euclidiana no Ensino Fundamental, em particular no 9º ano.	Silva, Marcondes Sabóia (2014)
Dissertação / O Uso de dobraduras como recurso para o ensino da geometria plana: histórias, teoremas e problemas.	[...] o objetivo deste trabalho é possibilitar uma fonte literária para o professor do ensino básico e aprofundar seu embasamento teórico para transmitir o conteúdo de Geometria Euclidiana Plana com o uso de materiais concretos em suas salas de aula.	Menezes, Daniel Brandão (2014)
Dissertação / THE STUDY OF CONIC CURVES BY ORIGAMI (O estudo de curvas cônicas através do Origami).	O presente trabalho pretende unir esses dois elementos, curvas cônicas e origami, com o intuito de desenvolver conceitos do primeiro a partir de construções do segundo.	Rodrigues, Bruna Mayara Batista (2015)
Dissertação / O uso do origami como recurso didático-metodológico para o ensino de geometria.	Este trabalho tem por objetivo propor atividades que abordem conceitos e noções de Geometria plana e espacial, usando como recurso pedagógico o Origami.	Dias, Magda Cristina de Oliveira (2015)
Dissertação / Construções geométricas por dobradura (ORIGAMI): Aplicações ao ensino básico	A presente dissertação tem o objetivo de mostrar a arte Origami sob um contexto matemático, apresentando um pequeno resumo dos aspectos história e o desenvolvimento do Origami ao longo do tempo e dando maior destaque às suas aplicações na matemática, com o emprego dos axiomas de Huzita e a proposta de ampliação deste conjunto de axiomas com a inclusão da circunferência no papel Origami.	Passaroni, Luiz Claudio de Sousa (2015)
Dissertação / Origami: o uso como instrumento alternativo no ensino da geometria.	Frente à realidade do ensino contemporâneo que demanda a necessidade de diversificar o uso de estratégias de ensino, pretendemos propor uma abordagem, por meio de material concreto e que pode tornar-se bastante significativa no ensino da matemática.	Freitas, Aline Claro de (2016)
Dissertação/ Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular.	O presente trabalho contém sugestões de práticas de ensino, utilizando o origami modular, que podem ser aplicadas nas aulas de geometria do Ensino Fundamental.	Tridapalli, Marília Pelinson (2017)

Como pode-se observar na Tabela 2, os trabalhos pesquisados inserem o termo “Origami” já no título e os objetivos evidenciam a contribuição que o Origami traz para a Matemática, principalmente na aprendizagem de conceitos de geometria. O Origami não é apenas uma atividade criativa e artística, ela nos permite aplicar propriedades matemáticas em suas construções. Para Rêgo et. al (2003, p.18) “o Origami pode representar para o processo de ensino-aprendizagem de Matemática um importante recurso metodológico, através do qual os alunos ampliarão os seus conhecimentos geométricos formais, adquiridos inicialmente de maneira informal por meio de observação do mundo, de objetos e formas que o cercam”.

À luz dessas considerações, fica nítido que quando se apresenta atividades de caráter significativo para os alunos, a aprendizagem tende a ser mais eficaz. O Origami é uma arte cheia de curiosidades e contribui positivamente nesse processo e valoriza a descoberta, visualização e representação geométrica.

### **Considerações Gerais**

A partir dos estudos apresentados, concluímos que o Origami além de ser uma arte milenar, traz muitas contribuições no que se diz respeito ao ensino da Matemática. Suas construções geométricas permitem que dentro de sala de aula os alunos trabalhem com materiais manipuláveis, o que torna a aprendizagem prazerosa. No mais, os Axiomas trazem conceitos matemáticos importantes no estudo da geometria como noções de ponto e reta, elementos fundamentais para a formalização de entes geométricos. Isso mostra o quão é relevante inserir e trabalhar o Origami para o desenvolvimento do cognitivo.

Portanto, acredita-se que a prática do Origami no ensino da matemática seja de grande importância pelo fato de ser uma atividade motivadora, podendo tornar as aulas dinâmicas e criar uma interação dos alunos com os conteúdos a serem trabalhados. Possibilitando ainda que os alunos possam desenvolver suas habilidades e ter a percepção de que a matemática não é tão complexa como acreditam.

### **Referências**

BDTD. **Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia. Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações.** Acesso em 22.05.2018.

MONTEIRO, L. C. N. **Origami: História de uma Geometria Axiomática. Mestrado em Matemática para o ensino.** Universidade de Lisboa, 2008.

PRIETO; Jose, I. Royo, **Matemáticas y Papiroflexia,** (2002), Revista Sigma, 21, pp. 175–192.

RAFAEL, I. **Origami.** Escola Secundária Braamcamp Freire. 2011, p. 16-22.

RÊGO, R. G.; et al.. **A Geometria do Origami: atividades de ensino através de dobraduras.** 01 ed. João Pessoa: Editora Universitária/UFPB, 2003.

## Uso de fractais no ensino básico como incentivo ao estudo da matemática

*Damare da S. Cavalcante*

*Universidade Federal de Alagoas - Campus Arapiraca  
damares.cavalcante@arapiraca.ufal.br*

*Jean Santana de Souza*

*Universidade Federal de Alagoas - Campus Arapiraca  
jean.cc.ufal@gmail.com*

*Roque Barbosa da Costa Junior*

*Universidade Federal de Alagoas - Campus Arapiraca  
roque.junior@arapiraca.ufal.br*

*Elthon Oliveira*

*Universidade Federal de Alagoas - Campus Arapiraca  
elthon@arapiraca.ufal.br*

**Resumo:** A matemática muitas vezes é vista como complexa ou mesmo desinteressante pela população em geral. Muitos alunos se sentem desmotivados a estudar matemática porque muitas vezes não são capazes de visualizar a aplicação dos conceitos vistos. Fractais apresentam-se como uma possibilidade de promover o interesse do aluno do ensino básico pela matemática. A partir de imagens cheias de cores e formas, os alunos podem analisar suas geometrias e fórmulas de composição. Para isso, podem ser utilizados softwares para geração de imagens fractais. Neste trabalho, é discutida a proposta de uso de fractais e sua geometria no ensino básico, tanto de forma lúdica como de forma a desenvolver a capacidade lógica e intelectual dos alunos.

**Palavras-chave:** Ensino. Ensino Básico. Fractais. Matemática.

## Introdução

A matemática é muitas vezes vista como complexa ou desinteressante pelas pessoas em geral. Segundo Gonzatto (2012), um dos fatores que provocam aversão à matemática é cultural. Isto também ocorre no ensino básico. Estudantes se sentem desmotivados porque muitas vezes não são capazes de realizar a aplicação dos conceitos aprendidos, seja por falta de capacidade ou desinteresse.

“As ciências exatas em geral apresentam grandes índices de reprovação ... Pode-se dizer que o ensino de Matemática em sua grande maioria sempre foi voltado para aprendizagem dos conteúdos de maneira formal, restrito a resolução de problemas e aplicação de fórmulas, gerando certo distanciamento dessa matéria perante a realidade vivenciada pelos educandos.” (VARGAS, A. F.; SILVA, B. B.; LIRA, C. G.; LOPES, M. M., 2014).

O termo fractal foi usado pela primeira vez em 1975 por Benoit Mandelbrot (1924-2010), matemático francês nascido na polônia, para denominar uma classe especial de curvas, definida de maneira recursiva. A partir dos fractais, é desenvolvida a geometria fractal que pode ser encontrada em muitos elementos da natureza, como no brócolis romanesco, repolho ou mesmo no leito de rios presentes em desertos.

“Segundo Capra (2004 p.118), Benoit Mandelbrot ... ilustra a propriedade da ‘auto-similaridade’, arrancando um pedaço de uma couve-flor. Ele repete a demonstração dividindo ainda mais esse pedaço. Desse modo, cada parte se parece com a hortaliça inteira. A forma do todo é semelhante a si mesma em todos os níveis de escala.” (MORAES, 2007, p. 10).

Fractais não estão presentes apenas na natureza. Eles podem ser gerados por programas de computador, chamados de fractais matemáticos, e podem ser definidos como figuras geométricas produzidas por equações matemáticas. A geometria fractal é uma importante área de estudo. Suas aplicações podem motivar e auxiliar o ensino da matemática. "O conhecimento de fractais pode ser trabalhado em qualquer nível de ensino e traz consigo diversão, criatividade, raciocínio lógico, motivação e prazeres pelas belas formas que podem apresentar." (NIEDERMEYER, C.I; KOEFENDER, C.; ROOS, L. T. W. 2009).

### Fractais no ensino

O uso de fractais é uma possibilidade atraente de trazer o aluno do ensino básico mais próximo da matemática. Pois, o que é aprendido em sala pode resultar em imagens cheias de cores e formas.

Fractais podem ser inseridos nas escolas por meio de exposições para despertar o interesse dos alunos pelas imagens cheias de cores e formas intrigantes. Na sala de aula, programas de computador como o Mandelbulber podem ser usados para gerar imagens fractais. Mandelbulber é um software livre e de código aberto, que pode ser utilizado nas escolas e traz como vantagem a possibilidade de criação de fractais em 3D, o que torna o programa ainda mais atraente.

Desta forma, o aluno pode ter o contato direto com ferramentas para gerar os seus próprios fractais com o auxílio do professor, ou ser provocado a descobrir as semelhanças entre o todo e as partes dessas imagens, por meio de discussões em sala de aula. Além disso, a utilização de fractais não se restringe ao uso de tecnologias. Apesar das ferramentas permitirem uma melhor manipulação e estudo, os fractais também podem ser desenvolvidos através de materiais manipuláveis, tal como o caleidoscópio, os quais podem ser trabalhados em escolas públicas que não possuem laboratórios de informática.

### Conclusões

Os fractais e sua geometria podem ser desenvolvidos em vários aspectos e níveis no ensino básico. Seja de forma lúdica ou para desenvolver alguma capacidade lógica e intelectual dos alunos. As possibilidades são amplas. Para tal, basta utilizar ferramentas de software já desenvolvidas para o propósito, ou até mesmo utilizar materiais simples para a construção de caleidoscópios. Desta forma, o ensino da matemática poderá se tornar mais prazeroso para o professor e atraente para os alunos.

### Referências

GAUCHAZA. Por que 89% dos estudantes chegam ao final do ensino médio sem aprender o esperado em matemática? Disponível em: <https://goo.gl/9UJHje>. Acesso em: 19 maio 2018.

MORAES, G. C. **A Geometria dos Fractais Aplicada na 6ª Série do Ensino Fundamental**. 2007. 90f. Trabalho de Conclusão de Curso (Programa de Pós-Graduação em Desenvolvimento Regional) USCS, Santa Cruz do Sul, 2007.

VARGAS, A. F.; SILVA, B. B.; LIRA, C. G.; LOPES, M. M. Aprendendo matemática através de fractais: Uma experiência no ensino médio. In: ENCONTRO REGIONAL DE ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DA REGIÃO SUL, 10., 2014. Bagé. **Anais...** Rio Grande do Sul: UNIPAMPA, 2014.

NIEDERMEYER, C.I; KOEFENDER, C.; ROOS, L. T. W. Geometria fractal e ensino da matemática. In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2009. Ijuí. **Anais...** Rio Grande do Sul: UNIJUÍ, 2009.



## A importância das disciplinas de cálculo para o curso de engenharia elétrica

*LEITE, Jennifer Nogueira*

*IFBA, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia*

[jennifernogueira97@gmail.com](mailto:jennifernogueira97@gmail.com)

*ANDRADE, Júlio César Silva*

*IFBA, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia*

[julioandrade.159@gmail.com](mailto:julioandrade.159@gmail.com)

*SANTOS, Polyane Alves*

*IFBA, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia*

[polyttamat@yahoo.com.br](mailto:polyttamat@yahoo.com.br)

**Resumo:** No ensino superior, os cursos de engenharia elétrica apresentam disciplinas de cálculo diferencial e integral no início do curso, todavia, o corpo discente ao adentrar na faculdade estuda as matérias apresentadas no fluxograma do curso, como as disciplinas de cálculo, sem anteriormente possuir o conhecimento da necessidade daqueles conteúdos ensinados para a profissão que escolheram. Os alunos, na maioria das vezes, estudam os assuntos apresentados apenas para dar continuidade no curso até iniciar as matérias específicas, que acreditam serem as importantes, o que faz com que aumente o desinteresse nas matérias iniciais e consequentemente aumente o nível de reprovações e desistências no curso de engenharia elétrica apenas nos 3 primeiros semestres do curso. Partindo disso, o artigo consiste em apresentar através de pesquisas bibliográficas a importância de alguns dos tópicos presentes no conteúdo programático das disciplinas de cálculo para a profissão do futuro engenheiro eletricitista, de modo que os alunos consigam assimilar o que está sendo ensinado em sala de aula com especialidades da profissão que escolheu, para assim aumentar o interesse nas disciplinas, reduzir o índice de reprovação, motivando os alunos para tornarem-se engenheiros eletricitistas.

**Palavras-chave:** Ensino. Engenharia elétrica. Disciplinas de cálculo diferencial e integral.

### 1. INTRODUÇÃO

O ensino das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral nas faculdades e universidades brasileiras é objeto de diversas discussões no âmbito educacional devido ao elevado índice de dificuldades apresentadas pelos alunos e em função do alto nível de evasão nas instituições de ensino nos primeiros semestres dos cursos que contém as disciplinas de cálculo na grade curricular. (BARRETO 1995 apud REIS 2001, p. 4).

De acordo Rezende (2003), esses desafios no ensino superior de matemática são denominados como "O fracasso do ensino de Cálculo". Com base nisso, BARUFI (1999)

relata que no ano de 1995, na Universidade de São Paulo (USP), a taxa de reprovação por nota, falta ou desistência na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral foi de 43,8%, no Instituto de Geociências da USP que a disciplina de Cálculo é mais coerente com a realidade local, a taxa de aprovação foi de apenas 35%. REZENDE (2003), na Universidade Federal Fluminense (UFF), no período de 1996 a 2000, confirmou que de 45% a 95% dos alunos foram reprovados. Pode-se concluir que nesse período não se aprovou mais do que 45% em uma turma de Cálculo, no curso de Matemática.

Ao analisar e observar o elevado índice de reprovação na disciplina de cálculo e a preocupação constante com o mesmo, este artigo tem o objetivo principal de demonstrar a importância das disciplinas de cálculo para o curso de engenharia elétrica utilizando alguns conteúdos específicos de cálculo e assimilando com conteúdos específicos da área de engenharia elétrica, para que deste modo, o aluno entenda o motivo pelo qual está estudando estes assuntos de cálculo, surgindo conseqüentemente interesse e redução do índice de reprovação e desistências da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

## 2. METODOLOGIA

Na primeira etapa para a construção do trabalho foram realizadas pesquisas bibliográficas sobre a dificuldade do corpo discente nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I, II e III de modo geral. Posteriormente foram pesquisados os principais assuntos dessas três matérias e que é fundamental o conhecimento para tornar-se um engenheiro eletricista qualificado. Para entender sobre o curso de engenharia elétrica, foi analisado o Projeto Pedagógico do curso superior de Engenharia Elétrica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia (IFBA) *campus* Vitória da Conquista. O método utilizado é assimilação dos conteúdos com campos específicos da área de engenharia elétrica, de modo que ao unir o que foi aprendido em na teoria seja analisado e compreendida a importância destes na prática, na atuação da profissão. Assim, aos alunos estudarem compreendendo a aplicabilidade, reduza o índice de reprovação e de desistências das disciplinas citadas anteriormente.

Este artigo é uma pesquisa exploratória, bibliográfica e descritiva por utilizar como base para a elaboração do trabalho artigos e livros dos seguintes autores: BARUFI (1999), REZENDE (2003), BARRETO (1995), CURY (2002), entre outros autores citados no decorrer do artigo. Os dados quantitativos foram coletados de pesquisas destes autores. Entretanto, o trabalho não se limitou a contabilização destes indicadores e buscou através de

pesquisas bibliográficas uma leitura qualitativa dos dados para ajudar a desenvolver ideias ou hipóteses de modo a melhorar os resultados das pesquisas quantitativas.

### 3. ENGENHARIA ELÉTRICA

O termo “engenharia” surgiu da palavra engenho, segundo o dicionário Aurélio, significa “inventar, fabricar engenhosamente”. Na antiguidade, muitas pessoas executavam atribuições de engenheiros sem títulos e sem muita noção de gravidade e de cálculos, baseavam-se na intuição. Ou seja, é necessário que o profissional esteja aberto às inovações e possa reformular e atualizar continuamente conhecimentos, habilidades e atitudes. O engenheiro eletricitista lida com a geração, a transmissão e a distribuição da energia elétrica, trabalha no desenvolvimento de componentes eletroeletrônicos, na operação e na manutenção de equipamentos em hospitais e clínicas e em projetos de instalações elétricas, entre outras atividades.

Considerando-se as Diretrizes Curriculares dos Cursos de Engenharia Elétrica, algumas das competências e habilidades a serem constituídas pelo formado ao longo do curso de Engenharia Elétrica de acordo com o Art. 5º, Capítulo II, da Resolução nº 1.010, de 22 de agosto de 2005, do Conselho Federal de Engenharia e Agronomia (CONFEA) é gestão, supervisão, coordenação e orientação técnica; Coleta de dados, estudo, planejamento, projeto e especificação; Estudo de viabilidade técnico-econômica e ambiental; Assistência, assessoria e consultoria; Direção de obra e serviço técnico; Vistoria, perícia, avaliação, monitoramento, laudo, parecer técnico, auditoria e arbitragem; Treinamento, ensino, pesquisa, desenvolvimento, análise, experimentação, ensaio divulgação técnica e extensão; Elaboração de orçamento; Execução de obra e serviço técnico; Fiscalização de obra e serviço técnico; Produção técnica e especializada; Condução de equipe de instalação, montagem, operação, reparo ou manutenção; Execução de instalação, montagem, operação, reparo ou manutenção, entre outras habilidades e competências.

Segundo o Projeto Pedagógico Curricular (PPC) do curso de engenharia elétrica do IFBA, o engenheiro eletricitista deverá ter capacidade para resolver problemas aplicando os modelos adequados às situações reais, baseado em um sólido conhecimento físico e matemático. Para isso, é fundamental o conhecimento e compreensão das disciplinas de cálculo fornecidas no início do curso.

#### **4. O ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA ENGENHARIA ELÉTRICA**

A disciplina de cálculo representa a grande base para os cursos de engenharia, juntamente com outras disciplinas. De acordo o CONFEA, é indispensável que as faculdades e universidades do curso de engenharia elétrica possuam as matérias de Cálculo. Na maioria das instituições de ensino a disciplina de Cálculo é dividida em 3 partes, sendo um semestre para cada e uma pré-requisito para a seguinte, sendo elas Cálculo Diferencial e Integral I, II e III.

De acordo BARUFI (1999) e REZENDE (2003) citados anteriormente, o índice de reprovação e desistência dos alunos em Cálculo é elevado, o que preocupa o âmbito acadêmico. É sabido que existem diversos motivos para reprovação na área de exatas no superior, principalmente uma má formação na base, como no ensino médio. Isto pode ser reafirmado por BARRETO (1995, p.4):

As causas são muitas e já bem conhecidas, principalmente a má formação adquirida durante o 1º e 2º graus, de onde recebemos um grande contingente de alunos passivos, dependentes, sem domínio de conceitos básicos, com pouca capacidade crítica, sem hábitos de estudar e conseqüentemente, bastante inseguros.

Todavia, na visão discente, as maiores deficiências encontram-se no ensino, sobretudo na metodologia do professor (MENESTRINA & GOUDARD, 2003, BARACAT & WITKOWSKI, 2010). Partindo disso, surge a proposta de melhoria das práticas pedagógicas, segundo CURY (2002, p.2):

Em eventos da área de matemática ou educação matemática têm sido apresentados vários trabalhos enfocando o ensino para as engenharias e muitas vezes notamos que alguns autores não têm conhecimento dos trabalhos dos colegas, precisando “reinventar a roda” e recriar atividades ou animações gráficas para o ensino de alguns tópicos.

Sendo assim, o presente artigo visa demonstrar justamente isto, um método diferenciado para melhor aprendizado do aluno, que seria a assimilação do conteúdo ensinado com a futura formação dos estudantes.

#### **5. RESULTADOS E DISCUSSÕES**

As disciplinas de Cálculo são essenciais para a formação de um engenheiro electricista.

Segundo LOPES (apud MACHADO 2002, p.14), o Cálculo Diferencial e Integral é um conhecimento que permite,

(...) nas mais variadas áreas do conhecimento, como Engenharia, Química, Física, Biologia, Economia, Computação, Ciências Sólidas, Ciências da Terra etc, a análise sistemática de modelos que permitem prever, calcular, otimizar, medir, analisar o desempenho e performance de experiências, estimar, proceder a análises estatísticas e ainda desenvolver padrões de eficiência que beneficiam o desenvolvimento social, econômico e humanístico dos diversos países do mundo.

Partindo disso, alguns assuntos são “chaves” para os demais, ou seja, são fundamentais para prosseguir. Como por exemplo, derivada e limite são conteúdos de Cálculo I e integral conteúdo de Cálculo II e III. Derivada é utilizada principalmente para encontrar os valores instantâneos de grandezas elétricas.

O conceito de limite consiste em expor o comportamento de uma função nos momentos de aproximação de valores determinados. O limite de uma função é de extrema importância no cálculo diferencial e em outros ramos da análise matemática, ele define a derivada e possibilita a continuidade de funções. Um exemplo da utilização do limite na engenharia elétrica é na área de eletrônica em sistemas de controle. O controle automático exerce um desempenho essencial no avanço da engenharia em diversas áreas. A sua aplicação é vista na engenharia espacial, sistemas robóticos, desenvolvimento de automóveis e em operações industriais como controle de temperatura, pressão, umidade, vazão, etc.

Um exemplo da aplicabilidade do assunto de derivadas para a formação do engenheiro eletricitista é em capacitores e indutores. Capacitores são elementos capazes de armazenar energia sob a forma de campo elétrico. Os capacitores são comumente usados em fontes de energia, no qual suavizam a saída de uma onda retificada completa ou meia onda, são utilizados para separar circuitos de corrente alternada (CA) de circuitos de corrente contínua (CC). Além disso, são usados na correção de fator de potência.

Indutores são elementos armazenadores de energia na forma de campo magnético. Os indutores estão relacionados aos eletromagnetos em estrutura. Por possuir a habilidade de alterar sinais de CA, são utilizados em circuitos analógicos e processamento de sinais, abrangendo recepções e transmissões de rádio. Dois ou mais indutores acoplados compõem um transformador, que é um componente fundamental de qualquer rede elétrica nacional.

A tensão em um indutor é calculada pela indutância do componente multiplicada pela derivada da corrente no tempo. Ou seja, a corrente em um tempo instantâneo multiplicada pela indutância nos fornece a tensão naquele ponto do circuito. Do mesmo modo, a tensão em um capacitor pode ser calculada pela integral da corrente dividida pela capacitância do

componente. Reta tangente, subtema de derivada, é utilizado na construção de gráficos. Ao construir um gráfico, a derivada fornece o ponto de inclinação da reta tangente ao gráfico, ao igualá-la a zero, encontra-se os pontos de máximo ou de mínimo ou pontos críticos.

A integral é representada como o somatório das áreas de figuras conhecidas sob os gráficos de funções. A aplicação das integrais na eletrônica está presente também nos amplificadores operacionais. Um amplificador operacional tem duas entradas e uma saída, basicamente ele amplifica a diferença entre as duas entradas, no qual a primeira é inversora e segunda não, e mostra o resultado em sua saída. Tanto derivada quanto integral possui ramificações nos conteúdos, ou seja, existem muito mais aplicações possíveis na área de engenharia elétrica, uma delas, é o assunto de integral por frações parciais.

Integral por frações parciais é um tópico do assunto de integral que é dividido em quatro tipos de casos. Inicialmente, é necessário realizar uma decomposição que é feita a partir de fatoração do polinômio que aparece no denominador da equação, é necessário associar a cada fator linear ou quadrático irredutível uma ou mais frações parciais. Basicamente, o método frações parciais consiste em reescrever a fração integrando numa soma de outras frações mais simples, facilitando e tornando a integração mais simples.

Existem ferramentas matemáticas que fazem uso das frações parciais, como as transformadas. Transformada é uma ferramenta que utiliza durante o curso de engenharia elétrica na área de controle analógico e digital. Existem vários tipos de transformadas, por exemplo, transformada de Laplace é utilizada para levar as funções do domínio do tempo (t) para o domínio da frequência (s).

## 6. CONCLUSÕES

Levando em consideração os problemas encontrados frequentemente em sala de aula nas disciplinas de Cálculo I, II e III, como o alto índice de reprovação nas mesmas e um elevado índice de desistência, após leitura criteriosa de artigos e livros, conclui-se que uma possibilidade de despertar o interesse e a afinidade nas disciplinas de cálculo é aproximando-as para o cotidiano do aluno, ou seja, relacionando os conteúdos com áreas do curso e profissão que os discentes optaram para seguir carreira. Assim, este artigo foi baseado na pesquisa bibliográfica e buscou realizar um levantamento de alguns conteúdos de cálculo assimilados com a engenharia elétrica, como os assuntos básicos, que são limite, derivada e integral.

Cabe ressaltar que as análises aqui apresentadas são apenas o primeiro passo de uma pesquisa com uma maior dimensão, o objetivo é tentar inserir essa ideia em turmas de cálculo e após algumas turmas, realizar uma análise quantitativa da porcentagem de reprovação, aprovação e desistência das disciplinas, para assim mapear e verificar se a proposta sugerida soluciona ou reduz o problema relatado no trabalho.

Então, o artigo apresentado visa demonstrar a importância das disciplinas de cálculo no ensino de engenharia elétrica e a necessidade de compreender os conteúdos repassados nas disciplinas citadas, demonstrando que um método que pode ser utilizado para melhor aprendizagem é a assimilação de conteúdos de cálculo e conteúdos específicos da área de engenharia elétrica. E para que assim, conseqüentemente, reduza o índice de reprovações e desistências e aumente o interesse do corpo discente nessas disciplinas por desde o começo do curso entender o motivo de estar aprendendo cada conteúdo e a sua importância para a sua formação como engenheiro eletricitista.

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MURTA, J. L. B.; MÁXIMO, G. C. Cálculo diferencial e integral nos cursos de engenharia da ufop: estratégias e desafios no ensino aprendizagem. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 2004, Brasília.

REZENDE, W. M. **O ensino de cálculo:** dificuldades de natureza epistemológica. Disponível em: <<http://www.nilsonjosemachado.net/lca19.pdf>>. Acesso em: 04 jun. 2018.

UNISUL. **Pesquisa científica:** conceito e tipos. Disponível em: <<http://www.joinville.udesc.br/portal/professores/cristala/materiais/Unidade3aPesquisaCientifica.pdf>>. Acesso em: 04 jun. 2018.

WROBEL, J. S.; ZEFERINO, M. V. C.; CARNEIRO, T. C. J. Um mapa do ensino de cálculo nos últimos 10 anos do Cobenge. In: XLI CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 2013, Gramado.

## **Uma proposta de implementação da aprendizagem baseada em problemas (PBL) nas ciências exatas no curso de engenharia civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia (IFBA) campus de Vitória da Conquista sob o ponto de vista dos estudantes.**

*Silva, Lucas Gomes Sousa*

*Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia da Bahia  
lucassousaengenharia@gmail.com*

*Neto, Domingos Teixeira da Silva  
Universidade de São Paulo  
domingosneto@usp.br*

*Santos, Polyane Alves  
Universidade Estadual de Campinas  
polyttamat@yahoo.com.br*

*Iano, Yuzo  
Universidade Estadual de Campinas  
yuzo@decom.fee.unicamp.br*

**Resumo:** A formação em engenharia precisa contemplar um profissional que lide com problemas reais e a educação nesse seguimento propõe criar soluções que adequem a realidade dos alunos às demandas sociais e tecnológicas. Uma proposta muito usada, tem sido a implementação do PBL (Problem based learn), que fundamenta-se sob a ótica de ter o discente no centro do aprendizado, desenvolvendo resoluções de questões problemas por meio de trabalhos em grupos sob orientação de um professor tutor. O presente trabalho teve como objetivo, verificar a viabilidade da implementação dessa tendência da educação matemática como ferramenta para auxiliar os estudos de cálculos por parte dos discentes. Caracteriza-se num estudo exploratório de delineamento bibliográfico e estudo de campo. Foi realizado um questionário com os alunos do segundo semestre do curso de engenharia civil do Instituto Federal da Bahia, com o intuito de entender a realidade do curso e sugerir a implementação do PBL. Os resultados foram demonstrados através de gráficos. A interpretação dos resultados, demonstrou que o PBL pode ser implementado no curso, uma vez que, os alunos anseiam por atividades acadêmicas relacionadas com a realidade e com o exercício da profissão do engenheiro civil, interdisciplinaridade e mudanças no método de avaliação.

**Palavras-chave:** Ensino. PBL. Engenharia civil.

### **Introdução**

Muito se discute sobre que tipo de profissional de engenharia que precisa ser formado, uma vez que, as constantes mudanças tecnológicas, o avanço da ciência e a crescente preocupação ambiental, tornaram-se assuntos importantes da sociedade, e os engenheiros enquanto promotores do desenvolvimento precisam estar aptos a trabalharem com desafios que demandem a resolução de problemas dentro de um espectro tecnológico e sustentável.

Apenas uma adequação no currículo para atender as necessidades sociais, não garante a formação de bons profissionais, visto que, problemas como evasão nos cursos de engenharias e reprovações em disciplinas também podem inviabilizar o estímulo e a continuidade nos estudos, implicando assim, uma carência de profissionais que possam trabalhar com excelência.



Neste contexto, emerge com força os estudos da Educação em Engenharia, para que diminuam problemas advindos da falta de motivação dos estudantes bem como a inserção dos mesmos em situações reais do engenheiro.

Balsan (1999), acreditava que a transmissão de conhecimento não deveria ser unilateral, deveria haver uma troca de experiências, segundo ele:

Por que limitar-se a transmitir conhecimentos se os estudantes dispõem para isto, além da imprensa escrita, inventada há mais de 500 anos, outros meios de acesso às informações? Por que não privilegiar discussões em torno de temáticas levantadas junto aos alunos? Por que não prestigiar a aquisição de mentes criativas e inquiridoras, através de debates, de resoluções de problemas extraídos da própria realidade sociocultural. (BALSAN, 1999, p. 178).

Venturelli (1997), discutindo o processo educacional no mundo contemporâneo, resgata a necessidade de romper com a postura de transmissão de informações, na qual os alunos assumem o papel de indivíduos passivos, preocupados apenas em recuperar tais informações quando solicitados. Apropriando-se de conceitos desenvolvidos por Paulo Freire, ressalta a necessidade de conceber a educação como prática de liberdade, em oposição a uma educação como prática de dominação.

Desta forma, a aprendizagem baseada em problemas é, essencialmente, um método de instrução caracterizado pelo uso de problemas da vida real para estimular o desenvolvimento crítico e habilidades de solução de problemas e a aprendizagem de conceitos fundamentais da área de conhecimento em questão. Esta abordagem originou-se na escola de medicina da Universidade McMaster (Canadá) no final dos anos de 1960, inspirado no método de estudo de casos da escola de direito da universidade de Harvard (EUA) na década de 1920 (SCHMIDT, 1993) e no modelo desenvolvido na Universidade Case Western Reserve (EUA) para o ensino de medicina nos anos de 1950 (SAVERY & DUFFY; BOUD & FELETTI, 1999)

Nesse sentido, o PBL é desenvolvido nas salas com situações problemas, adequando os conteúdos de modo interdisciplinar e requerendo do aluno capacidade de investigação e pesquisa. Sua grande vantagem em relação às metodologias mais tradicionais, é que ele emprega o ensino e aprendizagem de um conteúdo, de modo ao enfrentamento de problemas que poderão surgir no decorrer do exercício da profissão.

No ensino da engenharia, Hadgraft & Holecek (1995) relatam que a PBL seja uma alternativa válida aos métodos expositivos, pois contemplativa os seguintes objetivos educacionais: aprendizagem ativa, no sentido do fomento a perguntas e buscas de respostas; aprendizagem integrada em que a interdisciplinaridade de conhecimentos será necessária para resolução do problema proposto; aprendizagem cumulativa, mediante a colocação de problemas gradualmente mais complexos até atingir aqueles geralmente enfrentados por profissionais iniciantes e aprendizagem compreensiva, mediante a alocação de tempo para reflexão, feedback frequente e oportunidade para praticar o que foi aprendido.

No curso de Engenharia Civil, do Instituto de Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Bahia campus de Vitória da Conquista, em seu projeto pedagógico apresenta diretrizes para inserir os futuros engenheiros no mercado de trabalho. Porém, por meio de uma investigação qualitativa, observou-se que não só os alunos do segundo semestre, mas também, os demais discentes do curso de Engenharia Civil, em sua maioria, reclamam do distanciamento da teoria e da prática, e de como isso pode influenciar no desempenho deles.

Diante desta perspectiva, e por meio do questionário com as respostas dos alunos do curso de Engenharia Civil do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia da Bahia do campus de Vitória da Conquista, este artigo vem propor o uso do PBL no ensino e aprendizagem dos componentes curriculares do referido curso, afim de que os alunos alcancem patamares cada vez mais elevados no que tange a aprendizagem das ciências exatas.

## Metodologia

O material consiste num estudo exploratório de delineamento bibliográfico e de estudo de campo utilizando amostragem não probabilística por conveniência.

O cenário da pesquisa é o município de Vitória da Conquista, Bahia. Sua população, conforme o IBGE, estimou-se em 2016 é de 350.284 habitantes, o que a faz dela a terceira maior cidade do estado. Segundo a Atlas do desenvolvimento humano do Brasil, O Índice de Desenvolvimento Humano (IDHM) é 0,678, em 2010, o que situa esse município na faixa de Desenvolvimento Humano Médio (IDHM entre 0,600 e 0,699). A dimensão que mais contribui para o IDHM do município é Longevidade, com índice de 0,788, seguida de Renda, com índice de 0,681, e de Educação, com índice de 0,581 (IDHM, 2016).

A população objeto desse estudo foi composta por alunos do segundo semestre do curso de Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia (IFBA) no campus Vitória da Conquista. Responderam os questionários os indivíduos que estivessem regularmente matriculados no curso e na instituição, estivessem em plena consciência e tivesse entendidos os objetivos e termos da pesquisa.

As coletas de dados ocorreram no mês de janeiro de 2018. Uma reunião foi convocada para que fosse elencado os termos das pesquisas e ocorresse a aplicação dos questionários. É interessante elencar que nenhum dos entrevistados receberam algum incentivo financeiro ou material para participar da pesquisa, além de serem observados e resguardados riscos e benefícios. Foi assegurado a todos estes total anonimato.

Após a coleta de dados, foi realizado a tabulação destes no programa Excel para posteriores discussões. A análise dos resultados foi feita de forma descritiva, mediante elaboração de gráficos no Excel, versão 2016.

## Resultado e Discussões

Os resultados principais neste artigo, são consequência do emprego de um questionário aos estudantes do curso de Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia. O objetivo fundamental da coleta dos dados, é diagnosticar o ensino e aprendizagem no curso, e assim propor a alternativa de implementação do PBL.

Analisando, o plano de curso de Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Bahia, foi observado que se prioriza uma formação multidisciplinar, que fomenta a análise crítica, as relações interpessoais e a resolução de problemas reais com a associação da teoria e prática. Por esta razão, uma proposta de implementação do PBL poderia alcançar os objetivos relacionados a formação do engenheiro civil e sua relação com a Matemática.

A abordagem principal do estudo, está em investigar a possibilidade de implantação do método PBL no curso de Engenharia Civil, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia por meio das respostas dos alunos do segundo semestre, e deste modo, foi perguntado aos alunos a respeito se a aula tradicional deveria ser mudada, como pode ser observado na Figura 1. Ao analisarmos as respostas, percebe-se 26.3% dos alunos que responderam o questionário, consideram que deve ter mudança no ensino tradicional, enquanto 21.1% acreditam que não ter necessidade de mudança, e 52.6% acreditam que talvez. Apesar da aula tradicional está estabelecida como predominante, deve -se considerar a possibilidade de mudança em função das respostas dos alunos.

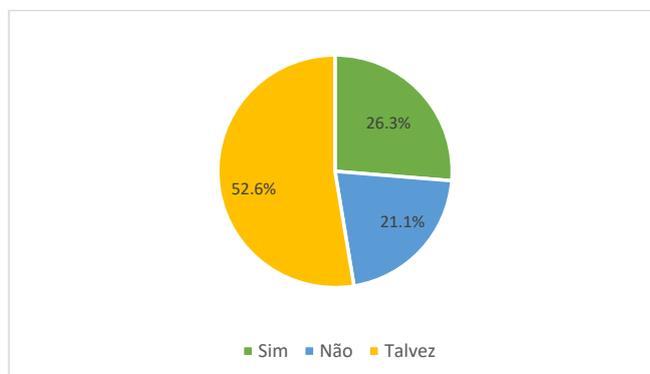


Figura 1. Gráfico sobre o ensino tradicional devia ser mudado.

Dando continuidade a análise, foi perguntado aos alunos se eles acreditam que se os conteúdos da sala de aula fossem desenvolvidos de modo interdisciplinar (ensinados em um ou mais componentes curriculares) poderia aprimorar a aprendizagem. De acordo com os resultados obtidos demonstrados na Figura 2, nota-se que 63.1% creem que os conteúdos ensinados de maneira que associa duas ou mais disciplinas colabora com a aprendizagem, enquanto 21.1% não enxergam na interdisciplinaridade como facilitadora da aprendizagem e outros 15.8% acreditam que talvez a interdisciplinaridade possa ser contribuidora na aprendizagem. Levando em consideração, que muitos dos alunos entrevistados, querem que as aulas fossem trabalhadas de modo que interligasse os conteúdos de distintos componentes curriculares, a adoção do PBL seria uma boa alternativa, uma vez que esta metodologia de ensino relaciona conhecimento de diferentes áreas.

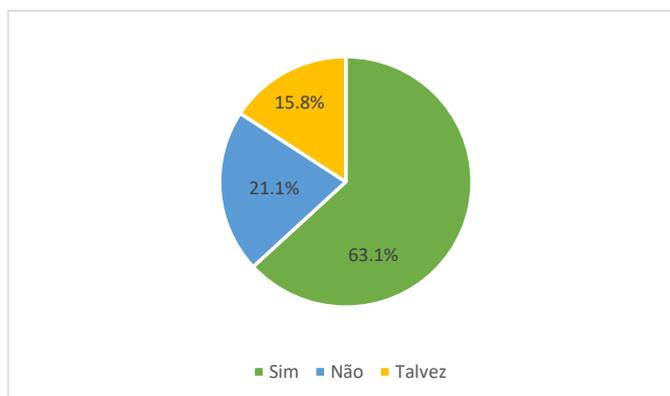


Figura 2. Gráfico sobre a interdisciplinaridade como facilitadora da aprendizagem.

Como forma de extrair mais informações, para que se tenha noção do cenário educacional que está inserido o curso de Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Bahia, foram questionados aos alunos, se consideram importante que os problemas resolvidos nas atividades acadêmicas, abranjam situações que o engenheiro civil futuramente possa lidar. O gráfico da Figura 3, expressa o resultado do questionamento.



Figura 3. Gráfico sobre a importância de se trabalhar com problemas reais no ensino.

A análise do gráfico, nos dá uma leitura que, 94,3% dos alunos entrevistados, anseiam por aulas que contemplem questões relacionados com problemas que enfrentarão na futura profissão. Apenas 5,7% dos estudantes acreditam que não há relevância no trabalho com questões que cercam situações futuras do exercício profissional. Considerando uma porcentagem alta de alunos que anseiam em desenvolver atividades acadêmicas, que podem ser advindas de situações e problemas reais, ratifica a necessidade de implementação do PBL.

Finalizando a coleta de dados á cerca do ensino e aprendizagem, foram perguntados aos estudantes, se eles desejariam a troca de avaliações tradicionais por uma metodologia de ensino com trabalho em grupo (com funções definidas para cada componente curricular) e um professor tutor para auxiliar, seria um mecanismo interessante de ensino e aprendizagem. Na Figura 4, nota-se que 63,1% dos alunos ouvidos, desejam que as avaliações tradicionais mudem para trabalhos em grupos sob orientação de um professor tutor, enquanto 21,1% não querem a mudança, e outros 15,3% talvez poderiam gostar da mudança de método de avaliação.

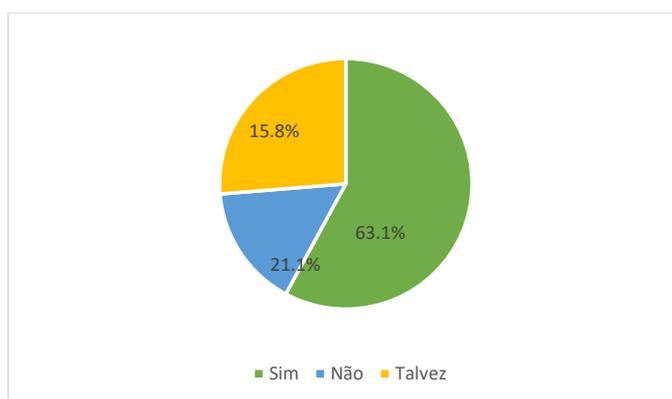


Figura 4. Gráfico sobre a possibilidade de mudança do método de avaliação tradicional por trabalhos em grupo.

Através das respostas dos estudantes, é notado que se a metodologia PBL fosse inserida, oportunizaria o trabalho em grupo, afinal, o método aqui discutido, propõe dividir a turma em equipes para investigar ou solucionar um problema.

### Considerações Finais

Por meio da análise das informações coletadas através dos alunos do segundo semestre de Engenharia Civil, e do plano de curso do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, é necessário tecer algumas considerações e sugerir algumas mudanças de acordo com o método PBL.

Reconhece-se que existe uma ampla discussão sobre a formação de um engenheiro crítico, que lide com problemas reais e saiba trabalhar em grupo, porém as práticas educativas ainda são mantidas dentro de um modelo tradicional, que respalda uma formação sem conexões com a realidade vivida.

A análise do questionário com as respostas dos estudantes, demonstrou que o PBL poderia ser implementado, motivando os alunos no trabalho com questões oriundas da realidade, dividindo o protagonismo do professor nas aulas, permitindo a interação de componentes curriculares diferentes para o aprofundamento sobre determinado assunto, e a inserção de um trabalho em equipe que colaborasse para a formação crítica e responsável de futuros engenheiros.

### Referencias

BALZAN N. C. Formação de professores para o ensino superior: desafios e experiências. In: BICUDO MA, ORGANIZADOR. **Formação do educador e avaliação educacional**. São Paulo: Editora UNESP; 1999. p. 173-88.

BOULD, D.; FELETTI, G. **The challenge of problem-based learning**. Londres: Kogan Page, 1999.

CASALE, A. **Aprendizagem Baseada em Problemas: Desenvolvimento de Competências para O Ensino em Engenharia**. 2013. 162 f. (Ph.D. Dissertation in Production Engineering).Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

FILHO, E. E; RIBEIRO, L.R. C. **Aprendendo com PBL\_ Aprendizagem Baseada em problemas**. Disponível em: <<http://www.br-ie.org/pub/index.php/sbie/article/view/486/472>>. Acesso em: 15 jan. 2018.

HADGRAFT, R.; PRPIC, J. (1999). The key dimensions of problem-based learning. Annual conference and convension of the australasian association for engineering education, 11.,Anais, Adelaide, Australia, 1999.

RIBEIRO, L . R. de CA **Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL): Uma Implementação na Educação em Engenharia na Voz dos Atores**. 2005. 250 f. (Ph.D. Dissertation in Education).Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2005.

SAVERY J. R.; DUFFY,T. M. Problem-based learning: na instructional model and its constructivist framework. In: FORGARTY, R. (ed.). **Problem-based learning: a collection of articles**. Arlington Heights: Skylight, 1998, p. 72-92.

SCHMIDT, H. G. As bases cognitivas da aprendizagem baseada em problemas. In: MAMEDE, S; PENAFORTE, J. (orgs.). **Aprendizagem baseada em problemas: anatomia de uma nova abordagem educacional**. São Paulo: Hucitec/ESP-CE, 2001, p. 80- 108

VENTURELLI J. **Educación médica: nuevos enfoques, metas y métodos**. Washington, DC: Organización Panamericana de la Salud/Organización Mundial de la Salud; 1997.

## Webquest: Probabilidade Aplicada a Genética

SOUZA, E. G.

Universidade Federal de Alagoas

[elvis\\_souzaal@hotmail.com](mailto:elvis_souzaal@hotmail.com)

SILVA, C. dos S.

Universidade Federal de Alagoas

[clewerton1@gmail.com](mailto:clewerton1@gmail.com)

SANTOS, M. T. A.

Universidade Federal de Alagoas

[mayraufal@hotmail.com](mailto:mayraufal@hotmail.com)

**Resumo:** O objetivo deste trabalho é discutir sobre de que forma o ensino de probabilidade pode contribuir para uma compreensão da realidade. Assim, tem-se como problema da pesquisa definir: Que metodologias são mais favoráveis ao processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo? No intuito de encontrar resposta para esta questão, realizou-se pesquisa bibliográfica sobre a utilização de Metodologias Ativas no ensino de Probabilidade. Recorrendo a uma abordagem qualitativa, foi possível refletir sobre de que modo a Metodologia Ativa pode contribuir para que os educandos façam uso adequado da probabilidade em situações cotidianas que envolvem estimativas, tendo como resultado a contribuição para o desenvolvimento a autonomia do educando, no que se refere a capacidade de selecionar, analisar e aplicar conceitos relacionados a probabilidade em diversas situações, entre elas jogos, economia e genética, sempre preservando as dimensões éticas do trabalho colaborativo.

**Palavras-chave:** Ensino. Metodologia Ativa. Webquest. Probabilidade.

### Introdução

Ao longo da história da educação brasileira, o ensino da Matemática esteve associado a transmissão de conteúdos. Os saberes produzidos pelas gerações anteriores eram repassados como verdades absolutas, inquestionáveis e apresentando reduzido vínculo com a realidade vivenciada. Neste contexto, os melhores recursos seriam a voz do professor, os exercícios de fixação, a repetição, a memorização e, principalmente, a passividade do aluno.

No entanto, os avanços tecnológicos ocorridos nas últimas décadas provocaram uma intensa mudança na sociedade atual, alterando tanto os aspectos econômicos, quanto os sociais, políticos e culturais. Estas alterações determinaram a reestruturação da nossa forma de pensar, sentir e viver, exigindo que o cidadão do mundo “virtual”, desenvolva diversas competências, que o torne capaz de lidar com a produção e a divulgação constante de informação.

Desta forma, a escola precisa repensar sua função social e buscar novas alternativas que favoreçam o processo de ensino-aprendizagem, pois para transmitir fórmulas prontas e passar “macetes”, os recursos multimídias (texto, som, imagens fixas e animada, vídeo) da internet se apresentam como instrumento bem mais interessante que o professor.

#### 1. Origem e finalidades da Metodologia Webquest

Assim, uma vez inseridos na sociedade digital, não podemos apenas continuar repetindo padrões válidos em épocas anteriores, é preciso refletir sobre que estratégias pedagógicas devem ser mantidas e quais necessitam ser alteradas.

Partindo desta realidade, em 1995, o professor Bernie Dodge da Universidade de San Diego, Estados Unidos, desenvolveu a metodologia de ensino WebQuest, tendo como objetivo orientar processos de pesquisa via Web.

A metodologia Webquest permite que o próprio docente crie sua página Web, propondo para os alunos uma tarefa que para ser desenvolvida exige pesquisa na Web e trabalho colaborativo. Ao longo do processo, os alunos podem sugerir outros sites ou fontes de pesquisa, todavia, cabe ao docente estruturar todas as etapas do processo, verificando previamente se as informações presentes nos links sugeridos são válidas e se a questão proposta é motivadora. (MASCARENHAS, 2005).

Assim, a metodologia Webquest contribui para evitar a dispersão, envolvendo alunos e professores em uma metodologia ativa, que estimule o pensamento crítico e a produção do conhecimento pelos próprios alunos.

## 2. Metodologia Ativa e Atividades Estruturadas

Com relação à Metodologia Ativa, Moran (2007, p. 150), defende que o professor “é um articulador de aprendizagens ativas, um conselheiro de pessoas diferentes, um avaliador de resultados. Seu papel é mais nobre, menos repetitivo e mais criativo do que na escola convencional.”. Assim, precisamos construir mecanismos pedagógicos em que a tecnologia seja colocada a serviço da aprendizagem, mostrando aos educandos que tais recursos, além de lazer desprovido de conhecimento, podem contribuir para ampliar sua dimensão cognitiva. Neste sentido, Moran apresenta o professor como um articulador de aprendizagens ativas, de onde depreende-se que o aluno é o sujeito do processo de ensino aprendizagem, cabendo ao docente propiciar as condições pedagógicas necessários para que os alunos possam construir seu universo de conhecimento.

Ao fazer referência a aprendizagem ativa, podemos concluir que “[ ... ] o processo cognitivo não é um processo passivo e dependente, conforme o modelo de transmissão de conhecimento, mas um procedimento ativo em que o sujeito cognoscitivo, de fato, constrói seu próprio conhecimento [ ... ]. (FOSSA, 2011, p. 86).

No entanto, seria ingenuidade acreditar que a construção do conhecimento é uma tarefa simples. Os estudos demonstram que são diversos os fatores que interferem no processo de ensino-aprendizagem, perpassando pelas dimensões sociais, econômicas, psicológicas e até culturais, do indivíduo e sua comunidade, que somada a marca histórica do ensino tradicional, provoca desencanto em diversos alunos, os quais classificam a matemática como uma disciplina difícil, muito abstrata e sem relação com o cotidiano. Todavia, “será, contudo, simplesmente inútil observar e lamentar a conjuntura retratada [ ... ], pois precisamos tomar as ações necessárias para implantar as inovações que poderiam implicar em um ensino melhor [ ... ].” (FOSSA, 2011, pp. 75-76).

Assim, cabe ao docente, diante de tantas adversidades, buscar alternativas que corroborem para a formação de um indivíduo crítico e autônomo, capaz de selecionar, analisar e utilizar adequadamente os dados matemáticos. Para isso, necessita desenvolver atividades estruturadas que estimulem a pesquisa em fontes diversas, trabalho em equipe e elaboração de suas próprias considerações, rompendo definitivamente com a “cultura das fórmulas prontas”, consolidada ao longo da história da educação Matemática.

Quando nos referimos a atividades estruturadas, Fossa (2011) afirma que as metodologias baseadas em tais atividades contribuem para a eficácia do ensino da matemática por contemplar o desafio da “redescoberta”. Para este autor, “isto acontece porque as atividades levam o aluno a construir estruturas matemáticas por si mesmo, em conformidade com o preceito construtivista. O autor esclarece ainda que o termo “redescoberta” é utilizado em substituição de “descoberta”, porque, na maioria das vezes, o aluno não descobre “novas verdades matemáticas nas fronteiras do conhecimento” (FOSSA, 2011, p.87). Todavia, realiza uma descoberta pessoal de novos saberes matemáticos, já aprofundado por pesquisadores da área.

Assim, atividades estruturadas, pautadas na redescoberta possibilitam aos estudantes a iniciação no universo científico, pois se voltam para a solução ou compreensão de situações complexas, as quais, na maioria das vezes, exigem pesquisas e trabalho colaborativo. (FOSSA, 2011, p. 88).

Para Fossa (2011), a atividade estruturada exige três condições:

[ ... ] Em primeiro lugar, necessitamos **sequenciar as atividades** de maneira apropriada. Várias atividades com a mesma estrutura matemática deveriam ser justapostas para que cada uma reforce as outras. Também é desejável que a apresentação de uma estrutura matemática nova seja feita de tal forma que o aluno possa aproveitar os elementos já construídos por ele. [ ... ] Outra característica das atividades em tela é que elas deveriam conter um **componente oral**, isto é, o aluno deveria **verbalizar seu entendimento da atividade**, tanto para favorecer a primeira abstração para o conceito da própria atividade, quanto para fortalecer a integração do novo conceito com os conceitos já construídos. Essa **verbalização deveria ocorrer durante a atividade, feita em parceria com os seus colegas**, e no fim da atividade seria interessante termos um relatório oral ou explicação do que foi feito. Finalmente, a atividade deveria ter um **componente simbólico** em que o aluno **registrasse por escrito os resultados alcançados** para promover a segunda abstração e facilitar a manipulação de símbolos abstratos. (FOSSA, 2011, pp. 123-124, grifos nossos).

Partindo das três condições apresentadas na citação acima – sequência adequada das atividades, verbalização do entendimento (componente oral) e registro escrito dos resultados alcançados (componente simbólico) –, pode-se concluir que a utilização de Webquest pode ser um dos instrumentos virtuais mais adequado quando se pensa em atividades estruturadas, pois, tem como característica básica o detalhamento da tarefa a ser realizada pelo estudante, valorizando a pesquisa colaborativa, ao tempo que fortalece a autonomia do sujeito, pois “o respeito à autonomia e à dignidade de cada um é um imperativo ético e não um favor que podemos ou não conceder uns aos outros. (FREIRE, 2002: 66).

A Webquest valoriza a autonomia do estudante, uma vez que as tarefas estruturadas, embora apresente um norte a ser seguido pelo estudante, diferencia-se do ensino tradicional por valorizar a investigação e estimular a postura ativa e colaborativa dos estudantes. Isso ocorre porque as metodologias ativas:

[...] tiram o foco do ‘conteúdo que o professor quer ensinar’, permitindo que o aluno estabeleça um vínculo com a aprendizagem, baseado na ação-reflexão-ação. Os projetos podem estar centrados em cada área de conhecimento isoladamente (projetos dentro de cada disciplina) ou integrar áreas de conhecimento de forma mais ampla (projetos interdisciplinares). (MORAN, 2007, p. 33).

As tarefas estruturadas necessitam ser planejadas cuidadosamente, preferencialmente através de projetos, onde o conteúdo matemático possa dialogar com situações do cotidiano do aluno, partindo de problemáticas sociais ou científicas, oferecendo o suporte necessário para uma melhor compreensão da realidade. Para isso, seguiremos a Metodologia Webquest criada por Bernie Dodge (2012), que em sua estrutura virtual apresenta: Introdução, Tarefa (Produto), Processo, Fontes de Informação (Recurso), Avaliação e Conclusão.

### 3. Webquest Probabilidade Aplicada a Genética: uma sequência didática para o Ensino Médio

Considerando que o aluno precisa sentir a Matemática como parte de sua vivência, escolhemos Probabilidade aplicada a Genética como tema estruturador, onde, através de orientações contidas na Webquest, espera-se contribuir para uma melhor compreensão sobre as possibilidades das características dos pais serem transmitidas aos descendentes, analisando as chances dos mesmos nascerem com olhos verdes, azuis, castanhos ou pretos; pele branca, negra, parda ou amarela; cabelos lisos ou encaracolados; apresentar determinadas doenças ou não, entre outras questões. A referida sequência didática ainda não foi aplicada em sala de aula, mas o produto resultante da pesquisa bibliográfica está disponível através do endereço <https://matematicativa3.webnode.com/>.

Na Introdução da Webquest, apresentamos o caso de uma mulher inglesa que, em 2006, deu à luz a gêmeos, chamando a atenção da mídia o fato de um ter nascido com pele branca e o outro com pele negra.



Apresentou-se como desafio uma questão retirada do Blog do Enem: Qual a probabilidade de um casal de olhos castanhos heterozigoto para esta característica ter dois filhos, um menino com olhos castanhos e uma menina com olhos azuis? Após a questão desafio, apresentou-se o texto Probabilidade e Genética, retirado no site Brasil Escola, contendo uma explanação geral sobre a temática.

A Introdução é muito importante, pois é nessa parte que se expõe o tema e os objetivos da pesquisa, tentando motivar os educandos através de enigmas, desafios, ilustração ou textos contextualizados.

A segunda parte da Webquest é a Tarefa, onde se informa ao aluno o resultado esperado ou o produto a ser construído. Partindo desta estrutura, o professor assume o papel de orientador, propondo a tarefa que irá nortear a pesquisa colaborativa, bem como apresentando fontes seguras de pesquisas, através de diversos recursos digitais (textos, vídeos, jogos, simuladores).

Para Santos e Barin (2014), a metodologia Webquest auxilia a construção do conhecimento por possibilitar ao docente organizar os conteúdos extraídos da internet e apresentá-los aos estudantes de forma estruturada e significativa, reduzindo a dispersão dos alunos, ao tempo que exige reflexão, autonomia e colaboração para realizar a tarefa proposta.

Ao finalizar todas as etapas do processo, espera-se que os alunos, em grupo, produzam um jogo de tabuleiro, cartas ou similar, que envolva Probabilidade Aplicada a Genética. Assim, eles poderão ressignificar os conceitos trabalhados, de forma cooperativa, reflexiva e lúdica.

A terceira parte da Webquest é o Processo. Nesta aba são descritas detalhadamente cada etapa necessária para o desenvolvimento da Tarefa, apresentando um rumo a ser seguido, mas preservando o espaço para o trabalho colaborativo e elaboração autônoma por parte do educando.

Na primeira semana do projeto, será solicitada a criação de um grupo de Whats App para a turma. O mesmo deverá ser utilizado exclusivamente para socializar as experiências relativas ao projeto. Após a inserção de todos os alunos no grupo de WhatsApp da turma, deverão ser formados subgrupos compostos por 4 membros.

Na sequência, os alunos deverão fazer a leitura do texto Início da Matematização das Probabilidades, respondendo as 4 (quatro) questões presentes no mesmo.

Ao analisar o texto, espera-se que os alunos compreendam as bases históricas da Probabilidade, bem como sua relação direta com a Combinatória e sua aplicação nos seguros e jogos de azar. Na sequência, os alunos devem assistir o vídeo Análise combinatória: combinação, permutação e arranjo e a Animação da Distribuição binomial.

Após a realização dessas atividades, os alunos devem realizar a autoavaliação, identificando e socializando no grupo de Whats App da turma, os saberes construídos e as dúvidas que permaneceram. De acordo com a complexidade, as dúvidas poderão ser sanadas pelos próprios colegas ou pelo professor.

Na segunda semana, os alunos utilizarão um *software* produzido pela Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), onde poderão participar da simulação Probabilidade com urnas. O mesmo está disponível gratuitamente no site da referida universidade e apresenta a seguinte situação problema: Imagine uma urna contendo certa quantidade de bolinhas de cores diferentes. Dessa urna são retiradas bolinhas aleatoriamente, ou seja, sem escolher as cores. Diante disso, tendo observado apenas as cores das bolinhas fora da urna, seria possível estimar as proporções de bolinhas de cada cor existentes na urna?

Posteriormente, os alunos participarão da atividade online: Explorando o Jogo do Máximo. O mesmo também foi produzido pela Unicamp, e dispõe da seguinte descrição: “Nesta unidade, você terá a oportunidade de exercitar algumas noções do cálculo de probabilidades, tais como as de evento e de independência. Além disso, lhe será apresentada a ideia de experimento aleatório por meio de um jogo chamado ‘jogo do máximo’”.

Para finalizar as atividades da semana, os alunos analisarão a História em Quadrinhos - Pascal e Fermat e o vídeo “A Cartomante”, sendo que o primeiro trata sobre as contribuições de Pascal e Fermat para a probabilidade, enquanto o segundo se volta para a aplicação da probabilidade em jogos (leitura) de cartas.

Com o objetivo de avaliar os conhecimentos construídos ao longo destas duas semanas, solicita-se aos alunos a organização de um seminário, onde eles poderão socializar seus saberes sobre a contribuição de diversos pensadores para o desenvolvimento da probabilidade.

Considerando que os alunos já possuem uma compreensão mais aprofundada sobre Probabilidade, a terceira semana do projeto será reservada para a aplicação da mesma nos estudos de genética. A princípio, os alunos analisarão o vídeo “10 coisas que você deveria saber sobre genética (e probabilidade), de Larissa Aversa”. Na sequência, serão resolvidas em grupo questões de Probabilidade aplicada a Genética, sendo reservado um espaço para que o professor possa esclarecer as dúvidas existentes. Após essa etapa, será realizada a Oficina para a confecção do produto, ou seja, o jogo de tabuleiro ou cartas.

Os grupos deverão pensar em um jogo para ser desenvolvido em dupla ou equipe, que contemple os conceitos de Probabilidade aplicada a Genética. Na sequência, cada equipe deverá socializar sua produção, explicando as regras do jogo para os demais colegas. Logo após, cada grupo deve trocar seu jogo com outro grupo, que irá jogar e avaliar se a produção dos colegas respeita os critérios descritos no quadro seguinte:

Quadro 1 - Critérios para Avaliação do Jogo

Critérios para avaliação do jogo	Avaliação		
	Sim	Não	Observação
1. Pode ser jogado em dupla ou em equipe			
2. Contempla os conceitos estudados sobre Probabilidade			
3. Aparece situações relacionadas a probabilidade e genética			
4. As regras do jogo estão claras			
5. O jogo possui uma aparência harmoniosa (sem rasuras e “amassões”, contendo informações legíveis)			
6. É um jogo divertido			
7. É um jogo desafiador			

Fonte: o autor

Assim, ao longo do processo, espera-se que os educandos percebam e façam uso adequado dos saberes disponíveis no mundo virtual, desenvolvendo a capacidade de avaliação e autoavaliação, de (re)aprender sempre, sozinho e com os outros, pois a inclusão social perpassa por estas capacidades.

Durante todo o processo, os Recursos (fontes de informações) são determinantes. Uma vez que a principal função da Webquest é auxiliar o desenvolvimento da autonomia do aluno e do trabalho colaborativo - através da pesquisa orientada virtualmente -, as informações a serem consultadas precisam ser confiáveis. Assim, cabe ao docente avaliar previamente o conteúdo disponibilizado, garantindo que os mesmos contribuam para o enriquecimento do processo de ensino e aprendizagem.

Além de apresentar as fontes virtuais e físicas que deverão ser consultadas - de modo que as produções sejam fundamentadas em saberes validados cientificamente -, é importante orientar os alunos sobre o perigo do plágio, quando se utiliza indevidamente tais recursos.

Ao recorrer prioritariamente a pesquisa em fontes virtuais, a Webquest representa ainda uma oportunidade de orientar nossos educandos sobre uma forma produtiva de utilizar internet, mostrando que as redes sociais representam um espaço para socializar ideias, saberes, experiência, que ultrapassa o simples compartilhamento de “*selfie*”. Auxilia ainda, orientando o processo de pesquisa e elaboração, explicitando que meras cópias de sites de busca, caracteriza plágio, não pesquisa.

Um dos elementos mais importante do projeto é Avaliação, pois é ela que fornece os dados necessários para retroalimentar o processo, apresentando êxitos e desafios, que indicam o caminho a ser seguido. Nesse espaço, é importante registrar previamente o que se espera dos educandos, resguardando sempre um espaço para autoavaliação, de modo que os mesmos possam repensar sua postura durante o exercício de atividades individuais e coletivas.

Tendo como meta a construção da autonomia do educando, a autoavaliação não deve se voltar apenas para a dimensão quantitativa, própria da avaliação somatória, mas se direcionar para a consciência do sujeito, que deve pensar sobre os avanços e as dificuldades encontradas ao longo do processo, identificar “[...] o que já aprendeu, o que ainda não aprendeu, os aspectos facilitadores e os dificultadores do seu trabalho, tomando como referências os objetivos de aprendizagem e os critérios de avaliação [...]” (VILLAS BOAS, 2008, p. 51). Assim, ao refletir sobre a própria postura e sobre a atuação do grupo, identificando os comportamentos pessoais e coletivos que contribuíram, ou não, para a ampliação do universo de conhecimento, desenvolve-se dimensão processual e formativa da avaliação.

Ao finalizar o projeto, é determinante o registro das conclusões do grupo, contemplando a descrição dos resultados alcançados, as dificuldades encontradas, bem como registrando sugestões para a realização de novos estudos.

Assim, espera-se com esta proposta de intervenção pedagógica contribua para romper com a cultura da “fórmula pronta”, estimulando o questionamento, a elaboração pessoal e a criação do novo, de modo que o ensino da Matemática incentive o pensamento reflexivo, a autonomia do sujeito e a ação colaborativa, favorecendo com isto, o desenvolvimento pleno do educando.

## Conclusões

O trabalho desenvolvido contribuiu para repensar sobre a forma que o ensino de Probabilidade deve ser abordado em sala de aula de Ensino Médio, bem como quais metodologias são mais adequadas ao processo de ensino aprendizagem deste conteúdo. Após a realização de pesquisas bibliográficas, confirmou-se a hipótese que as metodologias ativas são de grande valia para a formação matemática no contexto atual, pois tem como meta possibilitar uma participação ativa do aluno. Neste sentido, constatou-se que a atuação do professor é de extrema importância, pois cabe a ele (re)planejar todo o processo, elaborando atividades estruturadas, voltadas para a pesquisa e o trabalho colaborativo. Contudo, é preciso considerar que a ausência de laboratórios de informática e internet liberada para os alunos é um fator que pode dificultar o desenvolvimento da sequência didática proposta.

## Referências

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Revisto por Uta C. Merzbach. Traduzido por Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1996.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, 2011. (Coleção, Volume 2).

DODGE, B. (2005). In: MASCARENHAS (2005). Educação sem internet? Só no monastério. Disponível em < <http://www.educacao.sp.gov.br/noticias/educacao-sem-internet-so-no-monasterio> > Acesso em: 18/12/2017.

FOSSA, J. A. **Ensaio sobre a Educação Matemática**. 2. Ed. São Paulo: Editora Livraria de Física, 2011.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia de autonomia: saberes necessários à prática educativa**. 24. ed. São Paulo: Editora Paz e Terra, 2002. 165 p.

LOPES, S.; ROSSO, S. **Biologia** – volume único. São Paulo: Saraiva, 2005.

**M3 MATEMÁTICA MULTIMÍDIA. A Cartomante**. 2012. (11min.17s). Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=sBZQOGEtyT0&t=93s>> Acesso em: 15 abr. 2018.

MEYER, P. L. **Probabilidade: aplicações à estatística**. Tradução Ruy de C. B. Lourenço Filho. 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: Livros Técnicos e Científicos Editora, 1983. (Reimpressão 2006).

MORAN, J. M. A. **Educação que desejamos**: novos desafios e como chegar lá. Campinas, SP: Papyrus, 2007. 174 p.

SANTOS, J. Herança Genética: Veja a Probabilidade na transmissão de características hereditárias. Disponível em <<https://blogdoenem.com.br/biologia-probabilidade-genetica/>> Acesso em: 14 abri. 2018.

SANTOS, T. R. dos; BARIN, C. S. Problematização da metodologia webquest na prática educativa: potencialidades e desafios. Revista Tecnologias na Educação – Ano 6 - número 11 – dez. 2014. Disponível em <<http://tecnologiasnaeducacao.pro.br/wpcontent/uploads/2014/12/Problematiza%C3%A7%C3%A3o-da-metodologia-webquest-napr%C3%A1tica-educativa-potencialidades-e-desafios.pdf>> Acesso em: 08 mar. 2015.

SILVA, M. N. P. da. **Probabilidade e Genética**. Disponível em: <<https://brasile scola.uol.com.br/matematica/probabilidade-genetica.htm> > Acesso em: 25 jan. 2018.

SILVEIRA, J.F. P. da. **Início da matematização das probabilidades**. Publicado em 2001. Disponível em: <<http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/passa6a.html> > Acesso em: 01 mai. 2018.

SILVEIRA, J.F. P. da. **O triângulo de Pascal é de Pascal?** Publicado em 2001. Disponível em <<http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2b.html>> Acesso em: 01 jan. 2018.

TOMAZ, P.S. S. Gerolamo Cardano: pai da teoria da probabilidade ou um bom apostador de jogos de azar? Disponível em: <[http://www.each.usp.br/ixsnhm/Anaisixsnhm/Comunicacoes/1\\_Tomaz\\_P\\_S\\_S\\_Gerolamo\\_Cardano.pdf](http://www.each.usp.br/ixsnhm/Anaisixsnhm/Comunicacoes/1_Tomaz_P_S_S_Gerolamo_Cardano.pdf)> Acesso em: 01 mai. 2018.

UNICAMP. **Explorando o Jogo do Máximo**. Disponível: <<http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1237/>> Acesso em: 15 abr. 2018.

UNICAMP. **Simulação Probabilidade das Urnas**. Disponível em: <<http://m3.ime.unicamp.br/media/software/1245/>> Acesso em 15 abri. 2018.

UNIVESP. **História da Matemática - Aula 09 - História em quadrinhos: Pascal e Fermat**. 2017. (7min50s) Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=NnJHDr3BXno&t=314s>> Acesso em: 15 abri. 2018.

VARQUEZ, C. M. R.; NOGUTI, F. C. H. **Análise Combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica**. Disponível em: <<http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf> > Acesso em: 10 fev. 2018.

VÍDEOS EDUCATIVOS. Análise combinatória: combinação, permutação e arranjo. 2013. (10 min.) Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=16XpBZKuLyY&t=24s>> Acesso em: 14 abri. 2018.

VILLAS BOAS, B. M. F. **Virando a escola do avesso por meio da avaliação**. Campinas: Papyrus, 2015.

## Os Desdobramentos Teóricos da Proporcionalidade na Escola de Educação Básica

SANTOS, M. T. A.  
Universidade Federal de Alagoas  
[mayraufal@hotmail.com](mailto:mayraufal@hotmail.com)

SOUZA, E. G.  
Universidade Federal de Alagoas  
[elvis\\_souzaal@hotmail.com](mailto:elvis_souzaal@hotmail.com)

SILVA, C. dos S.  
Universidade Federal de Alagoas  
[clewerton1@gmail.com](mailto:clewerton1@gmail.com)

### Resumo:

O trabalho tem como iniciativa estudar a proporcionalidade de uma perspectiva mais ampla e natural à natureza com a qual se concebeu a matemática clássica, a geométrica. Para isso, deseja-se ampliar a compreensão do conteúdo e apresentando sob um aspecto mais amplo, indo de encontro com o aspecto simplista das bibliografias para o Ensino Básico, a fim de obter recursos necessários que justifique a Sequência Didática proposta para turmas de 9º ano do Ensino Fundamental, sobre Semelhança e Medidas de Volume. Para tanto foi dividido em quatro partes. A primeira apresenta uma construção histórica da proporcionalidade, onde se tem a Comensurabilidade, Os *Elementos* de Euclides e o Teorema de Tales, a segunda tem como foco Princípio de Cavalieri e o Teorema de Pappus, que tem forte relação com a parte seguinte que trata da proporcionalidade de sólidos, em particular de Poliedros e Sólidos de Revolução. Por fim, a última apresenta a sequência didática sobre “Semelhança e Medidas de Volume”, em torno da qual foi organizado o trabalho, e proposta para o 9º ano da educação básica; além de algumas sugestões de utilização da proporcionalidade no ensino médio de forma a explorar conteúdos geometricamente.

**Palavras-chave:** Proporcionalidade; Geometria; Aprendizagem Significativa; Descritores para Matemática.

### Introdução

A educação básica tem em seu currículo uma série de conteúdos tidos como de fundamental importância para o tipo de sujeito que se deseja formar no Brasil, de modo que esse possa obter na escola o que é denominada de formação integral do sujeito, segundo a LDB<sup>1</sup> (2017,p.8), “A educação... tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho.”

Segundo o princípio formativo, a educação tem papel fundamental no desenvolvimento pleno do educando, assim como no seu preparo para o exercício da cidadania e preparo para o trabalho, entretanto, se faz necessário compreender o papel do currículo de cada disciplina na formação dessas aptidões do discente.

Exercer cidadania, é está preparado para o mundo do trabalho, trata-se de ser capaz de tomar decisões diante da complexidade da sociedade. Nessa perspectiva, a Matemática tem papel fundamental visto que a organização social, que se tornou tão complexa que a Matemática se faz necessária em todos os seus setores; desde os mais complexos e sofisticados, onde são movimentadas altas quantias financeiras e utilizadas as tecnologias mais elaboradas, até setores que para leigos, não possuem influência direta da Matemática, (aparentemente) como postos de saúde, órgãos de recursos humanos e etc.

<sup>1</sup> Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

Nesse contexto, cada conteúdo matemático no currículo da Educação Básica tem sua importância social, e como patrimônio historicamente construído do homem deve ser de acesso de todos garantindo ao cidadão a universalização do conhecimento científico comum e universal.

Dessa forma, podemos afirmar que os conteúdos de matemática da educação básica são divididos em blocos de conteúdos dos quais se tem o bloco de “Grandezas e Medidas” que:

“Este bloco caracteriza-se por sua forte relevância social devido a seu caráter prático e utilitário, e pela possibilidade de variadas conexões com outras áreas do conhecimento. Na vida em sociedade, as grandezas e as medidas estão presentes em quase todas as atividades realizadas. Desse modo desempenham papel importante no currículo, pois mostram claramente ao aluno a utilidade do conhecimento matemático no cotidiano.” (PCN de matemática, 1998, p. 51-52)

Nota-se que esse bloco tem um caráter social forte, visto que é possível encontrar com clareza aplicações e ligações com a realidade social do aluno, fazendo com quem o mesmo sinta-se mais próximo, enquanto sujeito ativo da prática matemática e tornando-o conteúdo de caráter significativo para os mesmos. Não obstante, do caráter social desse bloco tem-se que:

“As atividades em que as noções de grandezas e medidas são exploradas proporcionam melhor compreensão de conceitos relativos ao espaço e às formas. São contextos muito ricos para o trabalho com os significados dos números e das operações, da idéia de proporcionalidade e um campo fértil para uma abordagem histórica.” (PCN de matemática, 1998, p.52)

Notavelmente, esse bloco é rico em conceitos que proporcionam melhores conceitos relativos à geometria de forma geral, tendo em si ferramentas muito importantes para melhoria da compreensão desses, além de enriquecer o trabalho com número e operações com sua infinidade de perspectivas e aplicações utilizando o conceito de *Proporcionalidade*, que é um campo rico de trabalho, não somente do ponto de vista teórico da matemática e de suas aplicações, como também do ponto de vista histórico e metodológico.

Entretanto, mesmo que o bloco de grandezas e medidas, que é intimamente associado ao de *Proporcionalidade*, e possibilita maior proximidade dos fatos sociais e conseqüentemente do alunado, pois esse consegue se mostrar claramente significativo quando, por exemplo, é apresentada a receita de uma fôrnia de biscoitos a qual se deseja produzir apenas meia fôrnia.

No que se refere à aprendizagem significativa Ausubel (1982) tem três vantagens em relação à aprendizagem que é obtida por repetição ou memorização:

- O conhecimento aprendido de forma significativa é lembrado por mais tempo;
- O conteúdo que foi apreendido de forma significativa amplia a capacidade de aprendizagem de conteúdos que tem como base os esquemas mentais aprendidos nesse;
- Uma vez que o conteúdo é aprendido de forma significativa à reaprendizagem dele se torna mais rápida.

O conteúdo, entretanto, por conta de suas características, já citadas, é visto de forma simplista, fazendo com que inúmeros aspectos importantes do mesmo se percam, e dificultando que esse seja associado a todas as suas demais manifestações na educação básica como, por exemplo, Razão e Proporção, Semelhança de Triângulos, ou mesmo a aplicações em disciplinas distintas como física e química.

Essa visão simplista, sem a preocupação em construir uma Sequência Didática que favoreça a construção de uma aprendizagem significativa pode representar um barreira à aprendizagem, pois é necessário

ter em mente que a aprendizagem tem como necessidade essencial gerar desconforto, para que o aluno busque-o na apreensão dos conteúdos, a fim de reequilibrar seus esquemas mentais.

Tendo em mente os elementos apresentados o trabalho foi dividido em quatro capítulos que tem como fim passear pela proposta didática apresentada como produto do mesmo, que é uma Sequência Didática para o 9º ano, pautada no conceito da Aprendizagem Significativa de Ausubel.

### 1. CONTEXTO HISTÓRICO

A noção de Proporcionalidade está muito presente na Matemática e em vários momentos de sua história, alguns mais significativos que outros. Entretanto, na antiguidade, a área da Matemática que mais se destacou inicialmente, para além de problemas cotidianos, foi à Geometria. Isto se justifica, pelo fato da Matemática ter a finalidade inicial, de resolver problemas práticos de cada sociedade.

