UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

CENTRO DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

CATHARINA ADELINO DE OLIVEIRA

NÚMEROS NEGATIVOS:
ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ALUNOS DO 1º AO 5º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL DE UMA ESCOLA PÚBLICA DE MACEIÓ

Maceió

2014

CATHARINA ADELINO DE OLIVEIRA

NÚMEROS NEGATIVOS:
ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ALUNOS DO 1º AO 5ºANO DO ENSINO FUNDAMENTAL DE UMA ESCOLA PÚBLICA DE MACEIÓ

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre Profissional em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Mercedes Bêtta Quintano de Carvalho Pereira dos Santos.

Maceió

2014

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Maria Helena Mendes Lessa

O48n Oliveira, Catharina Adelino de.
Números negativos: estratégias de resolução de problemas de alunos do 1º ao 5º ano do ensino fundamental de uma escola pública de Maceió / Catharina Adelino de Oliveira. – Maceió, 2015.
113 f. : il.

Orientadora: Mercedes Bêtta Quintano de Carvalho Pereira dos Santos.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Educação. Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Maceió, 2015.

Inclui Bibliografia.
Apêndices: f. 85-113.

1. Número negativo. 2. Resolução de problemas. 3. Estratégias de resolução. 4. Educação matemática. 5. Campo aditivo. I. Título.

CDU: 37.046.12:51(813.5)

CATHARINA ADELINO DE OLIVEIRA

NÚMEROS NEGATIVOS: ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ALUNOS DO 1º AO 5º ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL DE UMA ESCOLA PÚBLICA DE MACEIÓ.

Dissertação apresentada à banca examinadora como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de ciências e Matemática – Área de Concentração "Pedagogia", pelo Programa de Pós-Graduação em ensino de Ciências e Matemática da Universidade federal de alagoas, aprovada em 07 de maio de 2014.

BANCA EXAMINADORA:

Prof.ª. Drª. Mercedes Bêtta Quintano de Carvalho Pereira dos Santos
(CEDU/UFAL)
Orientadora e Presidente da banca

Prof.ª. Drª. Patrícia Sandalo Pereira
(UFMS)

Profº. Drº. Givaldo Oliveira dos Santos
(IFAL)

AGRADECIMENTOS

Obrigada!

Existem momentos que palavras não são suficientes diante da imensa gratidão que sinto, perante algumas atitudes de muitos que contribuíram direta ou indiretamente para o crescimento pessoal e profissional. Por isso, seguem os meus agradecimentos:

Meu Deus, por ter me dado o dom do raciocínio que me permitiu tomar minhas próprias decisões.

Aos meus pais, Petrúcio e Sueli, pelos momentos que poderia ter dedicado a vocês, mas que tive de dedicá-los aos estudos.

Aos meus irmãos, Júlio César e Alexandre, pelo apoio nas atividades domésticas e pelos ajustes, no computador.

À Professora Doutora Mercedes Carvalho, por compartilhar sua experiência comigo, ampliando meus conhecimentos.

À Banca Examinadora: Profª Drª Patricia Sandalo Pereira, Prof. Drº. Givaldo Oliveira dos Santos e Profª Drª Edna Cristina do Prado, pelo respeito e atenção com que avaliaram meu trabalho.

Ás Diretoras, Coordenadoras e Professoras, da escola pesquisada, pela valiosa colaboração, na realização deste trabalho.

A todos os professores do PPGECIM, pelo incentivo e dedicação. Em especial, ao **Prof. Dr.Elton Fireman, Profª Drª Edna Prado, Prof. Dr. Givaldo Oliveira dos Santos, Prof. Dr. Jenner Bastos e Prof. Dr. Kléber,** pelo apoio na batalha da proficiência e pelos exemplos de humanidade.

Aos amigos de turma, que permaneceram unidos, mesmo nos momentos de grande dificuldade. Em especial, aos companheiros de proficiência, **Flávio, José Ivan e Anayara, por nossa capacidade de resiliência.**

A Mônica Barros, Técnica em Assuntos Educacionais do PPGECIM, pela sua dedicação e atenção a todos;

A todos, do Departamento de Ensino Fundamental da Secretaria Municipal de Educação de Maceió, que me apoiaram durante todo o processo de estudo e elaboração da dissertação, e, em especial, ao **Romário Mendes**, para quem não encontro palavras que expressem meu agradecimento pela grande contribuição.

A minha turma do **Pólo Higino Belo do Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PACTO),** pela troca de experiências e pelas risadas, sobre as coisas boas da vida.

A todos, da Diretoria de Ensino da Secretaria Municipal de Educação do Município de Rio Largo, pelo companheirismo, durante o processo desta pesquisa.

Ao grupo do GEEM, Juliane Medeiros, Rosemeire Roberta, Mariglene Jatobá e Eliane Ramos, pelo apoio e troca de conhecimentos.

A minha amiga Dóris Santos, por saber esperar e por sempre conversar comigo.

Ao meu amigo Lívio Fabrício, pelos momentos felizes que compartilhamos.

A todos e todas que, direta ou indiretamente, partilharam dessa experiência comigo, **muito obrigada!**

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo investigar as estratégias de resolução de problemas de subtração, de alunos do 1º ao 5º anos do Ensino Fundamental acerca de números negativos, tendo como referencial teórico os estudos, Vergnaud (2009), Borba (1998), D'Albertas (2006), Passioni (2002), Walle (2009), Maranhão, Camejo e Machado (2008) e dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1997), dentre outros. A pesquisa constitui-se em um estudo de caso sobre o número negativo em uma escola pública localizada no município de Maceió. Os sujeitos da pesquisa foram 96 alunos, na faixa etária de 06 a 14 anos que responderam a uma atividade com dois problemas, os quais foram selecionados em 10 atividades de cada ano, totalizando 50 atividades, para análise de dados. As atividades abordaram as diferentes estratégias que os alunos utilizaram para resolver os problemas. A análise qualitativa dos dados coletados, durante a investigação, indica que o grupo de alunos do 1º ao 5º anos do Ensino Fundamental resolve com facilidade problemas, que envolvem números negativos. A análise aponta, ainda, que os alunos têm conhecimentos implícitos sobre o número negativo e há indicações de que os conceitos e as propriedades algébricas sustentam diversas estratégias de resolução de problemas utilizadas por eles, e de que a aritmética dos números inteiros demanda discernimento, de alunos e professores.

Palavras-chave: Número negativo. Resolução de problemas. Estratégias de resolução. Educação matemática**,** Campo aditivo**.**

ABSTRACT

This research aimed to investigate the strategies for solving subtraction problems of the students of 1st to 5th grade elementary school about a negative number, based on the theoretical studies from Vergnaud (2009), Borba (1998), D ' Albertas (2006), Passioni (2002), Walle (2009), Maranhão, Camejo and Machado (2008) and the National Curriculum Standards for Mathematics (1997) among others. This research constitutes a case study on the negative number in a public school located in the city of Maceió. The study subjects were 96 students, aged 06-14 years who completed an activity with two problems. Were selected 10 activities each year, totaling 50 activities for data analysis. The activities addressed the different meanings of negative numbers. The qualitative analysis of data collected during the investigation indicates that the group of students of 1st and 5th years of primary education easily solves problems involving negative numbers. This research shows that students have implicit knowledge about the negative number and there are indications that the concepts and algebraic properties hold various problem solving strategies used by them and the arithmetic of integers demand discernment of students and teachers.

Keywords: Negative number. Problem solving. Solving strategies, Math education, Additive field.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ser professora foi o conselho que minha mãe sempre me ofereceu. Quando criança brincava de professora e liderava as várias situações articuladas. Ao término do Ensino Fundamental II, decidi prestar o exame de seleção da antiga Escola Técnica Federal de Alagoas, atualmente IFAL (Instituto Federal de Alagoas), no qual fui aprovada para o curso técnico de Química Industrial. Nesse mesmo período, resolvi ouvir os conselhos de minha mãe e fazer magistério. Desta forma, ingressei em uma dupla jornada, cursando Química, no período da manhã, e Magistério, à noite, no Instituto de Educação - Escola de 1º e 2º Graus José Correia da Silva Titara, no Centro Educacional Antônio Gomes de Barros (CEPA).

Concluídos os cursos, fui inicialmente, à procura de um estágio em Química Industrial, mas, nesse período foi muito difícil conseguir estagiar na área, pois, dentre as opções, havia apenas Salgema (hoje BRASKEM) ou nas Usinas Sucroalcooleiras, no interior do Estado, o que não me despertou muito interesse, porque, durante o curso, tivemos a oportunidade de visitar algumas indústrias para conhecer como era o trabalho de um técnico em Química Industrial e não me vi atuando nessa área.

Nesse mesmo período, surgiu a proposta de estágio como auxiliar de ensino, em uma escola no bairro em que morava. Aceitei o desafio. Porém, após um mês de experiência, fui promovida à professora da turma do Maternal. Trilhando por caminhos desconhecidos, com muitas inseguranças, mas com vontade de aprender, fui observando, estudando e aprendendo com os professores mais experientes e com as orientações da coordenadora pedagógica.

Passei alguns anos em escolas particulares de Maceió, experiência muito benéfica, pois, nessa ocasião, fiz cursos de aperfeiçoamento e aprendi bastante com os outros colegas. Nesse percurso profissional, surgiu a oportunidade de trabalhar em uma Organização não Governamental (ONG), o que me possibilitou atuar como professora e ter, de fato, uma coordenadora atuante, que me fazia refletir sobre minha prática pedagógica.

Em 1998, prestei concurso público para professora das séries iniciais do Ensino Fundamental, que foi o ponto de partida para fazer outros dois concursos públicos e ingressar na Rede Estadual e na Municipal de Maceió.

Nessa trajetória profissional, exerci o magistério, da Educação Infantil, ao 5º ano do Ensino Fundamental; e a coordenação pedagógica do Ensino fundamental I e II, procurando fazer o que não fizeram por mim, enquanto professora, e sendo uma profissional capaz de fazer a diferença, mesmo que, parcialmente, mas sempre contribuindo para a mudança de atitude, dos envolvidos na ação pedagógica.

Quando professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental, surgiram várias dificuldades para a realização do meu trabalho pedagógico. Uma delas foi à inexistência de uma proposta curricular que tivesse uma seleção dos conteúdos a serem trabalhados em uma perspectiva mais ampla, onde fosse possível identificar, não só os conceitos, mas também, os procedimentos e as atitudes a serem trabalhados. A segunda dificuldade foi à organização no que se refere à capacidade de adequação do ensino, pois o que se praticava não atendia às necessidades, nem a diversidade dos alunos; e a terceira dificuldade, no desenvolvimento de práticas pedagógicas, foi conseguir que se trabalhasse com a resolução de problemas. Além desses aspectos, havia a angústia dos próprios alunos, por não conseguirem resolver os problemas quando solicitados. Outra questão que deve ser ressaltada é a que se refere à ausência de um maior debate nas aulas de matemática valorizando as estratégias de resolução de problemas dos alunos.

Muitas questões eram levantadas pelos alunos como: “Por que não pode tirar o número maior do número menor?” ou “Pede emprestado, mas não devolve?” Nesse contexto, a minha formação acadêmica e concepção de ensino e de aprendizagem não eram suficientes, para resolver tais questões, e me incomodava o fato de que os alunos possuíam o direito de ter essas respostas.

Por outro lado, enfrentei muitos desafios, visto que não era fácil romper com algumas práticas pedagógicas. O primeiro foi como coordenadora pedagógica, quando precisei demonstrar que, mesmo muito jovem, poderia atuar com destreza. Busquei então, expressar habilidade e procurar aliados, e isto foi o diferencial em minha prática, pois, em consequência, as experiências que tive a oportunidade de vivenciar, geraram vários frutos, sendo que um deles foi o trabalho que apresentei em uma mostra pedagógica, na Secretaria Municipal de Educação de Maceió (SEMED), a qual originou o convite para atuar como técnica pedagógica, dessa instituição. Nesse período pude ampliar meus conhecimentos e aceitar o desafio de atuar como formadora de Matemática. Assim, vieram os cursos de aperfeiçoamento, que a SEMED -- em parceria com o Ministério da Educação e Cultura (MEC) --, ofertou aos professores da Rede Municipal de Ensino que atuavam em turmas dos

anos iniciais do Ensino Fundamental, tais sejam, o GESTAR I[1] Matemática e em outro ano o Curso Pró-Letramento[2] de Matemática, com carga horária de 120 horas cada um.
Cursos que contribuíram para melhorar os conhecimentos quanto ao trabalho com a Matemática e por vivenciar uma assessoria com professores da Universidade Federal do Espírito Santo, Universidade Federal de Alagoas e Instituto Federal de Alagoas. Era um constante movimento de discussão sobre os temas da Matemática (Números e operações, Espaço e Forma; Tratamento da Informação e Medidas). Nesse período, pude perceber o quanto a Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental precisa ser melhor compreendida pelos que atuam na área, pois a falta de conhecimento dos conteúdos do Ensino Médio podem desencadear sérios problemas para o bom desempenho do trabalho com as crianças. Como por exemplo, ensinamos, no 5º ano, subtrações com recurso, e informamos aos alunos que não podemos subtrair um número maior de um número menor, entretanto, sem a condição de existência do conjunto dos naturais, quando o aluno chega ao 6º ano, ele descobre que pode subtrair, porque existe o conjunto dos números inteiros.

A minha trajetória pela Universidade Federal de Alagoas (UFAL) não foi o que esperava, mas tentei aproveitar as oportunidades. Por ser da primeira turma da Pedagogia, do período noturno, foram muitos os desafios, que não me impediram de buscar o aperfeiçoamento profissional. A universidade ampliou as informações, e me deu a possibilidade de conhecer alguns teóricos, como Piaget, Vygostky, Wallon, dentre outros, porém, deixou muitas lacunas de conteúdos, fundamentais para compreensão das disciplinas, e para possíveis intervenções pedagógicas.

Depois que conclui o curso de Pedagogia, não foi fácil retomar os estudos e fazer alguns cursos, pois, a vida acadêmica ficou cada vez mais inacessível, visto que passei a trabalhar o dia todo, e surgirem outras prioridades. A oportunidade só apareceu depois de oito anos de formada, com a chegada de novos professores ao Centro de Educação (CEDU/UFAL), um ponto fundamental para que eu desse uma guinada, em minha vida profissional. Nessa ocasião, surgiu a oportunidade de cursar a disciplina Didática da Matemática, uma influência francesa, nos currículos de Matemática da Educação Básica e da formação inicial de professores, e Currículo da Matemática. Esta nova chance levou-me a caminhar para o Grupo de Pesquisa em Educação Matemática (GPEM), formado por um grupo de pedagogos e professores, graduados em Matemática, que se constituiu em um espaço

[1] Programa Gestão da Aprendizagem Escolar (GESTAR I), oferecido pelo Ministério da Educação (MEC), 2005.
[2] Programa de Formação Continuada de Professores das séries iniciais do Ensino Fundamental. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008.

de reflexão, sobre Educação Matemática, imbuído de diferentes opiniões e experiências, contexto que me possibilitou movimentar a minha prática pedagógica e despertar o meu interesse, em aprofundar os estudos na área da Educação Matemática.

Nesse momento, em especial, surgiram às leituras sobre o Campo Conceitual Aditivo, e o conhecimento de alguns autores fundamentais, para esse estudo como: Brousseau (2008), Carvalho (2005), Panizza (2006), Lins (2005), Vergnaud (2009), Maranhão (2006) o que suscitou muitas curiosidades, e o interesse em pesquisar sobre os números inteiros negativos no Ensino Fundamental I. Conforme Lins (2005), o centro da atividade profissional do professor é ler os alunos e tomar decisões sobre o que está acontecendo e como seguir. O professor precisa ser formado, para interagir com alunos reais, no sentido de possibilitar a revelação de conceitos e propriedades matemáticas, empregadas implicitamente pelos alunos.

Em 2011, ingressei no mestrado profissional em Ensino de Ciências e Matemática, com a intenção de pesquisar sobre a subtração, e, após as leituras e discussões de textos voltados para o tema, ficou a indagação de como os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental resolvem problemas de subtração, envolvendo os números negativos. Esta inquietação contribuiu para a escolha do objeto de estudo desta pesquisa.

Diante do exposto, as discussões no grupo de pesquisa, e com os professores, na formação continuada; e as indagações relacionadas ao ensino e aprendizagem, referentes aos números negativos persistiam. Deste modo, o meu desafio consistiu em compreender as estratégias que os alunos -- do 1º ao 5º anos do Ensino Fundamental – utilizam, para resolver problemas de subtração, com números negativos.

Vale salientar que essa pesquisa é o primeiro estudo, no Estado de Alagoas, e no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM), a tratar conceitos por meio da análise dos conhecimentos dos alunos, sobre o número inteiro negativo. Dessa forma, o contato com a literatura trabalhada nas disciplinas oferecidas no mestrado -- Pesquisa Educacional, Teorias de Aprendizagem, Ensino de Ciências I e II --, assim como as discussões desenvolvidas em sala de aula e no Grupo de Pesquisa em Educação Matemática (GPEM), levaram-me à definição do aporte teórico e do objeto de pesquisa.

Diante do exposto, tive como pergunta central da pesquisa: “Como os alunos do 1º ao 5º ano, do Ensino Fundamental resolvem problemas de subtração, com números negativos?”.

Sendo assim, tenho como objetivo geral investigar as estratégias de resolução de problemas dos alunos dos 1º ao 5º ano, do Ensino Fundamental, acerca dos números negativos. Para alcançar este objetivo, tracei os objetivos específicos:

- ✓ Investigar os conhecimentos dos alunos do 1º ao 5º anos do Ensino Fundamental sobre números negativos por meio de atividades.
- ✓ Analisar as estratégias de resolução de problemas dos alunos nas atividades propostas.
- ✓ Elaborar um caderno de atividades e uma oficina sobre o tema em questão.

Este trabalho foi dividido em cinco seções. Na introdução é apresentada a trajetória profissional da autora, as motivações que a levaram a esta investigação, o objetivo e a problemática, referente ao tema. Na primeira seção foi feito um breve resgate histórico sobre número negativo, na perspectiva de diferentes pesquisadores que tratam do tema, como, Vergnaud (2009), Borba (1998), D'Albertas (2006), Passioni (2002), Van de Walle (2009), Maranhão, Camejo e Machado (2008), e dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 2001), dentre outras fontes. Na segunda seção, foi realizado um recorte sobre a resolução de problemas, com números negativos. Na terceira seção, são apresentados os procedimentos da pesquisa, incluindo a caracterização das instituições e dos sujeitos que participaram da investigação, como também, a descrição das atividades escritas, aplicadas, para a coleta de dados e análise. A quarta seção aborda a análise quantitativa dos dados coletados, durante a investigação, indicando que os alunos do 1º ao 5º ano resolvem problemas envolvendo número negativo. Na quinta seção, fazemos a análise dos dados e destacamos as estratégias de resolução usadas pelos alunos participantes da investigação, considerando a análise de conteúdo e o aporte teórico da metodologia de resolução de problemas e do campo aditivo. Os dados obtidos foram analisados de modo quantitativo e qualitativo.

O trabalho é concluído por meio das considerações finais, que evidenciam as conclusões, acerca dos resultados obtidos nesta investigação, perspectivas para trabalhos futuros.

1 REVISÃO DA LITERATURA

> Permitir que o sujeito seja problematizador significa possibilitar que os estudantes desejem saber por que as coisas são como são, questionar, procurar soluções e solucionar incongruências. Significa que tanto o currículo quanto o ensino devem começar propondo problemas, dilemas e questões_ desafios_ para os estudantes. (HIEBET et al., 1996, p. 12).

1.1 Resgate histórico dos números negativos

A Idade Antiga foi marcada pelas conquistas das grandes civilizações. Dentre elas, surge a civilização babilônica, a egípcia, a grega e a chinesa. Autores, como Eves (2004) e Boyer (2002) destacam que nas civilizações babilônicas e egípcias não foram encontrados registros de uso dos números negativos.

Segundo Eves (2004) e Boyer (2002), na China, o livro chamado I-Khing -- ou livro das Permutações --, datado do período Shang, uma dinastia surgida por volta de 1500 a.C., que ruiu por volta de 1027 a.C. Dos trabalhos de Matemática remotos encontrados, este foi um dos mais antigos. Acredita-se que esse livro tenha sido escrito por Wön-Wang (1182-1135 a.C.). É nele que se encontra o mais antigo exemplo de quadrado mágico, de que se tem registro.

O mais importante dos textos de Matemática, dos chineses antigos, é o K´ui-cb´ang Suan-shu, ou os Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática, datado do período Han, que foi uma dinastia surgida por volta de 206 a.C-221 a.C. Nesse livro, constam 246 problemas sobre agricultura, procedimentos em negócios, engenharia, resolução de equações e propriedades de triângulos e retângulos. Esta obra passou a ser significativa, por conter a solução de problemas sobre equações lineares, usando, tanto números positivos, quanto negativos. Nesse sentido, Boyer (2002, p. 137) afirma que

> A ideia de números negativos parece não ter causado muitas dificuldades aos chineses, pois estavam acostumados a calcular com duas coleções de barras - vermelha para coeficientes positivos ou números e uma preta para os negativos. No entanto, não aceitavam a ideia de um número negativo podia ser a solução de equação

Os últimos séculos do segundo milênio a.C. ressaltaram muitas mudanças econômicas e políticas. Algumas civilizações desapareceram e outros povos, especialmente os gregos, passaram para o primeiro plano. Foi na Grécia Antiga que surgiu o berço da matemática pitagórica -- escola pitagórica --, onde, pela primeira vez na área da Matemática, o homem começou a indagar “como” e “por quê?”. Dentre as mais variadas contribuições dos pitagóricos, à Matemática, está o famoso teorema de Pitágoras. Eves (2004, p. 97), referindo-se à escola pitagórica, afirma que “Ela baseava-se na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros”. E, estes mesmos números são abstrações, que surgem do processo de contar coleções finitas de objetos. Nesse contexto, surgiu a figura de Diofanto de Alexandria (250 a.C-350 a.C), conforme Eves (2004, p. 207). Diofanto escreveu três trabalhos: Aritmética, da qual só restam seis de treze livros; Sobre Números Poligonais do qual restaram apenas fragmentos, do original; e Porismas, que se perdeu. Diofanto foi frequentemente chamado o pai da álgebra, por introduzir notações abreviadas, para representar potências e quantidades desconhecidas e, além disso, por abordar a resolução de equações algébricas, sem se utilizar da Geometria.

Embora Diofanto tenha dado várias contribuições à álgebra, ele não fez nenhuma menção aos números negativos. No entanto, no começo do livro I da sua “Aritmética”, que consiste em uma coleção de 150 problemas, ele expôs uma declaração muito importante, a respeito do que hoje é a multiplicação de números negativos, quando afirma que o que está em falta, multiplicado pelo que falta, resulta em algo positivo; enquanto que o que está em falta, multiplicado pelo que é positivo, resulta em algo que está em falta. Nesse sentido, pode-se observar que os matemáticos gregos já conheciam a famosa regra de sinais “menos por menos dá mais” e “menos por mais dá menos” ainda muito empregada nos dias de hoje. Mesmo tendo um enfoque prático, Diofanto sinaliza a necessidade da criação de um novo “tipo” de número, ainda que na prática diária daquela época esses números não fossem tão importantes.

Na época de 200 d.C a 1200, a civilização de Alexandria influenciou os hindus e, como conseqüência, a Matemática hindu sofreu a mesma influência (KLINE, 1972). Um dos notáveis matemáticos indianos foi Brahmagupta, que nasceu na cidade de Ujjain, na Índia central, em 628 d.C. e escreveu a obra denominada BrahmasphutaSidd`hanta (“A abertura do universo”). Como era matemático e astrônomo, escreveu esse livro sobre astronomia, em vinte capítulos, dos quais o 12º e o 18º tratavam da matemática. Em sua obra, define o zero como resultado de uma subtração de um número por ele mesmo. Sistematiza a aritmética dos números negativos, e do zero, traz a adição e a multiplicação, e também, introduz os números negativos, em termos de fortunas (números positivos) e débitos (números negativos). Trazem em sua obra, também, as seguintes regras operatórias, com os números negativos: positivo dividido por positivo, ou negativo dividido por negativo, é afirmativo. Cifra dividida por cifra é nada. Positivo dividido por negativo é negativo. Negativo dividido por positivo é negativo.