A história conta que um dos primeiros matemáticos gregos foi Tales de Mileto (séc. XII-XI a. C.), que teria sido influenciado pelos egípcios e mesopotâmicos. Tales tem seus contados, através de gerações, seus feitos; por exemplo, ter medido a altura de uma pirâmide do Egito relacionando suas dimensões a dimensões de sua sombra.<sup>2</sup>

Inicialmente, os gregos praticavam uma Geometria muito semelhante à noção de matemática desenvolvida no Antigo Egito e na Mesopotâmia, onde as medidas eram marcadas por cálculos e algoritmos, e transformadas em números e tinham significado na vida prática.

Partindo desse ponto para desenvolver a Matemática fundada em argumentos lógicos consistentes e demonstrações praticadas pelos gregos, não havendo precisão histórica de como houve essa transição. A seguir, este capítulo irá tratar da Comensurabilidade de segmentos, dos *Elementos* de Euclides em suas partes que interessa ao estudo, do Teorema de Tales; e finalmente, do desenvolvimento das ciências e da proporcionalidade, a fim de construir um panorama claro da importância desses conceitos, tanto na teoria Matemática largamente difundida na sociedade, como sua relevância histórica.

### 2. SÓLIDOS E RELAÇÕES FUNDAMENTAIS

O capítulo anterior apresentou os conceitos históricos básicos que envolvem a teoria de proporcionalidade, iniciando no conceito de comensurabilidade e as relações entre algumas áreas nos *Elementos*, finalizando com a proporcionalidade entre os segmentos correspondentes de duas retas transversais a um feixe de retas paralelas. Dessa forma, nada mais natural que prosseguir os estudos sobre proporcionalidade de forma espacial, isto é, por meio de sólidos.

Ao se trabalhar com sólidos na educação básica ou no ensino superior, no que se refere à Geometria Euclidiana, se tem como base o uso contínuo de alguns conceitos básicos, como semelhança e congruência, ou teoremas fundamentais para o tratamento dos mesmos, como por exemplo, o Princípio de Cavalieri e o Teorema de Pappus. Todos esses elementos citados fazem parte de um conjunto teórico de fundamental importância para o estudo das relações entre figuras geométricas, como se pode observar a seguir.

### 3. FIGURAS ESPACIAIS E AS PROPORÇÕES

Os sólidos podem ser divididos em Poliedros, Sólidos de Revolução e sólidos que não se enquadram nessas duas definições. Para cada um desse grupo é possível se adotar estratégias diferentes para verificar sua semelhança. Entretanto, antes de iniciar o estudo das “Figuras Espaciais e suas Proporções” se faz

---

<sup>2</sup> Tales mediu a altura da pirâmide usando as relações de proporcionalidade de seu teorema.

necessário esclarecer o motivo que levou esse capítulo, que pode parecer demasiadamente complexo em relação aos demais.

Tanto o professor quanto o aluno ao se deparar com o conteúdo de proporções ou semelhança no livro didático (seja na sua primeira apresentação no Ensino Fundamental seja numa apresentação posterior, no Ensino Médio), notará que esse conteúdo é frequentemente associado a objetos concretos e escalas, podendo ser esses objetos de natureza plana ou espacial. Por exemplo, a semelhança entre duas fotografias, sendo uma  $3 \times 4$  e outra ampliada para o formato  $15 \times 20$ ; outro caso seria a frequente associação de um objeto como um carro a sua miniatura.

Apesar desse tipo de problema ser de frequente uso na introdução do conteúdo, o tratamento subsequente é quase sempre associado somente a triângulos e polígonos, às vezes é retomado desconectado do conteúdo no ensino médio para o caso espacial, fazendo com que o aluno tenha uma percepção pobre e limitada dos conteúdos. Dessa forma, esse capítulo se dedica a construir uma visão analítica da proporcionalidade de forma a ampliar também a perspectiva do professor de matemática, através da análise da proporcionalidade de Poliedros e Sólidos de Revolução.

#### **4. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA PROPOSTA E ALGUNS USOS DE PROPORCIONALIDADE NO ENSINO MÉDIO**

O conteúdo apresentado deixa claro o quando a Proporcionalidade é rica, e pode ser amplamente tratada na Educação Básica, pois é comum essa ser tratada sobre bases não muito sólidas.

Normalmente, a Proporcionalidade é apresentada de forma não muito natural, se olharmos para a história da construção da Matemática; pois se tem a proporcionalidade e a semelhança como sendo conteúdos de naturezas distintas, sendo um de natureza algébrica e outro de natureza geométrica, padrão esse apresentado nos próprios livros didáticos.

Entretanto, a responsabilidade por fazer a aproximação conceitual desses conteúdos é do docente, que pode se deparar com dificuldades tanto de natureza teórica quanto metodológica, e isso limita o alcance da ação didática.

Por outro lado, sob o ponto de vista, pode-se olhar para Matriz de Referência do Ensino Médio de matemática para Prova Brasil. Essa matriz é formada por quadro eixos: Espaço e Forma (D1-D10), Grandezas e Medidas (D11-D13), Números e Operações/Álgebra e Funções (D14-D33) e Tratamento de Informação (D34, D35). Essa matriz é formada por 35 Descritores, que estabelecem o alcance do conhecimento que o aluno deve obter. Desses, 9 estão intimamente ligados ao conceito de Proporcionalidade, seja geométrica ou algebricamente; e que também que eles perpassam todos os temas trabalhados no Ensino Médio.

De posse dessa informação, pode-se observar a importância do tratamento de Proporcionalidade, tanto como aparato teórico para o professor quanto metodológico para o aluno, visto que esses 35 descritores de Matemática para a Educação Básica apontam os conhecimentos básicos que devem ser aprendidos nessa etapa para se adquirir uma aprendizagem básica satisfatória.

Apesar de esse trabalho ter como resultado uma Sequência Didática sobre Semelhanças e Medidas de Volume, destinada ao 9º ano do Ensino Fundamental, que será apresentada a seguir, assim como sugestões de



abordagens para Ensino Médio, onde podem ser explorados os conceitos apresentados nos capítulos anteriores e de forma que esses possam contribuir para construção de uma visão multifacetada do conhecimento para o aluno, a fim de torná-lo significativo. Essas sugestões têm como base o material construído e destinado a professores da Educação Básica, a fim de fazê-los compreender que o ato de tornar o conteúdo significativo é uma tarefa complexa e contínua que deve ser empenhada desde muito cedo.

### **Conclusões**

A forma mais natural de se trabalhar com matemática é geometricamente, pois essa surge do reconhecimento de padrões, não o contrário, surge o conteúdo matemático para depois surgirem suas representações. Sendo a matemática associada à geometria mais natural, é importante que esse aspecto seja valorizado.

Por outro lado, a Prova Brasil é uma prova que mede a qualidade do Ensino Fundamental, e para isso adota 35 descritores a serem aprendidos. Entre esses descritores, existe nove que reforçam a importância de valorizar a geometria nos conteúdos escolares de matemática. Sob esse ponto de vista, o 9º ano do Ensino Fundamental, tem uma posição privilegiada, visto que esse possui em sua grade curricular os temas abordados pelo trabalho, como também é a prévia para o aluno que está sendo preparado para ingressar no Ensino Médio.

Dessa forma, o trabalho do professor de Matemática é muito importante para a continuidade dos estudos. A fim de alcançar os objetivos mencionados o trabalho foi construído uma Sequência Didática propõe uma ação didática de 14 horas aulas e com 7 atividades, direcionada para o estudo de Semelhança e Medidas de Volume, a ser aplicadas em turmas de 9º ano do Ensino Fundamental. Essas ações são pautadas no conteúdo dos três primeiros capítulos, de forma que o professor, antes de fazer uso da mesma possua um conhecimento amplo dos mesmos, para possuir um conhecimento profundo dos princípios que regem as ações propostas.

Em consequência, estar-se-á contribuindo para a consolidação de práticas profissionais que ultrapassem os limites da educação bancária (FREIRE, 1980; 1986), na qual o aluno é considerado como um depósito passivo de conteúdos transmitidos pelo professor, para assumir uma nova perspectiva na qual o estudante é agente do processo ensino-aprendizagem e, conseqüentemente, da (re) construção do próprio conhecimento e, assim, de sua formação em um sentido mais amplo. Nesse processo educativo, o professor deve assumir outra atitude, forjada a partir de outro tipo de formação, que deve ser crítica, reflexiva e orientada pela responsabilidade social.

Nessa perspectiva, o docente deixa de ser um transmissor de conteúdos acrílicos e definidos por especialistas externos para assumir uma atitude problematizadora e mediadora do processo ensino-aprendizagem sem, no entanto, perder sua autoridade nem, tampouco, a responsabilidade com a competência técnica dentro de sua área do conhecimento (FREIRE, 1996).

### **Referências**

BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília, Senado Federal, Coordenação de Edições Técnicas, 2017.

BRASIL-MEC. Matriz de Referência de Matemática da 3ª Série do Ensino Médio: Comentários sobre os temas e seus descritores, exemplos de itens. Disponível em: [http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/3\\_matematica.pdf](http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/3_matematica.pdf). Acessado em: 20 de março de 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: *Matemática*. Brasília-MEC/SEF, 1998.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia da Autonomia: Saberes Necessários a Prática Docente*. 25ª edição. São Paulo: Editora Paz e Terra, 1996.

PELIZZARI et al, Adriana. Teoria da Aprendizagem Significativa Segundo Ausubel. *Revista PEC, Curitiba*, v.2,n.1,p.37-42, julho de 2001-julho de 2002.

V ERMAC 2018 Maceió-AL

## O uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação como recurso educacional no ensino e aprendizagem de Matemática

*Williane Costa Ferreira*  
Universidade Federal de Alagoas  
Wferreira390@gmail.com

**Resumo:** Este estudo apresenta como proposta o uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação no ensino-aprendizagem de Matemática, por meio de jogos digitais educacionais, afim de que o alunado se sinta motivado a participar da aula ativamente e possa construir o aprendizado de forma espontânea enquanto o professor deixa de ser o transmissor e passa a ser o mediador do conhecimento. Ademais, este trabalho relata a experiência de uma pesquisa de cunho exploratório, numa abordagem qualitativa, do tipo participante, realizada com 16 alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública no município de Maceió, coletando os dados por meio de atividades propostas durante o jogo “Aula de Juros Simples” no *software Scratch*. O estudo baseia-se em autores como: Papert (1998), Borba e Penteadó (2012), Valente (1998), Carvalho (2017), Costa & Pinto (2017) entre outros autores que descrevem acerca do ensino de Matemática e jogos digitais. Como resultados: notou-se o interesse dos alunos pelo jogo proposto, assim como foi perceptível um bom desempenho deles no ambiente Scratch e foi possível identificar que a linguagem de programação permite que este desenvolva o aprendizado de Juros Simples, aprendendo com seus erros e desenvolvendo a criatividade e capacidade de raciocínio.

**Palavras-chave:** Jogos digitais. *Scratch*. Ensino.

### Introdução

O presente século está envolto de tecnologia. Seja em aplicativos de entretenimento, em redes sociais, no ramo dos negócios financeiros, ou até mesmo em compras *online* de produtos com rápida entrega e sem precisar sair de casa. O fato é que o indivíduo do século XXI tem recorrido cada vez mais à tecnologia digital a seu favor.

Ao refletir sobre o rendimento escolar do alunado da rede básica de ensino quando se trata do saber matemático, se percebe, pela experiência da autora em sala de aula, que os discentes não têm mais o interesse por aulas com o uso apenas de livro didático, exercícios práticos no quadro, procedimentos mecanizados de resolução de problemas. Eles querem algo inovador, instigante, que faça parte do cotidiano deles, necessitam desenvolver o aprendizado em Matemática com um estudo dinâmico e desafiador.

Sendo assim, o presente trabalho traz como proposta a utilização das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) no ensino e aprendizagem de Matemática, por meio de jogos educacionais e outras atividades lúdicas, tendo em vista que o jogo faz parte da vida do ser humano. Seja na infância, juventude ou na idade adulta, o indivíduo tem dentro de si o espírito de competitividade, buscando criar estratégias para conquistar seu espaço na sociedade.

### Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação na Educação: breve histórico

Segundo Valente (1998), o uso de uma linguagem de programação na educação tem seu valor no processo de aprendizagem do aluno e afirma que: “Durante os anos 60 houve um investimento

## V ERMAC 2018 Maceió-AL

muito grande por parte do governo americano na produção de CAI<sup>1</sup>” (VALENTE, 1998, p.5). Porém o investimento de computadores nas escolas americanas ainda custava muito caro. Logo, a ideia de implantação de programas computacionais nas escolas brasileiras parecia absurda, pelo custo ainda maior do computador, comparado a países como Japão ou Estados Unidos. Ainda em 1985, a realidade da escola brasileira ainda parecia despreparada para investir em programas educacionais por meio dessa tecnologia. Devido a essa problemática, a utilização de tal tecnologia demorou a ser implantada e reconhecida como uma “máquina de ensinar”, como diz Papert (1988). Também de acordo com Papert (2008), a era da informática teve seu início em 1993 e afirma que: “[...] Esse período que se inicia poderia ser igualmente denominado como a era da aprendizagem: a enorme quantidade de aprendizagem que vem ocorrendo rapidamente em todo mundo já é inúmeras vezes maior do que no passado” (PAPERT, 2008, p. 13). O que sugere que apenas nesse período era possível identificar o uso da tecnologia informática como uma prática docente em busca do melhor aprendizado do educando.

O que se pode identificar na prática, de acordo com as leituras realizadas, é que a informática foi inserida na educação a passos lentos, não apenas pelos custos altos do investimento dessa tecnologia no ambiente escolar, mas pelas indagações feitas pelo corpo docente sobre o impacto causado pelo computador no comportamento do estudante, “[...] sobre o perigo que a utilização da informática poderia trazer para a aprendizagem dos alunos” (BORBA & PENTEADO, 2012, p. 12).

Todavia, de acordo com Borba & Penteado (2012), a partir de um programa lançado pelo governo em fevereiro de 2001, o “[...] governo federal utiliza recursos para compra de computadores para escolas do Ensino Médio” (BORBA & PENTEADO, 2012, p. 14). Desde então, de acordo com Lopes et al (2008), é notório o investimento de computadores e *softwares* educacionais nas escolas e o interesse no manuseio do computador por parte dos alunos de escolas públicas. E conforme Costa & Pinto (2017, p. 20): “Atualmente, além da estrutura tecnológica para as escolas, o Proinfo<sup>2</sup> contempla programas voltados para a formação continuada de professores e gestores e integra outros canais para o aperfeiçoamento desses profissionais, como o canal TV Escola e o Portal do Professor”.

### **Jogos digitais no ensino e aprendizagem de Matemática**

Participar de atividades lúdicas ou de jogos, independente da idade do indivíduo, faz parte da sua vida em momentos de descontração, lazer. Ao propor o uso de jogos educativos em sala de aula, é possível que o estudante se sinta motivado a participar, visto que o jogo já é tido como natural no cotidiano ser humano e além de aguçar a curiosidade e o ânimo do discente, estará posto ao aluno a oportunidade de desenvolver várias habilidades. De acordo com os Parâmetros Nacionais Curriculares:

---

<sup>1</sup> Instrução Auxiliada por Computador. No Brasil são programas conhecidos como PEC (Programas Educacionais por Computador).

<sup>2</sup> Programa Nacional de Informática na Educação

## V ERMAC 2018 Maceió-AL

Os jogos podem contribuir para um trabalho de formação de atitudes – enfrentar desafios, lançar-se à busca de soluções, desenvolvimento da crítica, da intuição, da criação de estratégias e da possibilidade de alterá-las quando o resultado não é satisfatório – necessárias para aprendizagem da Matemática (PCN’s, 1998, p. 47).

Além de desenvolver a criação de estratégias no jogo e enfrentar os desafios que surgirem, vale ressaltar que no jogo, as regras estabelecidas geralmente são aceitas facilmente, pois o participante do jogo se sente desafiado a cumprir tal objetivo. Mais do que isso, segundo Silva & Kodama (2004, p. 3):

Num contexto de jogo, a participação ativa do sujeito sobre o seu saber é valorizado por pelo menos dois motivos. [...] Alunos com dificuldades de aprendizagem vão gradativamente modificando a imagem negativa (seja porque é assustadora, aborrecida ou frustrante) do ato de conhecer, tendo uma experiência em que aprender é uma atividade interessante e desafiadora. [...] Por meio de atividades com jogos, os alunos vão adquirindo autoconfiança, são incentivados a questionar e corrigir suas ações, analisar e comparar pontos de vista, organizar e cuidar dos materiais utilizados. Outro motivo que justifica valorizar a participação do sujeito na construção do seu próprio saber é a possibilidade de desenvolver seu raciocínio. Os jogos são instrumentos para exercitar e estimular um agir-pensar com lógica e critério, condições para jogar bem e ter um bom desempenho escolar.

Ao tratar de jogos digitais no ensino e aprendizagem de Matemática, pode-se interpretar que a aceitação do discente em participar da aula será ainda maior, já que pessoas de todas as idades, principalmente na fase da adolescência e juventude, estão propensas a utilizar jogos digitais como uma atividade prazerosa. De acordo com Carvalho (2017, p. 114): “A popularidade dos jogos digitais tem vindo a conquistar diferentes faixas etárias, dos mais pequenos aos mais velhos. Eles presenteiam os jogadores com uma grande diversidade de emoções e de desafios, que lhes permite alcançar uma sensação de satisfação,[...]”. Conforme Costa & Pinto (2017, p. 231): “O perfil desses jogadores no Brasil mostra que, de 51,7 milhões de pessoas, 11,8 milhões são jogadoras, [...] Ou seja, 23% dos brasileiros costumam, mesmo que esporadicamente, jogar videogames ou jogos eletrônicos”.

Por meio dos jogos digitais educacionais, o aluno terá mais facilidade: em se expressar, em organizar o pensamento, em trabalhar em equipe, de elaborar estratégias na resolução de problemas matemáticos, de enxergar os erros cometidos e tentar superá-los. Cabe ao docente viabilizar uma metodologia de ensino com esse recurso de modo coerente, deixando de ser o comunicador do conhecimento para ser o mediador.

### **Estudando Juros Simples com o jogo digital no *Scratch*: relato de experiência**

O *Scratch* é uma linguagem de programação com interface interativa, dinâmica, com ícones, botões e janelas fáceis de manusear, de usabilidade prática e com um ambiente muito atrativo para uma criança dos dias atuais. Essa ferramenta foi criada pelo programa Lifelong Kindergarten, do Media Laboratory, do MIT, que começou a ser desenvolvida em 2007, sob a supervisão de Mitchel Resnick. Segundo Beer (2013, p. 86):



## V ERMAC 2018 Maceió-AL

atualidade está familiarizado com as tecnologias digitais, seja por meio do uso do celular ou *games* em geral, e por meio delas é possível que o mesmo tenha mais facilidade de aprender, de maneira interativa e atrativa. A construção do jogo digital se deu por meio da linguagem de programação *Scratch*.

Os alunos foram levados à sala de informática da escola, onde puderam conhecer o jogo “Aula de Juros Simples”. Nele foram expostas as definições: capital aplicado ( $C$ ), taxa de juros ( $i$ ), juros ( $J$ ), tempo ( $t$ ), montante ( $M$ ). Após isso, foram colocados dois exemplos de aplicações financeiras e por último, os estudantes foram instigados a resolver duas situações-problema utilizando as definições e leis dadas durante o jogo.

Ao serem desafiados, os discentes prontamente pegaram seus lápis e cadernos para efetuar os cálculos necessários e responder a pergunta proposta no jogo, finalizando assim a “Aula de Juros Simples”. Por fim, responderam ao questionário que tinha como foco saber a opinião deles referente ao jogo que participaram.

### Conclusões

O artigo buscou apresentar como proposta o uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação no ensino-aprendizagem de Matemática, por meio de jogos digitais educacionais, afim de que o alunado se sinta motivado a participar da aula ativamente e possa construir o aprendizado de forma espontânea enquanto o professor deixa de ser o transmissor e passa a ser o mediador do conhecimento. Para tanto, buscamos investigar e explicitar algumas razões pelas quais o docente deve estar cada vez mais propenso a participar de formações nessa área e ter a consciência de que a tecnologia digital não pode ser desconectada do ensino, pelo contrário, ao estar inserida na educação, traz enormes benefícios para o bom desempenho escolar do alunado.

Quanto à experiência vivenciada pela autora durante a aplicação do jogo “Aula de Juros Simples” por meio da linguagem de programação *Scratch*, particularmente é contagiante perceber que o planejamento feito para que os objetivos fossem alcançados surtiu um efeito grandioso. Ao perceber que alunos com dificuldades de aprendizagem participaram ativamente da aula proposta e atenderam as expectativas da pesquisadora, só contribuiu para que as pesquisas continuem a fim de que as próximas aulas continuem sendo dinâmicas e corroborem para a plena construção da aprendizagem em Matemática.

### Agradecimentos

A autora da presente pesquisa agradece a Comissão Editorial do V ERMAC pela oportunidade de compartilhar a experiência vivenciada da aprendizagem de conteúdo matemático abordado por

V ERMAC 2018 Maceió-AL

meio a utilização de tecnologias digitais e almeja contribuir para o desenvolvimento do ensino de Matemática como um todo.

### Referências

- BEER, R. Programação para menores. **VEJA**. São Paulo. p. 86 – 89. jul. 2013. Disponível em: <<http://www.ft.unicamp.br/liag/wp-content/uploads/2015/12/Scratch-veja-2013.pdf>>. Acesso em: 10 dez. 2015.
- BORBA, M. C., PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 5. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). V. 2. P. 1-152. Brasília: MEC, 1998.
- CARVALHO, A. A. A. Jogos digitais e Gamification: desafios e competição para aprender na era mobile learning. In: **Aprendizagem, TIC e Redes Digitais**. Seminários e Colóquios. Conselho Nacional de Educação. 2017. p. 112 – 144.
- COSTA, J. S. A., PINTO, A. C. (Orgs.). **Tecnologias digitais da informação e comunicação na educação**. 1. ed. Maceió: EDUFAL, 2017. p. 1 – 319.
- LOPES, R. D., FICHEMAN, I.K., MARTINAZZO, A. A. G., CORREA, A. G. D., VENÂNCIO V., YIN, H. T., BIAZON, L. Z. **O uso do computador e da internet na escola pública**. 2008. Disponível em: <<http://www.fvc.org.br/estudos-e-pesquisas/avulsas/estudos1-7-uso-computadores.shtml?page=1>>. Acesso em: 06 jan. 2017.
- PAPERT, S. **LOGO: computadores e educação**. 3. Ed. São Paulo: Brasiliense, 1998. p. 1- 253.
- \_\_\_\_\_. **A máquina das crianças: repensando a escola na era da informática**. 1. Ed. Rev. Porto Alegre: Artmed, 2008. p. 1 – 207.
- SILVA, A. F. de, KODAMA, H. M. Y. Jogos no Ensino da Matemática. In: BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2, 2004, Salvador. **Anais da II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática**. Salvador: UFBA, 2004. P. 1 – 19.
- VALENTE, J. A. **Computadores e conhecimento: Repensando a computação**. 2. Ed. Campinas-SP: UNICAMP/NIED, 1998. p. 1-501.



## A utilização de materiais manipuláveis na resolução de problemas da OBMEP

*Amanda Maria Barros Tenório*

*Universidade Estadual de Alagoas - Campus Palmeira dos Índios  
amanda.tenorio@alunos.uneal.edu.br*

*Elielson Magalhães Lima*

*Universidade Estadual de Alagoas - Campus Palmeira dos Índios  
elielson@uneal.edu.br*

**Resumo:** Nas escolas, frequentemente quando se questiona “qual a disciplina mais difícil?”, ou mesmo “qual a pior disciplina da escola?”, as respostas, frequentemente, remetem à disciplina de matemática. A falta de relação entre a teoria e prática nos anos iniciais fazem com que os alunos se questionem sobre a real aplicação desta disciplina tão problematizada culturalmente. A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), tem como objetivo estimular o estudo da matemática e descobrir talentos na área em questão. Assim a utilização dos materiais manipuláveis no ensino básico possibilita uma melhor assimilação entre teoria e prática dos conteúdos aprendidos em sala durante as aulas. A possibilidade de aplicação dos MDs para resolução de questões da OBMEP pode ser utilizada como um mecanismo para desenvolver o raciocínio lógico, além de despertar o interesse do aluno no estudo da matemática.

**Palavras-chave:** Materiais Manipuláveis. Ensino. OBMEP.

### Introdução

Nas escolas, frequentemente quando se questiona “qual a disciplina mais difícil?”, ou mesmo “qual a pior disciplina da escola?”, as respostas, frequentemente, remetem à disciplina de matemática. Alguns autores falam que essa ideia de que a matemática “é um bicho de 7 cabeças” é algo que as pessoas criam em suas mentes tornando um monstro. Conforme coloca Gonzatto (2012), “um dos fatores que provocam aversão à Matemática é cultural”.

Consoante a isso, a falta de relação entre a teoria e prática nos anos iniciais fazem com que os alunos se questionem sobre a real aplicação desta disciplina tão problematizada culturalmente. Segundo Toledo (2010):

As dificuldades que os estudantes apresentam pela vida afora, em relação à matemática, decorrem, sobretudo, de uma falta de orientação nos primórdios de sua vida escolar, quando foram submetidos às dificuldades decorrentes da necessidade de fazer abstrações sem conhecerem a natureza e a finalidade desse tipo de exercício mental. Também concorre para esses problemas o distanciamento entre a teoria e prática cotidiana, o qual tende a aumentar com o passar do tempo e a montante complexidade do conhecimento matemático a ser desenvolvido em aula. (TOLEDO, 2010)

Assim, alguns meios que podem ser utilizados para diminuir a forma como a matemática é vista, e tornar a aula mais didática, é a utilização de materiais manipuláveis, representados na comunidade matemática pela sigla MD. Os MDs podem ser qualquer objeto, brinquedo, tecnologia, formas geométricas, jogos e outros elementos, que ajudem os professores a transmitir determinados conteúdos de forma mais didática, além de fazer com que o aluno se sinta mais interessado e entusiasmado a aprender, através da possibilidade de assimilação da aplicação da teoria em algo concreto. De acordo com Silva, Araujo e Silva (2015, p.04) “[...] Estes materiais são alternativas interessantes para que os alunos formulem hipóteses, troquem algumas ideias e façam descobertas, enriquecendo o momento de sua aprendizagem.[...]”.

### Materiais manipuláveis na resolução de questões da OBMEP

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), e desde 2017 também de escolas privadas, é um projeto realizado pela o Instituto Nacional de Matemática Aplicada (IMPA), com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), que tem como objetivo estimular o estudo da matemática e descobrir talentos na área em questão, dentro do território nacional.

Diante disso, a possibilidade de aplicação de MDs em sala de aula do ensino básico, tendo como foco a resolução de questões da OBMEP, possibilita o ensino da matemática de forma mais concreta. Como exemplo de aplicação, Rocha e Huanca, utilizaram um kit de polígonos, divididos fracionadamente, para a resolução do problema intitulado “Problema do Salário”, com o objetivo de possibilitar uma melhor compreensão dos aspectos fracionários do problema. Assim, conforme a aplicação, eles perceberam que através dos materiais manipuláveis os alunos puderam construir os seus próprios conhecimentos relativos à frações, e conseqüentemente houve um estímulo maior destes para a identificação e resolução do problema.

Por conseguinte, um dos principais objetivos dessa metodologia é possibilitar aos alunos uma nova abordagem de resolução de questões, no qual, possam construir o seu próprio conhecimento acerca dos conteúdos ministrados em sala de aula, tornando possível a relação entre o abstrato e o concreto e direcionando-os ao raciocínio conforme exigido nas questões da OBMEP.

### Conclusões

A utilização dos materiais manipuláveis no ensino básico, poderá possibilitar uma melhor assimilação entre teoria e prática dos conteúdos aprendidos em sala durante as aulas. A possibilidade de aplicação dos MDs para resolução de questões da OBMEP pode ser utilizada como um mecanismo para desenvolver o raciocínio lógico, além de despertar o interesse do aluno no estudo da matemática. Dessa forma, a partir da aplicação será possível observar e avaliar o desempenho dos alunos, através da análise das resoluções com e sem a utilização dos MDs. Além de identificar se a utilização destes proporcionou uma melhor assimilação dos conteúdos aprendidos em sala, nas resoluções de questões de forma concreta.

### Referências

GAUCHAZA. Por que 89% dos estudantes chegam ao final do ensino médio sem aprender o esperado em matemática? Disponível em: <https://goo.gl/9UJHje>. Acesso em: 15 abril 2018.

TOLEDO, C. N. Matemática: Um Bicho-de-sete-cabeças?. **ADUFRGS - Sindical**. 2010. Disponível em: <<https://goo.gl/4EjvKR>>. Acesso em: 19 maio 2018.

SILVA, G.; ARAÚJO, T.; SILVA, M. Desenvolvimento de materiais didáticos para o Ensino de matemática na formação docente: relato de experiência. In: COLÓQUIO INTERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO SUPERIOR, 2., 2015. João Pessoa. **Anais...** Paraíba: UFPB, 2015.

OBMEP. **OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS**. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/>>. Acesso em: 20 maio 2018.

ROCHA, P. M; HUANCA, R. R. H. O Uso de materiais manipuláveis para o ensino-aprendizagem de números racionais via resolução de problemas. In: ENCONTRO PARAIBANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2014. Campina Grande. **Anais...** Paraíba: UEPB, 2014.

## Estudo de projeções ortogonais utilizando a janela CAS do software GeoGebra

*Jade Marina Dias Gomes*

*Universidade Federal do Rio Grande do Norte; Escola de Ciências e Tecnologia  
jade.gomes9@hotmail.com*

*Fabiana Tristão de Santana*

*Universidade Federal do Rio Grande do Norte; Escola de Ciências e Tecnologia  
fabianatsantana@gmail.com*

**Resumo:** Este trabalho apresenta um estudo de projeções ortogonais com aplicação em aproximação de funções e utiliza o software GeoGebra para a realização dos cálculos e esboço dos gráficos. O software GeoGebra possibilita a implementação de métodos de resolução na Janela CAS e a visualização de gráficos, tanto no  $\mathbb{R}^2$  como no  $\mathbb{R}^3$ , permite melhor compreensão de muitos conceitos matemáticos estudados nos cursos de graduação. A melhor aproximação da função real  $f$  no espaço ortogonal  $W$ , gerado pelas funções trigonométricas  $\phi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2L}}$ ,  $\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{k\pi t}{L}$  e  $\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{k\pi t}{L}$ , para  $1 \leq k \leq n$ , foi obtida na Janela CAS do software GeoGebra onde a ferramenta controle deslizante atribuiu um efeito dinâmico ao grau do polinômio mostrando que quanto maior é este grau, melhor é a aproximação obtida.

**Palavras-chave:** Aproximações. Ensino. GeoGebra. Projeções Ortogonais.

### Projeções Ortogonais

Produtos internos são funções definidas em espaços vetoriais que satisfazem axiomas e propriedades específicas, além de estarem relacionados com inúmeras aplicações. Este conceito é utilizado para definir comprimento, distância e ângulo entre vetores e também o importante conceito de projeções ortogonais (ANTON; RORRES, 2001).

Considerando  $V$  sendo o espaço vetorial das funções reais e  $W$  o subespaço gerado pelas funções ortonormais  $\phi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2L}}$ ,  $\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{k\pi t}{L}$  e  $\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{k\pi t}{L}$ , para  $1 \leq k \leq n$ , utilizando o produto interno  $\langle g, h \rangle = \int_{-L}^L \phi(t) \varphi(t) dt$ , a projeção ortogonal da função  $f$  em  $W$ , denotada por  $proj_W f$ , é a função  $proj_W f = \langle f, \phi_0 \rangle \phi_0 + \langle f, \phi_1 \rangle \phi_1 + \dots + \langle f, \phi_n \rangle \phi_n + \langle f, \varphi_1 \rangle \varphi_1 + \langle f, \varphi_2 \rangle \varphi_2 + \dots + \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$ .

Pelos resultados da Álgebra Linear, a projeção de  $f$  em  $W$ , é a função de  $W$  mais próxima de  $f$ , por isso, considerada a aproximação de  $f$  em  $W$ . Desenvolvendo os cálculos acima utilizando o produto interno  $\langle g, h \rangle = \int_{-L}^L \phi(t) \varphi(t) dt$  e considerando  $a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt$ ,  $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt$ , e  $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt$  obtém-se

$$proj_W f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos \frac{k\pi t}{L} + \sum_{k=1}^n b_k \sin \frac{k\pi t}{L} \quad (1)$$

que coincide com a  $n$ -ésima soma parcial da série de Fourier da função  $f$  (ZILL; CULLEN, 2007).

Como exemplo, o software GeoGebra será utilizado para obter a melhor aproximação da função  $f(x) = x^2 + \pi$ , se  $-\pi < x < 0$  e  $f(x) = -x^2 + \pi$ , se  $0 \leq x < \pi$  no espaço  $W = \text{ger}\{\phi_0(x), \phi_k(x), \varphi_k(x)\}$ . As principais funções ou comandos que serão utilizados são: “Se[<Condição>, <Então>]”, que define funções com mais de uma sentença, “Controle Deslizante”, que será usado para dar flexibilidade ao grau

do polinômio aproximador, “Integral[<Função>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>”, para integração e, “Soma[Sequência[Expressão, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>]]”, para somar os termos de uma sequência obtidos substituindo a variável pelos valores compreendidos entre “Valor Inicial” e “Valor Final” (TRINDADE; GREGÓRIO, 2017).

Na Figura 1, pode-se ver os passos da implementação da projeção ortogonal realizada na Janelas CAS do GeoGebra com os comandos listados acima. Já na Janela de Visualização do GeoGebra, pode-se observar a função  $f$  e a função aproximação com grau 14 obtida considerando o parâmetro  $k$  do controle deslizante igual a  $k = 14$ .

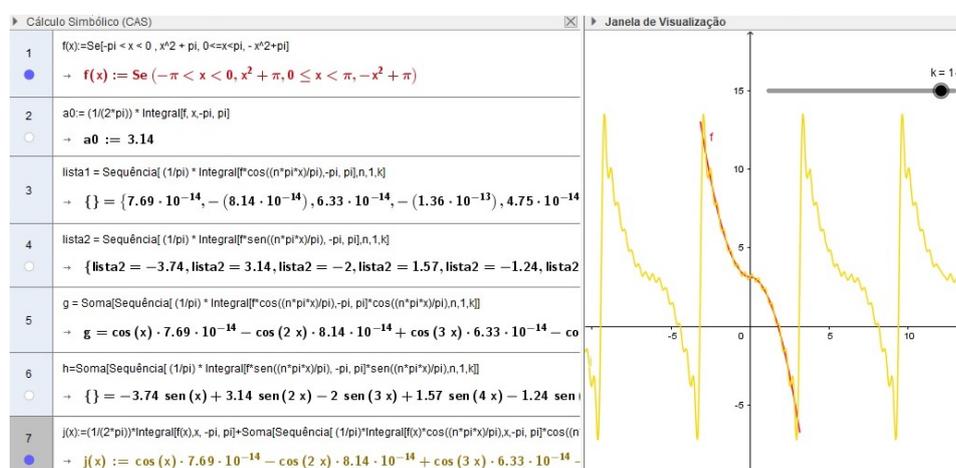


Figura 1: Desenvolvimento da projeção ortogonal da função  $f$  na Janela CAS do GeoGebra.

## Conclusões

O desenvolvimento do trabalho mostra uma aplicação das projeções ortogonais na aproximação de funções. A aproximação obtida é a  $n$ -ésima soma parcial da série de Fourier da função  $f$  que foi obtida aqui através de conceitos importantes da Álgebra Linear e implementada com o auxílio do software GeoGebra. O desenvolvimento dos cálculos foram feitos na Janela CAS do GeoGebra, que é um software educativo de linguagem acessível pode ser utilizado em cursos de graduação como complemento e auxiliar no processo de ensino e aprendizagem. A utilização de ferramentas computacionais, tem por objetivo ajudar na compreensão de conceitos estudados e tornar o estudo mais interessante.

## Referências

- ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**, Bookman, 2001.
- HOHENWARTER, M.; HOHENWARTER, J. Ajuda GeoGebra: manual oficial da versão 3.2. Disponível em: <[https://app.geogebra.org/help/docupt\\_PT.pdf](https://app.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf)>. Acesso em: 29 jul. 2017.
- TRINDADE, D.; GREGÓRIO, R. Tutorial janela CAS. Disponível em: <<https://www.passeidireto.com/arquivo/18235763/tutorial-janela-cas-geogebra>>. Acesso em: 29 jul. de 2017.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações diferenciais**. São Paulo: Makron Books, 2007. v.2.

Parte IV

**Modelagem Computacional em  
Educação**

## Uma proposta de análise de órbitas celestes com o estudo do hodógrafo

*Rafael Peres*  
Unicamp; Imecc  
ra208749@ime.unicamp.br

*Daniela Pereira Mendes Peres*  
Unicamp; Imecc  
ra113949@ime.unicamp.br

*Juliana G. Ferreira de Souza*  
Unicamp; Imecc  
ra089486@ime.unicamp.br

**Resumo:** Um tema para alunos que iniciam o curso de cálculo é a possível colisão da Terra com cometa, pois as consequências são catastróficas, por esse motivo a comunidade internacional rastreia os NEO's objetos extraterrestres próximos ao nosso planeta, que intersectam a órbita da Terra.

Vamos propor uma atividade (possível colisão da Terra com um cometa) de forma motivadora fazendo uso de tecnologia para alunos do curso de cálculo, usando coordenadas polares, utilizando como ferramenta principal o software Wolfram Mathematica ilustrando com gráficos, além de demonstrar a segunda Lei de Kepler e a construção do hodógrafo.

O que se espera de um aluno de ensino superior é que atinja um nível matemático avançado o que vem a ser muito difícil. Podemos utilizar ferramentas computacionais como facilitadoras.

**Palavras-chave:** Modelagem Computacional em Educação. Hodógrafo. Lei de Kepler. Coordenadas Polares.

### Introdução

Esse texto está organizado como segue, na seção II é dado o passo a passo da solução do problema proposto lembrando uso de coordenadas polares, utilizando como ferramenta principal o software Wolfram Mathematica ilustrada com gráficos, além de demonstrar a segunda Lei de Kepler conhecida como lei das áreas. Na seção III fizemos a construção do hodógrafo. Na seção IV fizemos uma síntese sobre a importância educacional pedagógica da atividade.

### A estratégia do cálculo

Analisando uma possível colisão na intersecção, uma equipe mostra o seguinte plano: Construir as equações polares das Órbitas. Usar um recurso gráfico para gerar as duas órbitas e intersecção na mesma tela. O Segundo passo é determinar as coordenadas polares da intersecção. Usar uma das equações polares obtidas, para encontrar as coordenadas cartesianas do ponto. Tempo necessário para a Terra atingir a intersecção. Segunda lei de Kepler. Usando a equação polar para órbita da Terra, determinar o tempo  $t$ , necessário para a Terra mover-se de sua posição inicial até a intersecção. Posição do cometa quando a Terra estiver na intersecção. Emitir uma notificação para agências governamentais sobre qualquer asteroide ou cometa que esteja dentro de 4 milhões de quilômetros da Terra em uma intersecção orbital. Finalizando, calcular a distância entre a Terra e o cometa quando a Terra estiver na intersecção, e então determinar se uma notificação deverá ser emitida.



## Integração entre os indicadores de gestão do *Scrum* e indicadores de gestão do *PMBOK*

*Giseldo S. Neo*  
Universidade Federal de Alagoas  
[gsn@ic.ufal.br](mailto:gsn@ic.ufal.br)

*Alana B. S. Neo*  
Instituto Federal de Alagoas  
[viana.alana@gmail.com](mailto:viana.alana@gmail.com)

*Jose do Carmo Rodrigues*  
Estácio  
[jcrodrigues@uol.com.br](mailto:jcrodrigues@uol.com.br)

**Resumo:** Este artigo analisa e compara os indicadores de gestão de projeto ágil baseado no modelo *Scrum* e os indicadores de gestão tradicional baseado no *PMBOK* com foco em projetos de software. Neste é apresentado a origem do modelo *PMBOK* e do framework *Scrum* com seus principais indicadores. Em seções posteriores foi analisado a utilização destes indicadores, e por fim os autores elaboraram um quadro comparativo. Atualmente existe um relatório que é publicado na internet pela organização *Standish Group International*, chamado de o *Chaos Report*, que consolida os dados de projetos de tecnologia de diversas empresas em vários países. Em 2015, somente 29% dos projetos foram classificados como projetos de sucesso. Isto quer dizer que a grande maioria dos projetos não alcançou o término dentro do prazo e do custo orçados no planejamento. O desenvolvimento de software é complexo, envolve muitas variáveis e propenso a diversas falhas, logo o correto uso de indicadores de gestão pode auxiliar no alcance dos objetivos estabelecidos no planejamento.

**Palavras-chave:** Indicadores, Análise Aplicada, *Scrum*, *PMBOK*.

### 1. Introdução

A ciência da computação, aqui definida como o conhecimento organizado de forma sistêmica, vem sendo estudada desde a antiga Grécia, século III A. C., e pode ser encontrada nos algoritmos elaborado por Euclides. Ela pode ser dividida em duas áreas: Uma com ideias fundamentais e modelos computacionais (ênfase teórica), e outra com o projeto de sistemas computacionais (ênfase prática) segundo DIVERIO e MENEZES (1999, pag. 2). Um marco relevante, relacionado a ênfase prática da ciência da computação, aconteceu em 1843 quando Ada *Lovelace*, publicou notas em um artigo onde constam a descrição de rotinas recursivas e condicionais que podem ser entendidas como a descrição do primeiro algoritmo moderno conforme ISAACSON (2014, p. 39-41).

Uma vez que os computadores foram utilizados para resolver problemas cada vez mais complexos, os cientistas da computação perceberam que não precisavam somente de bons algoritmos, diversos fatores causavam interferência no projeto e para lidar com estas complexidades utilizaram diversos estudos já aplicados na área de outras engenharia, estando entre elas a gestão de projetos conforme BROOKSHEAR (2009, p. 19). Problemas no planejamento de projetos tinham sido identificados na década de 1950 e várias organizações estimularam a criação de instituições de estudo e desenvolvimento do gerenciamento de projeto. Assim surgiu a *International Project Manager Association (IPMA)*, criada em 1965, na Áustria, e o *Project Management Institute (PMI)*, nos EUA em 1969 conforme VALERIANO (2015, xxiii).

O *Standish Group International*, em 1994, publicou o seu primeiro relatório, onde 16% dos projetos foram identificados como projetos de sucesso. A taxa subiu um pouco desde então, em 2015 a taxa era de 29%. Isto quer dizer que a grande maioria dos projetos não alcançou o término dentro do prazo e do custo orçados no planejamento. Este relatório pode ser adquirido por 500 dólares ou gratuitamente caso o usuário seja membro da organização.



O *PMBOK* sugere uma gestão baseada em valor agregado, estabelecendo indicadores, como os de prazo e custo, e coletando informações: como o valor planejado, valor agregado e o valor atual durante o projeto. Já quando são utilizados métodos ágeis, os indicadores do *Scrum* geralmente são utilizados, esta abordagem mais recente surgiu a partir de dificuldades e experiências negativas com a previsibilidade dos modelos tradicionais e gerenciam a situação atual de projetos de desenvolvimento com outros indicadores.

Este artigo está organizado da seguinte maneira: a seção 2 apresenta a fundamentação teórica do modelo dos processos de desenvolvimento tradicional e da abordagem ágil, a seção 3 aborda especificamente os indicadores do *PMBOK* e do *Scrum*, a seção 4 sugere uma abordagem para o uso dos indicadores em conjunto e a seção 5 conclui com a proposta de junção e trabalhos futuros.

## 2. Fundamentação Teórica

### 2.1. Modelo de Processo de Desenvolvimento de Software Tradicional: cascata.

Um modelo de processo de software representa de maneira abstrata o processo de desenvolvimento, algumas vezes eles também são chamados de paradigmas. Estas abstrações podem ser consideradas *frameworks* e podem ser alteradas para criar processos mais específicos, o primeiro deles seria o modelo em cascata. Segundo SOMMERVILLE (2011, p. 34) “o primeiro modelo do processo de desenvolvimento de software a ser publicado foi derivado de processos mais gerais da engenharia de sistemas [...] por causa do encadeamento entre uma fase e outra, esse modelo é conhecido como ‘modelo em cascata’”.

As fases do modelo tradicional geralmente são: Definição de requisitos, onde os requisitos são documentados, projeto de sistema e software onde é desenhado a arquitetura da solução, implementação e teste de unidade que é onde acontece a codificação e teste das funcionalidades individuais; integração e testes de sistema onde acontecem a junção das partes desenvolvidas e testes integrados que vão de ponta-a-ponta validando sua saída esperada, após esta etapa o software está pronto para ser liberado para o cliente. E finalmente operação e manutenção, etapa onde se coloca o software em produção para ser utilizado.

Mas a adoção do ‘modelo em cascata’ não é garantia de sucesso, mesmo que existam processos de qualidade certificado por instituições internacionais, conforme MEIRA (2013, p. 101) “depois de errar muito, das mais variadas e possíveis formas, mesmo depois de passar pelo crivo de uma certificação internacional para qualidade e performance do processo de desenvolvimento de software, descobriu-se mais uma vez que não há negócios de tecnologia.”

### 2.2. Modelo de Desenvolvimento Ágil

Em 1993 o engenheiro de software Jeff Sutherland criava um novo processo chamado *Scrum*. “O primeiro Time de *Scrum* foi criado por Jeff Sutherland em 1993. Jeff trabalhava na empresa *Easel Corporation*, uma empresa de software de *Massachusetts* (Estados Unidos) e aplicou *Scrum* no projeto mais crítico da organização[...]. Em 2001, tanto Jeff Sutherland quanto Ken Schwaber foram signatários do Manifesto Ágil. Esse manifesto deu início ao chamado movimento Ágil, do qual *Scrum* faz parte.” (SABBAGH, 2013, p. 49)

Para que um processo possa ser considerado ágil alguns princípios devem ser seguidos conforme SABBAGH (2013, p. 19) “*Scrum* é Ágil porque, assim como outros métodos, metodologias e frameworks, sua utilização deve seguir os princípios e valores do Manifesto para o Desenvolvimento Ágil de Software.”. Os principais princípios são: satisfação do cliente com entrega de valor; mudanças são bem-vindas mesmo que venham tarde no projeto; entrega de software contínuas e frequentes, geralmente em semanas; negócios e desenvolvedores juntos atuando diariamente durante o Projeto; confiança e suporte aos membros do time; conversa Face a Face; software funcionando como avaliação primária do progresso; ambiente sustentável; atenção contínua e excelência nos detalhes técnicos; simplicidade maximizando a quantidade de trabalho não realizado; times auto gerenciáveis; e constantes reflexões sobre como melhorar a velocidade e eficiência.

### 2.3. Gestão baseado no *PMBOK*

O *PMBOK*, guia elaborado pelo *PMI*, é um conjunto organizado de informações e técnicas, abrangente e disciplinado, que definiu e consolidou muitos termos, auxiliando a disciplina de gestão de projetos a possuir um vocabulário único com processos e métodos reconhecidos. “Um Guia do Conhecimento em Gerenciamento de Projetos (Guia *PMBOK*®) Quinta Edição fornece diretrizes para o gerenciamento de projetos individuais e define os conceitos relacionados com o gerenciamento de projetos.” *PMI* (2013, p. 28).

Uma importante característica de um projeto é que ele tem um início e fim bem determinados, seu início e fim são claros, e mesmo havendo semelhança entre os projetos a sua entrega é única e isto os diferencia, diferente de um processo que é algo contínuo que serve para suportar um negócio. O resultado de um projeto pode iniciar um processo. Um ciclo de vida de um produto não deve ser confundido com o ciclo de vida de um projeto. O ciclo de vida de um produto geralmente é mais amplo. Dentro do ciclo de vida de um produto pode haver mais de um projeto, e cada projeto tem o seu ciclo de vida.

O *PMBOK* divide os processos para gestão de um projeto em 5 grandes grupos conforme *PMI* (2013, p. 48). “Os processos de gerenciamento de projetos são agrupados em cinco categorias conhecidas como grupos de processos de gerenciamento de projetos (ou grupos de processos)”. São eles: iniciação, planejamento, execução, monitoramento e controle e encerramento. Divide também os processos em 10 áreas: integração, escopo, tempo, custo, qualidade, recursos humanos, partes interessadas, aquisições, comunicação e riscos.

### 2.4. Gestão baseado no *Scrum*

O *Scrum* é utilizado para gestão de projetos de T.I. em especial para projetos de software, “o termo vem do jogo de rúgbi e se refere à maneira como um time trabalha junto para avançar com a bola no campo. Alinhamento cuidadoso, unidade de propósito, clareza de objetivo” (SUTHERLAND, 2014, p.12). A ideia central é fazer entregas rápidas e contínuas em períodos de tempo curto e definidos, planejando, entregando valor cedo, acolhendo a incerteza inerente ao processo de desenvolvimento sendo muito adaptável à mudança.

As principais práticas e termos utilizados no *Scrum* segundo SABBAGH (2013, p. 39) são: O Dono do produto - Esta pessoa representa a parte interessada que tem poder de decisão e priorização do que será desenvolvido, é o responsável pela visão do que será executado. Geralmente é um papel de quem está solicitando o serviço e o mais interessado para que tudo no projeto aconteça conforme o planejado. A equipe - São as pessoas que irão participar do projeto, geralmente entre 02 a 09 pessoas. Estas pessoas têm a capacidade de transformar a visão do dono de produto em software de qualidade. O Mestre *Scrum* - Esta pessoa será o responsável por disseminar as boas práticas e liberar os impedimentos do time, ajudando a acelerar a velocidade e orientando o restante da equipe em relação a estrutura.

## 3. Desenvolvimento

Esta seção apresenta os indicadores utilizados pelo *PMBOK* e pelo *Scrum* e uma proposta para trabalharem em conjunto, onde foram utilizadas as práticas dos dois modelos para representar a situação atual do projeto. Além de uma análise das principais ferramentas existentes para o gerenciamento do projeto com indicadores. Existem indicadores do processo de desenvolvimento, indicadores internos, indicadores externos.

### 3.1. Indicadores do *PMBOK* com Gestão de Valor Agregado.

O Gerenciamento do Valor Agregado, que tem como sigla GVA em português ou EVM em inglês, serve para acompanhar o desempenho de custos, avanço e produtividade de equipes de projetos software conforme *PMI* (2013, p. 216) “O Gerenciamento do valor agregado (GVA) é uma

metodologia que combina escopo, cronograma, e medições de recursos para avaliar o desempenho e progresso do projeto. É um método comumente usado para medição do desempenho dos projetos. ”. Segundo VARGAS (2013, p. 59) “A aplicação da análise de valor agregado pode ser considerada com maior possibilidade de sucesso em projetos com objetivos claros e tangíveis, com um detalhamento do escopo simples e direto”.

As variações da linha de base que podem ser monitoradas são: VPR (Variação de prazos), VC (Variação de Custos), IDP (Índice de desempenho de prazos) e IDC (Índice de desempenho de custos). Os indicadores IDC e IDP, que significam respectivamente indicadores de custo e de prazo, são derivados dos valores VP, VA e CR, levando em consideração também a data de conclusão da tarefa. IDC significa Índice de performance de custo e ajuda a analisar a eficiência dos custos do projeto. Ele é o valor do trabalho completado (VA) comparado com o custo atual utilizado no projeto (CR). O cálculo é o VA dividido pelo CR. Já o IDP que significa índice de performance de prazo indica o quão eficiente o projeto está prosseguindo em comparação com o planejado para o projeto. O cálculo é a divisão do valor agregado (VA) pelo valor planejado (VP). Estes indicadores, VA, PV, CR, IDP e IDC podem ser utilizados em projetos diversos, não necessariamente projetos de software. Já a variação de Prazos (VPR) é  $VA - VP$  e a variação de custos (VC) é  $VA - CR$ . Conforme PMI (2013, p. 219).

Para a previsão do resultado é utilizado o ENT, ONT e EPT, conforme o PMI (2013, p. 220) “a equipe do projeto pode elaborar uma previsão para a estimativa no término (ENT) que pode ser diferente do orçamento no término (ONT) baseado no desempenho do projeto”. O ONT é o valor planejado para todo o projeto, no início existe um valor planejado para o projeto que é utilizado futuramente como uma base para verificar se o projeto está indo de acordo com o planejado, é a soma de todos os orçamentos estabelecidos para o trabalho a ser executado. A Estimativa para completar (EPT), é o valor necessário para terminar o projeto.

Existe também o gráfico de curva S, conforme o PMI (2013, p. 219) “Os três parâmetros de valor planejado, valor agregado e custo real podem ser monitorados e relatados tanto de período a período (tipicamente semanalmente ou mensalmente como de maneira cumulativa. A curva S apresenta em forma de gráfico de linhas durante o tempo os valores do PV, VA e CR, assim é possível acompanhar durante o tempo o andamento dos valores destes indicadores no projeto.

Outras métricas de controle ou de processos que podem ser utilizadas são: o % de entrega de primeira vez correto (*FTR*), o custo de baixa qualidade (*COPQ*), a Taxa de defeitos (TD), o percentual de tipo de defeito e Tempo dos defeitos em aberto. O percentual de entrega de primeira vez correto é um indicador de performance, em inglês *FTR – First Time Right*, que é definido por (BEULEN et. al., 2011 p. 115, tradução nossa) “primeira vez' correto é um KPI especialmente importante (Indicador chave de performance)”. Significa o quanto do trabalho foi feito pela primeira vez corretamente. É o % de entregas, ou requisitos completos sem defeitos.

O custo de baixa qualidade (*COPQ*), segundo WEBBER e WALLACE (2011, p.20, tradução nossa) “O impacto de fornecer pouca qualidade é um conceito tão importante no campo do controle de qualidade que tem um nome formal: custo de má qualidade ou COPQ [...] Infelizmente, o COPQ para a maioria das empresas varia de 15 a 25%”. Ele é calculado dividindo o número de entregas completas sem defeitos pelo número de entregas completas.

A Taxa de defeitos, em inglês *defect rate*, segundo DOLPHIN (2017, tradução nossa) “Taxa de defeitos = defeitos identificados / número de requisitos ou casos de teste, portanto, se houver 100 casos de teste e o número de defeitos é de 20, então a Taxa de defeito é de 20%” é o esforço em horas de correção dos defeitos encontrado dividido pelo esforço em horas total para a entrega.

### 3.2. Indicadores do modelo ágil com Scrum

Para indicadores da qualidade do processo de desenvolvimento, quando adotado o modelo ágil, existe o indicador velocidade, em inglês *Velocity*. Conforme VAISHAMPAYAN (2014, p.80, tradução nossa) “Velocidade é uma das métricas ágeis. A velocidade do time é definida como a velocidade em que cada estória do usuário é transformada em software de trabalho. O total de números de pontos de estórias que um time pode contemplar em uma interação é chamado velocidade”, velocidade representa o número de Pontos de Estória completos dividido pelo número de pontos de estória planejados por sprint.

Existe também uma outra métrica chamado defeitos por pontos de estória, em inglês *defects per story Points*, conforme VAISHAMPAYAN (2014, p.81) “Defeito de pontos de estória: Esta métrica reflete a efetividade do time em entregar código livre de defeitos em ambientes subsequentes”. É calculado como o percentual de defeitos dividido pelos pontos de estórias completas, quanto menor o número de defeitos por pontos de estória melhor para o projeto, o objetivo é estabelecer e acompanhar metas para redução nas Sprints futuras.

Um outro indicador é o tempo de ciclo, em inglês *cycle time*. “Tempo de ciclo é uma outra métrica de medida de performance. Tempo de ciclo é definido como o tempo de relógio necessário para completar um simples item de trabalho do início ao fim” VAISHAMPAYAN (2014, p.82, tradução nossa). É o tempo para desenvolver uma funcionalidade de seu início até o seu final, utilizado para auxiliar nas estimativas das entregas do projeto.

Segundo SABBAGH (2013 p. 172) “Os Gráficos de *Release Burndown* e de *Sprint Burndown* são os dois tipos de Gráficos de *Burndown* de Trabalho mais utilizados por Times de *Scrum*. Os Gráficos de *Burndown* de Trabalho, diferentemente dos de *Burndown*, mostram a quantidade de trabalho já realizado no tempo e o trabalho total a se realizar. O Gráfico de *Burndown* de trabalho mais utilizado por Times de *Scrum* é o Gráfico de *Release Burndown*”. A partir destes dados podemos extrair o *Sprint Burndown Performance Indicator (SBPI)*.

#### 4. Resultados

A perspectiva de análise adotada no presente estudo considera a possibilidade de uma união entre os indicadores do *PMBOK* e o do *Scrum*, para esta comparação procurou-se encontrar equivalência entre eles, buscando pontos de convergência que estão detalhados na Tabela 1.

**Tabela 1** – Relação entre os indicadores do *Scrum* e *PMBOK*.

<i>PMBOK</i>		<i>Scrum</i>	
Indicador	Descrição	Indicador	Descrição
Sumário do Projeto	Visão geral do projeto com: Estimativa para completar(ENT), Orçamento no término (ONT), Estimativa no término(ENT), Índice de performance de prazo(IDP) e Índice de performance de Custo(IDC)	Sprint Burndown Performance Indicator	Sprint Burndown Performance Indicator (SBPI) mostra o tamanho do desvio no trabalho completado comparado com o tamanho do trabalho planejado para a sprint atual
Curva S	A curva S é um gráfico acumulativo que considera o total das entregas planejadas para um período e a quantidade cumulativa de entregas concluídas no período	Curva de velocidade	Pontos de estórias completos contra os pontos de estória planejado por Sprint
Defeitos por tipo de erro	É o quantitativo em % de defeitos por agrupados por tipo de erro	Defeito de pontos de estória	Esta métrica reflete a efetividade do time em entregar código livre de defeitos em ambientes subsequentes
Tempo de defeitos abertos	Um gráfico em barra que mostra valores agregados por dia, realçando o número de defeitos e o tempo de vida destes		
Taxa de Defeitos (TD)	Número de defeitos pelo esforço para mensurar a qualidade		
Custo de baixa qualidade ( <i>COPQ</i> )	Este indicador prove o percentual de defeitos que estão em aberto por falta de completo entendimento do que seria necessário para validar a entrega. Mensura o quanto assertivo é o mapa	Tempo de ciclo	É definido como o tempo de relógio necessário para completar um simples item de trabalho do início ao fim com

			sucesso
--	--	--	---------

Fonte: o autor

## 5. Conclusão

Algumas empresas e organizações resolveram estudar e definir as melhores práticas em gestão de projetos em tecnologia da informação. Entre elas o *PMI (Project Management Institute)* que é uma entidade que consolida um guia de boas práticas chamado *PMBOK – Project Management Book of Knowledge* uma referência na gestão de projetos e o framework ágil *Scrum*. O *PMBOK* e o *Scrum* têm o seu foco voltado especificamente para gestão dos projetos, portanto foram objeto de análise mais detalhada. Mas estas organizações trabalham independente. Procuramos neste estudo unificar estes dois modelos buscando convergência entre seus indicadores para melhorar a representação da situação dos projetos.

Uma junção entre os indicadores dos dois modelos pode trazer ganhos na representação da situação atual do projeto, existe muito espaço para evolução neste sentido. Os indicadores podem representar de forma unificada a situação do projeto, existe espaço para que sejam definidos padrões e nomenclaturas únicas para que o acompanhamento e apresentação da situação do projeto possa ser mais precisa, estabelecendo assim uma gestão de projetos mais eficaz. Como trabalho futuro pode-se utilizar uma ferramenta open-source e customiza-lá para a inclusão dos indicadores tradicionais e ágeis simultaneamente.

## 6. Referências

- BEULEN, E.; RIBBERS, P.; ROOS J.. *Managing IT outsourcing*. 2. ed. USA: Routledge 2011.
- BROOKSHEAR, J. G.. *Ciência da Computação: Uma visão abrangente (7th ed.)*. Editora bookman, Porto Alegre, 2008.
- DIVERIO, T. A.; MENZES, P. B.. **Teoria da Computação: Máquinas universais e computabilidade**. Ed. Sagra Luzzato. 1 edição, 1999.
- DOLPHIN, J.. *What They Don't Teach You in Project Management School*. 1 ed. Chennai, Índia: Notion Press 2017.
- ISAACSON, W.. **Os inovadores. Uma biografia da revolução digital**. 1 Ed. São Paulo: Companhia das Letras. 2014.
- MEIRA, S.. **Novos Negócios Inovadores de Crescimento Empreendedor No Brasil**. 1.ed. Rio de Janeiro: Casa da palavra. 2013.
- PMI, Project Management Institute. Um guia do Conhecimento em gerenciamento de Projetos*. 5ª. Ed. Pennsylvania, USA: Project Management Institute, Inc. 2013.
- SABBAGH, R. **Scrum: Gestão ágil para projetos de sucesso**. 1ª ed. São Paulo: Casa do Código, 2013.
- SOMMERVILLE, I.. **Engenharia de Software**. 9. ed. São Paulo: Editora Pearson Addison Wesley, 2011.
- SUTHERLAND, J.. **Scrum, a arte de fazer o dobro do trabalho na metade do tempo**. São Paulo: Leya, 2014.
- VAISHAMPAYAN V.. *Pmi-Acp Exam Prep Study Guide: Extra Preparation for PMI-ACP*

*Certification Examination*. 1. ed. *Bloomington, USA*: iUniverse: 2014

VALERIANO, D.. **Moderno Gerenciamento de Projetos**. 2.ed. São Paulo: Pearson *Education* do Brasil, 2015.

VARGAS, R. **Análise do valor agregado. Revolucionando o Gerenciamento de Prazos e Custos**. 6. Ed. Rio de Janeiro: Brasport, 2013.

WEBBER, L.; WALLACE, M.. *Quality Control for dummies – Kindle Edition*. 1 ed. *USA*: Wiley Publish, Inc. 2011.

Parte V

**Sistemas Fuzzy**

## Temporização de semáforos por Algoritmo Fuzzy

*Regina Serrão Lanzillotti*

*Universidade do Estado do Rio de Janeiro; Instituto de Matemática e Estatística e  
reginalanzillotti@gmail.com*

*Pedro Ricardo da Silva Goethen*

*Universidade do Estado do Rio de Janeiro; Instituto de Matemática e Estatística e  
pgoethen@gmail.com*

**Resumo:** O Algoritmo Fuzzy tratado pelo Princípio de Extensão com funções adaptativas pelo o uso da métrica do seno permitiu avaliar a pertinência dos fluxos de tráfego. Trata-se de um sistema lógico que mapeia entradas a saídas e propicia controle de processos com redução da complexidade oriunda de informações vagas, ambíguas e imprecisas. A modelagem sob a ótica da inferência fuzzy permitiu estimar a pertinência para substituir soma da taxa de ocupação crítica de veículos sob a forma associativa para duas vias com funções adaptativas pelo o uso da Métrica do Seno, onde a variação do fluxo foi traduzida pela Distância Quadrática de Mahalanobis. O método foi aplicado próximo ao cruzamento das vias urbanas Avenida Maracanã e Vinte e Oito de Setembro na quarta-feira de maio de 2012 e evidenciaram picos de tráfego nos intervalos horários de 8h as 9h, de 12h as 15h e de 21h as 22h. A instalação de um semáforo para ordenar o tráfego teria ciclo ótimo variando entre 21 a 89 segundos com atraso médio entre doze e treze segundos.

**Palavras-chave:** Modelagem Fuzzy, Funções Adaptativas, Controle semafórico.

### Introdução

Lofti A. Zadeh foi um dos mais ilustres pensadores contemporâneos. Engenheiro, embora a abrangência de seu interesse científico tenha ido muito mais além, pois em 1985 teve uma contribuição especial para o Simpósio Internacional sobre Lógica Múltiplo Valor, ocasião de celebração dos vinte e cinco desde do primeiro artigo sobre Conjuntos Fuzzy. Pesquisador que quebrou as fronteiras do conhecimento com a introdução dos Conjuntos Fuzzy, da Lógica Fuzzy e da computação mais amigável no controle Fuzzy na condução automatizada de trens metropolitanos (TRILLAS (2011, 575p).

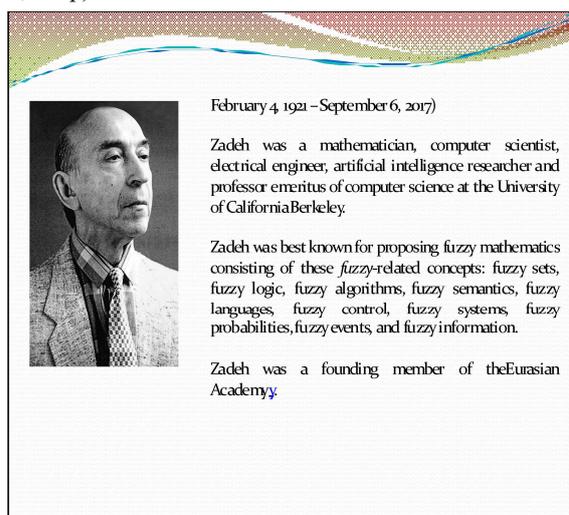


Figura 1: Zadeh, um homem e seu trabalho



A Lógica Fuzzy (ZADEH, 1965, p.14) é uma alternativa para expandir a capacidade linguística com raciocínio próximo ao pensar humano, contribuindo na modelagem comportamental inferindo regras fuzzy que descrevem a associação de domínio e contradomínio. Esta relação funcional pode ser materializada com o uso do Princípio de Extensão que lida com problemas em que transições de um padrão para outro ocorrem de maneira suave, substituindo a distribuição de probabilidade Multinomial ou Binomial inerentes a separatrizes rígidas. Possibilita tratar com variáveis quantificáveis traduzidas por valores de pertinência no intervalo fechado entre zero e um. Assim, o sistema lógico de inferência fuzzy é um processo que mapeia entradas (antecedentes) e saídas (consequentes) relacionadas em associatividade pela fuzzificação e inferência Fuzzy, Figura 2.

### Sistema Lógico Fuzzy

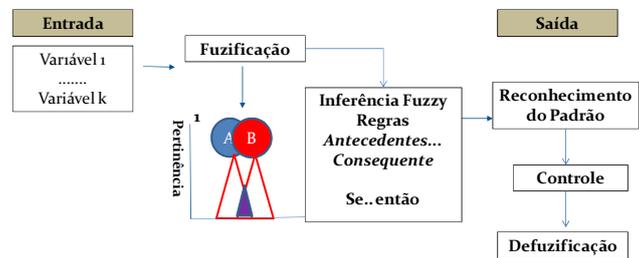


Figura 2: Arquitetura Fuzzy

#### Abordagem metodológica

No método Fuzzy há uma avaliação gradativa para os valores de pertinência, desenvolvida pelo Princípio de Extensão (ZIMMERMANN, 2001, p.75) segundo a expressão:

$$\{x, \mu_A(x) \text{ tal que } x \in X\} \tag{1}$$

onde  $\mu_A(x)$  é a função de pertinência que varia no intervalo  $[0,1]$ , que descreve o grau de pertencimento de  $x \in X$  em  $A$ , Figura 3, etapa designada por Fuzzificação. No caso de tráfego urbano avaliado para os duas vias, vislumbra-se a relação  $R$  fuzzy no espaço bidimensional  $R^2$ , que corresponde ao mapeamento de relações binárias expressas por:

$$(x, y), \mu_R(xy) \text{ tal que } (x, y) \in (X, Y) \tag{2}$$

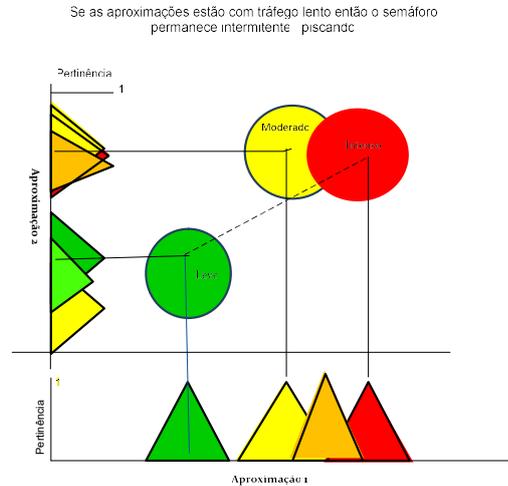


Figura 3: Conjuntos Fuzzy no R2

Desta forma, a inferência fuzzy pode ser ativada segundo o Princípio de Extensão com funções adaptativas pelo uso da métrica do seno (MITAIM E KOSKO, 2001, 648p) que permite obter a pertinência da demanda de veículos nas duas vias, pela expressão

$$a[x]_j = \frac{\text{sen}(d_j(x))}{d_j(x)}, \quad (3)$$

onde  $d_j(x) = d_j(x, m_j, K_j)$  como a forma quadrática com matriz definida positiva, sendo  $K_j$  a inversa da matriz de covariância e  $m_j$ , o vetor das médias, conhecida como a Distância Quadrática de Mahalanobis obtida pela expressão:

$$d_j^2 = (x - m_j)^T K_j (x - m_j) \quad (4)$$

A aplicação da Engenharia Fuzzy permitiu estabelecer a pertinência para a demanda de tráfego em duas vias sob a ótica da Inferência Fuzzy. O cálculo de ciclo ótimo  $C_0$  pode ser obtido segundo o tempo da perda total  $T_p$  e do somatório de taxas de ocupação crítica para cada via,  $y_i$ , medida definida pela proporção da demanda de veículos na via em relação ao fluxo de saturação, sendo que o volume veicular horário avaliado como o de saturação nem sempre está disponível, o que conduz a adotar a estimativa segundo o produto da largura de uma via da padrão por 525 veículos (DENATRAN, 1984, p61).

$$C_0 = \frac{1,5T_p + 5}{1 - \sum_{i=1}^n y_i} \quad (5)$$

A meta desta proposta é substituir o somatório das taxas de ocupação críticas pela pertinência obtida pela métrica do seno para a obtenção da pertinência da demanda de veículos nas duas vias de forma interativa percebendo-se a variação em relação ao valor médio. A validação da estimativa do ciclo ótimo para a possível instalação de um semáforo, caso haja necessidade, foi obtida pela aferição do tempo médio de atraso segundo a proposta de Webster (DENATRAN, 1984, p. 77)

### Aplicação

A CET-Rio realiza a fiscalização eletrônica mensal que fornece o levantamento do volume veicular a cada intervalo horário por mês e ano por logradouro e cria um arquivo de dados. A aplicação do modelo objetiva avaliar o ciclo semaforico considerando a interação entre os fluxos provenientes das vias São Francisco Xavier próximo à praça Maracanã e Boulevard Vinte e Oito de Setembro próximo ao nº 294. A figura 4 mostra a demanda de tráfego nas duas vias para os carros de passeio referentes a um dia de maio de 2012 no período de 24 horas.

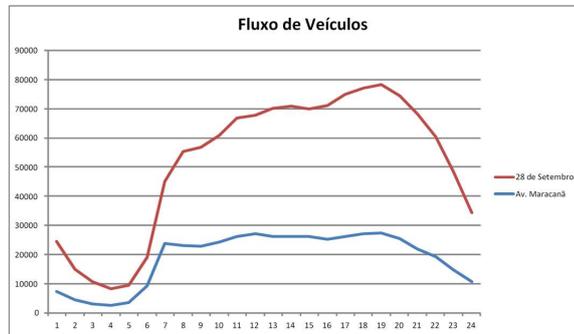


Figura 4: Fluxo de Veículos

A efetivação da inferência fuzzy segundo o Princípio de Extensão com funções adaptativas pelo uso da métrica do seno exigiu que fosse obtida a Distância Quadrática de Mahalanobis, resultados colocados na Tabela 1 sob a forma de matriz simétrica definida positiva.

Tabela 1: Matriz das Distâncias Quadráticas de Mahalanobis

1,38	1,46	1,50	1,52	1,44	0,90	1,47	1,07	0,99	1,08	1,15	1,25	1,03	1,03	1,04	0,81	0,81	0,91	0,91	0,67	0,48	0,72	1,08	1,23
1,46	1,61	1,68	1,71	1,66	1,28	1,05	0,91	0,89	1,02	1,16	1,24	1,14	1,15	1,15	1,05	1,11	1,18	1,20	1,04	0,66	0,13	0,91	1,24
1,50	1,68	1,76	1,80	1,75	1,41	0,86	0,86	0,86	1,01	1,18	1,25	1,19	1,21	1,20	1,13	1,21	1,28	1,31	1,16	0,84	0,42	0,85	1,26
1,52	1,71	1,80	1,84	1,79	1,48	0,72	0,82	0,83	1,00	1,19	1,24	1,22	1,23	1,22	1,18	1,26	1,33	1,36	1,22	0,92	0,53	0,81	1,26
1,44	1,66	1,75	1,79	1,76	1,53	0,47	0,61	0,68	0,87	1,09	1,13	1,18	1,20	1,17	1,19	1,30	1,36	1,39	1,27	1,06	0,74	0,58	1,16
0,90	1,28	1,41	1,48	1,53	1,66	1,82	0,97	0,76	0,56	0,42	0,18	0,93	0,97	0,90	1,20	1,37	1,39	1,44	1,44	1,48	1,27	1,02	0,39
1,47	1,05	0,86	0,72	0,47	1,82	3,14	1,94	1,69	1,65	1,48	1,73	0,68	0,58	0,80	1,14	1,44	1,35	1,45	1,68	2,06	1,96	2,01	1,61
1,07	0,91	0,86	0,82	0,61	0,97	1,94	1,23	1,08	1,08	1,01	1,16	0,62	0,58	0,67	0,54	0,75	0,66	0,73	0,92	1,21	1,18	1,27	1,09
0,99	0,89	0,86	0,83	0,68	0,76	1,69	1,08	0,96	0,96	0,92	1,05	0,61	0,58	0,65	0,38	0,57	0,47	0,54	0,74	1,03	1,01	1,11	0,99
1,08	1,02	1,01	1,00	0,87	0,56	1,65	1,08	0,96	0,99	0,97	1,09	0,71	0,69	0,74	0,10	0,38	0,16	0,28	0,60	0,95	0,97	1,11	1,04
1,15	1,16	1,18	1,19	1,09	0,42	1,48	1,01	0,92	0,97	0,99	1,10	0,82	0,81	0,84	0,52	0,44	0,56	0,54	0,06	0,73	0,81	1,03	1,07
1,25	1,24	1,25	1,24	1,13	0,18	1,73	1,16	1,05	1,09	1,10	1,22	0,86	0,85	0,89	0,45	0,26	0,47	0,41	0,43	0,92	0,98	1,19	1,18
1,03	1,14	1,19	1,22	1,18	0,93	0,68	0,62	0,61	0,71	0,82	0,86	0,81	0,82	0,81	0,75	0,80	0,85	0,87	0,76	0,51	0,17	0,62	0,87
1,03	1,15	1,21	1,23	1,20	0,97	0,58	0,58	0,58	0,69	0,81	0,85	0,82	0,82	0,82	0,78	0,83	0,88	0,89	0,79	0,58	0,29	0,58	0,86
1,04	1,15	1,20	1,22	1,17	0,90	0,80	0,67	0,65	0,74	0,84	0,89	0,81	0,82	0,82	0,74	0,77	0,83	0,84	0,72	0,43	0,19	0,67	0,89
0,81	1,05	1,13	1,18	1,19	1,20	1,14	0,54	0,38	0,10	0,52	0,45	0,75	0,78	0,74	0,89	1,00	1,02	1,06	1,03	1,01	0,84	0,59	0,54
0,81	1,11	1,21	1,26	1,30	1,37	1,44	0,75	0,57	0,38	0,44	0,26	0,80	0,83	0,77	1,00	1,14	1,15	1,20	1,19	1,20	1,03	0,79	0,44
0,91	1,18	1,28	1,33	1,36	1,39	1,35	0,66	0,47	0,16	0,56	0,47	0,85	0,88	0,83	1,02	1,15	1,18	1,22	1,19	1,18	0,99	0,71	0,58
0,91	1,20	1,31	1,36	1,39	1,44	1,45	0,73	0,54	0,28	0,54	0,41	0,87	0,89	0,84	1,06	1,20	1,22	1,26	1,24	1,24	1,05	0,78	0,55
0,67	1,04	1,16	1,22	1,27	1,44	1,68	0,92	0,74	0,60	0,06	0,43	0,76	0,79	0,72	1,03	1,19	1,19	1,24	1,26	1,32	1,15	0,97	0,18
0,48	0,66	0,84	0,92	1,06	1,48	2,06	1,21	1,03	0,95	0,73	0,92	0,51	0,58	0,43	1,01	1,20	1,18	1,24	1,32	1,48	1,34	1,27	0,81
0,72	0,13	0,42	0,53	0,74	1,27	1,96	1,18	1,01	0,97	0,81	0,98	0,17	0,29	0,19	0,84	1,03	0,99	1,05	1,15	1,34	1,25	1,23	0,89
1,08	0,91	0,85	0,81	0,58	1,02	2,01	1,27	1,11	1,11	1,03	1,19	0,62	0,58	0,67	0,59	0,79	0,71	0,78	0,97	1,27	1,23	1,31	1,12
1,23	1,24	1,26	1,26	1,16	0,39	1,61	1,09	0,99	1,04	1,07	1,18	0,87	0,86	0,89	0,54	0,44	0,58	0,55	0,18	0,81	0,89	1,12	1,15

O Princípio de Extensão com o uso da métrica do seno permitiu obter as pertinências da demanda interativa dos volumes veiculares nas duas vias por intervalos horários do dia que gerou uma matriz de mesma dimensionalidade da Distância de Mahalanobis, construindo-se a série temporal das pertinências medianas, Figura 5.

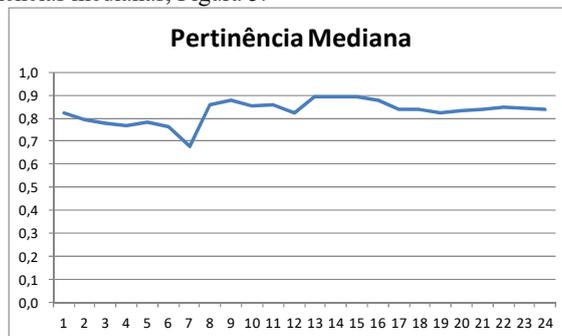


Figura 5: Pertinências Mediana interativas de fluxo

No cálculo do ciclo para cada período horário optou-se pela pertinência mediana, sendo possível visualizar os movimentos oscilatórios na Figura 6. De zero hora as 7h ocorreu um decréscimo do ciclo ótimo para o semáforo, seguido de dois movimentos ciclos ascendentes referentes a série temporal, sendo que um deles finda as 12h, quando se inicia outro mais ascendente até as 17h, voltando a uma tendência estacionária até o final do dia. Isto evidencia quatro padrões de tráfego durante um dia, uma vez que a determinação do tempo do ciclo semafórico é função da demanda do tráfego nos logradouros explicitada pela pertinência fuzzy, estimativa aceitável para soma das taxas críticas de ocupação das vias, sem a necessidade de se conhecer o fluxo de saturação da via.

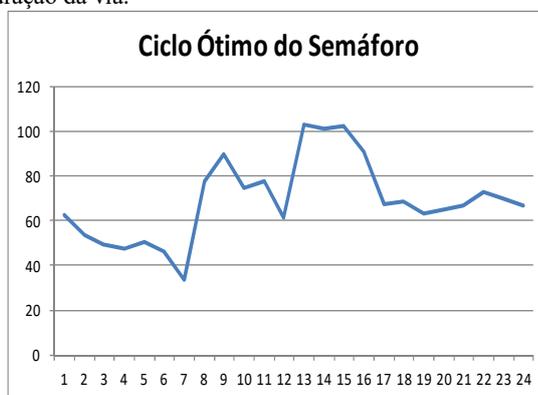


Figura 6: Ciclo ótimo do Semáforo

A aferição do acerto da temporização do semáforo quando da repartição do tempo de ciclo para o verde e o entre verdes (vermelho e amarelo) pode ser aquilatado pelo atraso médio constante do Manual do Denatran, cujos valores em segundos estão na Figura 7, que guarda a feição dos ciclos.

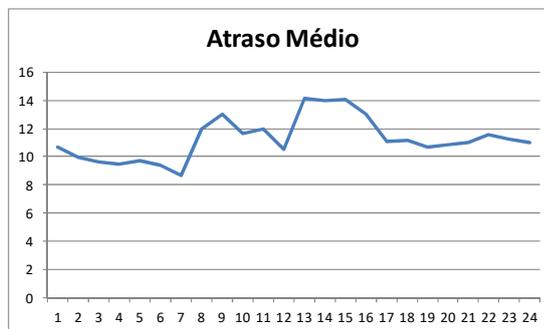


Figura 7: Atraso Médio

Discrimina-se os tempos dos atrasos médios mais expressivos para os intervalos horários de um dia de maio de 2012 para as vias São Francisco Xavier próximo à praça Maracanã e Boulevard Vinte e Oito de Setembro próximo ao nº 294: 12 segundos de 21 as 22 horas, 13 segundos de 8 as 9 horas, 14 segundos de 12 horas as 15 horas.

### Conclusões

O algoritmo sob a ótica da inferência fuzzy segundo o Princípio de Extensão com funções adaptativas pelo o uso da métrica do seno que aferiu a variabilidade pela Distância Quadrática de Mahalanobis permitiu mostrar que há viabilidade de temporizar um semáforo sem o conhecimento do fluxo de saturação pois, a pertinência conjunta propiciou a obtenção do ciclo para cada período horário, seu faseamento e aferição dos atrasos médios.

A continuidade da busca por novas métricas sugeridas por Mitaim Itaim e Kosko devem ser testadas para aferir a pertinência interativa em cruzamentos com vários sentidos de tráfego, uma vez que a distância de Mahalanobis vem reduzir espaços multidimensionais em espaço unidimensional, contribuindo para otimizar a ordenação do tráfego urbano.

### Referências

MITAIM, S.; KOSKO, B.. The shape of fuzzy sets in adaptive function approximation. **Ieee Transactions On Fuzzy Systems**, [s.l.], v. 9, n. 4, p.637-656, 2001. Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE). <http://dx.doi.org/10.1109/91.940974>.

TRILLAS, E.. Lofti A. Zadeh: On the man and his work. **Scientia Iranica**, Iran, p.574-579, 18 mar. 2011.

ZADEH LA. Fuzzy sets. *Inform Contr.* 1965;8: 338-53

ZIMMERMANN, HJ. Fuzzy Set Theory-and Its Applications, Fourth Edition; Library of Congress Cataloging-in-Publication Data -4th, and index. ISBN 978-94-010-3870-6,2001

## Lógica fuzzy em sistema de jogo num combate bélico hipotético

Izabel Cristina Reis Ramos

CComp UERJ

belramos38@gmail.com

Regina Serrão Lanzillotti

Ccomp UERJ

reginalanzillotti@gmail.com

**Resumo:** Exercícios de combate são executados com propósito de treinamento e capacitação, neles são tomadas decisões baseadas na disponibilidade de recursos para atacar o inimigo, como num jogo de guerra. Considerou-se o alvo, um navio, a arma, uma bomba ou foguete transportada por uma aeronave. Foi criado um modelo fuzzy para tomada de decisões com base nas informações de armamento e coordenadas geográficas. Essa modelagem responde dinamicamente sobre a possibilidade de sucesso através dos Conjuntos Fuzzy. Neste cenário bélico a ativação do sistema depende de três entradas: Velocidade Relativa da Arma-Alvo, Tamanho Virtual do Alvo e Altitude de Voo. As vinte e sete regras relacionais fuzzy foram inferidas segundo proposição “Se...”Então” estabelecidas mediante entrevistas com especialistas em Combate Aéreo que permitiu traduzir o cenário do sistema de jogo num combate hipotético. O modelo fuzzy identificou duas situações de combate idênticas (padrões), mas que foram diferenciadas por um valor de contingência, propiciando soluções agregadas a destreza do controlador e em sua ausência o sistema será capaz de indicar uma melhor opção de engajamento, atribuindo valor de pertinência no intervalo de zero a um. Cabe operacionalizá-lo por meio da construção de um aplicativo que vai introduzir a nova funcionalidade deste Sistema de Jogos.

**Palavras-chave:** Fuzzy. Jogo de combate.

### Introdução

Exercícios de combate são executados com propósito de treinamento e capacitação em técnicas de combate. Durante a execução de um exercício são tomadas decisões com base em vários fatores, entre eles a disponibilidade de recursos, sendo que um dos possíveis combates envolve a utilização de aeronaves com o propósito de atacar um inimigo não identificado e sem o conhecimento da sua posição real geográfica, a feição de um jogo de guerra. As regras de combate definem qual o alvo que deverá ser escolhido no comboio, considerando o tipo de aeronave e o armamento que dispõe no momento do ataque.

Um combate é definido como o uso de uma arma contra um alvo. Nesse estudo considerou-se como alvo de superfície, um navio, e a arma, uma bomba ou foguete transportada por uma aeronave. Essa arma selecionada classifica-se como de acerto individual, projetada e desenvolvida para que se obtenha a destruição/neutralização do alvo em um único acerto. Quanto à detonação da carga explosiva transportada pela aeronave, a arma individual pode incorporar sensores dispositivos dos campos de influência gerados pelo próprio alvo (campo magnético, acústico, térmico etc.), que farão detonar as cargas explosivas no ponto de maior aproximação com o alvo, independente da ocorrência de impacto (ALMEIDA, 2003, p. 5). Ressalta-se que em um combate há danos sofridos tanto pelos agentes envolvidos quanto em termos de perda de capacidade operacional, além do consumo de armamento durante o uso no conflito.

O trabalho proposto objetiva criar um modelo que permita auxiliar a tomada de decisões durante o combate, retratando a possibilidade de ataque a um comboio pela aeronave. O modelo será capaz de indicar a contingência de cada possível alvo a ser engajado. Esse tipo de abordagem lida com informações imprecisas e os resultados obtidos nem sempre devem ser tratados de forma dicotômica, “sucesso” ou “fracasso”, mas pela avaliação da pertinência de ocorrer sucesso no combate.

Durante o jogo cada partido tem uma visão completa dos seus próprios recursos, porém se torna incompleta no cenário do jogo, ou seja, desconhece as localizações dos recursos do oponente. Ao sofrer um ataque, um partido obtém informação do oponente, então tomará as medidas cabíveis, parte dinâmica do jogo (WAN et al, 2017, p. 5). Esta proposta foi consubstanciada pela modelagem fuzzy, como uma alternativa para decisões em jogos militares dinâmicos.

## Método

A Modelagem Fuzzy consegue classificar a partir de uma categorização acoplada ao valor da função de pertinência, por meio dos Conjuntos Fuzzy (CF). O raciocínio exato corresponde a um caso limite do aproximado, sendo interpretado como um processo de composição de relações fuzzy. O valor verdade de uma proposição pode ser um subconjunto fuzzy de qualquer conjunto parcialmente ordenado, ao contrário dos sistemas lógicos binários, onde o valor verdade só pode assumir dois valores: verdadeiro (1) ou falso (0) (GOMIDE; GODWIN, 1994, p. 97).

As etapas que compõem um sistema de fuzzy, Figura 1, são *fuzificação*, *relações fuzzy* e *defuzificação*. A fuzificação transforma entradas do sistema em termos linguísticos com os respectivos valores de pertinência. As *relações fuzzy* mapeiam os antecedentes aos consequentes por meio de regras relacionais fuzzy definidas pelo estrategista do jogo. A defuzificação é a etapa que transforma as pertinências das variáveis linguísticas em valores de variáveis observáveis, mas nesta arquitetura fuzzy não foi tratada esta etapa.

No transcorrer do jogo, decisões são tomadas, algumas relacionadas ao ataque, do ponto de vista dos partidos. A proposição de um ataque aéreo implicará numa decisão futura a ser tomada pelo controlador, que com base nas informações de armamento usado e coordenadas geográficas do ponto de ataque proposto, decidirá qual alvo será engajado. Nesse momento do jogo, a introdução de um sistema lógico fuzzy vem a proporcionar uma resposta dinâmica de um alvo com uma maior possibilidade de sucesso no engajamento.

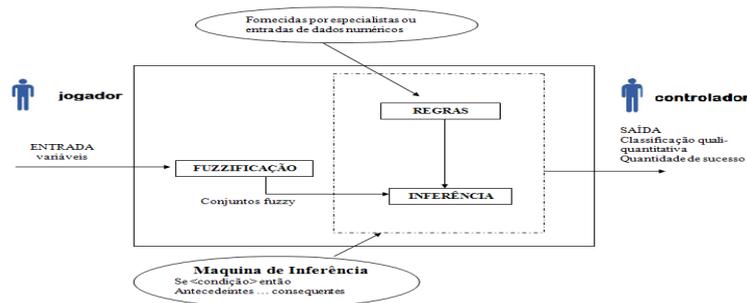
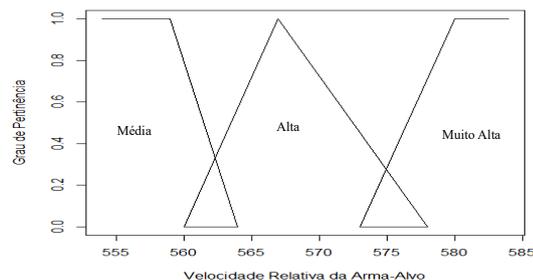


Figura – 1: Arquitetura fuzzy do sistema de jogo num combate hipotético

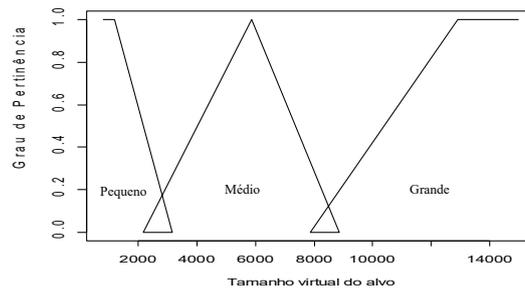
A construção de um sistema especialista *fuzzy* se inicia com a especificação do problema em termos de engenharia de conhecimento, ou seja, definir as variáveis de entrada e de saída. Neste sistema foram adotados os conjuntos fuzzy que vieram a definir as variáveis linguísticas com seus respectivos suportes e valores de pertinências, fase de fuzificação. A metodologia impõe a interseção entre conjuntos adjacentes, de modo que haja a classificação atributiva de forma mais suave possível. Neste sistema optou-se por um conjunto fuzzy triangular ladeado por dois trapezoidais (MARRO et al, 2000, p. 15).

Neste cenário bélico a ativação do sistema depende de três entradas. Uma delas corresponde a Velocidade Relativa da Arma-Alvo (VRA), que pode ser interpretada como a velocidade entre o meio que a transporta e o alvo, expressas pelos intervalos em nós: 554 à 564, 560 à 574 e 576 à 584, suporte dos conjuntos fuzzy, que gerou as variáveis linguísticas antecedentes “Média”, “Alta”, “Muito Alta”, respectivamente, Figura 2.



**Figura 2:** Conjunto Fuzzy da Velocidade Relativa da Arma-Alvo

A segunda entrada é o Tamanho Virtual do Alvo (TVA), obtida pelo produto do comprimento do navio e sua boca, sendo que este produto foi ponderado por 0,67 se for um Navio de Guerra (NG) e 0,95 caso, seja um Navio Aeródromo (Nae) ou um Navio Hidrográfico (NH) (BRANDÃO, 2008, p. A1-6). Esta expressão gerou as faixas expressas, suporte dos conjuntos fuzzy por: menor que 1.166, 1.166 – 12.907 e maior que 12.907, que gerou as variáveis linguísticas antecedentes “Pequeno”, “Médio”, “Grande”, respectivamente, Figura 3.

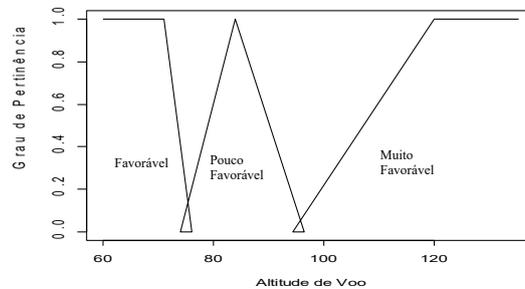


**Figura 3:** Conjunto Fuzzy do Tamanho Virtual do Alvo

A terceira entrada, Altitude de Voo (AV), foi obtida segundo o cruzamento de três atributos em uma tabela de contingência das condições do tempo, qualificação da aeronave e período do dia, Tabela 1 que permitiu estabelecer os suportes dos conjuntos fuzzy da Altitude de Voo, que gerou as variáveis linguísticas antecedentes “Favorável”, “Pouco Favorável”, “Muito Favorável”, respectivamente, figura 4.

Tabela 1 - Altitude de Voo segundo condições meteorológicas, qualificação da aeronave e condições do dia

Condições Meteorológicas	Qualificação da Aeronave	Condições do Dia		
		Noturno	Diurno	Noite escura
BOM TEMPO	Qualificado	71 pés	71 pés	96,4 pés
	Capacidade Limitada	-	71 pés	-
MAU TEMPO	Qualificado	96,4 pés	96,4 pés	-
	Capacidade Limitada	-	135,3 pés	-



**Figura 4:** Conjunto Fuzzy da Altitude de Voo



O consenso dos especialistas em função das três variáveis de entrada, inferiu 27 regras fuzzy, porém na compreensão de um cenário de combate, bastam cinco variáveis linguísticas consequentes para representar a saída do sistema: Fracasso, Pouco Fracasso, Médio, Pouco Sucesso, Sucesso. O operador MaxMin de Mamdani viabilizou os respectivos valores de pertinências.

As regras de inferência fuzzy, “Se”...”Então” foram estabelecidas mediante a aquisição do conhecimento através de entrevistas presenciais com especialistas em Combate Aéreo, realizadas na Escola de Guerra Naval (EGN). Este processo permitiu traduzir o cenário bélico do Sistema de jogo num combate hipotético, Tabela 2.

Tabela 2. Regras de Inferência do Sistema Fuzzy

Ordem	Regras
1	<b>SE</b> (Velocidade Relativa Arma-Alvo é Muito Alta) <b>E</b> (Altitude de Voo é Muito Favorável) <b>E</b> (Tamanho do Alvo é Pequeno) <b>ENTÃO</b> (Resultado do Ataque é Sucesso)
2	<b>SE</b> (Velocidade Relativa Arma-Alvo é Muito Alta) <b>E</b> (Altitude de Voo é Muito Favorável) <b>E</b> (Tamanho do Alvo é Médio) <b>ENTÃO</b> (Resultado do Ataque é Sucesso)
3	<b>SE</b> (Velocidade Relativa Arma-Alvo é Muito Alta) <b>E</b> (Altitude de Voo é Muito Favorável) <b>E</b> (Tamanho do Alvo é Grande) <b>ENTÃO</b> (Resultado do Ataque é Sucesso)
4	<b>SE</b> (Velocidade Relativa Arma-Alvo é Muito Alta) <b>E</b> (Altitude de Voo é Favorável) <b>E</b> (Tamanho do Alvo é Pequeno) <b>ENTÃO</b> (Resultado do Ataque é Sucesso)
5	<b>SE</b> (Velocidade Relativa Arma-Alvo é Muito Alta) <b>E</b> (Altitude de Voo é Favorável) <b>E</b> (Tamanho do Alvo é Médio) <b>ENTÃO</b> (Resultado do Ataque é Sucesso)
6	<b>SE</b> (Velocidade Relativa Arma-Alvo é Muito Alta) <b>E</b> (Altitude de Voo é Favorável) <b>E</b> (Tamanho do Alvo é Grande) <b>ENTÃO</b> (Resultado do Ataque é Sucesso)
7	<b>SE</b> (Velocidade Relativa Arma-Alvo é Muito Alta) <b>E</b> (Altitude de Voo é Pouco Favorável) <b>E</b> (Tamanho do Alvo é Pequeno) <b>ENTÃO</b> (Resultado do Ataque é Fracasso Diminuto)
8	<b>SE</b> (Velocidade Relativa Arma-Alvo é Muito Alta) <b>E</b> (Altitude de Voo é Pouco Favorável) <b>E</b> (Tamanho do Alvo é Médio) <b>ENTÃO</b> (Resultado do Ataque é Fracasso Diminuto)
9	<b>SE</b> (Velocidade Relativa Arma-Alvo é Muito Alta) <b>E</b> (Altitude de Voo é Pouco Favorável) <b>E</b> (Tamanho do Alvo é Grande) <b>ENTÃO</b> (Resultado do Ataque é Fracasso Diminuto)
10	<b>SE</b> (Velocidade Relativa Arma-Alvo é Alta) <b>E</b> (Altitude de Voo é Muito Favorável) <b>E</b> (Tamanho do Alvo é Pequena) <b>ENTÃO</b> (Resultado do Ataque é Sucesso)
11	<b>SE</b> (Velocidade Relativa Arma-Alvo é Alta) <b>E</b> (Altitude de Voo é Muito Favorável) <b>E</b> (Tamanho do Alvo é Médio) <b>ENTÃO</b> (Resultado do Ataque é Sucesso)
12	<b>SE</b> (Velocidade Relativa Arma-Alvo é Alta) <b>E</b> (Altitude de Voo é Muito Favorável) <b>E</b> (Tamanho do Alvo é Grande) <b>ENTÃO</b> (Resultado do Ataque é Sucesso)
13	<b>SE</b> (Velocidade Relativa Arma-Alvo é Alta) <b>E</b> (Altitude de Voo é Favorável) <b>E</b> (Tamanho do Alvo é Pequeno) <b>ENTÃO</b> (Resultado do Ataque é Pouco Sucesso)
14	<b>SE</b> (Velocidade Relativa Arma-Alvo é Alta) <b>E</b> (Altitude de Voo é Favorável) <b>E</b> (Tamanho do Alvo é Médio) <b>ENTÃO</b> (Resultado do Ataque é Sucesso)
15	<b>SE</b> (Velocidade Relativa Arma-Alvo é Alta) <b>E</b> (Altitude de Voo é Favorável) <b>E</b> (Tamanho do Alvo é Grande) <b>ENTÃO</b> (Resultado do Ataque é Sucesso)
16	<b>SE</b> (Velocidade Relativa Arma-Alvo é Alta) <b>E</b> (Altitude de Voo é Pouco Favorável) <b>E</b> (Tamanho do Alvo é Pequeno) <b>ENTÃO</b> (Resultado do Ataque é Fracasso)
17	<b>SE</b> (Velocidade Relativa Arma-Alvo é Alta) <b>E</b> (Altitude de Voo é Pouco Favorável) <b>E</b> (Tamanho do Alvo é Médio) <b>ENTÃO</b> (Resultado do Ataque é Fracasso Diminuto)
18	<b>SE</b> (Velocidade Relativa Arma-Alvo é Alta) <b>E</b> (Altitude de Voo é Pouco Favorável) <b>E</b> (Tamanho do Alvo é Grande) <b>ENTÃO</b> (Resultado do Ataque é Fracasso Diminuto)
19	<b>SE</b> (Velocidade Relativa Arma-Alvo é Média) <b>E</b> (Altitude de Voo é Muito Favorável) <b>E</b> (Tamanho do Alvo é Pequeno) <b>ENTÃO</b> (Resultado do Ataque é Pouco Sucesso)
20	<b>SE</b> (Velocidade Relativa Arma-Alvo é Média) <b>E</b> (Altitude de Voo é Muito Favorável) <b>E</b> (Tamanho do Alvo é Médio) <b>ENTÃO</b> (Resultado do Ataque é Pouco Sucesso)

21	SE (Velocidade Relativa Arma-Alvo é Média) E (Altitude de Voo é Muito Favorável) E (Tamanho do Alvo é Grande) ENTÃO (Resultado do Ataque é Pouco Sucesso)
22	SE (Velocidade Relativa Arma-Alvo é Média) E (Altitude de Voo é Favorável) E (Tamanho do Alvo é Pequeno) ENTÃO (Resultado do Ataque é Mediano)
23	SE (Velocidade Relativa Arma-Alvo é Média) E (Altitude de Voo é Favorável) E (Tamanho do Alvo é Médio) ENTÃO (Resultado do Ataque é Mediano)
24	SE (Velocidade Relativa Arma-Alvo é Média) E (Altitude de Voo é Favorável) E (Tamanho do Alvo é Grande) ENTÃO (Resultado do Ataque é Mediano)
25	SE (Velocidade Relativa Arma-Alvo é Média) E (Altitude de Voo é Pouco Favorável) E (Tamanho do Alvo é Pequeno) ENTÃO (Resultado do Ataque é Fracasso)
26	SE (Velocidade Relativa Arma-Alvo é Média) E (Altitude de Voo é Pouco Favorável) E (Tamanho do Alvo é Médio) ENTÃO (Resultado do Ataque é Fracasso)
27	SE (Velocidade Relativa Arma-Alvo é Média) E (Altitude de Voo é Pouco Favorável) E (Tamanho do Alvo é Grande) ENTÃO (Resultado do Ataque é Fracasso)

Exemplificando a Regra 1 no cenário bélico, se o valor da *Velocidade Relativa da Arma-Alvo* é Muito Alta, a *Altitude de Voo* é Muito Favorável e o *Tamanho do Alvo* é Pequeno, então considerasse o ataque foi bem sucedido (Tabela 2), que perfigura o reconhecimento do padrão no momento do combate. Esta estratégia metodológica qualifica para os possíveis ataques, o alcance do ganho dentro do contexto do jogo, explicitada a pertinência advinda da proposta Max-Min.

### Aplicação

A opção para o uso do método proposto valeu-se de três situações de combate entre uma aeronave e um alvo de superfície. Na primeira foi considerado que a VRA assumiu o valor de 570 nós, o TVA, o valor de 1000 m e o AV, o valor de 160 pés. Estes valores foram aplicados nos suportes dos conjuntos fuzzy para a realização da etapa de fuzzificação das três variáveis de entrada. Se o VRA assumir o valor de 570 nós no suporte (abscissa), traçada uma perpendicular, o valor avaliado para pertinência (ordenada) seria 0,55 (**Alta**). Caso a perpendicular atingisse a área de intercepção entre dois conjuntos fuzzy, segundo Mamdani, opta-se pelo valor da menor pertinência que indica tanto o atributo de classificação quanto a pertinência. De forma análoga adotou-se o mesmo procedimento para as outras variáveis de entrada do sistema fuzzy. Os resultados da fuzzificação estão na tabela 3.

Na segunda situação o VRA não foi alterado de forma expressiva, valor de 500 nós, mas para o TVA adotou-se o valor sete vezes maior, 7000 m e o AV um valor praticamente correspondente a metade da situação anterior, 90 pés, inferindo-se para o VRA pertinência 0,55 (**Média**). As demais variáveis foram fuzzificadas seguindo o mesmo procedimento.

Na terceira situação o VRA foi alterado para o valor de 562 nós, o TVA o valor de 9200 m e o AV, 110 pés, inferindo-se para o VRA pertinência 0,15 (**Alta**), mas cabe ressaltar que este valor de posicionou-se na área de nebulosidade (interseção de conjuntos), o que levou adotar a pertinência mínima para definir o atributo classificatório. Similarmente foi adotado o mesmo procedimento para as outras variáveis. Todos os resultados das três situações foram colocados na Tabela 3.

Tabela 3. Variável linguística Resultado do Ataque e respectivos Pesos

Alvo	Variáveis	Valor	Fuzificação		
			Classificação	Regra	Pertinência
1° alvo	VRA	570	Alta	Fracasso Diminuto	0.55
	TVA	10000	Grande		0.40
	AV	160	Pouco Favorável		<b>1.00</b>
2° alvo	VRA	500	Média	Pouco	0.55
	TVA	7000	Médio		<b>0.62</b>

	AV	90	Favorável	Sucesso	0.45
3º alvo	VRA	562	Alta	Fracasso Diminuto	0.15
	TVA	9200	Grande		<b>0.75</b>
	AV	110	Pouco Favorável		0.65

A próxima etapa é verificar em que regra, entre as 27 elencadas anteriormente, cada situação se colocou. Observou-se que na primeira situação houve convergência para a regra 18, que significa ataque com “fracasso-diminuto”, enquanto na segunda situação, regra 20, ataque “Pouco Sucesso”. Na primeira situação, as pertinências relativas a estes ataques para as variáveis VRA, TVA e VA foram 0,55, 0,40 e 1,00 respectivamente e em função do conceito Max-Min, induz-se que o ataque com “fracasso-diminuto” atingiu pertinência máxima 1,00. Similarmente, na segunda e terceira situações, os valores máximo dos mínimos foram 0,62 e 0,75, para ataque mediano e com fracasso-diminuto, respectivamente. É importante observar que tanto na primeira e quanto na terceira situação, a inferência fuzzy reconheceu o padrão “fracasso-diminuto” porém com pertinências diferenciadas, 1,00 e 0,75, respectivamente. No intuito da objetividade do combate para um melhor engajamento, o Controlador Aéreo deve optar pelo alvo com o melhor resultado de pertinência do ataque, neste caso, a segunda situação, aquela de efetividade reconhecida pela inferência fuzzy, adoção quali-quantitativa.

### Conclusões

A Lógica Fuzzy se adaptou as situações de combate “aéreo x superfície” em que envolvem incertezas, raciocínio aproximado, termos vagos e ambíguos. Revelou-se uma ferramenta útil para a Inteligência Artificial, que permeia representar o raciocínio, o conhecimento humano da forma mais realística possível.

A lógica fuzzy permitiu diferenciar duas situações do resultado de combate idênticas, mas que foram diferenciadas por um valor de contingência, propiciando soluções agregadas a destreza do controlador e caso haja sua ausência esporádica durante o combate, o sistema em processo será capaz de indicar a possível melhor opção de engajamento, inclusive atribuindo um valor de pertinência no intervalo de zero a um.

Estabelecer funções de pertinência e regras fuzzy são tarefas que podem depender da multidisciplinariedade, pois um sistema especialista fuzzy precisa de regras coerentes tal qual a lógica do raciocínio, evitando a multiplicidade de regras para torná-lo viável (MARRO et al, 2000, p. 2).

Uma vez que o método inferencial foi capaz de reconhecer padrões, cabe operacionalizá-lo por meio da construção de um aplicativo que vai introduzir uma nova funcionalidade ao Sistema de Jogos, que virá a automatizá-lo.

### **Referências**

ALMEIDA, J. C. A. **Modelagem Matemática da Probabilidade de Acerto**, 2003.

BRANDÃO, J. P. M. **Manual de Avaliação de Danos**, 2008.

GOMIDE, F. A. C.; GODWIN, R. R. Modelagem, Controle, Sistemas e Lógica Fuzzy. In: SBA CONTROLE & AUTOMAÇÃO, v. 4, n. 3, p. 97, setembro-outubro 1994.

MARRO, A. A. et al. Lógica Fuzzy: Conceitos e Aplicações. 2010. Disponível em:  
[http://aquilesburlamaqui.wdfiles.com/local--files/logica-aplicada-a-computacao/texto\\_fuzzy.pdf](http://aquilesburlamaqui.wdfiles.com/local--files/logica-aplicada-a-computacao/texto_fuzzy.pdf).  
Acesso em: 17 junho 2018.

WAN, C. et al. Research on Development Strategy of Weapon Equipment in Antagonistic Environment. In: Annual IEEE International Systems Conference (SysCon), 2017, Canada. **Anais...** Montreal, QC, Canada, ISSN: 2472-9647, DOI: 10.1109/SYSCON.2017.7934732.

## O processamento das emoções no Cérebro: uma análise de EEG usando lógica Fuzzy

Giselle Couto Falcão,

Centro de Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais - CEFET MG

*giselle\_falcao@hotmail.com*

### Resumo:

Usando o refinamento matemático, em técnicas matemáticas mais elaboradas e modernas, esta pesquisa visa, com o uso do conjunto fuzzy e apoiada às equações diferenciais fuzzy, descrever o potencial de ação em respostas excitatórias de expressões emocionais referentes a felicidade, nojo, tristeza e medo, com o agrupamento de diferentes regiões do cérebro para cada uma das emoções citadas. A partir desta análise, refinar e equacionar a velocidade de comunicação sináptica em lobos cerebrais diferentes quando houver tais excitação emocionais, estes sinais foram observados no EEG de 12 indivíduos, os quais foram submetidos por meio de imagens, a recriar sensações associadas a emoções positivas e negativas. Pode se observar por meio dos modelos matemáticos aplicados que as emoções negativas são processadas, por meio da dinâmica sináptica, de forma significativamente mais veloz que as emoções positivas.

**Palavras-chave:** Lógica Fuzzy, Emoções, EDF, EEG.

### Introdução

Atividades cerebrais patológicas ou não, podem ser observadas nos picos dos potenciais de ação (spikes), captadas no eletroencefalograma (EEG). Esse método de monitoramento é um recurso não invasivo capaz de registrar as atividades cerebrais. Possui alta resolução temporal, na escala de milissegundos, o que facilita a observação dos potenciais pós-sinápticos somados resultantes de populações de neurônios piramidais radialmente orientais. Estes são os principais e mais abundante tipo de neurônio excitatório do córtex cerebral.

A forma de onda do EEG sofre modificações continuamente, que podem ser caracterizadas como oscilatórias ou rítmicas, de acordo com as diversas bandas de frequência associadas a diferentes estados cerebrais. Dentre estes estados podem ser observados os estados emocionais, que provocam diversas alterações no corpo humano, sobretudo no cérebro estas alterações podem ser analisadas por sinais não invasivos. (MEGIAS, 2001). (MURUGAPPAN, 2010)

Os sinais oriundos do EEG, principalmente as ondas teta (4-8 Hz), alfa (8-13 Hz), beta (13-30 Hz) e gama (30-100 Hz), que descrevem processo cognitivos, evocação de memória, atenção e consciência respectivamente. Estas ondas apresentam agrupamentos de diferentes configurações, de acordo com os estímulos emocionais. Atualmente há diversos estudos que correlacionam os sinais do EEG a certas emoções e sensações, e indicam que estas sejam observados no sistema límbico, que conta com o córtex em torno do corpo caloso, superfície medial do lobo temporal e hipocampo, uma densa movimentação sináptica. No entanto há outras áreas do córtex pré-frontal em que podem ser identificados atividades cerebrais ao receber estímulos de emoções (BEAR, CONNORS & PARADISO, 2008) (BARRETO, 2010) (DAMÁSIO, 2015) (KELEMAN, 1992).

No córtex pré frontal medial e gânglio basal podem ser observados emoções associadas a sensações de felicidade e nojo, o córtex angulado subcolossal juntamente com córtex pré frontal medial observa-se a emoções relacionadas a tristeza e ainda no córtex pré frontal medial e amígdala podem ser observados o medo. A associação destas regiões e a velocidade dos potenciais de ação evocados a cada emoção, oferece um grande desafio para a neurociências. (BEAR, CONNORS & PARADISO, 2008); (ROLLS, 2000); (DAVISON 2004) (LEDOUX, 1998).

Dentre algumas técnicas matemáticas que podem ser eficientes para verificar a velocidade da associação das regiões cerebrais vinculadas a emoções de felicidade, nojo, tristeza e medo, destaca-se o sistema Fuzzy, este conjunto consiste em atributos lógicos não binários, em que os valores verdade são expressos por meio de expressões linguísticas (e.g.: verdade, muito verdade, não verdade, falso, muito falso, ...), deste modo é possível quantificar, calcular e interpretar resultados. Esta ferramenta é muito importante para áreas onde há incertezas numéricas, pois é possível gerar aproximação reais em sistemas de alta imprecisão e complexidade. (LIN, 1996), (KAUFMANN & GUPTA, 1985).

Para subsidiar os cálculos matemáticos que decorrem de taxas de variação de alta imprecisão e complexidade dos sinais EEG relacionados as emoções, as equações diferenciais fuzzy (EDF), apresentam um lugar de destaque, uma vez que tornam possível a modelagem das taxas de variações das conexões cerebrais garantindo resultados que podem traduzir um modelo próximo do real, levando um sistema de incertezas para o cálculo diferencial. Obtendo como solução resultados que podem ser observados, periodicidade, estabilidade e bifurcação. (HÜLLERMIER,1997) (VORABIEV E SEIKKALA, 2002), (BARROS 2006).

## Metodologia

Por meio da análise temporal do EGG realizado em 12 indivíduos, que foram submetidos ao exame com 23 eletrodos, durante o período de 3500 segundos, nos quais os indivíduos foram submetidos a estímulos emocionais de tristeza, felicidade, nojo e medo. Estes estímulos foram apresentados por meio de fotografias, vídeos e sensações ambientais tais como climatização e luminosidade.

Foram realizados em média 16 testes, em cada indivíduo. Os testes foram subdivididos entre 4 tipos de estímulos (alegria, medo, nojo e tristeza). Estes estímulos foram aplicados em um intervalo de 3-5 minutos, tempo suficiente para evocar as emoções observadas, foram aplicados 4 testes em ordem distinta para cada estímulo. Ou seja, na primeira rodada de testes, os indivíduos foram expostos aos estímulos de felicidade, nojo, tristeza e medo, nesta ordem, na segunda rodada de testes, foram expostos ao medo, felicidade, tristeza, nojo, na terceira rodada, tristeza, nojo, felicidade e medo. E por fim os estímulos seguiram a ordenação nojo, medo, tristeza e felicidade. Essa alternância foi necessária para eliminar qualquer viés característico de cada emoção.

Foram observados os potenciais de ação de cada canal, observando ainda as ondas delta, teta, alfa, beta e gama, que apresentam comportamento significativo para cada emoção, a figura 1 abaixo apresenta uma rodada de teste em um único indivíduo e a expressão dos 21 eletrodos analisados. (KELEMAN, 1992).

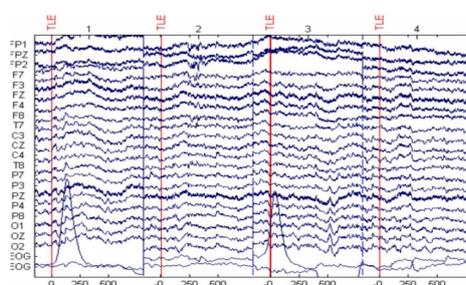


Figura 1: Imagem EGG

Os sinais captados durante o experimento em cada eletrodo, será chamado daqui em diante de canal. Cada canal foi separando em blocos de 20 segundos, totalizando 175 blocos para cada canal, estes foram divididos entre as 4 emoções distinta de acordo com ordem do teste aplicado, conforme referenciado

acima. Foram observados os spikes de cada estímulo, em cada bloco de 20 segundos, em que foram analisados e selecionados os momentos que houveram maior número de spikes.

Foi aplicado o método de autocorrelação para observar os canais que tiveram alterações consideráveis no intervalo de 100 segundos após o primeiro spike observado. Este teste se mostrou necessário para eliminar observações empíricas falsas. Os canais que mostraram independência, ou seja, canais que não demonstraram autocorrelação, foram selecionados.

Submetemos a correlações pares de canais que foram selecionados anteriormente, de foram que todos canais se correlacionassem com todos os outros canais selecionado restantes.

Com destaque aos 100 segundos após o primeiro spikes observado, e garantidas as correlações altas tanto positivas quanto negativas, de cada canal, foram observados o tempo de cada spike em canais diferentes, em busca da variação da velocidade de cada disparo. Para observar a velocidade dos spikes em um canal foram observados a quantidade de spikes em relação ao tempo, bem como a observação de da variação do tempo por meio de equações diferenciais entre canais correlacionados.

Para realização desta etapa, utilizamos o sistema fuzzy para a velocidade de cada canal e a variação da velocidade em relação a distância do canal correlacionado. Para realização desta etapa definimos as regras fuzzy de entrada velocidade ( $v$ ), que recebe o conjunto de termos linguísticos dado por Média (M), Alta (A), Altíssima (AL) e a saída ( $\Delta v$ ) que recebe o conjunto Media (Md), Media Alta (Ma), Alta (MaA), no gráfico da figura 2 podemos observar como foram definidas a regra para um par de canais, em foi observada alta correlação.

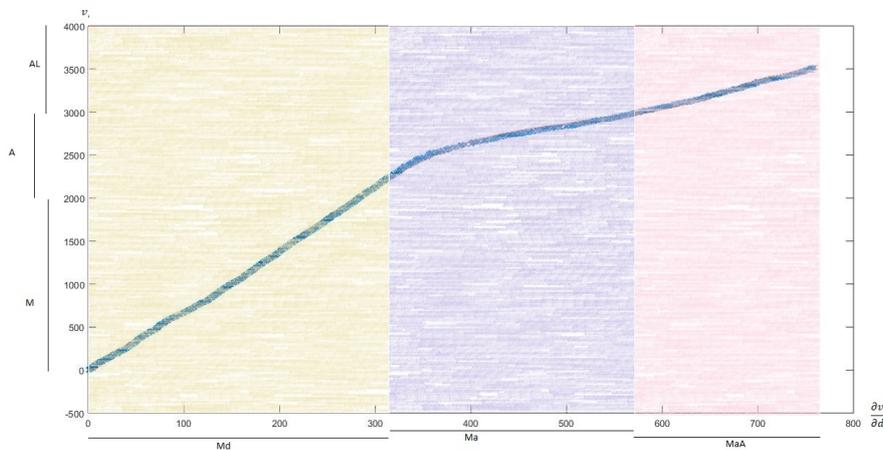


Figura 2: Gráfico ( $\frac{\partial v}{\partial t} \times v$ )

Para suavizar as faixas de transição de uma velocidade e sua taxa de variação foi escolhido a função de pertinência gaussiana, uma vez que este método descreve melhor a complexidades bem como a riqueza de dados observados. Para o método de inferência utilizamos o modelo Mamdani e o método de defuzzificação escolhido foi o centroide. As variáveis para as funções de pertinência utilizada foram as variáveis ( $v_1$ ), ( $v_2$ ) e ( $\Delta v$ ). As saídas podem ser observadas na imagem (a) bem como na superfície (b) da figura 3 que apresenta as regras de velocidade sua variação em relação a distância aplicadas no canal Cz e Fc.

Após verificado por meio do modelo Mamdani, a saída em que foram observados melhor conexão foram submetidas a equação diferencial fuzzy dada pelo modelo (1):

$$V_{\Delta(v,t)} = \Delta d \cdot e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 \cdot \frac{v}{v_2} - \Delta v)t} \quad (1)$$

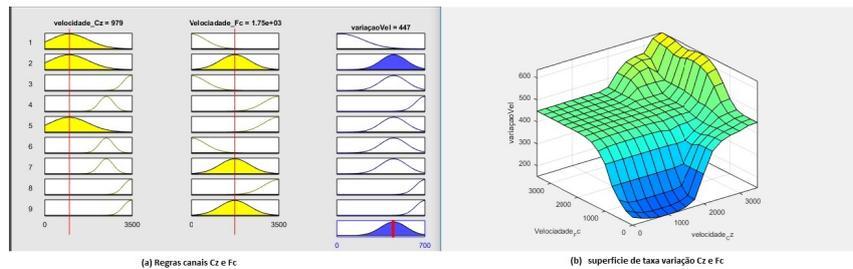


Figura 3: Regras canal Cz e Fc

Em que  $V$  representa a velocidade relativa em relação a variável fuzzy, velocidade ( $v$ ) e tempo ( $t$ ) em microssegundos. e ainda recebe a variação da distancia entre os lobos ( $\Delta d$ ).  $(v_1)$  e  $(v_2)$  indicam variação da velocidade dos spikes em cada canal correlacionado, e finalmente ( $\Delta v$ ) que indica a variável fuzzy sobre a variação da velocidade do sinal em relação  $v_1$  e  $v_2$ . Posteriormente foi realizada uma análise acumulada de todas regiões cerebrais em que foram observadas disparos em resposta aos estímulos, imediatamente 100 milissegundos após o primeiro spike, em cada bloco de 20 segundos, estes foram desfragmentados em microssegundos para normalizar o resultado de  $v_{\Delta(v,t)}$ . Feito esta etapa foi recolhida a média obtida por cada eletrodo então aplicado o teste T para verificação de variação significativa da média da velocidade de cada eletrodo, deste modo pode-se assegurar comportamento diverso em cada região de acordo com cada emoção

## Resultados

Para análise de cada banda de frequência, mantemos como referência o estado normal, este é considerando, após certo período de repouso com vídeos e ambiente de relaxamento. Neste contexto foi observada uma significativa alteração das ondas gama e teta durante estímulos de felicidade, bem como a leve alteração das ondas beta. As ondas, alfa sofrem uma discreta inibição durante estímulos de tristeza. Para emoções relacionadas ao nojo foi observado alterações bruscas na banda gama. As ondas delta e teta sofre alterações ao estímulo do medo, pode-se observar uma redução das bandas deltas. A velocidade de comunicação com regiões diversas pode se observar a redução significativa da velocidade dos disparos em relação a estímulos de medo, já em relação a tristeza a comunicação cerebral cai num percentual de aproximadamente 78%. O estímulo do nojo é aproximadamente 14% mais veloz que os estímulos de felicidade. Além disso, observou-se o numero de eletrodos que sofreram algum tipo de alteração. Como pode ser observado na tabela 1.

Tabela 1: Velocidade de conexão em relação a cada emoção.

Emoções	$v_{\Delta(v,t)}$	n °eletrodos
Tristeza	$44e^{(-4)}$	17
Alegria	$37e^{(-5)}$	19
Nojo	$29e^{(-5)}$	14
Medo	$14e^{(-5)}$	20

A tabela 1 apresenta  $v_{\Delta(v,t)}$  em milissegundos, embora o estudo tenha sido realizado em microssegundos, para facilitar entendimento do leitos, calculamos a velocidade em uma unidade de medida mais usual. E ainda a velocidade de conexão dispersa, observadas nos spikes, é outro ponto muito interessante



neste experimento. Deste modo foi possível estabelecer um ponto central que permite verificar por meio da dispersão de  $\Delta_{(v,t)}$ , apresentado na figura 4, que torna possível identificar cada emoção.

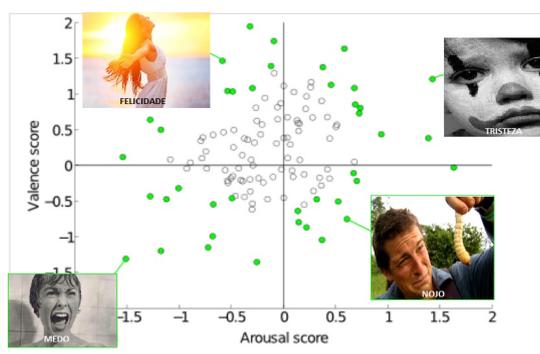


Figura 4: Gráfico  $\frac{\partial v}{\partial t} \times v$

## Conclusão

Apos as análises, podemos observar que as emoções estudadas, não provocam alterações em áreas específicas do cérebro, elas apresentam uma conexão de comportamento disperso em todo cérebro, entretanto, a velocidade dessas conexões acontecem de forma distinta no cérebro. E ainda foi observado, um amplo espectro que descreve a intensidade de cada sensação emocional estimulada. E finalmente pode-se concluir que a tristeza é a emoção que acontece de forma mais lenta no cérebro, em contra partida, o medo é a emoção mais veloz em que ocorre no cérebro. Como sugestão para trabalhos posteriores, sugerimos uma análise da entropia dos sinais das emoções associada principalmente ao medo e a tristeza.

## Referências

- BARRETO, J.; SILVA, L. Sistema límbico e as emoções—uma revisão anatômica. **Revisão Neurociências**, v. 18, n. 3, p. 386-394, 2010.
- Barros, L.C; Bassanezi, R.C. **Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática**, volume 5 de Coleção Textos Didáticos. IMECC-UNICAMP, 2006.
- BEAR, M.F.; CONNORS, B. W.; PARADISO M. A. **A Estrutura do sistema Nervoso**. **Neurociências**: desvendando o sistema nervoso, 3 ed. Porto Alegre: Artmed, 2008 p. 167-204.
- DAMÁSIO, Antonio. **O mistério da consciência: do corpo e das emoções ao conhecimento de si**. São Paulo, Editora Companhia das Letras, 2000.
- DAVIDSON, R. J. What does the prefrontal cortex “do” in affect: perspectives on frontal EEG asymmetry research. **Biological Psychology**, v. 67, n. 1-2, p. 219-234, 2004.
- KAUFMAN, Arnold; GUPTA, Madan M. **Introduction to fuzzy arithmetic**. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1991.
- LEDOUX, Joseph. **O cérebro emocional: os misteriosos alicerces da vida emocional**. Rio de Janeiro, Objetiva, 2011.

LIN, Chin-Teng et al. **Neural fuzzy systems: a neural-diffuse synergism for intelligent systems**, Upper Saddle River NJ: Prentice hall PTR, 1996.

KELEMAN, Stanley. **Anatomia emocional**. São Paulo, Grupo Editorial Summus, 1992.

MURUGAPPAN, Murugappan; RAMACHANDRAN, Nagarajan; SAZALI, Yaacob. Classification of human emotion from EEG using discrete wavelet transform. **Journal of Biomedical Science and Engineering**, v. 3, n. 04, p. 390, 2010.

ROLLS, E T The brain and emotion. **Behavioral and Brain Sciences**, v 23, n. 2, p 177-234, 2000

Parte VI

Otimização

## Condições de otimalidade para problemas de otimização irregular: uma abordagem via formalismo de Dubovitskii-Milyutin

*Lucelina Batista dos Santos*

*Universidade Federal do Paraná; Departamento de Matemática*

*lucelina@ufpr.br*

*Adson Sampaio Melo*

*Universidade Federal do Paraná; Programa de Pós-Graduação em Matemática*

*adsonmelo@ufpr.edu.br*

*Marko Antônio Rojas Medar*

*Universidad de Tarapacá; Instituto de Alta Investigación*

*marko.medar@gmail.com*

**Resumo:** Neste trabalho, obtemos condições necessárias de otimalidade para problemas de otimização irregulares. Trataremos os problemas com restrição de igualdade irregulares através do Teorema da  $p$ -Regularidade. Assumiremos ainda, que as funções envolvidas no problema são suficientemente diferenciáveis. As condições necessárias de otimalidade são determinadas através do Formalismo de Dubovitskii-Milyutin.

**Palavras-chave:** Otimização. Irregular.  $p$ -Regularidade. Formalismo.

### Introdução

O clássico Teorema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) estabelece condições necessárias de otimalidade para problemas de otimização a partir da solução do problema e da validade de alguma Condição de Qualificação. Especificamente para problemas de otimização com restrição de igualdade, quando a Condição de Qualificação de Independência Linear (LICQ) não é verificada, o Teorema de KKT pode não ser aplicável. Brezhneva e Tret'yakov(2010) estabeleceram condições necessárias de otimalidade para problemas desta natureza. Neste trabalho serão considerados problemas de otimização irregulares.

Como é bem conhecido da literatura, o Teorema de Lyusternik (GIRSANOV, 1972) fornece uma maneira de determinar o cone tangente ao conjunto  $\mathbb{M}_F = \{x \in \mathbb{U}; F(x) = 0\}$  em  $x_0$ , onde  $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$  é um aberto não vazio. Para isto, é necessário que o operador linear  $F^{(1)}(x_0)$  (primeira derivada de  $F$  em  $x_0$ ) seja sobrejetor. Porém, quando a sobrejetividade deste operador não é satisfeita, a Teoria da  $p$ -Regularidade (BREZHNEVA e TRET'YAKOV, 2010) pode ser uma maneira de contornar esta situação e novamente termos condições necessárias de otimalidade para o problema. A Teoria da  $p$ -regularidade tem sido utilizada em vários outros campos, por exemplo, na Geometria (caracterização do espaço tangente a uma variedade), em Sistemas Dinâmicos, em Análise Numérica (obtenção de uma variante do Método de Newton, quando a correspondente matriz Hessiana não é inversível) e também no estudo de problema de Cálculo das Variações. Ver IZMAILOV, 2002; PRUSINSKA e TRET'YAKOV, 2011; TRET'YAKOV e MARSDEN, 2003.

O Formalismo de Dubovitski-Milyutin (GIRSANOV, 1972) é uma importante ferramenta para o tratamento de uma ampla classe de problemas de otimização, formulados em contexto mais abstrato, isto é, cujas funções do problema estão definidas em espaços abstratos e, portanto, pode ser utilizado para o tratamento dos mais diversos problemas, como por exemplo, o Problema de Programação Matemática, o Problema do Cálculo das Variações, o Problema de Controle Ótimo dentre outros.

## 1 FORMALISMO DE DUBOVITSKII-MILYUTIN

Neste trabalho obtemos condições necessárias de otimalidade para o problema de otimização com restrição de igualdade irregular, utilizando o Formalismo de Dubovitski-Milyutin e a Teoria da  $p$ -Regularidade. Para isto, assumimos que as funções envolvidas no problema são suficientemente diferenciáveis.

### 1 Formalismo de Dubovitskii-Milyutin

Consideramos o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(x) \\ & \text{Sujeito a } x \in \mathbb{Q} = \bigcap_{i=1}^{n+1} \mathbb{Q}_i, \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{X}$  é um espaço de Banach,  $\mathbb{Q}_i \subset \mathbb{X}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , são conjuntos com interior não vazio e  $\mathbb{Q}_{n+1} \subset \mathbb{X}$  possivelmente não possui pontos interiores.

Numa linguagem mais formal, os conjuntos  $\mathbb{Q}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , representam as restrições de desigualdades e  $\mathbb{Q}_{n+1}$  as restrições de igualdade do problema.

**Definição 1** Dizemos que  $x_0 \in \mathbb{Q}$  é um minimizador local de (1) se existe uma vizinhança  $\mathbb{V}$  tal que  $f(x_0) \leq f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{V} \cap \mathbb{Q}$ .

Os seguintes conceitos são importantes para obtenção dos nossos resultados.

**Definição 2** (i) Dada uma função  $g: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizemos que um vetor  $h$  é uma direção de descida de  $g$  no ponto  $x_0$ , se existem uma vizinhança  $\mathbb{V}$  de  $h$ ,  $\alpha < 0$  e  $t_0 > 0$ , tais que para todo  $t \in (0, t_0)$  e qualquer  $v \in \mathbb{V}$ , tivermos  $g(x_0 + tv) \leq g(x_0) + t\alpha$ . O conjunto das direções de descida de  $g$  no ponto  $x_0$  é um cone aberto com vértice em 0.

(ii) Sejam  $\mathbb{Q}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , os conjuntos de restrições de desigualdade. Dizemos que um vetor  $h$  é uma direção factível para  $\mathbb{Q}_i$  no ponto  $x_0$ , se existem uma vizinhança  $\mathbb{V}$  de  $h$  e  $t_0 > 0$ , tais que para todo  $t \in (0, t_0)$  e qualquer  $v \in \mathbb{V}$ , tivermos  $x_0 + tv \in \mathbb{Q}_i$ . O conjunto das direções factíveis para  $\mathbb{Q}_i$  no ponto  $x_0$  é um cone aberto com vértice em 0.

(iii) Seja  $\mathbb{Q}_{n+1}$  o conjunto de restrições de igualdade. Dizemos que um vetor  $h$  é uma direção tangente a  $\mathbb{Q}_{n+1}$  no ponto  $x_0$ , se existe  $t_0 > 0$ , tal que para todo  $t \in (0, t_0)$  existe um vetor  $x(t) = x_0 + th + r(t) \in \mathbb{Q}_{n+1}$  e  $\|r(t)\| = o(t)$ . O conjunto das direções tangentes para  $\mathbb{Q}_{n+1}$  no ponto  $x_0$  é um cone com vértice em 0.

Para maiores detalhes, veja (GIRSANOV, 1972).

**Teorema 1.1** [Formalismo de Dubovitskii-Milyutin] Sejam  $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{Q} = \bigcap_{i=1}^{n+1} \mathbb{Q}_i$ ,  $\mathbb{K}_0$  o cone de direções de descida de  $f$  em  $x_0$ ,  $\mathbb{Q}_i$  o conjunto de restrições com  $\text{int}\mathbb{Q}_i \neq \emptyset$  para  $i = 1, \dots, n$ ,  $\mathbb{Q}_{n+1}$  o conjunto de restrições com  $\text{int}\mathbb{Q}_{n+1} = \emptyset$ ,  $\mathbb{K}_i$  o cone de direções factíveis de  $\mathbb{Q}_i$  em  $x_0$  para  $i = 1, \dots, n$  e  $\mathbb{K}_{n+1}$  o cone de direções tangentes de  $\mathbb{Q}_{n+1}$  em  $x_0$ . Suponhamos que os cones  $\mathbb{K}_i$ , são convexos para todo  $i = 0, \dots, n+1$ . Então existem funcionais lineares contínuos  $g_i \in \mathbb{K}_i^*$ ,  $i = 0, \dots, n+1$ , não todos nulos, que satisfazem a equação

$$\sum_{i=0}^{n+1} g_i = 0. \quad (2)$$

Para maiores detalhes, veja (GIRSANOV, 1972).

## 2 p-Regularidade

No que se segue, consideramos o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(x) \\ & \text{Sujeito a } x \in \mathbb{M}_F, \end{aligned} \quad (3)$$

onde  $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  é um aberto não vazio,  $F \in \mathcal{C}^{p+1}(\mathbb{U})$  e  $\mathbb{M}_F = \{x \in \mathbb{U}; F(x) = 0\}$ . Suponhamos  $x_0 \in \mathbb{U}$  fixado.

**Definição 3** Dizemos que a aplicação  $F$  é regular em  $x_0$  se  $\text{Im}F^{(1)}(x_0) = \mathbb{R}^m$ , onde  $F^{(1)}(x_0)$  denota a primeira derivada da função  $F$  em  $x_0$ . Caso contrário,  $F$  é irregular em  $x_0$ .

Consideramos agora o caso em que a Condição de Regularidade  $\text{Im}F^{(1)}(x_0) = \mathbb{R}^m$  não é válida. Estes casos podem ser tratados através de um operador linear específico, o qual mostramos a seguir sua construção. Consideramos um número natural  $p$ , tal que

$$\mathbb{R}^m = \mathbb{Y}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Y}_p, \quad (4)$$

onde  $\mathbb{Y}_1 = \text{Im}F^{(1)}(x_0)$  e os demais subespaços são definidos da seguinte maneira: para  $i = 2, \dots, p-1$ ,

$$\mathbb{Y}_i = \text{span} \left( \text{Im}P_{\mathbb{Z}_i} \circ F^{(i)}(x_0) [\cdot]^i \right), \quad (5)$$

sendo  $\mathbb{Z}_i$  o subespaço complementar para  $\mathbb{Y}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Y}_{i-1}$  com respeito a  $\mathbb{R}^m$ , a projeção

$$P_{\mathbb{Z}_i} : \mathbb{R}^m = \mathbb{Y}_1 \oplus \mathbb{Y}_{i-1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_i \rightarrow \mathbb{Z}_i \quad (6)$$

é definida como

$$P_{\mathbb{Z}_i}(y) = z_i, \quad (7)$$

$F^{(i)}(x_0)$  denota a  $i$ -ésima derivada da aplicação  $F$  em  $x_0$  e

$$F^{(i)}(x_0) [\cdot]^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (8)$$

é a aplicação definida como

$$F^{(i)}(x_0) [x]^i = F^{(i)}(x_0)(x, \dots, x). \quad (9)$$

Finalmente, definimos  $\mathbb{Y}_p = \mathbb{Z}_p$  e  $p$  é escolhido como o número natural mínimo para o qual a decomposição em soma direta em (4) é válida.

Consideramos as aplicações  $\phi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{Y}_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , definidas como

$$\phi_i(y) = P_i \circ F(y), \quad (10)$$

onde  $P_i : \mathbb{R}^m = \mathbb{Y}_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Y}_p \rightarrow \mathbb{Y}_i$  é a projeção em  $\mathbb{Y}_i$ .

**Definição 4** (i) Denominamos de operador  $p$ -factor, o operador linear  $\Phi_p(h) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definido como

$$\Phi_p(h) = \sum_{i=1}^p \phi_i^{(i)}(x_0) [h]^{i-1}. \quad (11)$$

As aplicações lineares  $\phi_i^{(i)}(x_0) [h]^{i-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $i = 1, \dots, p$ , são definidas como

### 3 RESULTADO

$$\phi_i^{(i)}(x_0) [h]^{i-1} x = \phi_i^{(i)}(x_0) \underbrace{(h, \dots, h, x)}_{(i-1) \text{ vezes}}, i = 1, \dots, p. \quad (12)$$

(ii) Dizemos que a aplicação  $F$  é  $p$ -regular em  $x_0$  com respeito a  $h \in \mathbb{R}^n$ , se  $\text{Im}\Phi_p(h) = \mathbb{R}^m$ . Além disto, a aplicação  $F$  é dita  $p$ -regular em  $x_0$  se  $F$  é  $p$ -regular com respeito a qualquer  $h \neq 0$  no conjunto

$$\mathbb{H}_F(x_0) = \left\{ h \in \mathbb{R}^n; \phi_i^{(i)}(x_0) [h]^i = 0, i = 1, \dots, p \right\}. \quad (13)$$

Para maiores detalhes consulte (BREZHNEVA e TRET'YAKOV, 2010).

### 3 Resultado

Nesta Seção estamos interessados nos problemas da forma (3) tais que a condição de regularidade  $\text{Im}F^{(1)}(x_0) = \mathbb{R}^m$  é violada no minimizador local do problema (3). Mais especificamente, fazendo uso da Teoria da  $p$ -Regularidade e do Formalismo de Dubovitskii-Milyutin, provamos uma versão da condição necessária de otimalidade apresentada em (BREZHNEVA e TRET'YAKOV, 2010) para problemas deste tipo .

**Teorema 3.1** *Seja  $x_0$  um minimizador local do problema (3). Suponhamos que exista  $h \in \mathbb{H}_F(x_0) \setminus \{0\}$  tal que  $F$  é  $p$ -regular em  $x_0$  com respeito a  $h$ . Então, existem  $\lambda_i = \lambda_i(h) \in \mathbb{Y}_i, i = 1, \dots, p$ , não todos nulos, tais que*

$$f^{(1)}(x_0) + \sum_{i=1}^p \left[ \phi_i^{(i)}(x_0) [h]^{i-1} \right]^t \lambda_i = 0, \quad (14)$$

onde  $\left[ \phi_i^{(i)}(x_0) [h]^{i-1} \right]^t, i = 1, \dots, p$ , são os transpostos dos fatores do operador  $p$ -factor da Definição 4 e os subespaços vetoriais  $\mathbb{Y}_i$  são determinados na Seção 2.

A seguir daremos uma ideia da prova.

- Sob as hipóteses do Teorema 3.1 é possível encontrarmos duas curvas

$$x : (0, \alpha_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n, x(\alpha) = x_0 + \alpha h + \varepsilon(\alpha)$$

e

$$y : (0, \alpha_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n, y(\alpha) = x_0 + \alpha h + \alpha^{3/2} w + \eta(\alpha),$$

onde  $\alpha_0 > 0$  é suficientemente pequeno,  $\|\varepsilon(\alpha)\| = o(\alpha), F^{(1)}(x_0)w = 0, \|\eta(\alpha)\| = o(\alpha^{3/2})$  e estas curvas são tais que  $F(x(\alpha)) = 0$  e  $F(y(\alpha)) = 0$ .

- Sendo  $h \in \mathbb{H}_F(x_0) \setminus \{0\}$  é possível mostrar que  $f^{(1)}(x_0)h = 0$ .
- Além disto, podemos mostrar que para todo  $w \in \mathbb{R}^n$  tal que  $F^{(1)}(x_0)w = 0$ , vale a desigualdade  $f^{(1)}(x_0)w \geq 0$ .

3 RESULTADO

- Agora consideramos o problema de otimização auxiliar que aplicaremos o Formalismo de Dubovitskii-Milyutin

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } \tilde{f}(x_0)(x) \\ & \text{Sujeito a } x \in M_{\tilde{F}}(x_0), \end{aligned} \tag{15}$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x_0) : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{p \text{ cópias}} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ \tilde{f}(x_0)(x_1, \dots, x_p) &= f^{(1)}(x_0)x_1, \\ \tilde{F}(x_0) : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{p \text{ cópias}} &\longrightarrow \mathbb{Y}_1 \times \cdots \times \mathbb{Y}_p, \end{aligned}$$

$$\tilde{F}(x_0)(x_1, \dots, x_p) = \left( \phi_1^{(1)}(x_0)x_1, \dots, \phi_p^{(p)}(x_0)[h]^{p-1}x_p \right)$$

e

$$M_{\tilde{F}}(x_0) = \left\{ (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n; \tilde{F}(x_0)(x_1, \dots, x_p) = 0 \right\}.$$

- É fácil verificarmos que  $(h, \dots, h)$  é factível e um minimizador global de (15). Além disto,

$$Im \left( \tilde{F}(x_0) \right)^{(1)}(h, \dots, h) = \mathbb{Y}_1 \times \cdots \times \mathbb{Y}_p,$$

onde  $\left( \tilde{F}(x_0) \right)^{(1)}(h, \dots, h)$  denota a primeira derivada da aplicação  $\tilde{F}(x_0)$  em  $(h, \dots, h)$ . Logo, o problema auxiliar é regular e podemos aplicar o Teorema de Lyusternik (GIRSANOV, 1972).

- Denotamos por  $\mathcal{K}_1$  o cone tangente ao conjunto  $M_{\tilde{F}}(x_0)$  em  $(h, \dots, h)$ , logo do Teorema de Lyusternik, temos

$$\mathcal{K}_1 = \ker \left( \tilde{F}(x_0) \right)^{(1)}(h, \dots, h)$$

e

$$\mathcal{K}_1^* = \left\{ - \left( \left[ \phi_1^{(1)}(x_0) \right]^t \lambda_1, \dots, \left[ \phi_p^{(p)}(x_0) [h]^{p-1} \right]^t \lambda_p \right); \lambda_i \in \mathbb{Y}_i, i = 1, \dots, p \right\}, \text{ onde } \lambda_i = \lambda_i(h).$$

- Denotamos por  $\mathcal{K}_0$  o cone de descida de  $\tilde{f}(x_0)$  em  $(h, \dots, h)$ , logo

$$\mathcal{K}_0 = \left\{ (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n; \tilde{f}(x_0)(x_1, \dots, x_p) < 0 \right\}$$

e

$$\mathcal{K}_0^* = \left\{ -\theta \tilde{f}(x_0); \theta \geq 0 \right\}, \text{ onde } \theta = \theta(h).$$

Para maiores detalhes veja (GIRSANOV, 1972).

- Seja  $x \in \mathbb{R}^n$  qualquer. Aplicando o Formalismo de Dubovitskii-Milyutin ao problema (15) temos



3 RESULTADO

$$\begin{aligned}
 0 &= \left[ \theta \tilde{f}(x_0) + \left( \left[ \phi_1^{(1)}(x_0) \right]^t \lambda_1, \dots, \left[ \phi_p^{(p)}(x_0) [h]^{p-1} \right]^t \lambda_p \right) \right] (x, \dots, x) \\
 &= \theta \tilde{f}(x_0) (x, \dots, x) + \left( \left[ \phi_1^{(1)}(x_0) \right]^t \lambda_1, \dots, \left[ \phi_p^{(p)}(x_0) [h]^{p-1} \right]^t \lambda_p \right) (x, \dots, x) \\
 &= f^{(1)}(x_0)x + \sum_{i=1}^p \left[ \phi_i^{(i)}(x_0) [h]^{i-1} \right]^t \lambda_i x \\
 &= \left[ \theta f^{(1)}(x_0) + \sum_{i=1}^p \left[ \phi_i^{(i)}(x_0) [h]^{i-1} \right]^t \lambda_i \right] x.
 \end{aligned}$$

Logo,  $\theta f^{(1)}(x_0) + \sum_{i=1}^p \left[ \phi_i^{(i)}(x_0) [h]^{i-1} \right]^t \lambda_i = 0$ . Resta verificar que  $\theta \neq 0$ , mas isso segue do fato que  $\Phi_p(h)h = 0$ , o que completa a ideia da prova.

### Conclusões

Apresentamos uma condição necessária de otimalidade para problemas irregulares da forma (3), obtidas através do Formalismo de Dubovitskii-Milyutin. Como possibilidade de prosseguimento do trabalho, por meio destas condições necessárias de otimalidade, pretendemos estabelecer condições necessárias de otimalidade para problemas de controle ótimo discreto com restrições de igualdade irregulares. Recentemente, Bednarczuk e Tret'yakov (2017) introduziram o conceito de operador  $p$ -factor modificado que de uma certa maneira generaliza o conceito de operador  $p$ -factor usado neste trabalho. Este novo operador se apresenta como uma possibilidade de contornar a irregularidade dos problemas do tipo (3), no sentido de obtermos condições necessárias de otimalidade, quando também é falha a  $p$ -regularidade do problema. Além disto, pensarmos no operador  $p$ -factor modificado em contexto de problemas de controle ótimo discreto.

### Agradecimentos

O autor agradece a Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, sua instituição de origem, a qual encontra-se afastado para doutoramento no Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Paraná.

### Referências

BEDNARCZUK, E. M; TRET'YAKOV, A.  $p$ -regular nonlinearity: tangency at singularity in degenerate optimization problems. **Mathematical Methods of Operations Research**, p. 1-16, 2017.

BREZHNEVA, O.; TRET'YAKOV, A. The  $p$ -th order optimality conditions for degenerate inequality constrained optimization problems. **Pure and Applied Mathematics**, v.1, n.2, p. 198-223, 2010.

GIRSANOV, I. V. **Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems**. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1972.

IZMAILOV, A.; Bifurcation theorems via the 2-regularity theory. **Journal of Mathematical Sciences**, v.110, n.2, 2438-2451, 2002.

3 RESULTADO

PRUSINSKA, A.; TRET'YAKOV, A. On the Existence of Solutions to Nonlinear Equations Involving Singular Mappings with Non-zero  $p$ -Kernel. **Set-Valued and Variational Analysis**, v.19, n.3, p. 399-416, 2011.

TRET'YAKOV, A.; MARSDEN, J. E. Factor-analysis of nonlinear mappings:  $p$ -regularity theory. **Pure and Applied Mathematics**, v.2, n.4, p. 425-445, 2003.

## Uma versão atualizada da fatoração controlada de Cholesky aplicada ao condicionamento híbrido de sistemas lineares decorrentes do método de pontos interiores

*Leonardo Cavalcanti do Prado*

*Universidade Federal do Vale do São Francisco; Colegiado de Engenharia da Computação  
leolleo.comp@gmail.com*

*Lino Marcos da Silva*

*Universidade Federal do Vale do São Francisco; Colegiado de Engenharia Elétrica  
lino.silva@univasf.edu.br*

**Resumo:** Este trabalho apresenta uma aplicação de uma versão modificada da fatoração controlada de Cholesky no condicionamento de sistemas lineares originados em método de pontos interiores para a resolução de problemas de programação linear. A modificação proposta se baseia na atualização de condicionadores disponíveis e tem como objetivo reduzir o tempo computacional dos métodos de pontos interiores. Os resultados obtidos com a realização de testes computacionais são promissores e indicam que o uso de condicionadores atualizados podem contribuir para a redução do tempo computacional total de resolução de problemas de programação linear da classe QAP.

**Palavras-chave:** Condicionadores. Fatorações Incompletas. Método de Pontos Interiores.

### Introdução

A fatoração controlada de Cholesky (CCF), proposta por Campos, em 1992, é uma variação da fatoração incompleta de Cholesky e foi utilizada com sucesso em abordagens híbridas de condicionamento de sistemas lineares decorrentes de métodos de pontos interiores (BOCANEGRA; CAMPOS; OLIVEIRA; 2007; GHIDINI et al.; 2012). Esse condicionador tem como principais vantagens a possibilidade de controle do preenchimento (*fill in*) de suas colunas por elementos não nulos e a previsibilidade da quantidade de memória de máquina necessária para o seu armazenamento. Além disso, o condicionador demonstrou ser bem sucedido quando utilizado em métodos iterativos como o método dos gradientes conjugados. Sua principal desvantagem, todavia, é a necessidade de reiniciar o cálculo da fatoração de uma versão regularizada da matriz original quando ocorrem falhas durante o processo de construção dos fatores incompletos que serão utilizados no processo de condicionamento. Essa técnica aumenta o tempo de condicionamento dos sistemas lineares e, conseqüentemente, o tempo computacional total para a resolução de problemas que utilizem a resolução desses sistemas em algum passo intermediário. A proposta deste trabalho é estudar a eficiência de uma alternativa à essa refatoração, utilizando um condicionador atualizado, descrito em (BELLAVIA et al; 2011), que baseia-se no estado da matriz no momento em que a fatoração falha.

### Precondicionador Fatoração Controlada de Cholesky

#### Fatoração controlada de Cholesky (CCF)

A fatoração controlada de Cholesky (CCF) é uma variação da fatoração incompleta de Cholesky (CAMPOS; BIRKETT; 1998). Uma grande vantagem desse condicionador é o fato de possuir consumo de memória previsível e controlável. A ideia por trás da CCF é baseada na fatoração incompleta de Cholesky de uma matriz  $A$ . Considere escrever a matriz  $A$  do seguinte modo:

$$A = LL^T = \hat{L}\hat{L}^T + R \quad (1)$$

sendo  $R$  uma matriz denominada matriz resíduo e que contém os elementos que estão presentes no fator  $L$ , mas não no fator  $\hat{L}$ . Definindo-se  $E = L - \hat{L}$  e preconditionando-se a matriz  $A$  em ambos os lados com  $L$  obtém-se

$$L^{-1}AL^{-T} = (I - \hat{L}^{-1}E)(I - \hat{L}^{-1}E)^T. \quad (2)$$

Assim, em (2), a medida que  $\hat{L} \rightarrow L$ , tem-se  $E \rightarrow 0$  e, conseqüentemente, a matriz  $L^{-1}AL^{-T}$  tende a matriz identidade  $I$ . Dessa forma, o preconditionador CCF é derivado do problema de minimização da norma de Frobenius da matriz  $E$ , ou seja,

$$\min \|E\|_F^2 = \min \sum_{j=1}^m \sum_i^n |l_{ij} - \hat{l}_{ij}|^2, \quad (3)$$

de onde obtém-se

$$\min \|E\|_F^2 = \min \sum_{j=1}^m \left[ \sum_{k=1}^{m_j+\eta} |l_{ikj} - \hat{l}_{ikj}|^2 + \sum_{k=m_j+\eta+1}^m |l_{ikj}|^2 \right]. \quad (4)$$

Na prática, o preconditionador CCF é calculado com base na fatoração  $A = LDL^T$  de  $A$  e o problema (4) é resolvido por meio do uso de uma heurística. A heurística utilizada, consiste em escolher os  $m_j + \eta$  maiores elementos em cada coluna  $j$  do fator  $L$ , considerando-se um  $\eta$  fixo. O parâmetro  $\eta$  determina a quantidade de armazenamento utilizada na CCF. Para um  $\eta$  qualquer, a heurística assegura um fator  $\hat{L}$  ótimo que é usado como preconditionador (CAMPOS; BIRKETT; 1998).

Conforme apresentado em (BOCANEGRA; CAMPOS; OLIVEIRA; 2007) e em (GHIDINI et al; 2012) a CCF possui bom desempenho quando utilizada como preconditionador nas iterações iniciais do método de pontos interiores para o problema de programação linear. No entanto, da mesma maneira que ocorre em fatorações incompletas, de um modo geral, a fatoração controlada de Cholesky não está livre da presença de pivôs muito pequenos ou não positivos (pivôs defeituosos) durante o processo da fatoração. Para contornar esse problema, é usado um incremento exponencial  $\alpha$  da seguinte maneira: durante o processo de fatoração  $LDL^T$  da matriz  $A$ , se um pivô defeituoso é encontrado, o processo de fatoração é interrompido e soma-se a todos os elementos da diagonal da matriz  $A$  o incremento  $\alpha$  que é calculado pela expressão exponencial  $\alpha_i = 5,0 \times 10^{-4} 2^i$ . Em seguida recomeça-se a fatoração da matriz  $A + \alpha I$ , a quantidade  $i$  de vezes necessárias até a fatoração ser completada com sucesso (ou até o número máximo de fatorações permitidas ser atingido).

A estratégia de somar o número  $\alpha$  aos elementos da diagonal da matriz  $A$ , também chamado de regularização da matriz  $A$ , aumenta o tempo de resolução dos sistemas lineares, devido a necessidade de reiniciar a fatoração da matriz  $A + \alpha I$  todas as vezes que houver falhas.

### CCF modificada por atualização

No caso de ocorrências de falhas durante o cálculo de fatorações incompletas, pode-se utilizar alternativas ao cálculo da fatoração  $LDL^T$  da matriz  $A + \alpha I$  para a construção do fator incompleto  $L$ . A estratégia proposta em (BELLAVIA et al; 2011), e que será considerada nesse trabalho, consiste em calcular um fator aproximado  $\bar{L}$  no lugar do fator  $L$ . Tal aproximação é realizada por meio de uma estratégia de atualização do fator  $L$  construído para a matriz  $A$ .