Positivo ou negativo dividido por cifra é uma fração com esse denominador. Brahmagupta confundiu-se um pouco ao fazer a afirmação de que 0:0=0, mas na questão de a: 0 para a # 0 ele não se comprometeu (BOYER, 2002).

Contudo, a visão dos números negativos, como débito, não cumpria o requisito da necessidade de uma metáfora, que tinha sido adotada pelos gregos, ou seja, a ideia de débito não era um modelo, em termos de realidade (MEDEIROS, A.; MEDEIROS, C., 1992).

Outro grande matemático hindu foi Baskara (1114 até, cerca de 1185), o mais importante matemático hindu, do século doze. Escrevia sobre matemática e astronomia. O seu livro mais famoso foi Siddahanta S`iromani ("Diadema sobre um sistema astronômico"). Esta publicação fez poucas alterações, em relação ao trabalho de Brahmagupta, escrito cinco séculos antes. Baskara foi o último matemático, da época medieval, na Índia, e sua obra representa a conclusão de contribuições hindus anteriores. Em seu tratado conhecido, o Lilavati, ele selecionou problemas de Brahmagupta e outros, acrescendo observações próprias, originais.

Os títulos mais importantes de Bhaskara são Lilavati e o Vija-Ganita, que contêm vários problemas sobre os tópicos dos hindus, como equações lineares e quadráticas, tanto determinadas, quanto indeterminadas, simples mensuração, progressões aritméticas e geométricas e outros. Em um desses livros, Baskara resolve uma equação do segundo grau e encontra as raízes 50 e -5 como soluções do problema. Quanto ao número -5 foi considerado inadequado devido a não aceitação de soluções negativas. Bhaskara afirmava, ainda, que raízes negativas não poderiam existir, porque um número negativo não é um quadrado. Fez isso, sem dar definições, axiomas ou teoremas, e com isso os números negativos ganharam uma pequena aceitação (BOYER, 2002; EVES, 2004).

Bhaskara morreu pelo fim do século doze, e, por vários anos, houve poucos matemáticos na Índia de importância comparável. É importante observar, no entanto, que Srinivasa Ramanujan (1887-1920), o gênio hindu do século vinte, possuía a mesma habilidade em aritmética e álgebra, que Bhaskara. Em sua obra, observamos o caráter desorganizado, a força do raciocínio intuitivo, e o pouco caso pela geometria. Destacamos um exemplo bastante interessante deste autodidata:

> O matemático inglês G. H. Hardy, uma vez, visitou Ramanujan, num hospital, em Putney e mencionou ao seu amigo que viera em um táxi com o número desinteressante – 1729 --, e Ramanujan imediatamente observa que esse número ao contrário é interessante, pois é 19, o menor inteiro que pode ser representado de dois modos diferentes como a soma de dois cubos: 12 + 123 = 1728 = 93 + 103 (BOYER, 2002, p.153).

Nesse contexto, os árabes tiveram sua contribuição para o aprimoramento do sistema de numeração hindu, por meio dos trabalhos dos seus grandes matemáticos. Porém, mesmo conhecendo os números negativos, eles não foram utilizados pelos árabes, na Idade Média.

Ainda que muitos matemáticos europeus, nos séculos XVI e XVII, não considerassem os números negativos, que não apreciam em seus cálculos porque eles os consideravam falsos ou impossíveis. Um matemático Belga Simon Stevin (1548-1620) muito contribuiu para o processo de introdução dos números negativos, no meio acadêmico, quando aceitou esse tipo de número como raízes e coeficientes de equações, com uso da proposição de que raízes negativas das equações são as raízes positivas da equação obtida, pela substituição de x por (-x), ou seja, se -2 era raiz de uma equação $x^2 - px = q$, isto acarretava que +2 é raiz de $-x^2 + px = -q$. Deste modo instalava-se a possibilidade da adição de x + (-y) em lugar de considerar a subtração de y de x. Do mesmo modo, justificou, geometricamente a regra da multiplicação de números negativos com a utilização da identidade algébrica: (a-b). (c-d) = ac- bc – ad + bd. Seu uso resumiu-se a artifício de cálculo cuja conquista os cálculos justificavam seu uso.

A obra ‘Ars Magna’, de Girolamo Cardoso (1501-1576), dividiu os números em “números verdadeiros”, ou seja, os números considerados reais, em sua época, naturais, frações positivas e alguns racionais; e “números fictícios” ou “números falsos” que, para ele, representavam os números negativos e suas raízes complexas. A situação dos números negativos mudou, quando foi descoberta uma interpretação geométrica dos números positivos e negativos, como sendo de direções opostas, isso por volta do século XVIII. Os números negativos começaram a aparecer, espontaneamente, em trabalhos científicos.

Os símbolos “+”, “–” e “=“foram introduzidos por François Viète (1540 -1603), contudo se referiam, apenas, à operação de subtração entre números ‘verdadeiros’, isto é, positivos. Ele acreditava que os números negativos eram desprovidos de significado intuitivo e físico, mas, mesmo assim, acabou contribuindo para o aperfeiçoamento dos números negativos, por meio da inserção de uma nova notação, que, no futuro, passou a ser utilizada pelos matemáticos.

A obra La Géometre, de Descartes (1596-1650), integra a aplicação da álgebra à geometria, o que gerou a geometria cartesiana. Considerava-se como ‘falsas’, as raízes negativas, por serem ‘menores que nada’ e transformou as raízes negativas em positivas, demonstrando sua insegurança diante dos números negativos. Assim, estabelecia que o número de raízes “verdadeiras” era igual a, no máximo, ao número de sinais, nos coeficientes da equação.

Nos séculos XVI e XVII, os números negativos passaram a ser modestos símbolos, e os que os aceitavam não os admitiam como raízes de equações, e assim surgiu a "raiz falsa", em equação diofantina, com o propósito de se obter uma "solução aceitável". A expansão dos números negativos não ocorreu de forma imediata, por isso, esta descrença permaneceu, até o século XIX.

A história dos números negativos começou a mudar no final do século XVII, quando apareceu o livro "Tratado de Álgebra" (1748), obra de Colin MacLaurin (1698-1746), que se tornou referência na Grã-Bretanha, pois abordou definições sobre quantidades negativas, o que representou um grande avanço para época. Neste livro, McLaurin expõe a ideia de que uma quantidade negativa é tão real, quanto uma positiva, mas em sentido oposto. Porém, ele sustentava que esta quantidade só existiria, por comparação, nunca isoladamente. Neste sentido, McLaurin mencionou: se uma quantidade negativa não possui outra que lhe seja oposta não se pode desta subtrair outra menor. Isto é, MacLaurin somente admitia quantidades negativas, em relação ao zero de origem, o que causava muitas inquietações, e provocava a não distinção entre o zero absoluto e o zero relativo, à origem. Ele foi o primeiro matemático moderno que conseguiu chegar próximo de compreender os números negativos, e, por isso, tornou-se referência para outras gerações de matemáticos.

Um dos mais importantes matemáticos do século XVIII foi Leonhad Euler (1707-1783), que, em uma de suas obras tentou justificar a regra de sinais. Ele não compreendia ainda porque os números negativos eram menores que zero, mas sim, que eram uma quantidade que se pode representar, por uma letra precedida do sinal – (menos).

A compreensão dos números negativos instigou as mentes matemáticas mais favorecidas. Além de Euler, D Alembert (1717–1783) também demonstrou essa incompreensão, enciclopedista, e se mostrou confuso, em face da assimilação dos números negativos, de acordo com o artigo "Negativo": "Dizer que as quantidades negativas estão abaixo de nada é afirmar uma coisa que não se pode conceber"; e "Quantidades negativas encontradas no cálculo algébrico indicam realmente quantidades positivas que supusemos numa falsa posição. O sinal de menos que encontramos antes de uma quantidade serve para retificar um erro que cometemos na hipótese inicial" (GLAESER, 1985, p. 73).

Augustin Louis Cauchy (1789-1857) foi responsável por mais um momento confuso da história dos números negativos, pois, em um dos seus artigos definiu as leis de crescimento e diminuição, respectivamente, pelos sinais + e - (operatórios) e, em seguida, definiu quantidades negativas como grandezas que diminuem, representadas por um número precedido do sinal – (menos); e positivo, precedido pelo sinal + (mais). Porém, estas definições caem em contradição, porque podemos diminuir um número (grandeza) positivo, multiplicando por um fator entre 0 e 1, e, além disso, o produto de duas quantidades negativas resultaria em um aumento, o que contradiz as definições cauchynianas.

Hermann Hankel (1823-1873) publicou, em 1867, a “Teoria do Sistema dos números Complexos”, que conseguiu, com suas demonstrações, descobrir por completo algumas dúvidas, relacionadas com os números relativos. Dentre elas, formulou o princípio de permanência das formas equivalentes e das leis formais, que estabelece um critério geral de algumas aplicações do conceito de número, que atinge o máximo de compreensão, sobre os números relativos. Hankel (1867) afirmava que os números não são descobertos, e sim, inventados, imaginados. Isto é, aqueles que se aventurarem em procurar todas as explicações lógicas na natureza, ou mundo real, jamais conseguirão adquirir maturidade, em termos de conceitos matemáticos, que outrora, eram definidos para um mundo ideal. Sob esta linha de raciocínio, ele abandonou o ponto de vista "concreto", baseado em exemplos práticos e passou a adotar o "formal", a partir das propriedades aditivas de IR, e multiplicativas em IR+. Hankel (1867) propôs estender estas propriedades de IR+ a IR (BOYER, 2002; EVES, 2004).

Finalmente, no final do século XIX, os números negativos puderam ser aceitos plenamente, processo que, segundo Glaser (1985), levou cerca de 1500 anos para que a regra de sinais não oferecesse nenhuma dificuldade de compreensão.

1.2 Dos números naturais aos números relativos

Para Gérard Vergnaud (2009), educador francês, na teoria dos campos conceituais, os problemas de adição e subtração formam o campo conceitual aditivo e envolve ideias diferentes: composição, transformação e comparação. Para este pesquisador, o conjunto dos números naturais não é suficiente para representar as transformações, pois

> Os números naturais não são positivos e nem negativos, uma vez que correspondem a medidas e não a transformações. Os números naturais são <u>números sem sinais</u>. Se os números naturais são números sem sinal, eles não podem representar transformações, posto que estas sejam necessariamente positivas ou negativas. É preciso então introduzir outro conjunto de números dotados de sinais, “os números relativos”. Estes números representam adequadamente as transformações aditivas (adições e subtrações) que podem ser aplicadas à medida de um conjunto de objetos isoláveis, acrescentando elementos a este conjunto ou deles os retirando. Vamos designar por **Z** este conjunto de números relativos Z = {... –n,..., -cinco, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3,..., +n...}. Os números naturais representam medidas dos conjuntos de objetos isoláveis. Os números relativos representam as transformações que essas medidas sofrem. (VERGNAUD, 2009, p. 199)

E, de acordo com Vergnaud (1996, p. 167), o campo aditivo é “um conjunto das situações que exigem uma adição, uma subtração ou uma combinação destas duas operações” para resolver as situações problema.

O Campo Conceitual das Estruturas Aditivas é, por um lado, o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias adições ou subtrações e, por outro lado, o conjunto dos conceitos e teoremas, que permitem analisar essas situações como tarefas matemáticas (VERGNAUD, 1993).

Nas estruturas aditivas, encontramos três grupos básicos de problemas que, segundo suas características, podem ser classificados em: composição, transformação e comparação, conforme Magina et al. (2001, p 20-21) citam, baseados nos estudos de Vergnaud (1982):

> a) **Problemas de composição**: compreendem as situações que envolvem parte-todo – juntar uma parte com outra parte para obter o todo, ou subtrair uma parte do todo para obter a outra parte.
> b) **Problemas de transformação**: são aqueles que tratam de situações em que a ideia temporal está sempre envolvida – no estado inicial tem-se uma quantidade que se transforma (por acréscimo ou decréscimo), chegando ao estado final, com outra quantidade.
> c) **Problemas de comparação**: dizem respeito aos problemas que checam duas quantidades, uma denominada referente e a outra, o referido.

O desenvolvimento do raciocínio aditivo pode ser observado claramente quando apresentamos aos alunos problemas mais complexos, que exigem a utilização de raciocínios, que vão além da aplicação direta de algoritmos.

Desse modo, para trabalhar com os problemas do campo aditivo envolvendo transformações, é necessário utilizar outro conjunto numérico, os números relativos, que tem sinais (+) e (-). E, pesquisa na área da Educação Matemática aponta para

> O conhecimento implícito dos alunos sobre os conteúdos matemáticos (no caso, números negativos). Em geral, durante as aulas, não lhes possibilitam falar sobre seus saberes, suas hipóteses, e acabamos planejando atividades seguindo um currículo tradicional, pensado para outra época. Além disso, é um equívoco falar às crianças que não podemos subtrair um número menor de outro maior, porque estaremos desconsiderando o conjunto dos números inteiros e criando um grande problema, já que no 6º ano, elas saberão que pode (CARVALHO, 2010, p. 47).

Conforme Borba (2009), números inteiros, semelhantes aos números naturais, podem ter significados diferentes. Alguns significados são: medida, transformação, relação. E estas variações estão presentes no cotidiano, em vários contextos, nos quais o número inteiro relativo se faz presente, tais como: saldos bancários, saldos de jogos, localizações, medidas de temperatura, de altitude, dentre outros. E estas variações possuem formas convencionais e não convencionais, nas suas representações. Ao se referir a um número negativo, pode-se usar a linguagem falada ou escrita: “um débito de R$50,00, “R$30,00 a menos que ontem, “uma perda de R$15,00”, “um decréscimo de 20 graus”, dentre várias outras possibilidades”. Por escrito, as mesmas situações seriam representadas por -50, -30, -15.

Nos diversos contextos, segundo Borba (2009), números positivos e negativos podem ser representados pelos mesmos valores, mas podem possuir significados diferentes. Assim, -7 podem representar uma **medida negativa** (dinheiro devido, temperatura abaixo de zero, uma medida abaixo do nível do mar, um saldo devedor num campeonato etc.), **uma transformação negativa** (dinheiro retirado ou gasto, queda da temperatura, queda do nível da água num reservatório, pontos perdidos num jogo, etc.) ou ainda, uma **relação negativa** (dinheiro, temperatura, água ou pontos ‘a menos' do que uma medida inicial). Assim, ter um saldo de R$7,00, ganhar R$7,00 ou ter R$7,00 a mais, do que se tinha antes, podem ser matematicamente representados pelo mesmo símbolo (+7), mas, cognitivamente, envolvem diferentes significados, quais sejam, uma medida positiva de 7, uma transformação positiva de 7 ou uma relação positiva de mais 7.

Sendo assim, é fundamental que a resolução de problemas esteja presente durante todo o Ensino Fundamental, o que implica variar as situações, de maneira a não ficar apenas repetindo, ao longo da formação inicial do estudante, problemas que requeiram dele um único raciocínio, visto que as situações aditivas envolvem diferentes conceitos, que fazem parte dessas estruturas como: conceito de medida; conceito de adição; conceito de subtração; conceito de transformação de tempo; relações de comparação; e composição de quantidades. De acordo com Nunes et al. (2005, p. 48),

> As crianças desenvolvem na vida diária esquemas de ação que elas usam para resolver problemas simples de matemática. Esses esquemas de ação precisam ser coordenados com o sistema de numeração para que a criança possa resolver mesmo os mais simples problemas de adição e subtração. Sem coordenar os esquemas de ação com o sistema de numeração, a criança não poderá dar uma resposta numérica aos problemas. Portanto, a origem dos conceitos mais simples de adição e subtração requer a coordenação entre os esquemas de ação e os sistemas de sinais culturalmente desenvolvidos_ nesse caso, o sistema numérico é usado para contar.

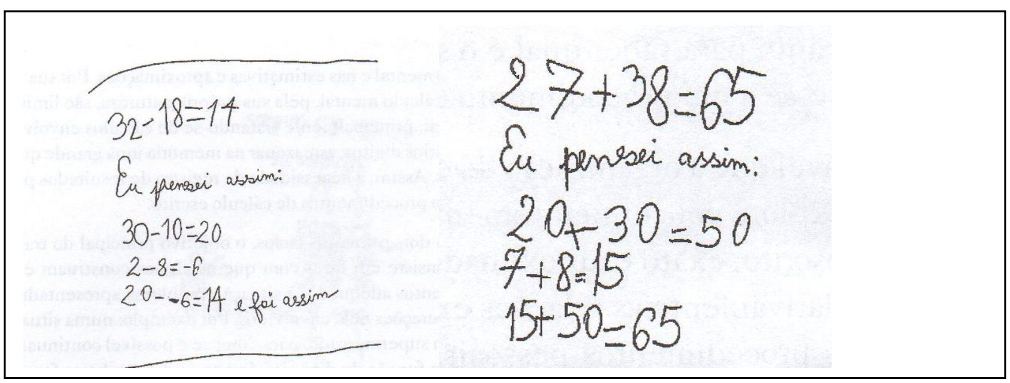
Passioni, na sua dissertação de mestrado, defendida no ano de 2002, investigou a necessidade de oportunizar aos alunos das terceiras séries – hoje, do 4º ano do Ensino Fundamental --, o contato com os números negativos. Este pesquisador entende que “a utilização de números negativos é inevitável” para resolução de problemas aditivos ao se considerar a teoria de Vergnaud (1996). Os resultados obtidos por este investigador revelam ser possível e vantajoso incluir os números negativos, no currículo do 4º ano, e ainda, faz alguns questionamentos como: será que poderiam ser apresentados, ainda mais cedo? Por exemplo, na primeira série (2º ano)? Ou talvez, na educação infantil?

Borba (2009) aponta várias pesquisas e estudos, referentes aos números negativos, com alunos em diferentes faixas etárias, que foram capazes de resolver expressões numéricas, que envolviam adição e subtração, de números positivos e negativos, mesmo sem terem sido instruídos sobre estas operações. Para estes alunos, somar (-2) com (-3) resulta em (-5), à semelhança da conhecida operação 2+3=5. De forma similar, (-5)-(-3) resulta em (-2), assim como 5-3=2.

Desse modo, o conjunto dos números inteiros ainda é um mistério para professores e alunos. Faz-se necessário descobrir o que tem influenciado a compreensão dos conceitos, no caso dos números inteiros relativos, conforme o posicionamento de Maranhão, Camejo e Machado (2008) -- no que se refere ao trabalho com os números negativos --, porque, para estas pesquisadoras, a aritmética dos números inteiros requer conhecimento, por parte dos professores que atuam nos anos iniciais. Isto porque, “os conceitos e propriedades algébricas sustentam diversas estratégias utilizadas pelos alunos” (MARANHÃO; CAMEJO; MACHADO, 2008, p. 15).

No PCN de Matemática, há uma atividade que demonstra a criança, operando com número negativo.

Figura 1 – Crianças operando com números negativos.



Fonte: PCN de Matemática (2001, p. 115).

Então, por que não incluir esse conteúdo em nosso currículo, por meio de jogos e situações-problema, ou em pesquisas, que envolvam crianças da Educação Infantil e Ensino Fundamental? Carvalho (2010) constatou que as crianças operam com números negativos, por meio de situações-problema, o que revela que as mesmas têm conhecimentos implícitos, sobre o conjunto dos números inteiros.

D'Albertas (2006), professora da 1ª série de uma escola particular da cidade de São Paulo, investigou os procedimentos dos seus alunos, na resolução dos algoritmos da subtração e constatou que, pelo fato deles compreenderem a propriedade comutativa da adição (a ordem das parcelas não altera a soma), aplicavam-na subtração. No entanto, a subtração, segundo Vergnaud (1996), não é uma operação do conjunto dos números naturais, porque nem sempre o resto é positivo, por isso, é uma operação do conjunto dos inteiros. Para D'Albertas (2006, p. 39),

> Em muitos procedimentos pude notar que os alunos, por conhecerem a propriedade comutativa da adição, aplicam-na também a subtração. Ocorre que a subtração nem é uma operação no conjunto dos naturais: {0, 1, 2, 3,...}. Pois, nem sempre o resto de uma subtração de naturais é um número natural. Ela é uma operação apenas no conjunto dos números inteiros {, -2, -1, 0, 1, 2,...}. Assim, a propriedade comutativa da adição nos naturais 'aplicada' à subtração nos números naturais não é válida. No entanto, é válida a propriedade da adição nos naturais "aplicada" à subtração nos inteiros. Isso porque, em verdade, uma subtração como 2 - 8 podemos ser representadas como uma soma: 2 + (-8).

Deste modo, a escola e todos os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem podem contribuir para que a sala de aula seja, para os alunos, um espaço formador, um lugar onde eles sejam estimulados a pensar, a elaborar, a expressar melhor suas ideias, e, ao mesmo tempo, refletir sobre a ação, refazê-la e modificá-la. Para Castro e Carvalho et al. (2007, p. 139),

> A perspectiva do professor reflexivo/investigativo abre a possibilidade para a transformação da escola num espaço de desenvolvimento pessoal, profissional e organizacional aberto a projetos emancipatórios. Que esta via também nos permite vislumbrar na vivência da sala de aula e nos ambientes escolares "o máximo de sabor possível".

Nesse sentido, Borba (2009, p. 66) acrescenta, que,

> Embora números negativos sejam trabalhados formalmente na escola a partir do terceiro ciclo do Ensino Fundamental -- em geral a partir da 6ª série[1]_ alguns dos significados destes números são trabalhados em problemas muito antes de sua introdução formal. Os significados de transformação negativa_ decrescer uma quantidade inicial_ estão presentes em muitos problemas aditivos trabalhados nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Dessa forma, embora não se utilize, necessariamente, nas séries iniciais a simbologia matemática formal para representar números negativos (o sinal –), desde cedo significados dados aos números relativos estão presentes nos problemas trabalhados na escola.

Dessa forma, diante das pesquisas mencionadas, o tema de investigação proposto -- Estratégias de resolução de problemas de subtração dos alunos do 1º ao 5º ano, do Ensino Fundamental -- de uma escola pública de Maceió --, sobre os números negativos, mostra-se pertinente por intencionarmos que venha a contribuir para diálogo entre os professores, o que é importante para o trabalho pedagógico com a Matemática, como também, pela importância do contato com a literatura, que pode apontar caminhos, para a resolução de problemas que envolvam os números negativos. Assim, a próxima seção abordará da resolução de problemas como ponto de partida para o trabalho pedagógico.

2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UM DESAFIO CONSTANTE

> Todo conhecimento deve possuir um frescor e uma novidade perpétuos, uma inocência sempre nascente, sem a qual o contratos de nosso espírito com o real deixa de ter sentido. O verdadeiro conhecimento deve descobrir-nos o universo em cada instante, como se nos fizesse assistir ao seu nascimento.
> (Louis Lavelle).

Estudos e pesquisas, realizados nas últimas décadas, na área da Educação Matemática, apontam para a resolução de problemas, como um caminho metodológico recomendado para o ensino. Além de ser entendida como uma metodologia de ensino, a resolução de problemas constitui-se em um eixo norteador, para o ensino da Matemática, o que implica fazer mudanças nas concepções de ensino e aprendizagem, com a participação de todos os envolvidos, no processo.

Para Onuchic (1999, p. 208) a relação entre a compreensão conceitual e a resolução de problemas é muito pequena, pois, "à medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e mais rica, sua habilidade em usar a matemática para resolver problemas aumenta consideravelmente". Então, autores que pesquisam sobre o tema, destacam etapas e passos experimentados durante o processo, que se baseia na heurística (POLYA, 2006), para o primeiro passo da resolução de problemas envolve a compreensão da conjuntura, para que se tome conhecimento, do problema. O segundo passo deve ser identificar a ligação da incógnita com os dados, para escolher o que fazer; no terceiro passo, deve constar a elaboração e execução de procedimentos de solução; e, no quarto passo, a validação e checagem da resposta do problema.

Embora, pareça um procedimento mecânico, a resolução de problemas desenvolve, conforme Azerêdo, Farias e Rêgo (2012, p. 151)

> a capacidade de compreensão dos enunciados, a comunicação e interlocução entre os alunos e entre os professores, abrangendo o levantamento de hipóteses, a descoberta e construção de estratégias pessoais e de cálculo, a argumentação e a justificativa dos procedimentos utilizados.