Dado um preconditionador  $M = LDL^T$  para a matriz  $A$ , define-se

$$M = (L + E + F)(L + E + F)^T \quad (5)$$

onde  $E = \text{diag}(e_1, \dots, e_n)$  e  $F$  é uma matriz estritamente triangular inferior. Os elementos de  $E$  têm a seguinte forma

$$e_i = \sqrt{1 + \frac{\alpha}{d_i}} - 1, 1 \leq i \leq n, \quad (6)$$

enquanto que os elementos não nulos de  $F$  possuem a forma

$$f_{ij} = \lambda_j l_{ij} \text{ e } \lambda_j = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{d_i}}} - 1, 2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n. \quad (7)$$

Na prática, o preconditionador atualizado  $\bar{M} = \bar{L}\bar{D}\bar{L}^T$  é obtido por

$$\bar{l}_{ii} = e_i + 1 \text{ e } \bar{l}_{ij} = (\lambda_j + 1)l_{ij}. \quad (8)$$

A proposta deste trabalho é modificar a fatoração controlada de Cholesky original com essa estratégia de atualização. Isto é, quando ocorrer falhas durante o cálculo da CCF, digamos na coluna  $j$ , em vez de calcularmos a fatoração  $LDL^T$  da matriz  $A + \alpha I$  desde o início, propomos atualizar as colunas já calculadas, usando as equações apresentadas em (8) e continuar o processo de fatoração normalmente. O preconditionador resultante será denominada de  $CCF_{\delta}$ .

### Precondicionamento em Métodos de Pontos Interiores

O problema de programação linear na forma padrão, chamado de *problema primal*, é dado por

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{9}$$

sendo  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a matriz das restrições do problema,  $c \in \mathbb{R}^n$  o vetor dos coeficientes da função objetivo,  $b \in \mathbb{R}^m$  o vetor dos termos independentes e  $x \in \mathbb{R}^n$  o vetor das variáveis a serem determinadas, também chamadas de variáveis de decisão. Considera-se que a matriz  $A$  tem posto completo  $m$ . A desigualdade  $x \geq 0$  indica que cada componente  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , do vetor  $x$  é não negativa.

Quando se trata da resolução de problemas de programação linear de grande porte, métodos de pontos interiores são eficientes e por isso são amplamente utilizados. Contudo, a variação mais utilizada desse tipo de método requer o cálculo da resolução de dois sistemas lineares, com a seguinte matriz de coeficientes

$$A\Theta A^T$$

onde  $\Theta$  é uma matriz diagonal, cujos elementos  $\theta_{ii}$  são todos positivos. Esse é o passo que demanda maior esforço computacional do método. Por isso, é relevante o estudo de estratégias que visem reduzir o custo computacional dessa etapa.

É importante observar que a matriz  $A\Theta A^T$  é simétrica definida positiva e que, portanto, o sistema linear em questão pode ser resolvido por meio da fatoração de Cholesky. Todavia, sabe-se, que para problemas de grande porte, a matriz  $A$  em geral é esparsa e métodos iterativos como o método dos gradientes conjugados precondicionado podem aproveitar melhor essa estrutura matricial e reduzir o esforço computacional do método de pontos interiores. No entanto, o uso de bons precondicionadores é imprescindível.

Em relação ao precondicionamento de sistemas lineares oriundos de métodos de pontos interiores dois tipos de precondicionadores se destacam: os precondicionadores baseados em fatorações incompletas e os precondicionadores construídos especificamente para o método usando as informações disponíveis sobre o mesmo. O primeiro tipo de precondicionadores funcionam bem nas iterações iniciais do método de pontos interiores enquanto que os do segundo tipo funcionam melhor nas iterações finais. Considerando esse fato, Bocanegra, Campos e Oliveira (2007) propuseram uma exitosa estratégia de precondicionamento em duas fases. Na primeira fase, o precondicionador controlada de Cholesky é utilizada. Quando este perde eficiência, ocorre uma mudança de fases e, então, um precondicionador do segundo tipo, conhecido como precondicionador Separador (OLIVEIRA; SORENSEN; 2005) passa a funcionar. Esta abordagem é conhecida como precondicionamento híbrido e tem sido amplamente estudada. A mudança de fases é feita por meio de heurísticas.

### Resultados e Discussão

Os testes numéricos da abordagem proposta foram realizados em ambiente Linux em uma máquina de processador Intel Corei7 1.70 GHz e com memória RAM de 8GB. A modificação proposta na fatoração controlada de Cholesky foi inserida no programa PCx (CZYZYK; MEHROTRA; WRIGHT; 1997) integrado com a abordagem híbrida de precondicionamento. A heurística adotada para mudança de fases e do valor inicial de  $\eta$  foi a mesma utilizada em (VELAZCO; OLIVEIRA; CAMPOS; 2010).

Os problemas utilizados nos testes estão apresentados na Tabela 1 e são provenientes da coleção QAPlib (BURKARD; KARISCH; RENDL; 1991). Esses são exemplos de problemas de atribuição quadrática (*Quadratic Assignment Problem*) e são um dos grandes desafios de otimização combinatória. A matriz  $A\Theta A^T$  oriunda desses problemas não é muito esparsa e a fatoração de Cholesky tem um grande número de entradas não nulas, por isso, a resolução do sistema linear por meio de um método direto é menos efetiva do que quando resolvida com o método dos gradientes conjugados precondicionado. As colunas da Tabela 1 apresentam, respectivamente, o número de linhas, o número de colunas e o número de elementos não nulos da matriz  $A$  das restrições de igualdade do problema de programação linear na forma padrão.

Além de investigar a eficiência da  $CCF_\delta$ , o estudo também comparou o desempenho da mesma em relação a  $CCF_\beta$  original e a  $CCF_\beta$  proposta em (SILVA; 2014). Nesta última, a atualização de  $A = LDL^T$  é feita como

$$\bar{d}_{ii} = l_{ii} + \alpha \text{ e } \bar{l}_{ii} = \frac{d_{ii}}{\bar{d}_{ii}} l_{ii}. \tag{10}$$

Tabela 1: Problemas QAP

<b>Problema</b>	<b>Linhas</b>	<b>Colunas</b>	<b>Não Nulos A</b>
els19	4350	13186	50882
chr22b	5587	10417	36520
chr25a	8149	15325	53725
scr15	2234	6210	24060
scr20	5079	15980	61780
rou20	7359	37640	152980
nug05	148	225	1050
nug06-3rd	1208	1425	5523
nug06	280	486	1680
nug07	474	931	3318
nug08	742	1632	5936
nug12	3192	8856	33528
qap8	742	1632	5936
qap12	2794	8856	33528

O desempenho dos preconditionadores atualizados foram comparados com base no tempo de execução e no número de iterações obtidos na resolução dos problemas apresentados na Tabela 1. A Figura 1 e a Figura 2 ilustram a curva de desempenho do método de pontos interiores, em relação ao tempo e ao número de iterações, respectivamente, quando preconditionado com os preconditionadores CCF,  $CCF_\beta$  e  $CCF_\delta$  na primeira fase do preconditionamento híbrido. O número  $\pi(\tau)$  no eixo vertical do gráfico indica a fração de problemas que um dado método consegue resolver dentro de um fator  $\tau$  do menor tempo atingido por algum dos métodos testados.  $\pi(\tau)$  também pode ser interpretado como sendo a probabilidade de um dado método resolver os problemas propostos dentro de um fator de tempo  $\tau$  do tempo mínimo atingido por algum dos métodos para resolver o problema.

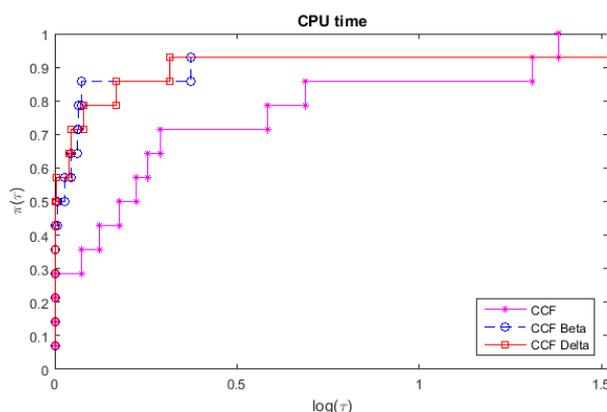


Figura 1: Perfil de desempenho - Tempo de CPU do método de pontos interiores

Dessa maneira, conforme pode ser visualizado na Figura 1, a probabilidade dos problemas propostos serem resolvidos dentro de um menor fator de tempo é maior quando os preconditionadores atualizados  $CCF_\beta$  e  $CCF_\delta$  são utilizados. Ou seja, as curvas de desempenho do método quando essas duas estratégias são utilizadas permanecem acima da curva de desempenho do método quando a CCF original é utilizada, para fatores de tempo, por exemplo, menores ou igual a 1 unidade. Observa-se ainda que as abordagens  $CCF_\beta$  e  $CCF_\delta$  tiveram desempenho semelhantes.

Por outro lado, a Figura 2, por sua vez, mostra que o número de iterações do método de pontos interiores

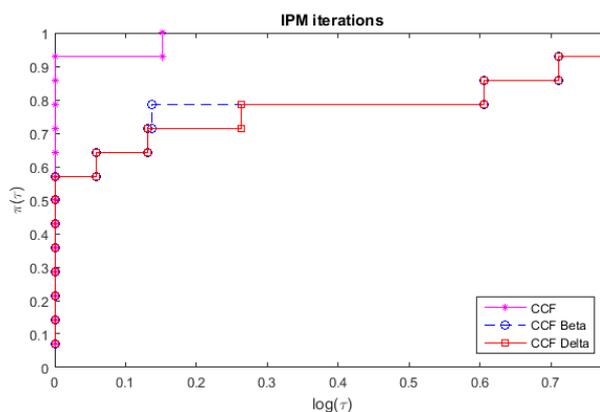


Figura 2: Perfil de desempenho - Número de iterações do método de pontos interiores

aumentaram com o uso da  $CCF_{\beta}$  e  $CCF_{\delta}$ . Esses resultados permitem inferir que, muito embora o uso de preconditionadores atualizados impliquem na redução do tempo computacional, o preconditionador gerado é de menor qualidade, uma vez que há aumento no número de iterações do método de pontos interiores. Esse resultado estar de acordo com as observações apresentadas em (BELLAVIA et al.; 2012).

## Conclusões

Neste trabalho investigamos a eficiência de uma estratégia de atualização para o preconditionador fatoração controlada de Cholesky (CCF). A estratégia foi aplicada na abordagem de preconditionamento híbrido para solução de sistemas lineares oriundos de método de pontos interiores para problemas de programação linear. A atualização testada mostrou-se uma alternativa viável uma vez que implicou na redução do tempo computacional necessário para a resolução dos problemas. A abordagem apresentou resultados promissores para problemas do tipo QAP. Futuramente novas estratégias de atualização serão estudadas no contexto de métodos de pontos interiores.

## Agradecimentos

Os autores agradecem a FAPESB (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia) pelo apoio financeiro.

## Referências

- BELLAVIA, S.; De SIMONE, V.; Di SERAFINO, D.; MORINI, B. A. **Efficient Preconditioner Updates for Shifted Linear Systems**. SIAM Journal on Scientific Computing, v. 33, n. 4, p. 1785-1809, 2011.
- BELLAVIA, S.; De SIMONE, V.; Di SERAFINO, D.; MORINI, B. A. **A preconditioning framework for sequences of diagonally modified linear systems arising in optimization**. Numerical Analysis, v. 50, n. 6, p. 3280-3302, 2012.
- BOCANEGRA, S.; CAMPOS, F.F.; OLIVEIRA, A.R.L. **Using a hybrid preconditioner for solving large-scale linear systems arising from interior point methods**. Computational Optimization and Applications, v.36, p.149-164, 2007.
- BURKARD, R.E.; KARISCH, S.; RENDL, F. **QAPLIB - A quadratic assignment problem library**. European Journal of Operational Research, p. 115-119, v.55, n.1, 1991.

CAMPOS, F.F.; BIRKETT, N.R.C. **An efficient solver for multi-right hand side linear systems based on the CCCG() method with applications to implicit time-dependent partial differential equations.** SIAM J. Sci. Comput., p.126-138, v.19, n.1, 1998.

CZYZYK, J.; MEHROTRA, S.; WRIGHT, S. J. **PCx User Guide.** 1997.

GHIDINI, C.T.L.S.; OLIVEIRA, A.R.L.; SILVA, J.; VELAZCO, M.I. **Combining a hybrid preconditioner and a optimal adjustment algorithm to accelerate the convergence of interior point methods.** Linear Algebra and Applications, v.436, n.5, p.1267-1284, 2012.

OLIVEIRA, A.R.L.; SORENSEN, D.C. **A new class of preconditioners for large-scale linear systems from interior point methods for linear programming.** Linear Algebra and its Applications, v.394, n.0, p.1-24, 2005.

SILVA, L.M. **Modificações na Fatoração Controlada de Cholesky para Acelerar o Precondicionamento de Sistemas Lineares no Contexto de Pontos Interiores.** 2014. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – IMECC/UNICAMP, Campinas, 2014.

VELAZCO, M.I.; OLIVEIRA, A.R.L.; CAMPOS, F.F. **A note on hybrid preconditioners for large-scale normal equations arising from interior-point methods.** Optimization Methods & Software, P.321-332, v.25, n.2, 2010.



## Otimização usando Rede Social - uma nova Metaheurística para Problemas Gerais de Otimização

*Hassan Sherafat*  
*Universidade Federal de Sergipe*  
*hassan@ufs.br*

*Victor Hugo Resende Lima*  
*Universidade Federal de Sergipe*  
*vhugoreslim@gmail.com*

**Resumo:** Nos últimos anos, as metaheurísticas foram estudadas e desenvolvidas como técnicas poderosas para solução de problemas de otimização de difícil tratamento. Algumas das técnicas conhecidas neste campo são Algoritmos Genéticos, Busca Tabu, Recozimento Simulado, Otimização por Colônia de Formigas e Inteligência de Enxames, as quais são aplicadas com sucesso em muitos problemas complexos de otimização. Neste artigo, apresentamos uma nova metaheurística para resolver problemas gerais de otimização, inspirada no conceito de redes sociais, denominada Social Network Optimization (SNO). O objetivo aqui é demonstrar a aplicabilidade da nova metaheurística para problemas NP-Difícil.

**Palavras-chave:** SNO, Metaheurística. Otimização. Problemas NP-Difícil.

### Introdução

Na matemática aplicada e na computação, alguns problemas são considerados problemas NP-completos ou NP-Difícil, conforme dito por Garey e Johnson (1979). Há evidências de que qualquer solução para esses problemas envolve um número exponencial de operações, o que torna impossível resolver o problema para grandes e até mesmo médios problemas. Um exemplo clássico de um problema NP-completo é o conhecido Problema do Vendedor Viajante (PVV), no qual  $n$  cidades devem ser visitadas em um circuito, onde a distância (custo) entre cada par de cidades é conhecida. O problema é identificar a sequência em que as cidades devem ser visitadas para minimizar a distância total percorrida. Qualquer solução exata para o PVV leva a uma enumeração implícita de possíveis circuitos. Sabe-se que o número total de circuitos possíveis é  $(n-1)!$ . Só para ter uma ideia, um PVV com 60 cidades pode ter até  $1.38 \cdot 10^{80}$  possíveis soluções. Outros problemas na classe NP-completo têm o mesmo comportamento. Esta é a razão para empregar e procurar soluções aproximadas para tais problemas.

Soluções aproximadas podem ser fornecidas por métodos heurísticos, projetados para cada caso. Existem várias abordagens para heurísticas: métodos gananciosos, pesquisas locais e muitas outras. O principal problema para essas alternativas é o pior caso: a heurística pode facilmente ficar presa em um ótimo local, e a solução aproximada estar longe do ótimo global.

Em contrapartida, metaheurísticas são métodos sofisticados que empregam uma heurística simples que explora de maneira inteligente todo o espaço de solução, sem medo de cair em um ótimo local. A primeira vez que o termo “metaheurística” foi usado, foi por Glover (1986). Algumas metaheurísticas bem conhecidas que foram aplicadas com sucesso a problemas de otimização combinatória são as seguintes:

A Busca Tabu, criada por Glover (1986), é uma metaheurística que emprega métodos de busca local. A pesquisa local (vizinhança) usa uma solução potencial para um problema e verifica seus vizinhos imediatos (isto é, soluções similares, exceto por um ou dois detalhes menores) na esperança de encontrar uma solução melhorada. Os métodos de pesquisa locais tendem a ficar presos em regiões sub-ótimas ou em planaltos, onde muitas soluções são igualmente adequadas. A Busca Tabu melhora o desempenho da pesquisa local, relaxando sua regra básica. Primeiro, a cada passo os movimentos de piora podem ser aceitos se nenhum movimento de melhoria estiver disponível (como quando a busca é travada em um ótimo local estrito). Além disso, as proibições (daqui em diante o termo tabu) são introduzidas para desencorajar a busca de voltar às soluções anteriormente visitadas.

O Algoritmo Genético, sugerido por Holland (1975), é uma metaheurística inspirada na seleção natural, contando com dois operadores bio-inspirados: cruzamento e mutação. Em um algoritmo genético, uma população de soluções candidatas (chamadas de indivíduos) para um problema de otimização evolui para soluções melhores. Cada solução candidata tem um conjunto de propriedades que podem ser transformadas e alteradas. Tradicionalmente, as soluções são representadas em números binários como *strings* de 0s e 1s, mas outras codificações também são possíveis. A evolução geralmente começa a partir de uma população de indivíduos gerados aleatoriamente, chamada de geração inicial. Nas gerações subsequentes, a aptidão de cada indivíduo na população é avaliada; a aptidão é geralmente calculada a partir do valor da função objetivo no problema a ser resolvido. Os indivíduos mais aptos são selecionados estocasticamente na população atual e novos são criados usando duas operações básicas: cruzamento e mutações. A nova geração de soluções candidatas é então usada na próxima iteração do algoritmo. Comumente, o algoritmo termina quando um número máximo de gerações foi produzido, ou um nível de aptidão satisfatório foi alcançado para a população.

Recozimento Simulado, desenvolvido por Kirkpatrick et al. (1983) é uma técnica probabilística para aproximar o ótimo global de uma dada função. O nome e a inspiração vêm do recozimento na metalurgia. O Recozimento Simulado interpreta o arrefecimento lento como uma diminuição lenta na probabilidade de aceitar soluções piores conforme explora o espaço de soluções. Aceitar soluções piores é uma propriedade fundamental das metaheurísticas, pois permite uma busca mais extensa pela solução ideal. Essa noção de resfriamento lento é implementada no algoritmo como uma diminuição lenta na probabilidade de aceitar soluções piores à medida que explora o espaço da solução.

Otimização por Colônia de Formigas, desenvolvido por Dorigo (1992) é uma técnica probabilística para resolver problemas computacionais que podem ser reduzidos a encontrar bons caminhos através de grafos. A técnica pode ser vista como um membro da família dos métodos Inteligência de Enxames. O primeiro algoritmo de Dorigo tinha como objetivo procurar um caminho ótimo em um grafo, baseado no comportamento de formigas que buscavam um caminho entre sua colônia e uma fonte de alimento. A ideia original desde então se diversificou para resolver uma classe mais ampla de problemas numéricos e, como resultado, surgiram vários problemas, com base em vários aspectos do comportamento das formigas.

As metaheurísticas citadas acima inspiraram várias outras técnicas. Por exemplo, Bianchi (2009) afirma que Métodos Evolutivos, Algoritmos Meméticos e Inteligência de Enxames foram baseados nesse métodos mais tradicionais.

## Social Network Optimization

Neste artigo, uma nova metaheurística é proposta, denominada *Social Network Optimization* (SNO), aplicada a problemas gerais de otimização. O método é inspirado na aprendizagem e interação

de indivíduos em uma rede social, onde cada membro está em contato com um número limitado de outros membros (amigos). E seus amigos, por sua vez, entram em contato com um número finito de outros amigos, que podem ser ou não amigos comuns do primeiro, ou de um com o outro.

Cada indivíduo na SNO representa uma solução para o problema de otimização. Então uma solução pode ser comparada com aquelas soluções na rede com as quais ela tem contato. A ideia é que o indivíduo aprenda um detalhe de outro indivíduo em seu círculo de amizades. Outros membros da rede praticam o aprendizado da mesma maneira. Em uma iteração do algoritmo todos os indivíduos tentam atualizar suas soluções tendo boas influências de sua rede.

Como nas redes sociais reais, a interação entre os indivíduos pode levar ao aprendizado coletivo. A aprendizagem se tornaria mais intensa e significativa se houvesse uma postura de aprendizado para os membros. Essa é a ideia básica do SNO, já que o aprendizado é provocado. Em cada iteração, todos os indivíduos têm a chance de aprender um pouco mais, em algum aspecto da solução, aproveitando a diversidade natural existente na rede.

### Conceito de Rede Social

Um grafo  $G = (X, E)$  pode representar uma rede social, onde cada vértice  $i \in X$  representa um indivíduo e cada aresta  $(i, j) \in E$  a amizade entre os indivíduos  $i$  e  $j$ . Seja  $n = |X|$  o número de vértices e  $m = |E|$  o número de arestas do grafo. Para fins práticos, no momento da implementação do algoritmo, seria melhor que o número de contatos para cada indivíduo fosse uma constante  $d$ , ou seja, cada um tem exatamente  $d$  amigos. Isso significa que o grau de cada vértice no grafo correspondente é  $d$ . Essa suposição é possível, desde que  $d < n$  e pelo menos um desses números  $(n, d)$  seja par. A última condição deve ser verdadeira, porque a soma de todos os graus de vértices é o dobro do número de arestas:

$$n \cdot d = 2m \tag{1}$$

Portanto,  $m = n \cdot d/2$ , isso implica que para  $n$  ou  $d$ , um deles deve ser par.

Os números  $n$  e  $d$  são dois parâmetros importantes do algoritmo e devem ser corretamente corrigidos. Quanto maior o número de variáveis do problema, maior deve ser o número  $n$ , enquanto  $d$  limita o domínio da pesquisa local na operação de aprendizagem. Para um algoritmo rápido,  $d \ll n$ .

O grafo  $G$  é criado aleatoriamente. Em sua construção, deve-se observar sua conectividade, já que um grafo desconectado (com dois ou mais componentes disjuntos) implica a impossibilidade de aprendizagem direta ou indireta entre indivíduos desconectados.

Para cada vértice do grafo é associada uma solução para o problema a ser resolvido. A solução inicial pode ser aleatória ou gerada usando alguma heurística, por exemplo, um método estocástico guloso. Nesse caso, deve-se assegurar que a heurística não gere soluções muito semelhantes. A qualidade mais importante para uma solução inicial é a sua diversidade.

### Operação de aprendizagem

O SNO é um método evolutivo, no qual a evolução dos indivíduos acontece através da aprendizagem em vez de combinações cegas ou simples imitação da maioria. Em Algoritmos Genéticos, por exemplo, a melhoria de uma geração para outra é alcançada a partir da recombinação de indivíduos,

privilegiando aqueles que possuem boa adaptação. No algoritmo de Colônia de Formigas, a melhoria ocorre por meio de uma imitação probabilística da maioria das outras formigas. Embora esses procedimentos possam ser interpretados como formas de aprendizado, eles não podem ser considerados como aprendizado consciente.

Uma característica importante do SNO é sua evolução gradual através da aprendizagem: um aprendizado consciente seja de um indivíduo bom ou de um indivíduo muito pobre. Aprender não significa trocar uma solução inteira por outra, significa assimilar um detalhe de outra solução que lhe dê alguma vantagem. A operação que leva ao aprendizado é através de alguma pesquisa local comparativa entre uma solução existente em um vértice e as soluções de seus amigos. Tal operação pode ser realizada usando várias estratégias, dependendo da natureza do problema a ser resolvido. Apresentamos abaixo uma possível estratégia genérica:

Seja  $S^k(i)$  a solução atual (na iteração  $k$ ) de um indivíduo  $i$ , com valor da função objetivo  $f_i^k$ . Suponha que  $\sigma$  seja um detalhe dessa solução, que aparece como  $\sigma_i$  em  $i$ . Dado que  $J = \Gamma(i)$  seja o conjunto de amigos de  $i$  na rede. O detalhe  $\sigma$  aparece como  $\sigma_j$  em cada  $j \in J$ . Se o indivíduo  $i$  assimilar  $\sigma_j$  em sua solução, então seu valor de função objetivo será alterado para  $f_i^k(\sigma_j)$ . Logicamente,  $i$  aceitaria a mudança de um  $j$  que lhe desse o melhor avanço, e somente se isso fosse melhor do que sua solução.

No entanto, a nova solução  $S^{k+1}(i)$  deve levar em conta dois parâmetros: o valor da função objetivo  $f_j^k$  (de quem está obtendo informação) e a melhoria causada em seu próprio valor de função objetivo  $f_i^k(\sigma_j)$ , assimilando  $\sigma_j$ . Em outras palavras, é importante a melhoria alcançada no valor da função objetivo e igualmente importante o valor da função objetivo de quem contribuiu com o desenvolvimento.

A importância de cada um desses componentes deve ser adequadamente dimensionada, usando parâmetros  $\alpha, \beta \geq 0$ . Para uma avaliação do problema de minimização:

$$\varphi_i = \max_j \alpha [f_i^k - f_i^k(\sigma_j)] + \beta [f_i^k - f_j^k] \quad (2)$$

Então, a nova solução para  $i$  será  $S^{k+1}(i)$ , obtida da aprendizagem do detalhe de solução  $\sigma_j$  do indivíduo  $j$ , que maximiza o valor de  $\varphi_i$ . Se  $\varphi_i \leq 0$ , então  $S^{k+1}(i) = S^k(i)$ .

Note que o processo de aprendizagem não afeta nenhum indivíduo em  $J$ , que permanece intacto.

### Pseudo código do SNO

Um típico algoritmo para SNO seria o seguinte:

- (0) Dado um problema de otimização  $P$ , com os seguintes parâmetros:
  - $n$ : número total de membros em uma rede social (número par);
  - $d$ : número de amigos para cada membro;
  - $\alpha, \beta \geq 0$ : parâmetros de aprendizagem.
- (1) Crie um grafo aleatório  $G = (X, E)$  com  $n$  vértices, todos eles com grau  $d$ , representando a rede social.

- (2) Associe a cada vértice  $i \in X$  uma solução  $S_i(i)$ , obtido por algum método estocástico guloso, e calcule o valor da solução  $f_i^0$ ;  
 Fixe  $k = 0$ .
- (3) Enquanto alguma condição de convergência não é satisfeita, repita os passos 3.1 a 3.2:
- 3.1. Repita os passos 3.1.1 a 3.1.2, enquanto existir indivíduos que tenham aprendido na iteração  $k$ ,
- 3.1.1. Selecione um indivíduo arbitrário  $i \in X$  que não tenha aprendido ainda na iteração atual;
- 3.1.2. Indivíduo  $i$  aprende um detalhe de solução  $\sigma$  do seu amigo  $j \in \Gamma(i)$ , pela maximização de  $\varphi_i$ :
- $$\varphi_i = \max_j \alpha[f_i^k - f_i^k(\sigma_j)] + \beta[f_i^k - f_j^k]$$
- Se  $\varphi_i > 0$ , então melhore a solução  $S^{k+1}(i)$ , assimilando  $\sigma_j$ , o qual maximiza  $\varphi_i$ , como mencionado acima.
  - Se  $\varphi_i \leq 0$ , faça  $S^{k+1}(i) = S^k(i)$ .
- 3.2.  $k = k + 1$ .
- (4)  $S^k(l)$  para o qual  $f_l^k = \min_i \{f_i^k\}$  é a melhor solução obtida para o problema  $P$ . //

### Convergência

Um possível critério de parada para o algoritmo pode ser a condição de não aprendizagem em uma iteração inteira. Ou seja, nenhum indivíduo poderia melhorar sua solução através do aprendizado. Esse comportamento pode indicar a estagnação em um ótimo local ou até mesmo global.

A convergência do SNO para a solução ótima global, em um número finito de iterações, não pode ser garantida, nem para qualquer outra metaheurística. O que pode ser estabelecido é que o método tem a capacidade de deixar os ótimos locais. O processo de aprendizagem é unilateral: o indivíduo  $i$  aprende com  $j$ , mas não o ensina! Em vez disso,  $j$  aprende de  $k$  e assim por diante. Além disso, o detalhe da solução (objeto de aprendizagem) pode ser alterado aleatoriamente. O resultado é uma população que evolui, mas mantém heterogeneidade. E esta é uma condição favorável para sair de um ótimo local.

### Estratégias Adicionais

O que apresentamos como um algoritmo é apenas uma opção para uma estrutura básica do SNO. O sucesso do algoritmo depende muito das estratégias adotadas em sua implementação para o problema específico que está sendo resolvido. Além disso, algumas outras estratégias podem ser consideradas:

A construção da rede pode ser diferente e seus vértices podem ter graus variados e na construção da rede, o grau dos vértices não precisa necessariamente ser uma constante. Isso significa que o número de amigos para cada indivíduo pode ser diferente.

Após o culminar do processo de evolução, os mesmos indivíduos (já evoluídos) podem mudar sua rede de amizade, continuando o processo com a nova rede.

A estratégia de aprendizagem pode assumir várias formas. Por exemplo, se um indivíduo não melhorar sua solução aprendendo um detalhe, o detalhe pode ser alterado.

Uma estratégia de conferência pode ser implementada no algoritmo depois de executar um número predefinido de iterações. A conferência tem como objetivo um aprendizado adicional entre um número de indivíduos de alto nível, não importando se eles estão, ou não, em um círculo de amizade.

### Conclusões

Apresentamos uma nova metaheurística, denominada *Social Network Optimization (SNO)*, inspirada no comportamento de redes sociais, para resolver problemas gerais de otimização. O SNO é baseado em uma aprendizagem sistemática de todos os indivíduos, cada um aprende daqueles indivíduos na sua rede de amizade. Mostramos a capacidade da SNO de superar os ótimos locais em direção a soluções melhores, no entanto, não afirmando que alcança a melhor. A metodologia foi apresentada de forma conceitual, aplicável a uma variedade de problemas de difícil tratamento.

### Referências

- BIANCHI, L. et al. A survey on metaheuristics for stochastic combinatorial optimization. **Natural Computing: an international journal**, v. 8, n. 2, p. 239-287, 2009.
- DORIGO, M. **Optimization, Learning and Natural Algorithms**. 1992. Thesis (PhD in System and Information Engineering)-Politecnico di Milano, Milano, 1992.
- GAREY, M.; JOHNSON, D. **Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness**. New York: W. H. Freeman & Co., 1979.
- GLOVER, F. Future Paths for Integer Programming and Links to Artificial Intelligence. **Computers and Operations Research**, v. 13, n. 5, p. 533-549, 1986.
- HOLLAND, J. H. **Adaptation in Natural and Artificial Systems**. Michigan: University of Michigan Press, 1975.
- KIRKPATRICK, S. et al. Optimization by Simulated Annealing. **Science**, v. 220, n. 4598, p. 671-680, 1983.

## Problemas de corte: um estudo via técnicas de otimização.

*Nádyá Zanin Muzulon*

*Universidade Federal do Paraná - Campus Avançado em Jandaia do Sul-PR*

*nadyamuzulon@ufpr.br*

*Juliana Verga Shirabayashi*

*Universidade Federal do Paraná - Campus Avançado em Jandaia do Sul-PR*

*juliana.verga@ufpr.br*

*Jair da Silva*

*Universidade Federal do Paraná - Campus Avançado em Jandaia do Sul-PR*

*jairsilva@ufpr.br*

**Resumo:** Este trabalho tem por objetivo estudar e propor soluções para o problema de corte bidimensional. Esse tipo de problema é essencial para o planejamento da produção em indústrias como as do setor moveleiro, onde é possível obter soluções quanto à forma de cortar objetos, para a produção dos itens nas quantidades solicitadas, rearranjando geometricamente esses itens, de modo que a perda de material seja mínima, diminuindo assim o custo de produção. Diante disso, um estudo de caso em uma empresa de móveis da região foi realizado. Tal estudo foi dividido em várias etapas, a saber: coleta de dados na empresa, modelagem do problema, estratégia de solução, análise e melhoria das soluções obtidas. O problema foi modelado como um problema de corte bidimensional e as soluções serão obtidas utilizando o GLPK (GNU Linear Programming Kit) através da linguagem de programação Julia.

**Palavras-chave:** Corte bidimensional. Programação linear. Otimização. Matemática aplicada à Engenharia.

## Introdução

Nos dias atuais a competitividade empresarial é a grande motivadora para geração de negócios e inovação, sendo também um desafio a ser enfrentado pelas empresas diariamente. Assim, para potencializar resultados e se destacar perante seu setor, as empresas devem reforçar suas vantagens e ficar atentas a problemas práticos que muitas vezes passam despercebidos, fazendo com que as mesmas não atinjam suas metas. Diante disso a organização pode contar com ferramentas auxiliaadoras, entre elas, a Pesquisa Operacional (P.O), definida como aplicação de métodos científicos a problemas complexos visando auxiliar nas tomadas de decisões (ARENALES ET AL, 2007). Diante do exposto, este trabalho visa abordar problemas de corte cujas indústrias de móveis enfrentam em seu dia a dia. Para estas organizações, a redução dos custos de produção e otimização dos processos estão, frequentemente, associados à utilização de estratégias adequadas de cortes. Várias indústrias usam objetos maiores padronizados para serem cortados em tamanhos menores variados, em geral, não padronizados. Assim de acordo com Poldi e Arenales (2006, p. 154) “problemas de corte de estoque consistem em cortar peças maiores (objetos) disponíveis em estoque com a finalidade de produzir peças menores (itens) para atender uma dada demanda, otimizando uma determinada função objetivo que pode ser, por exemplo, minimizar a perda de material, ou o custo dos objetos cortados.”

A forma geométrica como os itens são arrançados em um objeto é chamada de padrão de corte e um padrão de corte é dito homogêneo se contém apenas um tipo de item. Diversos fatores devem ser considerados na elaboração de um padrão de corte, por exemplo, em peças retangulares, um padrão de corte é viável se for guilhotinado, ou seja, um corte feito de uma extremidade a outra de um retângulo, dividindo-o em retângulos menores. Outro fator importante na geração de um padrão de corte é o número de vezes que o objeto deve ser rotacionado em  $90^\circ$  de forma a permitir que os cortes guilhotinados sejam realizados (número de estágios). De maneira geral, o número de estágios  $k$  é dado por  $k = r + 1$ ,

sendo  $r$  o número de rotações necessárias. Se ao término do último estágio, todos os itens tiverem sido obtidos, o padrão de corte é dito exato, se for necessário um corte adicional (apara) o padrão é não exato (ARENALES ET AL, 2004).

## Metodologia

Neste trabalho, os objetos mestres usados para testes serão bidimensionais  $M(183;275)$ , onde  $L$  e  $W$  representam respectivamente a largura e comprimento, em centímetros, da placa de Medium Density Fiberboard (MDF) original a ser cortada, para confecção de um hack de duas gavetas. Os itens a serem cortados, com suas respectivas demandas  $d_i$  e dimensões  $(l_i; w_i)$  são: 1 tampo duplo superior (156;50); 2 laterais duplas (65;50); 1 tampo superior das gavetas (150;47); 1 sarrafo duplo inferior das gavetas (150;7); 1 fundo traseiro (150;65); 2 frentes da gaveta (74,5;32,5); 4 laterais simples da gaveta (45;33); 2 bases simples da gaveteira (75;45); 4 sarrafo simples de gaveteira (74;7); 4 laterais da gaveta (45;27); 2 contra frente da gaveta (66,3;27) e 2 fundos da gaveta (67,4;43,1). Para modelarmos o problema de corte bidimensional cada padrão de corte, supostamente conhecido, deve ter associado a si um vetor  $\alpha_j$  dimensional, cujas coordenadas  $\alpha_{ij}$  representa  $m$  números de itens do tipo  $i$   $(l_i; w_i)$  a serem cortados no padrão de corte  $j$ . Para auxiliar na compreensão e desenvolvimento do estudo também é importante esclarecer que um vetor  $\alpha$  só representa um padrão de corte, se e somente se, a soma das áreas dos itens presentes no padrão não ultrapassarem o tamanho total do objeto mestre  $(L; W)$  a ser cortado. Sabendo disso a problemática pode ser formulada genericamente da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.a} & \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq d_i \\ x_j &\in Z^+ \end{aligned} \tag{1}$$

onde  $a_{ij}$  representa o número de itens  $i$  cortados no padrão  $j$ , a variável de decisão  $x_j$  representa o número de objetos cortados de acordo com o padrão  $j$ ; a função objetivo pode ter várias interpretações: minimizar a perda em cada padrão de corte ou minimizar o número de objetos cortados; a primeira restrição garante que a demanda seja atendida, nota-se que ela também considera produções de itens em excesso, em casos de demanda flexível; e por fim temos a restrição que indica o tipo de variável.

## Conclusões

Utilizando estratégias adequadas de corte, foi possível notar como tal, afeta na redução de custos com matéria prima, fornecendo vantagens consideráveis em relação a concorrentes que não adotam tal prática. Ainda serão realizadas comparações entre os resultados que serão obtidos com o GLPK e a forma com que a empresa atualmente corta suas peças, esperando-se assim, que a metodologia utilizada sugira padrões de corte que diminuam as perdas de matéria prima.

## Agradecimentos

Os autores agradecem a fábrica de móveis Pascotto, localizada na cidade de Marialva (PR), pela colaboração por meio do fornecimento de dados para realização deste trabalho e a Fundação Araucária pelo patrocínio da pesquisa.

## Referências

- ARENALES, M. et al. **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.
- ARENALES, M.; MORABITO, R.; YANASSE, H.. Problemas de Corte e Empacotamento. **Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**. Mini curso, São João Del Rei-MG, 2004. Disponível em: <http://www.din.uem.br/sbpo/sbpo2004/pdf/arq0280.pdf>. Acesso em 01 ago. 2017.
- POLDI, K. C.; ARENALES, M. N. O problema de corte de estoque unidimensional multiperíodo. **Pesquisa Operacional**, v. 30, n. 1, p.153-174, 2010.



**Parte VII**

**Problemas Inversos**

1 **Aplicação do método das soluções fundamentais na reconstrução de fontes**  
2 **com suporte distribuído**

3 *José Paes da Costa Neto; COSTA, J. P. N*  
4 *UFPB; Centro de informática*  
5 *jnetopc@gmail.com*

6 *Jairo Rocha de Faria; FARIA, J. ROCHA DE*  
7 *UFPB; Centro de informática*  
8 *jairo@ci.ufpb.br*

9 *Thiago José Machado; MACHADO, T. J.*  
10 *UFPB; Centro de informática*  
11 *thiagojm@lnc.br*

12 **Resumo:** Neste trabalho será tratado o problema inverso de reconstrução de fonte, que consiste em reconstruir o  
13 termo fonte de uma equação diferencial parcial através da leitura dos dados de Cauchy tomados sobre a fronteira  
14 do domínio. Em particular, deseja-se reconstruir a forma do suporte deste termo fonte. Para isto, reescreve-se o  
15 problema inverso como um problema de otimização e utiliza-se conceitos de derivada topológica para minimizar  
16 o funcional de forma adotado. Além disso, a implementação numérica será feita utilizando o método das soluções  
17 fundamentais.

18 **Palavras-chave:** Problemas Inversos. Derivadas Topológicas. Método das Soluções Fundamentais (MSF).

19 **Referências**

20 Jackowska-Strumillo, L., Sokolowski, J., Zochowski, A. et al. On Numerical Solution of Shape Inverse  
21 Problems, **Computational Optimization and Applications** 23, 231-255, 2002.

22 Bin-Mohsin, B. and Lesnic, D. (2011) The method of fundamental solutions for Helmholtz-type  
23 equations in composite materials, **Computers and Mathematics with Applications**, Vol.62, No.12,  
24 pp.4377-4390.

25 Lesnic, D. and Bin-Mohsin, B. (2012) Inverse shape and heat transfer coefficient identification, **Journal**  
26 **of Computational and Applied Mathematics**, Vol.236, No.7, pp.1876-1891.

## Reconstrução de Fontes concentradas: Uma abordagem utilizando a equação de Helmholtz Modificada

*Romulo da Silva Lima*  
*romulo\_dasilva@hotmail.com*

*Jairo Rocha de Faria*  
*jairo@ci.ufpb.br*

*Thiago José Machado*  
*thiagao.matematica@gmail.com*

*Raul Renner Martins de Sá*  
*raulrennerm@gmail.com*

*Universidade Federal da Paraíba - Programa de Pós Graduação em Modelagem Matemática e Computacional - PPGMMC*

**Resumo:** A reconstrução de fontes concentradas é um problema inverso com importantes aplicações nos mais variados ramos das ciências. Este problema consiste em reconstruir uma fonte escrita por uma combinação linear finita de massas pontuais tendo como base informações advindas da fronteira do domínio. Neste trabalho, o problema inverso da reconstrução de fontes concentradas será modelado pela equação de Helmholtz modificada, onde será empregando técnicas de otimização para encontrar a solução. Em particular, será feita uma reformulação do problema inverso, onde ele será reescrito como um problema de minimização em que um funcional de forma será minimizado com relação a um conjunto de fontes admissíveis incorporada na modelagem do problema. Do ponto de vista computacional, usaremos o Método das Soluções Fundamentais (MFS) para resolver numericamente problemas diretos auxiliares provenientes da reformulação do problema inverso, tendo em vista todas as vantagens deste método numérico sem malha em comparação com técnicas de discretização do domínio como o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF). Além disso, o MSF foi utilizado para representar as cargas pontuais que compõe a fonte concentrada, reduzindo o ruído que é característico quando se usa o MDF ou MEF no algoritmo de reconstrução. Com os resultados numéricos obtidos, foi possível comprovar a eficiência, eficácia e robustez do algoritmo de reconstrução proposto, até mesmo considerando dados parcialmente com ruídos.

**Palavras-chave:** Método das Soluções Fundamentais. Reconstrução de Fontes Concentradas. Problemas Inversos. Equação de Helmholtz modificada.

## Referências

- EL BADIA, Abdellatif; HA-DUONG, Tuong. An inverse source problem in potential analysis. **Inverse Problems**, v. 16, n. 3, p. 651, 2000.
- HON, Y. C.; WEI, T. The method of fundamental solution for solving multidimensional inverse heat conduction problems. **CMES Comput. Model. Eng. Sci**, v. 7, n. 2, p. 119-132, 2005.
- KOHN, Robert V.; VOGELIUS, Michael. Relaxation of a variational method for impedance computed tomography. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v. 40, n. 6, p. 745-777, 1987.
- MACHADO, T. J. **Um Novo Método para Reconstrução de Fontes Concentradas**. 76f. Tese (Doutorado em Ciências em Modelagem Computacional) - Petrópolis, RJ. : Laboratório Nacional de Computação Científica, 2017.
- SILVA, R. M. G. **Problema inverso de reconstrução e identificação de fontes em equações elípticas**. 97f. Tese (Doutorado) Programa de Engenharia Nuclear, Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2016.

**Parte VIII**

**Processamento de Sinais**

## Amostragem de dados em redes de sensores baseada em Teoria da Informação

*Givanildo Lima do Nascimento Júnior*

*Universidade Federal de Alagoas; Instituto de Computação  
glnjunior@ic.ufal.br*

*Cristopher G. de Sousa Freitas*

*Universidade Federal de Alagoas; Instituto de Computação  
cgsf@ic.ufal.br*

*André Luiz Lins Aquino*

*Universidade Federal de Alagoas; Instituto de Computação  
alla@ic.ufal.br*

**Resumo:** Neste artigo, propomos um método para encontrar o período mais adequado de amostragem de um conjunto de dados a fim de reduzir os problemas em redes de sensores decorrentes da grande transmissão de um grande conjunto de dados. Para isso, utilizamos os conceitos de teoria da informação: método de Bandt and Pompe, a Entropia de Shannon  $S$  e a Complexidade Estatística  $C$ . Nosso método se baseia na construção de um delimitador chamado *Ponto de Corte de Complexidade Máxima* que identifica quando um período de amostragem não é capaz de avaliar a dinâmica do sistema. Para avaliar o método e avaliar os resultados, foi utilizada uma base de dados de temperatura previamente coletados.

**Palavras-chave:** Amostragem de dados. Redes de Sensores. Entropia de Shannon. Complexidade Estatística.

### 1. Introdução

O mundo ao nosso redor possui uma série de fenômenos que podem ser monitorados por dispositivos com capacidade de detecção, processamento e comunicação. Enquanto trabalham cooperativamente em uma área de interesse, tais dispositivos compõem uma rede de sensores sem fio (I. F. Akyildiz et al. 2002). No contexto de cidades inteligentes, a coleta de dados do ambiente ou de usuários é fundamental para integrar tecnologias e dessa forma permitir que os ambientes se adaptem de acordo com a variação desses fatores, tornando esses ambientes mais eficientes em aspectos como sustentabilidade, tráfego ou qualidade de vida. Dentre os exemplos práticos do uso de redes de sensores (K. Curran et al. 2008), vale destacar a aplicação na produção industrial, como o monitoramento em indústrias petroquímicas, fábricas, refinarias e siderúrgicas, nas quais são avaliados parâmetros como fluxo, pressão, temperatura e nível, identificando problemas como vazamento e aquecimento, o que é semelhante ao trabalho desenvolvido pelas redes de sensores em ambientes de distribuição de energia, gás ou água, monitorando linhas de distribuição de energia e sistemas de distribuição de gás ou água a fim de avaliar parâmetros como fluxo, pressão, temperatura e nível.

Em alguns casos, a coleta de dados precisa ser realizada em curtos intervalos de tempo, como nos casos de aplicações industriais ou de distribuição de recursos, já mencionados. Isso ocorre porque, nesses casos, qualquer anormalidade dos parâmetros, por menor que seja, pode representar um grande prejuízo financeiro, seja pela pausa forçada da produção ou pela interrupção na distribuição. Além disso, há também situações onde há uma mudança brusca desses fatores, como a rápida elevação da temperatura

em caso de incêndio. Apesar da diferença entre o grau de variação dos parâmetros avaliados, ambas as situações possuem em comum a necessidade de que a mudança da dinâmica desses fenômenos seja rapidamente detectada, a fim de reduzir o impacto causado por essa mudança. Essa necessidade faz com que essas aplicações busquem fazer avaliações constantes de seus respectivos parâmetros, coletando-os para análise em intervalos de tempo muito curtos, de modo a garantir que qualquer variação na dinâmica do sistema esteja sendo supervisionada e recebendo seu devido tratamento preventivo de falhas.

Entretanto, isso acarreta em um grande montante de informações, o que implica no problema de transmissão de todo esse conjunto de dados pela rede de sensores, além do elevado consumo de energia decorrente do constante processo de transmissão. Uma das soluções adotadas é uma estratégia de descarte de pacotes de dados (R. C. Shah et al. 2003). As principais estratégias gerais mencionadas na literatura são (S. Jain et al. 2014): a) Descarte do último pacote, b) Descarte do primeiro pacote, c) Descarte aleatório de um pacote, d) Descarte baseado no tamanho da mensagem, dentre outras estratégias. Além disso, a aplicação de alguma estratégia para redução de dados é consideravelmente útil para economizar a energia dos sensores operados por bateria, devido aos dados menos transmitidos, bem como transmitir os dados mais importantes quando estes forem requisitados. O problema com o trabalho tradicional na literatura é que ele considera técnicas de descarte como um problema de camada de rede, ou seja, as técnicas não são reconhecidas como uma aplicação WSN esperada. Assim, essas soluções podem afetar seriamente a qualidade da observação geral da rede.

Neste trabalho, propomos um método para avaliar um conjunto de dados utilizando dois quantificadores de teoria da informação: *A entropia de Shannon* e a *Complexidade Estatística*, a fim de encontrar o período de amostragem que melhor se adapte as condições das informações previamente armazenadas. Para isso, é construído um *Ponto de Corte de Complexidade Máxima* que determina se determinado período de amostragem avaliado é capaz de prever a dinâmica do sistema, por meio dos quantificadores *S* e *C*. Uma base de dados previamente armazenada é utilizada para avaliar nosso método.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: A seção 2 apresenta conceitos de teoria da informação utilizados e a metodologia do trabalho. A seção 3 apresenta os resultados apresentados por nosso método quando aplicado a uma base de dados previamente armazenada. Finalmente, a seção 4 conclui o manuscrito.

## 2. Materiais e Métodos

### 2.1. Teoria da Informação

Bandt e Pompe (Bandt and Pompe. 2002) desenvolveram um método que “naturalmente” determina a sequência de símbolos adequada dos valores da série temporal, sem suposições adicionais do modelo. Eles determinam as partições adequadas do espaço-estado recorrendo a uma comparação adequada entre os valores das séries vizinhas. Para qualquer série, eles procuram certos padrões ordinais de ordem  $D$ . Da frequência de ocorrência do símbolo, deduzem uma distribuição de probabilidade de permutação. As vantagens do método de Bandt e Pompe residem em (a) sua simplicidade, (b) o processo de cálculo associado extremamente rápido, (c) sua robustez e (d) sua invariância com respeito a transformações monótonas não-lineares.

A única condição para a aplicabilidade da metodologia Bandt-Pompe é uma suposição estacionária muito fraca, isto é, para  $k = D$ , a probabilidade de  $x_t < x_{t+k}$  não deve depender de  $t$ . A distribuição de probabilidade  $P$  é obtida uma vez que fixamos a dimensão de incorporação  $D$  e esse parâmetro desempenha um papel importante para a avaliação da distribuição de probabilidade apropriada, uma vez que  $D$  determina o número de estados acessíveis  $D!$ , portanto, o comprimento  $T$  da série temporal deve satisfazer a condição  $T \gg D!$  a fim de obter estatísticas confiáveis.

A Entropia clássica de Shannon [Shannon. 1948] mede a desordem de um sistema, considerando a probabilidade do sistema apresentar um estado  $k$ . Dada uma função de probabilidade  $P = \{p_k : k =$

$1, \dots, M\}$  sobre  $M$  valores, a medida de informação logarítmica de Shannon é dada por:

$$S(P) = - \sum_k^M p_k \log p_k$$

Essa medida é relacionada com a informação associada ao processo físico descrito por  $P$ . Se  $S[P] = 0$ , então o conhecimento sobre o fenômeno descrito pela distribuição de probabilidade é máximo e os possíveis resultados podem ser previstos com absoluta certeza. Por outro lado, o conhecimento é mínimo para uma distribuição uniforme, como por exemplo, uma série constante. O valor da Entropia de Shannon normalizada ( $H_s \in [0, 1]$ ) é

$$H_s[P] = S[P]/S_{max}$$

com  $S_{max} = S[P_e] = \ln N$  e  $P_e = \{1/N, \dots, 1/N\}$  é a distribuição uniforme.

O conceito de Complexidade Estatística foi introduzido por López et al. (Lopez-Ruiz et al. 1995) e depois modificado por Lamberti et al. (Lamberti et al. 2004). O desequilíbrio do sistema na mecânica estatística é medido através do divergente de Jenson-Shannon dado por

$$Q_{JS} = Q_0 \{S[(P + P_e)/2] - S[P]/2 - S[P_e]/2\}$$

onde  $Q_0$  é constante de normalização ( $0 \leq Q_0 \leq 1$ ) dada por

$$Q_0 = -2 \cdot \left\{ \left( \frac{N+1}{N} \right) \cdot \log(N+1) - 2 \cdot \log(2N) + \log(N) \right\}^{-1}$$

A Complexidade Estatística  $C$  mede o desequilíbrio do sistema baseado no conteúdo da informação descrita pela distribuição de probabilidade  $P$  e sua Entropia  $S$ , sendo definida como o produto do divergente  $Q$  pela entropia normalizada  $H$  (Rosso et al. 2007):

$$C_{JS}[P] = H_s[P] \cdot Q_{JS}[P, P_e]$$

A Complexidade de um sistema é nula em duas situações opostas extremas: no conhecimento perfeito ou na aleatoriedade completa. Qualquer tipo de sistema se situará entre essas configurações extremas.

O plano de causalidade entropia-complexidade é definido como o diagrama bidimensional obtido pela plotagem da complexidade estatística da permutação (eixo vertical) versus a entropia de permutação (eixo horizontal) para um dado sistema (Rosso et al. 2007). O termo “causalidade” lembra o fato de que as correlações temporais entre as amostras sucessivas são levadas em consideração através do PDF-Bandt-Pompe usado para estimar ambos os quantificadores da Teoria da Informação.

## 2.2. Experimento

Com o propósito de encontrar o período mais adequado para efetuar coleta em um conjunto de informações, desenvolvemos um algoritmo que, utilizando teoria da informação, determina esse valor a partir de um conjunto de dados previamente armazenado, com período de coleta de 1 segundo. Inicialmente, assumimos o comportamento ideal do fenômeno segundo o modelo

$$N \xrightarrow{P} \mathbf{V}^* \xrightarrow{R} k,$$

onde  $N$  denota o ambiente,  $P$  é o fenômeno avaliado e  $\mathbf{V}^*$  é o domínio espaço-temporal. Então, temos um algoritmo  $R$  que estabelece regras para se encontrar o período de amostragem ideal  $K$ .

Como o intervalo de amostragem de 1 segundo é muito curto, ele foi adotado como um preditor do comportamento da dinâmica do fenômeno  $P$ , segundo os quantificadores  $S$  e  $C$ . A partir desses valores, é criado um Ponto de Corte de complexidade máxima, que funciona como um mecanismo avaliativo de



variação na dinâmica do sistema. Esse Ponto de Corte é determinado a partir de intervalos de estabilidade do sistema nos eixos de Entropia e Complexidade, os quais estão centrados nos valores de Entropia de Shannon  $S$  e Complexidade Estatística  $C$  que foram calculados para a entrada de tamanho  $T$ . Os limites esquerdo e direito são calculados utilizando um raio de 6% de distância dos valores de  $S$  e  $C$ , ou seja, o limite esquerdo do intervalo de estabilidade de  $S$  é 6% menor que a Entropia calculada, enquanto o limite direito é 6% maior. De maneira análoga, construímos o intervalo de estabilidade de  $C$ .

Após a construção do Ponto de Corte, é possível fazer uma análise do restante do conjunto de dados ainda não avaliados e, a partir deles, determinar o período mais adequado de amostragem.

Como o tamanho do vetor de entrada a ser avaliado pelo método de Bandt And Pompe deve ser constante, então o tamanho do bloco de dados selecionado do conjunto  $V$  deve ser diretamente proporcional ao período de amostragem, por exemplo, se o período testado for de 8 segundos, então o bloco deve ter tamanho  $8T$ , já que  $T$  é o tamanho do bloco de entrada inicial. A fim de determinar o intervalo de amostragem mais adequado buscando utilizar o menor conjunto de dados possível, determinamos que os valores investigados deveriam crescer exponencialmente, utilizando potências de base 2, pois, dessa forma, encontraremos de maneira mais rápida e econômica o valor máximo para o intervalo de amostragem que é capaz de conservar a dinâmica do sistema. Assim, podemos generalizar o intervalo de dados que vai estar associado a uma amostragem  $\alpha$ , onde  $\alpha$  é uma potência de 2 maior que 1, sendo dado pelas equações:

$$(1) \text{ Início} : 1 + T \cdot \sum_{i=0}^{\alpha/2-1} 2^i$$

$$(2) \text{ Final} : \text{Início} - 1 + T \cdot \alpha$$

Para determinar se um determinado valor de amostragem se adequa a dinâmica do sistema, ou seja, a coleta de dados feita segundo esse intervalo conserva o comportamento do fenômeno, basta efetuar o cálculo da Entropia de Shannon  $S$  e da Complexidade Estatística  $C$  e avaliar se o par ordenado  $(S, C)$  respeita as condições determinadas pelo Ponto de Corte de complexidade máxima.

Esse procedimento é repetido, aumentando o período de amostragem exponencialmente, até que um valor testado não respeite as condições estabelecidas pelo Ponto de Corte, o que significa que a coleta feita segundo esse período não é capaz de avaliar a dinâmica do fenômeno  $P$  e portanto, o período mais adequado de amostragem para o conjunto de entrada avaliado é dado pelo último valor que respeitou as condições do Ponto de Corte.

Em seguida, a fim de avaliar se o valor encontrado é capaz de preservar a dinâmica de todo nosso conjunto de dados, efetuamos processo análogo ao descrito anteriormente. Entretanto, desta vez o tamanho de bloco de entrada é constante e é dado pelo produto entre  $T$ , que é o tamanho do amostra inicial do conjunto de dados, e o período calculado na etapa anterior. Caso o valor não respeite os limites do Ponto de Corte, decrementa-se uma unidade do intervalo de amostragem e repete-se o processo, até que toda a base de dados seja avaliada e dessa forma, o período mais adequado de amostragem é determinado.

### 3. Resultados e Discussão

Neste trabalho, foi utilizado um conjunto de dados coletados por um sensor do modelo MICAz (micaz\_datasheet-t), o qual pode atuar no monitoramento de temperatura, pressão, umidade, luminosidade e aceleração. Para avaliar nosso algoritmo, adotamos os dados de temperatura como parâmetro, em uma base que possui 779.037 coletas que foram realizadas em intervalos de 1 em 1 segundo, durante exatos 9 dias 23 minutos e 57 segundos.

Inicialmente, tomamos um bloco de entrada de tamanho  $T = 1800$ , o que representa 30 minutos de coleta de dados já que o intervalo adotado para montar nossa base foi de 1 segundo. Com  $T = 1800$ , tomamos o parâmetro  $D = 4$ , respeitando a condição de que  $T \gg D!$ , já que  $1800 \gg 4! = 24$ .

Utilizando esse conjunto de entrada, foram efetuados os cálculos da Entropia de Shannon  $S$  e da Complexidade Estatística  $C$  e o resultado foi plotado no plano  $S \times C$ , também conhecido como plano de causalidade Complexidade-Entropia, mostrado na figura 1.

Obtivemos 0.703967236715 e 0.250448719024 como resultados para Entropia e Complexidade, respectivamente, e a partir desses valores foi contruído o Ponto de corte de complexidade máxima. Os intervalos de estabilidade foram criados utilizando um raio de 6%, como descrito anteriormente, e seus limites encontram-se na tabela 1. Além disso, o Ponto de Corte de complexidade máxima pode ser visto na figura 1.

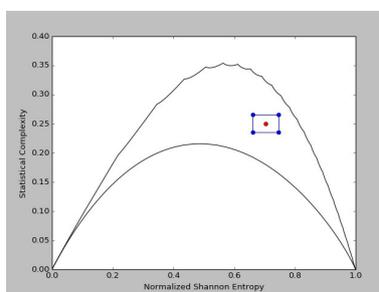


Figura 1: Plano de corte da Complexidade máxima

Tabela 1: Intervalos de Estabilidade

Intervalos de Estabilidade	Valor Mínimo	Valor Máximo
Entropia	0.661729202512	0.746205270918
Complexidade	0.235421795883	0.265475642166

Em seguida, como o bloco referente aos 1800 primeiros dados coletados já havia sido utilizado com o propósito de determinar o Plano de corte de complexidade máxima, então nosso algoritmo inicia avaliando o bloco de dados de tamanho 3600, já que o intervalo de amostragem testado será de 2 segundos, que incorpora as coletas de número 1801 a 5400, valores que podem ser determinados utilizando as equações (1) e (2).

Efetuada esse algoritmo, encontramos o intervalo mais adequado de amostragem de 64 segundos para nosso conjunto de dados. Ao testarmos com o intervalo de 128 segundos, houve uma variação brusca da dinâmica do sistema, determinada pela análise utilizando o Ponto de corte de complexidade máxima, como mostrado na figura 2, juntamente com os pares ordenados referentes as demais amostragens, estes dentro da região determinada pelo Ponto de corte.

Os valores encontrados para a Entropia de Shannon e Complexidade Estatística calculados para cada intervalo de amostragem são apresentados na tabela 2.

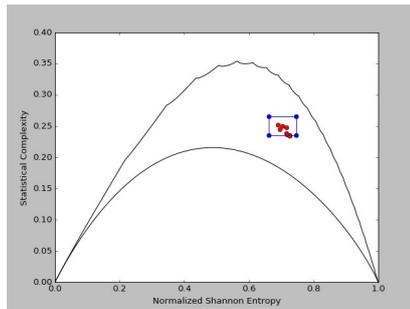


Figura 2: Pares ordenados de todas as avaliações realizadas

Tabela 2: Resultados de todas as avaliações realizadas

Intervalo	Entropia	Complexidade
1	0.703967236715	0.250448719024
2	0.714874000516	0.238466122828
4	0.696397684435	0.244456878163
8	0.689182409468	0.25223652103
16	0.716034250358	0.247977780606
32	0.725948153183	0.235919498945
64	0.716873676818	0.236542262573
128	0.726076560476	0.234652136216

O último passo é avaliar se o valor encontrado é capaz de preservar a dinâmica de todo nosso conjunto de dados, fazendo processo semelhante ao utilizado anteriormente. Desta vez o tamanho de bloco de entrada é constante e dado por  $64.T = 64.1800 = 115200$ , o equivalente à 32 horas. Após realizarmos esse novo montante de avaliações, constatamos que o intervalo mais adequado de amostragem para nosso conjunto de dados não sofreu alteração, permanecendo em 64 segundos.

#### 4. Conclusão

Na abordagem de Teoria da Informação apresentada, desenvolvemos um método para encontrar o intervalo de amostragem mais adequado que se baseia nas seguintes etapas: Avaliação de uma porção do conjunto de dados utilizando intervalo de 1 segundo, a fim de determinar o comportamento mais próximo possível do fenômeno segundo os parâmetros de Entropia de Shannon  $S$  e Complexidade Estatística  $C$ ; construção dos intervalos de estabilidade e a partir deles foi criado o Ponto de Corte de Complexidade máxima, delimitador que indica que a dinâmica do sistema se assemelha ao seu comportamento real; estudo do conjunto de dados para determinar o valor procurado, utilizando o Ponto de Corte como referência para a avaliação dos resultados de entropia e complexidade encontrados; o último passo é avaliar se o intervalo encontrado no passo anterior é realmente válido para todo o conjunto de dados armazenados. Em caso negativo, ele é decrementado de uma unidade e a avaliação é refeita, utilizando as informações que ainda não haviam sido estudadas.

A identificação desse intervalo utilizando é de grande relevância para evitar problemas com a transmissão de grandes volumes de conjuntos de dados, além de prover uma economia de energia dos sensores operados por bateria, já que eles efetuarão uma quantidade menor de coletas e transmissão de dados. Embora o intervalo entre as coletas seja maior, os parâmetros de teoria da informação utilizados garantem-nos que nos intervalos em que o sensor não efetuou coleta de dados, as mudanças de dinâmica da temperatura não iriam prover informações relevantes sobre o comportamento do fenômeno no ambiente  $N$ .

Dentre os planos para trabalhos futuros, desejamos utilizar esse algoritmo atuando em tempo real, de modo a dinamizar o funcionamento dos sensores, além de efetuar tais avaliações em vários fenômenos do ambiente simultaneamente.

## 5. Agradecimentos

Os autores desejam agradecer ao CNPq, FAPEAL, FAPESP e à SEFAZ pelo auxílio financeiro fornecido, e à UFAL por disponibilizar a estrutura física utilizada para desenvolver este trabalho.

## 6. Referências

I. F. AKYILDIZ, W. SU, Y. SANKARASUBRAMANIAM, E. CYIRCI, Wireless sensor networks: a survey, **Computer Networks**, v.38 (4) (2002), p. 393–422.

K. CURRAN, J. KNOX, Disruption tolerant networking, **Computer and Information Science** 1 (1) (2008), p. 69–71.

R. C. SHAH, S. ROY, S. JAIN, W. BRUNETTE, **Data mules: modeling and analysis of a three-tier architecture for sparse sensor networks**, *Ad Hoc Networks* 1 (2003), p. 215–233.

S. JAIN, M. CHAWLA, Survey of buffer management policies for delay tolerant networks, **The Journal of Engineering** 2014 (6) (2014) 7.

C. BANDT and B. POMPE, **Phys. Rev. Lett.** 88, 174102 (2002).

LOPEZ-RUIZ, R., MANCINI, H. L., and CALBET, X. (1995). A statistical measure of complexity. **Physics Letters A**, 209(5-6) : 321–326.

MEMSIC. **MICAz - Wireless measurement system**. Disponível em:  
[http://www.memsic.com/userfiles/files/Datasheets/WSN/micaz\\_datasheet\\_t.pdf](http://www.memsic.com/userfiles/files/Datasheets/WSN/micaz_datasheet_t.pdf). Acesso em: 04 março. 2018.

SHANNON, C. E. (1948). A Mathematical Theory of Communication. **Bell system technical journal**, 27.

LAMBERTI, P., MARTIN, M., PLASTINO, A., and ROSSO, O. (2004). Intensive entropic nontriviality measure. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, 334(1) : 119–131.

ROSSO, O., LARRONDO, H., MARTIN, M., PLASTINO, A., and FUENTES, M.(2007). Distinguishing noise from chaos. **Physical review letters**, 99(15):154102.

WILCOX, R. (2005). Kolmogorov–Smirnov Test. **In Encyclopedia of Biostatistics** (eds P. Armitage and T. Colton).

DEPARTMENT OF PHYSICS - ILLINOIS STATE UNIVERSITY. **Absolute and Relative Error**. Disponível em: <http://www2.phy.ilstu.edu/wenning/slh/Absolute%20Relative%20Error.pdf>. Acesso em: 23 maio. 2018

## Parte IX

# Métodos Estocásticos e Estatísticos

## Mapa perceptual para hierarquização das universidades públicas da região nordeste de acordo com o conceito quadrienal da Capes (2013-2016) aos programas acadêmicos de mestrado e doutorado.

*Jorge Luiz de Jesus Goulart*

*Universidade do Estado do Rio de Janeiro; Instituto de Matemática e Estatística  
Jorge\_goulart@outlook.com*

*Regina Serrão Lanzillotti*

*Universidade do Estado do Rio de Janeiro; Instituto de Matemática e Estatística  
reginalanzillotti@gmail.com*

*Marcello Montillo Provenza*

*Universidade do Estado do Rio de Janeiro; Instituto de Matemática e Estatística  
mprovenza@gmail.com*

*Paulo Henrique Couto Simões*

*Universidade do Estado do Rio de Janeiro; Instituto de Matemática e Estatística  
ph.simoes@gmail.com*

**Resumo:** A atual crise nacional e os polêmicos cortes orçamentários ao investimento em ciência e tecnologia, impõe o emprego de métodos para a ponderação do desenvolvimento tecnológico e científico. A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior da CAPES é designada para amparar pareceres ao progresso em avaliação quadrienal consubstanciada em metodologia própria, mas o intento deste artigo é contribuir com a Análise de Correspondência (AC) para concatenar as Universidades Públicas da região Nordeste do Brasil segundo conceitos conquistados pela pós-graduação stricto-sensu. A UFPE, UFBA e a UFRN são as três universidades com mais cursos ofertados à população. A UFPE e UFC são as que detêm as melhores avaliações, pois obtiveram conceito A, mas na Análise de Correspondência não ocorreu agregação a este grupo. Dentre as 25 universidades públicas do nordeste, as universidades UFC, UFPE, UFBA, UFRPE, UECE são as que se agregaram, posicionando-se no quadrante superior direito do espaço cartesiano  $R^2$ , região delimitada por valores positivos que configuraram a “nuvem de pontos” referentes as universidades que possuem perfil semelhante caracterizadas pelo conceito F. A AC contribuiu para a hierarquização e a aplicação para outras regiões do país contribuirá para a comparação de potenciais acadêmicos na pesquisa e desenvolvimento.

**Palavras-chave:** Métodos Estocásticos e Estatísticos, Hierarquização das universidades públicas nordestinas, Análise de Correspondência.

### Introdução

As universidades, em sua natureza, são amplos centros de pesquisa à ciência e tecnologia. Nenhuma nação desenvolve e fortalece o seu contingente sem expressivos investimentos, primordialmente na educação. No entanto, não é garantido que, uma extensa oferta de cursos de pós-graduação concerne em qualidade de pesquisa. Com a esperança em qualificar os cursos stricto-sensu, a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, em 1976, através do então diretor-geral Cláudio de Moura Castro engendrou uma avaliação dos programas de pós-graduação, na época com periodicidade anua, que atualmente segue avaliada quadrienalmente.

A avaliação permeia a capacidade e natureza da produção científica dos professores permanentes e colaboradores, a produção de artigos elaborados com os mestrandos e doutorandos, a quantificação de dissertações e teses concluídas em tempo hábil, a inovação tecnológica e inserção social do programa.

A avaliação é exercida por comissões de cientistas conceituados na área do conhecimento inerente a Pós-graduação, em que atribuem conceitos entre 1 e 7, decididos, em última instância, pelo Conselho Técnico Científico (CTC). Os cursos contemplados com conceitos um e dois são descredenciados e após a publicação em Diário Oficial, alunos ingressantes não terão seus diplomas validados.

Apesar de ocorrer a validação conceitual, seria de substancial relevância indagar sobre o perfil de cada instituição, a fim de discernir sobre universidade que tem maior ressaltado em pesquisas científicas e tecnológicas. Por conseguinte, este artigo tem como objetivo empregar a Análise de Correspondência para obter hierarquização das universidades públicas da região nordeste segundo os conceitos da avaliação quadrienal de 2017 da CAPES.

## Metodologia

A Análise de Correspondência é uma técnica geométrica exploratória de dados cujo propósito é transformar uma tabela de contingência de múltiplas entradas em uma representação gráfica, mapa perceptual que designa exemplificar relações de dependências entre as unidades de estudo e as unidades categóricas estabelecidas.

Este método segundo Greenacre (1984) foi inicialmente proposta por Hirschfeld (em 1935), reconhecido como o precursor, não obstante há trabalhos pioneiros publicados por Fisher (1940) na revista *Biométrica*, e por Horst (1935) e Guttman (1941) em dados *Psicométricos*. Todavia, somente na década de 60 que um grupo de pesquisadores liderados por Jean-Paul Benzécri desenvolveu a forma geométrica da Análise de Correspondência. O citado estudo gerou, em 1973, a obra composta de dois volumes: “L’Analyse des Donnés” (volume I) e “L’Analyse des Correspondance” (volume II) que formam a base da metodologia até hoje.

A Análise de Correspondência insere-se no conjunto de metodologias multivariadas que surgiram após os artigos de Karl Pearson (1901 e 1906) e ao desenvolvimento da análise fatorial clássica de Spearman (1904) e da análise de componentes principais por Hotelling (1933) (SILVA, 2012, p. 3).

Esta metodologia objetiva visualizar uma “nuvem de pontos” proveniente da tabela de contingência em um plano cartesiano de duas ou três dimensões o qual capte a maior parcela de informações possíveis. Segundo Gonçalves e Santos (2009) a observação direta da “nuvem de pontos” disforme no espaço multidimensional não permite uma percepção visual, no entanto, pode-se projetar esses pontos em planos escolhidos pela sua capacidade de melhor representar as distâncias originais dos pontos de acordo com o valor inerente de cada perfil das variáveis categóricas, linha  $I$  e coluna  $J$ . Por conseguinte, pontos próximos no plano possuem características de perfis similares e, de maneira análoga, pontos de perfis discordantes encontram-se afastados na representação gráfica. Assim, a Análise de Correspondência revela um modelo de associação dessas variáveis categóricas de forma consistente, agrupando-as ao seu respectivo centroide. Logo,  $I$  e  $J$ , sendo  $I > J$ , são representadas em  $J$ -eixos fatoriais, em que a cada eixo há uma representação de uma parcela da inércia total ( $\Phi$ ), medida de dispersão semelhante a variância, em que representa a soma ponderada das distâncias dos pontos do conjunto a seus respectivos centroides.

Expressando  $N$  como o total de observações, há uma relação peculiar entre a inércia e a estatística qui-quadrado:

$$\chi^2 = \Phi N \quad (1)$$

Neste modelo multidimensional, a relevância de cada dimensão é dada pelos correspondentes autovalores, que indicam o percentual de informação que é restituída a cada eixo gerador, sendo que a soma dos quadrados dos autovalores é igual à inércia total, logo, é igual à variabilidade total das variáveis categóricas. Os autovalores são extraídos por meio da Decomposição em Valores Singulares (DVS).

Graficamente, pretende-se encontrar duas dimensões que, pelo menos, representem 70% da inércia total, para que assim, os dois eixos possam reproduzir uma grande parte da variabilidade total, reduzindo as dimensões da tabela de contingência, propiciando uma análise facilitada através do plano  $R^2$ .

Por fim, para uma maior exatidão em sua interpretação faz-se necessário outras duas estatísticas descritivas: a contribuição do perfil de uma variável categórica para a inércia de cada dimensão ( $ca_{i,k}$ ) e o quadrado do co-seno ( $cr_{i,k}$ ), segundo as equações:

$$ca_{i,k} = \frac{r_i \cdot f_{ik}^2}{\lambda_k^2} \quad (2)$$

$$cr_{i,k} = \cos^2 \omega \quad (3)$$

Onde:  $i$ , representa um perfil de uma variável categórica no mapa;  $r_i$ , o perfil marginal associado a  $i$ -ésima variável categórica;  $f_{i,k}$ , a coordenada do perfil  $i$  no  $k$ -ésimo eixo fatorial;  $\lambda_k^2$ , o autovalor associado ao  $k$ -ésimo eixo fatorial;  $\omega$ , ângulo formado entre o  $k$ -ésimo eixo fatorial e o segmento de reta que liga a origem ao ponto  $i$ .

### Resultado e Discussões

A atual crise financeira vivenciada no país e as discussões sobre os cortes orçamentários na ciência e tecnologia, torna-se importante métodos que vislumbram produzir mapa perceptual para hierarquização para verificar o desempenho e a qualidade em pesquisa das universidades públicas da região nordeste de acordo com o conceito quadrienal da Capes (2013-2016) aos programas acadêmicos de mestrado e doutorado.

Foi adotado para o devido estudo os conceitos 7, 6, 5, 4, 3 e 2 ou 3/2, designados pelas letras A, B, C, D, E e F, respectivamente. Na tabela 1, evidencia-se a frequência de cursos em cada universidade pública do nordeste segundo respectivos conceitos. A Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Universidade Federal da Bahia (UFBA) e a Universidade Federal do Rio Grande do Norte são as três universidades com mais cursos ofertados à população. A Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) e Universidade Federal do Ceará (UFC) são as que detêm os cursos de melhor avaliação, pois obtiveram conceito A atribuído pela CAPES. A Universidade Estadual do Ceará (UECE) lidera a hierarquização das universidades estaduais, apesar de estar em décimo segundo lugar neste rol divulgado pela Capes.

Tabela 1: Frequência de cursos de pós-graduação stricto-sensu segundo conceito da CAPES (2013-2016)

Universidades Públicas da Região Nordeste	A	B	C	D	E	F	Total
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)	3	6	19	24	16	4	72
Universidade Federal da Bahia (UFBA)	1	4	13	37	11	3	69
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)	1	2	15	20	20	2	60
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)	0	2	9	24	19	4	58
Universidade Federal do Ceará (UFC)	3	7	14	21	12	0	57
Fundação Universidade Federal do Sergipe (FUFSE)	0	0	2	17	24	0	43
Fundação Universidade Federal do Piauí (FUFPI)	0	0	1	17	14	1	33
Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)	0	2	7	13	8	3	33
Universidade Federal de Alagoas (UFAL)	0	0	1	11	18	1	31
Universidade Federal do Maranhão (UFMA)	0	1	2	7	17	0	27
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)	1	0	2	8	13	0	24
Universidade Estadual do Ceará (UECE)	0	1	3	9	4	2	19

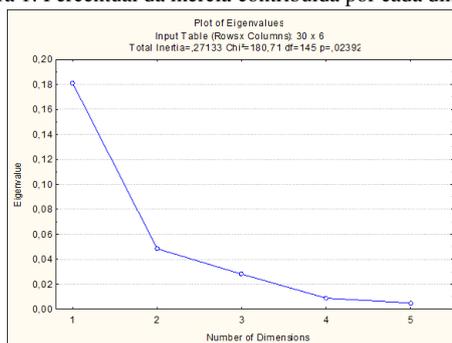


Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)	0	0	3	5	9	1	18
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB)	0	0	2	6	8	0	16
Universidade do Estado do Rio Grande do Norte (UERN)	0	0	0	2	12	0	14
Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS)	0	0	3	4	6	1	14
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)	0	0	0	6	7	0	13
Universidade de Pernambuco (UPE)	0	0	0	6	4	0	10
Universidade do Estado da Bahia (UNEB)	0	0	1	4	5	0	10
Universidade Federal do Vale do São Francisco (UNIVASF)	0	0	0	4	5	0	9
Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)	0	0	0	2	6	0	8
Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA)	0	1	1	2	4	0	8
Universidade Federal do Recôncavo Baiano (UFRB)	0	0	0	3	4	0	7
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)	0	0	0	0	3	0	3
Universidade Estadual do Piauí (UESPI)	0	0	0	1	1	0	2
Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA-CE)	0	0	0	0	2	0	2
Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB)	0	0	0	0	2	0	2
Universidade Regional do Cariri (URCA)	0	0	0	0	2	0	2
Universidade Estadual de Alagoas (UNEAL)	0	0	0	0	1	0	1
Universidade Federal do Cariri (UFCA)	0	0	0	0	1	0	1

Fonte: CAPES (avaliação quadriênial 2013-2016).