E Carvalho (2005, p. 128) acrescentam que:

> Diversos autores ressaltam a importância da linguagem escrita nas aulas de Matemática, entendendo-a tanto como um instrumento que possibilita a atribuição de significados, deste modo, a apreensão de conceitos, quanto como uma ferramenta alternativa de diálogo, na qual o processo de avaliação e reflexão sobre a aprendizagem é continuamente mobilizado.

Neste sentido, trabalhar na perspectiva da resolução de problemas requer um constante movimento de reflexão, entre professores e alunos, e o modelo heurístico pode ser visto como um guia a ser seguido, quando se tenta resolver um problema. Neste sentido, Diniz (2001, p. 87) destaca:

> Analisar a Resolução de Problemas como uma perspectiva metodológica a serviço do ensino e da aprendizagem de matemática amplia a visão puramente metodológica e derruba a questão da grande dificuldade que os alunos e professores enfrentam quando se propõe a Resolução de problemas nas aulas de matemática. A utilização de recursos da comunicação pode resolver ou fazer com que não existam essas dificuldades.

Não se aprende Matemática, somente resolvendo problemas, é preciso, ainda, um processo de reflexão sobre eles. Segundo Panizza (2006 p. 51), o conhecimento:

> Deve permitir tomar decisões diante de um problema que deve ser resolvido, também deve permitir comunicar os procedimentos escolhidos; defender e validar o que foi feito; confrontar e comparar como que os outros fizeram e também deve permitir reconhecer a relação que esse conhecimento tem com os saberes culturais que a escola tenta transmitir.

A circulação do saber, entre todos os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem, tanto durante como depois da resolução de problemas, permite verificar o que se sabe e possibilita a apropriação das estratégias, verificando qual a mais adequada para a solução do mesmo, pois isto favorece a construção do sentido e, consequentemente, a aprendizagem dos conteúdos do ensino.

Nessa direção, problematizar situações possibilita a mobilização de conhecimentos implícitos, tratados na teoria de Vergnaud (2009, p. 197), na qual, optamos estudar a categoria do campo aditivo. E sobre esta teoria, ele acrescenta que:

> ‘problemas do tipo aditivo’, estamos entendendo todos aqueles cuja solução exige tão somente adições ou subtrações, do mesmo modo pelo qual entendemos por ‘estruturas aditivas’ as estruturas em que as relações em jogo são formadas exclusivamente por adições ou subtrações.

Tendo em vista que a subtração é um conteúdo da categoria do campo aditivo, as pesquisas de educadores matemáticos, como Starepravo (1997), Nunes et al. (2005), Carvalho (2005), Maranhão, Camejo e Machado (2008), Vergnaud (2009) destacam o papel da relação entre adição e subtração no ensino da Matemática. Esses estudiosos refletem sobre a importância de aprender conceitos para a compreensão do conteúdo matemático e, ainda, sobre a perspectiva de orientar os alunos em tomadas de decisão por meio da explicitação de suas resoluções.

Procurando ampliar o estudo, acerca da compreensão de conceitos, defendo que o ensino de Matemática seja desenvolvido pela via de situações-problema, e não, de exercícios, pois, isto evita uma ação do aluno, com base no conhecimento social, no empírico, e na resolução da conta, pela simples conta. Nessa direção, Starepravo (1997, p. 66) enfatiza que "contas isoladas, principalmente quando devem ser resolvidas de acordo com um modelo previamente estabelecido, não ajudam no desenvolvimento do raciocínio, pois não exigem dos alunos o estabelecimento de relações. Passam a ser uma atividade mecanizada".

Deste modo, propiciar aos alunos a explicitação de seus saberes não apenas beneficia o desenvolvimento de seu pensamento, como também contribui para o professor refletir acerca de sua prática docente.

Resolver problemas, nos dias atuais, tornou-se hábito, porém a escola ainda não percebe que, para ensinar qualquer conteúdo, independente da área do conhecimento, a resolução de problemas deve ser o eixo norteador do trabalho pedagógico.

Desse modo, os alunos precisam por em jogo tudo que sabem, sem métodos ou regras memorizados, como também, possam buscar entre os seus conhecimentos matemáticos aqueles que lhe pareçam pertinentes para resolver a situação proposta.

> [...] a aprendizagem da solução de problemas somente se transformará em autônoma e espontânea se transportada para o âmbito do cotidiano, se for gerado no aluno a atitude de procurar respostas para suas próprias perguntas/problemas, se ele se habituar a questionar-se invés de receber somente respostas já elaboradas por outros, seja pelo livro-texto, pelo professor ou pela televisão. O verdadeiro objetivo final da aprendizagem da solução de problemas é fazer com que o aluno adquira o hábito de propor-se problemas e de resolvê-los como forma de aprender. (POZO, 1998, p. 15).

E, mesmo que muitos estudos na área da resolução de problemas, como os de Pozo (1998), Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 2001), Smole e Diniz (2001), Polya (2006), Panizza (2006), Van de Walle (2009), dentre outros, circulem nos espaços escolares, ainda se faz necessário debater como ensinar, pela resolução de problemas. Deste modo, com base em Polya (2006), pode-se destacar passos para a resolução de problemas.

Quadro 1 - Ensinando pela resolução de problemas[3]

COMPREENDER DO PROBLEMA	
	O que o problema está perguntando?
	O que se quer resolver no problema?
	Quais os dados do problema são suficientes para resolvê-lo?
	É possivel estimar a resposta?
DEFINIR O CAMINHO A SEGUIR	
	Você já resolveu um problema como este?
	É possivel colocar as informações numa tabela ou diagrama?
	É possível traçar caminhos para resolução do problema?
PÔR EM PRÁTICA	
	Verifique cada passo. É possivel comprovar claramente que o passo está correto?
	Em caso de dúvidas, faça as modificações necessárias.
VALIDAR AS APRENDIZAGENS	
1.	Faça uma investigação minuciosa.
2.	A solução está correta?
3.	Existe outra forma de resolver o problema?
4.	É possível resolver problemas semelhantes com esse procedimento?

Fonte: Adaptado da obra de Polya (2006).

Organizado o pensamento com o Q1, o professor pode explorar os objetivos, estratégias e processos, que Van de Walle (2009, p. 77) aponta:

> ✓ Desenvolver habilidades de análise de problema – para melhorar a habilidade dos alunos em analisar um problema pouco conhecido, identificar informação desejada e necessária, ignorar informação dispensável e expressar claramente o objetivo ou meta do problema ou tarefa.
> ✓ Desenvolver e selecionar estratégias – para ajudar os estudantes a construir uma coleção de estratégias de resolução de problemas úteis em uma variedade de contextos de resolução de problemas e selecionar e usar essas estratégias adequadamente.
> ✓ Justificar as soluções – para melhorar a habilidade dos alunos em avaliar a validez das respostas.
> ✓ Estender ou generalizar problemas _ para ajudar os alunos a aprender a ir além da solução para os problemas, a considerar resultados ou processos aplicados em outras situações ou usados para formar regras ou procedimentos gerais.

Em suma, ensinar pela resolução de problemas pressupõe circulação do conhecimento, tanto durante a resolução do problema, como depois da sua resolução. Nesse sentido, é

[3] Adaptado da obra de Polya (2006)

preciso que os alunos tenham consciência de que fazer Matemática é resolver problemas, e refletir sobre eles, como também, que se devem ter objetivos claros, que lhes permitam perceber as relações entre alunos, professores e saber.

Na próxima seção, o foco será os procedimentos metodológicos que nortearam todo caminhar do trabalho em relação ao tipo de abordagem, como foi feita a coleta de dados, os sujeitos envolvidos na pesquisa, os instrumentos utilizados e , principalmente, como foi realizada a análise dos dados.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para o desenvolvimento desta pesquisa, optou-se pela abordagem qualitativa, na modalidade estudo de caso, visto que este tipo de procedimento metodológico tem o objetivo de observar e interpretar, o que é estudado. Neste sentido, Ludke e André (1986) ressaltam que o estudo de caso incide naquilo que o fato tem de único, de particular, mesmo que, posteriormente, fiquem evidentes certas semelhanças, com outros casos ou situações. Estes autores acrescentam, ainda, que devemos escolher este tipo de estudo, quando queremos compreender os aspectos intrínsecos de um caso singular, que tenha um valor em si mesmo.

O estudo de caso pode ter uma diversidade de percepções, e a investigação qualitativa tem, na sua essência, segundo Bogdan e Biklen (1994), cinco características: (1) a fonte direta dos dados é o ambiente natural, e o investigador é o principal agente, na recolha desses mesmos dados; (2) os dados que o investigador recolhe são essencialmente de caráter descritivo; (3) os investigadores que utilizam metodologias qualitativas interessam-se mais pelo processo em si, do que, propriamente, pelos resultados; (4) a análise dos dados é feita de forma indutiva; e (5) o investigador se interessa, acima de tudo, por tentar compreender o significado, que os participantes da situação atribuem às suas experiências.

Uma pesquisa sempre é um ponto de vista, criada na relação entre o pesquisador e seu tema. Especialmente na área da arte e das ciências humanas, a relação ainda se torna mais complexa, mais delicada, pois se trata de uma relação entre sujeitos. 'Um caso' – como qualquer outro tema de estudo – pode mostrar múltiplas realidades, decorrentes do processo de observação, da coleta de dados, e das diferentes interpretações do pesquisador (CHIZZOTTI, 2006, p. 141). Independente deste debate, no que se refere à sua categorização, o estudo de caso é realizado pela

> [...] coleta sistemática de informações sobre uma pessoa particular, uma família, um evento, uma atividade ou, ainda, um conjunto de relações ou processo social para melhor conhecer como são ou como operam em um contexto real e, tendencialmente, visa auxiliar tomadas de decisão, ou justificar intervenções, ou esclarecer porque elas foram tomadas ou implementadas e quais foram os resultados (CHIZZOTTI, 2006, p. 135).

Por esses motivos, essa abordagem se mostra adequada a este estudo, que se preocupa em investigar as estratégias dos alunos do 1º ao 5º ano, do Ensino Fundamental, para resolver os problemas de subtração que envolvem números negativos, de uma escola pública Municipal de Maceió.

3.1 Procedimentos de coleta de dados

3.1.1 Cenário da pesquisa

Esta pesquisa foi realizada em uma escola pública Municipal de Maceió/AL -- cenário da investigação --, cuja escolha restringiu-se aos critérios: pertencer à rede pública de ensino; ser de fácil acesso para a pesquisadora; ofertar turmas de alunos, de escolaridade regular, nos turnos matutino e/ou vespertino; e ter professores efetivos, nas turmas investigadas.

Após a definição da escola, foi feito o primeiro contato com a diretora -- inicialmente por telefone, e depois, pessoalmente --, sobre a intenção de realizar a pesquisa. Diante da aceitação da escola, foi agendado um encontro, na própria unidade escolar, com a participação do diretor, do coordenador e de professores, que atuavam em turmas do 1º ao 5º ano, para apresentar o projeto de pesquisa, e a documentação necessária à autorização da pesquisa na escola, exigida pelo Comitê de Ética. Assim, os professores foram informados sobre o objetivo e procedimentos da pesquisa, em uma reunião pedagógica, onde optaram em fazer parte, ou não, da pesquisa.

3.1.2 Os sujeitos

Foi marcado com a escola um encontro, para a apresentação da proposta de investigação e a escolha dos sujeitos a serem envolvidos, na pesquisa. Todos os professores das turmas de 1º ao 5º ano, dos turnos, matutino e vespertino, participaram desse encontro, que teve como objetivo apresentar a pesquisa, e convidar, para dela participarem.

O grupo de professores do turno matutino manifestou-se interessado em participar da investigação, mas não houve manifestação dos professores do vespertino. Portanto, o grupo de professores investigado foi composto, apenas, por professores do horário matutino. Assim, fizeram parte desta investigação 96 alunos -- na faixa etária de 06 a 14 anos --, que realizaram à atividade composta por dois problemas, os quais foram selecionados dentre 10 atividades, de cada ano, totalizando 50 atividades para a análise. Isto, a partir das respostas aos critérios: 1) alunos que cursavam do 4º ao 5º ano deveriam estar alfabetizados, e apresentarem diferentes soluções, para os problemas propostos; 2) alunos do 1º e 3º anos, que apresentassem soluções criativas, para os problemas propostos.

Vale ressaltar, que durante a apresentação da pesquisa na escola, todos os professores queriam que seus alunos participassem, porém, seguindo os critérios metodológicos, só seria possível trabalhar, com uma turma, de cada ano. Nesse sentido, foi necessário negociar com todos os envolvidos, para ter acesso aos dados, às pessoas e aos lugares, e obter as autorizações que se fizerem necessárias, pois as negociações prévias podem ser cruciais, para o sucesso do trabalho (CHIZZOTTI, 2006).

Todos os sujeitos que participaram desta pesquisa assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Anexo A e B), e se inteiraram dos objetivos e dos procedimentos adotados na pesquisa. Estes sujeitos eram residentes, em sua maioria, nas proximidades da escola; e todas as crianças eram do 1º ao 5º ano, do Ensino Fundamental, da rede pública de ensino. Havia predominância do sexo masculino, conforme mostra o Q 2 a seguir:

Quadro 2 – Perfil do alunado que respondeu à atividade

Turma	Nºde participantes	Sexo feminino	%	Sexo masculino	%
1º ANO A	15	07	47%	08	53,33%
2º ANO B	16	06	37,5 %	10	62,5%
3º ANO B	19	06	31,58%	13	68,42%
4º ANO A	23	14	60,87%	09	39,13%
5º ANO A	21	09	42,86%	14	66,66%
TOTAL	96	42	43,75%	54	56,25%

Fonte: Autora. Dados da pesquisa, coletados no período de maio/2012 a agosto/2012.

Os alunos estão identificados, neste trabalho, por A1 e A2, de acordo com o ano. Acrescentamos 1, para 1º ano, respectivamente, por exemplo, aluno do 1º ano está identificado por 1A1e aluno do 5º ano 5A1.

3.1.3 Os Instrumentos utilizados para a coleta de dados

Os instrumentos que foram utilizados para coleta de dados foram: cinco atividades escrita com dois problemas de subtração envolvendo as ideias do campo aditivo uma para cada ano do ensino fundamental, exceto o 2º ano[4], classificados assim:

[4]Ausência da professora no dia da aplicação, participação apenas da auxiliar de sala.

Quadro 3 – Problemas envolvidos na atividade escrita da pesquisa

Ano	Problema 1	Problema 2
1º ano	TRANSFORMAÇÃO	MEDIDA
2º ano	TRANSFORMAÇÃO	____________
3º ano	MEDIDA	TRANSFORMAÇÃO
4º ano	MEDIDA	TRANSFORMAÇÃO
5º ano	MEDIDA	RELAÇÃO

Fonte: Elaborado pela Autora.

Os problemas foram aplicados pela pesquisadora, com todos os alunos presentes no dia junto com a professora regente da turma. Para responderem aos dois problemas, os alunos levaram aproximadamente uma hora. Para organizar a seleção das atividades a serem analisadas digitalizaram-se as 182 atividades. Na 2ª etapa a selecionou-se 10 atividades de cada ano, ou seja, 20 resoluções, totalizando 50 alunos. Para a 3ª etapa criamos as categorias de análise baseadas em Hughes (1986) e que denominamos de fases de respostas aos problemas propostos.

3.1.4 Detalhamento da atividade escrita

- **Atividade do 1º ano**

Problema 01

1. Desenhe um prédio de apartamentos com 1 andar térreo, 12 andares acima do térreo, e três andares de garagens abaixo do térreo.

Essa atividade teve como objetivo investigar como os alunos representariam um prédio e como iriam enumerar os seus andares. O propósito de começar com o desenho do prédio foi para perceber se eles identificavam um prédio de 16 pavimentos, sendo um térreo, 12, acima do térreo, e três abaixo. Como também, se conseguiram enumerar os andares e perceber o que fariam, para numerar os andares abaixo do térreo. Além disso, é de se esperar, pelo fato de ser um prédio, que o representaram usando a posição vertical. Ou ocorreu outra coisa?

Problema 02

2. Juliane está jogando figurinhas. Na primeira partida, ganha 3 e, na segunda, perde 5. Qual o saldo de figurinhas de Juliane, após as duas partidas?

Nessa atividade pretendeu-se abordar a dupla transformação: perceber se os alunos representam a situação e se reconhecem o saldo de figurinhas que é -2, ou que perderam 2 figurinhas.

Expressão correspondente: (+3) + (-5) = -2

- **Atividade do 2º ano**

Problema 01

1. Em um jogo, Eliane ganhou 6 pontos, em seguida perdeu 9 pontos. Qual a quantidade de pontos de Eliane?

Com essa atividade pretendeu-se abordar a dupla transformação: perceber se os alunos representam a situação e se reconhecem o saldo de pontos que é -3, ou que perderam 3 pontos.

Expressão correspondente: (+6) + (-9) = -3

- **Atividade do 3º ano**

Problema 01

1. Pedro foi fazer compras e gastou R$ 42,00, mas ele só tinha R$ 27,00. Qual o saldo de Pedro?

Nesta atividade, é abordada uma transformação de uma relação, ou seja, uma transformação que opera sobre uma relação, para dar lugar a um estado relativo.

Expressão correspondente: (-42) + (+ 27) = -15

Problema 02

Uma pessoa está no quarto andar de um edifício; toma o elevador e desce 6 andares. Em que andar está, no final?

Essa atividade teve o objetivo de investigar como os alunos representariam o edifício e como iriam representar os andares, como também, se conseguiriam enumerar os andares, e ainda, verificar o que fará o aluno, para numerar os andares abaixo do térreo. Além disso, é de se esperar, pelo fato de ser um edifício, que o representaram usando a posição vertical. Ou ocorrerá outra coisa?

Esses problemas abordam o significado de uma dupla composição, onde, dois estados relativos (relações) se juntam para resultar em um estado relativo. Nesta atividade os alunos lidavam com o conceito relativo enquanto transformação.

- **Atividade do 4º ano**

Problema 01

1. Mary ganha R$30,00, de sua mãe. Compra um livro por R$20,00. Seu pai lhe deu R$10,00. Mary vai ao cinema e gasta R$25,00. Qual o saldo de Mary?

Expressão correspondente: (+30) - (-20) + (+10) - (-25) = -5

Problema 02

2. Flávia tinha 19 pontos, ao iniciar um jogo. Ela ganhou 9 pontos e, em seguida, perdeu 30. Ao final do jogo, com quantos pontos ela ficou?

Expressão correspondente: (+19) + (+9) - (- 30) = -2

- **Atividade do 5º ano**

Problema 01

1. No dia 03 de outubro, o saldo da conta bancária de Márcia, em certo banco, era de R$-200,00. Depositou R$ 120,00. Qual o novo saldo de Márcia?

Com essa atividade pretende-se abordar a composição de duas transformações e verificar se os alunos representam a situação e se reconhecem o saldo da conta bancária de Márcia. Nesta Atividade os alunos lidavam com o conceito relativo, enquanto medida.

Expressão correspondente: (- 200) + (+120) = (-80)

Problema 02

2. Júlio está escalando uma montanha. Na primeira etapa, ele chega a 100 metros de altura. Na segunda etapa, ele escorrega 300 metros e, finalmente, pára. Qual a posição de Júlio na montanha?

Com essa atividade pretendeu-se abordar a dupla transformação e investigar se os alunos reconhecem a posição de Júlio na montanha. Nesta atividade, os alunos lidavam com o conceito relativo, enquanto medida.

Expressão correspondente: (100) - (- 300) = (- 200)

3.1.5 Procedimentos de análise dos dados

Tendo em vista que esta pesquisa investigou as estratégias de resolução de problemas de subtração, que envolvem o conjunto dos números inteiros, e, de acordo com Vergnaud (2009), os números naturais representam medidas dos conjuntos, de objetos isoláveis. Os números relativos representam as transformações que essas medidas sofrem. Assim, optou-se por analisar as estratégias dos alunos, segundo a Análise de Conteúdo, que, para Bardin (2011, p. 37),

> É um conjunto de técnicas de análise das comunicações. Não se trata de um instrumento, mas de um leque de apetrechos; ou, com maior rigor, será um único instrumento, mas marcado por uma grande disparidade de formas e adaptável a um campo de aplicação muito vasto: as comunicações.

Desta forma, baseado em Hughes (1986), que descreve em detalhes uma série de estudos realizados na Universidade de Edimburgo, com crianças de diversas origens socioeconômicas, entre 3 e 4 anos, e 7 e 9 anos, convidadas para representar quantidades, ou mudanças, que envolvem quantidades. Percebe-se que crianças, mesmo muito pequenas, são capazes de representar pequenas quantidades, como também, o zero. E o referido autor também destaca que:

> No que diz respeito à representação de quantidade, parece que as próprias crianças tendem a utilizar os métodos baseados em um – para – um, mas é necessário utilizar um sistema simbólico. No que diz a respeito à adição e subtração, o problema é de uma ordem totalmente diferente. Ao que parece, toda noção de representar essas transformações no papel é algo que as crianças acham muito difícil de entender, embora a razão exata para essa dificuldade ainda não é totalmente clara. No entanto, desde a mais tenra idade, as crianças estão sendo introduzidas aos símbolos (“+” e “-”) que arco destinados a servir a esse propósito. Isso vai de certa forma explicar por que

> a compreensão destes símbolos das crianças não vai além do contexto em que eles arco ensinado. Parece haver uma divisão grave e preocupante entre o uso de símbolos na sala de aula e sua capacidade de aplicá-los a problemas encontrados em outro lugar (HUGHES, 1986, p. 78).

Em consonância com Hughes (1986) e Sinclair (1990), nas suas pesquisas, destacam que as crianças não se recusam a realizar as atividades as quais elas não estão habituadas, e que já refletem sobre o problema e constroem procedimentos não convencionais, mas coerentes. Neste sentido, as categorias não foram definidas, *a priori*, na pesquisa, mas, a partir do processo de interpretação, por parte da pesquisadora, mediante a análise das estratégias dos alunos.

Sendo assim, os dados coletados foram analisados e organizados em dez categorias[5]:

- ✓ Categoria 1**: Respostas pictográficas elementar -** nesta fase as crianças produziram estratégias a partir de desenhos sem deixar claro o raciocínio para resolver o problema proposto.
- ✓ Categoria 2**: Respostas pictográficas com indicações numéricas -** nesta fase os alunos desenharam a resolução, mas demonstraram o raciocínio e indicaram a resposta do problema proposto.
- ✓ Categoria 3: **Respostas pictográficas e numéricas -** nesta fase os alunos desenharam e registraram o resultado da resolução do problema proposto.
- ✓ Categoria 4**: Respostas simbólicas elementar -** nesta fase os alunos resolvem o problema por meio da contagem e registram numericamente a solução.
- ✓ Categoria 5**: Respostas algorítmica simbólica** - nesta fase os alunos registraram utilizando as representações numéricas e sinalizaram a operação.
- ✓ Categoria 6: **Respostas algorítmicas com conferência por meio da contagem -** os alunos resolvem o problema usando algoritmo, mas recorrem à contagem para realizar os cálculos.
- ✓ Categoria 7: **Cálculo mental e registro do resultado -** os alunos resolvem o problema utilizando o cálculo mental e registram o resultado.
- ✓ Categoria 8: **Cálculo mental e com indicação de inteiros -** os alunos resolvem o problema, registram a operação, mas, recorrem ao cálculo mental para realizar o problema e afirmam que ficou “devendo” ou” faltando”.
- ✓ Categoria 9**: Respostas algorítmicas no domínio dos inteiros -** os alunos resolvem o problema proposto indicando a operação e percebendo a transformação negativa do resultado.

[5] Para criar essa organização de análise nos baseamos no trabalho de Hughes (1986).

- ✓ Categoria 10: **Cálculo mental com domínio dos inteiros -** os alunos resolvem o problema proposto fazendo cálculo mental e percebendo a transformação negativa.

3.2 Elaboração do produto educacional

Vale ressaltar que este trabalho decorreu de uma exigência dos mestrados profissionais, de acordo com o Ministério da Educação, na sua Portaria Normativa nº 7 -- que regulamenta os mestrados profissionais --, e, em seu § 3° define sobre o trabalho de conclusão final do curso, e dispõe, sobre a sua apresentação:

> Poderá ser apresentado em diferentes formatos, tais como dissertação, revisão sistemática e aprofundada da literatura, artigo, patente, registros de propriedade intelectual, projetos técnicos, publicações tecnológicas; desenvolvimento de aplicativos, de materiais didáticos e instrucionais e de produtos, processos e técnicas; produção de programas de mídia, editoria, composições, concertos, relatórios finais de pesquisa, softwares, estudos de caso, relatório técnico com regras de sigilo, manual de operação técnica, protocolo experimental ou de aplicação em serviços, proposta de intervenção em procedimentos clínicos ou de serviço pertinente, projeto de aplicação ou adequação tecnológica, protótipos para desenvolvimento ou produção de instrumentos, equipamentos e kits, projetos de inovação tecnológica, produção artística; sem prejuízo de outros formatos, de acordo com a natureza da área e a finalidade do curso, desde que previamente proposto se aprovados pela CAPES (BRASIL, 2009).