Na figura 1 observa-se a contribuição da inércia de cada eixo fatorial na decomposição da tabela de contingência, sendo que as dimensões 1 e 2 foram os eixos escolhidos para a construção da análise de correspondência pela sua maior representatividade da variabilidade na efetivação do método. A estatística qui-quadrado que apresentou valor de 180,7, infere a probabilidade de significância, p-valor igual a 2,392%, o que explica a probabilidade de obter um valor da estatística de teste como o observado, ou seja, muito improvável, rejeitando a hipótese de não correspondência entre as variáveis categóricas.

Figura 1: Percentual da inércia contribuída por cada dimensão



O valor da inércia explicada pela dimensão  $k$  devido ao perfil da variável categórica  $i$  ( $ca_{i,k}$ ) contribui para a interpretação das dimensões, em razão dos perfis com maiores contribuições são os mais importantes na atribuição de um significado ao eixo fatorial. Caso o valor de  $cr_{i,k}$  for grande, o ângulo  $\omega$  é pequeno revelando uma forte correlação entre o fator  $k$  e a variável categórica  $i$ .

Na tabela 2, explicita-se as coordenadas referentes as dimensões 1 e 2 de cada universidade que permitiram a construção do gráfico 2 da análise de correspondência. Os quadrados dos co-senos

quantificam a parcela do perfil das instituições que é explicada pelo eixo fatorial determinado. Os valores da tabela confirmam a associação do fator 1 com os conceitos C e E, e do fator 2 com o conceito D.

Tabela 2: Coordenadas, Contribuições e Co-senos

	Coordenadas		Contribuições ( $ca_{i,k}$ )		Co-seno ao quadrado ( $cr_{i,k}$ )	
	Fator 1	Fator 2	Fator 1	Fator 2	Fator 1	Fator 2
	Conceitos					
A	0,8714	-0,8437	0,0567	0,1987	0,3945	0,3699
B	0,8351	-0,4086	0,1504	0,1346	0,6754	0,1617
C	0,5708	-0,1519	0,2648	0,0701	<b>0,8279</b>	0,0586
D	0,0963	0,2098	0,0195	0,3452	0,1290	<b>0,6118</b>
E	-0,4668	-0,1164	0,4664	0,1085	<b>0,9316</b>	0,0580
F	0,4812	0,4577	0,0422	0,1429	0,2624	0,2374
	Universidades					
UNILAB	-1,0972	-0,5292	0,0300	0,0261	0,7613	0,1771
UPE	-0,3031	0,3603	0,0076	0,0403	0,2546	0,3599
UNEB	-0,3239	0,0477	0,0087	0,0007	0,7801	0,0169
UERN	-0,9082	-0,3174	0,0958	0,0437	0,8679	0,1060
UEPB	-0,4863	0,1550	0,0255	0,0097	0,7649	0,0777
UNEAL	-1,0972	-0,5292	0,0100	0,0087	0,7613	0,1771
UEFS	-0,0373	0,0463	0,0002	0,0009	0,0090	0,0138
UESC	-0,1993	0,0007	0,0059	0,0000	0,3040	0,0000
UECE	0,3104	0,3524	0,0152	0,0732	0,3430	0,4422
UEMA	-0,7663	-0,1586	0,0390	0,0062	0,9525	0,0408
UESPI	-0,4354	0,2121	0,0031	0,0028	0,6248	0,1482
UESB	-0,2960	0,0066	0,0116	0,0000	0,7200	0,0004
UVA-CE	-1,0972	-0,5292	0,0200	0,0174	0,7613	0,1771
UFBA	0,3919	0,2240	0,0879	0,1074	0,6897	0,2255
UFOB	-1,0972	-0,5292	0,0200	0,0174	0,7613	0,1771
UFPB	0,0881	0,1935	0,0037	0,0673	0,1178	0,5685
UFAL	-0,4770	0,0758	0,0585	0,0055	0,9468	0,0239
UFMG	-0,3217	-0,1861	0,0206	0,0258	0,4590	0,1536
UFPE	0,4974	-0,1809	0,1477	0,0731	0,8443	0,1117
UFCA	-1,0972	-0,5292	0,0100	0,0087	0,7613	0,1771
FUFSE	-0,4605	0,0494	0,0756	0,0033	0,9208	0,0106
UFC	0,5307	-0,3595	0,1332	0,2285	0,5955	0,2733
UFMA	-0,4601	-0,2059	0,0474	0,0355	0,7762	0,1555
FUFPI	-0,2739	0,3087	0,0205	0,0975	0,3805	0,4832
UFRB	-0,5300	0,1062	0,0163	0,0024	0,8605	0,0345
UFRN	0,1824	-0,0876	0,0165	0,0143	0,3835	0,0886
UNIVASF	-0,5090	0,1297	0,0193	0,0047	0,8179	0,0531
UFRPE	0,3295	0,1774	0,0297	0,0322	0,5163	0,1497
UFERSA	-0,0790	-0,3446	0,0004	0,0295	0,0197	0,3755
URCA	-1,0972	-0,5292	0,0200	0,0174	0,7613	0,1771

Observa-se que a disposição no gráfico 2, a contribuição dos conceitos para cada eixo fatorial percebe-se que quanto mais à direita, há melhor desempenho e consequentemente maior a distribuição de avaliações satisfatórias dos respectivos programas acadêmicos. Dentre as 25 universidades públicas do nordeste, UFC, UFPE, UFBA, UFRPE, UECE são as universidades que obtiveram melhor desempenho diante da análise de correspondência, pois se encontram no quadrante superior direito, região delimitada por valores positivos dos fatores um e dois, logo a “nuvem de pontos” indica que as universidades nela representadas possuem perfis semelhantes, a capes atribuiu conceito F.

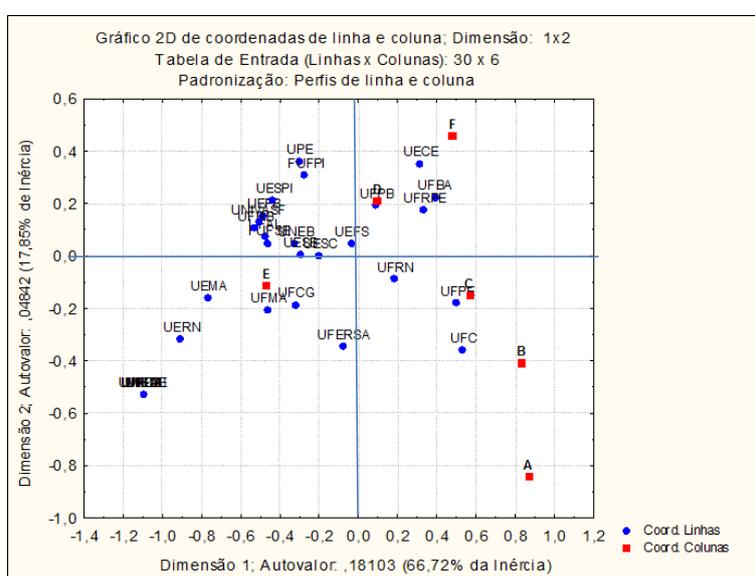


Gráfico 2: Mapa das Universidades e conceitos

Um ponto importante é que, os centroides A e B não possuem nenhuma universidade associada a eles, ou seja, há uma carência considerável de cursos com conceitos 7 e 6 na região Nordeste. Um parâmetro, que poderia ser possivelmente considerado, para refinar a qualidade da pesquisa na região é a caracterização da orientação acadêmica, pontualmente a relação entre orientando-orientador, como analisa Nóbrega (2018). A autora propõe estreitar a relação entre pesquisa e orientação, com o propósito de que se possa garantir uma formação específica para o orientando.

## Conclusão

Ainda que, os cursos de graduação das universidades públicas sejam considerados os melhores do país (PESSANHA; SILVA; LAURENCEL, 2002, p. 5), não se pode afirmar o mesmo dos programas de pós-graduação da região nordeste. Apesar da notória qualidade das universidades públicas da região Nordeste, nenhuma universidade foi relacionada com os dois maiores conceitos da avaliação CAPES (6 e 7), ou seja, ainda há espaços para melhorias.

Por fim, vale destacar que, apesar dos cortes orçamentários, as universidades públicas do Nordeste cada vez mais consolidam-se em ensino e pesquisa, e, diante de um investimento que corroborasse com a demanda das instituições alcançariam com incompleta complexidade conceitos melhores para seus programas acadêmicos.

A Análise de Correspondência foi um método que contribuiu para a hierarquização das universidades públicas do nordeste e sugere-se aplicação para outras regiões do país, visando uma futura comparação de potenciais acadêmicos na pesquisa e desenvolvimento.

### 1. Referências

- CAPES. **Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior**. 2018 Disponível em: <http://www.capes.gov.br/>. Acesso em: 17/05/2018.
- GONÇALVES, M. T.; SANTOS, S. R. DOS. Aplicação da Análise de Correspondência à Avaliação Institucional da FECILCAM. **IV Encontro de Produção Científica e Tecnológica**, p. 1–14, 2009.
- GREENACRE, M. J.. Theory and applications of correspondence analysis. **Orlando: Academic Press**, 1984.
- NÓBREGA, M. H. DA. Orientandos e Orientadores no Século XXI: desafios da pós-graduação. **Educação & Realidade**, p. 1–22, 2018.
- PESSANHA, J. F. M.; SILVA, R. DA M.; LAURENCEL, L. DA C. As Universidades no Estado do Rio de Janeiro e o Exame Nacional de Cursos. **XXXIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: [s.n.].
- SILVA, Y. V. DA. Análise De Correspondência: Uma Abordagem Geométrica. UFV. Viçosa. 2012.

## Avaliação da viabilidade para instalação de aerogeradores na cidade de Maceió-AL.

*Catiane da Silva Barros Ferreira*  
Universidade Federal Rural de Pernambuco; PPGBEA.  
catybarros@hotmail.com

*Denise Stéphanie de Almeida Ferreira*  
Universidade Federal Rural de Pernambuco; PPGBEA.  
deniialmeida@gmail.com

*Ikaro Daniel de Carvalho Barreto*  
Universidade Federal Rural de Pernambuco; PPGBEA.  
daniel.carvalho.ib@gmail.com

*Joelma Mayara da Silva*  
Universidade Federal Rural de Pernambuco; PPGBEA.  
jms.estat@gmail.com

*Laura Alves Pacífico*  
Universidade Federal Rural de Pernambuco; PPGBEA.  
lapacifico26@gmail.com

*Vanessa Kaline Pinho Wanderley*  
Universidade Federal Rural de Pernambuco; PPGBEA.  
vanessakaline2015@hotmail.com

*Tatijana Stosic*  
Universidade Federal Rural de Pernambuco; Docente PPGBEA  
tastosic@gmail.com

**Resumo:** O presente estudo tem como objetivo, analisar o comportamento dos ventos predominantes na cidade de Maceió, no litoral do estado de Alagoas, a fim de avaliar a viabilidade da região para instalação de parques eólicos. Os dados foram coletados através do Instituto Nacional de Meteorologia (INMET), originados do posto de estação meteorológica na cidade. Obtiveram-se medições diárias, hora a hora, no período de maio de 2017 a maio de 2018, referentes à velocidade dos ventos. Esses dados foram modelados utilizando as distribuições Gamma, Weibull, e Log-Normal. Foram aplicadas as estatísticas de Komogorov-Smirnov, Cramer-von Mises, Anderson-Darling, AIC e BIC na avaliação dos ajustes. Observou-se que das 00h às 10h da manhã, a melhor distribuição varia. Contudo, entre 11h e 23h a distribuição de Weibull melhor se ajusta à velocidade dos ventos, sendo mais adequada em 15 das 24 horas. Sendo assim realizou-se a modelagem através da Weibull e verificou-se que é improvável que ocorram ventos capazes de danificar uma turbina bem como é muito provável que na maior parte dos horários a turbina não tenha um funcionamento adequado.

**Palavras-chave:** Velocidade dos ventos. Distribuição. Métodos Estocásticos e Estatísticos.

### Introdução

A diferença de gradiente de pressão atmosférica gera a movimentação do ar, originando os ventos. Estes, partindo de zonas de maior para as de menor pressão, sofrem influências também do movimento de rotação da Terra, da força centrífuga ao seu movimento, bem como da topografia e consequente atrito com a superfície terrestre (TUBELIS & NASCIMENTO, 1984; MUNHOZ & GARCIA, 2008).

O vento é uma das variáveis meteorológicas mais importantes e menos estudadas. No entanto, é possível observar a influência da direção e velocidade dos ventos na agropecuária com propagação de

sementes (BULLOCK & CLARK, 2000); crescimento de plantas, utilização de defensivos, polinização, orientações na construção de instalações para animais domésticos e práticas com quebra-vento (MUNHOZ & GARCIA, 2008). Além disso, os ventos possuem papel fundamental na morfologia e gênese de dunas (ANGULO, 1993; PARTELI et al, 2009); na disseminação de doenças quando relacionadas à fatores climatológicos (ALVES et al., 2017); no monitoramento do potencial eólico, seja *onshore* (com aerogeradores instalados em terra) ou *offshore* (com instalação de turbinas no mar), de uma região (RADOS et al., 2011; SILVA, et al., 2017).

Englobando os diversos meios para obtenção de energias renováveis, que não liberam gases do efeito estufa, reduzindo os impactos ambientais, as fontes eólicas vêm sendo demonstradas como uma das mais relevantes em termos de sustentabilidade ambiental, eficiência na produção e segurança na distribuição. (GWEC, 2008; EWEA, 2010).

A busca por parques eólicos com maiores proporções e eficiência, motiva os estudos dos pesquisadores, pois em uma usina eólica de grandes dimensões, existem complexas interações entre si e com a camada limite atmosférica, que podem ocasionar na queda da eficiência (CHAMORRO et al., 2011).

Segundo Silva (2003) o vento é influenciado por fatores climáticos, tais como, El Niño e La Niña que também influenciam a precipitação. Em particular, de acordo com o Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), o vento sofre influência do fenômeno El Niño no período estudado (INPE, 2018). Neste período os ventos alísios tornam-se mais intensos, ou seja, a velocidade do vento tende a aumentar (SILVA, 2003; LIU & JUÁREZ, 2001).

O presente estudo tem como objetivo, analisar o comportamento dos ventos predominantes na cidade de Maceió, no litoral do Alagoas, a fim de avaliar a viabilidade de funcionamento e geração de energia de uma turbina eólica.

## **Metodologia**

A cidade de Maceió, capital do estado de Alagoas, está localizada no litoral do nordeste brasileiro, de latitude 9°45' Sul e longitude 39°42' Oeste, englobando um território de 512,8Km<sup>2</sup>. O clima é classificado como quente e úmido, com elevada umidade relativa do ar e intensa radiação solar. (ALMEIDA & BARBIRATO, 2004)

Os ventos que sucedem com maior frequência na cidade são provenientes do quadrante leste, com constante circulação de ventos alísios de direção sudeste (SE) durante o ano, e ventos alísios com direção nordeste (NE) predominantes nos meses mais quentes (janeiro, fevereiro e março). A velocidade média anual dos ventos é de 2,8m/s chegando a 10m/s na direção NE. (ALMEIDA & BARBIRATO, 2004)

Foram extraídas informações a partir do banco de dados disponibilizado pelo INMET (Instituto Nacional de Meteorologia), originadas do posto de estação meteorológica da capital de Alagoas. Obtiveram-se medições diárias, hora a hora, no período de maio de 2017 a maio de 2018, relacionado à velocidade dos ventos.

Para análise e tratamento dos dados, faremos uma breve revisão da literatura afim de justificar a melhor estatística que se adequou a velocidade do vento.

### **Distribuições de Probabilidade**

A Distribuição Gamma é uma das mais conhecidas e utilizadas, ela tem duas importantes propriedades que a ajudou a conseguir um papel de destaque nas estatísticas aplicadas. Uma delas é o fato da variação da amostra de modelos normais terem distribuições gamma. A outra propriedade importante é que a família geral gama de distribuições tem um parâmetro de forma que faz com que seja possível encaixar uma grande variedade de dados a uma das distribuições gamma. Este último aspecto, também é encontrado em outras distribuições populares, como a log-normal e a Weibull que abordaremos mais adiante (KOTZ et al., 2005)

Ao fazermos análise dos dados das velocidades dos ventos em Maceió, é possível observar que as distribuições que mais se adaptaram aos métodos utilizados foram Gamma, Weibull e Lognormal, dos quais faremos uma breve revisão a seguir.

### Distribuição Gamma

Seja  $X$  uma variável aleatória contínua e não negativa, com parâmetros  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ , denominados respectivamente de parâmetros de forma e de taxa,  $X$  terá uma distribuição Gamma, ou seja,  $X \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$ , se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são dois parâmetros positivos. Dependendo dos valores dos parâmetros, o modelo Gamma recebe outros nomes como Exponencial, Qui-quadrado e Erlang (MAGALHÃES & LIMA, 2011). A Função de Distribuição Acumulada Gamma é:

$$P(X \leq x) = F(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx \quad (2)$$

### Distribuição Weibull

Inicialmente aplicada em estudos relacionados ao tempo de falha devido a fadiga de metais, a distribuição Weibull é frequentemente usada para descrever o tempo de vida de produtos industriais. Uma variável aleatória  $X$  tem distribuição Weibull se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x; c, k) = \begin{cases} \frac{k}{c} \left(\frac{x}{c}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{c}\right)^k} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3)$$

onde  $c$  é o fator de escala em unidades de velocidade do vento,  $k$  é o fator de forma adimensional e  $x$  a variável aleatória velocidade do vento. A Função de Distribuição Acumulada Weibull é:

$$P(X \leq x) = F(x; c, k) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{c}\right)^k} \quad (4)$$

### Distribuição log-normal

Uma variável aleatória  $X$  tem distribuição log-normal quando seu logaritmo tem distribuição normal, ou seja,  $\ln(X) = Y$  e  $X = e^Y$  tem distribuição log-normal, então sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x; \mu, \sigma) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5)$$

onde  $\mu \in \mathbb{R}$  é a média do logaritmo do tempo de falha e  $\sigma > 0$  é o desvio padrão. A Função de Distribuição Acumulada log-normal é:

$$P(X \leq x) = F(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(-\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) \quad (6)$$

onde  $\operatorname{erfc}(\cdot)$  é a função erro complementar, isto é,  $\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z)$  e  $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$  com  $z > 0$ .

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (7)$$

### Estatísticas de Bondade de Ajuste

Para acessar a qualidade de ajuste de um dado modelo a uma amostra aleatória, existem diversas medidas conhecidas como Bondade do Ajuste ou GoF (Goodness of Fit). Essas medidas avaliam o quanto o modelo se aproxima da amostra aleatória.

#### **Cramer-von Mises, Anderson-Darling e Kolmogorov-Smirnov**

Um grupo de GoFs muito utilizados são os testes de Cramer-von Mises, Anderson-Darling e Kolmogorov-Smirnov que medem a distância entre a distribuição paramétrica ajustada  $F$  e a distribuição empírica  $F_n$  (D'AGOSTINHO & STEPHENS, 1986). Assim, quanto menor for a distância entre as distribuições e conseqüentemente menor o valor da estatística, mais adequado o ajuste. As estatísticas de teste são apresentadas na tabela abaixo:

Tabela 1: Estatística dos Testes e suas respectivas expressões

Estatística	Expressão
Kolmogorov-Smirnov	$\max  F_n(x) - F(x) $
Cramer-von Mises	$n \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(x) - F(x))^2 dx$
Anderson-Darling	$n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(F_n(x) - F(x))^2}{F(x)(1 - F(x))} dx$

Onde  $n$  é o número de observações,  $F$  é a distribuição paramétrica ajustada e  $F_n$  é a distribuição empírica. Segundo Delignette-Muller e Dutang (2015), a estatística de Anderson-Darling pode ser considerada mais confiável quando se tem interesse em dar pesos similares aos extremos e centro da amostra aleatória em estudo.

Deve-se, contudo, tomar cuidado ao se utilizar tais estatísticas devido a ineficiência destas em incorporar a complexidade dos modelos, ou seja, comparar as estatísticas para distribuições com diferentes números de parâmetros é inadequado. Para isso, são recomendados os critérios de informação que avaliam, também, o quão parcimonioso é um modelo.

#### **Crítérios de Informação: Akaike e Bayesiano**

Segundo Posada e Buckley (2004) as expressões para os critérios de informação de Akaike e Bayesiano (ou Schwarz) são dadas como se segue:

$$\begin{aligned} \text{AIC} &= -2l(\theta) + 2K \\ \text{BIC} &= -2l(\theta) + K \log(n) \end{aligned}$$

Onde  $l(\theta)$  é a função de log-verossimilhança,  $k$  é o número de parâmetros do modelo e  $n$  é o número de observações. Ao considerar dois modelos o que apresentar menor valor de AIC e BIC é definido como o melhor. Assim, podemos observar que o número de parâmetros influencia negativamente esta estimativa.

### **Resultados**

Através da Figura 1 (a) pode-se observar que a velocidade do vento da estação de Maceió no período de maio de 2017 a maio de 2018 tem se concentrado entre 0 e 6 m/s, o que pode ser confirmado através das medidas descritivas (Tabela 1) pois, a velocidade média do vento no período é de 2,69 m/s e esta não varia muito (Var.= 2,52). Por outro lado a Figura 1 (b) deixa claro que a velocidade do vento comporta-se de maneira diferente ao longo do dia e assume maiores velocidades entre as 10 e 20 horas. Todas as distribuições foram ajustadas por meio do método da máxima verossimilhança.



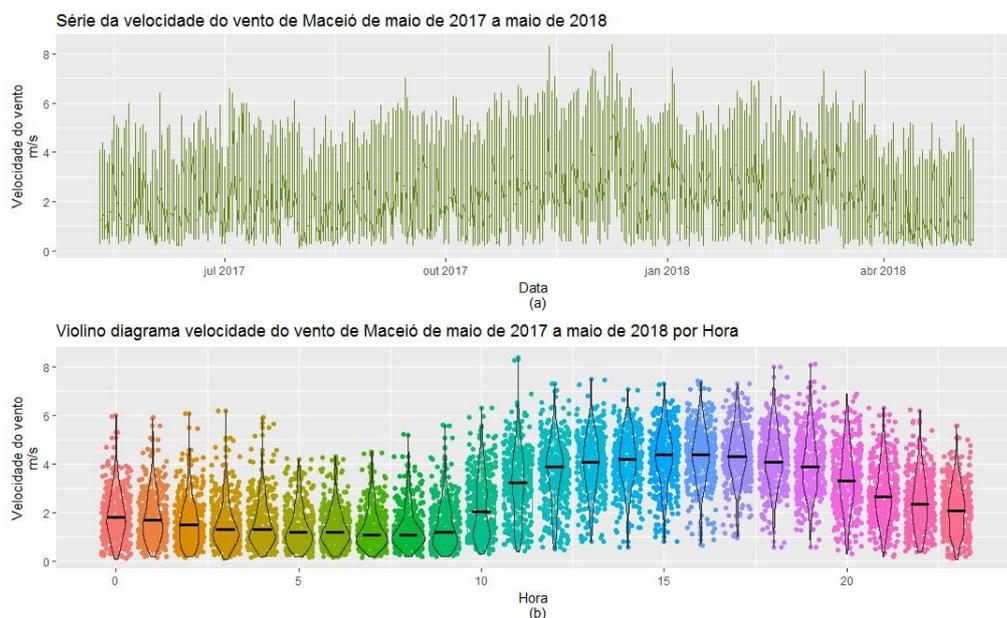


Figura 1- Série e Violino diagrama da velocidade do vento de Maceió de maio 2018 a maio de 2018

Tabela 2- Estatísticas da velocidade do vento de Maceió de maio de 2017 a maio de 2018 por hora

Hora	Geral	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
<b>Média</b>	2,69	1,91	1,81	1,60	1,53	1,56	1,41	1,38	1,35	1,36	1,48	2,24	3,16	3,71	4,00
<b>Mediana</b>	2,50	1,80	1,70	1,50	1,30	1,30	1,20	1,20	1,10	1,10	1,20	2,05	3,25	3,90	4,10
<b>Variância</b>	2,52	0,97	0,97	0,92	0,87	0,92	0,72	0,63	0,67	0,66	0,85	1,64	2,09	1,72	1,44
Hora	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23					
<b>Média</b>	4,18	4,28	4,37	4,38	4,23	3,98	3,4	2,77	2,43	2,14					
<b>Mediana</b>	4,20	4,40	4,40	4,30	4,10	3,90	3,3	2,65	2,65	2,35					
<b>Variância</b>	1,16	1,31	1,30	1,26	1,35	1,53	1,73	1,39	1,27	1,04					

Inicialmente considerou-se a modelagem a partir das distribuições Gamma, LogNormal e Weibull, avaliando-se as estatísticas Kolmogorov Smirnov, Cramer-von Mises, Anderson Darling, Critério de Informação de Akaike (AIC) e Critério de Informação Bayesiana (BIC) e observou-se que em alguns casos os critérios divergiam sobre qual o melhor modelo para determinada hora, diante disto, optou-se por utilizar a estatística de Anderson Darling, pois esta considera maior peso sobre as caudas da distribuição.

De acordo com o critério de seleção, a distribuição Weibull foi a que obteve as melhores estatísticas, sendo o modelo mais adequado em 15 das 24 horas, e em particular, destacando-se nos horários com maiores velocidades de vento. Desta forma chegou-se aos modelos apresentados na tabela 3.

Turbinas eólicas possuem dois limites de funcionamento: a velocidade de entrada onde a turbina começa a gerar energia (2,5 a 3,5 m/s) e a velocidade máxima onde a turbina corre o risco de danificação (25 m/s). Assim calculamos as probabilidades para cada hora para esses limiares. Assim, o mínimo tempo de retorno para ventos acima de 25 m/s (máximo) em qualquer horário em Maceió é de pelo menos  $2,41 \times 10^{30}$  anos. Já para o limite inferior de funcionamento, adotamos o valor de 3,1 m/s. Ventos abaixo dessa velocidade são muito prováveis na maioria das horas, obtendo-se probabilidades abaixo de 20% apenas entre o horário de 14 a 18 horas (Tabela 3).

Tabela 3: Ajuste da distribuição de Weibull para cada hora em Maceió – AL – 2017-2018.

Hora	Weibull			Probabilidade de velocidade $\leq 3,1$ m/s
	Anderson Darling	Forma (EP)	Escala (EP)	
0	0,52	2,03 (0,083)	2,16 (0,059)	0,87
1	0,83	1,94 (0,077)	2,05 (0,058)	0,89
2	0,66	1,76 (0,070)	1,81 (0,057)	0,92
3	2,51	1,75 (0,068)	1,73 (0,055)	0,94
4	3,31	1,75 (0,067)	1,77 (0,056)	0,93
5	2,73	1,77 (0,070)	1,59 (0,050)	0,96
6	2,16	1,87 (0,073)	1,57 (0,047)	0,97
7	4,02	1,78 (0,069)	1,53 (0,048)	0,97
8	5,64	1,80 (0,069)	1,54 (0,047)	0,97
9	2,69	1,71 (0,067)	1,66 (0,054)	0,94
10	3,35	1,85 (0,076)	2,53 (0,076)	0,77
11	2,42	2,34 (0,097)	3,57 (0,084)	0,51
12	3,44	3,17 (0,134)	4,13 (0,072)	0,33
13	0,92	3,78 (0,157)	4,43 (0,064)	0,29
14	0,62	4,46 (0,184)	4,59 (0,057)	0,16
15	1,06	4,30 (0,178)	4,70 (0,060)	0,15
16	1,01	4,29 (0,174)	4,79 (0,061)	0,14
17	1,31	4,36 (0,176)	4,80 (0,061)	0,14
18	1,51	3,97 (0,158)	4,66 (0,065)	0,18
19	1,48	3,47 (0,137)	4,42 (0,070)	0,25
20	0,51	2,80 (0,115)	3,82 (0,075)	0,43
21	0,48	2,51 (0,102)	3,12 (0,069)	0,63
22	0,26	2,30 (0,094)	2,74 (0,066)	0,73
23	0,70	2,20 (0,091)	2,41 (0,060)	0,82

EP – Erro padrão.

## Conclusões

Analisou-se a velocidade do vento no período de maio de 2017 a maio de 2018, hora a hora, identificando-se a distribuição Weibull como a mais adequada para modelar velocidade do vento e encontrando qual o modelo que representa cada hora com o intuito de verificar a possível implantação de turbinas eólicas em Maceió.

Para isto, é necessário verificar se há velocidade para ativar a turbina e também a chance dessa velocidade danificar o equipamento, através das análises realizadas é possível concluir que é improvável que ocorra uma velocidade capaz de danificar o equipamento. Por outro lado, é muito provável que a turbina passe a maior parte do dia sem gerar energia. Vale ressaltar que os dados sobre o estudo possuem influência do fenômeno El Niña, que aumenta a velocidade do vento e ainda assim, recomenda-se a não implantação de parque eólico em Maceió.

Entre as limitações do estudo temos que a quantidade de dados só permite uma boa avaliação do limite inferior de operação da turbina, pois o limite superior que tem alto tempo de retorno exigiria uma maior janela temporal, de pelo menos 7 anos.

## Agradecimentos

Agradecemos a CAPES e ao CNPq por fomentar a pesquisa, ao Programa de Biometria e Estatística Aplicada pela infraestrutura e à Comissão Editorial do V ERMAC 2018.

## Referências

ALMEIDA, E. M. A.; BARBIRATO, G. M. A morfologia urbana como determinante de variações climáticas locais: estudo comparativo das orlas marítima e lagunar de Maceió – AL. In: CONFERÊNCIA LATINO-AMERICANA DE CONSTRUÇÃO SUSTENTÁVEL & X ENCONTRO NACIONAL DE TECNOLOGIA DO AMBIENTE CONSTRUÍDO, 1., 2004, São Paulo. **Anais...** São Paulo: CLACS, 2004.

ALVES, J. R.; LIMA JÚNIOR, A. F.; SILVA, J. F.; ZANELLA, M. E. **Análise climática e a distribuição dos casos de dengue em Fortaleza.** 2017. Disponível em: <file:///C:/Users/Denise/Downloads/2439-Texto%20do%20artigo-11265-1-10-20171003%20(1).pdf>. Acesso em: 17 mar. 2018.

ANGULO, R. J. Morfologia e gênese das dunas frontais do litoral do estado do Paraná. **Revista Brasileira de Geociências**, v. 23, n. 1, p. 68-80, 1993.

BULLOCK, J. M.; CLARKE, R. T. Long distance seed dispersal by wind: measuring and modelling the tail of the curve. **Oecologia**, v. 124, n. 4, p. 506-521, 2000.

CHAMORRO, L. P.; ARNDT, R.; SOTIROPOULOS, F. Turbulent flow properties around a staggered wind farm. **Boundary-Layer Meteorology**, Springer, v. 141, n. 3, p. 349-367, 2011.

D'AGOSTINO, R. B.; STEPHENS, M. A. **Goodness-of-Fit Techniques.** 1. ed. New York: Marcel Dekker, 1986.

DELIGNETTE-MULLER, M. L.; DUTANG, C. fitdistrplus: An R Package for Fitting Distributions. **Journal of Statistical Software**, v. 64, n. 4, p. 1-34, 2015.

EWEA. **Powering Europe:** wind energy and the electricity grid. Brussels: EWEA, 2010

GLOBAL WIND ENERGY COUNCIL – GWEC. **Global wind energy outlook 2008.** Brussels: GWEC, 2008.

INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS – INPE. **El Niño e La Niña.** 2018. Disponível em: <<http://enos.cptec.inpe.br/>>. Acesso em: 20 jun. 2018.

KOTZ, S.; READ, C. B.; BALAKRISHNAN, N.; VIDAKOVIC, B.; JOHNSON, N. L. **Encyclopedia of Statistical Sciences.** 2. ed. v. 16. USA: Wiley, 2005.

LIU, W. T.; JUÁREZ, R. I. N. ENSO drought onset prediction in northeast Brazil using NDVI. **International Journal of Remote Sensing**, v. 22, n. 17, p. 3483-3501, 2001.

MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. **Noções de probabilidade e estatística.** 7. ed. São Paulo: Edusp, 2011.

MUNHOZ, F. C.; GARCIA, A. Caracterização da velocidade e direção predominante dos ventos para a localidade de Ituverava–SP. **Revista Brasileira de Meteorologia**, v. 23, n. 1, p. 30-34, 2008.

PARTELI, E. J., DURÁN, O., TSOAR, H., SCHWÄMMLE, V., HERRMANN, H. J. Dune formation under bimodal winds. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 106, n. 52, p. 22085-22089, 2009.

POSADA, D.; BUCKLEY, T. R. Model selection and model averaging in phylogenetics: advantages of akaike information criterion and bayesian approaches over likelihood ratio tests. **Systematic Biology**, v. 53, n. 5, p. 793-808, 2004.

RADOS, K.; LARSEN, G.; BARTHELMIE, R.; SCHLEZ, W.; LANGE, B.; SCHEPERS, G.; HEGBERG, T.; MAGNISSON, M. Comparison of wake models with data for offshore windfarms. **Wind Engineering, Multi Science Publishing**, v. 25, n. 5, p. 271-280, 2001.

SILVA, G. K.; SANTOS, A. C. S.; SILVA, M. V. M.; ALVES, J. M. B.; BARBOSA, A. C. B.; FREIRE, C. O.; ALCÂNTARA, C. R.; SOMBRA, S. S. Estudo dos Padrões de Ventos Offshore no Litoral do Ceará Utilizando Dados Estimados pelo Produto de Satélites BSW. **Revista Brasileira de Meteorologia**, São Paulo, v. 32, n. 4, p. 579-690, 2017.

SILVA, G. R. **Características de Vento da Região Nordeste: análise, modelagem e aplicações para projetos de centrais eólicas**. 2003. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Escola de Engenharia, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

TUBELIS, A.; NASCIMENTO, F. C. L. **Meteorologia descritiva: fundamentos e aplicações brasileiras**. São Paulo: Nobel, 1984.

## Mecanismos de redundância para a infraestrutura de refrigeração baseado em modelos estocásticos

*Alan Pereira da Silva*

*Universidade Federal de Alagoas  
aps@ic.ufal.br*

*Almir Pereira Guimarães*

*Universidade Federal de Alagoas  
almir@ic.ufal.br*

**Resumo:** Nos dias atuais, questões relacionadas à dependabilidade, tais como a alta disponibilidade e confiabilidade, estão cada vez mais em foco, particularmente relacionadas aos serviços baseados em Internet que normalmente requerem uma operação ininterrupta dos mesmos. Vários fatores afetam a disponibilidade de sistemas de data centers, entre eles, as variações da temperatura ambiente. Este trabalho tem como foco a melhoria na infraestrutura de refrigeração destes sistemas através de um estudo relacionado aos seus aspectos de dependabilidade.

**Palavras-chave:** Data Center. Infraestrutura de Refrigeração. Dependabilidade. Redes de Petri estocásticas.

### Introdução

Um *data center* é composto por um conjunto integrado de componentes que são divididos em: Infraestruturas de comunicação, potência e refrigeração (Arregoces, 2003). A infraestrutura de refrigeração é uma parte essencial de um data center, pois ela controla a temperatura prevenindo o superaquecimento dos componentes. Os equipamentos da infraestrutura de comunicação consomem energia e produzem calor como resultado desse consumo. Como o data center é uma instalação fechada, se esse calor não for retirado pode aumentar a ponto de comprometer a vida útil de seus principais componentes.

Nosso trabalho tem por objetivo estudar aspectos de dependabilidade (Avizienis, 2004) em infraestrutura de refrigeração de *data center* propondo soluções para esta arquitetura. Para isto foram utilizados os mecanismos de modelagem RBD - *Reliability Block Diagram* (Kuo and Zuo, 2003) e SPN - *Stochastic Petri Net* (Williams, 2002). As ferramentas Mercury (Silva, 2015) e Time Net (Zimmermann, 2000) foram adotadas. A ferramenta Mercury proporciona suporte à avaliação de modelos de desempenho. A ferramenta possui uma interface gráfica para a modelagem e avaliação de SPN, RBD, EFM e CTMC. Por sua vez, a ferramenta TimeNet pode também ser utilizada para avaliação de métricas de dependabilidade utilizando modelos SPN.

### Trabalhos Relacionados

Nos últimos anos, alguns trabalhos têm sido desenvolvidos para avaliar a infraestrutura dos data centers. (Guimaraes, 2013) fornece modelos de desempenho e de dependabilidade para otimização do projeto de infraestruturas focando em métricas orientadas à negócios. (Guimaraes, 2015) propõem modelos analíticos juntamente com suas métricas e uma metodologia para suportar projeto de infraestrutura quase ótimo para um *data center*. (Wiboonrat, 2008) adota uma abordagem em diagramas de blocos de confiabilidade (RBD) e simulação de Monte Carlo para comparar diferentes topologias de *data centers*. Em (Sharma, 2008), os autores propõem uma plataforma para avaliação de *data centers* inteligentes, levando em consideração aspectos como infraestrutura de refrigeração e de potência. (Herold, 2002) descreve as oportunidades de integração entre os sistemas de resfriamento, sistemas de aquecimento e de fornecimento de energia. Os autores demonstram que atributos tais como confiabilidade, se beneficiam de uma abordagem integrada. (Callou, 2012) trata de modelos

para a quantificação integrada para a sustentabilidade, custo e confiabilidade das infraestruturas de refrigeração dos *data centers* com o apoio de um ambiente denominado ASTRO.

A principal contribuição deste trabalho é o de abordar e criar modelos para proporcionar suporte à avaliação da dependabilidade da infraestrutura de refrigeração.

## Metodologia

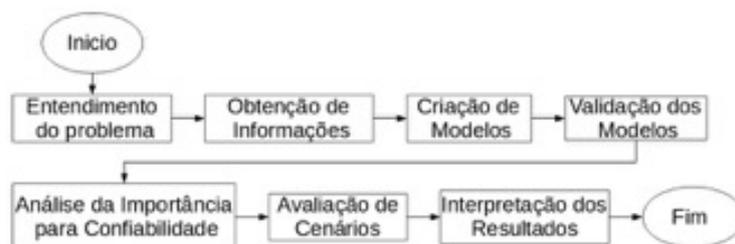


Figura 1: Fluxograma da metodologia

É apresentada a seguir a metodologia concebida para o estudo da disponibilidade na infraestrutura de refrigeração de um *data center*. Nossa abordagem consiste de sete atividades: entendimento do problema; obtenção de informações; criação de modelos; validação dos modelos; análise da importância para confiabilidade; avaliação de cenários; interpretação dos resultados.

A primeira atividade consiste no entendimento do problema assim como na identificação dos componentes. Para executar esta atividade, um conjunto de ações devem ser executadas. Dentre as ações podemos destacar: especificação da estrutura do sistema (componentes e interfaces); definição da estrutura e do ambiente (condições de contorno); definição do conjunto de métricas relacionadas à dependabilidade utilizadas para a análise do sistema.

A segunda atividade, Obtenção de Informações, trata a respeito da obtenção de informações para os modelos de dependabilidade. Estas informações são oriundas tanto dos fabricantes dos componentes a serem considerados no processo de modelagem, a exemplo do MTTF (sigla proveniente do inglês Mean Time To Failure), como das empresas responsáveis pelas políticas de reparo, tal como o MTTR (sigla proveniente do inglês Mean Time To Repair).

A terceira atividade refere-se à criação de modelos para o sistema analisado. Com relação aos modelos de dependabilidade, as características do sistema, mecanismos de redundância, nível de interação entre os componentes, as políticas de reparo tratadas irão determinar se iremos utilizar SPN, RBD ou ambos. Esta atividade é executada pela composição de cada componente do sistema de acordo com regras específicas de cada um dos mecanismos de modelagem e pelo mapeamento das métricas desejadas através de expressões representadas pelos elementos de cada modelo.

A vantagem da utilização de modelos não baseados em espaço de estados é que eles são eficientes para a especificação e resolução de problemas. Contudo, a solução destes modelos assume a independência dos componentes. Por exemplo, em RBD os componentes devem ser completamente independentes uns dos outros em termos de comportamentos de falha e de reparo. A falha em um dos componentes não poderá afetar a operação de outro componente, e os componentes não podem compartilhar recursos. Modelos baseados em espaço de estados, tais como SPN, por sua vez, proporcionam a habilidade de modelar sistemas que violam a suposição feita pelos modelos não baseados em espaço de estados, RBD, ao preço da possibilidade de explosão do espaço de estados. Para os modelos de dependabilidade, podemos utilizar SPN, RBD ou ambos. Nessa etapa é utilizada as ferramentas TimeNet e Mercury para a construção dos modelos.

A atividade Validação do Modelo compara os resultados obtidos a partir de cada modelo construído tanto com os resultados de um outro modelo semelhante como com medições diretas, obtidas através de ambientes construídos com uma finalidade específica, e realiza ajustes quando

necessário. O fim desta fase é alcançado quando cada modelo proporciona resultados com exatidão apropriada.

Em seguida na fase de análise da importância para confiabilidade, refere-se à análise do índice de importância para confiabilidade de cada um dos componentes a partir de uma configuração pré-definida pelo projetista e tomada por base. Para esta análise serão utilizados os modelos definidos na etapa anterior. Após a atividade análise da importância para confiabilidade, a avaliação de diferentes cenários poderá ser executada. As métricas de interesse podem ser classificadas em duas classes: métricas transientes e métricas estacionárias. Métricas transientes são dependentes do tempo. Por sua vez, métricas estacionárias não dependem de qualquer instante de tempo.

Finalmente, os resultados obtidos irão ser interpretados e explicados através da adoção de um vocabulário apropriado para o cliente.

### Estudo de Caso

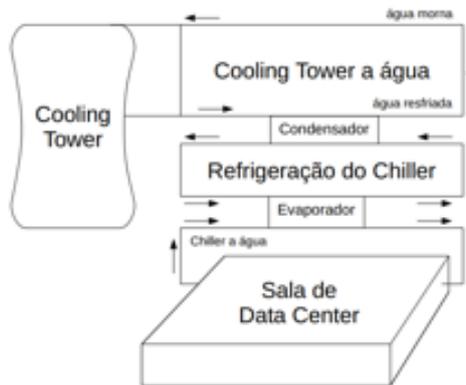


Figura 2: Infraestrutura de Refrigeração (Callou, 2013)

A infraestrutura de refrigeração é composta basicamente por CRAC - *Computer Room Air Conditioning* (unidades de ar condicionado da sala de computadores), *Chiller* (resfriador de água) e o *Cooling Tower* (torre de refrigeração). Figura 2 apresenta o funcionamento da infraestrutura de refrigeração. O calor é retirado do ambiente pelo CRAC, o qual é levado através da água em circulação para o evaporador do *Chiller*, que, seguidamente, o condensa, recebendo os vapores comprimidos e quentes do evaporador, passando para o estado líquido, que é enviado para o *Cooling Tower*, que o libera para o ambiente externo, que é resfriado novamente no condensador do *Chiller*, passando a esfriar novamente toda a água. A água resfriada é emitida ao evaporador, que passa para o CRAC, que, seguidamente, resfria a sala. Figura 3 mostra o modelo de dependabilidade RBD associado a esta infraestrutura. Os valores de MTTF (Mean Time To Failure) e MTTR (Mean Time To Repair) utilizados neste modelo se encontram na Tabela 1.

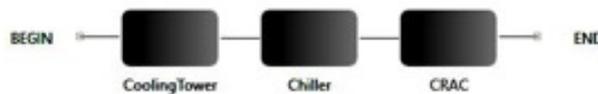


Figura 3: Modelo de Dependabilidade (RBD) - Infraestrutura de Refrigeração

Primeiro quantificamos o impacto da falha de cada componente através do índice de importância para confiabilidade (Birnbau importance) (kuo, 2003). Desde que o parâmetro MTTF >> MTTR podemos também avaliar a disponibilidade do sistema em função dos componentes que

possuem o maior índice de importância para confiabilidade. Tabela 2 mostra o índice de importância para confiabilidade de cada um dos componentes desta infraestrutura. Em seguida aplicamos redundância nos componentes que apresentam o maior índice. Com isso criamos um modelo em SPN e adicionamos mais dois CRAC, aumentando à capacidade de refrigeração do sistema.

Equipamento	MTTF	MTTR
CoolingTower	24816	48
Chiller	18000	48
CRAC	37059	8

Tabela 1: Valores MTTF e MTTR da Infra. de Refrigeração (Callou, 2013)

Componente	Importância
Chiller	1.0
CoolingTower	0.8748799509926913
CRAC	0.7785774239652864

Tabela 2: Valores da Importância para confiabilidade dos componentes da Infra. de Refrigeração

Figura 4 mostra infraestrutura de refrigeração em SPN. Nessa infraestrutura adicionamos dois CRAC, chamando-os de CRAC1, CRAC2 e CRAC3. Neste sistema os CRAC's funcionam em dupla, ou seja, o sistema estará em operação se pelo menos dois estiverem ativos. Essa técnica de redundância é conhecida como TMR (*Triple Modular Redundancy*) (Zhang, 2003). Por sua vez, no *Chiller* foi acrescentada uma redundância *Cold-Standby* (Guimarães, 2013), portanto quando o componente Chiller1 falhar, o componente ActChiller irá substituí-lo até que o componente Chiller1 seja reparado. A transição X\_ACTSP representa o tempo de inicialização do componente ActChiller, que pode demorar entre 10 à 15 minutos (Lin, 2013). Apesar de que *Cooling Tower* apresenta o maior índice de importância para confiabilidade, a redundância do mesmo seria muito onerosa. Desta forma, para reduzir o tempo de reparo deste componente caso algum dano ocorra ao mesmo, uma solução seria um novo contrato com a prestadora de serviços responsável pela manutenção do equipamento, para que o mesmo possa voltar a funcionar em um menor espaço de tempo.

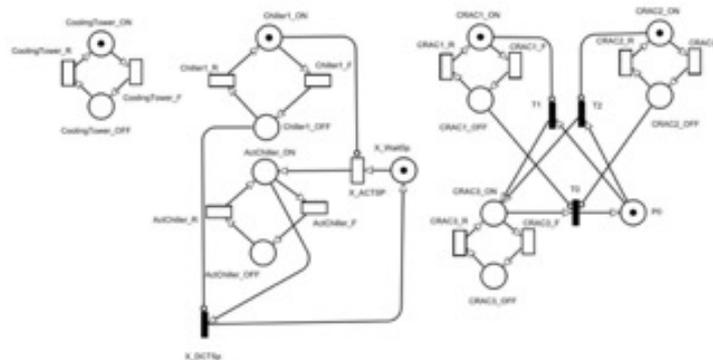


Figura 4: Modelo de Dependabilidade (SPN) - Infraestrutura de Refrigeração

A disponibilidade do sistema é calculada pela expressão:  

$$P\{(\#CoolingTower\_ON=1) \text{ AND } (\#Chiller1\_ON=1 \text{ OR } \#ActChiller\_ON=1) \text{ AND } ((\#CRAC1\_ON=1 \text{ AND } \#CRAC2\_ON=1) \text{ OR } (\#CRAC1\_ON=1 \text{ OR } \#CRAC3\_ON=1) \text{ OR } (\#CRAC2\_ON=1 \text{ OR } \#CRAC3\_ON=1))\}$$

Um *data center* pode conter vários CRAC's, isso depende da quantidade de calor dissipado pela infraestrutura de comunicação. Na Figura 4 apresentamos o TMR como redundância do CRAC,



contudo outras redundâncias também podem ser usadas para este componente. Figura 5 apresenta um modelo de dependabilidade para o CRAC. Neste modelo utilizamos a redundância k-out-of-n (CHIANG, 1981). Os lugares UP e DOWN representam as condições em que o sistema estar ativo e inativo, as transições imediatas T10 e T11 representam quando o sistema está com falha e reparo respectivamente. Cada transição imediata comporta uma expressão que representa seu estado. Em T10 temos a expressão:  $(CRAC1\_ON)+(CRAC2\_ON)+(CRAC3\_ON) < 2$  que descreve o estado de falha no sistema quando menos de dois CRAC estiverem ativos. Na transição T11 temos a expressão:  $(CRAC1\_ON)+(CRAC2\_ON)+(CRAC3\_ON) \geq 2$  que descreve o estado de reparo e do sistema quando dois ou mais CRAC estiverem ativos. Este sistema funciona apenas quando dois ou mais CRAC estiverem disponíveis e pode ser expandido para N CRAC conforme a necessidade do *data center*. A expressão para disponibilidade é dado por:  $P\{\#UP>0\}$

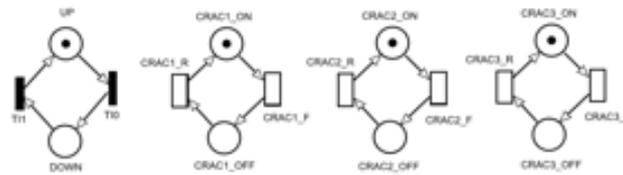


Figura 5: Modelo de Dependabilidade (SPN) – K-OUT-OF-N

## Resultados

Nesta sessão vamos apresentar os resultados do nosso trabalho. Figura 6 apresenta um gráfico comparando a disponibilidade de uma infraestrutura de refrigeração sem redundância (Figura 3) e com redundâncias (Figura 4). Os valores desse gráfico foram obtidos pela variação do MTTR de todos os componentes que fazem parte da infraestrutura de refrigeração. Como podemos perceber, na medida em que o tempo de reparo aumenta a disponibilidade do sistema diminui.

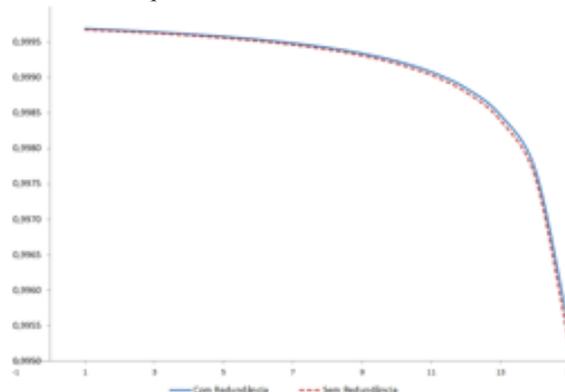


Figura 6: Disponibilidade X MTTR – Infra. de Refrigeração com e sem redundância

Na Figura 6 vemos que o modelo com redundância não teve uma grande diferença em relação ao modelo sem redundância, isso acontece porque o *Cooling Tower* também possui um alto índice de importância para confiabilidade (ver Tabela 2) e não recebeu nenhuma redundância neste componente. Figura 7 mostra um gráfico com a variação apenas do MTTR do *Cooling Tower*. Nele podemos ver a importância do *Cooling Tower* no sistema. Na medida em que o tempo de reparo aumenta sua disponibilidade também diminui.

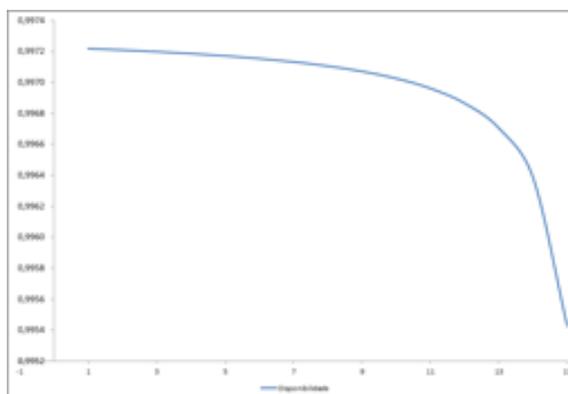


Figura 7: Cooling Tower X MTTR – Infra. de Refrigeração

### Conclusão e Trabalhos Futuros

Diante do constate crescimento tecnológico, a fim de atender a demanda de novas tecnologias, como *cloud computing* e *e-commerce*, tais tecnologias têm exigido uma alta confiabilidade e disponibilidade dos serviços, em função de seus usuários e da própria empresa, haja vista que equipamentos eletrônicos, sistemas de *software*, *hardware* tendem a falhar, tornando-se indisponíveis por tempo indeterminado. Portanto, entre os meios que levam a indisponibilidade, está o efeito da variação de temperatura ambiente.

Este trabalho propõe modelos estocásticos para infraestrutura de refrigeração para melhoria da disponibilidade da infraestrutura. Analisando os resultados obtidos observamos um impacto considerável quando aplicada as devidas redundâncias no sistema. Vale ressaltar que os modelos são genéricos o suficiente para avaliar diferentes sistemas, considerando aspectos de disponibilidade. No futuro, pretendemos estender a avaliação e proposta de soluções para as infraestruturas de comunicação e potência.

### Referências

- Arregoces, M. and Portolani, M. (2003). **Data center fundamentals**. Cisco Press.
- Avizienis, A., Laprie, J.-C., Randell, B., and Landwehr, C. (2004). **Basic concepts and taxonomy of dependable and secure computing**. IEEE.
- Callou, G., Maciel, P., Tutsch, D., and Araujo, J. (2012). **Models for dependability and sustainability analysis of data center cooling architectures**. IEEE.
- Callou, G. R. d. A. (2013). **Assessment to support the planning of sustainable data centers with high availability**. Universidade Federal de Pernambuco.
- CHIANG, Dalen T.; NIU, Shun-Chen. Reliability of consecutive-k-out-of-n: F system. **IEEE Transactions on Reliability**, v. 30, n. 1, p. 87-89, 1981.
- Committee, A. T. (2011). **Thermal Guidelines for Data Processing Environments – Expanded Data Center Classes and Usage Guidance**. ASHRAE.
- Dantas, J., Matos, R., Araujo, J., and Maciel, P. (2012). **An availability model for eucalyptus platform: An analysis of warm-standby replication mechanism**. IEEE.

- GUIMARAES, A. P. (2013). **Modelos para planejamento de redes convergentes considerando a integração de aspectos de infraestrutura e de negócios**. Universidade Federal de Pernambuco.
- GUIMARAES, A. P., Maciel, P., and MATLAS JR, R. (2015). **Design of it Infrastructures of Data Centers: An Approach Based on Business and Technical Metrics**. John Wiley & Sons.
- Herold, K. E. and Radermacher, R. (2002). **Integrated power and cooling systems for data centers**. IEEE.
- Kuo, W. and Zuo, M. J. (2003). **Optimal reliability modeling: principles and applications**. John Wiley & Sons.
- Lin, P., Zhang, S., and VanGilder, J. (2013). **Data center temperature rise during a cooling system outage**. White Paper of Schneider Electric Data Center Science Center.
- Marsan, G. Balbo, G. Conte, S. Donatelli, G. Franceschinis, **Modelling with Generalized Stochastic Petri Nets**, ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review, 26, 324, 1998.
- Marwah, M., Maciel, P., Shah, A., Sharma, R., Christian, T., Almeida, V., Araujo, C., Souza, E., Callou, G., Silva, B., et al. (2010). **Quantifying the sustainability impact of data center availability**. ACM.
- Ponemon (2016). **Cost of Data Center Outages**. Ponemon Institute.
- Sharma, R. K., Shih, R., Bash, C., Patel, C., Varghese, P., Mekanapurath, M., Velayudhan, S., and Kumar V, M. (2008). **On building next generation data centers: Energy flow in the information technology stack**. ACM.
- Silva, B., Matos, R., Callou, G., Figueiredo, J., Oliveira, D., Ferreira, J., Dantas, J., Lobo, A., Alves, V., and Maciel, P. (2015). Mercury: **An integrated environment for performance and dependability evaluation of general systems**.
- Wiboonrat, M. (2008). **Risk anatomy of data center power distribution systems**. IEEE.
- Zhang, T., WU, X.-y., and TAN, Y.-j. (2003). **The Application of Petri Nets in the System Reliability Analysis**. Electronic Product Reliability and Environmental Testing.
- Zimmermann, A., Freiheit, J., German, R., and Hommel, G. (2000). **Petri net modelling and performability evaluation with TimeNET 3.0**. Springer.

## Estimação da intensidade de tráfego de filas markovianas multi-servidoras via SIR

Sandy P. Alves

Universidade Federal de Minas Gerais; Departamento de Estatística - ICEX, Belo Horizonte - MG  
sandy2013@ufmg.br

Frederico R. B. Cruz

Universidade Federal de Minas Gerais; Departamento de Estatística - ICEX, Belo Horizonte - MG  
fcruz@est.ufmg.br

Roberto C. Quinino

Universidade Federal de Minas Gerais; Departamento de Estatística - ICEX, Belo Horizonte - MG  
roberto@est.ufmg.br

**Resumo:** Filas multi-servidoras com chegadas Poisson e tempos de serviço exponenciais são o foco deste trabalho, mais especificamente, o problema de estimação bayesiana da sua intensidade de tráfego, definida como a razão entre a taxa de chegada e a taxa de serviço. Tais filas são importantes como modelos aproximados em diversas situações práticas, tais como em redes de computadores e de telecomunicações, sistemas de manufatura, de serviços e de saúde, entre outros problemas similares. É investigado aqui o uso do método de amostragem/reamostragem de importância (ou SIR, do inglês *sampling/importance resampling*) e sua implementação na plataforma R. A determinação da intensidade de tráfego é ponto de partida para obtenção de outras medidas de desempenho importantes, tais como, a probabilidade de o sistema estar vazio, o tamanho médio da fila, o número esperado de usuários no sistema, dentre outras. Resultados numéricos são apresentados, para demonstrar a eficácia e a eficiência do SIR, diante de amostras de tamanho finito.

**Palavras-chave:** Métodos Estocásticos e Estatísticos. Filas Markovianas. Inferência em filas. SIR.

## Introdução

As filas são descritas, basicamente, por um processo de chegada de clientes, ou produtos, em um determinado sistema de atendimento, ou de produção, que provê um ou mais serviços, que será executado por certa quantidade de servidores. O foco deste estudo foram as filas markovianas infinitas com  $c$  servidores em paralelo, ou, na notação de Kendall (1953), filas  $M/M/c$  (ou  $M/M/c/\infty$ ). A intensidade de tráfego,  $\rho$ , definida como a relação entre a taxa de chegada ( $\lambda$ ) e a taxa de serviço ( $\mu$ ), representa a proporção média de tempo que cada servidor permanece ocupado e é a medida de desempenho que este artigo tem por foco estimar. A partir desta, outras medidas de desempenho podem ser determinadas, como o tamanho médio da fila ou o número esperado de usuários no sistema.

O objetivo é o estudo empírico de estimadores estatísticos para o parâmetro  $\rho$ , em filas  $M/M/c$ , e seu desempenho frente a amostras de tamanho finito ( $\leq 250$ ). A ideia é utilizar um método Monte Carlo não iterativo, denominado amostragem/reamostragem de importância (ou SIR, do inglês *sampling/importance resampling*). Ferramenta simples e conhecida desde o final dos anos 1980's (RUBIN, 1988) e início dos anos 1990's (SMITH; GELFAND, 1992), o SIR é uma técnica de estatística bayesiana que tem se mostrado viável em novas aplicações, inclusive em estimação em filas  $M/M/c$  (CRUZ; QUININO; HO, 2017), principalmente devido aos avanços computacionais que possibilitam a precisão e a velocidade necessárias aos cálculos envolvidos. Para uma revisão ampla e atualizada sobre inferência em filas em geral, ver Asanjarani, Nazarathy e Pollett (2017).

Neste artigo, uma implementação do SIR em R (R CORE TEAM, 2017) é apresentada e tornada disponível para a comunidade, uma vez que o R é um ambiente de software livre para computação estatística e gráfica que é bastante utilizado pela comunidade de matemática aplicada e computacional e estatística. O restante do artigo está

organizado da seguinte forma. A próxima seção detalha as equações e algoritmos envolvidos. Em seguida, os resultados computacionais são apresentados e discutidos. Finalmente, o artigo é concluído com algumas observações finais e tópicos para futuras pesquisas na área.

## Materiais e métodos

Embora seja do ponto de vista matemático um dos modelos de filas mais simples, as filas markovianas multi-servidoras infinitas são aproximações bastante satisfatórias de diversos sistemas reais. Elas são o foco deste estudo. O modelo probabilístico de tais filas é apresentado na Figura 1, em que o número  $k$  de clientes que chegam na unidade de tempo segue uma distribuição Poisson, com função de probabilidade

$$p(k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

e os tempos de serviço  $t$  seguem uma distribuição Exponencial, com função densidade de probabilidade

$$g(t) = \mu e^{-\mu t}, t \geq 0. \quad (2)$$

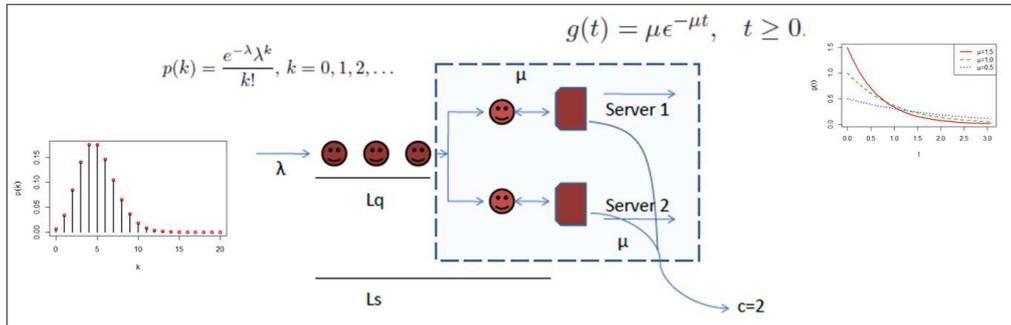


Figura 1: Um exemplo de fila  $M/M/c$ , com  $c = 2$  servidores.

À esquerda da Figura 1, tem-se o gráfico da função de probabilidade de uma distribuição Poisson com uma determinada taxa  $\lambda$ . Este gráfico é apresentado com o intuito de ilustrar uma modelagem do número de chegadas de clientes ou produtos em um sistema de atendimento. A abscissa  $k$  refere-se ao número de chegadas em um determinado período de tempo e a ordenada  $p(k)$  representa a probabilidade de ocorrer tais chegadas. Ao lado direito da Figura 1, encontra-se o gráfico da função densidade de probabilidade para a distribuição Exponencial, com várias taxas  $\mu$ . Este gráfico é mostrado com o propósito de ilustrar uma modelagem do tempo de serviço, em que a abscissa  $t$  representa o tempo de serviço, em unidades de tempo, e a ordenada a respectiva densidade de probabilidade  $g(t)$ .

Assumindo que a fila é observada por um longo período de operação, até alcançar um estado estacionário, e que a intensidade de tráfego é tal que  $\rho < 1$ , para assegurar que o número de usuários em espera não cresça indefinidamente, é possível deduzir a seguinte distribuição estacionária do número de clientes ( $N$ ) no sistema (GROSS et al., 2009).

$$P(N = n) \equiv p_n = \begin{cases} \frac{(c\rho)^n}{n!} p_0, & 0 \leq n \leq c, \\ \frac{c^c \rho^n}{c!} p_0, & n > c, \end{cases} \quad (3)$$

em que  $p_n$  é a probabilidade de se encontrar  $n$  clientes no sistema em determinado momento e a probabilidade de o sistema estar vazio,  $P(N = 0) \equiv p_0$ , é dada a partir da condição de que as probabilidades devem somar 1,

$$p_0 = \left[ \sum_{j=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^j}{j!} + \frac{c^c \rho^c}{c!} \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1}. \quad (4)$$

Supondo agora que  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_\ell\}$  constitui uma amostra, de tamanho  $\ell$ , em que os  $x_i$  representam o número de clientes observados no sistema (i.e., os clientes em serviço e em espera, na fila), a seguinte função de verossimilhança pode ser escrita (CRUZ; QUININO; HO, 2017),

$$L(\mathbf{x}|\rho) = \prod_{i=1}^{\ell} \left[ \frac{(c\rho)^{x_i}}{x_i!} p_0 I_{\{0 \leq x_i \leq c\}} + \frac{c^c \rho^{x_i}}{c!} p_0 I_{\{x_i > c\}} \right], \quad (5)$$

em que  $I_{\{\bullet\}}$  é a função indicadora. Note-se que  $x_i$  deve ser observado em instantes aleatórios e suficientemente espaçados, para evitar correlação entre as observações. A determinação desse espaçamento, do ponto de vista teórico, não é trivial e está fora do escopo deste trabalho. No entanto, do ponto de vista prático, se em cada observação,  $x_i$ , os clientes forem todos diferentes daqueles da observação anterior,  $x_{i-1}$ , tem-se então um espaçamento adequado.

Uma vez que  $0 < \rho < 1$ , qualquer distribuição com suporte  $(0, 1)$  é uma candidata natural a distribuição a priori para este parâmetro. Uma distribuição que já vem sendo usada com sucesso em inferência em filas (GUPTA; NADARAJAH, 2004) é

$$\Pi(\rho) \propto \rho^{(a-1)}(1-\rho)^{(b-1)}, a > 0, b > 0, \quad (6)$$

que, após a normalização, é a conhecida distribuição beta, com parâmetros  $a$  e  $b$ ,  $\text{Beta}(a, b)$ . A beta será utilizada aqui por comodidade, uma vez que oferece a flexibilidade necessária para a modelagem do conhecimento a priori sobre o parâmetro  $\rho$ , conforme pode ser visto na Figura 2, além de facilitar a comparação com estudos anteriores, nos quais foi utilizada. Vários métodos para obtenção dos parâmetros  $a$  e  $b$  em situações reais podem ser encontrados em Gupta e Nadarajah (2004).

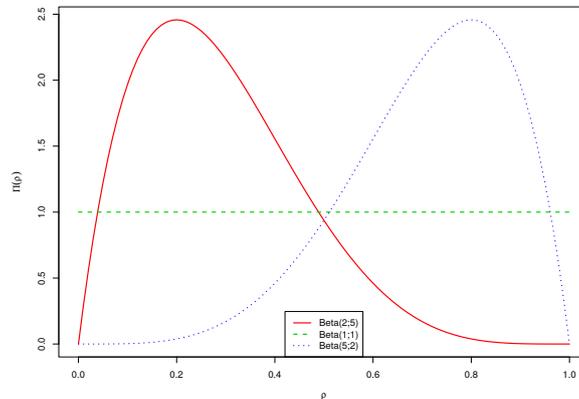


Figura 2: Várias distribuições a priori  $\text{Beta}(a, b)$ .

A distribuição a posteriori, correspondente à distribuição a priori dada pela Eq. (6), é

$$\Pi(\rho|\mathbf{x}) \propto \rho^{(a-1)}(1-\rho)^{(b-1)} \prod_{i=1}^{\ell} \left[ \frac{(c\rho)^{x_i}}{x_i!} p_0 I_{\{0 \leq x_i \leq c\}} + \frac{c^c \rho^{x_i}}{c!} p_0 I_{\{x_i > c\}} \right]. \quad (7)$$

Entretanto, como seria difícil obter exatamente a distribuição de probabilidade a posteriori  $\Pi(\rho|\mathbf{x})$ , dada pela Eq. (7), será utilizado o SIR. Discutido em detalhe por Rubin (1988) e Smith e Gelfand (1992), este algoritmo é descrito brevemente como segue. Uma amostra aleatória de tamanho  $k$  (igual ou superior a 5.000),  $\rho_i, i = 1, 2, \dots, k$ , é retirada da densidade a priori de  $\rho$ , que neste trabalho é considerada uma distribuição beta, com parâmetros  $a$  e  $b$ ,  $\text{Beta}(a, b)$ . Um peso  $\omega_i$ , é associado a cada  $\rho_i, i = 1, 2, \dots, k$ , proporcional ao lado direito da Eq. (7). Finalmente, uma reamostra de tamanho  $k$  com reposição,  $\rho_i^*$ , é feita dos  $\rho_i$ , de acordo com os pesos  $\omega_i$ . Dessa forma, podem-se ser calculadas as medidas usuais da inferência bayesiana. Por exemplo, um estimador pontual é a média de  $\rho_i^*$ . Uma implementação simplificada do SIR em R pode ser vista na Listagem 1.

```

1 sirmmsRo<-function(ce, amostra, a, b){
  # amostragem da priori
3  sirSampSiz<-5000
  rhoPrior<-rbeta(sirSampSiz, shape1=a, shape2=b)
5 # função de probabilidade, Eq.(3)
  dmms<-function(m, rho, ce){
7  p0<-sum(sapply(c(0:(ce-1)), function(j) (ce*rho)^j/factorial(j))+
          ce^ce*rho^ce/factorial(ce)/(1-rho)
9  p0<-1/p0
  p<-sapply(floor(m), function(m) if(m<=ce) (ce*rho)^m/factorial(m)
11  else ce^ce*rho^m/factorial(ce))*p0
  return(p)}
13 # função de verossimilhança
  like.f<-function(rho, ce, amostra){
15  ss<-length(amostra)
  likef<-sapply(1:length(rho), function(n) prod(dmms(amostra[1:ss], rho[n], ce)))
17  return(likef)}
  # SIR
19  maxss<-50
  init<-1
21  fin<-maxss
  ssize<-length(amostra)
23  rhoPost<-rhoPrior
  while (init<ssize) {
25  subsample<-amostra[init:min(fin, ssize)]
  wght<-like.f(rhoPost, ce, subsample)
27  wght<-wght/sum(wght)
  rhoPost<-sample(rhoPost, size=sirSampSiz, replace=TRUE, prob=wght)
29  init<-min(fin, ssize)+1
  fin<-fin+maxss}
31  return(mean(rhoPost))}

```

Listagem 1: Estimador bayesiano para  $\rho$  via SIR e distribuição a priori beta

Sobre a Listagem 1, é necessário chamar à atenção suas linhas finais (24 a 30), que dividem a amostra original em partes de tamanho máximo igual a 50 e, iterativamente, calculam posterioris intermediárias, que serão utilizadas como prioris no passo seguinte, até considerar todos os elementos da amostra original. Este processo bayesiano sequencial é necessário para evitar erros numéricos que tornam a função de verossimilhança praticamente plana, e, em consequência, anulam os pesos  $\omega_i$ , utilizados no SIR. Isso ocorre com frequência quando as amostras têm tamanhos superiores a  $\ell > 50$ .

## Resultados e discussão

A Tabela 1 apresenta os valores médios e os desvios-padrões para a média a posteriori da intensidade de tráfego ( $\rho$ ), obtida a partir de um procedimento de simulação Monte Carlo repetido 100 vezes com o tamanho da amostra do SIR igual a  $k = 5.000$ , para vários tamanhos de amostra,  $\ell$ , e  $c = 3$ .

Dá para perceber pela Figura 3-a que os erros médios de estimação mantêm-se próximos de zero para todos os valores de  $\rho$  quando tem-se a priori não-informativa, Beta(1, 1), e que as prioris informativas têm melhor desempenho quando as modas são próximas ao valor  $\rho$  a ser estimado. Na Figura 3-b, pode-se observar que o desvio-padrão é maior para  $\rho$  igual a 0,5 e menor quando  $\rho$  é igual a 0,9. Vê-se também, na Figura 3-c, que os erros médios de estimação diminuem à medida que o tamanho da amostra aumenta, para todas as prioris testadas, para amostras de tamanho  $\ell < 100$ . A partir desse tamanho de amostra os erros começam a aumentar para a priori Beta(2, 5) e, para amostras de tamanho  $\ell > 150$ , os erros começam a aumentar para a priori Beta(1, 1), o que levanta a suspeita de que a dificuldade de cálculo da função de verossimilhança para amostras grandes começa a crescer. De fato, à medida que a amostra cresce, a função de verossimilhança apresenta multiplicações de números muito próximos de zero, fazendo com que a posteriori não incorpore a informação proveniente dos dados. Por isso é

Tabela 1: Média e o desvio-padrão (entre parênteses) para a intensidade de tráfego ( $\rho$ ) a posteriori.

Priori	$\rho$	Tamanho da amostra ( $\ell$ )					
		25	50	100	150	200	250
Beta(2;5)	0,20	0,2096 (0,0476)	0,2052 (0,0296)	0,2029 (0,0227)	0,2020 (0,0173)	0,2002 (0,0164)	0,1985 (0,0146)
	0,50	0,4744 (0,0603)	0,4891 (0,0404)	0,4937 (0,0307)	0,4954 (0,0235)	0,4943 (0,0218)	0,4933 (0,0186)
	0,90	0,8633 (0,0327)	0,9003 (0,0135)	0,8990 (0,0139)	0,8876 (0,0204)	0,8827 (0,0194)	0,8802 (0,0172)
Beta(1;1)	0,20	0,2101 (0,0508)	0,2046 (0,0304)	0,2024 (0,0227)	0,2016 (0,0177)	0,2001 (0,0164)	0,1983 (0,0148)
	0,50	0,4940 (0,0631)	0,4992 (0,0408)	0,4988 (0,0302)	0,4990 (0,0229)	0,4971 (0,0215)	0,4957 (0,0184)
	0,90	0,8924 (0,0209)	0,8963 (0,0135)	0,8977 (0,0101)	0,8986 (0,0073)	0,8983 (0,0067)	0,8981 (0,0056)
Beta(5;2)	0,20	0,2601 (0,0512)	0,2287 (0,0328)	0,2136 (0,0212)	0,2085 (0,0163)	0,2051 (0,0152)	0,2021 (0,0151)
	0,50	0,5169 (0,0575)	0,5098 (0,0393)	0,5033 (0,0300)	0,5016 (0,0232)	0,4995 (0,0216)	0,4976 (0,0187)
	0,90	0,8907 (0,0210)	0,8955 (0,0131)	0,8972 (0,0096)	0,8981 (0,0071)	0,8979 (0,0067)	0,8977 (0,0056)

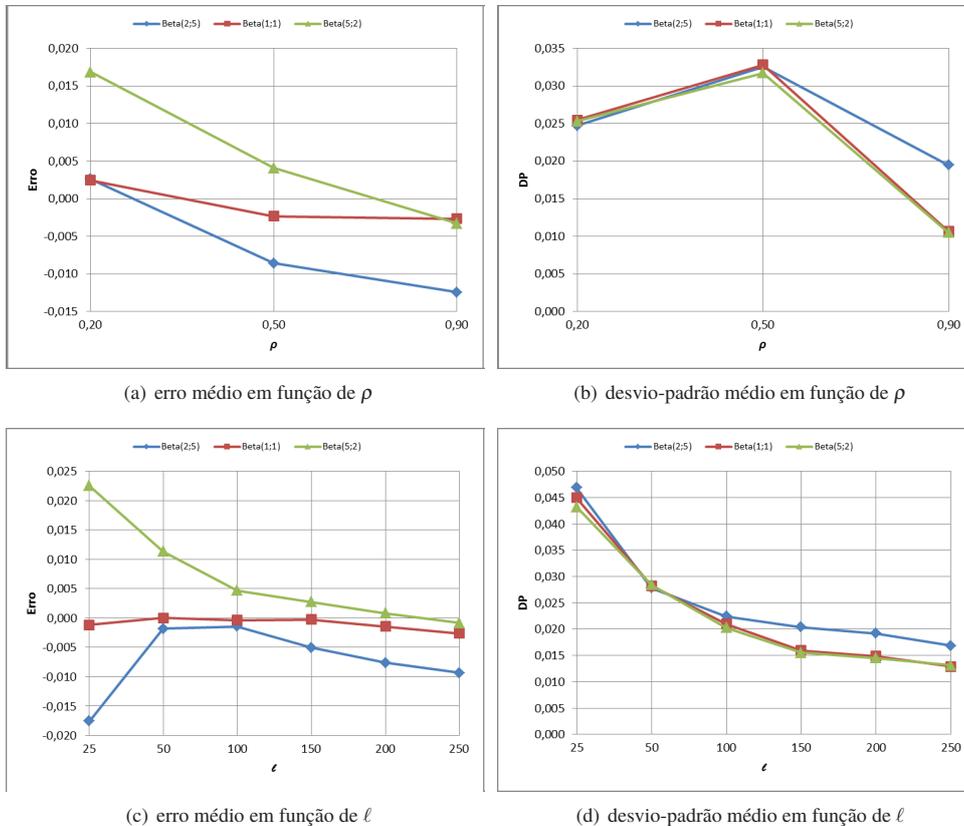


Figura 3: Desempenho médio das estimativas para  $\rho$ .



necessário lançar mão do processo bayesiano sequencial, mencionado na seção anterior, que permite a redução dos erros numéricos que podem tornar a função de verossimilhança praticamente plana em amostras grandes. Pode-se observar ainda, na Figura 3-d, que o desvio-padrão decresce em função do tamanho da amostra ( $\ell$ ), e que para as priors Beta(1, 1) e Beta(5, 2) o valor desse decréscimo foi bastante próximo. Em resumo, o desempenho do SIR é satisfatório para uma priori vaga, Beta(1, 1), para quaisquer valores de  $\rho$ , ou quando a priori tem moda próxima ao valor correto de  $\rho$ , conforme visto na Figura 3-a, onde as priors Beta(2, 5) e Beta(5, 2) têm o melhor desempenho quando  $\rho = 0, 20$  e  $0, 90$ , respectivamente.

## Conclusões

No contexto testado, o algoritmo implementado para estimação da intensidade de tráfego ( $\rho$ ) de filas markovianas multi-servidoras ( $M/M/c$ ), pelo método de amostragem/reamostragem de importância (SIR), no software R, produz resultados satisfatórios para amostra do número de usuários no sistema, em tempos aleatórios. Os erros médios já são inferiores a 0,002 quando o tamanho chega a 100. A partir desse tamanho de amostra, os erros não decaem mais, principalmente para uma priori com moda muito baixa, como a Beta(2, 5). Tem-se, portanto, uma segurança na utilização do SIR em situações reais, se a informação a priori é vaga ou se esta informação representa bem o valor a ser estimado para  $\rho$ . O ambiente R é bastante conveniente, por ser uma plataforma aberta, gratuita e que está tendo um uso cada vez mais difundido entre pesquisadores e usuários das áreas de matemática aplicada e de estatística.

Tópicos para trabalhos futuros incluem o estudo da influência do número de servidores ( $s$ ) na qualidade da estimação, da aplicabilidade e eficácia do método SIR na estimação de outras medidas de desempenho (p.e., tamanho médio da fila,  $L_q$ , número médio de usuários no sistema,  $L$ , probabilidade de sistema vazio,  $\rho_0$ ). Aplicações do método em estimação em filas truncadas  $M/M/c/N$ , ou filas mais gerais,  $GI/G/c/M$  também podem render bons resultados.

## Agradecimentos

Esta pesquisa foi parcialmente financiada pelo *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico* (CNPq), processo 304671/2014-2, e pela *Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais* (FAPEMIG), processo CEX-PPM-00564-17, aos quais os autores expressam seus agradecimentos.

## Referências

- ASANJARANI, A.; NAZARATHY, Y.; POLLETT, P. K. **Parameter and State Estimation in Queues and Related Stochastic Models**: A bibliography. Disponível em: <http://www.maths.uq.edu.au/~epk/papers/Qest/Qest.html>. Acesso em: 10 fev. 2017.
- CRUZ, F. R. B.; QUININO, R. C.; HO, L. L. Bayesian estimation of traffic intensity based on queue length in a multi-server  $M/M/s$  queue. **Communications in Statistics - Simulation and Computation**, v.46, n.9, p.7319–7331, 2017.
- GROSS, D. et al.. **Fundamentals of Queueing Theory**. 4<sup>a</sup> ed. New York, NY, EUA: Wiley-Interscience, 2009.
- GUPTA, A. K.; NADARAJAH, S. **Handbook of Beta Distribution and its Applications**. CRC press, 2004.
- KENDALL, D. G. Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of embedded Markov chains. **Annals Mathematical Statistics**, v.24, p.338–354, 1953.
- R CORE TEAM. **R**: A language and environment for statistical computing. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing, 2017. <http://www.R-project.org/>
- RUBIN, D. B. Using the SIR algorithm to simulate posterior distributions. **Bayesian Statistics**, v.3, p.395–402, 1988.
- SMITH, A. F. M.; GELFAND, A. E. Bayesian statistics without tears: A sampling-resampling perspective. **The American Statistician**, v.46, n.2, p.84–88, 1992.



Parte X

Matemática Aplicada à Física

## Matemática intervalar com método de mínimos quadrados no tratamento de incerteza de dados experimentais com uso de software educacional

*Tobias A. S. de Almeida*

*Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
tobias\_aguiar01@hotmail.com*

*Fabiana T. Santana*

*Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
fabianasantana@ect.ufrn.br*

**Resumo:** O presente trabalho retrata a incerteza de dados experimentais do tipo  $(t, x(t))$ , obtidos em uma aula prática da disciplina Física Experimental I, pondo-se em evidência a maneira clássica de representá-los de acordo com a Teoria de Erros. Ademais, é proposto o uso da Matemática Intervalar, que utiliza os intervalos reais para guardar a informação. O método dos Mínimos Quadrados por meio da Álgebra Linear foi desenvolvido no trabalho para ser aplicado no ajuste dos dados e resolução dos sistemas lineares correspondentes aos extremos inferiores e superiores dos intervalos obtidos com a Matemática Intervalar, fornecendo a melhor solução para sistemas inconsistentes. No caso, é encontrada a função que melhor descreve o movimento de um carro com aceleração constante sob um trilho de ar inclinado, através da resolução de um sistema linear relativamente simples, sendo implementada a Janela CAS do software educacional GeoGebra. Com isso, os resultados obtidos a partir dos dados da prática experimental podem mostrar que associar ao método de solução clássico, desenvolvido no software Pasco Capstone, o método dos Mínimos Quadrados aplicado pelo software GeoGebra torna a solução mais próxima da realidade, por conta das análises realizadas.

**Palavras-chave:** Ajuste de Dados. GeoGebra. Matemática Aplicada à Física. Mínimos Quadrados.

### Introdução

O processo de Mínimos Quadrados fornece a melhor solução aproximada para sistemas lineares inconsistentes (ANTON, 2001). Existem algumas formas de abordar e desenvolver este método, porém, aqui ele é tratado via Álgebra Linear, pois posteriormente, o mesmo será aplicado no problema de ajuste de dados utilizando sistemas lineares. Neste problema supõe-se que uma sequência de dados satisfazem uma certa equação  $y = f(x)$ , onde  $f$  pode ser escolhida de acordo com a disposição dos dados, obtendo-se assim um sistema inconsistente.

Pela Álgebra Linear, um sistema  $A \vec{x} = \vec{b}$ , onde  $\vec{x}$  é o vetor coluna constituído pelas variáveis reais  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , é consistente se, e somente se, o vetor coluna  $\vec{b}$ , de termos independentes, é combinação linear dos vetores coluna de  $A$ , constituídos pelos coeficientes das variáveis (ANTON, 2001). Supondo que  $W$  é o espaço-coluna de  $A$ , o sistema  $A \vec{x} = \vec{b}$  será inconsistente quando  $\vec{b} \notin W$ . Neste caso, a melhor solução para o problema será aquela obtida substituindo  $\vec{b}$  pelo vetor de  $W$  que mais se aproxima dele. Este vetor é exatamente a projeção de  $\vec{b}$  em  $W$ , denotada por  $proj_W \vec{b}$ , pois produzirá o erro  $\|\vec{b} - proj_W \vec{b}\|$  mínimo. A solução obtida por esse método é a melhor solução aproximada para o problema e conhecida por solução por Mínimos Quadrados.

A Figura 1 tenta ilustrar a situação em que  $\vec{b} \notin W$ . Pelas propriedades de projeção ortogonal, o vetor  $\vec{e} = \vec{b} - proj_W \vec{b}$  é ortogonal a  $W$ . Por outro lado, considerando alguns resultados envolvendo os espaços fundamentais espaço-nulo, espaço-linha e espaço-coluna da matriz  $A$ , (ANTON, 2001), tem-se que o espaço-coluna de  $A$  e o espaço-nulo de  $A^T$  são ortogonais entre si, de onde pode-se concluir-se que

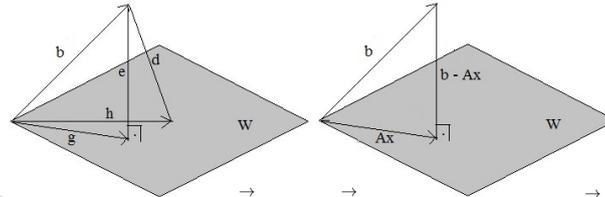


Figura 1: No gráfico da esquerda,  $\vec{g} = \text{proj}_W \vec{b}$ . No gráfico da direita,  $A\vec{x} = \text{proj}_W \vec{b}$ .

$\vec{b} - \text{proj}_W \vec{b}$  é um vetor do espaço nulo de  $A^T$ . Logo,  $A^T(\vec{b} - \text{proj}_W \vec{b}) = \vec{0}$  e como  $A\vec{x} = \text{proj}_W \vec{b}$ , substituindo na equação  $A^T(\vec{b} - \text{proj}_W \vec{b}) = \vec{0}$  a expressão  $\vec{b} - \text{proj}_W \vec{b}$  por  $\vec{b} - A\vec{x}$ , tem-se  $A^T(\vec{b} - A\vec{x}) = \vec{0}$  que resulta no sistema

$$A^T A \vec{x} = A^T \vec{b} \quad (1)$$

O sistema da equação (1), conhecido por sistema auxiliar, fornece a melhor solução  $\vec{x}$  para  $A\vec{x} = \vec{b}$ .

## Matemática intervalar

Um intervalo real  $X = [\underline{x}, \bar{x}]$  é constituído por todos os números reais compreendidos entre  $\underline{x}$  e  $\bar{x}$ . O conjunto desses intervalos é denotado por  $\mathbb{IR}$  e a aritmética mais comum para operar com esses elementos, introduzida por Moore (1966), define para todos  $X = [\underline{x}, \bar{x}], Y = [\underline{y}, \bar{y}] \in \mathbb{IR}$  as operações  $X + Y = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}]; X - Y = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}]; X \times Y = [\min\{\underline{x}\cdot\underline{y}, \underline{x}\cdot\bar{y}, \bar{x}\cdot\underline{y}, \bar{x}\cdot\bar{y}\}, \max\{\underline{x}\cdot\underline{y}, \underline{x}\cdot\bar{y}, \bar{x}\cdot\underline{y}, \bar{x}\cdot\bar{y}\}]$  e  $\frac{X}{Y} = X \times Y^{-1} = [\min\{\frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\bar{y}}, \frac{\bar{x}}{\underline{y}}, \frac{\bar{x}}{\bar{y}}\}, \max\{\frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\bar{y}}, \frac{\bar{x}}{\underline{y}}, \frac{\bar{x}}{\bar{y}}\}]$ , desde que  $0 \notin Y$ .

Um vetor intervalar, denotado por  $x^I$ , é definido por  $x^I = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  ou  $x^I = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]^T$ , onde  $X_i \in \mathbb{IR}$ . Se  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  é um vetor real, então  $x \subset x^I$  se  $x_i \in X_i$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ . O vetor intervalar pode ser interpretado como uma matriz intervalar de uma linha e  $n$  colunas. Generalizando, uma matriz intervalar de  $m$  linhas e  $n$  colunas é definida por  $A^I = (A_{ij})_{m \times n}$ , onde  $A_{ij} \in \mathbb{IR}$ , para todo  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$  e o conjunto desses elementos será denotada por  $\mathbb{IM}_{m \times n}$ . Se  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  é uma matriz real, então  $A \subset A^I$  quando  $a_{ij} \in A_{ij}$  para todo  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ , (Hansen, 2003).

Um sistema intervalar é definido por  $A^I x^I = b^I$ , onde  $A^I = (A_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} [A_{11}, \bar{A}_{11}] & \dots & [A_{1n}, \bar{A}_{1n}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [A_{m1}, \bar{A}_{m1}] & \dots & [A_{mn}, \bar{A}_{mn}] \end{bmatrix}$

é a matriz intervalar correspondente aos coeficientes das variáveis,  $x^I = [[\underline{x}_1, \bar{x}_1] \ \dots \ [\underline{x}_n, \bar{x}_n]]^T$  é um vetor intervalar que representa as variáveis e  $b^I = [[\underline{b}_1, \bar{b}_1] \ \dots \ [\underline{b}_m, \bar{b}_m]]^T$  é o vetor intervalar correspondente aos termos independentes do sistema.

Os sistemas  $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$  e  $\bar{A} \bar{x} = \bar{b}$  são conhecidos por sistemas ínfimo e supremo de  $A^I x^I = b^I$ , onde  $\underline{A}$  é a matriz real constituída pelos extremos inferiores  $\underline{A}_{ij}$ ,  $\underline{b}$  é um vetor real constituído pelos extremos inferiores  $\underline{b}_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  e  $\underline{x}$  é o vetor constituído pelos extremos inferiores  $\underline{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  da variável  $x^I$ . Para o sistema  $\bar{A} \bar{x} = \bar{b}$ , os termos  $\bar{A}$ ,  $\bar{x}$  e  $\bar{b}$  são definidos analogamente utilizando os extremos superiores dos respectivos intervalos. Aplicando a equação (1) nos sistemas ínfimo e supremo, obtém-se a solução  $x^I = [\underline{x}, \bar{x}]$ .

## Experimento físico para obtenção da função horária do espaço em um movimento retilíneo uniformemente variado

Deseja-se encontrar a melhor função horária do espaço  $x(t) = x_0 + v_0t + \frac{a}{2}t^2$  que ajusta o conjunto de dados  $(0.211, 0.25)$ ,  $(0.391, 0.3)$ ,  $(0.527, 0.35)$ ,  $(0.710, 0.4)$ ,  $(0.918, 0.5)$ ,  $(1.080, 0.6)$ ,  $(1.393, 0.8)$  e  $(1.639, 1)$ , do tipo  $(t, x(t))$ , obtidos de uma prática experimental realizada em um laboratório de Física que consistiu em analisar o movimento de um carro que se movia livremente com aceleração constante sobre um trilho de ar inclinado, como ilustrado na Figura 2.

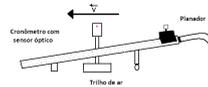


Figura 2: Trilho de ar inclinado.

Utilizando o software Pasco Capstone, a solução do problema por ajuste de dados, considerando uma função quadrática, foi a função

$$x(t) = (0.226 \pm 0.011) + (0.0924 \pm 0.027)t + (0.231 \pm 0.014)t^2 \quad (2)$$

como ilustra a Figura 3.

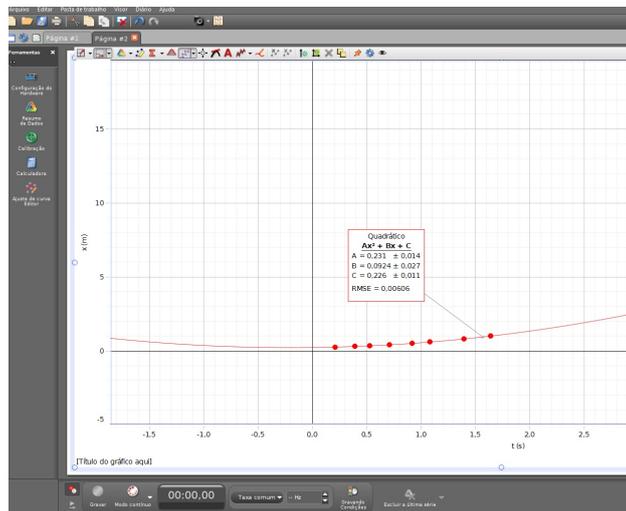


Figura 3: Ajuste de dados no software Pasco Capstone.

Por outro lado, usando a Matemática Intervalar, considerou-se uma incerteza de  $\delta_1 = 0.01$  e  $\delta_2 = 0.01$  para as medidas do tempo e espaço, respectivamente, obtendo-se os dados intervalares  $[t^i \ s(t)^i]^T$  expressos pelos vetores  $[[0.201, 0.221] [0.24, 0.26]]^T$ ,  $[[0.381, 0.401] [0.29, 0.31]]^T$ ,  $[[0.517, 0.537] [0.34, 0.36]]^T$ ,  $[[0.700, 0.720] [0.39, 0.41]]^T$ ,  $[[0.908, 0.928] [0.49, 0.51]]^T$ ,  $[[1.070, 1.090] [0.59, 0.61]]^T$ ,  $[[1.383, 1.403] [0.79, 0.81]]^T$  e  $[[1.629, 1.649] [0.99, 1.01]]^T$ .

Os sistemas ínfimos e supremos, suas respectivas equações matriciais, obtidos substituindo os extre-

mos inferiores e superiores de  $[t^l s(t)^l]^T$  em  $s(t) = bt^2 + v_0t + s_0$ , onde  $b = \frac{a}{2}$ , são:

$$\underline{S} : \begin{cases} 0.040401b + 0.201v_0 + s_0 = 0.24 \\ 0.145161b + 0.381v_0 + s_0 = 0.29 \\ 0.267289b + 0.517v_0 + s_0 = 0.34 \\ 0.49b + 0.700v_0 + s_0 = 0.39 \\ 0.824464b + 0.908v_0 + s_0 = 0.49 \\ 1.1449b + 1.070v_0 + s_0 = 0.59 \\ 1.912689b + 1.383v_0 + s_0 = 0.79 \\ 2.653641b + 1.629v_0 + s_0 = 0.99 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0.040401 & 0.201 & 1 \\ 0.145161 & 0.381 & 1 \\ 0.267289 & 0.517 & 1 \\ 0.49 & 0.700 & 1 \\ 0.824464 & 0.908 & 1 \\ 1.1449 & 1.070 & 1 \\ 1.912689 & 1.383 & 1 \\ 2.653641 & 1.629 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} v_0 \\ s_0 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.24 \\ 0.29 \\ 0.34 \\ 0.39 \\ 0.49 \\ 0.59 \\ 0.79 \\ 0.99 \end{bmatrix}}_b \quad (3)$$

e

$$\bar{S} : \begin{cases} 0.048841b + 0.221v_0 + s_0 = 0.26 \\ 0.160801b + 0.401v_0 + s_0 = 0.31 \\ 0.288369b + 0.537v_0 + s_0 = 0.36 \\ 0.5184b + 0.720v_0 + s_0 = 0.41 \\ 0.861184b + 0.928v_0 + s_0 = 0.51 \\ 1.1881b + 1.090v_0 + s_0 = 0.61 \\ 1.968409b + 1.403v_0 + s_0 = 0.81 \\ 2.719201b + 1.649v_0 + s_0 = 1.01 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0.048841 & 0.221 & 1 \\ 0.160801 & 0.401 & 1 \\ 0.288369 & 0.537 & 1 \\ 0.5184 & 0.720 & 1 \\ 0.861184 & 0.928 & 1 \\ 1.1881 & 1.090 & 1 \\ 1.968409 & 1.403 & 1 \\ 2.719201 & 1.649 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_0 \\ s_0 \end{bmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.26 \\ 0.31 \\ 0.36 \\ 0.41 \\ 0.51 \\ 0.61 \\ 0.81 \\ 1.01 \end{bmatrix}}_{\bar{b}} \quad (4)$$

A Figura 4 ilustra o esboço dos extremos dos dados intervalares realizado na Janela CAS do GeoGebra. As sintaxes empregadas na Janela CAS podem ser vistas em (TRINDADE, 2017). Este software também foi utilizado para implementar o método dos Mínimos Quadrados para solucionar os sistemas (5) e (6) através da resolução dos respectivos sistemas auxiliares  $\underline{A}^T \underline{A} \underline{x} = \underline{A}^T \underline{b}$  e  $\bar{A}^T \bar{A} \bar{x} = \bar{A}^T \bar{b}$ .

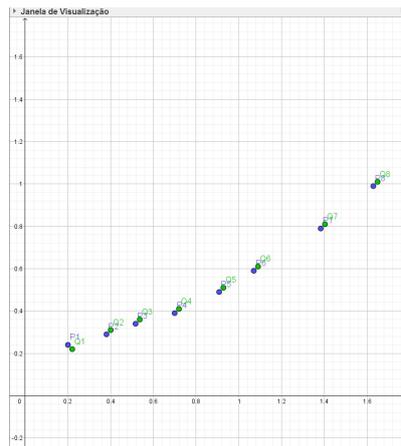


Figura 4: Os pontos  $P_i$  e  $Q_i$  representam a extremidades inferior e superior dos dados intervalares.

A implementação dos sistemas auxiliares  $\underline{A}^T \underline{A} \underline{x} = \underline{A}^T \underline{b}$  e  $\bar{A}^T \bar{A} \bar{x} = \bar{A}^T \bar{b}$  na Janela CAS do GeoGebra, ilustrada na Figura 5, forneceu os seguintes sistemas e soluções:

$$\underline{S} : \begin{cases} 13.025b + 9.4863v_0 + 7.4785s_0 = 5.5514 \\ 9.4863b + 7.4785v_0 + 6.789s_0 = 4.389 \\ 7.4785b + 6.789v_0 + 8s_0 = 4.12 \end{cases} \Rightarrow \underline{s}(t) = 0.2312t^2 + 0.0971t + 0.2165 \quad (5)$$

e

$$\bar{S}: \begin{cases} 13.802b + 9.94323v + 7.7533s_0 = 5.8837 \\ 9.9432b + 7.7533v + 6.949s_0 = 4.6104 \\ 7.7533b + 6.949v + 8s_0 = 4.28 \end{cases} \Rightarrow \bar{s}(t) = 0.2312t^2 + 0.0878t + 0.2346 \quad (6)$$

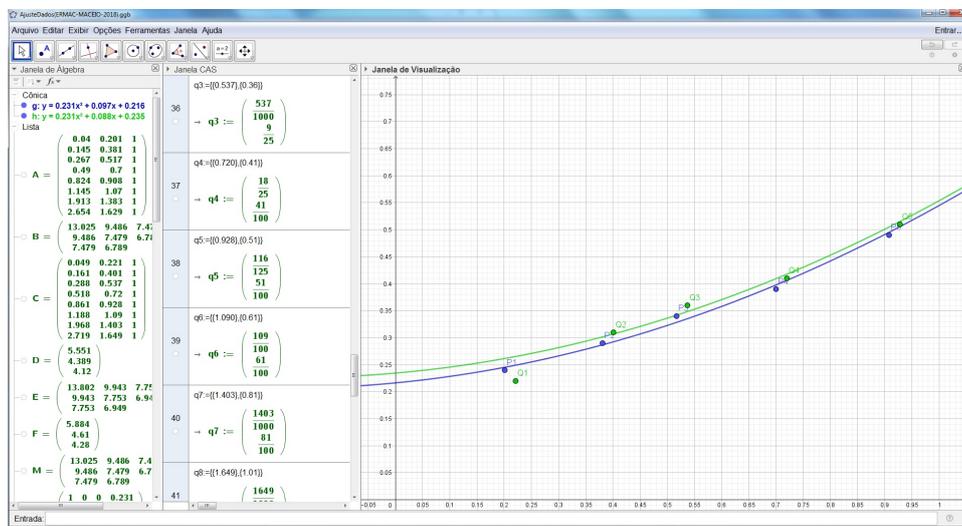


Figura 5: Solução ínfima e suprema obtida por Mínimos Quadrados no software GeoGebra.

O ajuste de dados através do processo de Mínimos Quadrados, utilizando a Álgebra Linear, aplicado nos sistemas (5) e (6), forneceu a solução intervalar

$$[\underline{x}(t), \bar{x}(t)] = [0.2165, 0.2346] + [0.0971, 0.0878]t + [0.2312, 0.2312]t^2 \quad (7)$$

Utilizando a notação

$$[x_1(t), x_2(t)] = [0.215, 0.237] + [0.0654, 0.1194]t + [0.217, 0.245]t^2 \quad (8)$$

para representar a solução  $x(t) = (0.226 \pm 0.011) + (0.0924 \pm 0.027)t + (0.231 \pm 0.014)t^2$ , obtida com o software Pasco Capstone na equação (2), pode-se observar que os coeficientes  $x_0$ ,  $v$  e  $b$ , correspondentes à função  $x(t) = x_0 + vt + bt^2$ , apresentam uma amplitude de 0.022, 0.054 e 0.028, respectivamente.

Já os coeficientes da solução intervalar  $[\underline{x}(t), \bar{x}(t)] = [0.2165, 0.2346] + [0.0971, 0.0878]t + [0.2312, 0.2312]t^2$ , expressa na equação (7), obtida por Mínimos Quadrados em função da Álgebra Linear, apresentam uma amplitude de 0.0181, 0.0093 e 0, respectivamente. Isto é, existe uma exatidão em relação à concavidade da parábola, correspondente ao coeficiente  $b$ , e uma pequena incerteza para os coeficientes  $x_0$  e  $v$ .

Além disso, nota-se que  $[0.2165, 0.2346] \subset [0.215, 0.237]$ ,  $[0.0971, 0.0878] \subset [0.0654, 0.1194]$  e  $[0.2312, 0.2312] \subset [0.217, 0.245]$ , ou seja, a solução intervalar está contida na solução clássica, obtida com o software Pasco Capstone, possibilitando um refinamento da solução para o problema de ajuste de dados.

## Conclusões

O trabalho destaca a importância de ferramentas e abordagens que auxiliam na análise de dados experimentais. A partir do estudo dos ajustes obtidos, a aplicação da prática laboratorial mostrou que o



processo de Mínimos Quadrados fornece a melhor solução para o problema, e que associar ao método de análise tradicional, por meio do software Pasco Capstone, a abordagem utilizando-se da Álgebra Linear com o uso da janela CAS software GeoGebra é uma maneira de tornar os resultados mais confiáveis, sendo a incerteza reduzida de forma significativa nos coeficientes da função encontrada. Assim, essa ferramenta se mostrou muito eficaz e atrativa pela praticidade de edição dos dados, de implementação do método, de visualização dos dados iniciais e da solução obtida para ajustar os coeficientes da função intervalar.

## Agradecimentos

Os autores agradecem à Universidade Federal do Rio Grande do Norte pelo apoio financeiro.

## Referências

- ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- GEOGEBRA. **O que é o GeoGebra**. Disponível em: <<http://www.geogebra.org/about>>. Acesso em: 29 jul. 2017.
- HANSEN, E; WALSTER, G. W. . **Global optimization using interval analysis: revised and expanded**. Vol. 264. CRC Press, 2003.
- HOHENWARTER, M.; HOHENWARTER, J. **Ajuda GeoGebra: manual oficial da versão 3.2**. Disponível em: <<https://app.geogebra.org/help/docuPT.pdf>>. Acesso em: 29 jul. 2017.
- KOLMAN, B. **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- MOORE, R. E. **Interval Analysis**. Prentice Hall. New Jersey. 1966.
- NAGASHIMA, H. N. **Laboratório de Física I**. Disponível em: <<http://www.feis.unesp.br/Home/departamentos/fisicaequimica/relacaodocentes973>>. Acesso em: 13 de mar. de 2018.
- TRINDADE, D.; GREGÓRIO, R. **Tutorial janela CAS**. Disponível em: <<https://www.passeidireto.com/arquivo/18235763/tutorial-janela-cas-geogebra>>. Acesso em: 29 jul. de 2017.
- VUOLO, J. H. **Fundamentos da Teoria de Erros**. 2ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

## Método de mínimos quadrados por diferentes abordagens aplicado no ajuste de dados experimentais e uso de softwares

*Eulália C. Ribeiro*

*Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
eulaliaribeiro.27@hotmail.com*

*André Bessa Moreira*

*Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
abessa@ect.ufrn.br*

*Fabiana T. Santana*

*Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
fabianasantana@ect.ufrn.br*

**Resumo:** Este trabalho aborda a incerteza em dados oriundos de práticas experimentais, ressalta a forma clássica de representá-los por meio da Teoria de Erros e propõe o uso da Matemática Intervalar, a qual utiliza intervalos reais para guardar a informação. O método dos Mínimos Quadrados, por meio da Álgebra Linear, foi desenvolvido no trabalho para ser aplicado no ajuste dos dados e resolução dos sistemas lineares correspondentes aos extremos inferiores e superiores dos intervalos obtidos com a Matemática Intervalar. Esse método fornece a melhor solução para sistemas inconsistentes por meio da resolução de um sistema linear relativamente simples, que foi implementado na Janela CAS do software GeoGebra. A aplicação do estudo feito nos dados da prática experimental pode mostrar que associar ao método de solução clássico, desenvolvido no software Pasco Capstone, o método dos Mínimos Quadrados por Álgebra Linear desenvolvido no software GeoGebra é uma forma de agregar mais confiabilidade e informação à solução e às análises realizadas.

**Palavras-chave:** Ajuste de Dados. GeoGebra. Matemática Aplicada à Física. Mínimos Quadrados.

## Introdução

As ciências experimentais, como a Física e Engenharias, lidam constantemente com dados numéricos oriundos de práticas experimentais que trazem uma incerteza inerente do próprio processo de medição. Esses dados, geralmente associados a grandezas físicas, devem ser claramente interpretados e, muitas vezes, essas medidas ficam sujeitas a erros que não se pode eliminar. Por isso, neste contexto, para incluir o máximo de informação, procura-se utilizar o valor mais provável a menos de uma incerteza (NAGASHIMA, 2018).

Pode-se obter a medida de uma grandeza  $x$  de duas formas distintas. Primeiro, medindo-se a grandeza  $x$  apenas uma vez e, neste caso, a incerteza é atribuída pelo próprio equipamento utilizado que fornece o valor  $x \pm \Delta x$ . No segundo caso, realiza-se uma série de  $n$  medições para a grandeza  $x$ , considerando-se as mesmas condições, obtendo-se os valores  $x_1, \dots, x_n$  que diferem entre si por erros acidentais. Neste último caso, considera-se o valor médio  $x^*$  das medidas realizadas e o desvio médio  $\delta$ , isto é  $x^* \pm \delta$ . Neste segundo caso, o problema se torna estatístico.

Segundo Vuolo (1996), a incerteza no valor de uma grandeza  $x$  indica o quanto ela pode ser diferente do valor verdadeiro. Neste estudo, fundamentado pela Teoria de Erros, é comum utilizar probabilidades e a função gaussiana, também conhecida por função normal de erros, para descrever erros experimentais. Muitos softwares utilizados para lidar com dados experimentais já são implementados levando em conta este contexto e utilizam uma aritmética apropriada.

A teoria de ajustes de dados é, sem dúvida, uma ferramenta muito importante nas áreas experimentais que lidam com dados, uma vez que a partir das observações pretende-se estimar a função que mais precisamente descreve o problema. Por exemplo, o software Pasco Capstone, um dos mais atualizados nesta área, utiliza da Teoria de Erros para fornecer a análise de ajuste de dados com as incertezas, bastando que o usuário entre com as informações numéricas do experimento. Porém, este processo de ajuste de dados também é abordado na Matemática, particularmente na Álgebra Linear, utilizando em seu desenvolvimento o processo de Mínimos Quadrados via projeções ortogonais (KOLMAN, 2012). Este último método será enfatizado neste trabalho. Outra teoria utilizada para lidar com incertezas numéricas é a Matemática Intervalar que utiliza intervalos reais do tipo  $[\underline{x}, \bar{x}]$  para representar os dados, de tal forma que o valor verdadeiro ou esperado fica compreendido entre as extremidades  $\underline{x} = x - \delta$  e  $\bar{x} = x + \delta$ . Os números intervalares, cujo conjunto é denotado por  $\mathbb{IR}$ , foram introduzidos por Moore (1966) com o objetivo de capturar e operar com as incertezas no próprio intervalo.

Este trabalho tem por objetivo aplicar o método de Mínimos Quadrados no ajuste de dados experimentais obtidos por meio de prática experimental realizada em laboratório de Física e obter a melhor função posição em função do tempo utilizando a Álgebra Linear, a Matemática Intervalar e a Teoria de Erros. Mais especificamente, o método será todo desenvolvido segundo às definições e propriedades da Álgebra Linear, no qual será exibido um sistema linear que fornecerá a melhor função de ajuste para dados pontuais. A Matemática Intervalar será utilizada para representar as incertezas nos dados de forma intervalar, dando origem a um sistema linear intervalar que será desmembrado em um sistema ínfimo e supremo, a partir dos quais serão obtidas as soluções ínfima e suprema pelo processo de Mínimos Quadrados desenvolvido pela Álgebra Linear. O desenvolvimento do processo de ajuste de dados pela Teoria de Erros não será tratada aqui e poderá ser consultada em (VUOLO, 1996). Esta última abordagem será utilizada indiretamente através do software Pasco Capstone que a partir dos dados do experimentais retornará a função de ajuste.

Além disso, o método dos Mínimos Quadrados, via Álgebra Linear, será implementado na Janela CAS do software GeoGebra, que também será utilizado para ilustrar a distribuição dos dados e a melhor função de ajuste. As sintaxes e principais funções deste software podem ser vistos em (GeoGebra, 2017) e (HOHENWARTER; HOHENWARTER, 2017).

## Métodos de mínimos quadrados

O processo de Mínimos Quadrados fornece a melhor solução aproximada para sistemas lineares inconsistentes (ANTON, 2001). Existem algumas formas de abordar e desenvolver este método, porém, aqui ele é tratado via Álgebra Linear pois, posteriormente, o mesmo será aplicado no problema de ajuste de dados utilizando sistemas lineares. Neste problema supõe-se que uma sequência de dados satisfazem uma certa equação  $y = f(x)$ , na qual  $f$  pode ser escolhida de acordo com a disposição dos dados, obtendo-se assim um sistema inconsistente.

Pela Álgebra Linear, um sistema  $A \vec{x} = \vec{b}$ , onde  $\vec{x}$  é o vetor coluna constituído pelas variáveis reais  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , é consistente se, e somente se, o vetor coluna  $\vec{b}$ , de termos independentes, é combinação linear dos vetores coluna de  $A$ , constituídos pelos coeficientes das variáveis (ANTON, 2001). Supondo que  $W$  é o espaço-coluna de  $A$ , o sistema  $A \vec{x} = \vec{b}$  será inconsistente quando  $\vec{b} \notin W$ . Neste caso, a melhor solução para o problema será aquela obtida substituindo  $\vec{b}$  pelo vetor de  $W$  que mais se aproxima dele. Este vetor é exatamente a projeção de  $\vec{b}$  em  $W$ , denotada por  $proj_W \vec{b}$ , pois produzirá o erro  $\|\vec{b} - proj_W \vec{b}\|$  mínimo. A solução obtida por esse método é a melhor solução aproximada para o problema e conhecida por solução por Mínimos Quadrados.

A Figura 1 tenta ilustrar a situação em que  $\vec{b} \notin W$ . Pelas propriedades de projeção ortogonal, o

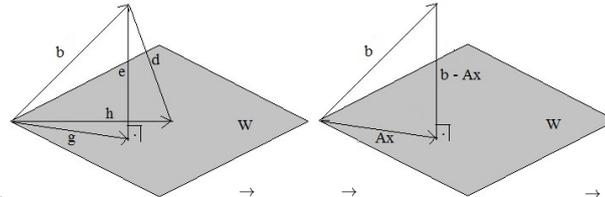


Figura 1: No gráfico da esquerda,  $\vec{g} = \text{proj}_W \vec{b}$ . No gráfico da direita,  $A\vec{x} = \text{proj}_W \vec{b}$ .

vetor  $\vec{e} = \vec{b} - \text{proj}_W \vec{b}$  é ortogonal a  $W$ . Por outro lado, considerando alguns resultados envolvendo os espaços fundamentais espaço-nulo, espaço-linha e espaço-coluna da matriz  $A$  (ANTON, 2001), tem-se que o espaço-coluna de  $A$  e o espaço-nulo de  $A^T$  são ortogonais entre si, concluindo-se que  $\vec{b} - \text{proj}_W \vec{b}$  é um vetor do espaço nulo de  $A^T$ . Logo,  $A^T(\vec{b} - \text{proj}_W \vec{b}) = \vec{0}$  e como  $A\vec{x} = \text{proj}_W \vec{b}$ , substituindo na equação  $A^T(\vec{b} - \text{proj}_W \vec{b}) = \vec{0}$  a expressão  $\vec{b} - \text{proj}_W \vec{b}$  por  $\vec{b} - A\vec{x}$ , tem-se  $A^T(\vec{b} - A\vec{x}) = \vec{0}$  que resulta no sistema

$$A^T A \vec{x} = A^T \vec{b} \quad (1)$$

O sistema da equação (1), conhecido por sistema auxiliar, fornece a melhor solução  $\vec{x}$  para  $A\vec{x} = \vec{b}$ .

## Matemática intervalar

Um intervalo real  $X = [\underline{x}, \bar{x}]$  é constituído por todos os números reais compreendidos entre  $\underline{x}$  e  $\bar{x}$ . O conjunto desses intervalos é denotado por  $\mathbb{IR}$  e a aritmética mais comum para operar com esses elementos, introduzida por Moore (1966), define para todos  $X = [\underline{x}, \bar{x}], Y = [\underline{y}, \bar{y}] \in \mathbb{IR}$  as operações  $X + Y = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}]; X - Y = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}]; X \times Y = [\min\{\underline{x}\cdot\underline{y}, \underline{x}\cdot\bar{y}, \bar{x}\cdot\underline{y}, \bar{x}\cdot\bar{y}\}, \max\{\underline{x}\cdot\underline{y}, \underline{x}\cdot\bar{y}, \bar{x}\cdot\underline{y}, \bar{x}\cdot\bar{y}\}]$  e  $\frac{X}{Y} = X \times Y^{-1} = [\min\{\frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\bar{y}}, \frac{\bar{x}}{\underline{y}}, \frac{\bar{x}}{\bar{y}}\}, \max\{\frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\bar{y}}, \frac{\bar{x}}{\underline{y}}, \frac{\bar{x}}{\bar{y}}\}]$ , desde que  $0 \notin Y$ .

Um vetor intervalar, denotado por  $x^I$ , é definido por  $x^I = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  ou  $x^I = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]^T$ , onde  $X_i \in \mathbb{IR}$ . Se  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  é um vetor real, então  $x \subset x^I$  se  $x_i \in X_i$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ . O vetor intervalar pode ser interpretado como uma matriz intervalar de uma linha e  $n$  colunas. Generalizando, uma matriz intervalar de  $m$  linhas e  $n$  colunas é definida por  $A^I = (A_{ij})_{m \times n}$ , onde  $A_{ij} \in \mathbb{IR}$ , para todo  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$  e o conjunto desses elementos será denotada por  $\mathbb{IM}_{m \times n}$ . Se  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  é uma matriz real, então  $A \subset A^I$  quando  $a_{ij} \in A_{ij}$  para todo  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ , (Hansen, 2003).

Um sistema intervalar é definido por  $A^I x^I = b^I$ , no qual  $A^I = (A_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} [A_{11}, \bar{A}_{11}] & \dots & [A_{1n}, \bar{A}_{1n}] \\ \dots & \dots & \dots \\ [A_{m1}, \bar{A}_{m1}] & \dots & [A_{mn}, \bar{A}_{mn}] \end{bmatrix}$

é a matriz intervalar correspondente aos coeficientes das variáveis,  $x^I = [[\underline{x}_1, \bar{x}_1] \ \dots \ [\underline{x}_n, \bar{x}_n]]^T$  é um vetor intervalar que representa as variáveis e  $b^I = [[\underline{b}_1, \bar{b}_1] \ \dots \ [\underline{b}_m, \bar{b}_m]]^T$  é o vetor intervalar correspondente aos termos independentes do sistema.

Os sistemas  $A \underline{x} = \underline{b}$  e  $A \bar{x} = \bar{b}$  são conhecidos por sistemas ínfimo e supremo de  $A^I x^I = b^I$ , no qual  $A$  é a matriz real constituída pelos extremos inferiores  $A_{ij}$ ,  $\underline{b}$  é um vetor real constituído pelos extremos inferiores  $\underline{b}_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  e  $\underline{x}$  é o vetor constituído pelos extremos inferiores  $\underline{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  da variável  $x^I$ . Para o sistema  $A \bar{x} = \bar{b}$ , os termos  $\bar{A}$ ,  $\bar{x}$  e  $\bar{b}$  são definidos analogamente utilizando os extremos superiores dos respectivos intervalos. Aplicando a equação (1) nos sistemas ínfimo e supremo, obtém-se a solução  $x^I = [\underline{x}, \bar{x}]$ .

## Experimento físico para obtenção da função horária do espaço em um movimento retilíneo uniforme

Deseja-se encontrar a melhor função horária do espaço  $s(t) = s_0 + vt$  que ajusta o conjunto de dados  $(1.12, 1)$ ,  $(0.95, 0.9)$ ,  $(0.88, 0.8)$ ,  $(0.84, 0.7)$ ,  $(0.82, 0.6)$ ,  $(0.63, 0.5)$ ,  $(0.37, 0.4)$  e  $(0.25, 0.3)$ , do tipo  $(t, s(t))$ , obtidos de uma prática experimental realizada em um laboratório de Física que consistiu em analisar o movimento de um carro que se movia livremente com aceleração nula sobre um trilho de ar horizontal, como ilustrado na Figura 2.



Figura 2: Trilho de ar horizontal.

Utilizando o software Pasco Capstone, a solução do problema por ajuste de dados, considerando uma função linear, foi a função

$$s(t) = (0.0670 \pm 0.073) + (0.796 \pm 0.093)t \quad (2)$$

como ilustra a Figura 3.

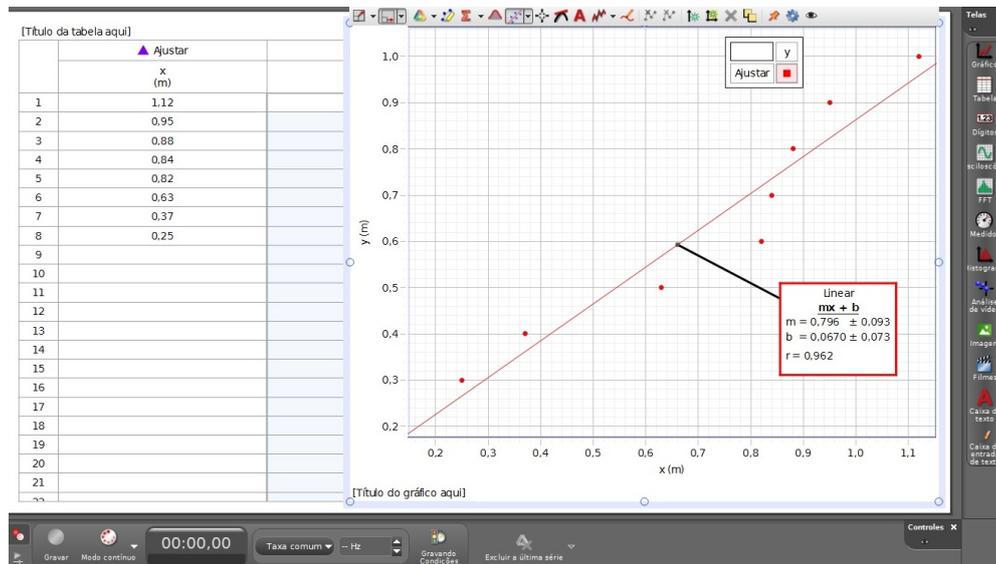


Figura 3: Ajuste de dados no software Pasco Capstone.

Por outro lado, usando a Matemática Intervalar, considerou-se uma incerteza de  $\delta_1 = 0.01$  e  $\delta_2 = 0.01$  para as medidas do tempo e espaço, respectivamente, obtendo-se os dados intervalares  $[t^i \ s(t)^i]^T$  expressos pelos vetores  $[[1.11, 1.13] \ [0.99, 1.01]]^T$ ,  $[[0.94, 0.96] \ [0.89, 0.91]]^T$ ,  $[[0.87, 0.89] \ [0.79, 0.81]]^T$ ,  $[[0.83, 0.85] \ [0.69, 0.71]]^T$ ,  $[[0.81, 0.83] \ [0.59, 0.61]]^T$ ,  $[[0.62, 0.64] \ [0.49, 0.51]]^T$ ,  $[[0.36, 0.38] \ [0.39, 0.41]]^T$  e  $[[0.24, 0.26] \ [0.29, 0.31]]^T$ .

Os sistemas ínfimos e supremos, suas respectivas equações matriciais, obtidos substituindo os extremos inferiores e superiores de  $[t^l s(t)^l]^T$  em  $vt + s_0 = s(t)$  são:

$$\underline{S}: \begin{cases} 1.11v + s_0 = 0.99 \\ 0.94v + s_0 = 0.89 \\ 0.87v + s_0 = 0.79 \\ 0.83v + s_0 = 0.69 \\ 0.81v + s_0 = 0.59 \\ 0.62v + s_0 = 0.49 \\ 0.36v + s_0 = 0.39 \\ 0.24v + s_0 = 0.29 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1.11 & 1 \\ 0.94 & 1 \\ 0.87 & 1 \\ 0.83 & 1 \\ 0.81 & 1 \\ 0.62 & 1 \\ 0.36 & 1 \\ 0.24 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} v \\ s_0 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.99 \\ 0.89 \\ 0.79 \\ 0.69 \\ 0.59 \\ 0.49 \\ 0.39 \\ 0.29 \end{bmatrix}}_{\underline{b}} \quad (3)$$

e

$$\bar{S}: \begin{cases} 1.13v + s_0 = 1.01 \\ 0.96v + s_0 = 0.91 \\ 0.89v + s_0 = 0.81 \\ 0.85v + s_0 = 0.71 \\ 0.83v + s_0 = 0.61 \\ 0.64v + s_0 = 0.51 \\ 0.38v + s_0 = 0.41 \\ 0.26v + s_0 = 0.31 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1.13 & 1 \\ 0.96 & 1 \\ 0.89 & 1 \\ 0.85 & 1 \\ 0.83 & 1 \\ 0.64 & 1 \\ 0.38 & 1 \\ 0.26 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} v \\ s_0 \end{bmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1.01 \\ 0.91 \\ 0.81 \\ 0.71 \\ 0.61 \\ 0.51 \\ 0.41 \\ 0.31 \end{bmatrix}}_{\bar{b}} \quad (4)$$

A Figura 4 ilustra o esboço dos extremos dos dados intervalares realizado na Janela CAS do GeoGebra. As sintaxes empregadas na Janela CAS podem ser vistas em (TRINDADE, 2017). Este software também foi utilizado para implementar o método dos Mínimos Quadrados para solucionar os sistemas (5) e (6) através da resolução dos respectivos sistemas auxiliares  $\underline{A}^T \underline{A} \underline{x} = \underline{A}^T \underline{b}$  e  $\bar{A}^T \bar{A} \bar{x} = \bar{A}^T \bar{b}$ .

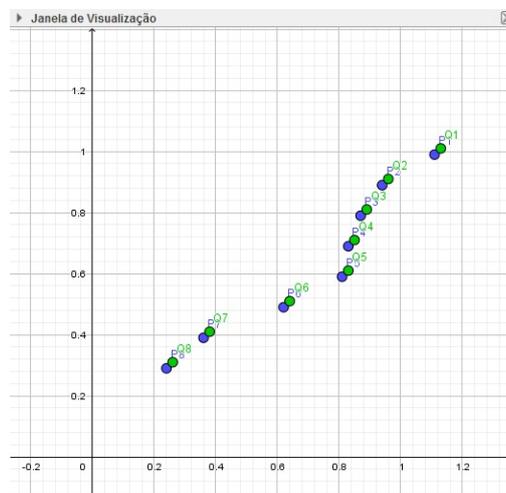


Figura 4: Os pontos  $P_i$  e  $Q_i$  representam a extremidades inferior e superior dos dados intervalares.

A implementação dos sistemas auxiliares  $\underline{A}^T \underline{A} \underline{x} = \underline{A}^T \underline{b}$  e  $\bar{A}^T \bar{A} \bar{x} = \bar{A}^T \bar{b}$  na Janela CAS do GeoGebra,

ilustrada na Figura 5, forneceu os seguintes sistemas e soluções:

$$\underline{s} : \begin{cases} 4.7892v + 5.7800s_0 = 4.1872 \\ 5.7800v + 8.0000s_0 = 5.1200 \end{cases} \Rightarrow \underline{s}(t) = 0.7959v + 0.0650 \quad (5)$$

e

$$\bar{s} : \begin{cases} 5.0236v + 5.9400s_0 = 4.4084 \\ 5.9400v + 8.0000s_0 = 5.2800 \end{cases} \Rightarrow \bar{s}(t) = 0.7959v + 0.0691 \quad (6)$$

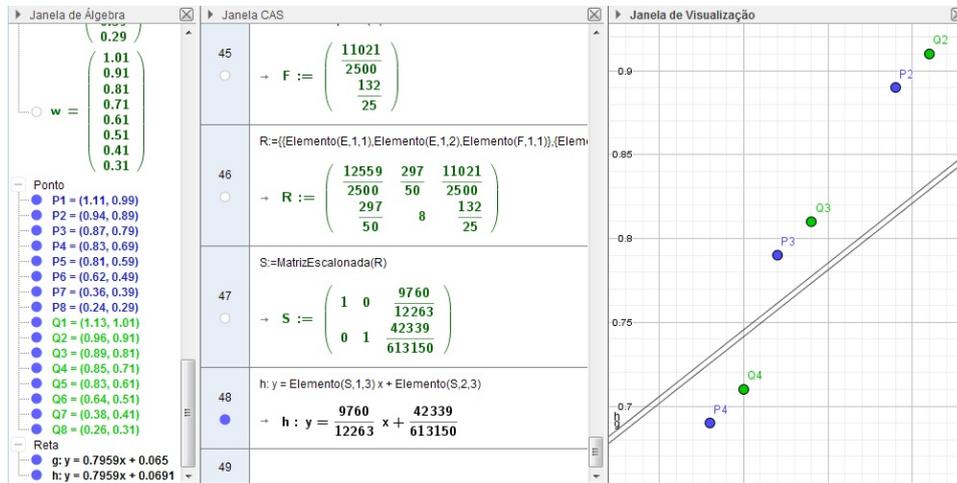


Figura 5: Solução ínfima e suprema obtida por Mínimos Quadrados no software GeoGebra.

O ajuste de dados através do processo de Mínimos Quadrados, utilizando a Álgebra Linear, aplicado nos sistemas (5) e (6), forneceu a solução intervalar

$$[\underline{s}(t), \bar{s}(t)] = [0.0650, 0.0691] + [0.7959, 0.7959]t \quad (7)$$

Utilizando a notação

$$[s_1(t), s_2(t)] = [-0.006, 0.7030] + [0.1400, 0.8890]t \quad (8)$$

para representar a solução  $s(t) = (0.0670 \pm 0.073) + (0.796 \pm 0.093)t$ , obtida com o software Pasco Capstone na equação (2), pode-se observar que os coeficientes  $s_0$  e  $v$ , correspondentes à função  $s(t) = s_0 + vt$ , apresentam uma amplitude de 0.1460 e 0.1860, respectivamente.

Já os coeficientes  $s_0$  e  $v$  da solução intervalar  $[\underline{s}(t), \bar{s}(t)] = [0.0650, 0.0691] + [0.7959, 0.7959]t$ , expressos na equação (7), obtida por Mínimos Quadrados em função da Álgebra Linear, apresentam uma amplitude de 0.0041 e 0, respectivamente. Isto é, existe uma exatidão em relação à inclinação da reta, correspondente ao coeficiente  $v$  e uma pequena incerteza para o coeficiente  $s_0$ .

Além disso, nota-se que  $[0.0650, 0.0691] \subset [-0.006, 0.7030]$  e  $[0.7959, 0.7959] \subset [0.1400, 0.8890]$ , ou seja, a solução intervalar está contida na solução clássica, obtida com o software Pasco Capstone, possibilitando um refinamento da solução para o problema de ajuste de dados.

## Conclusões

O desenvolvimento do trabalho mostrou como é importante a escolha das ferramentas e abordagens para analisar e trabalhar com dados experimentais. Em se tratando de ajuste de dados, o estudo feito e a aplicação com a prática laboratorial mostrou que o processo de Mínimos Quadrados fornece a melhor solução para o problema e que associar ao método de análise tradicional, por meio do software Pasco Capstone, a abordagem utilizando a Álgebra Linear é uma forma de agregar aos resultados maior de confiabilidade, por reduzir significativamente a incerteza nos coeficientes da função.

O uso do software GeoGebra se mostrou muito eficiente, possibilitando a implementação do método, a visualização dos dados iniciais e da função obtida para ajustá-los. O uso da Janela CAS se mostrou um atrativo do software por permitir edições na implementação mesmo após o desenvolvimento ter sido concluído.

## Agradecimentos

Os autores agradecem à Universidade Federal do Rio Grande do Norte pelo apoio financeiro.

## Referências

- ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- GEOGEBRA. **O que é o GeoGebra**. Disponível em: <<http://www.geogebra.org/about>>. Acesso em: 29 jul. 2017.
- HANSEN, E; WALSTER, G. W. . **Global optimization using interval analysis: revised and expanded**. Vol. 264. CRC Press, 2003.
- HOHENWARTER, M.; HOHENWARTER, J. **Ajuda GeoGebra**: manual oficial da versão 3.2. Disponível em: <<https://app.geogebra.org/help/docuPT.pdf>>. Acesso em: 29 jul. 2017.
- KOLMAN, B. **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- MOORE, R. E. **Interval Analysis**. Prentice Hall. New Jersey. 1966.
- NAGASHIMA, H. N. **Laboratório de Física I**. Disponível em: <<http://www.feis.unesp.br/Home/departamentos/fisicaequimica/relacaodocentes973>>. Acesso em: 13 de mar. de 2018.
- TRINDADE, D.; GREGÓRIO, R. **Tutorial janela CAS**. Disponível em: <<https://www.passeidireto.com/arquivo/18235763/tutorial-janela-cas-geogebra>>. Acesso em: 29 jul. de 2017.
- VUOLO, J. H. **Fundamentos da Teoria de Erros**. 2ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.



## Estabilidade no sentido de Lyapunov

Luciana Menezes Vasconcelos  
 Universidade Federal de Minas Gerais  
 lucianamvasc@gmail.com

**Resumo:** Neste trabalho, demos ênfase ao estudo da teoria da Estabilidade, tema este, crucial para algumas áreas, como por exemplo, a Física, a Mecânica Celeste e Sistemas Dinâmicos. Nosso estudo concentrou-se em compreender e analisar teoremas importantes na teoria da estabilidade de equilíbrios para esses sistemas tendo como base a teoria de estabilidade de Lyapunov, já que, a partir desta, é possível comprovar a estabilidade global de um ponto de equilíbrio de um sistema de equações diferenciais autônomo. Para isso, fizemos um estudo detalhado de ferramentas cruciais para o entendimento do conteúdo, a exemplo da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias enfatizando em sistemas de equações lineares. A metodologia utilizada é basicamente a pesquisa e estudo do assunto em livros relevantes para a área, dissertações, entre outros. Com este trabalho, pudemos constatar a importância deste aparato de conteúdos das Equações Diferenciais para o desenvolvimento científico devido a quantidade de pré-requisitos necessários para entendê-la e quão é significativa tal teoria dando suporte a inúmeras áreas da ciência.

**Palavras-chave:** Sistemas Hamiltonianos. Pontos de equilíbrios. Estabilidade de Lyapunov. Matemática Aplicada à Física

## Introdução

Desde o século XIX, já era conhecido que existiam determinados sistemas que apresentavam uma grande sensibilidade à mudança nas condições iniciais, porém esse fato começou a manifestar-se a partir do trabalho de Poincaré numa subárea das equações diferenciais, denominada de Mecânica Celeste. Em 1903, ele observou que uma pequena mudança no estado inicial do sistema de equações que modela um fenômeno natural, altera as configurações após um certo intervalo de tempo. A identificação da natureza de pontos que descrevem uma trajetória permite a descrição da dinâmica do sistema na vizinhança linear destes. Em geral, o estudo da estabilidade de uma solução arbitrária de um sistema qualquer, é equivalente ao estudo de pontos, que em Mecânica Celeste são chamados de pontos de equilíbrios de um sistema Hamiltoniano associado. Assim é suficiente desenvolver teorias de sistemas Hamiltonianos para estabilidade de soluções de equilíbrios.

O matemático russo Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918) demonstrou alguns teoremas que fornecem condições suficientes para assegurar a estabilidade de uma Equação Diferencial Ordinária. O método de Lyapunov nos auxilia a determinar se um equilíbrio é estável, assintoticamente estável ou instável. A ideia central consiste em encontrar uma função cujas propriedades determinam a natureza do equilíbrio.

Vale ressaltar que não existe um algoritmo para encontrar a função, mas, o método assegura que se essa função existir, podemos tirar conclusões acerca dela. Este, se aplica tanto à sistemas lineares quanto a sistemas não-lineares e, possibilita uma análise mais geral do que a concedida pelo método de linearização. Somando-se a isso, o método pode ser utilizado, na maioria das vezes, em sistemas nos quais o método de linearização é inconclusivo, uma vez que, pelo Teorema de Hartman-Grobman, quando o ponto de equilíbrio do sistema linear é não-hiperbólico, nenhuma conclusão poderá ser tirada em relação ao comportamento das soluções próximas ao ponto.

Considerando  $x_0$  um ponto de equilíbrio de  $x'(t) = f(x(t))$  onde  $x(t_0) = x_0$ , definimos  $V$  uma Função de Lyapunov para  $x_0$  (ver: SOTOMAYOR, 1979) tal que  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  é diferencial e definida num aberto  $U \ni x_0$ , satisfazendo às seguintes condições:

1.  $V(x_0) = 0$  e  $V(x) > 0 \forall x \neq x_0$
2.  $\dot{V} \leq 0$  em  $U$

A função de Lyapunov diz-se estrita quando

3.  $\dot{V} < 0$  em  $U \setminus \{x_0\}$

A análise de estabilidade de um ponto de equilíbrio está fundamentada no comportamento de uma função  $V$  ao longo das soluções de um sistema. Sendo assim, temos um critério, o qual é denominado na literatura por Critério de Lyapunov, que determina: se existir uma Função de Lyapunov  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  para  $x_0$ , então  $x_0$  é estável e, se existir uma função de Lyapunov estrita, então  $x_0$  é assintoticamente estável.

Podemos utilizar os teoremas de estabilidade de pontos de equilíbrio para analisar o comportamento das soluções de equilíbrio de diversos problemas matemáticos, em especial, o problema clássico do Pêndulo de Galileu.

A equação que descreve o movimento do pêndulo em uma equação de segunda ordem, será dada por:

$$\phi'' = -\frac{g}{L} \sin \phi$$

onde  $L$  é o comprimento da haste,  $\phi$  é o ângulo com a vertical e  $g$  é a aceleração da gravidade.

Se representarmos  $\theta = \phi'$ , podemos escrever o sistema acima como um sistema não-linear de primeira ordem com duas equações. O novo sistema possuirá infinitas soluções de equilíbrio da forma  $(\phi, \theta) = (k\pi, 0)$ , onde  $k$  é um número inteiro. Ao analisar o ponto  $(0, 0)$ , podemos constatar que o método de Linearização falha, porém, ao fazer a análise com o método de Lyapunov chegamos à conclusão que este ponto será estável. Para os pontos de equilíbrio da forma  $(\phi, \theta) = (2n\pi, 0)$ , onde  $n$  é um número inteiro, verificamos que todos eles são pontos de equilíbrios denominados centros, conforme denominação proposta por Diacu (2004). Já para os pontos da forma  $(\phi, \theta) = ((2n+1)\pi, 0)$ , são todos ditos pontos de sela, de acordo com denominação proposta por Diacu (2004).

## Conclusões

Com este trabalho pudemos compreender teoremas bastante gerais, de grande relevância na teoria da Estabilidade de Equilíbrios para sistemas Hamiltonianos que podem ser úteis aplicações em áreas que fazem uso dessa teoria.

## Referências

- DIACU, F. **Introdução à Equações Diferenciais: teoria e aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 2004.
- FIGUEIREDO, D.; NEVES, A. **Equações diferenciais aplicadas**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2002.
- PRADO, E. F. **Sobre a Existência de Função de Lyapunov**. São Paulo: Universidade Estadual Paulista, 2010.
- SANTOS, F.; VIDAL, C. **Stability of equilibrium solutions of Hamiltonian systems with  $n$ -degrees of freedom and single resonance in the critical case**, submetido para publicação.
- SOTOMAYOR, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

## Aplicações de Modelagem Matemática com um breve estudo sobre a Transformada de Fourier

*Jhonatan Brunno Ferreira da Silva Lino*  
*UFAL; Matemática lsdfbj@gmail.com*

*Taynan Lima de Moraes Rego*  
*UFAL; Eng. Civil*  
*taynan\_moraes@hotmail.com*

**Resumo:** Serão introduzidas motivações para modelagem matemática de problemas físicos. Serão apresentados alguns modelos físicos e seu processo de modelagem, dentre eles podemos citar o movimento vertical de um corpo com atuação da viscosidade do ar, lançamentos a grandes alturas, movimentos oscilatórios, ondas de torção em uma barra elástica, as equações de águas rasas, a equação de KdV e Transformada de Fourier com reconstruções de sinais.

**Palavras-chave:** 01. Matemática Aplicada à Física, 02. Modelagem Matemática e Aplicações, 03. Equações de ondas, 04. Transformada de Fourier.

### Introdução

Esse trabalho será desenvolvido com o intuito de apresentar estudos sobre modelos empíricos e teóricos, bem como comparações e analogias entre os mesmos, acerca de movimento de partículas em geral e corpos rígidos no espaço.

Nos mesmos, apresentaremos o conceito teórico básico para o entendimento dos modelos empíricos e a partir deles passaremos a explicar como a redução das hipóteses necessárias aos mesmos mudam os modelos e podem vir a representar de maneira mais realística tais movimentos. Nestes, iremos expor as semelhanças entre os modelos e dar exemplos de onde estes podem ser aplicados. Apresentaremos conceitos básicos sobre movimentos oscilatórios e ondas, bem como alguns exemplos.

Será desenvolvido também um conceito sobre modelagem da equação da onda em águas rasas, e um estudo sobre a equação de KdV linear e não linear, com sua dedução, sua solução clássica e a solução via transformada de Fourier.

## Submissão

### Movimento de partículas em Análise Matemática 1.1-O movimento vertical de um corpo em relação à Terra.

- Restrição às “leis clássicas”.
- Esferas homogêneas.
- Origem no centro de massa da Terra.
- Um dos eixos ficará na direção do movimento e no sentido do vetor de posição relativa do corpo em relação ao centro de massa da terra.
- Distância do corpo com relação à superfície da Terra será insignificante. ( $R_T = 6,4 * 10^3 \text{ km}$ )
- Não serão consideradas forças de atrito geradas pela presença da atmosfera.
- Variações de massa dos objetos que interagem estão fora de cogitação.

Sob este conjunto de hipóteses, são suficientes duas leis para descrever o problema.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} =$$

$$-GM_T \frac{m}{R_T^2}$$

Então, definindo  $g = \frac{GM_T}{R_T^2}$  e tomando  $x(0) = x_0$  e  $\dot{x}(0) = v_0$ , obtemos como

solução da equação anterior:  $x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ . O modelo anterior não pode descrever de forma geral o movimento de objetos nas proximidades da superfície da Terra. Vamos, portanto, incluir no modelo uma força de atrito contrária ao movimento, sendo sua intensidade dada por  $F_v = -\alpha v$ , onde  $v = dx/dt$ . Nestas circunstâncias, podemos escrever a equação do movimento como:

$\frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} = -g$  Onde  $\beta = \alpha/m$ . Sob as condições iniciais definidas acima, a solução desta

equação é:  $x_\beta(t) = -\left(\frac{g}{\beta^2} + \frac{v_0}{\beta}\right) \exp(-\beta t) + x_0 + \frac{g}{\beta^2} + \frac{v_0}{\beta} - \frac{g t}{\beta}$  Veja que podemos agrupar convenientemente os termos:  $x_\beta(t) = \frac{g}{\beta^2} (1 - \beta t - \exp(-\beta t)) + \frac{v_0}{\beta} (1 - \exp(-\beta t)) + x_0$  Então, se

$\beta \rightarrow 0$  teremos:  $\lim_{\beta \rightarrow 0} x_\beta(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$  Note também que  $\frac{dx}{dt} = g \beta (\exp(-\beta t) - 1) + v_0 \exp(-\beta t)$  E como  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(-\beta t) = 0$ , conclui-se que existe uma velocidade limite  $-g/\beta$ .

assim, dependendo do valor de  $\beta$ , poderemos garantir uma queda “suave”. **1.3-**

**Lançamentos a grandes alturas** Agora, vamos eliminar a hipótese número 5, que nos limita no caso de pretender explicar o que acontece quando o corpo está a uma distância não desprezível da superfície com relação ao centro de massa da terra. Vamos supor  $x(t) \ll R_T$  para todo  $t$ , mas não desprezível. Sendo  $F(t)$  a intensidade da força de atração, então pela lei da gravitação, temos:  $F(t) = -\frac{GmM_t}{(R_T + x(t))^2}$

$$(R_T + x(t))^2 = -gm(1 + x(t)/R_T)^{-2}$$

Como estamos supondo  $x(t) \ll R_T$  pequeno, podemos aproximar

$$F(t) = -mg(1 - 2x(t)/R_T)$$

$R_T$ ) Nestas condições a equação a ser considerada é:  $d^2x/dt^2 = -g$  Que com as condições iniciais, nos fornece:  $x(t) = (x_0 - R_T) + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$  e  $x(t) = (x_0 - R_T) + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$  reagrupamos e fazemos  $R_T \rightarrow \infty$  vemos que  $\lim_{R_T \rightarrow \infty} x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ . No entanto, sem considerarmos a aproximação na lei da gravitação universal, a equação pode ser expressa na forma:  $ddt^2 y = -GM/y^2$

Onde abordada  $y(t)$  pelos métodos convencionais.  $y(t) > 0$ . Esta é uma equação com não-linear algumas em manipulações,  $y(t)$  e, portanto, chegamos não pode a ser  $d[1/2(dy/dt)^2 - gR_T/y] = 0$  Com o fato de não estarem sendo consideradas forças dissipativas, ocorre que a energia mecânica do sistema se conserva. Integrando a equação anterior o intervalo  $[0, t]$ , obtém-se

Observe qual o projétil que se escapa  $y_0 = R_T$  campo é possível gravitacional.

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 - \frac{gR_T}{y} = \text{constante}$$

$-gR_T/y$  a existência  $= \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{gR_T}{y_0}$  uma velocidade mínima a partir da Supondo que

$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$  Decorre que:  $\frac{1}{2}v_0^2 - gR_T = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 - \frac{gR_T}{y} \right] \geq 0$  Que implica necessariamente

Daí, definindo-se  $v_{esc} = \sqrt{2gR_T}$  concluímos que se  $v_0 < v_{esc}$  o projétil retornará a terra. **1.4- Movimentos oscilatórios** Entende-se por movimento oscilatório aquele que se realiza entorno de uma dada posição de equilíbrio. Caso mais simples é o de uma mola em que uma de suas extremidades está fixada e a outra está presa a um corpo cujo movimento desejamos

descrever. Considerar o movimento na presença de uma força elástica de restauração desprezando-se as forças de atrito e a massa da mola. Pela segunda lei de Newton,

temos:  $m \frac{d^2y}{dt^2}$

$$z = mg - ky$$

Com  $x(t)$  as condições iniciais,  $y(0) = y_0$  e  $\dot{y}(0) = v_0$ , a única solução que satisfaz  $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \frac{mg}{k}$  é  $x(t) = \frac{mg}{k} + A \cos \omega t + B \sin \omega t$  onde  $A = y_0 - \frac{mg}{k}$  e  $B = \frac{v_0}{\omega}$ .

$$z = v_0 \cos \omega t - kx_0 \sin \omega t$$

Onde  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  é a frequência harmônica angular simples.

Observe  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  o período das oscilações. Este tipo de movimento que  $x(t)$  pode ser expressa na forma

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta), \text{ com } A = \sqrt{(x_0 - \frac{mg}{k})^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2} \text{ e } \delta = \arcsin\left(\frac{v_0}{\omega A}\right)$$

$$y(t) = x(t) + \frac{mg}{k} = \frac{mg}{k} + A \sin(\omega t + \delta)$$

$$1 - \cos \omega t$$

Daí, para  $t$  fixado e  $\omega \rightarrow 0^+$ , obtém-se:  $\lim_{\omega \rightarrow 0} y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$

**1.5- Movimentos Oscilatórios Amortecidos** Se admitirmos a força de atrito devida à viscosidade do ar que atua no corpo, a segunda lei de Newton nos dá:  $m \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + kx = mg$

$$z = -\alpha \frac{dx}{dt} - kx$$

$$kx$$

Ou equivalentemente,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

onde  $\beta = \alpha/m$  e  $\omega^2 = k/m$ . Onde sabemos que a solução geral depende da relação entre  $\beta$  e  $\omega$ , donde temos:  $\beta > 2\omega \Rightarrow x(t) = e^{-\beta t/2} [Ae^{\gamma t} + Be^{-\gamma t}]$   $\beta = \omega \Rightarrow x(t) = e^{-\beta t/2} [At + B]$   $\beta < 2\omega \Rightarrow x(t) = e^{-\beta t/2} [A \cos(\gamma t) + B \sin(\gamma t)]$  Onde  $\gamma = \sqrt{(\beta/2)^2 - \omega^2}$  e A, B são constantes a serem determinadas a partir das condições iniciais. Veja também que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2 x_1(t) = 0$$

$$= 0 \text{ e que } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dx}{dt} = 0$$

lim

$x_{32}(t)$

$= 0$

Assim, podemos concluir que, embora qualquer movimento oscilatório amortecido devido a viscosidade de fluidos decaia exponencialmente a zero, a depender do fluido em questão, e portanto da viscosidade, o movimento pode decair mais rápido ou mais devagar.

**2.1 Ondas – Conceitos Básicos** Dizemos que “uma onda se propaga em um meio” se uma dada grandeza, associada aos pontos do espaço físico que constituem o meio, sofre mudanças no decorrer do tempo e na extensão do espaço físico. Como exemplos, podemos citar as ondas mecânicas, nas quais moléculas do meio saem do seu ponto de equilíbrio e agem sobre as moléculas vizinhas gerando um tipo de movimento progressivo, uma onda. As classificações das ondas podem ser dadas em função do número de variáveis espaciais envolvidas no movimento (unidimensionais, bidimensionais, etc...). Podendo também, serem classificadas de acordo com a direção de propagação, transversais quando o movimento se dá perpendicularmente à direção de propagação e longitudinais quando o movimento se dá na mesma direção da propagação.

**2.2 Equação em águas rasas** Vamos agora explorar com mais detalhes o modelo usualmente denominado equações de águas rasas. Tendo como motivação o estudo das ondas de água na superfície de um lago, iremos apresentar agora em outro contexto, onde o fluido ocupa uma região cuja profundidade é pequena em relação à sua extensão. É o caso de modelos globais da meteorologia, por exemplo. Para simplificar a notação, vamos considerar o campo de velocidades  $u = (u, v, w)$ . Portanto, em termos das coordenadas, essas equações se escrevem como:

<sup>e</sup> Como a pressão na água varia linearmente com a profundidade,  $p = p_0 + \rho_0 g(\eta - z)$ , onde  $p_0$  denota a pressão atmosférica (tomada como constante) na superfície do lago e o

lado direito da última equação é nulo. Assim,  $p_x = \rho_0 g \eta_x$  e  $p_y = \rho_0 g \eta_y$ , de forma que a segunda e a terceira equações do sistema anterior se reduzem a:

Como o lado direito de cada uma dessas equações são independentes da variável  $z$ , o mesmo ocorre com as componentes  $u$  e  $v$  do campo  $u$ , desde que os dados iniciais também independam de  $z$ . Nessas condições, o sistema acima pode ser simplificado ficando da seguinte maneira:

Por outro  
lado,

Como  $u$  e  $v$  independem de  
 $z$ , obtemos

Denotando  $h = \eta + h_0$  (a altura do nível da água em relação  $(x, y)$ ),  
temos

Mas como sabe-se  $(uh)_x = u_x h + u h_x$ ,  $(vh)_y = v_y h + v h_y$ ,  $h_x = \eta_x$  e  $h_y = \eta_y$ , portanto  
ficamos com

Donde, podemos concluir, que

Essa e a última equação do sistema acima são denominadas as equações de  
águas rasas, isto é

### 2.3 Solução da KdV – Parte Linear



A equação de Korteweg de Vries pode ser simplificada por constantes arbitrárias  $a_1, a_2$  e  $a_3$ , donde ficamos com:

Uma equação de terceira ordem, não linear, a partir de agora passaremos a chamar tal equação de KdV. Tomando para  $u = a_1 + a_2 U$  e efetuando as respectivas derivadas em  $x$  e  $t$  resulta que a equação de KdV se reduz a:

Nosso foco agora será para encontrar uma solução tipo onda solitária para a equação de KdV. Inicialmente introduzimos a forma de onda viajante  $u(x,t)=f(x-ct)$  que deve ter a forma de pulso e  $c>0$ . Logo,  $f(z)$ ,  $f'(z)$  e  $f''(z)$  tendem a zero quando  $z \rightarrow \pm\infty$ .

Observamos  
que:

Agora, fazemos a mudança de variável  $z=x-ct$  e introduzindo esta forma de onda viajante na equação de KdV ficamos com uma equação diferencial ordinária para  $f(z)$ ,

$$-cf + ff' + f''' = 0$$

Aplicando a integral em relação a  $z$  a ambos os membros da igualdade, obtemos: onde  $a$  é a constante de integração.

Usando a hipótese de que  $f(z)$ ,  $f''(z) \rightarrow 0$  quando  $z \rightarrow \infty$ , podemos concluir que o valor de  $a$  é exatamente zero.

Agora multiplicando a equação acima por  $f'$  ficamos

com:

Integrando em relação a  $z$ , obtemos,

Sabemos que  $f(z), f'(z) \rightarrow 0$  quando  $z \rightarrow \infty$ , pois estamos supondo que  $f$  é uma onda tipo pulso, ou seja solitária, logo, a constante de integração  $b$  é igual a zero.

Colocando o termo  $(f')^2$  em evidência, obtemos a seguinte equação:

$$3(f')^2 = (3c - f)f^2$$

Note agora que é necessário que  $f(z) < 3c, \forall z \in \mathbb{R}$ , pois queremos, pela física do problema supor também que  $f(z) > 0, \forall z \in \mathbb{R}$ . Então,  $0 < f(z) < 3c, \forall z \in \mathbb{R}$ . Segue que

Afim de facilitar nossas contas, podemos tomar a seguinte substituição,  $g^2 = 3c - f$ . Assim,

$f = 3c - g^2$  e  $f' = -2gg'$ , portanto toma a seguinte forma:

Queremos integrar mais uma vez com relação a  $z$ , usando frações parciais temos a equação (1.14) da seguinte forma:

Agora sim, estamos prontos para integrar novamente com relação a  $z$ ,

como resultado, temos  $\ln(3c+g) - \ln(3c-g) = -cz + d$ . Aplicando a função exponencial em ambos os lados da equação obtemos:

Portanto, fazendo  $f = 3c - g^2$  temos que:

Como  $d$  é arbitrário, podemos tomar-lo  $d=0$  para simplificar nossa solução, e ficamos com

Portanto a solução da equação de KdV do tipo onda solitária é

Russell observou que no experimento das ondas de translação, a velocidade com a qual a onda se desloca horizontalmente, a constante é igual a  $c$ , e pela observação feita no texto a amplitude da onda é  $3c$ .

**KdV Linear - Aplicação da Transformada de Fourier em  $\mathcal{R}$**  Vamos estudar o seguinte problema de valor inicial associado à equação de KdV linear

Tomando a transformada de Fourier com respeito a variável  $x$ , obtemos

Para cada  $\xi \in \mathbb{R}$  fixo, é de fato um problema de valor inicial para uma EDO de primeira ordem, portanto sua solução é única. Usando o fator integrante  $e^{i\xi^3 t}$ ,

Logo,

onde  $k$  é uma constante. Portanto, a solução será

Usando o Teorema 1.2.4, o lema 1.2.3 e o princípio de Duhamel, obtemos, pelo cálculo da inversa da transformada de Fourier, o seguinte

### Conclusões

Esse trabalho foi de suma importância para o enriquecimento acadêmico, devido envolver algumas áreas importantes da matemática e física, dentre eles podemos citar o estudo sobre equações diferenciais e o estudo sobre equação da onda. Esperamos que, numa futura apresentação serão apresentados modelos mais aperfeiçoados e sofisticados do apresentado nesta, pois a mesma é derivada de um projeto de pesquisa desenvolvido por nós.

### Agradecimentos

s

Agradecemos aos Professor Doutores Isnaldo Barbosa, Ali Golmakani, Viviane Oliveira e Lúcia Monteiro pela grande contribuição e incentivo que foi dada para nossa formação acadêmica e ao Professores Mestres Paulo Lemos, Sinvaldo Gama e Francisco Barros pelos excelentes cursos ministrado que auxiliaram nessa pesquisa.