No caso do PPGECIM/UFAL, além do produto educacional, o mestrando deve submeter um artigo, que mostre os resultados de sua pesquisa, a uma revista ou periódico, Qualis A ou B e defender sua dissertação, para obter o título de Mestre Profissional, em Ensino de Ciências e Matemática. Assim, foi elaborado um produto educacional que se configurou em um Caderno de Atividades, sobre resolução de problemas para professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, que contém elementos teóricos, para a compreensão do conteúdo, e práticos, no que se refere a sugestões de atividades.

A elaboração deste Caderno teve por fundamento as leituras realizadas durante a pesquisa, e as oficinas anteriores, praticadas pela pesquisadora, em formações para professores da rede municipal de educação de Maceió. O caderno foi denominado: **Dos números naturais aos relativos** (Apêndice 1) e objetiva refletir sobre a resolução de problemas, com números naturais e relativos, como também, sugerir atividades, para que os alunos possam pôr em jogo os seus conhecimentos e apontar, aos professores, alguns conceitos, e as propriedades algébricas que sustentam as suas diversas estratégias de resolução de problemas. Serão discutidas questões teóricas, exemplificadas com atividades práticas, para que as professoras percebam as relações numéricas envolvidas.

4 RESULTADOS DA APLICAÇÃO DOS INSTRUMENTOS E ANÁLISE DOS DADOS

Para que se tenha uma visão das estratégias de solução, utilizadas pelos alunos nos problemas de subtração, fizemos levantamento, por turma, a fim de identificá-las, independentemente de acertos e erros, em suas diversas formas de raciocínio, considerando soluções analisadas e organizadas, em dez categorias. Desse modo, mesmo com problemas diferentes, foi indispensável para o alcance dos objetivos da presente pesquisa, fazer uma comparação entre eles, para percebemos algumas particularidades, nas estratégias dos alunos. Desta forma, considerando a importância das justificativas dos alunos mediante a resolução de um problema, seguem dados quantitativos dos participantes que justificaram os seus procedimentos.

4.1 Análise quantitativa das estratégias dos alunos do 1º ano

Quadro 4 – Estratégias de solução dos alunos do 1º ano

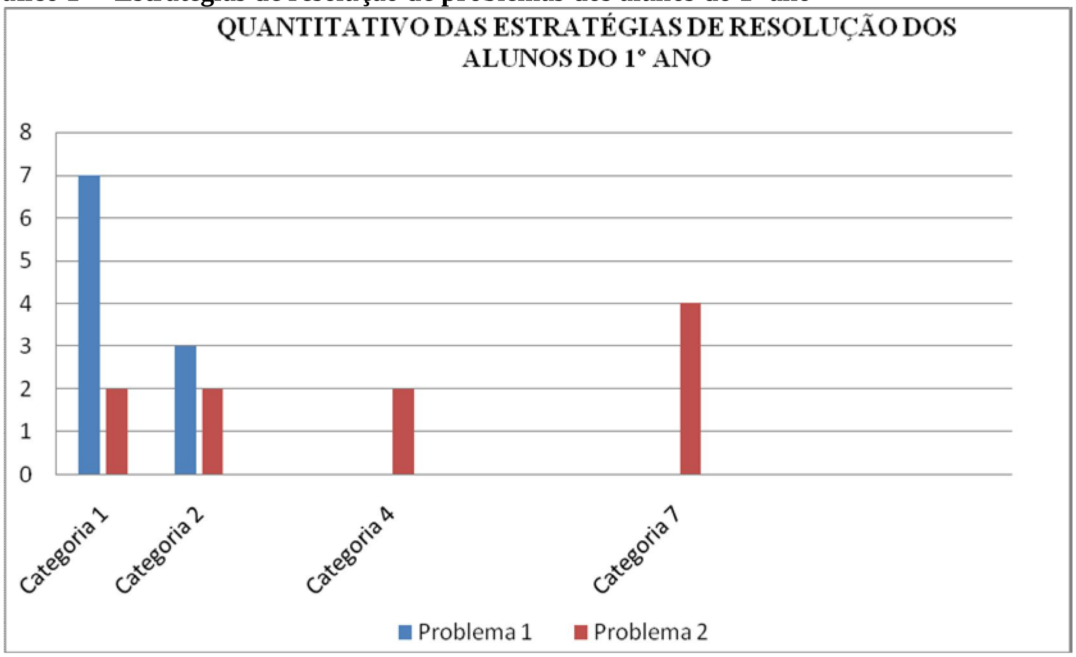
CATEGORIAS	PROBLEMA 1	PROBLEMA 2
1. Respostas pictográficas elementares	7	2
2. Respostas pictográficas com indicações numéricas	3	2
4. Respostas simbólicas elementares		2
7. Cálculo mental e registro do resultado		4
TOTAL	10	10

Fonte: Elaborado pela Autora.

Observamos, nos dois problemas propostos, que sete alunos, no problema 1, e dois, no problema 2, ainda estão na **categoria 1**: respostas pictográficas elementares, o que pode ser considerado comum, para alunos dessa faixa etária ; três alunos, nos problema 1, e dois, no problema 2, demonstram encontrar-se na **categoria 2**: respostas pictográficas, com indicações numéricas, apontando -- através do desenho -- o raciocínio do problema e sinalizando a resposta. Porém, dois alunos demonstraram encontrar-se na **categoria 4**: respostas simbólicas elementares; e quatro alunos alcançaram a **categoria 7**: cálculo mental e registro, do resultado. Nota-se que crianças que não dominam a linguagem matemática utilizam o desenho como estratégia de resolução de problemas, imaginam, constroem, e buscam, diferentes caminhos, para chegar à solução do problema.

> No trabalho com a resolução de problemas, o desenho é importante não só para o aluno expressar a solução que encontrou para a situação proposta, mas também funciona como meio para que a criança reconheça e interprete os dados do texto. Para um aluno que não é leitor, o desenho pode servir para sustentar os significados do texto. (SMOLE; DINIZ , 2001, p. 28).

Gráfico 1 – Estratégias de resolução de problemas dos alunos do 1º ano



Fonte**:** Autora. Dados da pesquisa, coletados no período de maio/2012 a agosto/2012.

No que se refere às explicações sobre o procedimento utilizado pelos alunos, em cada problema, observei que seis deles esclareciam o que estavam realizando. Observei que, em sua maioria, utilizaram o registro pictográfico, alguns com indicações numéricas outros não, entretanto, conseguiram perceber a existência de algo, antes do zero. E, de acordo com a história da matemática, a ausência ou presença do zero, nos sistemas de numeração, é um dos aspectos mais interessantes, pois em algumas civilizações não existia o símbolo do zero, embora, às vezes, deixassem um espaço vazio, para o zero. Da mesma forma, para Boyer (2002, p. 145),

> A história da matemática contém muitas anomalias, e a não menor dessas é que “a mais antiga ocorrência in-dubitável de um zero na Índia se acha numa inscrição de 876”, isto é, mais de dois séculos depois da primeira referência aos nove outros numerais. Não se sabe se quer se o número zero (diferente do símbolo para a posição vazia) surgiu em conjunto com os outros numerais hindus. È bem possível que o zero seja originário do mundo grego, talvez de Alexandria, e que tivesse sido transmitido à Índia depois que o sistema decimal posicional já estava estabelecido lá.

Assim, para Smole e Diniz (2001, p. 19), “para crianças que ainda não escrevem, que não conseguem expressar-se oralmente, ou que já escrevem, mas ainda não dominam a linguagem matemática, o desenho pode ser uma alternativa para que elas comuniquem o que pensam”. Nesse sentido, Borba (2003, p 125) enfatiza que,

> Se noções intuitivas existem e alguns cálculos com números relativos são corretamente efetuados anteriormente ao ensino formal do número negativo, pode-se supor que, pelo menos em parte, as dificuldades encontradas pelos estudantes estão relacionadas com as estratégias de ensino adotadas pela escola. As formas de representação podem ser uma das principais causas de dificuldades das crianças quando lidam com números negativos, já que não parece haver muitas dificuldades na compreensão de situações cotidianas que envolvem esse campo numérico.

Consequentemente, nas respostas dos alunos, aos problemas propostos, percebe-se que eles têm noção de subsolo, sabem quem existe algo antes do zero, deixam o espaço vazio para a presença do zero, e resolvem problemas, independentemente de se tratarem de números positivos ou negativos. Não há dificuldade, para eles, em operar no campo dos inteiros, mesmo que este seja ainda sendo um campo desconhecido na escola, mas presente, no cotidiano das crianças.

4.2 Análise quantitativa das estratégias dos alunos do 2º ano

Quadro 5 – Estratégias de solução dos alunos do 2º ano

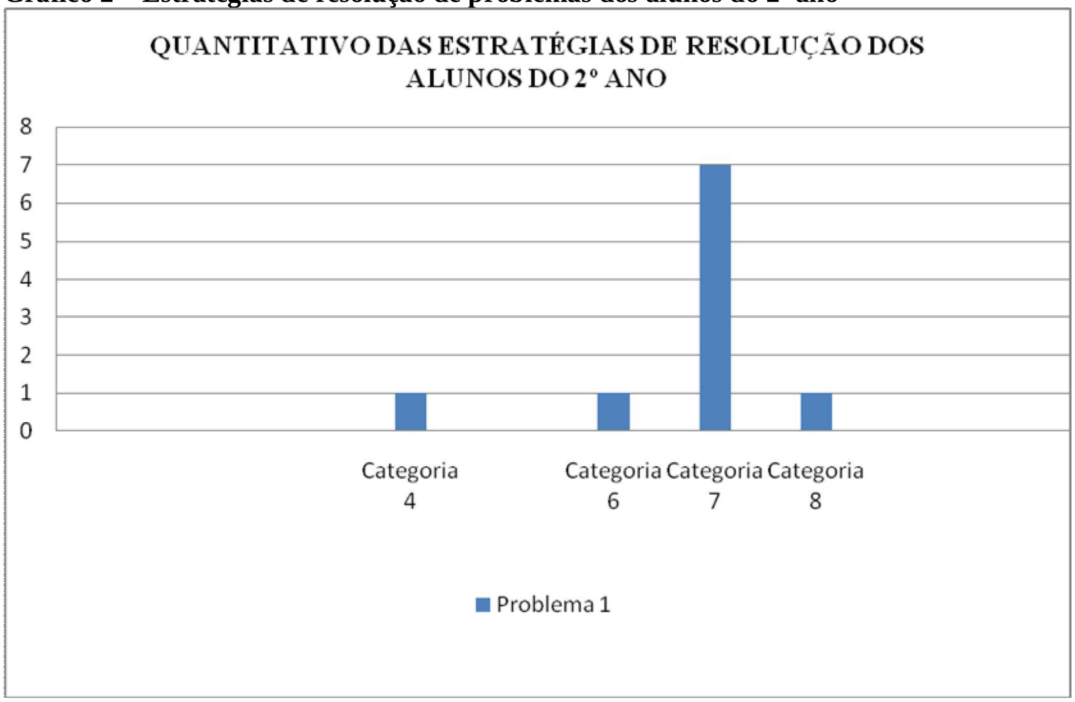
CATEGORIAS	PROBLEMA 1
4. Respostas simbólicas elementares	1
6. Respostas algorítmicas com conferência por meio da contagem	1
7. Cálculo mental e registro do resultado	7
8. Cálculo mental e com indicação de inteiros	1
TOTAL	10

Fonte: Elaborado pela Autora.

Refletindo sobre as estratégias utilizadas pelos alunos, percebe-se que, apenas sete conseguiram alcançar a **categoria 7**: cálculo mental e registro do resultado, o que não foi muito diferente do 1º ano , em que, quatro alunos chegaram a mesma categoria. Percebe-se que as estratégias utilizadas entre alunos do 1º e 2º anos não são muitos diferentes, quanto à resolução de problemas, e que eles conseguem resolver problemas, mesmo ainda, não tendo a instrução formal dos números negativos. Vale destacar que um aluno nos dá indicações de inteiros, mesmo não possuindo a instrução formal, desse campo numérico.

Deste modo, conforme Parra (1996, p. 197) “as atividades de cálculo mental propõem o cálculo como objetivo de reflexão, favorecendo o surgimento e o tratamento de relações estritamente matemáticas”. Isto é, os alunos têm a possibilidade de pôr em jogo as propriedades das operações.

Gráfico 2 – Estratégias de resolução de problemas dos alunos do 2º ano



Fonte: Autora. Dados da pesquisa, coletados no período de maio/2012 a agosto/2012.

Observou-se que, diferentemente do 1º ano, o 2º supera, quanto ao registro pictográfico, pois surgem as primeiras respostas simbólicas, com uso de cálculo mental e o algoritmo. Sete alunos conseguiram fazer cálculo mental, com registro do resultado, o que demonstra que eles conseguiram mobilizar os conhecimentos que tinham, mesmo sem ter o conhecimento formal dos números negativos e alcançaram a solução do problema, em categoria, que permite validar suas aprendizagens. Do mesmo modo, de acordo com Parra (1996, p. 198), “o trabalho com o cálculo mental habilita para uma maneira de construção do conhecimento que, a nosso entender, favorece uma melhor relação do aluno com a matemática”.

4.3 Análise quantitativa das estratégias dos alunos do 3º ano

Quadro 6 – Estratégias de solução dos alunos do 3º ano

CATEGORIAS	PROBLEMA 1	PROBLEMA 2
3. Respostas pictográficas e numéricas:		5
4. Respostas simbólicas elementares	6	4
7. Cálculo mental e registro do resultado	3	
9. Respostas algorítmicas no domínio dos inteiros	1	
10. Cálculo mental com domínio dos inteiros		1
TOTAL	10	10

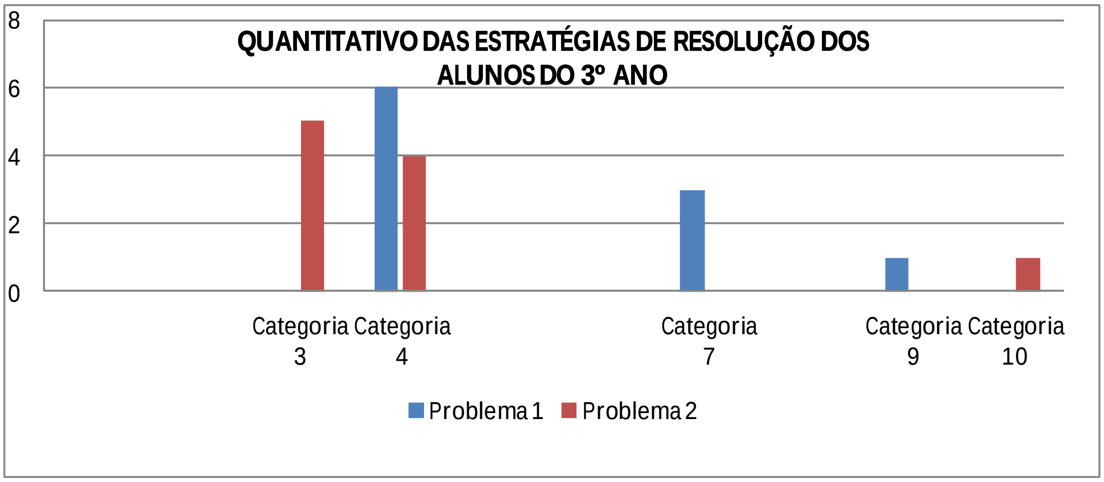
Fonte: Elaborado pela Autora.

Tal como os alunos do 1º e 2º anos, os do 3º ano também demonstram um conhecimento implícito, sobre os números negativos. Percebe-se que, mesmo crianças pequenas, são capazes de reinventar e tornar possível o que, para alguns, ainda era pouco provável. Elas mostram que foram capazes de resolver problemas, perpassando pelas várias categorias, com ênfase na **categoria 9** (Respostas algorítmicas no domínio dos inteiros) e na **categoria 10** (Cálculo mental com domínio dos inteiros). Segundo Vasconcelos (1998, p. 54),

> As pesquisas que investigam como as crianças resolvem problemas de adição e de subtração têm progredido consideravelmente nos últimos anos, permitindo uma melhor caracterização desses problemas, assim como a compreensão sobre como as crianças os resolvem e por que alguns são mais difíceis do que outro.

Por isso, vários estudos Hughes (1996), Vergnaud (2009), Maranhão, Camejo e Machado (2008), dentre outros têm registrado as estratégias que as crianças utilizam para resolver problemas de adição e subtração tornando possível a identificação das dificuldades e das características do desenvolvimento das operações de adição e subtração.

Gráfico 3 – Estratégias de resolução de problemas dos alunos do 3º ano



Fonte: Autora. Dados da pesquisa, coletados no período de maio/2012 a agosto/2012.

Embora os alunos do 1º e do 2º ano tenham demonstrado que possuíam noções intuitivas que lhes permitam resolver problemas inseridos em contextos significativos, os alunos do 3º ano evidenciaram uma conceituação inicial sobre números negativos, como também, algumas limitações no que diz respeito as noções preliminares, que foram evidenciadas em cada ano. Este fato pode ser considerado comum, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, tendo em vista que o contexto escolar não contribui para a utilização do conjunto dos inteiros.

> Para avançar nos procedimentos de subtração é preciso avançar na compreensão do sistema numérico: reconhecer o valor posicional, a existência dos agrupamentos de 10. Será preciso também que sejam capazes de recuperar os caminhos percorridos em cada situações, assim, avançar nos registros e conscientizações dos procedimentos utilizados. (D`ALBERTAS, 2006, p. 40).

4.4 Análise quantitativa das estratégias dos alunos do 4º ano

Quadro 7 – Estratégias de solução dos alunos do 4º ano

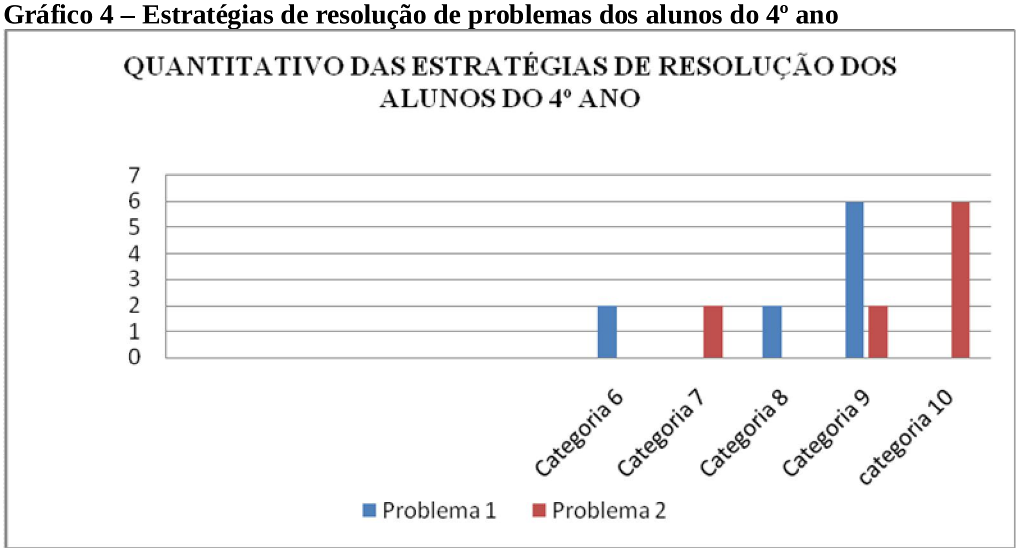
CATEGORIAS	PROBLEMA 1	PROBLEMA 2
6. Respostas algorítmicas com conferência por meio da contagem	2	
7. Cálculo mental e registro do resultado		2
8. Cálculo mental e com indicação de inteiros	2	
9. Respostas algorítmicas no domínio dos inteiros	6	2
10. Cálculo mental com domínio dos inteiros		6
TOTAL	10	10

Fonte: Elaborado pela Autora.

De acordo com os resultados, nota-se que as **categorias 9 e 10,** respostas algorítmicas, no domínio dos inteiros e cálculo mental, com domínio dos inteiros, fez-se presente, com maior intensidade, pois apenas dois alunos recorreram à contagem; na **categoria 6**, respostas algorítmicas, com conferência, por meio da contagem.

Dois alunos também utilizaram o cálculo mental; na **categoria 7**, cálculo mental e registro do resultado; e **categoria 8**, cálculo mental, com domínio dos inteiros. Consequentemente, estes alunos demonstraram conhecimentos implícitos, sobre os números negativos. Quanto aos dois alunos que ainda não ultrapassaram a contagem, isso representa uma preocupação, por ser do 4º ano. Isto dá indicações de que os alunos do 3º ano conseguem produzir melhores estratégias de resolução de problemas.

Gráfico 4 – Estratégias de resolução de problemas dos alunos do 4º ano



Fonte: Autora. Dados da pesquisa coletados no período de maio/2012 a agosto/2012.

Vale salientar que, à medida que os anos escolares aumentam, o nível das categorias se aproxima, e se percebe que, do 1º ao 4º ano, a maioria dos alunos consegue resolver problemas, no campo dos inteiros, o que não vai ser diferente no 5º ano. Porém, as estratégias de resolução se modificam, deixando alguns questionamentos, tais como: por que, à medida que os anos de escolaridade das crianças aumentam, a qualidade das estratégias se aproxima, ao invés de se intensificar, e melhorar? Isto faz conjecturar que algo acontece, no percurso, porque, independentes do ano, esses alunos conseguem resolver problemas no domínio dos inteiros, mas, depende das situações e dos contextos vivenciados, em sala de aula.

4.5 Análise quantitativa das estratégias dos alunos do 5º ano

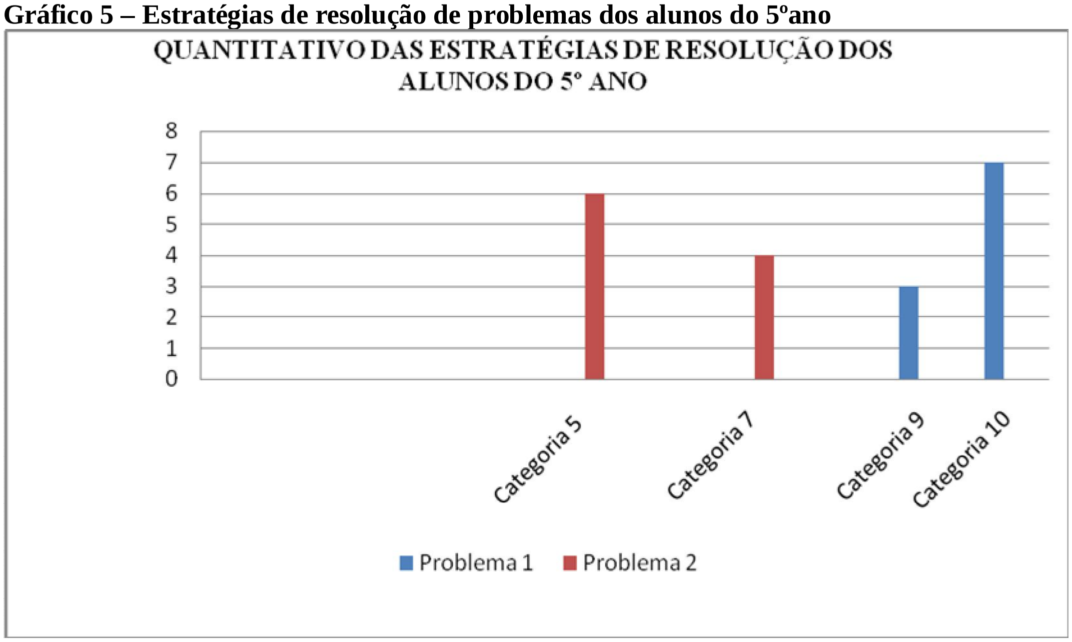
Quadro 8 – Estratégias de solução dos alunos do 5º ano

CATEGORIAS	PROBLEMA 1	PROBLEMA 2
5. Respostas algorítmicas simbólicas		6
7. Cálculo mental e registro do resultado		4
9. Respostas algorítmicas no domínio dos inteiros	3	
10. Cálculo mental com domínio dos inteiros	7	
TOTAL	10	10

Fonte: Elaborado pela Autora.