### Referências

Iorio, Jr.; Rafael, J.; Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução.  
IMPA, 1988.

BRUNETTI, F. Mecânica dos fluidos. 2. ed. São Paulo:  
Pearson, 2005.

Gondar, J., L.; Cicolatti, R.; Iniciação à física Matemática: Modelagem  
de Processos e Métodos 265 de Solução



## Parte XI

# Métodos Numéricos e Aplicações

## Método de Runge Kutta na simulação da encefalopatia espongiforme bovina

*João Vitor do Nascimento*

*Universidade Federal de Alagoas - Campus Arapiraca  
vitornascimento0@gmail.com*

*Elthon Oliveira*

*Universidade Federal de Alagoas - Campus Arapiraca  
elthon@arapiraca.ufal.br*

*Samuel Albuquerque*

*Universidade Federal de Alagoas - Campus Arapiraca  
ss.albuquerque@gmail.com*

**Resumo:** Caracterizada por um longo período de incubação seguido de um rápido desenvolvimento, a Encefalopatia Espongiforme Bovina é uma doença degenerativa fatal, que causa a morte de células neurais no seu processo de desenvolvimento. Há uma pesquisa que apresenta uma equação diferencial e sua simulação para esta enfermidade. É objetivo deste trabalho aplicar o método numérico de Runge Kutta para resolução desta equação.

**Palavras-chave:** Métodos Numéricos e Aplicações. Método de Runge Kutta. Encefalopatia Espongiforme Bovina.

### Introdução

Conhecida como “mal da vaca louca”, a Encefalopatia Espongiforme Bovina (EEB) é uma doença neurodegenerativa fatal que causa uma reação auto-catalítica, matando células neurais no processo. A maioria dos mamíferos possui a proteína príon  $PrP^c$ , que se localiza na periferia das células neurais. Os príons (normalmente dobrados) são facilmente digeridos por enzimas. Porém, existe uma configuração de príons ( $PrP^{Sc}$ ) que é estável e resistente a raios gama e ultravioletas, alta temperatura e enzimas. Ela é responsável pelo desenvolvimento da doença, uma vez que uma proteína  $PrP^{Sc}$  converte  $PrP^c$  em  $PrP^{Sc}$ .

Galdino et al. (2001) realizou um estudo sobre a dinâmica da EEB. Para isso, usou equações diferenciais (EDO) e as resolveu de forma analítica. Neste trabalho é apresentado o método de Runge Kutta para solução numérica das EDO's de Galdino et al. (2001).

### Fundamentação Teórica

A EDO calculada por Galdino et al. (2001) foi obtida através da derivada da quantidade de príons infectados ( $b_i$ ) em relação ao tempo. A conversão  $PrP^c$  em  $PrP^{Sc}$  libera uma taxa de reação constante  $k_i = 0,01$ . Sendo a quantidade de  $PrP^c$  igual a  $a$ , e a quantidade de  $PrP^{Sc}$  igual a  $b_i$ , tem-se  $a = 1 - b_i$ . Assim,

$$\frac{db_i}{dt} = k_i a b_i = k_i (1 - b_i) b_i$$

Resolvendo de maneira analítica, obtém-se:

$$b_i(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{b_i^0} - 1\right) \exp(-k_i t)}$$



É usado o método de Runge Kutta para resolver a equação. Este trabalho é parte integrante de um projeto maior onde serão estudados e usados outros métodos numéricos que serão comparados entre si. O método Runge Kutta envolve a média ponderada:

$$y_{n+1} = y_n + h \left( \frac{k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}}{6} \right)$$

onde:

$$k_{n1} = f(x_n, y_n) ; k_{n2} = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n1}\right)$$

$$k_{n3} = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_{n2}\right) ; k_{n4} = f(x_n + h, y_n + hk_{n3})$$

## Metodologia

A partir da implementação do método de Runge Kutta em *script* na linguagem Python, a EDO foi resolvida e a simulação foi feita para produzir o gráfico apresentado na Figura 1(a). A verificação da corretude da solução numérica foi feita comparando os gráficos obtidos em cada abordagem.

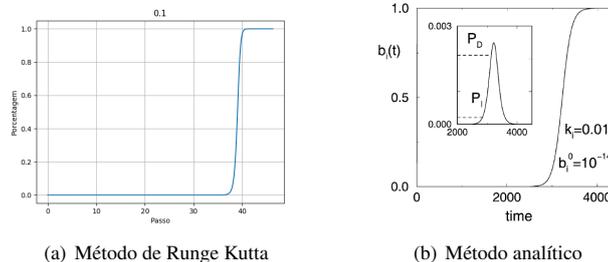


Figura 1: Gráficos obtidos neste trabalho e por Galdino et al. (2011).

## Conclusão

O trabalho apresentado faz parte de uma pesquisa que busca estudar a resolução de EDO's através de métodos numéricos e suas complexidades (do ponto de vista computacional). Foi escolhida uma EDO que modela a EEB. A partir da aplicação do método de Runge Kutta, foi possível fazer sua simulação em computador e assim comparar com os resultados do trabalho de Galdino et al. (2001). A partir das simulações, foi constatado que quanto menor o passo  $h$ , mais aproxima-se da solução analítica. Futuramente, é planejado aplicar outros métodos numéricos (e.g., Euler melhorado) para que sejam analisados e comparados entre si.

## Referências

GALDINO, M. et al. Thermo-kinetic model for prion diseases. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 295, n. 1, p. 58-63, 2001.

## Método numérico aplicado na equação diferencial da curva de deflexão da viga.

*BATISTA, Silene Costa*  
*Universidade Federal do Recôncavo da Bahia*  
*silene\_5@hotmail.com*

*ROCHA, Adson Mota*  
*Universidade Federal do Recôncavo da Bahia*  
*adson@ufrb.edu.br*

**Resumo:** O objetivo deste trabalho é apresentar um método numérico aplicado à um modelo matemático que rege a curva de deflexão da viga. Trata-se da equação diferencial de quarta ordem da linha elástica que envolve a deflexão em relação ao carregamento associadas a condições de contorno. Será utilizado o método das Diferenças Finitas a fim de obter uma solução aproximada e analisar o erro.

**Palavras-chave:** Método das Diferenças Finitas. Deflexão de viga. Problema do Reservatório.

### Introdução

Na construção civil a viga foi um dos primeiros elementos estruturais a ser estudado, conforme [2]. A viga está sujeita a tensões de flexão, bem como a esforços normais e cisalhantes e para compreender o seu comportamento, utiliza-se de meios matemáticos e leis da física, em particular, modela-se por meio de equações diferenciais ordinárias.

Com o desenvolvimento da engenharia estrutural surgiram problemas com alto nível de complexidade tornando inviável sua resolução analítica. Houve então, a necessidade de utilização de métodos numéricos a fim de obter melhor aproximação da solução desejada. O método das diferenças finitas pode ser empregado para solucionar de problemas estruturais com alto nível de precisão e segurança.

Em problemas de engenharia nem sempre as cargas são quantidades conhecidas. Existem situações em que os carregamentos dependem da deflexão. Quando isso acontece, a determinação das cargas passam a fazer parte da análise, como indica [3].

Um caso do problema de carga dependente da deflexão é o denominado de problema do reservatório, que modela uma situação de uma viga que suporta uma superfície sobre a qual se acumula um líquido. Com a deformação da viga, surge uma depressão que se enche de líquido, ver Figura 1. Verifica-se que o acúmulo de líquido causa aumento na carga, e esta aumenta a deformação da viga permitindo maior acúmulo de líquido. Desta forma, tem-se que o carregamento é proporcional a deflexão.

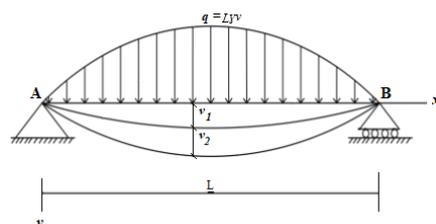


Figura 1: Viga simplesmente apoiada sob ação de um carregamento distribuído variável: problema do reservatório.

De acordo com [3], uma equação que modela o problema do reservatório é

$$\frac{d^4 v_2}{dx^4} - \frac{L\gamma}{EI} v_2(x) = \frac{L\gamma}{EI} v_1, \quad (1)$$

onde  $v_1 = v_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$  é a flecha inicial,  $v_2$  é a deflexão adicional provocada pelo peso do líquido,  $\gamma$  é o peso específico do líquido e  $EI$  é a rigidez à flexão da viga. A deflexão total  $v$  é a soma de  $v_1 + v_2$ . Nota-se que (1) é uma equação diferencial linear não homogênea de quarta ordem.

Tendo em vista que a viga é simplesmente apoiada, tem-se as seguintes condições de contorno associadas:

$$\begin{cases} v_2(0) = 0, & v_2''(0) = 0, \\ v_2(L) = 0, & v_2''(L) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

### Métodos Numéricos

Neste trabalho aplica-se o Método das Diferenças Finitas, ver referência [1], sobre a Equação (1). Usa-se uma fórmula de diferença finita que corresponde à derivada de quarta ordem na Equação (1) nos pontos interiores  $v_2, \dots, v_{n-2}$  e usando as condições de contorno (2),  $v_0 = v_n = 0$ , tem-se o sistema linear

$$\begin{cases} -2v_1 + v_2 & = 0 \\ \frac{v_{i+2} - 4v_{i+1} + 6v_i - 4v_{i-1} + v_{i-2}}{h^4} + \frac{L\gamma}{EI} v_i & = -\frac{L\gamma}{EI} v_0 \sin\left(\frac{\pi x_i}{L}\right), \quad i = 2, \dots, n-2 \\ v_{n-2} - 2v_{n-1} & = 0, \end{cases} \quad (3)$$

onde a primeira e última equação surgem das outras duas condições de contorno  $v_2''(0) = 0$  e  $v_2''(L) = 0$ . O sistema (3) tem  $n-1$  equações e  $n-1$  variáveis, com a matriz associada  $\mathbf{A}$  sendo pentadiagonal, conforme (4), e a solução do sistema é uma aproximação numérica do problema.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{h^4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 6+ah^4 & -4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -4 & 6+ah^4 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6+ah^4 & -4 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -4 & 6+ah^4 & -4 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -4 & 6+ah^4 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Na Figura 2 apresenta-se os gráficos da solução exata e numérica considerando os tamanhos de passo (a)  $h = 1$ , (b)  $h = 0.1$  e (c)  $h = 0.02$ , respectivamente  $n = 119$ ,  $n = 1199$  e  $n = 5999$ .

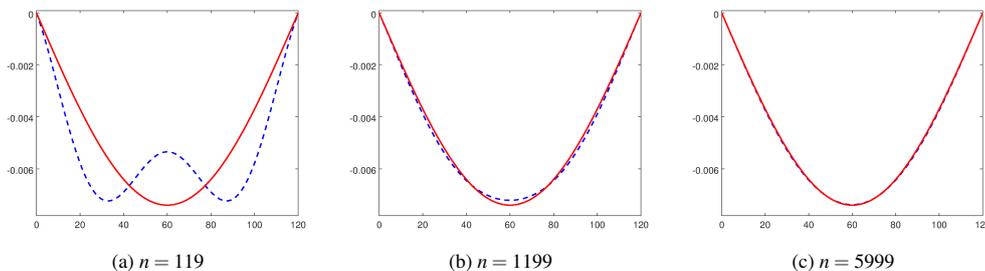


Figura 2: Gráficos da solução exata (em vermelho) e numérica (em azul) da Equação (1).

## Conclusões

O método das diferenças finitas, Equação (3), mostrou-se eficiente na determinação de aproximações de solução para Equação (1) de deflexão de vigas. Consta-se por meio da análise dos gráficos da Figura (2) que ao aumentar o número de nós  $n$ , a solução numérica se aproximou da exata. Além disso, fazendo o cálculo o erro, obtêm-se  $e = 1.6155 \times 10^{-2}$  quando  $h = 1$ ,  $e = 4.6434 \times 10^{-3}$  quando  $h = 0.1$  e  $e = 2.4412 \times 10^{-3}$  quando  $h = 0.02$ . Conclui-se, então, que a solução numérica converge para a solução exata e com ordem de aproximação  $O(h^3)$ .

Assim, em engenharia estrutural deve-se prever, com o auxílio de métodos numéricos, o comportamento das deflexões de forma que cada componente da estrutura, como a viga, atinja a situação de equilíbrio e não sofra nenhuma deformação adicional e não colapse. A deflexão  $v$  tem um valor bem definido e a viga atinge a posição de equilíbrio. Todavia, segundo [3] “deve-se ter sempre presente que a equação diferencial está limitada a pequenas deflexões e ao comportamento linearmente elástico da viga.”

## Referências

- [1] CUNHA, M. C. **Métodos Numéricos**. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2000.
- [2] SOARES, Alexandre A. B. **O Método das Diferenças Finitas Aplicado à Teoria das Vigas**. 2010. 142 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) –Universidade da Amazônia, Belém, 2010.
- [3] THIMOSHENKO, Stephen P.; GERE, James E. **Mecânica dos Sólidos: volume 1**. Tradução e Coordenação Técnica de José Rodrigues de Carvalho. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 1983.

## Método de Euler na simulação da encefalopatia espongiforme bovina

*João Vitor do Nascimento*

*Universidade Federal de Alagoas - Campus Arapiraca  
vitornascimento0@gmail.com*

*Elthon Oliveira*

*Universidade Federal de Alagoas - Campus Arapiraca  
elthon@arapiraca.ufal.br*

*Samuel Albuquerque*

*Universidade Federal de Alagoas - Campus Arapiraca  
ss.albuquerque@gmail.com*

**Resumo:** Caracterizada por um longo período de incubação seguido de um rápido desenvolvimento, a Encefalopatia Espongiforme Bovina é uma doença degenerativa fatal, que causa a morte de células neurais no seu processo de desenvolvimento. Há uma pesquisa que apresenta uma equação diferencial e sua simulação para esta enfermidade. É objetivo deste trabalho aplicar o método numérico de Euler para resolução desta equação.

**Palavras-chave:** Métodos Numéricos e Aplicações. Método de Euler. Encefalopatia Espongiforme Bovina.

### Introdução

Conhecida como “mal da vaca louca”, a Encefalopatia Espongiforme Bovina (EEB) é uma doença neurodegenerativa fatal que causa uma reação auto-catalítica, matando células neurais no processo. A maioria dos mamíferos possui a proteína príon  $PrP^c$ , que se localiza na periferia das células neurais. Os príons (normalmente dobrados) são facilmente digeridos por enzimas. Porém, existe uma configuração de príons ( $PrP^{Sc}$ ) que é estável e resistente a raios gama e ultravioletas, alta temperatura e enzimas. Ela é responsável pelo desenvolvimento da doença, uma vez que uma proteína  $PrP^{Sc}$  converte  $PrP^c$  em  $PrP^{Sc}$ .

Galdino et al. (2001) realizou um estudo sobre a dinâmica da EEB. Para isso, usou equações diferenciais (EDO) e as resolveu de forma analítica. Neste trabalho é apresentado o método de Euler para solução numérica das EDO's de Galdino et al. (2001).

### Fundamentação Teórica

A EDO calculada por Galdino et al. (2001) foi obtida através da derivada da quantidade de príons infectados ( $b_i$ ) em relação ao tempo. A conversão  $PrP^c$  em  $PrP^{Sc}$  libera uma taxa de reação constante  $k_i = 0,01$ . Sendo a quantidade de  $PrP^c$  igual a  $a$ , e a quantidade de  $PrP^{Sc}$  igual a  $b_i$ , tem-se  $a = 1 - b_i$ . Assim,

$$\frac{db_i}{dt} = k_i a b_i = k_i (1 - b_i) b_i$$

Resolvendo de maneira analítica, obtém-se:

$$b_i(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{b_i^0} - 1\right) \exp(-k_i t)}$$

É usado o método de Euler para resolver a equação. Este trabalho é parte integrante de um projeto maior onde serão estudados e usados outros métodos numéricos que serão comparados entre si.

É preciso pegar a equação juntamente com um parâmetro inicial e escolher um passo fixo:

$$y' = f(x, y) ; y(x_0) = y_0 ; h = x_1 - x_0$$

Aplicando o método, pode-se observar a seguinte relação:

$$\frac{y_1 - y_0}{h} \approx y'(x_0) \rightarrow y_1 - y_0 = hy'(x_0) \rightarrow y_1 = y_0 + hy'(x_0)$$

Substituindo a derivada pela função, obtém-se então:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

## Metodologia

Aplicando o método de Euler a EDO supracitada, obtém-se:

$$b_{i(n+1)} = b_{i(n)} + h((k_{i(n)}(1 - b_{i(n)})b_{i(n)})t_n)$$

A partir da implementação do método de Euler em *script* na linguagem Python, a EDO foi resolvida e a simulação foi feita para produzir o gráfico apresentado na Figura 1(a). A verificação da corretude da solução numérica foi feita comparando os gráficos obtidos em cada abordagem.

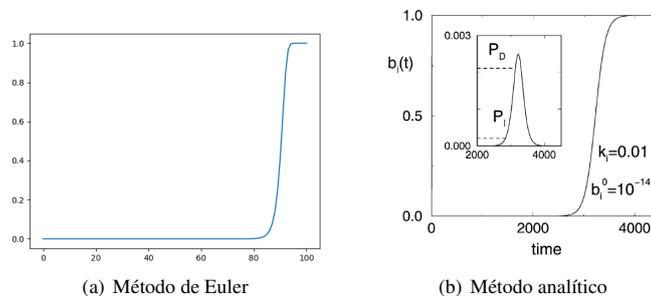


Figura 1: Gráficos obtidos neste trabalho e por Galdino et al. (2011).

## Conclusão

O trabalho apresentado faz parte de uma pesquisa que busca estudar a resolução de EDO's através de métodos numéricos e suas complexidades (do ponto de vista computacional). Foi escolhida uma EDO que modela a EEB. A partir da aplicação do método de Euler, foi possível fazer sua simulação em computador e assim comparar com os resultados do trabalho de Galdino et al. (2001). A partir das simulações, foi constatado que quanto menor o passo  $h$ , mais aproxima-se da solução analítica. Futuramente, pretende-se aplicar outros métodos numéricos (e.g., Euler melhorado) para que sejam analisados e comparados entre si.

## Referências

GALDINO, M. et al. Thermo-kinetic model for prion diseases. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 295, n. 1, p. 58-63, 2001.

**Parte XII**

**Controle e Teoria de Sistemas**

## Robust Kalman Filter in a Data Fusion Scenario

*Bruno M. C. Silva*

*Universidade Estadual de Santa Cruz; Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas  
brunocalazans.s@hotmail.com*

*Gildson Q. de Jesus*

*Universidade Estadual de Santa Cruz; Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas  
gildsonj@gmail.com*

**Abstract:** This paper is concerned with the problem of state estimation for discrete-time state-space systems in a data fusion scenario. A Kalman filter algorithm is derived. Numerical examples are included to demonstrate the performance of the proposed robust filter.

**keywords:** Kalman Filter, State-space, Discrete-time, Robust, Fusion.

### Introduction

Kalman filtering has been treated by several authors in different and elegant formulation as can be seen in Sayed (2001), Fu; Souza; and Lu (2001), Zhu; Soh and Xie (2002), Ishihara; Terra and Campos (2014). Since its inception in the early 1960s Kalman (1960), it has been applied in different fields such as finance, robotic, communications and others. Despite the advantages, it is known that the Kalman filter has its performance deteriorated when the systems are subject to parametric uncertainties. Another problem is when the systems can operate under different failures conditions or involve a multitude of measurement models. Several papers have been proposed, in the literature, to solve these problems, see for instance Gao and Harris (2002), Safari; Shabani and Dan Simon (2014), Qi; Zhang and Deng (2014), Liu; Wang and Deng (2017).

In Sayed; Al-Naffouri and Kailath (2000) was formulated and solved a least-squares problem in a data fusion scenario. This approach, to combine, in a certain optimal and robust manner, measurements that arise from a finite collection of uncertain models.

In this paper, we propose a robust Kalman filter in a data fusion scenario based on robust least-squares approach of Sayed; Al-Naffouri and Kailath (2000), which can be calculated thorough a recursive algorithm based on a discrete-time Riccati equation. Numerical examples are presented to verify the effectiveness of the proposed algorithm.

### Robust Least-squares Problem in a Data Fusion Scenario

In this section, we present the regularized robust least-squares approach in a data fusion scenario developed in Sayed; Al-Naffouri and Kailath (2000). This approach will be important to the development the robust Kalman filter in the next section.

Considered  $L$  uncertain models of the form

$$b_k = (A_k + \delta A_k)x + v_k, \quad k = 1, \dots, L, \quad (1)$$

where  $v_k$  are measurement noises and  $\delta A_k$  are uncertainties associated to parameter matrices  $A_k$ . The unknown parameter vector  $x$  is the same for all measurement  $b_k$ . This situation describes several distorted measurements of a unknown vector  $x$  arising from different uncertainty sources, as depicted in Fig. (1).

Given the measurements in (1), the problem of estimating  $x$  optimally is solved by regularized robust least-squares approach in a weighted data fusion scenario describe in the next Lemma:



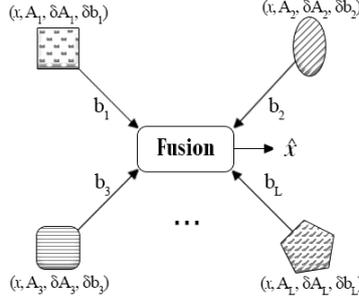


Figura 1: Data Fusion Scenario

**Lemma 0.1** *Sayed; Al-Naffouri and Kailath (2000) Consider the problem of solving*

$$\hat{x} := \arg \min_x \max_{\substack{\{\delta A_k\} \\ \{\delta b_k\}}} \left[ \|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|(A_k + \delta A_k)x - (b_k + \delta b_k)\|_{W_k}^2 \right], \quad (2)$$

$$[\delta A_k \quad \delta b_k] := G_k \Delta [N_{a,k} \quad N_{b,k}], \quad (3)$$

where  $A_k, \delta A_k$  are data matrices and its uncertainties,  $b_k$  are the measurement vectors which are assumed to be known;  $\delta b_k$  is add in the problem to account for possible distortion sources in  $b_k$ ;  $x$  is the unknown vector,  $x^T Q x$  is the regularization term and  $Q = Q^T \geq 0$  and  $W_k = W_k^T > 0$  are given weighting matrices. The solution of (2) is given by

$$\hat{x} := \left[ \hat{Q} + \sum_{k=1}^L A_k^T \hat{W}_k A_k \right]^{-1} \sum_{k=1}^L [A_k^T \hat{W}_k b_k + \hat{\lambda}_k N_{a,k}^T N_{b,k}], \quad (4)$$

where the modified weighting matrices  $\{\hat{Q}, \hat{W}_k\}$  computed from weighting matrices  $\{Q, W_k\}$ , as follow:

$$\hat{Q} := Q + \sum_{k=1}^L \hat{\lambda}_k N_{a,k}^T N_{b,k}, \quad (5)$$

$$\hat{W}_k := W_k + W_k G_k (\hat{\lambda}_k I - G_k^T W_k G_k)^\dagger G_k^T W_k, \quad (6)$$

where,  $\hat{\lambda}_k$  are non-negative scalars which  $\hat{\lambda}_k > \|G_k^T W_k G_k\|$ .

In the next section, the Lemma (0.1) will be applied to provide the robust Kalman filter in a data fusion scenario.

## Robust Filtering in a Data Fusion Scenario

Consider the discrete-time state-space system with  $L$  measurement models arising from different uncertain sources of the form

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= (F_i + \delta F_i)x_i + w_i, \quad i \geq 0, \\ z_{i,k} &= (H_{i,k} + \delta H_{i,k})x_i + v_{i,k}, \quad k = 1, \dots, L, \end{aligned} \quad (7)$$

where  $x_i \in \mathbb{R}^n$  is the state vector;  $z_{i,k} \in \mathbb{R}^p$  are the measures output;  $w_i \in \mathbb{R}^m$ , and  $v_{i,k} \in \mathbb{R}^p$  are the process and measurement noises;  $F_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , and  $H_{i,k} \in \mathbb{R}^{p \times n}$  are the known system matrices.

The uncertainties  $\delta F_i$  and  $\delta H_{i,k}$  are modeled by:

$$\begin{aligned} \delta F_i &:= M_i^f \Delta_{i,1} N_{i,f}, \\ \delta H_{i,k} &:= M_{i,h}^{(k)} \Delta_{i,2} N_{i,h}^{(k)}. \end{aligned} \quad (8)$$

where  $M_i, M_{i,h}, N_{i,f}$  and  $N_{i,h}$  are known matrices.  $\Delta_{i,1}$  and  $\Delta_{i,2}$  are arbitrary matrices.

Assuming  $\{x_0, w_i, v_{i,k}\}$ , initial condition and the process and measurement noises, are uncorrelated zero-mean random variables with second-order statistics:

$$\text{cov} \left( \begin{bmatrix} x_0^T & w_i^T & v_{i,k}^T \end{bmatrix}^T \right) := \text{diag}(P_0, Q_i \delta_{i,j}, R_{i,k} \delta_{i,j}) \quad (9)$$

where  $\delta_{i,j} = 1$ , if  $i = j$  and  $\delta_{i,j} = 0$ , if otherwise.

The recursive state estimation algorithm for the state-space system in (7) were deduced based on the solution of the following optimization problem

$$\min_{x_i, x_{i+1}} \max_{\substack{\{\delta F_i\} \\ \{\delta H_{i,k}\}}} \left[ \|x_i - \hat{x}_{i|i}\|_{P_{i|i}}^2 + \|x_{i+1} - (F_i + \delta F_i)x_i\|_{Q_{i+1}}^2 + \sum_{k=1}^L \|z_{i+1,k} - (H_{i+1,k} + \delta H_{i+1,k})x_{i+1}\|_{R_{i+1,k}}^2 \right]. \quad (10)$$

The solution of the optimization problem (10) will be presented according the following Theorem:

**Theorem 0.1** Suppose that  $k = 1, \dots, L$  the quantity of measurement equations, for all  $i \geq 0$ . The robust filtered estimate in data fusion scenario  $\hat{x}_{i|i}$ , resulting from (10), can be obtained from the following recursive algorithm:

Step 0: (Initial Condition) If  $M_{h,0}^{(k)} = 0$ , then:

$$P_{0|0} := (P_0^{-1} + \bar{H}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{H}_0)^{-1}, \hat{x}_{0|0} := P_{0|0} \bar{H}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{z}_0. \quad (11)$$

where,  $\bar{R}_0 := \text{diag} [R_{0,k}]$ .

Else, find the scalar parameters  $\lambda_{-1,k}$ , in the interval  $\lambda_{-1,k} > \|M_{h,0}^{(k)T} R_{0,k}^{-1} M_{h,0}^{(k)}\|$ , where:

$$\hat{R}_{0,k} := R_{0,k} - \hat{\lambda}_{-1,k}^{-1} M_{h,0}^{(k)} M_{h,0}^{(k)T}, \bar{R}_0 := \text{diag} [\hat{R}_{0,k}], \bar{N}_{h,0} := \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_{-1,1} N_{h,0}^{(1)}} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{-1,2} N_{h,0}^{(2)}} \\ \vdots \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{-1,L} N_{h,0}^{(L)}} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$P_{0|0} := (P_0^{-1} + \bar{H}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{H}_0 + \bar{N}_{h,0}^T \bar{N}_{h,0})^{-1}, \hat{x}_{0|0} := P_{0|0} \bar{H}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{z}_0. \quad (13)$$

Step 1: If  $M_{f,i} = 0$  and  $M_{h,i+1}^{(k)} = 0$ , then  $\hat{\lambda}_{i,k} := 0$ . Else, find the scalar parameters  $\hat{\lambda}_{i,k}$ , in the interval:

$$\hat{\lambda}_{i,k} > \lambda_{n,i}^{(k)} := \|G_k W_k G_k\|. \quad (14)$$

Step 2: If  $\hat{\lambda}_{i,k} \neq 0$ , replace the parameters  $\{Q_i, R_{i+1,k}, F_i, \bar{H}_{i+1}\}$ , by corrected parameters:

$$\hat{Q}_i := \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \mathcal{Q}_i := \sum_{k=1}^L \frac{1}{L} \hat{Q}_{i,k}^{-1}, \hat{Q}_{i,k} := Q_i - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{f,i} M_{f,i}^T, \quad (15)$$

$$\hat{\hat{R}}_{i+1} := \begin{bmatrix} \hat{R}_{i+1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \bar{\hat{R}}_{i+1} := \text{diag} [\hat{R}_{i+1,k}], \hat{R}_{i+1,k} := R_{i+1,k} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{h,i+1}^{(k)} M_{h,i+1}^{(k)T}, \quad (16)$$

$$\hat{F}_i := \begin{bmatrix} F_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,k}} N_{f,i} \end{bmatrix}, \bar{\lambda}_i := \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}], \hat{I} := \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{H}_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{H}_{i+1} \\ \bar{N}_{h,i+1} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$\hat{H}_{i+1} := \begin{bmatrix} H_{i+1,1} \\ H_{i+1,2} \\ \vdots \\ H_{i+1,L} \end{bmatrix}, \bar{N}_{h,i+1} := \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_{i,1} N_{h,i+1}^{(1)}} \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,2} N_{h,i+1}^{(2)}} \\ \vdots \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,L} N_{h,i+1}^{(L)}} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Step 3: Update  $\{P_{i|i}, \hat{x}_{i|i}\}$  for  $\{P_{i+1|i+1}, \hat{x}_{i+1|i+1}\}$ , where:

$$P_{i+1|i+1} := \left( \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T) & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{R}}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (19)$$

$$\hat{x}_{i+1|i+1} := P_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\hat{\mathcal{Q}}_i^{-1} + \hat{F}_i P_{i|i} \hat{F}_i^T) & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{R}}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ \hat{Z}_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

where,

$$Z_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{z}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{z}_{i+1} := \begin{bmatrix} z_{i+1,1} \\ z_{i+1,2} \\ \vdots \\ z_{i+1,L} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

**Proof 0.1** The cost functional of the minimization problem (10) is rewritten as

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} \\ & + \sum_{k=1}^L \left[ \begin{bmatrix} -(F_i + \delta F_i) & I \\ 0 & (H_{i+1,k} + \delta H_{i+1,k}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} - (b_k + \delta b_k) \right]^T \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1,k}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

comparing (2) and (22), we obtain the following identifications

$$\begin{aligned} x & \leftarrow \begin{bmatrix} x_i - \hat{x}_{i|i} \\ x_{i+1} \end{bmatrix}, Q \leftarrow \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, W_k \leftarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{L} Q_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1,k}^{-1} \end{bmatrix}, b_k \leftarrow \begin{bmatrix} F_i \hat{x}_{i|i} \\ z_{i+1,k} \end{bmatrix}, \\ \delta b_k & \leftarrow \begin{bmatrix} \delta F_i \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix}, \delta A_k \leftarrow \begin{bmatrix} -\delta F_i & 0 \\ 0 & \delta H_{i+1,k} \end{bmatrix}, A_k \leftarrow \begin{bmatrix} -F_i & I \\ 0 & H_{i+1,k} \end{bmatrix}, G_k \leftarrow \begin{bmatrix} \sqrt{L} M_{f,i} & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix}, \\ N_{a,k} & \leftarrow \begin{bmatrix} -N_{f,i} & 0 \\ 0 & N_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix}, N_{b,k} \leftarrow \begin{bmatrix} N_{f,i} \hat{x}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta \leftarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{L}} \Delta_{1,i} & 0 \\ 0 & \Delta_{2,i+1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (23)$$

According to (23) and (4), the optimum filtered estimate of  $x_{i+1}$  in data fusion scenario,  $\hat{x}_{i+1|i+1}$ , is obtained with the solution of the following expression:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{i+1|i+1} - \hat{x}_{i|i} \\ \hat{x}_{i+1|i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i & -\hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{I} \\ -\hat{I}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i & \hat{I}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{I} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ \hat{I}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} Z_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Pre-multiplying both sides of (24) by  $\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}^T$ , it follows that:

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i|i}^{-1} + \hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i & -\hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{I} \\ -\hat{I}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i & \hat{I}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{I} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} \hat{H}_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\hat{F}_i^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} \\ \hat{I}^T \hat{\mathcal{Q}}_i \hat{F}_i \hat{x}_{i|i} + \hat{H}_{i+1}^T \hat{\mathcal{R}}_{i+1}^{-1} Z_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

After some algebra, the filtered estimate equation  $\hat{x}_{i+1|i+1}$  is given by (20) in Step 3 with the auxiliary variable  $P_{i+1|i+1}$ , defined as (19).

## Numerical Example

In this section will be presented the numerical example, to show the effectiveness of the robust filters developed in this paper. For the test, were considered the following parameters and uncertainties:

$$\begin{aligned}
 F &= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, H_1 = [0.05 \quad 0.04 \quad 0.06], H_2 = [1.4 \quad 0.8 \quad 1], \\
 H_3 &= [1.3 \quad 0.7 \quad 0.9], R_1 = 0.18, R_2 = 0.16, R_3 = 0.17, M_f = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3 \end{bmatrix}, \\
 N_f &= \begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.13 \end{bmatrix}, M_{h,1} = [0.8 \quad 0.8 \quad 0.8], M_{h,2} = [0.7 \quad 0.7 \quad 0.7], \\
 M_{h,3} &= [0.6 \quad 0.6 \quad 0.6], N_{h,1} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}, N_{h,2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 28.18 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, N_{h,3} = \begin{bmatrix} 2.1 & 0 & 0 \\ 0 & 28.19 & 0 \\ 0 & 0 & 2.1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{26}$$

The comparative study between the robust filter proposed in Ishihara; Terra and Campos (2014), when  $E = I$ , and the robust filter in data fusion scenario.

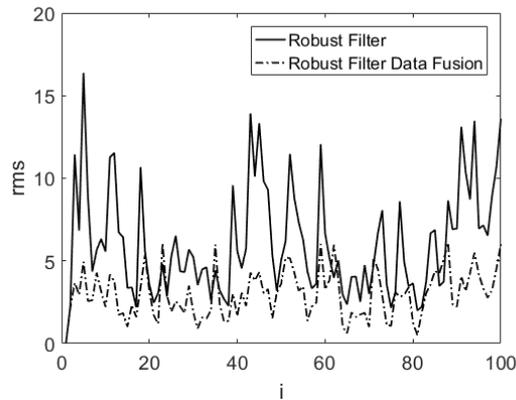


Figura 2: Comparison between Robust Filter and Robust Filter in Data Fusion Scenario.

Notice that, the parameter matrix  $H_i^{(1)}$  and its uncertainties used in the robust filter of Ishihara; Terra and Campos (2014), when  $E = I$ , is simulating a modeling error. The root mean square (rms) error estimator was simulated. The curves were obtained from  $i = 0, \dots, 100$  for each recursive step of 4000 Monte Carlo simulations. Our estimator outperforms the estimator given in Ishihara; Terra and Campos (2014) as can be seen in Figure 2.

## Conclusion

In this paper were developed the Robust Kalman filters in a data fusion scenario, for the both cases: weighted and probabilistic. The estimates were deduced based on technique proposed in Sayed; Al-Naffouri and Kailath (2000). Numerical example showed the effectiveness of this approach.

## Acknowledgments

This work was supported by CAPES and PPGMC-UESC.

## References

SAYED, A. H.; AL-NAFFOURI, T. Y.; KAILATH, T. Robust estimation for uncertain models in a data fusion. **IFAC Proceedings Volumes**, v. 33, n. 15, p. 899–904, 2000.

KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. **Journal of basic Engineering**, v. 82, n. 1, p. 35–45, 1960.

SAYED, A. H. A framework for state-space estimation with uncertain models. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 46, n. 7, p. 998–1013, 2001.

ISHIHARA, J. Y.; TERRA, M. H.; CAMPOS, J. C. T. Robust Kalman filter for descriptor systems,? **IEEE Trans. Autom. Control**, v. 51, n. 8, p. 1354–1358, 2006.

FU, M.; SOUZA, C. E.; LU, Z. Finite-horizon robust Kalman filter design,? **IEEE Trans. Signal Process**, v. 49, n. 9, p. 2103–2112, 2001.

ZHU, X.; SOH, Y. C.; XIE, L. Design and analysis of discrete-time robust Kalman filters. **Automatica**, v. 38, n. 6, p. 1069–1077, 2002.

GAO, J. B.; HARRIS, C. J. Some remarks on Kalman filters for the multisensor fusion. **Information Fusion**, v. 3, n. 3, p. 191–201, 2002.

SAFARI, S.; SHABANI, F.; DAN SIMON, H. Multirate multisensor data fusion for linear systems using Kalman filters and a neural network. **Aerospace Science and Technology**, v. 39, p. 465–471, 2014.

QI, W.; ZHANG, P.; DENG, Z. Robust weighted fusion Kalman filters for multisensor time-varying systems with uncertain noise variances. **Signal Processing**, v. 99, p. 185–200, 2014.

LIU, W.; WANG, X.; DENG, Z. Robust centralized and weighted measurement fusion Kalman estimators for uncertain multisensor systems with linearly correlated white noises. **Information Fusion**, v. 35, p. 11–25, 2017.

## Robust Filtering for Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems in a Data Fusion Scenario

*Bruno M. C. Silva*

*Universidade Estadual de Santa Cruz; Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas  
brunocalazans.s@hotmail.com*

*Gildson Q. de Jesus*

*Universidade Estadual de Santa Cruz; Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas  
gildsonj@gmail.com*

**Abstract:** This paper considers the problem of robust recursive filtering for discrete-time Markovian jump linear systems subject to unobserved chain state in data fusion scenario. The estimator presented here enables this kind of systems to operate with more than one measurement equation. Numerical examples are presented to verify the effectiveness of the proposed algorithm.

**Palavras-chave:** Robust, Markovian Systems, Data Fusion, Kalman Filter.

### Introduction

The Markov Jump Linear Systems (MJLS) are models to dynamic systems subject to abrupt changes in its parameters which are simulated by a Markov chain. The filtering theory for MJLS has received great attention in the literature as can be seen in Costa (1994), Costa and Guerra (2002), Mahmoud; Shi and Ismail (2004), Wang; Lam and Liu (2004). An important paper in this field is the recursive approach proposed in Terra; Ishihara; Jesus and Cerri (2013). In this paper the changes occasioned by the Markov chain are assumed as unobservable.

An important point to note in the filter in Terra; Ishihara; Jesus and Cerri (2013) is that this operate with a single measurement model. This makes it vulnerable in situations where this measurement model may suffer measurement failure. In this context, the data fusion approach can solve this problem, with systems that considers more than one measurement model. Several papers have been proposed, in the literature, to solve these problems to MJLS, see instance Matei and Baras (2012), Gao; Li and Duan (2014), Han and Wang (2017).

In this note, the robust filter developed in Terra; Ishihara; Jesus and Cerri (2013) is extended for an approach in data fusion scenario. This new filter is useful when the system is subject to failure or modeling errors. The problem proposed here is based on data fusion approach proposed in Sayed; Al-Naffouri and Kailath (2000). Numerical example are performed to show the effectiveness of the proposed filter.

### Problem Statement

Consider the following DMJLS:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= (F_{i,\Theta_i} + \delta F_{i,\Theta_i})x_i + G_{i,\Theta_i}w_i, \quad i \geq 0, \\ y_i^{(k)} &= (H_{i,\Theta_i}^{(k)} + \delta H_{i,\Theta_i}^{(k)})x_i + J_{i,\Theta_i}^{(k)}v_i^{(k)}, \quad k = 1, \dots, L, \end{aligned} \quad (1)$$

where, for each time instant  $i$  and jump parameter  $\Theta_i \in S$ , with  $S := 1, \dots, N$ , where  $F_{i,\Theta_i}$ ,  $G_{i,\Theta_i}$ ,  $H_{i,\Theta_i}^{(k)}$  and  $J_{i,\Theta_i}^{(k)}$  parameter matrices of appropriate dimensions. The uncertainties  $\delta F_{i,\Theta_i}$  and  $\delta H_{i,\Theta_i}^{(k)}$  are modeled by:

$$\begin{aligned} \delta F_{i,\Theta_i} &= M_{i,\Theta_i}^f \Delta_{i,\Theta_i}^1 N_{i,\Theta_i}^f, \\ \delta H_{i,\Theta_i}^{(k)} &= M_{i,\Theta_i}^{h(k)} \Delta_{i,\Theta_i}^2 N_{i,\Theta_i}^{h(k)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Suppose that,  $\Theta := \{\Theta_i, i = 0, 1, \dots\} | \Theta_i \in S\}$  is a finite state discrete-time Markov chain with  $\bar{\pi}_{i,j} := P\{\Theta_i = j\}$  and state transition probability matrix  $P = [p_{jr}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$  whose entries are given by  $p_{jr} := P\{\Theta_{i+1} = r | \Theta_i = j\}$

for all  $j, r \in S$ . Besides, as usually,  $x_i \in \mathbb{R}^n$  is the state vector,  $y_i^{(k)} \in \mathbb{R}^m$  is the outputs,  $w_i \in \mathbb{R}^p$  is the state noise,  $v_i^{(k)} \in \mathbb{R}^m$  are the outputs noises, where  $\{w_i\}$  and  $\{v_i^{(k)}\}$  are independent wide sense stationary sequences of mutually independent random variables with zero mean and covariance matrices  $U_i$  and  $V_i^{(k)}$ , respectively. Assume that  $x_0$  is a random initial state with  $\mathbb{E}\{x_0 \mathbf{1}_{\{\Theta_0=r\}}\} = 0$  and  $\mathbb{E}\{x_0 x_0^T \mathbf{1}_{\{\Theta_0=r\}}\} = \Xi_r$ , where  $\mathbf{1} : A \subset X \rightarrow \{0, 1\}$ , which is the indicator function defined as  $\mathbf{1}_{A(x)} = 1$ , if  $x \in A$  and  $\mathbf{1}_{A(x)} = 0$ , if  $x \notin A$ . And still,  $\{\Theta_i\}$  and  $x_0$  are independent of  $\{w_i\}$  and  $\{v_i^{(k)}\}$ ; and  $G_{i,j} G_{i,j}^T > 0$ , for all instant  $i$  and  $j \in S$ .

With the following definition for  $i \geq 0$  and  $r \in \{1, \dots, N\}$ ,

$$z_{i,r} := x_i \mathbf{1}_{\{\Theta_i=r\}} \in \mathfrak{R}^n \quad (3)$$

$$z_i := [z_{i,1}^T \ \dots \ z_{i,N}^T]^T \in \mathfrak{R}^{Nn}, \quad (4)$$

in Terra; Ishihara; Jesus and Cerri (2013) was defined an augmented model of (1) in terms of  $z_i$ ,

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= (\mathcal{F}_i + \delta \mathcal{F}_i) z_i + \psi_i, \quad i \geq 0, \\ y_i^{(k)} &= (\mathcal{H}_i^{(k)} + \delta \mathcal{H}_i^{(k)}) z_i + \varphi_i^{(k)}, \quad k = 1, \dots, L, \end{aligned} \quad (5)$$

where,

$$\mathcal{F}_i := [p_{jr} F_{i,r}], \delta \mathcal{F}_i := [p_{jr} \delta F_{i,r}] = \underbrace{[p_{jr} M_{i,r}^f]}_{M_{f,i}} \underbrace{\text{diag} [\Delta_{i,r}^1]}_{\Delta_{1,i}} \underbrace{\text{diag} [N_{i,r}^f]}_{N_{f,i}}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i^{(k)} &:= \begin{bmatrix} H_{i,1}^{(k)} & \dots & H_{i,\mathcal{N}}^{(k)} \end{bmatrix}, \delta \mathcal{H}_i^{(k)} := \begin{bmatrix} \delta H_{i,1}^{(k)} & \dots & \delta H_{i,\mathcal{N}}^{(k)} \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} M_{i,1}^{h(k)} & \dots & M_{i,\mathcal{N}}^{h(k)} \end{bmatrix}}_{M_{h,i}^{(k)}} \underbrace{\text{diag} [\Delta_{i,r}^2]}_{\Delta_{2,i}} \underbrace{\text{diag} [N_{i,r}^{h(k)}]}_{N_{h,i}^{(k)}}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\varphi_i^{(k)} := J_{i,\Theta_i}^{(k)} v_i^{(k)}, \quad \psi_i := \mathcal{M}_{i+1} z_i + \vartheta_i, \quad (8)$$

$$\mathcal{M}_{i+1} := \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{i+1,1} \\ \vdots \\ \mathcal{M}_{i+1,N} \end{bmatrix}, \mathcal{M}_{i+1,r} := [(1_{\{\Theta_{i+1}=r\}} - p_{jr})(F_{i,j} + \delta F_{i,j})], \quad (9)$$

$$\vartheta_i := \begin{bmatrix} 1_{\{\Theta_{i+1}=1\}} G_{i,\Theta_i} w_i \\ \vdots \\ 1_{\{\Theta_{i+1}=N\}} G_{i,\Theta_i} w_i \end{bmatrix}, \quad j, r = 1, \dots, N; \quad k = 1, \dots, L. \quad (10)$$

Besides, the variances of state and measurement augmented noises  $\psi_i$  and  $\varphi_i^{(k)}$  are given for:

$$R_i^{(k)} := \mathbb{E}\{\varphi_i^{(k)} \varphi_i^{(k)T}\} = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \bar{\pi}_{i,j} J_{i,j}^{(k)} W_i^{(k)} J_{i,j}^{(k)T}, \quad (11)$$

$$\Pi_i := \mathbb{E}\{\psi_i \psi_i^T\} = \text{diag}\{Z_r^U\} - Z_i^L + \text{diag} \left[ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} p_{jr} \bar{\pi}_{i,j} G_{i,j} U_i G_{i,j}^T \right], \quad (12)$$

where, the superscripts U and L signify upper and lower, to identify the superior and inferior limits. The first term of (12),  $Z_r^U$ , can be calculated through the following minimization problem:

$$\begin{aligned} &\min_{tr}(Z_r^U) \\ &s.t. \begin{bmatrix} Z_r^U - \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} p_{jr} F_j Z_j^U F_j^T - \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} p_{jr} \varepsilon_j M_j^f M_j^{fT} - \mathcal{Q}_j & p_{1r}^{1/2} F_1 Z_1^U N_1^{fT} & \dots & p_{\mathcal{N}r}^{1/2} F_{\mathcal{N}} Z_{\mathcal{N}}^U N_{\mathcal{N}}^{fT} \\ p_{1r}^{1/2} N_1^f Z_1^U F_1^T & \varepsilon_1 I - N_1^f Z_1^U N_1^{fT} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{\mathcal{N}r}^{1/2} N_{\mathcal{N}}^f Z_{\mathcal{N}}^U F_{\mathcal{N}}^T & 0 & \dots & \varepsilon_{\mathcal{N}} I - N_{\mathcal{N}}^f Z_{\mathcal{N}}^U N_{\mathcal{N}}^{fT} \end{bmatrix} > 0, \end{aligned} \quad (13)$$

where  $\mathcal{U}_{i,r} = \sum_{j=1}^N p_{jr} \bar{\pi}_{i,j} G_{i,j} U_i G_{i,j}^T$ . The second term of (12),  $Z_i^L$ , can be recursively computed by:

$$Z_{i+1}^L := \mathcal{F}_{i,j} (Z_i^{L-1} + \gamma_{2,i}^{-1} N_{f,i}^T N_{f,i})^{-1} \mathcal{F}_i^T - \gamma_{2,i} M_{f,i}^T M_{f,i} + \text{diag} \left[ \sum_{j=1}^N p_{jr} \bar{\pi}_{i,j} G_{i,j} U_i G_{i,j}^T \right], \quad (14)$$

where the scalar parameter  $\gamma_{2,i}$  given by:

$$\gamma_{2,i} := \tau_i \sigma_{\min} \left( p_{jr} \bar{\pi}_{i,j} G_{i,j} U_i G_{i,j}^T \right) \sigma_{\max} (M_{f,i} M_{f,i}^T)^{-1}, \text{ com } 0 < \tau_i < 1. \quad (15)$$

Defined the variances  $\Pi_i$  and  $R_i^{(k)}$ , now is possible to present the main problem of this paper. Thus, to update the filtered estimate of  $z_i$  from  $\hat{z}_{i|i}$  to  $\hat{z}_{i+1|i+1}$ , it is proposed the solution of following optimization problem, based in augmented system (5).

$$\min_{z_i, z_{i+1}} \max_{\delta \mathcal{F}_i, \delta \mathcal{H}_{i+1}^{(k)}} \left[ \|z_i - \hat{z}_{i|i}\|_{\Pi_i}^2 + \|z_{i+1} - (\mathcal{F}_i + \delta \mathcal{F}_i) z_i\|_{\Pi_{i+1}}^2 + \sum_{k=1}^L \|y_{i+1}^{(k)} - (\mathcal{H}_{i+1}^{(k)} + \delta \mathcal{H}_{i+1}^{(k)}) z_{i+1}\|_{R_{i+1}^{(k)}}^2 \right] \quad (16)$$

## Robust Filtering For DMJLS in Data Fusion Scenario

To solve the problem (16) it is necessary enunciate the following Lemma, proposed in Sayed; Al-Naffouri and Kailath (2000).

**Lemma 0.1** *Sayed; Al-Naffouri and Kailath (2000) Consider the problem of solving*

$$\hat{x} := \underset{x}{\operatorname{argmin}} \max_{\delta A, \delta b} \left[ \|x\|_Q^2 + \sum_{k=1}^L \|(A_k + \delta A_k)x - (b_k + \delta b_k)\|_{W_k}^2 \right], \quad (17)$$

$$\text{where } \begin{bmatrix} \delta A_k & \delta b_k \end{bmatrix} := H_k \Delta \begin{bmatrix} N_{a,k} & N_{b,k} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

where  $A$  is the data matrix,  $b_k$  are the measurement vectors which are assumed to be known,  $x$  is the unknown vector,  $x^T Q x$  is the regularization term and  $Q = Q^T \geq 0$  and  $W_k = W_k^T > 0$  are given weighting matrices. The solution of (18) is given by

$$\hat{x} := \left[ \hat{Q} + \sum_{k=1}^L A_k^T \hat{W}_k A_k \right]^{-1} \sum_{k=1}^L [A_k^T \hat{W}_k b_k + \hat{\lambda}_k N_{a,k}^T N_{b,k}]. \quad (19)$$

where the modified weighting matrices  $\{\hat{Q}, \hat{W}_k\}$  computed from weighting matrices  $\{Q, W_k\}$ , as follow:

$$\hat{Q} := Q + \sum_{k=1}^L \hat{\lambda}_k N_{a,k}^T N_{b,k}, \quad (20)$$

$$\hat{W}_k := W_k + W_k H_k (\hat{\lambda}_k I - H_k^T W_k H_k)^{\dagger} H_k^T W_k, \quad (21)$$

where,  $\hat{\lambda}_k$  are non-negative scalars which  $\hat{\lambda}_k > \|H^T W H\|$ .

To deduce the filtered estimate, it is necessary enunciate the following theorem.

**Theorem 0.1** *The robust filtered estimate of  $z_i$  in a data fusion scenario, given by  $\hat{z}_{i|i}$ , can be obtained by the following recursive algorithm:*

*Step 0: (Initial Condition) If  $M_{h,0}^{(k)} = 0$ , then:*

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{0|0} &:= (P_0^{-1} + \mathcal{H}_0^T \bar{R}_0^{-1} \mathcal{H}_0)^{-1}, \\ \tilde{z}_{0|0} &:= \tilde{Z}_{0|0} \mathcal{H}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{z}_0, \end{aligned} \quad (22)$$



where  $\bar{R}_0 := \text{diag} [R_{0,k}]$ .

Else, find the scalar parameters  $\hat{\lambda}_{-1,k}$ , that satisfies  $\hat{\lambda}_{-1,k} > \|M_{h,0}^{(k)T} R_{0,k}^{-1} M_{h,0}^{(k)}\|$ , where:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{0,k} &:= R_{0,k} - \hat{\lambda}_{-1,k}^{-1} M_{h,0}^{(k)} M_{h,0}^{(k)T}, \quad \bar{R}_0 := \text{diag} [\hat{R}_{0,k}], \\ \bar{N}_{h,0} &:= \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_{-1,1}} N_{h,0}^{(1)T} & \sqrt{\hat{\lambda}_{-1,2}} N_{h,0}^{(2)T} & \cdots & \sqrt{\hat{\lambda}_{-1,L}} N_{h,0}^{(L)T} \end{bmatrix}^T, \\ \bar{Z}_{0|0} &:= (P_0^{-1} + \mathcal{H}_0^T \bar{R}_0^{-1} \mathcal{H}_0 + \bar{N}_{h,0}^T \bar{N}_{h,0})^{-1}, \\ \hat{x}_{0|0} &:= \bar{Z}_{0|0} \mathcal{H}_0^T \bar{R}_0^{-1} \bar{z}_0. \end{aligned} \quad (23)$$

Step 1: If  $M_{f,i} = 0$  and  $M_{h,i+1}^{(k)} = 0$ , then  $\hat{\lambda}_{i,k} := 0$ . Else, find the scalar parameters  $\hat{\lambda}_{i,k}$ , that satisfies:

$$\hat{\lambda}_{i,k} > \lambda_{n,i}^{(k)} := \left\| \begin{bmatrix} \sqrt{LM_{f,i}^T} & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \hat{\Pi}_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1,k}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{LM_{f,i}} & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix} \right\|. \quad (24)$$

Step 2: If  $\hat{\lambda}_{i,k} \neq 0$ , replace the parameters  $\{\Pi_i, R_{i+1,k}, \bar{Z}_{i|i}, \mathcal{F}_i, \bar{\mathcal{H}}_{i+1}, I\}$ , by corrected parameters:

$$X_i := \begin{bmatrix} \Phi_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \text{ where } \Phi_i := \sum_{k=1}^L \frac{1}{L} \hat{\Pi}_{i,k}^{-1} \text{ and } \hat{\Pi}_{i,k} := \Pi_i - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{f,i} M_{f,i}^T, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &:= \begin{bmatrix} \bar{R}_{i+1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \text{ where } \bar{R}_{i+1} := \text{diag} [\hat{R}_{i+1,k}] \text{ and} \\ \hat{R}_{i+1,k} &:= R_{i+1,k} - \hat{\lambda}_{i,k}^{-1} M_{h,i+1}^{(k)} M_{h,i+1}^{(k)T}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\mathcal{F}_i := \begin{bmatrix} \mathcal{F}_i \\ \sqrt{\hat{\lambda}_{i,1}} N_{f,i} \end{bmatrix}, \text{ where } \bar{\lambda}_i := \sum_{k=1}^L [\hat{\lambda}_{i,k}], \quad \hat{I} := \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$\bar{\mathcal{H}}_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{H}}_{i+1} \\ \bar{N}_{h,i+1} \end{bmatrix}, \text{ where } \bar{\mathcal{H}}_{i+1} := [\mathcal{H}_{i+1}^{(1)T} \quad \mathcal{H}_{i+1}^{(2)T} \quad \cdots \quad \mathcal{H}_{i+1}^{(L)T}]^T \text{ and} \quad (28)$$

$$\bar{N}_{h,i+1} := \begin{bmatrix} \sqrt{\hat{\lambda}_{i,1}} N_{h,i+1}^{(1)T} & \sqrt{\hat{\lambda}_{i,2}} N_{h,i+1}^{(2)T} & \cdots & \sqrt{\hat{\lambda}_{i,L}} N_{h,i+1}^{(L)T} \end{bmatrix}^T. \quad (29)$$

Step 3: Update  $\{\bar{Z}_{i|i}, \hat{z}_{i|i}\}$  to  $\{\bar{Z}_{i+1|i+1}, \hat{z}_{i+1|i+1}\}$ , where:

$$\bar{Z}_{i+1|i+1} := \left( \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \bar{\mathcal{H}}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (X_i^{-1} + \mathcal{F}_i \bar{Z}_{i|i} \mathcal{F}_i^T) & 0 \\ 0 & Y_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \bar{\mathcal{H}}_{i+1} \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (30)$$

$$\hat{z}_{i+1|i+1} := \bar{Z}_{i+1|i+1} \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \bar{\mathcal{H}}_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (X_i^{-1} + \mathcal{F}_i \bar{Z}_{i|i} \mathcal{F}_i^T) & 0 \\ 0 & Y_{i+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i} \\ \Sigma_{i+1} \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Where,

$$\Sigma_{i+1} := \begin{bmatrix} \bar{y}_{i+1} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ where } \bar{y}_{i+1} := [y_{i+1}^{(1)T} \quad y_{i+1}^{(2)T} \quad \cdots \quad y_{i+1}^{(L)T}]^T. \quad (32)$$

**Proof 0.1** To obtain the recursive equation of the robust DMJLS filtered estimate it is necessary to apply the Lemma 0.1. First, it is needed rewrite the quadratic cost given in the problem (16), as follows:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} z_i - \hat{z}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{Z}_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_i - \hat{z}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \\ & + \sum_{k=1}^L \left[ \left( \begin{bmatrix} -(\mathcal{F}_i + \delta \mathcal{F}_i) & I \\ 0 & (\mathcal{H}_{i+1}^{(k)} + \delta \mathcal{H}_{i+1}^{(k)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_i - \hat{z}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\mathcal{F}_i + \delta \mathcal{F}_i) \hat{z}_{i|i} \\ y_{i+1}^{(k)} \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \hat{\Pi}_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \end{bmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Comparing the quadratic cost (33) with the parameters given in (19) it is obtained the following identifications:

$$\begin{aligned} x &\leftarrow \begin{bmatrix} z_i - \hat{z}_{i|i} \\ z_{i+1} \end{bmatrix}, \mathcal{Q} \leftarrow \begin{bmatrix} \bar{Z}_{i|i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, W_k \leftarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \hat{\Pi}_i^{-1} & 0 \\ 0 & R_{i+1}^{(k)-1} \end{bmatrix}, b \leftarrow \begin{bmatrix} (\mathcal{F}_i + \delta \mathcal{F}_i) \hat{z}_{i|i} \\ y_{i+1}^{(k)} \end{bmatrix}, \delta b_k \leftarrow \begin{bmatrix} \delta \mathcal{F}_i \hat{z}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \delta A_k &\leftarrow \begin{bmatrix} -\delta \mathcal{F}_i & 0 \\ 0 & \delta \mathcal{H}_{i+1}^{(k)} \end{bmatrix}, A_k \leftarrow \begin{bmatrix} -\mathcal{F}_i & I \\ 0 & \mathcal{H}_{i+1}^{(k)} \end{bmatrix}, H_k \leftarrow \begin{bmatrix} \sqrt{LM_{f,i}} & 0 \\ 0 & M_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix}, \\ N_{a,k} &\leftarrow \begin{bmatrix} -N_{f,i} & 0 \\ 0 & N_{h,i+1}^{(k)} \end{bmatrix}, N_{b,k} \leftarrow \begin{bmatrix} N_{f,i} \hat{z}_{i|i} \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta \leftarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{L}} \Delta_{1,i+1} & 0 \\ 0 & \Delta_{2,i+1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (34)$$

Considering (34) and (19), after some algebra, the filtered estimate equation  $\hat{z}_{i+1|i+1}$  is given by (31) with the auxiliary variable  $\tilde{Z}_{i+1|i+1}$ , defined as (30).

### Numerical Example

Consider the probability transition matrix, the parameter matrices, uncertainties and measurement variances, defined as

$$P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, G_1 = G_2 = \begin{bmatrix} 0.8731 & 0 \\ 0 & 0.2089 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

$$H_1^{(1)} = H_2^{(1)} = [3 \quad 0], H_1^{(2)} = H_2^{(2)} = [0.1 \quad 0], H_1^{(3)} = H_2^{(3)} = [0.2 \quad 0],$$

$$M_{f,1} = \begin{bmatrix} 0.13 & 0 \\ 0.13 & 0.13 \end{bmatrix}, M_{f,2} = \begin{bmatrix} 0.13 & 0 \\ 0 & 0.13 \end{bmatrix}, N_{f,1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}, N_{f,2} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

$$M_{h,1}^{(1)} = M_{h,2}^{(1)} = [0.39 \quad 0], M_{h,1}^{(2)} = M_{h,2}^{(2)} = [0.38 \quad 0], M_{h,1}^{(3)} = M_{h,2}^{(3)} = [0.37 \quad 0],$$

$$N_{h,1}^{(1)} = N_{h,2}^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}, N_{h,1}^{(2)} = N_{h,2}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, N_{h,1}^{(3)} = N_{h,2}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1.3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},$$

$$D_1^{(1)} = D_2^{(1)} = 0.007, D_1^{(2)} = D_2^{(2)} = 0.008, D_1^{(3)} = D_2^{(3)} = 0.006, \quad (37)$$

$$W^{(1)} = 0.1, W^{(2)} = 0.2, W^{(3)} = 0.3.$$

The comparative study between the robust filter proposed in Terra; Ishihara; Jesus and Cerri (2013) and the robust filter in data fusion scenario.

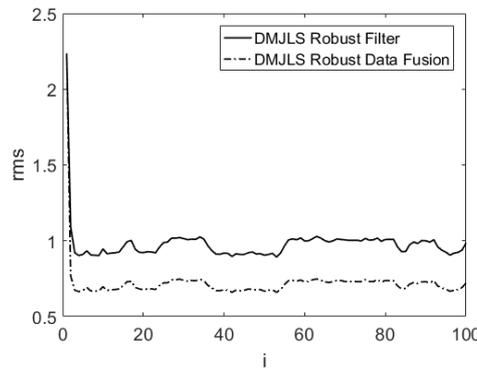


Figura 1: Comparison between Robust Filter and Robust Filter in a Data Fusion Scenario.

The parameter matrix  $H_i^{(1)}$  and its uncertainties used in the robust filter of Terra; Ishihara; Jesus and Cerri (2013) is simulating a modeling error. The root mean square (rms) error estimator was simulated. The curves were obtained from  $i = 0, \dots, 100$  for each recursive step of 4000 Monte Carlo simulations with the values of  $\Theta_i$  generated randomly. The initial condition  $x_0$  is considered Gaussian with mean  $[0.196 \quad 0.295]^T$  and variance  $\begin{bmatrix} 0.0384 & 0.0578 \\ 0.0578 & 0.870 \end{bmatrix}$ ,  $\Theta_i \in \{1, 2\}$ ,  $\pi_1(0) = 0.05$  and  $\pi_2(0) = 0.95$ . Our estimator outperforms the estimator given in Terra; Ishihara; Jesus and Cerri (2013), as can be seen in Figure (1).

### Conclusion

In this paper was developed the robust Kalman filter for discrete-time MJLS in a data fusion scenario. The estimate was deduced based on approach proposed in Sayed; Al-Naffouri and Kailath (2000) and

considers that jump parameter is not accessible. Numerical example showed the effectiveness of this approach.

### **Acknowledgments**

This work was supported by CAPES and PPGMC-UESC.

### **References**

- COSTA, O. L. V. Linear minimum mean square error estimation for discrete-time Markovian jump linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 39, n. 8, p.1685–1689, 1994.
- COSTA, O. L. V. and GUERRA, S. Robust linear filtering for discrete-time hybrid Markov linear systems. **Int. J. Control**, v. 75, n 10, p. 712–727, 2002.
- MAHMOUD, M. S.; SHI, P. and ISMAIL, A. Robust Kalman filtering for discrete-time Markovian jump systems with parameter uncertainty. **J. Comput. and Appl. Math.**, v. 169, p. 53–69, 2004.
- WANG, Z.; LAM, J. and LIU, X. Robust filtering for discrete-time Markovian jump delay systems. **IEEE Signal Process. Lett.**, v 11, n. 8, p. 659–662, 2004.
- TERRA, M. H.; ISHIHARA, J. Y.; JESUS, G.; CERRI, J. P. Robust estimation for discrete-time Markovian jump linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 58, n. 8, p. 2065–2071, 2013.
- HAN, C.; WANG, W. Optimal Markov jump linear filter for discrete-time jumping parameter systems with multi-channel observation delays and packet losses. In: **IEEE. Control Conference (CCC), 2017 36th Chinese**. [S.l.], p. 5344–5349, 2017.
- MATEI, I.; BARAS, J. S. A linear distributed filter inspired by the Markovian jump linear system filtering problem. **Automatica**, v. 48, n. 8, p. 1924–1928, 2012.
- GAO, Y.; LI, X. R.; DUAN, Z. Estimation fusion for Markovian jump linear system via data transformation. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, v.50, n. 1, p. 240–253, 2014.
- SAYED, A. H.; AL-NAFFOURI, T. Y.; KAILATH, T. Robust estimation for uncertain models in a data fusion. **IFAC Proceedings Volumes**, v. 33, n. 15, p. 899–904, 2000.



**Parte XIII**

**Matemática Aplicada à Economia e  
a Finanças**

## Calibration of local volatility surfaces with uncertain asset price: an EnKF-EnKF approach

Xu Yang

Universidade Federal de Alagoas; Instituto de Computação  
yang@ic.ufal.br

**Resumo:** In the problem of calibrating local volatility surface, the importance of considering the uncertainty of asset prices in the local volatility was firstly proposed in the work of Albani, et al (2017). The authors generalized the local volatility model by assuming that the asset prices are not certain, but not far away from the mean of the prices of the day. By applying a two-stage model, which is to calibrate the local volatility first with a given asset price, then to correct the asset price with the estimated local volatility, and so on so forth, a better local volatility and asset price can be obtained in the end of the algorithm. In both stages, they used Tikhonov regularization model. However, in this work, we propose an EnKF-EnKF model to calibrate the local volatility model with uncertainty asset prices. The results can be compared with the Tikhonov type of models.

**Palavras-chave:** Local volatility. Asset price. Ensemble Kalman filter. Tikhonov regularization.

### Introduction

In 1994, Dupire (1994) proposed the use of a *local volatility* model  $\sigma(t, S_t)$  that depends on time and the spot price  $S_t$ , which are diffuses with risk-neutral drift  $\mu_t$  and local volatility  $\sigma(t, S_t)$  according to the equation:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma(t, S_t) dZ.$$

Then Dupire's equation shows that the European vanilla option price  $C(\tau, K)$  at time  $t$  written on the stock  $S_t$ , with maturity  $T = \tau$  and strike  $K$  satisfies

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma^2(\tau, K) K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} - bK \frac{\partial C}{\partial K}, \quad \tau > 0, K \geq 0, \quad (1)$$

with initial and boundary conditions (for calls) given by

$$\begin{aligned} C(\tau = 0, K) &= (S_0 - K)^+, \\ \lim_{K \rightarrow \infty} C(\tau, K) &= 0, \\ \lim_{K \rightarrow 0} C(\tau, K) &= S_0. \end{aligned} \quad (2)$$

The *forward* problem is to solve for the solution of this partial differential equation satisfying the initial and boundary conditions. However, here we are interested in finding the volatility surface, which is  $\sigma(\tau, K)$ , such that the solution of this equation is consistent with the market options prices. This kind of problem is usually called *inverse problem*. For results of calibrating local volatility surface, see Egger and Engl (2005) and references therein.

Note that, if the parameter  $S_0$  is given, we then apply a standard transformation changing the independent variable  $K$  to the so-called *log moneyness* variable  $y = \ln(K/S_0)$ . This is followed by changing the dependent variables of the forward and inverse problems to  $u(\tau, y) = C(\tau, S_0 \exp(y))/S_0$  and  $a(\tau, y) = \frac{1}{2} \sigma^2(\tau, K)$  (we denote  $a(\tau, y)$  as local variance), respectively. We obtain the parabolic PDE with coefficients

$$-\frac{\partial u}{\partial \tau} + a \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \tau > 0, y \in \mathfrak{R}, \quad (3)$$

subject to the side conditions

$$\begin{aligned} u(\tau = 0, y) &= (1 - \exp(y))^+, \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u(\tau, y) &= 0, \\ \lim_{y \rightarrow -\infty} u(\tau, y) &= 1. \end{aligned}$$

We can write the above problem as

$$P\mathcal{U}(a) = d, \tag{4}$$

with the project matrix  $P$  (we will explain later), linear differential operator  $\mathcal{U}$  depending on  $a$  and with the right hand side  $d = d(S_0)$  as data we can observe. Thus, the forward problem involves finding  $u$  satisfying this parabolic linear differential problem for a given *local variance surface*  $a$  and price  $S_0$ . To find a numerical solution for Equation 4, we follow the same method of discretization of the partial differential equation (see Albani, et. al. (2017)).

On the other hand, the uncertainty of the asset prices is also discussed in Albani, et. al. (2017) and Albani, Ascher and Zubelli (2017). In both of the works, after the estimation of the volatility surface, the asset prices shall be adjusted, and therefore, the estimated local volatility can be improved in the next step.

The ensemble Kalman filter (EnKF) approach (see Evensen(2003)) applies Monte Carlo approximations in order to obtain cheap estimates for the error covariance matrices that appear in the Kalman filter. The distribution of the system state is represented using a collection of state vectors, called an *ensemble*, and covariance matrices are replaced by the sample covariance computed from the ensemble. In Iglesias, Law and Stuart (2013), it is suggested that EnKF can be applied to solve inverse problems of finding  $x$  given observations of the form

$$y = \mathcal{G}(x) + \eta,$$

where  $\mathcal{G} : X \rightarrow Y$  is the forward operator mapping the unknown  $x$  to the observation space. Here  $\eta$  is assumed to be a Gaussian noise. In our context, the observations are the option prices  $d$ , the unknowns are the local variance (volatility) surface and  $\mathcal{G}$  corresponds to  $P\mathcal{U}$ . Note that in our circumstances, the forward operator  $P\mathcal{U}$  is non-linear. However, with the same idea as Iglesias, Law and Stuart (2013), we can take the advantage of the state augmentation approach to make the model to be linear. Once the model is transformed to be linear, a link can be built between the EnKF and the regularized least-squares problems. Moreover, with the help of Johns and Mandel (2008) and Hoel, Law and Tempone (2016), we propose an EnKF-EnKF model to deal with the calibration of local volatility surface with uncertain asset prices.

The problem of finding a volatility surface that explains the data is often significantly under-constrained in practice, as is discussed in Albani, et. al. (2017). Examples are presented to show that using only real data to calibrate local volatilities is much more efficient and accurate. Therefore, in the Equation 4, we have a matrix  $P$ , which projects the data points from the regular mesh to the real data mesh. Here, we follow this method and will only use real data all the time. Data completion techniques are not considered here.

**Outline of the work.** In the next section, we propose an EnKF-EnKF model to deal with estimating  $S_0$ , as well as the local volatility surface. In the section of numerical examples, we use the options prices of Standard & Poor index to assess our model. Some remarks are presented in conclusion section.

## An EnKF-EnKF Model for the Uncertainty in the Asset Price

For the completeness of this work, we briefly introduce the EnKF method here. For the details of using EnKF model to estimate the local volatility surface and the model of estimating the uncertain asset

price, see Albani, et. al. (2017). Let  $a$  be the local variance surface. We define the augmented state vector  $\hat{a} = \Psi(a)$  as a function of  $a$  given by

$$\hat{a} = \Psi(a) = \begin{pmatrix} a \\ P\mathcal{U}(a) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

together with the artificial dynamics (or prediction)  $\hat{a}^{(n+1)} = \Psi(a^{(n)})$ . Let  $H$  be a matrix given by  $H = \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix}$ . So we have  $H\hat{a}^{(n+1)} = P\mathcal{U}(a) = d(S_0)$ , where  $d$  is the vector of observations.

Let  $L_\tau$  and  $L_y$  be the discrete derivative operators for  $a$  with respect to  $\tau$  and  $y$ , respectively. For the state augmentation approach, we modify them as

$$L_\tau \leftarrow \begin{pmatrix} L_\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad L_y \leftarrow \begin{pmatrix} L_y & 0 \end{pmatrix}.$$

For the initial state, we set

$$\hat{a}_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ P\mathcal{U}(a_0) \end{pmatrix}$$

The Tikhonov type of calibration of local variance problem becomes

$$\begin{aligned} \min_{\hat{a}} \phi_R(\hat{a}) &= \|d - H\hat{a}\|_{\Gamma_a}^2 + \|\hat{a} - \hat{a}_0\|_{D^{-1}}^2 + \\ &\|L_\tau \hat{a}_0 - L_\tau \hat{a}\|_{D_\tau^{-1}}^2 + \|L_y \hat{a}_0 - L_y \hat{a}\|_{D_y^{-1}}^2, \end{aligned} \quad (6)$$

where  $\Gamma$ ,  $D$ ,  $D_y$  and  $D_\tau$  are positive definite matrix matrices. Since (6) is just an enlarged weighted least squares problem, it also corresponds to a Kalman smoother/filter process, and we subsequently build an approximation for it as in Johns and Mandel (2008) by defining and solving a “three-stage” EnKF.

Now we introduce the part of estimating the uncertain asset price. The data misfit part is unchanged (only multiply by  $S$ ), which is given by

$$\psi(S) = \|C - P\mathcal{U}(a) \cdot S\|_{\Gamma_S^{-1}}, \quad (7)$$

where  $C$  is the original option prices and  $\Gamma_S$  is a symmetric definite matrix. We specify regularization operator for  $S$  as well. Then the optimization problem becomes:

$$\min_S \psi(S) = \|C - P\mathcal{U}(a) \cdot S\|_{\Gamma_S^{-1}}^2 + \|S - \hat{S}_0\|_{D_S^{-1}}^2 \quad (8)$$

Note that this is a linear least squares problem since  $P\mathcal{U}(a)$  is known, then the problem 8 is simplified as

$$\min_S \psi(S) = \|C - HS\|_{\Gamma_S^{-1}}^2 + \|S - \hat{S}_0\|_{D_S^{-1}}^2 \quad (9)$$

We solve this problem by using EnKF model for only one iteration. Therefore, we can omit the prediction step and only do analysis step. The algorithms are given below:

Note that, in Algorithm 3, the roles of  $K$  and  $N$  are to control the maximum steps of iterations. We can add some convergence test to end in less steps.

## Numerical results

In this section, we test our model using options prices of Standard & Poor (SPX) index. The data were collected on 19-Jun-2015 and contain prices for 9 different maturities ranging from 1 day to 2 years. The parameters are given in Table 1. Note that the optimal spot price in the table refers to the optimized spot price using the method described in the last section.



---

**Algorithm 1** EnKF-type algorithm

---

```

1: Draw  $J$  samples of  $a^{(0)}$ 
2: for  $n = 0, 1, 2, \dots$ , do
3:   Prediction step:
4:   for  $j = 1, \dots, J$  do
5:     Set  $\hat{a}^{(n+1,j)} = \Psi(a^{(n,j)}) = \begin{pmatrix} a^{(n,j)} \\ P\mathcal{L}(a^{(n,j)}) \end{pmatrix}$ .
6:   end for
7:   Define sample mean and covariance matrix as
8:    $\bar{a}^{(n+1)} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \hat{a}^{(n+1,j)}$ 
9:    $D_{n+1} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \hat{a}^{(n+1,j)} (\hat{a}^{(n+1,j)})^T - \bar{a}^{(n+1)} (\bar{a}^{(n+1)})^T$ 
10:  Analysis step (three-stage Ensemble Kalman filter):
11:   $A_{n+1}^{(1)} = D_{n+1} H^T (H D_{n+1} H^T + \Gamma_a)^{-1}$ 
12:   $B_{n+1}^{(1)} = (I - A_{n+1}^{(1)} H) D_{n+1}$ 
13:   $A_{n+1}^{(2)} = B_{n+1}^{(1)} L_\tau^T (L_\tau B_{n+1}^{(1)} L_\tau^T + D_\tau)^{-1}$ 
14:   $B_{n+1}^{(2)} = (I - A_{n+1}^{(2)} L_\tau) B_{n+1}^{(1)}$ 
15:   $A_{n+1}^{(3)} = B_{n+1}^{(2)} L_y^T (L_y B_{n+1}^{(2)} L_y^T + D_y)^{-1}$ 
16:   $B_{n+1}^{(3)} = (I - A_{n+1}^{(3)} L_y) B_{n+1}^{(2)}$ 
17:  for  $j = 1, \dots, J$  do
18:    Update  $\tilde{a}^{(n+1,j)} = \hat{a}^{(n+1,j)} + B_{n+1}^{(3)} \left( H^T \Gamma_a^{-1} (d_{n+1}^{(j)} - H \hat{a}_h^{(n+1,j)}) + \right.$ 
19:     $\left. L_\tau^T D_\tau^{-1} (r_\tau^{(n+1,j)} - L_\tau \hat{a}^{(n+1,j)}) + L_y^T D_y^{-1} (r_y^{(n+1,j)} - L_y \hat{a}^{(n+1,j)}) \right)$ 
20:  end for
21:  for  $j = 1, \dots, J$  do
22:     $a^{(n+1,j)} = \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} \tilde{a}^{(n+1,j)}$ .
23:  end for
24:  Convergence test:
25:  Compute  $a^{(n+1)} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J a^{(n+1,j)}$  and check for convergence.
26: end for
27: if The algorithm stops at  $n = N$  then
28:   return  $a^{(N)}$ 
29: end if

```

---

**Algorithm 2** EnKF for updating asset price

---

```

1:  $k = 0$ 
2: Draw  $\{S_k^{(m)}\}_{m=1}^M$ , which are  $M$  independent copies of  $S_k$ 
3: Define sample mean and covariance matrix as
4:  $\bar{S}_k = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M S_k^{(m)}$ ,  $D_k = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (S_k^{(m)})^2 - \bar{S}_k^2$ .
5: for  $m = 1, 2, \dots, M$  do
6:   Analysis step:
7:   Calculate Kalman gain:  $A_k = D_k H^T (H D_k H^T + \Gamma_S^{(k)})^{-1}$ 
8:   Calculate  $\tilde{S}_k^{(m)} = S_k^{(m)} + A_k (C_k - H S_k^{(m)})$ , where  $C_k = C + \eta_k$ ,  $\eta_k \sim \mathcal{N}(0, \Gamma_S^{(k)})$ ;
9: end for
10: return  $S_{k+1} = \frac{1}{M} \sum_m \tilde{S}_k^{(m)}$ 

```

---

---

**Algorithm 3** EnKF–EnKF algorithm with uncertain asset price

---

```

1:  $S_1 = \hat{S}_0$ 
2:  $D_0$  is an initial covariance matrix
3:  $a^{(0)}$  is an initial local variance
4: for  $k = 1, 2, \dots, K$  do
5:   Draw  $\{a^{(0,j)}\}_{j=1}^J$ , which are  $J$  independent copies of  $a^{(0)}$ ;
6:   Compute  $P\mathcal{W}(a^{(0,j)})$ ,  $j = 1, \dots, J$ , thus defining  $\{\hat{a}^{(1,j)}\}_{j=1}^J$ .
7:   Normalize data  $d_k = C/S_k$ 
8:   for  $n = 0, 1, 2, \dots, N$  do ▷ See Algorithm 1
9:     Algorithm 1
10:    Prediction step
11:    Analysis step
12:    Convergence test
13:   end for
14:    $a^{(N,k)}$  is the local variance
15:   do Algorithm 2 ▷ See Algorithm 2
16:   The updated price is  $S_{k+1} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M S_k^{(m)}$ 
17:   Update  $y$  and  $P$ :
18: end for
19: return  $a^{(N,K)}, S_K$ 

```

---

Tabela 1: Parameters for the equity data examples.

$S_0$ initial spot price	2109.99
$S_0$ optimal spot price	2095.6
$r$ interest rate	0.25%
the maximum maturity	2.5
Minimum $y$	-4.5
Maximum $y$	1.5
$\Delta\tau$	0.05
$\Delta y$	0.1
initial $a_0$	$0.14^2/2$
$J$	2000
$K$	10
$M$	50
$N$	8
$\Gamma_a = \Gamma_S$	$2 \times 10^{-4}I$
$D = D_\tau = D_y$	$1 \times 10^{-3}I$
$D_S$	$1 \times 10^{-5}I$

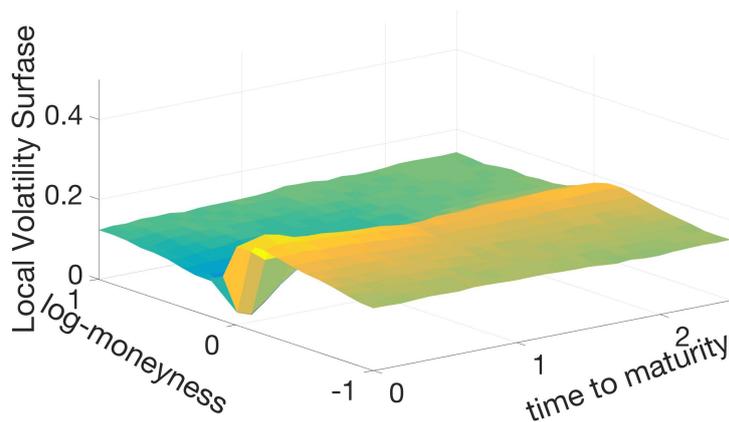


Figura 1: Local volatility surface estimated from EnKF-EnKF algorithm

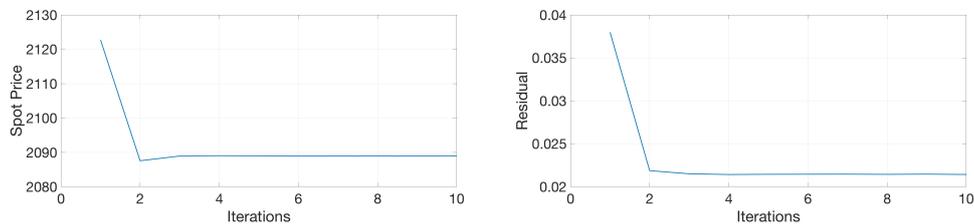


Figura 2: The left figure is the estimated spot prices and the right figure is the residual of every iteration.

From Figure 2, we can see that the spot prices converge to 2095.6 and the residual converges to 0.0214. Both of them converge very fast.

## Conclusions

In this work, we present an EnKF-EnKF algorithm for the calibration of local volatility surface with uncertain spot prices. In this model, we make use of multilevel EnKF algorithm and generalize the first level of EnKF model into a ‘three-stage’ EnKF model. From the numerical results, we can see that the algorithm converges very fast and can achieve a small residual. The spot price is adjusted from 2109.99 to 2095.6, which can improve the local volatility surface significantly.

## Referências

ALBANI, V., et al. Data driven recovery of local volatility surfaces. **Inverse Problems & Imaging**, 11(5), 2017.

ALBANI, V.; ASCHER, U.; ZUBELLI, J. Local volatility models in commodity markets and online calibration. **Journal of Computational Finance**, 2017.

DUPIRE, B. Pricing with a smile. **Risk**, 7(1), p.18-20, 1994.

EGGER, H.; ENGL, H. Regularization Applied to the Inverse Problem of Option Pricing: Convergence analysis and Rates, **Inverse Problems**, 21, p. 1027-1045, 2005.

EVENSEN, G. The ensemble Kalman filter: Theoretical formulation and practical implementation. **Ocean Dynamics**, 53(4), pp.343-367, 2003.

HOEL, H., LAW, K.J. and TEMPONE, R., Multilevel ensemble Kalman filtering. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, 54(3), pp.1813-1839, 2016.

IGLESIAS, M.; LAW, K.; STUART, A.; Ensemble Kalman methods for inverse problems, **Inverse Problems**, 29, pp 045001, 2013.

JOHNS, C.; MANDEL, J., A two-stage ensemble Kalman filter for smooth data assimilation, **Environmental and Ecological Statistics**, 15(1), pp 101-110, 2008.

Parte XIV

Computação Científica

V ERMAC 2018 Maceió-AL

## O uso do método dos multipolos rápidos aplicado ao método das soluções fundamentais

V ERMAC 2018

Silva, É.V.

Universidade Federal da Paraíba  
ewerton2verissimo@gmail.com

Rocha de Faria, J.

Universidade Federal da Paraíba  
jairo@ci.ufpb.br

Machado, T.J.

Universidade Federal da Paraíba  
thiagojm@lncc.br

**Resumo:** Neste trabalho será apresentado um algoritmo para solução numérica de equações diferenciais parciais, em que é utilizado algumas rotinas do método dos multipolos rápidos no método das soluções fundamentais. O alto custo computacional para realização de simulações promove discussões de estratégias na tentativa de acelerar as soluções numéricas. Neste sentido, o objetivo do presente trabalho será analisar o ganho de performance em um problema inverso associado à equação de Poisson, a partir da utilização de rotinas do método dos multipolos rápidos no método das soluções fundamentais. Para tanto, experimentos numéricos serão realizados sobre um domínio bidimensional. Espera-se que o algoritmo proposto seja eficiente e preciso, além de proporcionar uma redução do custo computacional, tendo em vista a diminuição da quantidade de operações e memória para armazenamento. Ressaltamos que estas vantagens são de extrema importância no contexto dos problemas inversos, onde, em geral, o problema direto é resolvido numericamente por um grande número de vezes.

**Palavras-chave:** Método das Soluções Fundamentais. Método dos Multipolos Rápidos. Problema de Poisson.

### 1. Referências

JIANG, X.; CHEN, W.; CHEN, C. S. A fast method of fundamental solutions for solving helmholtz-type equations. **International Journal of Computational Methods**, v. 10, n. 2, 1341008 (20 páginas), 2013.

LIU, Y. J.; NISHIMURA, N.; YAO, Z. H. A fast multipole accelerated method of fundamental solutions for potential problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 29, n. 11, p. 1016-1024, 2005.

OLIVEIRA, M. V. F. **O método das soluções fundamentais com expansão em multipolos**. 2016. 48 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2016.

## Um breve estudo sobre Análise não-paramétrica de Séries Temporais utilizando descritores causais oriundos da Teoria da Informação

Eduarda T. C. Chagas

Universidade Federal de Alagoas - Instituto de Computação  
eduardachagas48@laccan.ufal.br

Milena B. Nunes

Universidade Federal de Alagoas - Instituto de Computação  
mbn@laccan.ufal.br

Alejandro C. Frery

Universidade Federal de Alagoas - Laboratório de Computação Científica e Análise Numérica  
acfrery@laccan.ufal.br

**Resumo:** Este trabalho descreve algumas das principais técnicas e ferramentas disponíveis na literatura para a análise não-paramétrica de séries temporais utilizando descritores da Teoria da Informação, focando nos conceitos e metodologias aplicados com sucesso em diversos ramos de pesquisa científica.

**Palavras-chave:** Séries Temporais, Análise não-paramétrica, Teoria da Informação, Computação Científica.

### Introdução

Séries temporais são conjuntos de dados adquiridos sequencialmente a partir de um processo observacional ao longo do tempo, não necessariamente dividido em espaços iguais. Tais dados caracterizam-se por exibir uma dependência serial entre os seus elementos.

O estudo de séries temporais auxilia na análise das propriedades de sistemas. A sua aplicação pode ser encontrada em múltiplas áreas do conhecimento científico como, por exemplo, a discriminação entre fenômenos estocásticos e caóticos [1], a identificação de padrões de comportamento em redes veiculares [2], a classificação e verificação de assinaturas *online* [3], a análise da eficiência informacional do mercado de petróleo [4], a caracterização das séries temporais produzidas por eletroencefalogramas [5], na análise da robustez de redes [6], e a classificação de padrões de consumo de energia elétrica [7].

O estudo de séries temporais é tradicionalmente dividido em duas linhas de estudo, nos domínios

do tempo e da frequência [8]. No entanto, ambas abordagens utilizam diretamente os dados resultantes do processo observacional, que são sensíveis a efeitos provocados por diversos tipos de contaminação. A abordagem do uso de métodos não paramétricos surge na literatura como uma forma de evitar que tais efeitos invalidem as análises.

A Teoria da Informação, desenvolvida por Claude Shannon [9], é uma ferramenta poderosa para a quantificação de sistemas dinâmicos. Conceitos como a Entropia de Shannon auxiliam da análise de mercados [10] até dinâmicas não-lineares [11]. Neste trabalho, apresentamos de forma unificada o uso de descritores oriundos da Teoria da Informação na análise de séries temporais.

O trabalho está organizado como segue. A Seção 1, apresenta as principais representações do espaço de probabilidade de séries temporais. A entropia de permutação e as suas variações são apresentadas na Seção 2. A Seção 3 descreve algumas distâncias estocásticas. Na Seção 4 falaremos sobre Complexidade Estatística e o Plano Entropia-Complexidade.

## 1 Representação do espaço de probabilidade e a Distribuição de Bandt e Pompe

A transformação de uma série temporal em uma distribuição de probabilidade (PDF)  $\mathbb{P}$  permite avaliar o conteúdo informacional acerca da dinâmica do sistema e dos processos subjacentes, descrevendo-os de forma mensurável e observável [12]. Através desta caracterização é possível utilizar de métricas do espaço PDF, permitindo comparar diferentes conjuntos e classificá-los de acordo com as propriedades dos processos subjacentes. Podemos assim, por exemplo, classificar uma série entre estocástica ou determinística.

A ideia das técnicas não paramétricas consiste em construir o histograma de algum atributo da série temporal, e extrair dele métricas de Teoria da Informação. Os atributos são os mais variados [13], dentre eles: (a) padrões ordinais [14], (b) histogramas [15, 16], (c) dinâmica simbólica binária [17], (d) Análise de Fourier [18], e (e) transformada wavelet [19]. Todas estas metodologias são capazes de capturar aspectos globais de dinâmicas complexas.

No entanto, não é trivial encontrar uma representação simbólica significativa da série original. A abordagem de Bandt e Pompe [20], por considerar a causalidade temporal dos dados, revela detalhes importantes da estrutura ordinal da série temporal.

A metodologia de Bandt e Pompe consiste na transformação não paramétrica da série temporal em uma sequência de padrões. Seja a série  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ , cada grupo de  $N$  valores (não necessariamente adjacentes) será transformado em um padrão ordinal, para depois formar o histograma das suas ocorrências na série. Por exemplo, com  $N = 3$  e para qualquer  $i$ , se  $x_i < x_{i+1} < x_{i+2}$  esta tripla será associada ao padrão  $\pi_0$ ; caso  $x_i > x_{i+1} > x_{i+2}$  o padrão será  $\pi_1$ , e assim por diante. Há  $N!$  possíveis padrões.

A literatura apresenta duas maneiras de definir o mapeamento de padrões: (a) ordenando as posições dos grupos em ordem cronológica (Permutação de Classificação), e (b) ordenando os índices de tempo de acordo fileiras dos elementos do subconjunto (Permutação do Índice Cronológico) [21].



Uma vez calculado o histograma de padrões  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_{N!})$ , isto é, a função de probabilidade, o próximo passo será obter descritores.

## 2 Entropia de permutação

A Entropia mede o desordem ou a imprevisibilidade de um sistema caracterizado por uma função de probabilidade  $\mathbf{h}$ . Neste trabalho citaremos três modelos de entropia: de Shannon, de Tsallis e de Rényi.

Proposta em 1948, a entropia de Shannon consiste de uma variação da Entropia de Boltzmann-Gibbs [9]. Ela é definida por  $H(\mathbf{h}) = -\sum_i^N h_i \log h_i$ . Os seus valores mínimo (0) e máximo (1) ocorrem para os casos em que um único evento tem probabilidade 1, e para eventos equiprováveis, respectivamente, isto é, para a certeza e a incerteza completas.

Tsallis propôs um novo modelo [22], ampliando o conjunto de aplicações abordado por Boltzmann:  $H_a(\mathbf{h}) = (a-1)^{-1}(1 - \log \sum_{i=1}^{N!} h_i^a)$ , com  $a \neq 1$ .

A entropia de Rényi é uma generalização da entropia de Shannon, sendo aplicada em Teoria da Informação como um índice estatístico de diversidade ou aleatoriedade [23]:

$$H_a(\mathbf{h}) = (1-a)^{-1} \log \sum_{i=1}^{N!} h_i^a.$$

## 3 Distância Estocástica

A habilidade da Entropia capturar propriedades do sistema é limitada, logo se faz necessário a utilização da mesma em conjunto de outros descritores, para assim realizar uma análise mais completa. Outras medidas interessantes são distâncias entre a função de probabilidade  $\mathbf{h}$  e uma medida de probabilidade que descreva um processo não informativo, tipicamente a distribuição uniforme. A Tabela 1 mostra algumas possíveis medidas de distância  $d(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  entre duas funções de probabilidade  $\mathbf{p} = (p_1, \dots)$  e  $\mathbf{q} = (q_1, \dots)$ , definidas sobre o mesmo suporte.

Tabela 1: Distâncias Estocásticas

Euclidiana	$\sqrt{\sum_i (q_i - p_i)^2}$
Manhattan	$\sum_i  q_i - p_i $
Chebyshev	$\max_i \{ q_i - p_i \}$
Kullback-Leibler	$\sum_i q_i \log \frac{q_i}{p_i}$
Jensen-Shannon	$\sum_i \left( p_i \log \frac{p_i}{q_i} + q_i \log \frac{q_i}{p_i} \right)$
Wotters	$\cos^{-1} \sum_i \sqrt{p_i q_i}$
Bhattacharya	$-\log \sum_i \sqrt{p_i q_i}$

Outras distâncias e relações entre elas podem ser vistas no livro de Deza e Deza [24].

#### 4 Complexidade Estatística e o Plano HC

Uma Entropia e uma Distância podem ser combinadas no atributo Complexidade Estatística:  $C(\mathbf{h}, \mathbf{p}) = H(\mathbf{h})d(\mathbf{h}, \mathbf{p})$  para aumentar o seu poder de descrição [25–27]: Uma escolha conveniente é a complexidade de Jensen-Shannon, dada por

$$C_{JS}(\mathbf{h}) = H_S(\mathbf{h}) \cdot Q_{JS}(\mathbf{h}, \mathbf{p}), \quad (1)$$

em que  $H_S$  é a entropia de Shannon normalizada,  $\mathbf{h}$  a função de probabilidade da série,  $\mathbf{p}$  a distribuição uniforme e  $Q_{JS}$  é a distância de Jensen-Shannon.

Cada série temporal  $x$  pode, então, ser mapeada no ponto  $(H_S, C_{JS})$ . O conjunto de todos os pontos possíveis forma o *mapa Entropia-Complexidade*, e a posição do ponto nesse plano é um descritor das propriedades da dinâmica subjacente à série [28]. A forma desse plano depende do comprimento  $N$  dos padrões [29].

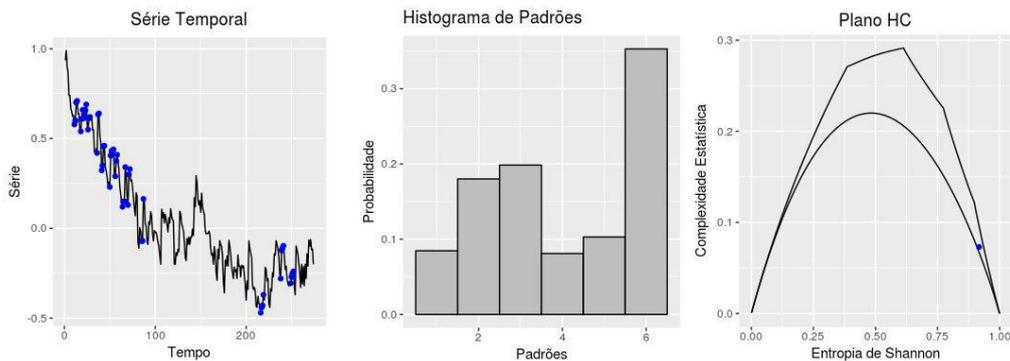


Figura 1: A figura acima ilustra o processo de extração de informações de uma série temporal que representa anomalias médias globais da temperatura em graus Celsius em relação a um período base (GISTEMP e GCAG). Os dados se encontram disponíveis em [https://pkgstore.datahub.io/core/global-temp/annual\\_csv/data/a26b154688b061cdd04f1df36e4408be/annual\\_csv.csv](https://pkgstore.datahub.io/core/global-temp/annual_csv/data/a26b154688b061cdd04f1df36e4408be/annual_csv.csv). A imagem 1.1 nos informa a presença dos padrões (2, 0, 1) na série. Já a imagem 1.2 apresenta o histograma de densidade, utilizado posteriormente como função de probabilidade. Por último, a figura 1.3 nos mostra a representação de tais dados no Plano HC

#### Conclusões

Neste trabalho apresentamos de forma unificada uma revisão da literatura sobre a teoria e a aplicação da técnica de simbolização de séries temporais pelo método de Bandt e Pompe.

## Referências

- [1] M. G. Ravetti, L. C. Carpi, B. A. Gonçalves, A. C. Frery, and O. A. Rosso. Distinguishing noise from chaos: objective versus subjective criteria using Horizontal Visibility Graph. *PLOS ONE*, 9(9):1–15, 2014.
- [2] A. L. L. Aquino, T. S. G. Cavalcante, E. S. Almeida, A. C. Frery, and O. A. Rosso. Characterization of vehicle behavior with information theory. *The European Physical Journal B: Condensed Matter and Complex Systems*, 88(10):257–269, Oct 2015.
- [3] O. A. Rosso, R. Ospina, and A. C. Frery. Classification and verification of handwritten signatures with time causal information theory quantifiers. *PLOS ONE*, 11(12):e0166868, 2016.
- [4] L. Zunino A. F. Bariviera and O. A. Rosso. Crude oil market and geopolitical events: An analysis based on information-theory-based quantifiers. *Fuzzy Economic Review*, 21(1):41–51, 2016.
- [5] S. Blanco, S. Kochen, R. Q. Quiroga, L. Riquelme, O. A. Rosso, and P. Salgado. *Characterization of Epileptic EEG Time Series (I): Gabor Transform and Nonlinear Dynamics Methods*. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997.
- [6] T. A. Schieber, L. Carpi, A. C. Frery, O. A. Rosso, P. M. Pardalos, and M. G. Ravetti. Information theory perspective on network robustness. *Physics Letters A*, 380:359–364, 2016.
- [7] A. L. L. Aquino, H. S. Ramos, A. C. Frery, L. P. Viana, T. S. G. Cavalcante, and O. A. Rosso. Characterization of electric load with information theory quantifiers. *Physica A*, 465:277–284, 2017.
- [8] P. J. Brockwell and R. A. Davis. *Time Series: Theory and Methods*. Springer-Verlag, Berlin, 2 edition, 1991.
- [9] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *SIGMOBILE Mob. Comput. Commun. Rev.*, 5(1):3–55, January 2001.
- [10] P. E. Hart. Entropy and other measures of concentration. *Journal of the Royal Statistical Society*, A 134:73–85, 01 1971.
- [11] L. Zunino, M. C. Soriano, I. Fischer, O. A. Rosso, and C. R. Mirasso. Permutation-information-theory approach to unveil delay dynamics from time-series analysis. *Phys. Rev. E*, 82:046212, Oct 2010.
- [12] R. M. Gray. *Entropy and Information Theory*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1990.
- [13] A. M. Kowalski, M. T. Martín, A. Plastino, O. A. Rosso, and M. Casas. Distances in probability space and the statistical complexity setup. *Entropy*, 13:1055–1075, 2011.
- [14] O. A. Rosso, H. Craig, and P. Moscato. Shakespeare and other english renaissance authors as characterized by information theory complexity quantifiers. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 388(6):916 – 926, 2009.

- [15] S.-H. Cha. Comprehensive survey on distance/similarity measures between probability density functions. *Int. J. Math. Model. Meth. Appl. Sci.*, 1, 01 2007.
- [16] L. De Micco, C. M. González, H. A. Larrondo, M. T. Martin, A. Plastino, and O. A. Rosso. Randomizing nonlinear maps via symbolic dynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387(14):3373–3383, 2008.
- [17] K. Mischaikow, M. Mrozek, J. Reiss, and A. Szymczak. Construction of symbolic dynamics from experimental time series. *Phys. Rev. Lett.*, 82:1144–1147, Feb 1999.
- [18] G. E. Powell and I. Percival. A spectral entropy method for distinguishing regular and irregular motion of Hamiltonian systems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 12:2053, 01 2001.
- [19] O. A. Rosso, S. Blanco, J. Yordanova, V. Kolev, A. Figliola, M. Schürmann, and E. Başar. Wavelet entropy: a new tool for analysis of short duration brain electrical signals. *Journal of Neuroscience Methods*, 105(1):65 – 75, 2001.
- [20] C. Bandt and B. Pompe. Permutation entropy: A natural complexity measure for time series. *Physical review letters*, 88:174102, 05 2002.
- [21] F. Traversaro, F. Redelico, M. Risk, A. C. Frery, and O. Rosso. Bandt-pompe symbolization dynamics for time series with tied values: a data-driven approach. *Chaos: an Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2018.
- [22] A. Rényi. On measures of entropy and information. In *4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, volume 1, pages 547–561, 1961.
- [23] C. Tsallis. Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, 52(1):479–487, Jul 1988.
- [24] M. M. Deza and E. Deza. *Encyclopedia of Distances*. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [25] D. P. Feldman, C. S. McTague, and J. P. Crutchfield. The organization of intrinsic computation: Complexity-entropy diagrams and the diversity of natural information processing. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 18(4):043106, 2008.
- [26] D. P. Feldman and J. P. Crutchfield. Measures of statistical complexity: Why? *Physics Letters A*, 238(4):244–252, 1998.
- [27] R. López-Ruiz, H. L. Mancini, and X. Calbet. A statistical measure of complexity. *Physics Letters A*, 209(5):321 – 326, 1995.
- [28] M. Sinn and K. Keller. Estimation of ordinal pattern probabilities in Gaussian processes with stationary increments. *Computational Statistics & Data Analysis*, 55(4):1781–1790, 2011.
- [29] M. T. Martin, A. Plastino, and O. A. Rosso. Generalized statistical complexity measures: Geometrical and analytical properties. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 369(2):439–462, 2006.

Parte XV

# Computação Gráfica

## Segmentação de imagens pulmonares em Tomografia Computadorizada a partir do modelo de Chan-Vese com influência de ruído

*Italo Messias Felix Santos*

*Universidade Federal de Sergipe (UFS)*

*italo.messias.felix@gmail.com*

*Luiz Cláudio de Mesquita Aquino*

*Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM)*

*luiz.aquino@ufvjm.edu.br*

*Gastão Florêncio Miranda Junior*

*Universidade Federal de Sergipe (UFS)*

*gastao@mat.ufs.br*

**Resumo:** As técnicas de segmentação de imagens tem auxiliado em diagnósticos médicos em diversas patologias. Em particular, na reconstrução e visualização 3D de órgãos em tomografias computadorizadas. O modelo de Chan-Vese para segmentar imagens, o qual é baseado em modelos de contornos ativos, aplicado em imagens de tomografia computadorizada da caixa torácica com o intuito de segmentarmos os pulmões mostrou-se eficiente, porém ao adicionarmos o ruído gaussiano sua eficiência ficou comprometida, produzindo na imagem resultante um ruído do tipo sal e pimenta. Aplicamos o filtro de restauração da mediana com três máscaras distintas a fim de melhorar os resultados obtidos comparados aos resultados sem ruído, além disso, reconstruímos parte da geometria para visualizar os detalhes da restauração.

**Palavras-chave:** Modelo de Chan-Vese. Chan-Vese aplicado à medicina. Métodos de contorno ativo. Ruído.

### Introdução

A utilização de técnicas de visão computacional em imagens médicas tem auxiliado fortemente na precisão de diagnósticos médicos para diversos casos. Em particular, nas imagens de tomografia computadorizada do tórax com o objetivo de analisar patologias pulmonares. O pulmão possui características que inviabilizam sua observação *in vivo*, pois seu movimento é passivo, sendo resultado da movimentação de outras partes do corpo, como o diafragma e a caixa torácica, impossibilitando a sua observação diretamente, pois este colapsa ao se abrir a caixa torácica (TAVARES, 2011). O que faz-se extremamente necessária a utilização de dispositivos que possibilitem a observação de forma indireta.

A Segmentação de imagens é um conjunto de técnicas de grande importância para a análise de imagens. Estas técnicas possibilitam identificar automaticamente a forma ou contorno de um objeto em uma dada imagem. Técnicas de segmentação de imagens podem ser de grande ajuda para profissionais da medicina, auxiliando-os na análise de imagens de radiografias, ressonância magnética ou através de tomografias computadorizadas. Neste trabalho focaremos em imagens de Tomografia Computadorizadas (TC).

A partir de uma sequência de imagens de TC, aplicamos um procedimento de segmentação de imagem através de modelos deformáveis, em particular, com contornos ativos, os quais fazem uso de informações locais da imagem e sobre o objeto. A sequência de imagens de TC foram coletadas do banco APOLLO NETWORK (CLARK K. ; VENDT, 2013). Extraindo os contornos em cada imagem da sequência, possibilita efetuar uma reconstrução 3D de uma região, em nosso caso, um pulmão.

Um fator a ser abordado é referente à interferência de ruído nas imagens de TC capturadas, muitas vezes provocando intensidades heterogêneas, resolução limitada e baixa relação sinal-ruído. Essa interferência pode prejudicar no procedimento de segmentação da imagem.

Neste trabalho usaremos o modelo de contorno ativo de *Chan-Vese* (CHAN T. ; VESE, 1999) como método de segmentação dos contornos das imagens. Adicionamos o ruído gaussiano nas imagens para estudar a interferência do mesmo sobre processo de segmentação.

## Modelo de Chan-Vese

O modelo de *Chan-Vese* (CHAN T. ; VESE, 1999) foi construído com base no modelo de *Mumford e Shan* (MUMFORD D. ; SHAH, 1989), onde são realizadas algumas simplificações para aproximar a imagem de entrada por uma função constante por partes  $u$ , a qual representa o resultado da segmentação, reduzindo significativamente a complexidade dos cálculos e o custo computacional (PASCAL, 2012).

Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma imagem de entrada em tons de cinza representando a intensidade no pixel na posição  $(x, y)$  em um domínio retangular  $\Omega$  a ser segmentada, o modelo de Chan-Vese busca uma curva fechada  $C$  minimizando o seguinte funcional:

$$\min_{c_1, c_2, C} \mu \text{Comprimento}(C) + \nu \text{Área}(C) + \lambda_1 \int_{\text{dentro de } C} (f(x) - c_1)^2 d\Omega + \lambda_2 \int_{\text{fora de } C} (f(x) - c_2)^2 d\Omega \quad (1)$$

sendo  $c_1$  e  $c_2$  os valores de  $u$  dentro e fora de  $C$  respectivamente, isto é,

$$u(x, y) = \begin{cases} c_1, & \text{se } (x, y) \text{ dentro de } C, \\ c_2, & \text{se } (x, y) \text{ fora de } C. \end{cases} \quad (2)$$

e  $\lambda_1, \lambda_2$  são parâmetros de ajuste. O método consiste em determinar dentre todas as funções  $u$  a que melhor aproxima-se de  $f$ .

No funcional (1), o primeiro termo controla a regularidade penalizando o comprimento de  $C$ , o segundo termo controla a área delimitada pela curva  $C$ , o terceiro e quarto termos impedem que a função  $u$ , que representa a segmentação, distancie-se do objeto desejado contido na imagem  $f$ .

## Formulação variacional e a Discretização da Equação de Euler

Definiremos a seguir duas funções auxiliares  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq 0 \\ 0, & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \delta(t) = \frac{\partial}{\partial t} H(t). \quad (3)$$

Seja  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que representa  $C$  nos pontos  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  tais que  $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ , então podemos reescrever (1) da seguinte forma:

$$\min_{c_1, c_2, \varphi} \mu \int_{\Omega} \|\nabla \varphi(\mathbf{x})\| \delta(\varphi(\mathbf{x})) d\Omega + \nu \int_{\Omega} H(\varphi(\mathbf{x})) d\Omega + \lambda_1 \int_{\Omega} (f(\mathbf{x}) - c_1)^2 H(\varphi(\mathbf{x})) d\Omega + \lambda_2 \int_{\Omega} (f(\mathbf{x}) - c_2)^2 (1 - H(\varphi(\mathbf{x}))) d\Omega \quad (4)$$

Note que, graças as definições de  $H$ ,  $\delta$  e  $\varphi$  as integrais são calculadas ao longo de  $C$ , além disso, temos as seguintes observações com respeito ao funcional definido em (4), o primeiro termo nos dá o comprimento de  $C$  pelas propriedades de  $\delta$ , a integral do segundo termo tem valores nulos fora de  $C$

e valor positivo dentro de  $C$ , neste caso, como a curva é fechada a integral esta calculando o volume do objeto com altura constante igual a 1, sobre o domínio  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ , daí o volume  $\int_{\Omega} H(\varphi(\mathbf{x}))d\Omega = Area(C) \cdot 1 = Area(C)$ , já o terceiro e quarto termos estão bem definidos, pois,  $H(\varphi(\mathbf{x}))$  é igual à 1 dentro de  $C$  e consequentemente  $1 - H(\varphi(\mathbf{x}))$  é zero fora de  $C$ .

Supondo

$$H_{\varepsilon}(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) \quad \text{e} \quad \delta_{\varepsilon}(t) = \frac{\partial}{\partial t}H_{\varepsilon}(t) = \frac{\varepsilon}{\pi(\varepsilon^2+t^2)} \quad (5)$$

satisfazem a regularidade desejada no modelo e percebe-se que se  $\varepsilon \rightarrow 0$ , implica que  $H_{\varepsilon} \rightarrow H$  e  $\delta_{\varepsilon} \rightarrow \delta$ .

Desta forma,

$$\|\nabla(H(\varphi(\mathbf{x})))\| = \|H'(\varphi(\mathbf{x})) \cdot \nabla(\varphi(\mathbf{x}))\| = \|\delta(\varphi(\mathbf{x})) \cdot \nabla(\varphi(\mathbf{x}))\| = \delta(\varphi(\mathbf{x})) \cdot \|\nabla(\varphi(\mathbf{x}))\| \quad (6)$$

e substituindo (6) em (4) obtemos

$$\begin{aligned} \min_{c_1, c_2, \varphi} \quad & \mu \int_{\Omega} \|\nabla(H(\varphi(\mathbf{x})))\| d\Omega + \nu \int_{\Omega} H(\varphi(\mathbf{x})) d\Omega + \\ & \lambda_1 \int_{\Omega} (f(\mathbf{x}) - c_1)^2 H(\varphi(\mathbf{x})) d\Omega + \lambda_2 \int_{\Omega} (f(\mathbf{x}) - c_2)^2 (1 - H(\varphi(\mathbf{x}))) d\Omega. \end{aligned} \quad (7)$$

O problema de minimização é resolvido atualizando alternadamente  $c_1$ ,  $c_2$  e  $\varphi$ . O que nos permite associar a formulação definida em (7) para cada  $\varphi$  fixado o seguinte funcional  $J_{\varphi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por

$$\begin{aligned} J_{\varphi}(c_1, c_2) = & \int_{\Omega} [\mu \|\nabla(H(\varphi(\mathbf{x})))\| + \nu H(\varphi(\mathbf{x})) + \\ & \lambda_1 (f(\mathbf{x}) - c_1)^2 H(\varphi(\mathbf{x})) + \lambda_2 (f(\mathbf{x}) - c_2)^2 (1 - H(\varphi(\mathbf{x})))] d\Omega. \end{aligned} \quad (8)$$

Podemos verificar que a existência de mínimo global de  $J_{\varphi}$  é garantida se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  forem estritamente positivos, assim basta calcular os valores de  $c_1$  e  $c_2$  mínimos de  $J_{\varphi}$  utilizando os métodos da programação não linear (FRIEDLANDER, 1994), determinamos

$$c_1 = \frac{\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) H(\varphi(\mathbf{x})) d\Omega}{\int_{\Omega} H(\varphi(\mathbf{x})) d\Omega} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) (1 - H(\varphi(\mathbf{x}))) d\Omega}{\int_{\Omega} (1 - H(\varphi(\mathbf{x}))) d\Omega}. \quad (9)$$

Seja  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma curva ajuste de borda, definamos o funcional

$$J(\varphi) = \min_{c_1, c_2} \{J_{\varphi}(c_1, c_2)\} = \int_{\Omega} F(x, y, \varphi(x, y), \varphi_x(x, y), \varphi_y(x, y)) d\Omega \quad (10)$$

onde

$$\begin{aligned} F(x, y, \varphi(x, y), \varphi_x(x, y), \varphi_y(x, y)) = & \mu \|\nabla(H(\varphi(x, y)))\| + \nu H(\varphi(x, y)) + \lambda_1 (f(x, y) - c_1)^2 H(\varphi(x, y)) \\ & + \lambda_2 (f(x, y) - c_2)^2 (1 - H(\varphi(x, y))) \end{aligned} \quad (11)$$

onde os valores de  $c_1$  e  $c_2$  são dados em 9.

Usando métodos variacionais (FLORES, 2011), se  $\varphi^*$  for mínimo de  $J$ , deve satisfazer a equação de Euler, isto é,

$$F_{\varphi^*} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} F_{\varphi_x^*} + \frac{\partial}{\partial y} F_{\varphi_y^*} \right] = 0. \quad (12)$$

Calculando as respectivas variações de  $F$  e substituindo na equação 12 e sabendo que

$$\delta'_{\varepsilon}(\varphi(x, y)) = -\frac{2\pi\varphi}{\varepsilon} [\delta_{\varepsilon}(\varphi(x, y))]^2 \quad (13)$$

e obtemos

$$\delta_{\varepsilon}(\varphi) \left[ -\nu - \lambda_1 (f - c_1)^2 + \lambda_2 (f - c_2)^2 - \mu \nabla \cdot \left( \frac{\nabla(\varphi)}{\|\nabla(\varphi)\|} \right) \right] = 0. \quad (14)$$



Com os respectivos ajustes e adicionando a dependência de  $\varphi$  ao tempo com o objetivo de facilitar a implementação através do método de diferenças finitas, temos a construção da equação de Euler-Lagrange.

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \delta_\varepsilon(\varphi) \left[ -v - \lambda_1(f - c_1)^2 + \lambda_2(f - c_2)^2 + \mu \nabla \cdot \left( \frac{\nabla(\varphi)}{\|\nabla(\varphi)\|} \right) \right], & \text{em } \Omega; \\ \frac{\delta_\varepsilon(\varphi)}{\|\nabla(\varphi)\|} \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (15)$$

onde  $\vec{n}$  é vetor unitário normal à  $\varphi$  em  $\partial\Omega$  e a solução ótima do problema (15), a qual ocorre quando  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ , isto é, no momento em que  $\varphi$  atingi seu ponto estacionário.

### Solução Numérica

Utilizaremos o método de diferenças finitas para resolver o problema (15), discretizando o domínio por  $\Omega = \{0, 1, \dots, N\} \times \{0, 1, \dots, M\}$  como uma malha retangular onde a imagem de entrada  $f$  está definida e  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sobre essa malha. Denotaremos  $u_{i,j} := u(i, j)$ ,  $u_{i\pm 1,j} := u(i \pm \Delta x, j)$  e  $u_{i,j\pm 1} := u(i, j \pm \Delta y)$ .

Como  $\Omega$  representa uma malha com um conjunto finito de pontos em  $\mathbb{R}^2$  e  $f$  é uma imagem de entrada onde só conhecemos seus valores nos pontos de  $\Omega$  (intensidade do pixel), iremos considerar  $\Delta x = \Delta y = 1$ .

Com respeito a equação de Euler-Lagrange (15) obtemos a seguinte discretização:

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j}^{n+1} &= \varphi_{i,j}^n + \Delta t \delta_\varepsilon(\varphi_{i,j}^n) [A_{i,j}(\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j}^n) - A_{i-1,j}(\varphi_{i,j}^n - \varphi_{i-1,j}^n) + \\ &\quad B_{i,j}(\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n) - B_{i,j-1}(\varphi_{i,j}^n - \varphi_{i,j-1}^n) - v - \lambda_1(f_{i,j} - c_1)^2 + \lambda_2(f_{i,j} - c_2)^2] \end{aligned} \quad (16)$$

sendo

$$A_{i,j} = \frac{\mu}{\eta^2 + (D_x^+(\varphi_{i,j}^n))^2 + (D_y^0(\varphi_{i,j}^n))^2} \quad \text{e} \quad B_{i,j} = \frac{\mu}{\eta^2 + (D_x^0(\varphi_{i,j}^n))^2 + (D_y^+(\varphi_{i,j}^n))^2}. \quad (17)$$

e

$$\begin{aligned} D_x^+(u_{i,j}) &:= \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}, & D_x^0(u_{i,j}) &:= \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x}, \\ D_y^+(u_{i,j}) &:= \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y}, & D_y^0(u_{i,j}) &:= \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y}. \end{aligned} \quad (18)$$

As condições de contorno são descritas por

$$\varphi_{-1,j} = \varphi_{0,j}, \quad \varphi_{N+1,j} = \varphi_{N,j}, \quad \varphi_{i,-1} = \varphi_{i,0} \quad \text{e} \quad \varphi_{i,M+1} = \varphi_{i,M}, \quad (19)$$

além disso,  $\varphi_{i,j}^0$  deve ser fornecida para inicialização. O esquema de diferenças finitas retorna uma curva ótima quando  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ . Podemos impor a condição de parada  $\left\| \frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^n}{\text{Area}(\Omega)} \right\| \leq \varepsilon$ , e/ou determinar um número máximo de iterações.

### Experimentos Computacionais

Foram realizados testes com 115 imagens disponíveis no banco APOLLO NETWORK (CLARK K. ; VENDT, 2013), onde cada uma representa uma imagem de TC com corte axial da caixa torácica, com o objetivo de analisar patologias pulmonares. Neste trabalho foram realizadas três reconstruções do mesmo pulmão a partir destas imagens. Na primeira reconstrução, é utilizado o algoritmo de Chan-Vese original descrito em (CHAN T. ; VESE, 1999). Podemos visualizar algumas destas imagens na Figura 1 (à esquerda).

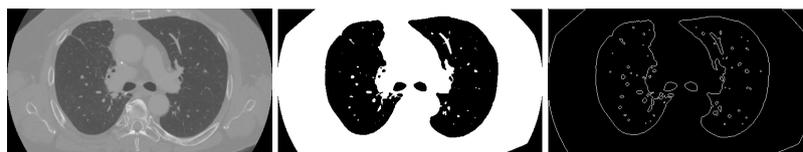


Figura 1: Imagem original | Imagem binária | Segmentação.

As imagens da Figura 1 (ao centro e à direita) foram obtidas utilizando os seguintes parâmetros  $\mu = 0.05$ ,  $\nu = 0.00003 \times 512 \times 285$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 50$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $\eta = 0.0001$ ,  $\varepsilon = 1.0$ ,  $\tau = 0.0001$ ,  $num = 20$ , o parâmetro  $num$  representa o número máximo de iterações e  $512 \times 285$  é a área de  $\Omega$ . As imagens binárias (Figura 1 ao centro) são obtidas a partir do método de Chan-Vese dando valor 1 a todos os pontos  $(i, j)$  onde  $\varphi_{i,j} \geq 0$  e 0 a todos os pontos  $(i, j)$  onde  $\varphi_{i,j} < 0$ , os pontos de interesse para a segmentação podem ser obtidos verificando a variação de intensidade de pixel na imagem binária.

Realizamos ainda experimentos adicionando ruído gaussiano às imagens para observarmos o comportamento dos procedimentos de segmentação nestas condições. Na Figura 2, observamos a imagem fornecida como entrada (à esquerda) e o resultado da segmentação (à direita).

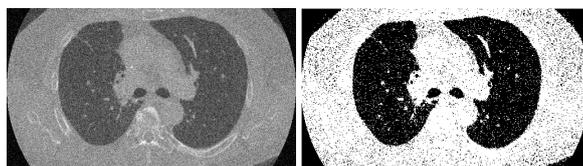


Figura 2: Imagem com ruído gaussiano de variância 0.01 | Imagem binária

A imagem binária resultante da segmentação com ruído gaussiano nos fornece uma outra imagem com ruído do tipo *sal e pimenta* e para contornar este problema foi utilizado o filtro da mediana. Desta forma o ruído gaussiano foi convertido no ruído sal e pimenta que degrada menos a imagem ao utilizar filtros de restauração.

Na Figura 3, apresentamos duas imagens binárias com o filtro da mediana aplicado utilizando máscara de ordem  $(3 \times 3)$  e  $(5 \times 5)$  de cada pixel  $(i, j)$ , utilizando os parâmetros  $\mu = 550$ ,  $\nu = 0.00003 \times 512 \times 285$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $\eta = 0.0001$ ,  $\varepsilon = 1.0$ ,  $\tau = 0.0001$  e  $num = 20$ .



Figura 3: Restauração com máscara  $3 \times 3$  | Restauração com máscara  $5 \times 5$

Percebemos que a restauração com a máscara  $3 \times 3$  preserva mais detalhes, porém, a depender da intensidade, o ruído sal e pimenta pode não ser removido totalmente. Utilizando a máscara  $5 \times 5$ , temos a total remoção do ruído ocasionando em perda de alguns detalhes.

Nas filtragens com máscara  $3 \times 3$  foi utilizado o filtro mediana 4 vezes consecutivas por imagem e com máscara  $5 \times 5$  o filtro foi utilizado 2 vezes consecutivas, as várias aplicações do filtro garantem a completa remoção do ruído, porém aumentar a máscara pode acarretar na total perda de detalhe como mostra a Figura 4 a qual foi utilizando uma máscara  $7 \times 7$ .



Figura 4: Restauração com máscara  $3 \times 3$ ,  $5 \times 5$  e  $7 \times 7$  respectivamente.

Em geral as segmentações foram boas e com poucas falhas, utilizando os pontos de cada fatia segmentada foi possível reconstruir o pulmão utilizando o software *Paraview*. As Figuras 5, 6 e 7, ilustram (em três vistas distintas) as reconstruções utilizando os pontos obtidos com a segmentação normal e com ruído extraído utilizando máscaras  $3 \times 3$  e  $5 \times 5$ .

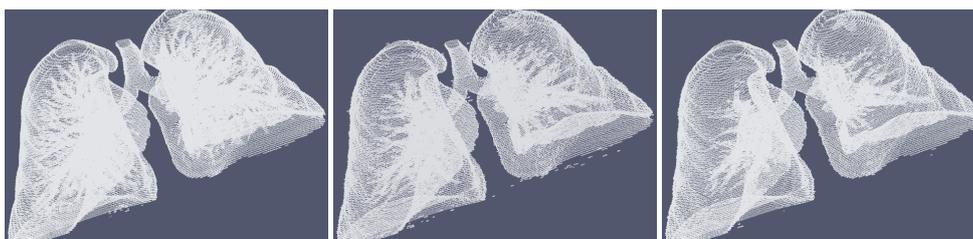


Figura 5: Segmentação original | Segmentação com máscara  $3 \times 3$  | Segmentação com máscara  $5 \times 5$



Figura 6: Segmentação original | Segmentação com máscara  $3 \times 3$  | Segmentação com máscara  $5 \times 5$

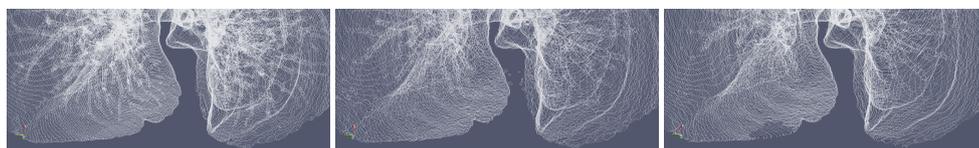


Figura 7: Segmentação original | Segmentação com máscara  $3 \times 3$  | Segmentação com máscara  $5 \times 5$

Comparado com a segmentação original, a reconstrução com a máscara  $3 \times 3$  produz um erro relativo médio 0.122218, já comparado à reconstrução com a máscara  $5 \times 5$ , foi produzido um erro relativo médio de 0.152512.

REFERÊNCIAS

REFERÊNCIAS

**Conclusões**

O modelo de Chan-Vese é muito útil em diversas aplicações atuais e constantemente usado como base para outras técnicas de segmentação de imagens por contornos ativos, ao fornecermos imagens com ruído gaussiano, o processo de segmentação necessitou de auxílio do filtro da mediana. Utilizamos três máscaras distintas ( $3 \times 3$ ,  $5 \times 5$  e  $7 \times 7$ ). A máscara  $7 \times 7$  provoca um grande perda de informação. Já as máscaras  $3 \times 3$  e  $5 \times 5$  mostraram-se mais promissoras, no entanto comparando-as com as imagens originais (sem ruído), o processo de segmentação das imagens com ruído utilizando máscaras  $3 \times 3$  produziram erro relativo médio menor.

Além disso, podemos confirmar este fato visualmente, apesar de possuir algumas falhas na segmentação, o filtro da mediana com máscara  $3 \times 3$  se mostrou mais eficaz, uma vez que, conseguiu segmentar as artérias que não foram destruídas no processo de segmentação, a máscara  $5 \times 5$  que remove completamente as falhas, provoca um maior erro e perda de algumas artérias na reconstrução.

**Referências**

CHAN T. ; VESE, L. An active contour model without edges. In: *Scale-Space Theories in Computer Vision*. Springer Berlin Heidelberg, 1999. p. 141–151. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/978-3-540-48236-9\\_13](https://doi.org/10.1007/978-3-540-48236-9_13)>.

CLARK K. ; VENDT, B. The cancer imaging archive (tcia): Maintaining and operating a public information repository. v. 26, n. 6, p. 1045–1057, 2013.

FLORES, A. *Cálculo variacional: aspectos teóricos e aplicações*. Dissertação (Dissertação - (mestrado)) — Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2011. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/94375>>.

FRIEDLANDER, A. *Elementos de Programação Não Linear*. [S.l.: s.n.], 1994.

MUMFORD D. ; SHAH, J. Optimal approximation by piecewise smooth function and associated variational problems. v. 42, p. 577–685, 1989.

PASCAL, G. Chan–Vese segmentation. *Image Processing On Line*, 2012.

TAVARES, R. S. *Segmentação do pulmão em seqüências de imagens de ressonância magnética utilizando a transformada de Hough*. [S.l.]: Dissertação (Mestrado em Engenharia de Controle e Automação Mecânica) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

**Parte XVI**

**Modelagem Computacional em  
Saúde**

## Modelagem bidimensional da dinâmica e espalhamento de mosquitos selvagens e transgênicos

*Marlos Antônio Pinheiro Rolim*  
Universidade Federal da Paraíba-UFPA  
marlosrolim@gmail.com

*Ana Paula Pintado Wyse*  
Universidade Federal da Paraíba-UFPA  
anawyse@ci.ufpb.br

*Antônio José Boness dos Santos*  
Universidade Federal da Paraíba-UFPA  
boness@ci.ufpb.br

*Cristiane Oliveira de Faria*  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ  
cofaria@ime.uerj.br

**Resumo:** Neste trabalho, apresentamos a modelagem da dinâmica da interação entre populações de mosquitos selvagens e transgênicos e seu espalhamento em um domínio espacial bidimensional. Para isso, as subpopulações são classificadas de acordo com a sua zigosidade: selvagens, transgênicos heterozigotos e transgênicos homozigotos, que interagem por meio de acasalamento e competição por recursos. As linhagens obtidas do acasalamento entre essas três variedades estão de acordo com a genética clássica Mendeliana. Este modelo está sendo representado por um sistema de equações diferenciais parciais do tipo reação-difusão, onde o termo de reação é fortemente não-linear. Para resolvê-lo numericamente, desacoplamos os operadores de difusão e reação do sistema, através de uma técnica de decomposição de operadores sequencial, aplicamos o método dos elementos finitos na resolução do sistema difusivo (exclusivamente espacial), e o método de Runge-Kutta de quarta ordem ao sistema associado a reação. Algumas simulações numéricas são apresentadas mostrando a potencialidade da aplicação do modelo.

**Palavras-chave:** Elementos Finitos. Modelagem Computacional em Saúde. Mosquitos Transgênicos. Reação-difusão.

### Introdução

Doenças transmitidas por mosquitos, principalmente febre amarela, dengue, zika e malária, vem se tornando cada vez mais motivo de preocupação para a sociedade devido as altas taxas de incidência. Regiões de clima tropical, associadas não apenas a temperatura e pluviosidade, mas também a precárias condições de habitação e saneamento básico, possibilitam condições ideais para a proliferação dos mosquitos e conseqüentemente ocorrência dessas doenças. Diante disso, a busca pelo desenvolvimento de tecnologias e ações que promovam soluções eficazes para a redução da população de mosquitos tem se intensificado nos centros de pesquisa.

Os recentes avanços na manipulação genética estão tornando viável a obtenção de mosquitos geneticamente modificados refratários a doenças. A idéia é que estes mosquitos acasalem com os mosquitos selvagens, fixando na população o transgene que bloqueia o ciclo do protozoário no mosquito.

A modificação genética de mosquitos transmissores da malária, por exemplo, tem sido desenvolvida com sucesso. O primeiro mosquito do gênero *Anopheles* refratário a malária foi desenvolvido usando

uma técnica desenvolvida por Catteruccia et. al. (2002). A partir dessa técnica dois tipos de modificação genética foram testadas para os mosquitos *Anopheles stephensi* usando o promotor CP (carboxypeptidase). A primeira modificação usava um peptídeo sintético SM1 (salivary gland and midgut binding peptide 1) e o outro, expressando a enzima PLA2 (phospholipase A2), presente em veneno das abelhas. A modificação genética com SM1 mostrou ser estável e não altera o fitness do *Anopheles stephensi*.

Desde então, modelos matemáticos que descrevem a interação entre populações de mosquitos selvagens e transgênicos têm aparecido com mais frequência na literatura, desde modelos mais simples (LI, 2004), até versões mais complexas (WYSE; BEVILACQUA; RAFIKOV, 2016).

Um passo importante foi dado nesta modelagem em Lima (2016), ao considerar a dinâmica e espalhamento unidimensional de mosquitos selvagens e transgênicos. Nesse trabalho, o modelo resultante foi um sistema acoplado de equações do tipo reação-difusão com termo de reação fortemente não-linear, que foi resolvido utilizando uma combinação do método dos elementos finitos e método de Runge-Kutta de quarta ordem através da técnica de decomposição de operadores sequencial.

Neste trabalho, estenderemos a modelagem apresentada em Lima (2016), descrevendo a dinâmica e espalhamento de mosquitos selvagens e transgênicos por um modelo do tipo reação-difusão bidimensional. Os cenários obtidos fornecem diretrizes para a avaliação das condições mais favoráveis de utilização da variedade transgênica para reduzir a incidência de doenças transmitidas por mosquitos.

## Modelo matemático

Para descrever a interação entre mosquitos selvagens e transgênicos, vamos partir da suposição de que a dinâmica da população total de mosquitos seja regida pela equação logística de Verhulst com captura

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{k}\right) - \delta_2 P, \quad (1)$$

onde  $P$  é a população total de mosquitos. A taxa líquida de crescimento  $r$  é a diferença entre a taxa de recrutamento de mosquitos para a fase adulta  $\xi$  e a taxa de mortalidade  $\delta_1$ . A taxa de mortalidade  $\delta_2$  tem efeito de captura e leva em consideração a ação de predadores e ação humana sobre a população de mosquitos. O termo de captura torna o modelo mais próximo da realidade, já que embora se considerem fatores como abundância de alimentos, espaço físico ou até mesmo os períodos do ano em que surgem condições favoráveis à proliferação dos mosquitos, a incidência destes insetos é observada sempre em níveis inferiores àqueles que o ambiente é capaz de suportar. Portanto, a inclusão do termo de captura irá garantir que a população se estabilize em um ponto de equilíbrio abaixo da capacidade de suporte  $k$ .

A equação (1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{dP}{dt} = \left(\frac{\xi}{P} - \frac{r}{k}\right) P^2 - \delta P, \quad (2)$$

onde  $\delta = \delta_1 + \delta_2$ .

Particionando a população total  $P$  em três subpopulações: selvagens ( $u_1$ ), transgênicos heterozigotos ( $u_2$ ) e transgênicos homozigotos ( $u_3$ ), a equação (2) assume a forma

$$\frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} + \frac{du_3}{dt} = \left(\frac{\xi}{u_1 + u_2 + u_3} - \frac{r}{k}\right) (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + 2u_1u_2 + 2u_1u_3 + 2u_2u_3) - \delta (u_1 + u_2 + u_3). \quad (3)$$

Os resultado dos cruzamentos entre os mosquitos selvagens, transgênicos heterozigotos e transgênicos homozigotos são obtidos via quadros de Punnet, e estão dispostos na Tabela 1. Foram admitidos genótipo  $aa$  para os mosquitos selvagens,  $Aa$  ou  $aA$  para transgênicos heterozigotos e  $AA$  para transgênicos homozigotos.

Tabela 1: Quadros de Punnet para os cruzamentos  $u_i \times u_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ .

$u_1 \times u_1$	a	a	$u_1 \times u_2$	A	a	$u_1 \times u_3$	A	A
a	aa	aa	a	aA	aa	a	aA	aA
a	aa	aa	a	aA	aa	a	aA	aA
$u_2 \times u_2$	A	a	$u_2 \times u_3$	A	A	$u_3 \times u_3$	A	A
A	AA	Aa	A	AA	AA	A	AA	AA
a	aA	aa	a	aA	aA	A	AA	AA

Dessa forma, mosquitos selvagens ( $u_1$ ) são concebidos do acasalamento ( $u_1 \times u_1$ ) na proporção de  $a_1 = 1$ , ( $u_1 \times u_2$ ) na proporção de  $a_2 = 1/2$  e ( $u_2 \times u_2$ ) na proporção de  $a_3 = 1/4$ ; transgênicos heterozigotos ( $u_2$ ) são concebidos do acasalamento ( $u_1 \times u_2$ ) na proporção de  $b_1 = 1/2$ , ( $u_2 \times u_2$ ) na proporção de  $b_2 = 1/2$ , ( $u_2 \times u_3$ ) na proporção de  $b_3 = 1/2$  e ( $u_1 \times u_3$ ) na proporção de  $b_4 = 1$ ; transgênicos homozigotos ( $u_3$ ) são concebidos do acasalamento ( $u_2 \times u_2$ ) na proporção de  $c_1 = 1/4$ , ( $u_2 \times u_3$ ) na proporção de  $c_2 = 1/2$  e ( $u_3 \times u_3$ ) na proporção de  $c_3 = 1$ .

Utilizando estes resultados na equação (3) temos que:

$$\begin{aligned} \frac{d(u_1 + u_2 + u_3)}{dt} &= \left( \frac{\xi}{u_1 + u_2 + u_3} - \frac{r}{k} \right) [a_1 u_1^2 + 2(a_2 + b_1)u_1 u_2 + (a_3 + b_2 + c_1)u_2^2 \\ &\quad + 2(b_3 + c_2)u_2 u_3 + 2b_4 u_1 u_3 + c_3 u_3^2] - \delta(u_1 + u_2 + u_3) \end{aligned} \quad (4)$$

com  $a_1 = 1$ ,  $a_2 + b_1 = 1$ ,  $a_3 + b_2 + c_1 = 1$ ,  $b_3 + c_2 = 1$ ,  $b_4 = 1$  e  $c_3 = 1$ .

Apesar de manter a dinâmica da espécie sem que haja superpopulação, e mantendo para cada subpopulação a mesma dinâmica que rege a população total, é possível escrever a equação (4) como um sistema de três equações acopladas

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = \left( \frac{\xi}{u_1 + u_2 + u_3} - \frac{r}{k} \right) (a_1 u_1^2 + 2a_2 u_1 u_2 + a_3 u_2^2) - \delta u_1 \\ \frac{du_2}{dt} = \left( \frac{\xi}{u_1 + u_2 + u_3} - \frac{r}{k} \right) (2b_1 u_1 u_2 + b_2 u_2^2 + 2b_3 u_2 u_3 + 2b_4 u_1 u_3) - \delta u_2 \\ \frac{du_3}{dt} = \left( \frac{\xi}{u_1 + u_2 + u_3} - \frac{r}{k} \right) (c_1 u_2^2 + 2c_2 u_2 u_3 + c_3 u_3^2) - \delta u_3 \end{cases} \quad (5)$$

Isto posto, passamos a caracterizar o processo de difusão a fim de entender o espalhamento dos mosquitos. A difusão é um processo físico em que partículas são transportadas, de maneira aleatória e espontânea, de uma região com maior concentração para outra de menor concentração. Sob um contexto biológico, (BRAUER; CASTILLO-CHAVEZ, 2012), descreve o processo de difusão como um movimento de partículas em uma região fechada  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  com fronteira  $\partial\Omega = \Gamma$  e obtém a lei de conservação

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = - \left[ \frac{\partial J_1}{\partial x} + \frac{\partial J_2}{\partial y} \right], \quad (6)$$

onde  $J_1$  e  $J_2$  são, respectivamente, as componentes horizontal e vertical do vetor de fluxo de partículas  $J$ .

Por outro lado, a lei de Fick diz que "o fluxo devido ao movimento aleatório é aproximadamente proporcional à taxa de variação da concentração de partículas" (EDELSTEIN-KESHET, 2005, p. 330), ou seja,

$$J_1 = -D_i \frac{\partial u_i}{\partial x}, \quad J_2 = -D_i \frac{\partial u_i}{\partial y}, \quad (7)$$



onde  $D$  é o coeficiente de difusão.

Substituindo a equação (7) na equação (6) obtemos a equação diferencial parcial de segunda ordem bidimensional

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - D\Delta u_i = 0. \quad (8)$$

Portanto, o modelo proposto para reger a dinâmica e espalhamento de mosquitos selvagens e transgênicos é dada pelo sistema composto pelo termo de reação (Eq. 5) e difusão em duas dimensões (Eq. 8):

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = D_1\Delta u_1 + \left(\frac{\xi}{u_1 + u_2 + u_3} - \frac{r}{k}\right) (a_1u_1^2 + 2a_2u_1u_2 + a_3u_2^2) - \delta u_1 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = D_2\Delta u_2 + \left(\frac{\xi}{u_1 + u_2 + u_3} - \frac{r}{k}\right) (2b_1u_1u_2 + b_2u_2^2 + 2b_3u_2u_3 + 2b_4u_1u_3) - \delta u_2 \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} = D_3\Delta u_3 + \left(\frac{\xi}{u_1 + u_2 + u_3} - \frac{r}{k}\right) (c_1u_2^2 + 2c_2u_2u_3 + c_3u_3^2) - \delta u_3 \end{cases} \quad (9)$$

onde  $D_i$  é o coeficiente de difusão para cada uma das subpopulações  $u_i$ , sujeito às condições de contorno de Dirichlet  $u_i(x, y, t) = \bar{u}_i(x, y, t)$ ,  $\forall x, y \in \Gamma$  e iniciais  $u_i(x, y, t_0) = \bar{u}_i(x, y)$ ,  $\forall x, y \in \Omega$ , com  $i = 1, 2$  e  $3$ .

## Algoritmo de resolução

Para resolver numericamente o modelo (9), aplicaremos a técnica de decomposição de operadores. Com essa técnica, buscamos transformar o sistema de equações globalmente mais complexo, em um conjunto acoplado de subsistemas de menor complexidade, mas que podem ser resolvidos por processos independentes. O sistema (9) será então decomposto em dois subproblemas com as seguintes características:

(I) O primeiro é descrito por um sistema de três equações diferenciais parciais puramente difusivas e desacopladas. Para a sua resolução, utilizamos o método dos elementos finitos de Galerkin na aproximação espacial e o método de Crank-Nicolson na discretização temporal.

(II) No segundo, temos um sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares acoplados, associado ao termo de reação. Para a sua resolução, utilizamos o método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Para descrever o algoritmo, consideramos  $I = [0, T]$  o intervalo de tempo, com  $T$  o tempo final, discretizado como  $I = (\cup_{n=0}^m I_n)$ , onde  $I_n = [t_n, t_{n+1}]$  é uma partição de  $I$ ,  $m = \frac{T}{\Delta t}$  e  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  o passo no tempo. Dito isto, fazemos os seguintes passos:

**Passo 1:** No instante inicial  $t_0$ , inicializamos as variáveis  $\tilde{u}_i(x, y, t_0) = \bar{u}_i(x, y)$ , para  $i = 1, 2, 3$ .

**Passo 2:** Tomando um  $n \geq 0$  fixo, conhecidas as condições iniciais  $\tilde{u}_i(x, y, t_0)$ , então fazemos  $\hat{u}_i(t_n) = \tilde{u}_i(x, y, t_n)$  e calculamos  $\tilde{u}_i(x, y, t)$  no instante  $t_{n+1}$  através do seguinte problema:

Problema  $P$ : Encontrar  $\tilde{u}_i(t) \in V$ , com  $t \in I_n$  tal que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} v_i d\Omega + \int_{\Omega} D_i \nabla \tilde{u}_i \nabla v_i d\Omega = 0, \quad \forall v_i \in V, \quad (10)$$

com condições iniciais  $\tilde{u}_i(x, y, t_n) = \hat{u}_i(t_n)$ , onde  $i = 1, 2$  e  $3$  representa cada uma das equações do sistema e  $V = H_0^1(\Omega)$  o espaço de Hilbert associado.

O problema  $P$  é resolvido utilizando o método dos elementos finitos, discretizando o domínio espacial  $\Omega_e$  em  $n_e$  elementos, tal que  $\Omega = (\cup_{e=1}^{n_e} \Omega_e)$  e  $\Omega_{e_i} \cap \Omega_{e_j} = \emptyset$ ,  $\forall e_i \neq e_j$ . Definimos por  $V^h = \{v^h(x, y) \in C^0(\Omega) \mid v^h(x, y) = 0 \text{ em } \Gamma, v(x, y)|_e \in P_q(\Omega_e)\}$ , a forma discreta de  $V \supset V^h$  (aproximação conforme) e  $P_q(\Omega_e)$  o polinômio de lagrange de grau até  $q$  no elemento. A forma aproximada do problema  $P$  é dado através do seguinte problema:

Problema  $P^h$ : Encontrar  $\tilde{u}_i^h(t) \in V^h$ , com  $t \in I_n$  tal que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{u}_i^h}{\partial t} v_i^h d\Omega + \int_{\Omega} D_i \nabla \tilde{u}_i^h \nabla v_i^h d\Omega = 0, \quad \forall v_i^h \in V^h. \quad (11)$$

Este problema pode ser descrito matricialmente da seguinte forma:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}, \quad (12)$$

onde  $\mathbf{M} = \sum_{e=1}^{n_e} M_{jk}^e$  e  $\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_e} K_{jk}^e$  são denominadas de matriz de massa e de rigidez, respectivamente, com  $M_{jk}^e$  e  $K_{jk}^e$  definidas a nível de elemento como:

$$M_{jk}^e = \int_{\Omega_e} (\phi_j(x, y)\phi_k(x, y)) d\Omega_e \quad \text{e} \quad K_{jk}^e = \int_{\Omega_e} D(\nabla\phi_j(x, y)\nabla\phi_k(x, y)) d\Omega_e.$$

A discretização temporal do sistema de equações (12) é feita pelo método de Crank-Nicolson e o sistema linear resultante resolvido pelo método de Gauss.

**Passo 3:** No mesmo intervalo de tempo  $I_n$ , utilizamos a solução obtido do sistema de equações (12), como condição inicial no cálculo do sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares acoplados, dado pelo seguinte problema:

Problema Q: Dados os parâmetros  $a_\theta, b_\theta, c_\theta, \delta, \xi, k$  e  $r$ , onde  $\theta \in \{1, 2, 3, 4\}$ , encontrar  $\hat{u}_i(t) \in \mathbb{R}$ , com  $t \in I_n$ , que satisfaça

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}_1}{dt} = \left( \frac{\xi}{\hat{u}_1 + \hat{u}_2 + \hat{u}_3} - \frac{r}{k} \right) (a_1\hat{u}_1^2 + 2a_2\hat{u}_1\hat{u}_2 + a_3\hat{u}_2^2) - \delta\hat{u}_1 \\ \frac{d\hat{u}_2}{dt} = \left( \frac{\xi}{\hat{u}_1 + \hat{u}_2 + \hat{u}_3} - \frac{r}{k} \right) (2b_1\hat{u}_1\hat{u}_2 + b_2\hat{u}_2^2 + 2b_3\hat{u}_2\hat{u}_3 + 2b_4\hat{u}_1\hat{u}_3) - \delta\hat{u}_2 \\ \frac{d\hat{u}_3}{dt} = \left( \frac{\xi}{\hat{u}_1 + \hat{u}_2 + \hat{u}_3} - \frac{r}{k} \right) (c_1\hat{u}_2^2 + 2c_2\hat{u}_2\hat{u}_3 + c_3\hat{u}_3^2) - \delta\hat{u}_3 \end{cases} \quad (13)$$

com condições iniciais  $\hat{u}_i(t_n) = \tilde{u}_i(x, y, t_{n+1})$ .

Este sistema de equações está associado ao termo de reação do modelo geral proposto.

**Passo 4:** A solução do Problema Q é a solução aproximada do modelo bidimensional (9) no instante de tempo  $t_{n+1} \in I_n \subset I$ , ou seja,  $\tilde{u}_i(x, y, t_{n+1}) = \hat{u}_i(t)$ . Caso  $t_{n+1} < T$ , incrementa-se  $n$  e retorna-se ao passo 2. O processo é repetido até que ocorra a igualdade  $t_{n+1} = T$ .

## Simulações Numéricas

As simulações do modelo (9) ilustram o a dinâmica e espalhamento das populações de mosquitos selvagens e transgênicos, interagindo sobre uma região  $\Omega = [0; 30] \times [0; 30] (Km^2)$ . Este domínio é suficientemente grande para que as populações se espalhem ao longo de uma estação do ano (treze semanas). As simulações numéricas apresentadas nesta seção foram obtidas adotando o método de Crank-Nicolson ( $\theta = 0,5$ ), polinômio de Lagrange de grau  $q = 1$  e um passo de tempo  $\Delta t = 0,05$  semanas.

Estimativas sobre a taxa finita de crescimento para *Anopheles stephensi* foram obtidas por Suleman (1990) em condições de laboratório resultando em 1,19. Com essa informação podemos avaliar a taxa finita semanal de crescimento como  $(1,19)^7 = 3,38$  e então a taxa intrínseca de crescimento semanal é  $r = \ln(3,38) = 1,2$ . Estimamos a taxa de recrutamento de mosquitos para a fase adulta  $\xi$  usando a tabela de vida de Suleman (1990) e expressões de Birch (1948), resultando em uma taxa de 5,1 por semana e taxa de mortalidade ocasionado por razões naturais  $\delta_1$  de  $(5,1 - 1,2) = 3,9$  por semana. Obviamente, 1,2 é um potencial teórico para aumentar de modo que, na natureza, a população esteja sujeita à predação e à ação humana induzindo uma mortalidade independente da densidade  $\delta_2 = 0,5$  por semana.

A distância média geral percorrida por fêmeas *Anopheles stephensi* obtida por Reisen e Aslamkhan (2016) foi de 165,5m durante os primeiros 8 dias após a liberação das fêmeas. A dispersão foi ajustada por uma função linear de tempo de liberação, resultando em uma dispersão de 224,86m por semana.

Com isso, é razoável considerar o mesmo coeficiente de difusão  $D = 13 \times 10^{-2} Km^2/semana$  para as três variedades.

Na Figura 1 são consideradas populações de 1.000 mosquitos selvagens e 1.000 mosquitos transgênicos heterozigotos, distribuídas homogeneamente sobre a região central do domínio, compreendida entre  $[14; 16] \times [14; 16](Km^2)$ . Em termos de aplicabilidade, isto significa que, uma vez identificado um foco de mosquitos selvagens e estimada sua população, uma quantidade equivalente de mosquitos transgênicos heterozigotos é liberada nesta área. A população de transgênicos homozigotos é inicialmente nula, mas surge naturalmente durante os processos de acasalamento. A quantidade de mosquitos ao final das treze semanas foi obtida através do método de integração de Newton-Cotes, resultando em 19.106 mosquitos selvagens, 12.737 mosquitos transgênicos heterozigotos e 2.123 mosquitos transgênicos homozigotos.

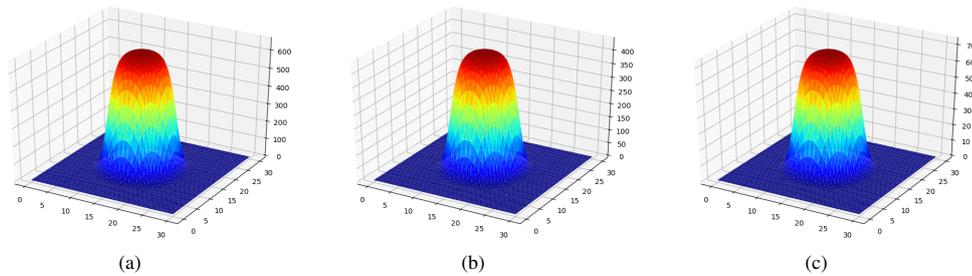


Figura 1: População de mosquitos selvagens (a), transgênicos heterozigotos (b) e homozigotos (c).

Ainda admitindo a mesma quantidade inicial de mosquitos da simulação anterior, vamos manter a distribuição espacial inicial para os mosquitos selvagens e considerar a quantidade de 1.000 mosquitos transgênicos heterozigotos homogeneamente distribuída na região  $[12, 5; 17, 5] \times [12, 5; 17, 5](Km^2)$ . Isto significa que, identificado um foco de mosquitos selvagens, uma quantidade equivalente a esta população é liberada não apenas sobre o foco mas também no seu entorno, mais especificamente  $1,5km^2$  além dos limites do foco de mosquitos selvagens. Esta situação é simulada na Figura 2.

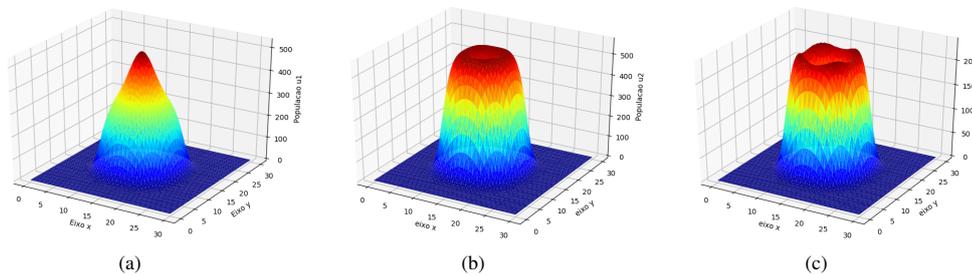


Figura 2: População de mosquitos selvagens (a), transgênicos heterozigotos (b) e homozigotos (c).

A população final de mosquitos selvagens nessa simulação foi de 14.002, a de mosquitos transgênicos heterozigotos de 25.455 e a de mosquitos transgênicos homozigotos de 11.930.

Comparando as Figuras 1 e 2, é visível que, apesar de ambas simulações iniciarem com a mesma quantidade de mosquitos, a distribuição inicial utilizada na segunda apresenta resultados melhores, com maior quantidade de mosquitos transgênicos ao longo das 13 semanas.

## Conclusão

O modelo bidimensional de reação-difusão apresentado descreve de maneira adequada a dinâmica e espalhamento de mosquitos selvagens e transgênicos. Para obtenção da solução numérica, foi utilizada com sucesso a técnica de decomposição de operadores.

As simulações numéricas indicam que a escolha da região de liberação de mosquitos transgênicos influencia no nível de sucesso obtido. Foi mostrado que é possível, em um estudo futuro, maximizar a proporção de mosquitos transgênicos a depender da distribuição inicial de mosquitos. Estes resultados mostram que a introdução de mosquitos geneticamente modificados no ambiente é um caminho promissor para o controle da malária e de outras doenças transmitidas por mosquitos.

## Agradecimentos

Agradecemos a FAPESQ e a CAPES.

## Referências

- BRAUER, F.; CASTILLO-CHAVEZ, C. **Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology**. 2. ed. New York: Springer, 2012.
- BIRCH, L. C. **The intrinsic rate of natural increase of an insect population**. *Journal of Animal Ecology* 17 (1), 15-26, 1948.
- CATTERUCCIA, F. et al. Stable germline transformation of the malaria mosquito *Anopheles stephensi*. **Nature**, v. 405, n. 6789, p. 959-962, 2000.
- EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical Models in Biology**. University of British Columbia, Siam, 2005.
- LI, J. Simple mathematical models for interacting wild and transgenic mosquito populations. **Mathematical biosciences**, v. 189, n. 1, p. 39-59, 2004.
- LIMA, J. S. **Modelagem da interação entre mosquitos selvagens e transgênicos**. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2016.
- REISEN, W. K.; ASLAMKHAN, M. **A release-recapture experiment with the malaria vector, *Anopheles stephensi* liston, with observations on dispersal, survivorship, population size, gonotrophic rhythm and mating behaviour**. *Annals of Tropical Medicine and Parasitology* 73 (3), 251-269, 2016.
- SULEMAN, M. **Intraspecific variation in the reproductive capacity of *Anopheles stephensi* (diptera: Culicidae)**. *Journal of Medical Entomology* 27 (5), 819-828, 1990.
- WYSE, A. P. P.; BEVILACQUA, L.; RAFIKOV, M. Modelagem da Interação entre Mosquitos Selvagens e Transgênicos. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 4, n. 1, 2016.