Quando se observa as estratégias dos alunos do 5º ano, percebe-se que não são muito diferentes das estratégias dos alunos do 4º ano. A necessidade do uso do algoritmo e do cálculo mental faz-se presente. O que podemos conjecturar é que as crianças, por mais escolarizadas que estejam, não garante a compreensão de certos conceitos. O que será que acontece nesse caminho que, ao invés de avançar, paralisa. Os alunos do 4º ano fizeram cálculo mental com domínio dos inteiros, já os do 5º ano, não. Podemos inferir, disto, que os alunos do 4º ano tiveram mais oportunidades para pensar matematicamente que os alunos do 5º anos. O que acontece dentro da escola, que alunos chegam cheios de estratégias e, de repente, isso se perde no percurso escolar?

Gráfico 5 – Estratégias de resolução de problemas dos alunos do 5ºano

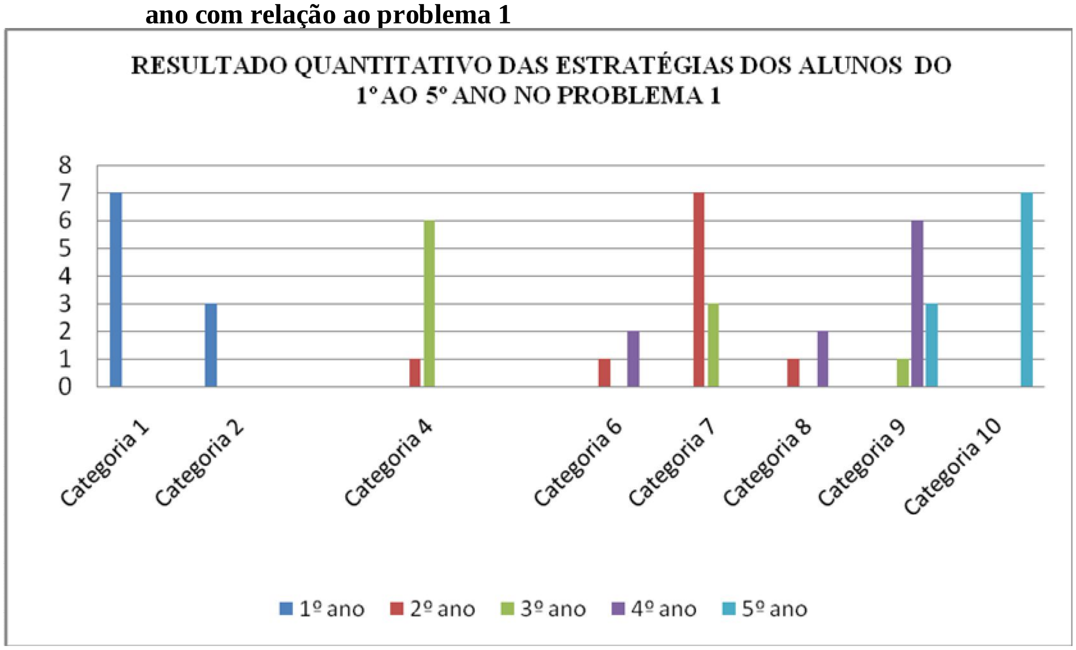


Fonte: Autora. Dados da pesquisa coletados no período de maio/2012 a agosto/2012.

Diante do exposto, podemos inferir que os alunos do 5º ano deixam a desejar, em relação aos procedimentos de estratégias de resolução de problemas, visto que, ainda aparece a **Categoria 5 –** respostas algorítmicas simbólicas **--,** o que seria bastante natural, para os três primeiros anos do Ensino Fundamental, mas, por se tratar de um 5º ano, os alunos já poderiam ter superado essa etapa e apresentado conhecimentos mais formais, sobre os números negativos.

Percebe-se que, se esses alunos forem desafiados, em contextos significativos, como o de ganhos e perdas, irão desenvolver habilidades, para utilizar números negativos, tendo em vista que conseguiram alcançar a **categoria 7 –** cálculo mental e registro do resultado --; a **categoria 9 –** respostas algorítmicas, no domínio dos inteiros --; e a **categoria 10 –** cálculo mental com domínio dos inteiros.

Gráfico 6 – Comparativo entre as estratégias de resolução de problemas dos alunos no 1º ao 5º ano com relação ao problema 1



Fonte: Autora. Dados da pesquisa, coletados no período de maio/2012 a agosto/2012.

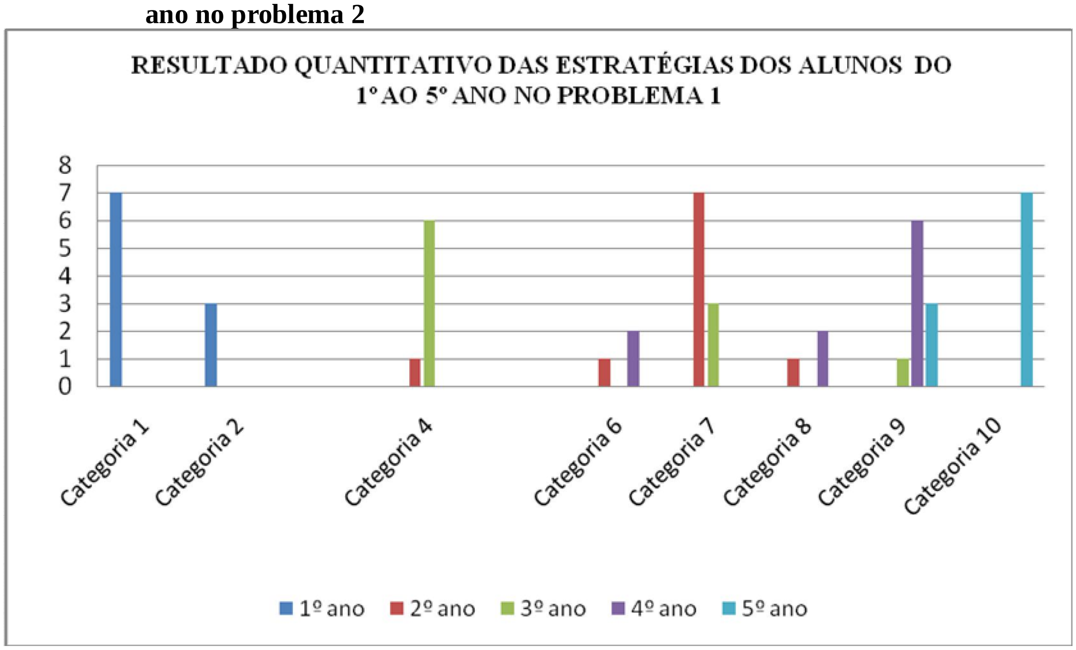
No primeiro problema pode-se destacar o desempenho dos 2º e 3º ano com as **categorias 7 --** cálculo mental e registro do resultado --; **categoria 8 --** cálculo mental e com indicação de inteiros para o **2º ano --; categoria 7** -- cálculo mental e registro do resultado --; **categoria 9 --** resposta algorítmica no domínio dos inteiros para o **3º ano**, em que eles demonstraram ter conhecimentos implícitos, mesmo sem ter ainda uma instrução formal, sobre os números negativos.

Nota-se que, mesmo sem a instrução formal dos números negativos, os alunos dos 2º ao 5º ano conseguem desempenho adequado ao que foi proposto. Os resultados sugerem que essas crianças sejam estimuladas a operar com números positivos e negativos, ou seja, operar com créditos ou débitos, em situações contextualizadas. Borba (1998, p. 147) ao pesquisar sobre os números relativos aponta que:

> Não deve, portanto, ser adiada por parte do professor a observação de que há a possibilidade de subtrair um número maior de um número menor e de que certas classes de números possuem valores menores que zero e que não são resultados direto de contagens ou medidas, como acontece com os números naturais.

Por essa razão, o trabalho do professor, em sala de aula, pode contribuir para a diminuição de certos equívocos no ensino da Matemática, visto que os alunos passam dos anos iniciais, aceitando que não se pode subtrair um número maior de outro menor, e, quando chegam ao 6º ano, descobrem que podem fazer o que antes, não era possível.

Gráfico 7 – Comparativo entre as estratégias de resolução de problemas dos alunos do 1º ao 5º ano no problema 2



Fonte: Autora. Dados da pesquisa coletados no período de maio/2012 a agosto/2012.

No segundo problema, o grande destaque foi quanto às estratégias de resolução de problemas do 4º ano, visto que conseguiram alcançar **a categoria 7** -- cálculo mental e registro do resultado --, a **categoria 9** -- resposta algorítmica no domínio dos inteiros -- e a **categoria 10 --** cálculo mental com domínio dos inteiros. Nesse contexto, os resultados sinalizam que as estratégias de resolução de problemas dos alunos, dos 2º e 3º ano, são melhores que as estratégias dos alunos do 5º ano. Isto nos conduz a inferir que os alunos podem avançar, ou não, nos conhecimentos, dependendo das situações vivenciadas em sala de aula. Nesse sentido, para Resnick (1983 apud BORBA 1998, p. 125 -126)

> Ao pesquisar as formas de representação, conclui que é falso afirmar que existem duas espécies de aquisição, uma em situação formal e outra em situação informal. Ao contrário, tem-se demonstrado que, ambas as situações, o processo de construção está presente, e que a qualidade dessa construção depende da espécie de representação utilizada. Assim sendo, os exemplos concretos extraídos das situações informais podem beneficiar o raciocínio lógico. Representações concretas, mesmo hipotéticas, para o simbolismo matemático formal são importantes não apenas na introdução de ideias complexas, mas também na reflexão sobre as mesmas e como forma de retê-la na mente e tornar possíveis reconstruções que façam necessárias.

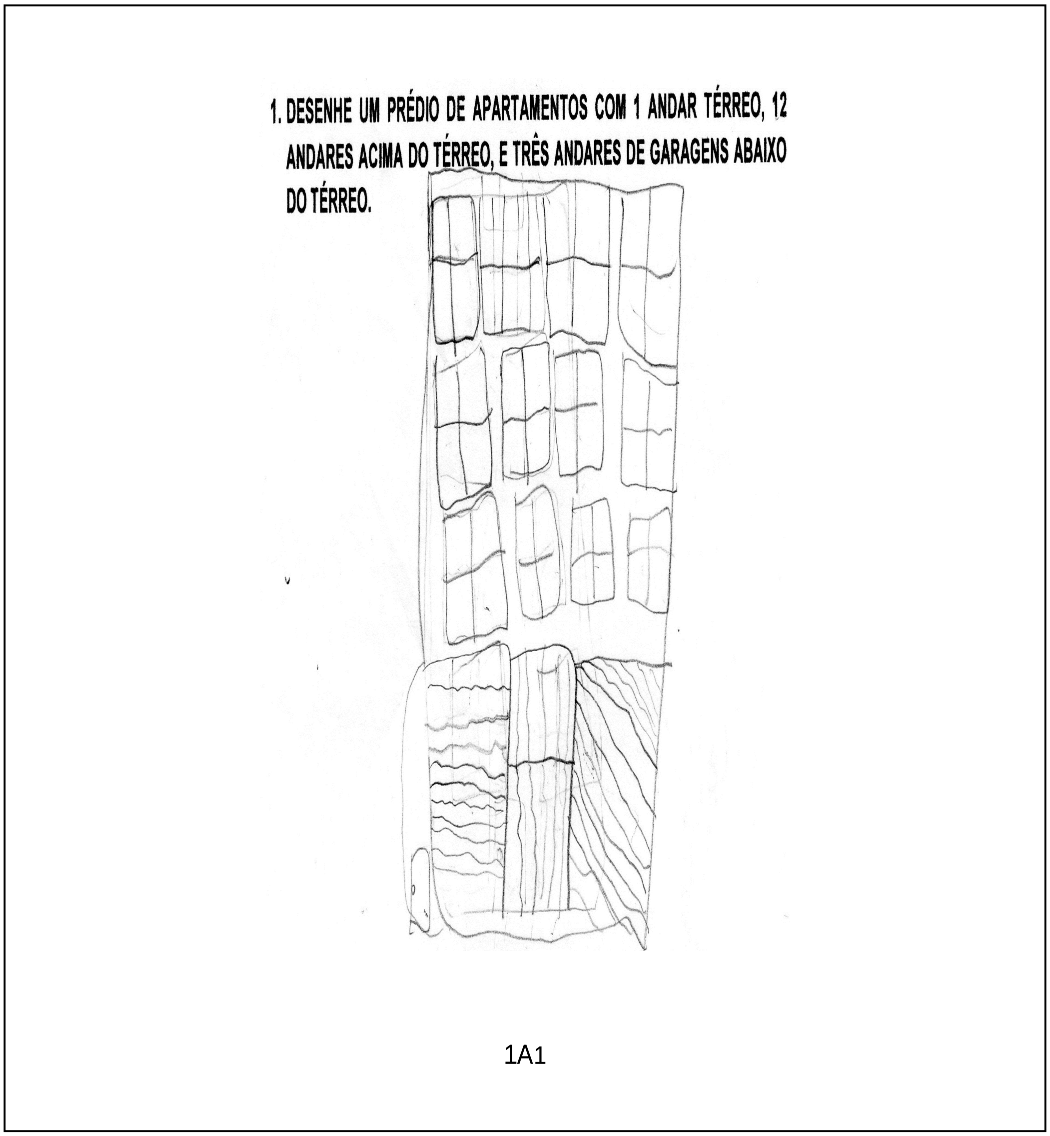
Portanto, colocar os alunos em situações didáticas que lhe permitam por em jogo seus conhecimentos, dando oportunidade para demonstrarem a compreensão intuitiva que tem sobre números negativos, favorece a reflexão com esse campo numérico e, consequentemente, a transformação de seus conhecimentos.

5 ANÁLISE QUALITATIVA DOS DADOS

5.1 Análise qualitativa das estratégias dos alunos do 1º ano

De acordo com as análises das atividades, no primeiro problema, seis alunos demonstraram estar na **categoria 1 (Respostas pictográficas elementares)**, pois representaram o prédio, porém, seus registros não deram indícios de que eles compreenderam que, abaixo do nível térreo, existiam três outros pavimentos, como mostra o registro na figura 2:

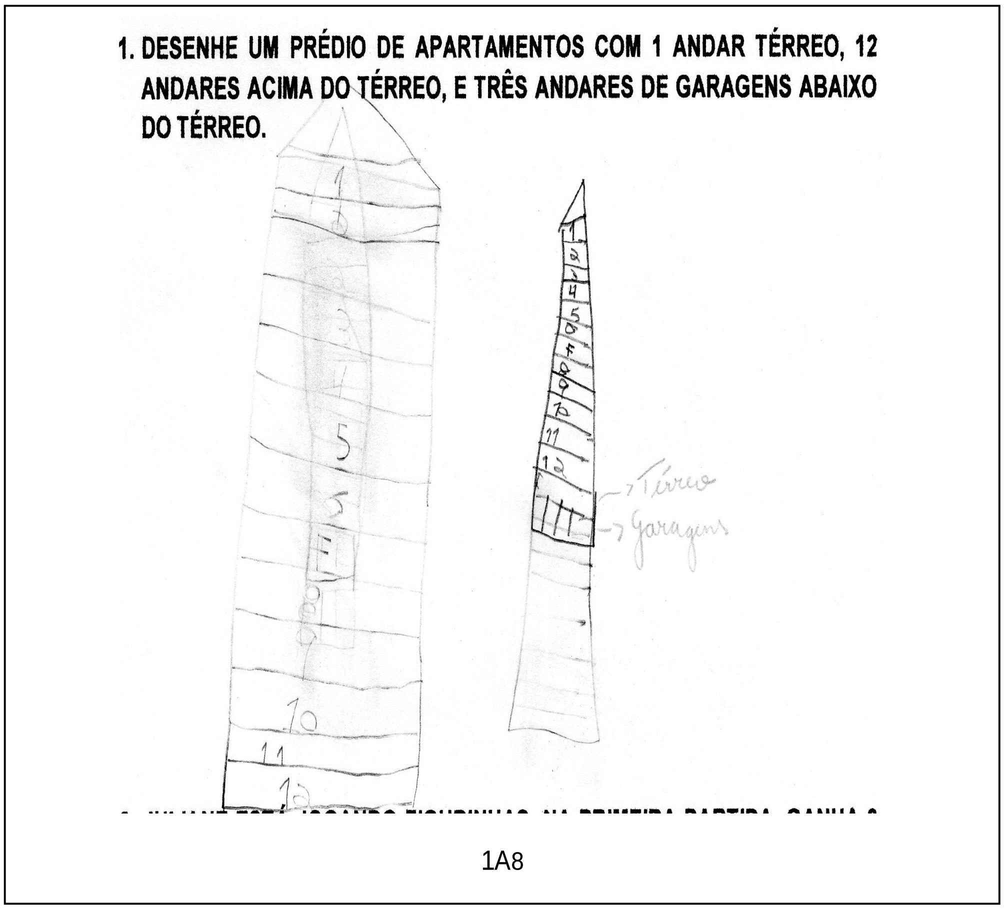
Figura 2 – Resolução do 1º ano (1A1)



Fonte: Autora. Análise das atividades.

Considerando o raciocínio do aluno 1A1 podemos inferir que, para resolver o problema ele utilizou caminhos, de estratégias próprias. “[...] esses registros são como pistas da forma como cada aluno percebeu o que fez -- como expressam suas reflexões pessoais -- e que interferências poderão ser feitas, em outras situações, para ampliar o conhecimento matemático” (SMOLE; DINIZ, 2001, p. 22). Quanto aos demais alunos, demonstraram estar na **categoria 2 (Respostas pictográficas com indicações numéricas)**, pois, além de representarem o prédio, indicaram, nos seus registros, que há pavimentos de garagem, abaixo do térreo, como mostra o registro na Figura 3:

Figura 3- Resolução do 1º ano (1A8)



Fonte: Autora. Análise das atividades.

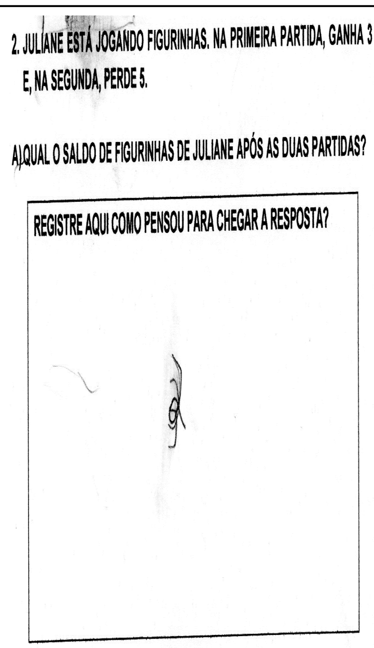
Essas estratégias revelam o que é percebido em sala de aula, ou seja, que temos alunos em diferentes níveis de aprendizagem. Os alunos que registraram as garagens abaixo do nível térreo demonstraram conhecimentos implícitos, noções intuitivas que lhes permitem resolver problemas percebendo que há algo antes do zero, pois representaram um espaço vazio, ou seja, espaço sem nada que na história da matemática o zero significa ausência de quantidade. Deste modo, Centurión (2002, p. 294) destaca:

> A cada número positivo corresponde um número negativo, oposto; o zero é o “marco’, ou separação entre estes dois conjuntos. O zero nem é positivo nem negativo. Uma vez que o zero é a ausência de quantidade, que as quantidades positivas são maiores que zero e que as negativas são menores que zero, convencionou-se que os números positivos ficam, na reta numérica, à direita do zero e os negativos, à esquerda do zero. Assim procedendo, [...] O ponto da reta numérica cuja imagem e o zero é denominado de origem.

Nesse sentido, Pozo (1998, p. 39) “ressalta que o uso de estratégias mais sofisticadas para solução de problemas exigiria, então, em determinados contextos escolares e não escolares, a superação ou o abandono dessas formas simples ou intuitivas de raciocínio”. Para que isso ocorra, faz-se necessário que o aluno vivencie práticas, resolvendo e construindo problemas matemáticos.

No segundo problema, de acordo com a análise das atividades, quatro alunos demonstraram estar na **categoria 7 (Cálculo mental e registro do resultado)**. Dois alunos indicaram estar na **categoria 4 (Respostas simbólicas elementares),** conforme as figuras 4 e 5.

Figura 4 – Respostas simbólicas Elementares (1A9)



2. JULIANE ESTÁ JOGANDO FIGURINHAS. NA PRIMEIRA PARTIDA, GANHA 3 E, NA SEGUNDA, PERDE 5.

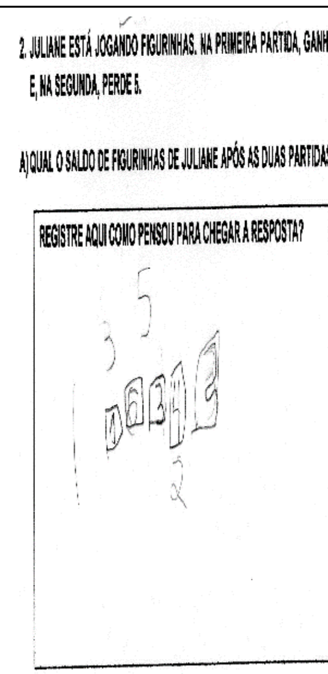
A) QUAL O SALDO DE FIGURINHAS DE JULIANE APÓS AS DUAS PARTIDAS?

REGISTRE AQUI COMO PENSOU PARA CHEGAR A RESPOSTA?

1A9

Fonte: Autora. Análise das atividades.

Figura 5 – Respostas simbólicas elementares (1A1)



2. JULIANE ESTÁ JOGANDO FIGURINHAS. NA PRIMEIRA PARTIDA, GANHA 3 E, NA SEGUNDA, PERDE 5.

A) QUAL O SALDO DE FIGURINHAS DE JULIANE APÓS AS DUAS PARTIDAS?

REGISTRE AQUI COMO PENSOU PARA CHEGAR A RESPOSTA?

1A1

Fonte: Autora. Análise das atividades.

Entretanto, todos os alunos apresentaram resultado positivo, no que se refere ao conjunto dos naturais, e indicam que utilizaram o cálculo mental (aluno 1A9 e aluno 1A1). Estudos de Gray e Tall (1994) corroboram com o desempenho do aluno 1A1, quando este usa o procedimento de contagem “conta-todos”, em que a criança usa três procedimentos simples, de contagem de objetos físicos, dizendo “um”, ao começar cada contagem. Assim, contra três objetos (dizendo “1, 2,3”), conta quatro objetos (dizendo “1,2,3,4”) e, em seguida, conta sete objetos (dizendo “1, 2,3,4,5,5,7”). Desta forma, podemos conjecturar que a estratégia dos alunos pautou- se no campo aditivo, a partir dos conhecimentos que eles têm, sobre a subtração. Assim, utilizaram os procedimentos que dispunham, naquele momento, diante das situações vivenciadas em sala de aula.

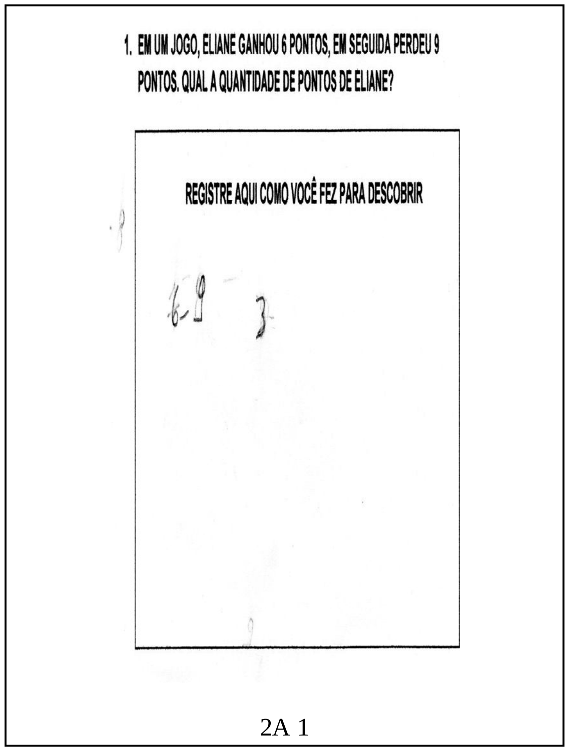
Nem todos os alunos dessa turma chegaram a um resultado adequado, como apresentado nas imagens, mas a maioria se mostrou capaz de buscar uma solução. O importante é que, analisando os procedimentos dos alunos, o professor, aos poucos, compreende como seus alunos pensam, e o que ainda não percebem nas situações, e vai estimulando-os a serem autônomos, na resolução de problemas. Para Centurión (2002, p. 294)

> A ideia de número negativo levou muito tempo para ser aceita. Os antigos hindus (séc. VII) compreenderam que era possível interpretar subtrações como 3-5; bastava admitir a existência de quantidades negativas, que designavam como o nome de dívidas. Distinguiam os números positivos dos negativos, colocando um ponto em cima do número negativo. Assim, já no século VII, os hindus representavam -2 com 2. Porém, eles se recusavam a chamar as quantidades negativas de números. Constam também que os chineses diferenciavam as duas espécies de números, escrevendo os positivos em vermelho (barras vermelhas) e os negativos em preto (barras pretas), processo adotado até hoje por alguns comerciantes, para indicar saldo credor ou devedor.

5.2 Análise qualitativa das estratégias dos alunos do 2º ano

De acordo com as análises das atividades dos sete alunos, ficou demonstrado que eles são capazes de resolver os problemas da **categoria 6 (Resposta algorítmicas com conferência por meio da contagem).** O aluno registra o algorítmo e, ao fazê-lo, recorre à contagem, como forma de validar as aprendizagens. Entretanto, todos apresentaram resultado positivo, no que se refere ao conjunto dos números naturais**.** Já, o aluno 2A1**,** foi identificado na **categoria 5 (Resposta algorítmica simbólica)**. Inferimos que ele mobilizou os conhecimentos, sobre a propriedade comutativa, o que lhe permitiu, segundo D’ Albertas (2006 p. 39), “carregar um conhecimento que já têm (válido numa operação num certo conjunto) para uma situação em que esse conhecimento não é válido”, como mostra o registro de 2A1:

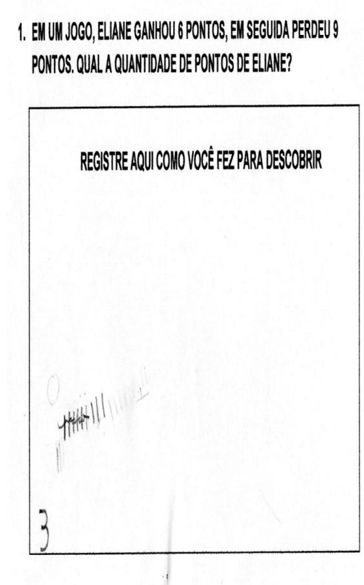
Figura 6 – Resolução do 2º ano (2A1)



Fonte: Autora. Análise das atividades.

Entretanto, o aluno 2A2, conforme imagens 4 e 5, foi identificado na **categoria 5 (Respostas algorítmicas simbólicas)**. Assim, o aluno apresentou resultados positivos, no que se refere ao conjunto, dos naturais. Diante do exposto, pode-se conjecturar que a estratégia utilizada pelo aluno se pautou na contagem, por meio da adição das partes. Ele foi contando de seis, até chegar ao nove. Vale ressaltar, que esse aluno teve que realizar o problema, novamente, porque a professora pensou que ele não teria condições de responder. Como mostra a imagem 5, esta ocorrência é nomeada, por Gray e Tall (1994), de “conta-ambos” – a criança usa dois procedimentos de contagem: conta três objetos-1,2,3, e dá continuidade (sobrecontagem) contando os outros quatro objetos – 4,5,6,7. Neste caso, o aluno contou seis, e depois, fez a sobrecontagem, até nove.

Figura 7 – Resolução do 2º ano (2A2)

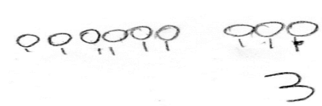


2A2

Fonte: Autora. Análise das atividades.

Figura 8- Resolução do 2º ano

2 A2



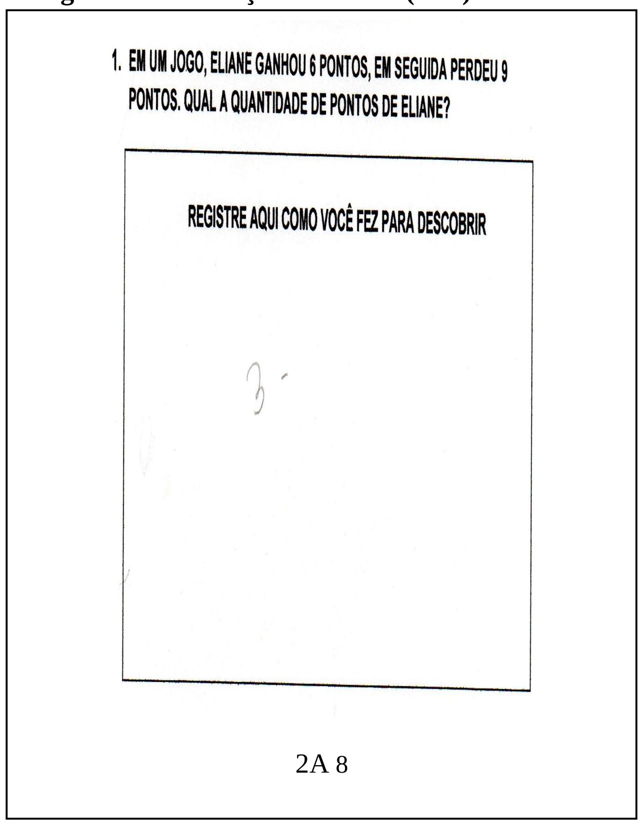
Fonte: Autora. Análise das atividades.

O aluno 2A8, conforme imagem 6, mostrou que, ao resolver esse problema, o aluno está na **Categoria 9 (Cálculo mental com domínio dos inteiros).** Verificou-se que todo o procedimento do aluno foi pautado no conjunto dos inteiros, pois mostra o sinal negativo, revelando que tem conhecimentos implícitos da dívida. Tais resultados vão ao encontro da pesquisa de D'Albertas (2006, p. 39) que preconiza:

> Em muitos procedimentos pude notar que os alunos, por conhecerem a propriedade comutativa da adição, aplicam-na também a subtração. Ocorre

que a subtração nem é uma operação no conjunto dos naturais: {0, 1, 2, 3,...}. Pois nem sempre o resto de uma subtração de naturais é um número natural. Ela é uma operação apenas do conjunto dos números inteiros {..., -2, -1, 0, 1, 2,...}. Assim, a propriedade comutativa da adição nos naturais "aplicada" à subtração não é válida. No entanto, é válida a propriedade da adição nos naturais "aplicada" à subtração nos inteiros. Isso porque, em verdade, uma subtração como 2-8 pode ser representada como uma soma: 2+ (-8). Os alunos podem carregar um conhecimento que já têm (válido numa operação num certo conjunto) para uma situação em que esse conhecimento não é válido.

Figura 9 – Resolução do 2º ano (2A8)

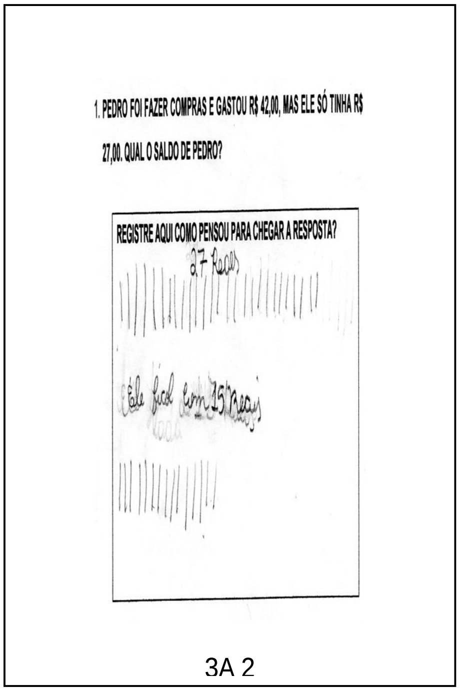


Fonte: Autora. Análise das atividades.

5.3 Análise qualitativa das estratégias dos alunos do 3º ano

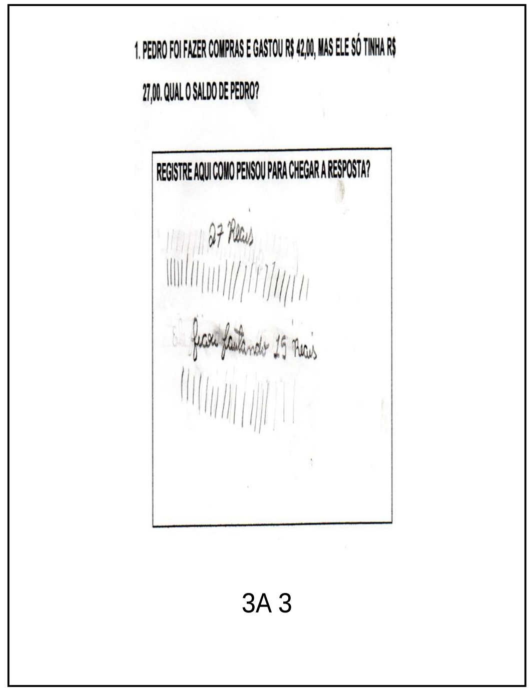
Dos dez alunos que resolveram os problemas propostos, quatro deles utilizaram a estratégia da contagem, a partir dos registros pictográficos e numéricos, como demonstram os alunos 3A2 e 3A3, nas imagens. Segundo Smole e Diniz (2001), o desenho é apenas uma alternativa para que os alunos comuniquem o que pensam, mas esta não pode ser trabalhada, no Ensino Fundamental, como única linguagem, pois eles devem aprender a linguagem matemática.

Figura 10 – Resolução do 3º ano (3A2)



Fonte: Autora. Análise das atividades.

Figura 11 – Resolução do 3º ano (3A3)



Fonte: Autora. Análise das atividades.

Podemos, ainda, observar que a estratégia de contagem desses alunos foi a conhecida como “contando ambos” (GRAY; TALL, 1994), ou seja, eles representaram, cada real, a partir de um traço, compuseram os vinte e sete reais, e continuaram cantando, até quarenta e dois reais. Também se observa, que esses alunos resolveram o problema, que envolve a subtração, pela operação de adição, a partir da ideia de completar.

Esta estratégia também foi utilizada pelo 3A5, porém, este aluno utilizou a sobrecontagem, registrando vinte e sete, e completando, até chegar a quarenta e dois. Alguns estudos (GRAY; TALL, 1994), mostram que a aprendizagem das operações dá-se por meio de uma crescente sofisticação do conhecimento, até se chegar naquilo que chamaram de “compreensão”.

Os mesmos autores acrescentam que “contando ambos”, a criança usa somente dois procedimentos de contagem: uma contagem simples de três objetos (dizendo “1,2,3”), e uma “sobrecontagem”, para os quatro objetos seguintes (dizendo“4,5,6,7”). Esses pesquisadores consideram que a “sobrecontagem” ocorre, em um processo sofisticado, que envolve um só procedimento: a criança conta diretamente quatro objetos, e diz: “4,5,6,7”, sem proceder à contagem dos três primeiros objetos (à enunciação: “1,2,3”).

Figura 12- Resolução do 3º ano (3A5)

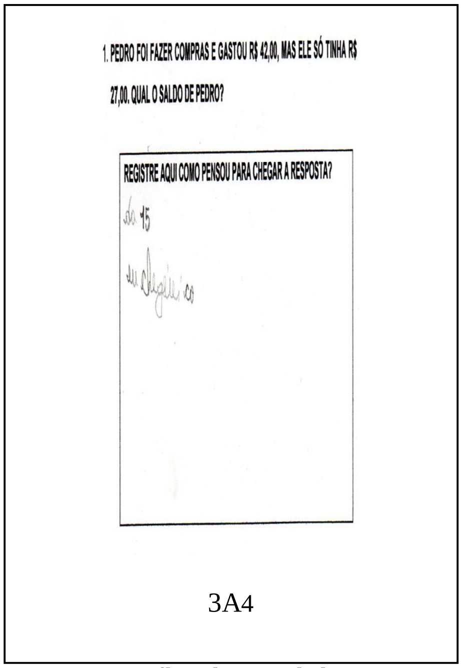
3A 5

Fonte: Autora. Análise das atividades.

Já os alunos 3A9 e 3A4 calcularam mentalmente e registraram a solução do que evidenciaram encontrar-se na **Categoria 7 (Cálculo mental e registro do resultado), o** que corrobora com a pesquisa de Parra e Saiz (2008 p. 199), quando eles afirmam que:

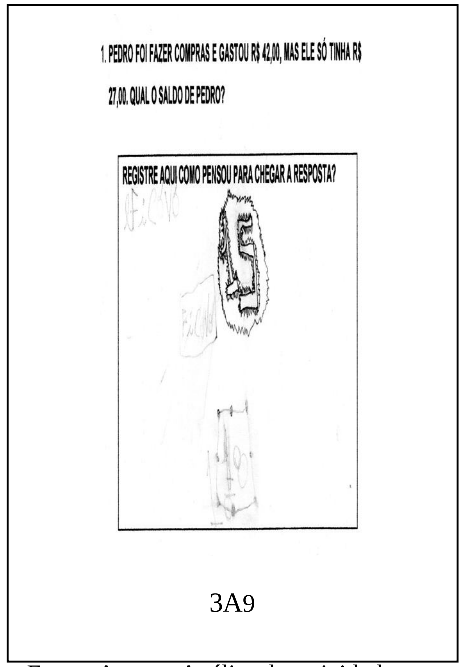
> O cálculo mental favorece, ainda que não seja o único meio usado pelos alunos, o estabelecimento de uma relação mais pessoal com o conhecimento, em oposição ao frequente sentimento de alienação que a maioria das pessoas tem em relação à matemática. Para muitos alunos, ela se reduz z um conjunto de técnicas complexas que permanecem arbitrárias enquanto ainda não possam compreender suas condições de produção e uso.

Figura 13 – Resolução do 3º ano (3A4)



Fonte: Autora. Análise das atividades..

Figura 14 – Resolução do 3º ano (3A9)

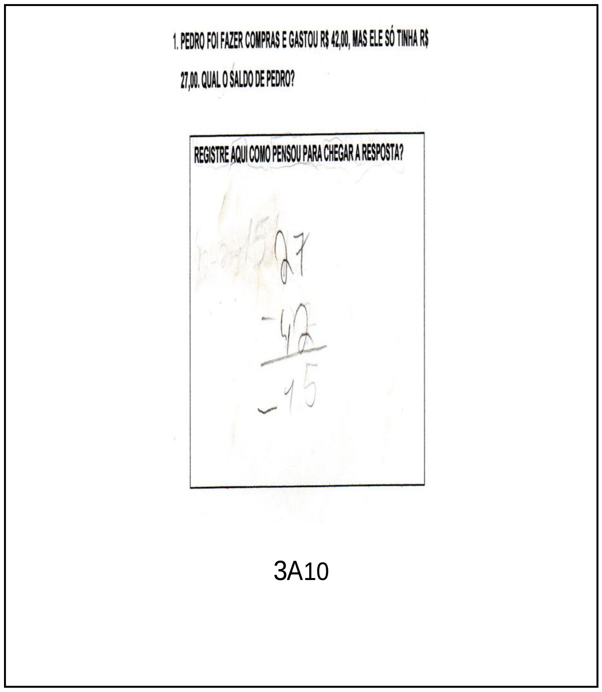


Fonte: Autora. Análise das atividades.

Pode-se observar que, nas imagens 10 e 11, os alunos apagaram alguns de seus registros, o que nos leva a conjecturar que eles podem ter realizado a contagem nos dedos e registrado o resultado. Porém, diferentemente dos alunos 3A2, 3A3, 3A4 e 3A9, estes, aparentemente, lançaram mão de outras estratégias de contagem, e registraram o resultado.

Já 3A10 e 3A6 demonstraram operar no domínio dos inteiros, pois 3A10 montou o algoritmo canônico, com o minuendo menor que o subtraendo.

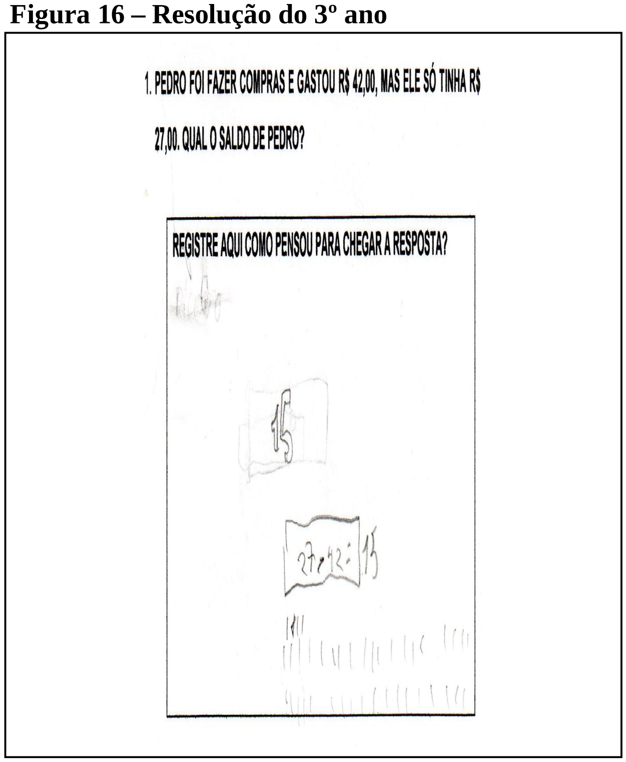
Figura 15 - Resolução do 3º ano (3A10)



Fonte: Autora. Análise das atividades.

O 3A6 montou o algoritmo 27- 42, mas, em seu registro há indicação de que ele utilizou a contagem, pois apagou os traços, conforme mostra a figura 16.

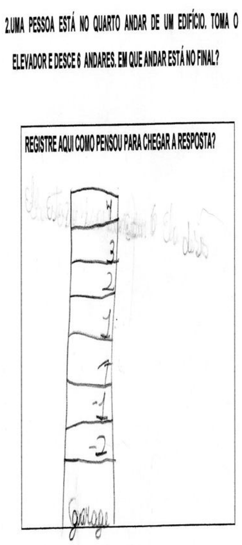
Figura 16 – Resolução do 3º ano



Fonte: Autora. Análise das atividades.

Tais estratégias revelam que os alunos possuem conhecimentos, para resolver os problemas que lhes são apresentados, o que indica que o trabalho matemático, desenvolvido na escola, está aquém das capacidades dos alunos. Na segunda questão, dos dez alunos que resolveram os problemas propostos, cinco deles demonstraram resolver os problemas na categoria 3 (**Respostas pictográficas e numéricas)**. Entretanto, todos apresentaram registros pictográficos e numéricos, porém, há a indicação de transformação negativa, o que nos conduz à conjectura de que operaram no conjunto dos inteiros, conforme podemos observar nas figuras 17 e 18.

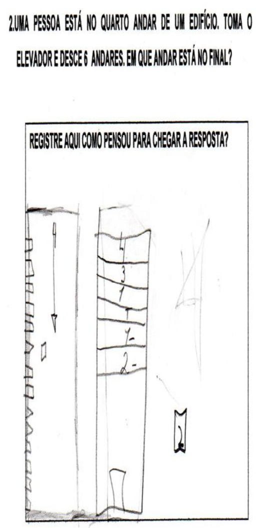
Figura 17 – Resolução (3A2)



3A 2

Fonte: Autora. Análise das atividades.

Figura 18 – Resolução (3A10)

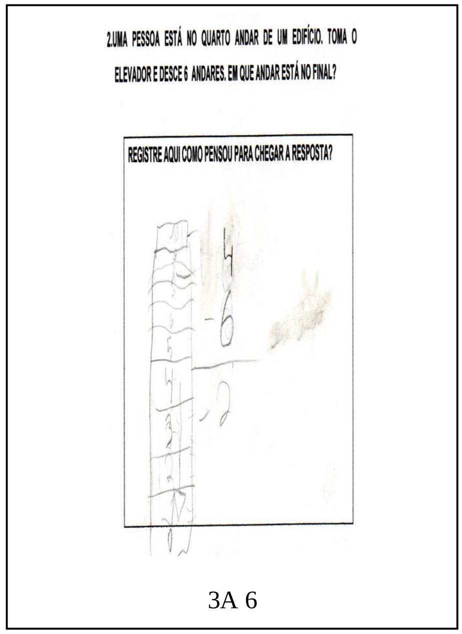


3A10

Fonte: Autora. Análise das atividades.

Agora o aluno 3A6, foi indicado para a categoria 9 **(Respostas algorítmicas no domínio dos inteiros)**, pois registra o algoritmo e, também, ao fazê-lo, mostra a transformação negativa do resultado. Dentre as inúmeras soluções que os alunos usaram, podemos perceber que apresentaram procedimentos e resultados, que não se restringiram aos números naturais, proporcionando o emprego de números negativos.

Figura 19- Resolução do 3º ano (3A6)



Fonte: Autora. Análise das atividades.

Diante disso, D`Albertas (2006, p. 43) preconiza:

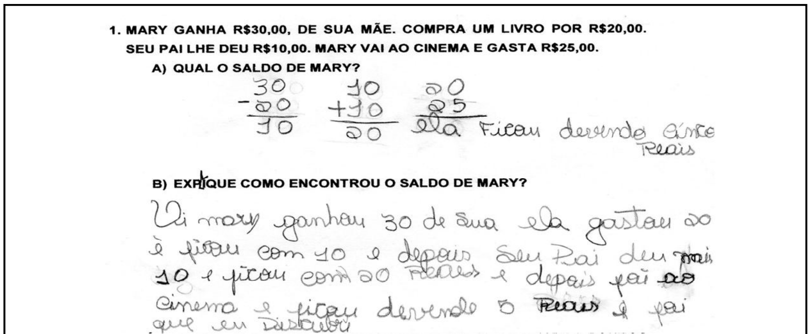
> [...] frente aos impasses vividos pelos alunos diante da subtração, tendemos a apresentar modos de resolução, sem que os alunos experimentem seus próprios caminhos, por vezes desconhecidos pelo professor. O que vimos é que as crianças têm modos nada canônicos de enfrentar a subtração: agrupam, desagrupam dezenas e unidades, nem sempre fixam o minuendo para decompor o subtraendo, nem sempre emprestam, nem sempre armam conta ‘em pé’.

Portanto, os resultados aqui apresentados sugerem que, para estimular crianças a utilizarem números positivos e negativos, é necessária a participação intensa do professor, na elaboração das situações que serão utilizadas para a compreensão dos conceitos, como também, para a exploração dos diferentes significados da subtração, antes da introdução formal dos relativos.

5.4 Análise qualitativa das estratégias dos alunos do 4º ano

De acordo com as análises das atividades, no primeiro problema, seis alunos não fizeram apenas um cálculo – primeiro calcularam quanto ganharam, depois, quanto gastaram, e, logo após, verificaram quanto tinham de saldo. Por último, utilizaram o cálculo mental, para demonstrar que ficaram devendo cinco reais. Este fato nos leva-nos a conjecturar que esses alunos têm a noção de dívida, ou seja, operam no conjunto dos inteiros ao apresentar como resposta: “Ficou devendo cinco reais”. As estratégias dos alunos 4A1 e 4A6 vão ao encontro da pesquisa de Borba (1998, 2009), quando este trata, que crianças e adultos, constroem modelos mentais, que incluem os números negativos, antes mesmo de receber a instrução formal. Logo, consideramos esses alunos inclusos na **categoria 9** (**Respostas algorítmicas no domínio dos inteiros).**

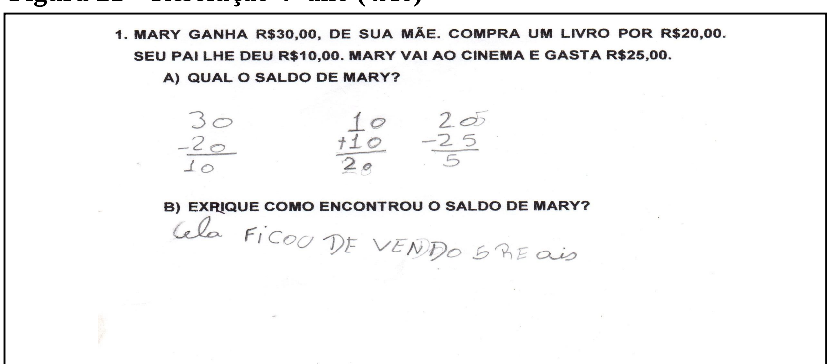
Figura 20 – Resolução 4º ano (4A1)



4A1

Fonte: Autora. Análise das atividades.

Figura 21 – Resolução 4º ano (4A6)



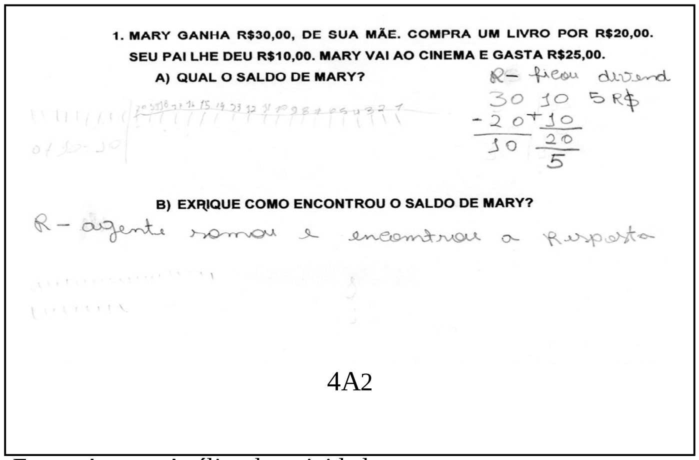
4A6

Fonte: Autora. Análise das atividades.

Os alunos 4A2 e 4A3 foram classificados na **categoria 6** (**Respostas algorítmicas com conferência por meio da contagem) e** também não fizeram um único cálculo, mas, diferentemente de 4A1 e 4A6, utilizaram a estratégia da contagem, a partir dos seus registros. Entretanto, pode-se observar que eles apagaram alguns de seus registros, e depois, utilizaram o cálculo mental, para demonstrar a situação de dívida.

Nesse sentido, Borba (1993) expressa o que a psicologia cognitiva e a educação Matemática, já confirmavam, sobre a existência de noções intuitivas de números inteiros relativos, anteriores ao ensino formal de seu conteúdo. A autora finaliza que, embora sujeitos, até mesmo crianças menores, como as de 4ª série (5º ano), demonstram conceitualização intuitiva de números relativos, mas, para que a criança alcance um desenvolvimento mais de completo, há necessidade um ensino formal específico.

Figura 22 – Resolução do 4º ano (4A2)


1. MARY GANHA R$30,00, DE SUA MÃE. COMPRA UM LIVRO POR R$20,00. SEU PAI LHE DEU R$10,00. MARY VAI AO CINEMA E GASTA R$25,00.

A) QUAL O SALDO DE MARY?

R– ficou devend 5R$

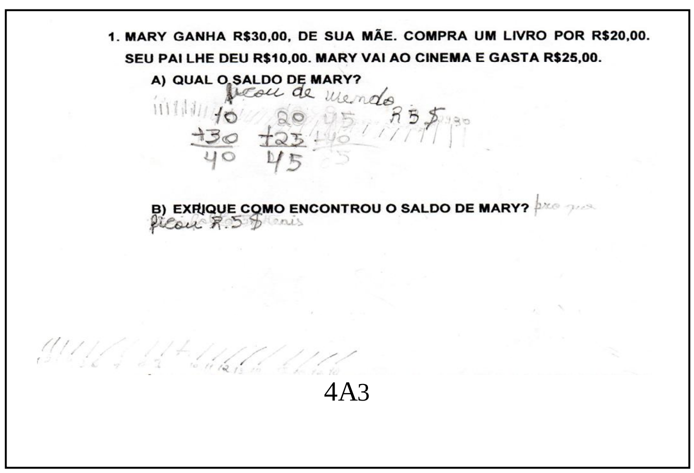
B) EXRIQUE COMO ENCONTROU O SALDO DE MARY?

R – agente somou e encontrou a resposta

4A2

Fonte: Autora. Análise das atividades.

Figura 23 – Resolução 4º ano (4A3)


1. MARY GANHA R$30,00, DE SUA MÃE. COMPRA UM LIVRO POR R$20,00. SEU PAI LHE DEU R$10,00. MARY VAI AO CINEMA E GASTA R$25,00.

A) QUAL O SALDO DE MARY?

ficou de menos R5$

B) EXRIQUE COMO ENCONTROU O SALDO DE MARY?

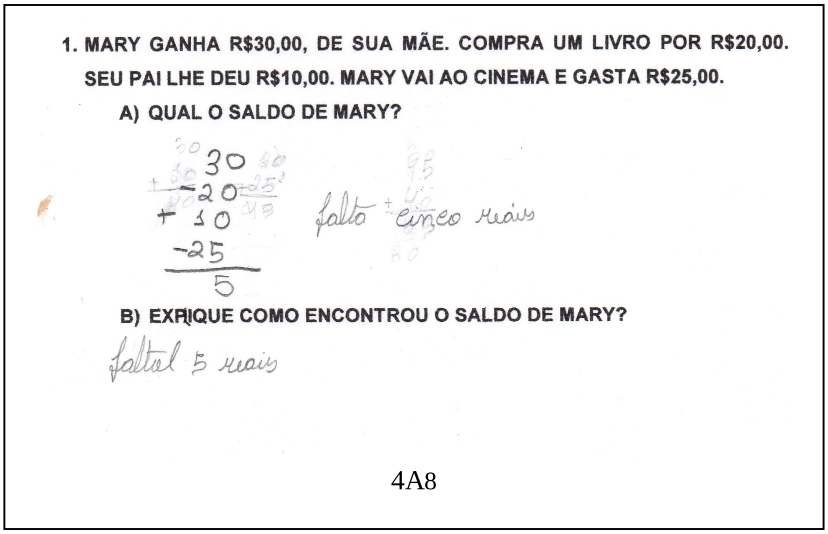
ficou R5$

4A3

Fonte: Autora. Análise das atividades.

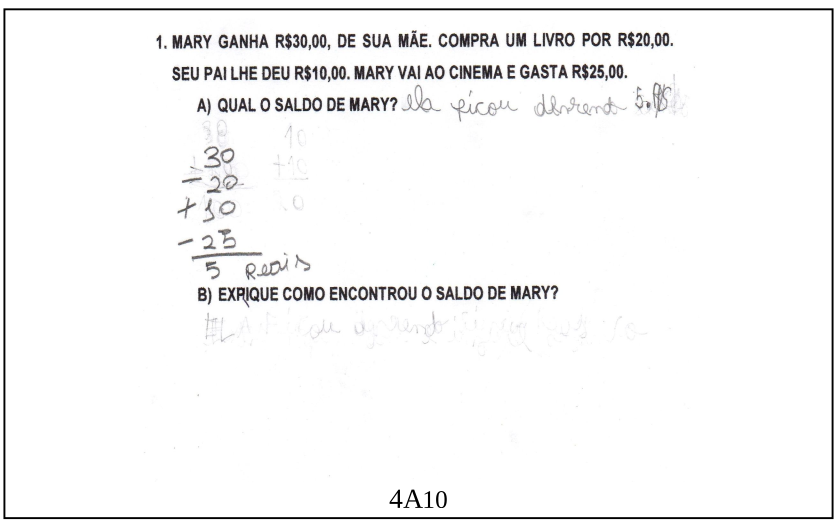
Agora, os alunos 4A8 e 4A10 organizaram todos os dados em um único algoritmo, mas, recorreram ao cálculo mental para resolver o problema e indicar o que ficaram devendo, podendo ser classificados na **categoria 8 (Cálculo mental e com indicação de inteiros).**

Figura 24 – Resolução 4º ano (4A8)



Fonte: Autora. Análise das atividades.

Figura 25 – Resolução 4º ano (4A10)

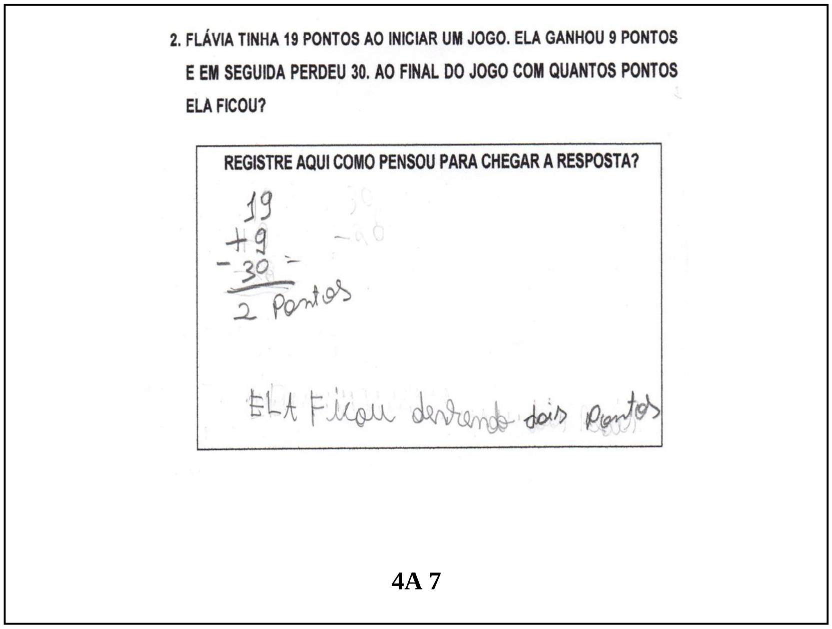


Fonte: Autora. Análise das atividades.

Em relação à análise das atividades, na segunda questão do 4º ano, dois alunos demonstraram que eram capazes de resolver problemas, da **categoria 7 (Cálculo mental e registro do resultado)**. Entretanto, esses alunos apresentaram resultado positivo, operando no conjunto dos naturais, e dando indicações de que realizaram uma expressão numérica, pois organizaram um único algoritmo e fizeram o cálculo mental, o que revela que possuem conhecimentos implícitos e, ainda, que possuem estratégias para resolver problemas, que lhes são apresentados.

Já o aluno 4A7, foi relacionado na **categoria 10 (Cálculo mental com domínio dos inteiros) e,** igualmente, o aluno 4A2, que registra um único algoritmo e, também, ao fazê-lo dá indicação de cálculo mental, através de expressão numérica, porém, o diferencial em sua estratégia é que ele resolve o problema, percebendo a transformação negativa, e informa a situação de dívida, revelando seus conhecimentos implícitos, sobre o conjunto dos inteiros.

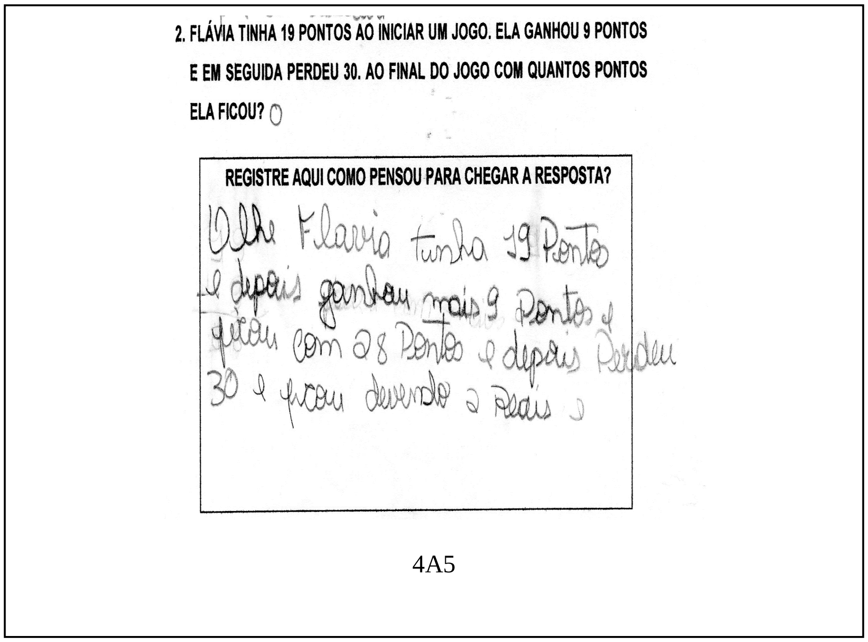
Figura 26 – Resolução do 4º ano (4A7)



Fonte: Autora. Análise das atividades.

Pode-se ainda observar que alguns alunos fizeram o registro escrito, conforme as imagens 23 e 24, além de operarem no conjunto dos inteiros, como também, esses alunos explicaram como pensaram, para resolver o problema. Isto nos leva a conjecturar que estão desenvolvendo a linguagem escrita, revelando assim, que a Matemática também é uma disciplina que corrobora com processo de alfabetização, pois os enunciados dos problemas são textos.

Figura 27 – Resolução do 4º ano (4A5)



2. FLÁVIA TINHA 19 PONTOS AO INICIAR UM JOGO. ELA GANHOU 9 PONTOS E EM SEGUIDA PERDEU 30. AO FINAL DO JOGO COM QUANTOS PONTOS ELA FICOU?

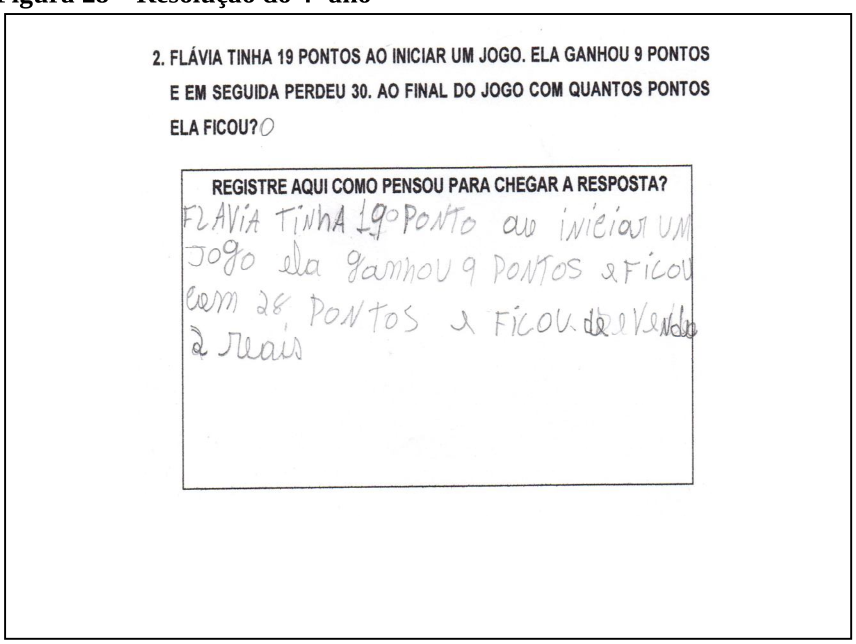
REGISTRE AQUI COMO PENSOU PARA CHEGAR A RESPOSTA?

Olhe Flavia tinha 19 Pontos e depois ganhou mais 9 Pontos e ficou com 28 Pontos e depois Perdeu 30 e ficou devendo 2 Reais

4A5

Fonte: Autora. Análise das atividades.

Figura 28 – Resolução do 4º ano



2. FLÁVIA TINHA 19 PONTOS AO INICIAR UM JOGO. ELA GANHOU 9 PONTOS E EM SEGUIDA PERDEU 30. AO FINAL DO JOGO COM QUANTOS PONTOS ELA FICOU?

REGISTRE AQUI COMO PENSOU PARA CHEGAR A RESPOSTA?

FLAVIA TINHA 19 PONTO ao iniciar UM JOGO ela ganhou 9 PONTOS e FICOU com 28 PONTOS e FICOU deVendo 2 Reais

Fonte: Autora. Análise das atividades.

Vários estudos analisam como as crianças resolvem problemas de adição e subtração, e, nesse sentido, Carvalho (2007), Smole e Diniz (2001), Luna (2013), dentre outros, corroboram com a ideia de que as estratégias que as crianças usam para resolver problemas são fortemente influenciadas pelas estruturas semânticas, da situação problema. Nesse sentido, para Carvalho (2007, p. 18),

> Desenvolver um trabalho com enunciado na perspectiva de resolução de problemas corresponde a facultar ao aluno ler, interpretar e compreender o enunciado conforme o sentido e significado em que foi elaborada a situação. Assim, para compreender o enunciado "o aluno deve ler e interpretar as informações nele contidas, criar uma estratégia de solução, aplicar e confrontar a solução encontrada".

Partilhando este pensamento, Barnet, Sowder e Vos (1997 p. 137) complementam:

> Há uma ampla evidência da linguagem de que a leitura e o processamento da linguagem são habilidades fundamentais, que atuam sobre o processo de resolução de problemas, em suas etapas iniciais. Ademais, há evidências acentuadas de que o ensino específico de leitura de problemas matemáticos pode redundar em êxito na resolução de problemas.

Nessa direção, Azevedo et al. (2012, p. 152) declara que:

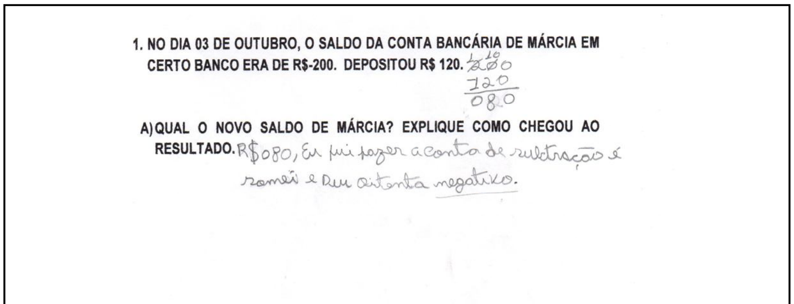
> "diversos autores ressaltam a importância da linguagem escrita nas aulas de Matemática, entendendo-a tanto como um instrumento que possibilita a atribuição de significados e, deste modo, a apreensão de conceitos, quanto como uma ferramenta alternativa de diálogo, na qual o processo de avaliação e reflexão sobre a aprendizagem é continuamente mobilizado".

Ou seja, uma ferramenta de diálogo importantíssima no processo de avaliação e reflexão da aprendizagem.

5.5 Análise qualitativa das estratégias dos alunos do 5º ano

Dos dez alunos que resolveram os problemas propostos, três utilizaram, como estratégia de resolução, com o algoritmo, e deram a indicação de que utilizaram o conjunto dos inteiros, quando afirmaram que era "oitenta negativo" ou "ficou devendo", o que revela conhecimentos implícitos da situação de dívida, conforme imagens 25 e 27, isto vai ao encontro à **categoria 9** (Respostas algorítmica no domínio dos inteiros).

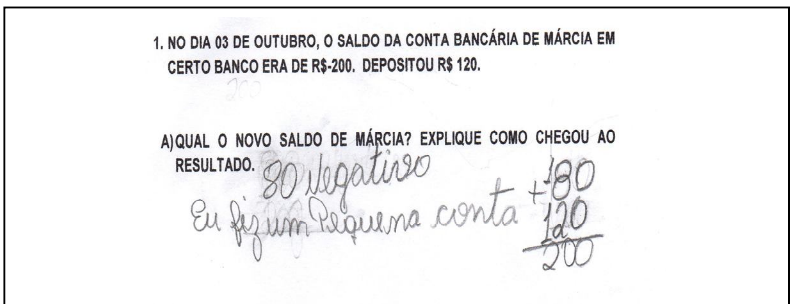
Figura 29 – Resolução do 5º ano (5A2)



5A2

Fonte: Autora. Análise das atividades.

Figura 30- Resolução do 5º ano (5A6)



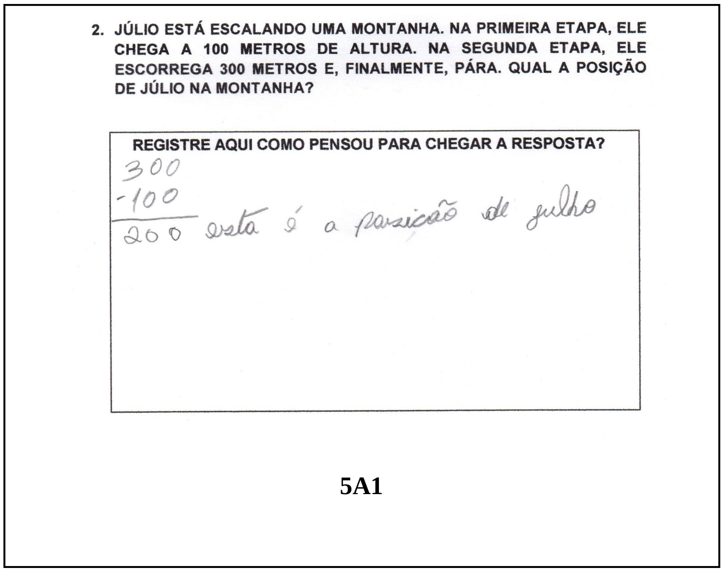
5A6

Fonte: Autora. Análise das atividades.

Já os alunos 5A1 e 5A3, conforme imagens 27 e 28, demonstraram estar na **categoria 7** (**Cálculo mental e registro do resultado)**, pois registraram o algoritmo, mas, na hora de resolver o problema proposto, usaram o cálculo mental, o que podemos comprovar pelas imagens onde não existem registros de riscos, ou qualquer impressão que mostrassem a realização, de fato, do algoritmo. Também, por serem centenas exatas, eles foram logo calculando e fazendo, apenas, o registro.

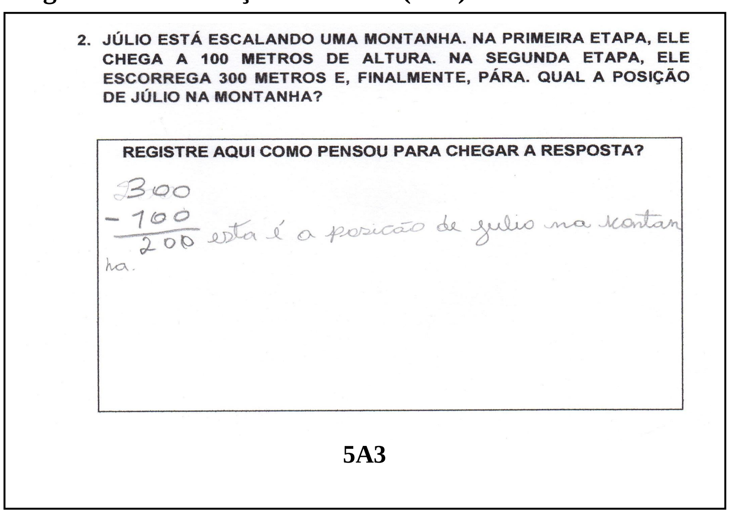
Tais resultados condizem com a pesquisa de Parra e Saiz (2008, p 198), quanto ao conceito de cálculo mental, que

Figura 31 – Resolução do 5º ano (5A1)



Fonte: Autora. Análise das atividades.

Figura 32 – Resolução do 5º ano (5A3)



Fonte: Autora. Análise das atividades.

Inferimos que os alunos 5A1 e 5A3 utilizaram a propriedade comutativa, o que demonstra que apresentavam conhecimentos implícitos. Segundo D’Albertas (2006, p. 39) “os alunos podem carregar um conhecimento que já têm (válido numa operação num certo conjunto) para uma situação em que esse conhecimento não é válido”.

Os demais alunos demonstraram encontrar-se na mesma categoria, efetuando o cálculo mental. Seis alunos demonstraram encontrar-se na **categoria 10** (Cálculo mental com domínio dos inteiros). Para Centurion (2002, p. 152),

> [...] grande parte das crianças de nosso pai, em seu dia-a-dia, utiliza o cálculo mental para resolver situações concretas. Seu processo de descoberta, a partir de tentativas, de erros e acertos, é, em essência, o mesmo dos algoritmos tradicionais ensinados na escola... È muito importante que se considere, no ensino escolar, os cálculos mentais. Os cálculos, envolvendo lápis e papel, com os algoritmos tradicionais, nem sempre são fáceis de se fazerem na vida prática. Por isso é importante que as pessoas possam entender o significado das operações e desenvolver suas próprias técnicas para calcular, pois, em todas elas, está implícito o conhecimento do nosso sistema de numeração.

Se observarmos a história da Matemática, a trajetória dos números negativos não ocorreu de forma fácil, e se passaram muitos anos para, realmente, esse campo numérico ser aceito. Dessa forma, não se pode esperar, também, que alunos dos anos iniciais compreendam as relações, que esse campo numérico envolve, tão rapidamente.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Se as crianças não aprendem na escola, não é por incapacidade de compreender matemática.
Terezinha Carraher

O objetivo deste trabalho foi investigar as estratégias de resolução de problemas dos alunos dos 1º ao 5º anos do ensino fundamental, acerca dos números negativos, e foi norteado pelo problema: como os alunos do 1º ao 5º ano resolvem problemas de subtração com números negativos? É importante enfatizar que a busca pela compreensão dos conceitos, por parte dos alunos, caracterizou-se em uma atividade fundamental para a minha formação, enquanto pedagoga. Assim, esta pesquisa revelou que as estratégias dos alunos representam um dos caminhos para a organização do planejamento do professor, pois, por meio delas, o docente pode descobrir os conceitos e as propriedades algébricas, que sustentam as suas escritas, como também, que os alunos têm conhecimentos implícitos sobre os números negativos, e que precisam ser desafiados, pelos professores, para que os coloquem em evidência.

Nesse sentido, é desejável conhecer mais sobre números inteiros, em atenção às estratégias de resolução de problemas que os alunos utilizaram, pois elas demonstram, que o trabalho com a subtração não se restringem aos números naturais e, por isso, várias pesquisas apontam a necessidade de utilizá-los o quanto antes. Em síntese, minha proposta é ampliar os significados dos números negativos e da subtração, colocando as crianças em situações de jogos e brincadeiras, de formas a que elas possam vivenciar avanços e retrocessos, ganhar e perder pontos, utilizar o dinheiro em situações de créditos ou débitos. Deste modo, sugiro que seja trazida, para a sala de aula, a instrução formal, que envolve contextos significativos, dos números negativos. Neste sentido, o importante é estimular as crianças para a compreensão de que os débitos podem ser representados por números negativos, e não, que os números negativos são débitos.

Para isso, faz-se necessário pensar em estratégias de formação de professores -- para os anos iniciais do Ensino Fundamental --- que sejam capazes de atuar com naturais e inteiros, para que seja possível responder as questões, tais como: por que os mesmos alunos que tem conhecimentos implícitos sobre os números negativos têm índices de IDEB tão baixos? O que vem acontecendo na escola, que as crianças chegam cheias de ideias e saem reprovadas? Como aproveitar esse conhecimento informal que a criança traz para a escola, para transformá-lo em saber científico? Que proposta de formação a Secretaria de Educação tem para esses professores, e como vem trabalhando a formação destes, objetivando melhorar a qualidade do ensino, e, consequentemente, a aprendizagens de seus alunos?

O presente estudo evidencia também, a importância do trabalho com a resolução de problemas, para estimular aos alunos na mobilização de seus conhecimentos implícitos e a liberdade de expressarem uma solução diante de uma nova situação. Nesse sentido, Maranhão e Sentelhas (2012, p. 212) amplia este conhecimento, quando afirma que:

> A resolução de problemas seguida de explicações e debates entre alunos, sob a coordenação do professor é usual na escola e podemos antever novas aprendizagens por meio dessa estratégia nas Comunidades de Práticas investigativas. Enfim, a situação sugere a formulação de tal proposta para propiciar atribuição de novos significados ao negativo e à subtração entre atores escolares.

Diante das estratégias analisadas, pudemos inferir que as crianças do 1º ao 3º ano do Ensino Fundamental, que constituíram uma das amostras analisadas nesta pesquisa, possuíam noções intuitivas, que lhes permitiram resolver problemas, com números negativos. Já os alunos dos 4º e 5º anos evidenciaram uma conceituação inicial, sobre os números relativos. Assim, mesmo antes da instrução formal, esses alunos conseguem compreender números negativos. E, ao que parece, crianças mais novas podem ser apresentadas, formalmente, aos números relativos, pois, nas atividades os alunos do 2º e 3º ano, destacaram-se, quanto ao desenvolvimento de conceitos iniciais.

Diante disso, ratifico que esta pesquisa revelou que as estratégias dos alunos representam um dos caminhos para a organização do planejamento do professor, e partilho da mesma ideia de Maranhão, Camejo e Machado (2008), que ressaltam serem interessantes as estratégias de formação, apresentadas em seu trabalho, que propuseram análises de produções, de estudantes, pelos professores, pois, estas promovem a reflexão de professores, sobre os procedimentos dos aprendizes. Também, faz-se necessário dinamizar a formação, fazendo com que os alunos operem com números naturais, e com os inteiros.

A autora destaca ainda que, segundo Carvalho (2005), os professores têm muitas dificuldades de conteúdo matemático, dentre os quais destacamos os números negativos. É preciso pedagogos e matemáticos ter um diálogo mais frequente para que ambos possam construir uma formação com mais qualidade, e, principalmente, consigamos compreender melhor as ideias dos atores escolares sobre número inteiro e a subtração.

Os resultados aqui encontrados sugerem, também, a busca de um trabalho com o campo conceitual aditivo, fazendo um trabalho sistematizado sobre os significados da subtração antes do ensino formal dos relativos. E a ideia de que crianças de camadas populares não têm capacidade para aprender, com esta pesquisa mostramos o contrário. Elas podem e fazem muito, apesar da precária formação que recebem. Sendo assim, se faz necessário repensar questões como:

- ✓ Por que, à medida que os anos de escolaridade das crianças aumentam, a qualidade das estratégias se aproxima, ao invés de se intensificar e melhorar?
- ✓ O que acontece, no percurso escolar, que os alunos que conseguem resolver problemas com números negativos, são os mesmos que apresentam IDEB[6] tão baixo?
- ✓ Como mobilizar os conhecimentos sobre os números negativos, com gestores que não investem em planejamento?
- ✓ Que política de formação continuada é essa, que os especialistas não dialogam com os professores?

[6] IDEB- Índice de Desenvolvimento da Educação Básica.

REFERÊNCIAS

AZERÊDO, Maria de Alves; FARIAS, Severina Andréa Dantas; RÊGO, Rogéria Gaudencio do. A elaboração de enunciados de problemas aritméticos por professores do ensino fundamental: desafios da formação docente. In: SILVA, Adelmo Carvalho da; CARVALHO, Mercedes; RÊGO, Rogéria Gaudencio (Org.). **Ensinar matemática**: formação, investigação e práticas docentes. Cuiabá: EDUFMT, 2012. 278 p.

BARDIN, L. **Análise do conteúdo**. Tradução: Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições 70, 2011.

BARNETT, Jeffrey C.; SOWDER, Larry; VOS, E. Kenneth. Problemas de livros didáticos: complementando-os e entendendo-os. In: KRULIK, Stephen; REYS, E. Robert. **A resolução de problemas na matemática escolar**. Tradução: Hygino H. Domingues, Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. Investigação qualitativa em Educação: fundamentos, métodos e técnicas. In: **Investigação qualitativa em educação**. Portugal: Porto Editora, 1994, pp. 15-80.

BORBA, Elizabete de S. R.; GUIMARAES, Gilda (Org.). **A pesquisa em educação matemática**: repercussões na sala de aula. São Paulo: Cortez, 2009.

BORBA, Elizabete de S. R. O ensino e a compreensão de números relativos. In: SCHLIEMANN, Ana Lúcia; CARRAHER, David. **A compreensão de conceitos aritméticos**: **ensino e pesquisa**. Campinas: Papirus, 1998.

BORBA. Elizabete de S.R. O que pode influenciar a compreensão de conceitos? O caso os números inteiros relativos. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2, 2003, Santos. **Anais**... São Paulo: SBEM, 2003.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 2002.

BRASIL. Portaria Normativa nº. 7, de 22 de junho de 2009. Dispõe sobre o mestrado profissional no âmbito da Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES. **Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil**, Brasília, DF, 23 jun. 2009. Seção 1, p. 31-32.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília, DF, 2001.

CARVALHO, Mercedes Bêtta Pereira dos Santos. **Ensino da matemática em cursos de pedagogia**: a formação do professor polivalente. 2009. 205 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

______. Os fundamentos do ensino da matemática e o curso de pedagogia. **Revista de Educação PUC-Campinas**, Campinas, n. 1, p. 7-16, 2005.

______. Números: conceitos e atividades para a educação infantil e ensino fundamental I. Petrópolis: Vozes, 2010.

CARVALHO, Mercedes. **Problemas? Mas que problemas**?: estratégias de resolução de problemas matemáticos em sala de aula. 3. ed. Petropólis: Vozes, 2007.

CASTRO, Amélia Domingues de; CARVALHO, Anna Maria Pessoa de. (Org.). **Ensinar a ensinar**: didática para a escola fundamental e média. São Paulo: Pioneira Thompson, 2007.

CENTURIÓN, M. **Conteúdos e metodologia da matemática**: números e operações. São Paulo: Scipione, 2002.

CHIZZOTTI, Antonio. **Pesquisa em ciências humanas e sociais**. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2000.

CHIZZOTTI, Antônio. **Pesquisa qualitativa em ciências humanas e sociais**. Petrópolis: Vozes, 2006.

D'ALBERTAS, Christina. Subtração: uma questão. In: MARANHÃO, Cristina; MERCADANTE, Stella Galli (Org.). **Sala de aula**: um espaço de pesquisa em matemática. São Paulo: Vera Cruz, 2006.

DINIZ, Maria Ignez. Os problemas convencionais dos livros didáticos. In: SMOLE, Kátia S. Org.). **Ler, escrever e resolver problemas:** habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: ArtMed, 2001. p. 99-101.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Trad. Higino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FERREIRA, Elvira; MENDES, Fátima; PRÁTAS; Marta. Resolver problemas de subtração. **Educação Matemática**, Lisboa, n. 85, p. 30-35, nov./dez. 2005.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2009.

GLAESER, Georges. Epistemologia dos números negativos. **Boletim do GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 17. p. 29-124, 1985.

GRAY, E. M.; TALL, D. O. Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple aritmetic. **Journal of Research in Mathematics Education,** Barcelona, v. 25, n. 2, p. 115-141, 1994.

HUGHES, Martin. **Children and number**: difficulties in learning mathematics**.** Oxford: Blacwell, 1996.

KAMII, C. **A criança e o número***:* implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação junto a escolares de 4 a 6 anos. [Tradução Regina A. de Assis]. 11. ed. Campinas: Papirus, 1990.

KLINE, Morris. **Mathematical thought from ancient to modern times**. New York: Oxford University, 1972. v. 1.

LAVILLE, C. DIONNE, J. **A construção do saber**: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas. Tradução Heloísa Monteiro e Francisco Settieri. Adaptação Lana Mara Siman. Porto Alegre: Artmédicas; Belo Horizonte: Editora da UFMG, 1999.

LINS, Rômulo. A formação pedagógica em disciplinas de conteúdo matemático nas licenciaturas em matemática. **Revista Educação PUC-Campinas**, Campinas, n. 18, p. 117-124, 2005.

LUDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986. (Coleção: Temas básicos de ensino).

LUNA, Márcia da Silva Lima. **Enunciado de problema:** um gênero textual. 2013. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2013.

MARANHÃO, Cristina; CAMEJO, Adriana; MACHADO, Silvia. Os olhares de professores sobre a produção de alunos de 1ª série do ensino fundamental. **Educação Matemática em Revista.** São Paulo, ano 13, n. 23, p. 9-16, 2008.

MARANHÃO, Cristina; MERCADANTE, Stella. **Que pesquisa se faz na escola**. São Paulo: Editora Escola Vera Cruz, 2006.

MARANHÃO, Cristina; SENTELHAS, Silvia. Práticas formativas: desenvolvimento de significados atribuídos ao número negativo e à subtração**.** In**:** SILVA, Adelmo Carvalho da; CARVALHO, Mercedes; RÊGO, Rogéria Gaudencio (Org.). **Ensinar matemática**: formação, Investigação e práticas docentes. Cuiabá: EDUFMT, 2012. 278p.

MEDEIROS, A.; MEDEIROS, C. Números negativos: uma história de incertezas. **BOLEMA**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, ano 7, n. 8, p. 49-59, 1992.

MORENO, B. R. O ensino do número e do sistema de numeração na educação infantil e na 1ª série. In: PANIZZA, M. et al. [Trad. Antônio Feltrin]. **Ensinar matemática na educação infantil e nas séries iniciais**: análises e propostas. Porto Alegre: Artmed, 2006.

NUNES, Terezinha. et al. **Educação matemática 1**: números e operações numéricas. São Paulo: Cortez, 2005.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-aprendizagem de matemática através de resolução de problema**.** In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 199-220.

PANIZZA, Mabel. **Ensinar matemática na educação infantil e nas séries iniciais**: análise e propostas. Tradução Antônio Feltrin. Porto Alegre: Artmed, 2006.

PARRA, Cecília. Cálculo mental na escola primária. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma. **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas (Org.). Tradução Juan Acuña Liorens- Porto Alegre: Artmed, 1996. 258 p.

PARRA, Cecília; SAIZ, Irma. **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 2008.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PASSONI, João Carlos. (**Pré) álgebra**: introduzindo os números inteiros negativos. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

POZO, Juan Ignacio (Org.). **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Tradução Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artmed, 1998.

SANTOS. S. A. Explorações da linguagem escrita nas aulas de Matemática. In: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (Org.). **Escritas e leituras na educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. p. 117-125.

SMOLE, Kátia C. S.; DINIZ, Maria Ignez (Org.). **Ler escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

SINCLAIR, A. A notação numérica na criança. In: SINCLAIR, H. (Org.). **A produção de notações na criança**: linguagem, número, ritmos e melodia. São Paulo: Cortez, 1990.

STAREPRAVO, Ana Ruth. **Matemática em tempo de transformação**: construindo o conhecimento matemático através das aulas operatórias. Curitiba: Renascer, 1997.

VAN DE WALLE, John A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VERGNAUD, G. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtractions problems In: CARPENTER, T.; MOSER, J. M.; ROMBERG, A. (Ed.). **Addition and subtraction**: a cognitive perspective. Hillsdale : Ed. Lawrence Erlbaum Associates, 1982.

VERGNAUD, Gerard. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução Maria Lucia Faria Moro; Revisão técnica Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba: Ed. da UFPR, 2009.

VERGNAUD, Gerard. A teoria dos campos conceituais. In: BRUN, Jean (Direção). **Didáctica das matemáticas**. Lisboa: Instituo Piaget, 1996.

VERGNAUD, Gerad. Teoria dos campos conceituais. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1993, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: UFRJ, 1993.

APÊNDICES

APÊNDICE A

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

PRODUTO EDUCACIONAL

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: DOS NÚMEROS NATURAIS AOS RELATIVOS

MACEIÓ

2014

1 INTRODUÇÃO

Os resultados do IDEB - Índice de Desenvolvimento da Educação Básica – do município de Maceió (3,8 nos anos iniciais) evidenciam a dificuldade em desenvolver competências nos estudantes, no que se refere ao currículo da Matemática.

A Matemática, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), deverá ser vista pelo aluno como um conhecimento que pode favorecer o desenvolvimento do seu raciocínio, de sua capacidade expressiva, de sua sensibilidade estética e de sua imaginação.

As orientações do caderno Matriz de Referência, Temas e Descritores (BRASIL, 2009) defendem que o bom desempenho em Matemática está vinculado a um trabalho que possibilite ao aluno resolver problemas e realizar cálculos, rapidamente; interpretar e construir gráficos e tabelas, com facilidade; interpretar, construir mapas e deslocar-se no espaço, sem dificuldades; e outros tantos conhecimentos que compõem o fazer matemático. Porém, para atingir esse nível de proficiência em Matemática, um longo caminho precisa ser trilhado, uma vez que, os conceitos, procedimentos, linguagem e formas de representação desta ciência, estão repletos de normas e convenções, que dificilmente são aprendidos fora da escola.

Van de Walle (2009, p. 59) pontua que há boas razões para ensinar Matemática, por meio da resolução de problemas, descrevendo que:

> A resolução de problemas concentra a atenção dos alunos sobre as ideias e em dar sentido às mesmas. Ao resolverem problemas, os alunos necessariamente estão refletindo sobre as ideias inerentes aos problemas;
> A resolução de problemas desenvolve nos alunos a convicção de que eles são capazes de fazer matemática e deque a matemática faz sentido.
> A resolução de problemas fornece dados contínuos para a avaliação que podem ser usados para tomar decisões educacionais, ajudar os alunos a ter bom desempenho e manter os pais informados.
> A resolução de problemas possibilita um ponto de partida para uma ampla gama de alunos.
> Uma abordagem de resolução de problemas envolve os estudantes de modo que ocorrem menos problemas de disciplina.
> A resolução de problemas desenvolve o “potencial matemático”.
> É muito divertida!

Em consonância com essa ideia, surgem algumas indagações: O que é básico em Matemática? Quando a Matemática faz sentido? Como criar um ambiente para fazer matemática? Pensando em como a Matemática faz sentido, Van de Walle (2009) acrescenta que:

1. Os estudantes devem diariamente aprender, por experiência própria, que a Matemática faz sentido.
2. Os estudantes devem vir a acreditar que eles são capazes de dar significado à Matemática.
3. Os professores devem deixar de ensinar, simplesmente expondo, e começar a deixar os estudantes atribuírem significado à Matemática, que eles estão aprendendo.
4. E, para isto, os professores devem acreditar em seus estudantes – em todos eles!

Hoje as pessoas estão inseridas em um meio social e cultural, cheio de situações que envolvem relações espaciais, métricas e numéricas, diariamente. Mesmo antes de entrar na escola, esses indivíduos já se deparam com situações, que envolvem a Matemática e procuram resolvê-las, com recursos próprios ou aprendidos, fora da sala de aula. A cada nova situação apresentada, colocam em jogo seus conhecimentos e tentam resolvê-las, explorando as diversas maneiras, observando os resultados, comparando suas estratégias com as de outros, e buscando solucioná-las, com maior eficiência e menor esforço.

Nesse contexto, considera-se a metodologia de resolução de problemas como eixo norteador da aprendizagem de Matemática. Os problemas matemáticos permitem que os alunos criem uma interação entre seus conhecimentos implícitos e a situação que estão vivenciando, através do problema, pondo em jogo os conhecimentos matemáticos que lhes parecem pertinentes, para poder tomar decisões que correspondam à escolha das possíveis respostas, e assim, tornando explícitos seus conhecimentos.

O ensino de Matemática é influenciado por diferentes concepções que norteiam o trabalho pedagógico. A existência desses diversos enfoques, ocorre, dentre outros aspectos, pela carência de espaços utilizados para a reflexão, sobre a prática de ensino, vivenciada pelos professores. Nesse sentido, Baroody (1988 apud MORENO, 2006, p. 43) afirma que “toda prática pedagógica está determinada por concepções sobre como se ensina e como se aprende”.

Dessa forma, devem ser consideradas três concepções que perpassam o ensino de Matemática. A primeira se refere ao ensino clássico, que compreende o fazer matemático como sendo o domínio dos procedimentos formais, no qual, para determinar que o aluno sabe, basta saber a escrita convencional dos números e “fazer contas”. Os algoritmos são utilizados como forma de exercício de fixação, na resolução de problemas, e, em muitos casos, estes não desenvolvem o raciocínio lógico dos alunos, mas não os estimula a pensar matematicamente.

A segunda, denominada Matemática Moderna, concebe a aprendizagem, nessa área, a partir do momento em que o aluno consegue estabelecer relações lógicas entre conjuntos, porém, numerosas pesquisas demonstram que a linguagem da teoria dos conjuntos é portadora de uma enorme abstração matemática, para crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

A proposta da Didática da Matemática aponta uma nova concepção sobre o fazer matemático. O foco passa a ser os sistemas didáticos: aluno, professor, saber e as interrelações entre esses componentes. O aluno constroi o sentido dos conhecimentos ensinados, mas também passa a ressignificar, a adaptar, e a transferir seus conhecimentos, para resolver problemas em novas situações. Essa construção só é possível, se for baseada na resolução de problemas. Esta teoria concebe problema como:

> [...] aquelas situações que criam um obstáculo a vencer, que promovem a busca dentro de tudo o que se sabe para decidir em cada caso aquilo que é mais pertinente, forçando, assim, a utilização dos conhecimentos anteriores e mostrando-os ao mesmo tempo insuficientes e muito difíceis. Rejeitar os não-pertinentes e empenhar-se na busca de novos modos de resolução é o que produz o progresso nos conhecimentos. (MORENO, 2006, p. 51)

O papel do professor, nesse processo de ensino, é o de ser mediador, conforme Garrido, 2005, p. 130) acrescenta:

> O papel mediador do professor assume diferentes aspectos. É coordenador e problematizador nos momentos de diálogo em que os alunos organizam e tentam justificar suas ideias. Aproxima, cria pontes, coloca andaimes, estabelecem analogias, semelhanças ou diferenças entre a cultura "espontânea" e informal do aluno, de um lado, e as teorias e as linguagens formalizadas da cultura elaborada, de outro, favorecendo o processo interior de ressignificação e retificação conceitual.

A mesma autora faz ainda os seguintes questionamentos:

> Como desenvolver a capacidade de pensar do aluno? Como aproveitar os conhecimentos que ele traz para a sala de aula? Quais as diferenças entre a cultura do aluno e a cultura escolar? Quais as dificuldades que ele encontra para empreender o processo de mudança em suas crenças, valores e concepções? Por outro lado, como pode o professor observar e analisar suas aulas de modo mais sistemático e objetivo? Quais referenciais usar para entender e dar sentido ao que aí acontece? Como essa atividade pode contribuir para melhoria do ensino e da aprendizagem? (...) Ao elucidar questões o professor pode entender os múltiplos aspectos relacionados aos processos de aprendizagem e ao ato de ensinar, podendo repensar o sentido do seu trabalho, rever suas práticas com menos (des)culpas e se apropriar de procedimentos e referenciais para tornar-se ele mesmo um investigador e produtor de conhecimentos sobre o ensino. (GARRIDO, 2005, 126).

A aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos requer participação ativa e autônoma das crianças. Para Kamii (1990), a aritmética não é aprendida por meio da técnica, e sim, por meio da capacidade que a criança possui de pensar e estabelecer relações com o objeto de estudo.

Espera-se que esta sequência contribua para a reflexão do fazer pedagógico do professor e, consequentemente, para o desenvolvimento da competência matemática, nos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Este trabalho tem por objetivo iniciar uma discussão sobre a resolução de problemas de Matemática, envolvendo números naturais e relativos.

Nesse sentido, a Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida pelo professor e pesquisador Gerard Vergnaud, fornece elementos teóricos aos professores, que lhes permitem compreender como os alunos aprendem conceitos matemáticos, referentes às operações de adição e subtração. Neste sentido, Moreira (2002, p 8) afirma:

> É uma teoria cognitivista neopiagetiana que pretende oferecer um referencial mais frutífero do que o piagetiano ao estudo do desenvolvimento cognitivo e da aprendizagem de competências complexas, particularmente aquelas implicadas nas ciências e nas técnicas, levando em conta os próprios conteúdos do conhecimento e a análise conceitual de seu domínio.

De acordo com essa teoria o conhecimento está organizado em campos conceituas, e este, é um "aglomerado" de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos, operações de pensamento, que interferem igualmente durante o processo de aquisição de um conhecimento.

Define-se como Campo Conceitual um conjunto de problemas e situações, cujo tratamento requer conceitos, procedimentos e representações, de tipos diferentes, mas intimamente relacionados (MOREIRA, 2002, p 9).

Nesse sentido, nos deparamos com perguntas dos alunos como "É 'de mais' ou é 'de menos', professora?" e com situações em que os professores acabam facilitando para que os alunos sejam capazes de resolver problemas em que, muitas vezes, os únicos conceitos trabalhados são o de "tirar", na subtração, e o de "juntar", na adição, o que contribui para inúmeras dificuldades entre professores, alunos e para a resolução de problemas, que deveria ser o eixo norteador do trabalho pedagógico, para o desenvolvimento das estruturas aditivas, e que, quase sempre, passa a ser uma atividade mecânica e sem sentido.

Para Gérad Vergnaud (2009), educador francês, na teoria dos campos conceituais, os problemas de adição e subtração formam o campo conceitual aditivo e envolve ideias diferentes: composição, transformação e comparação. Para este pesquisador, o conjunto dos números naturais não é suficiente, para representar as transformações, pois,

> Os números naturais não são positivos e nem negativos, uma vez que correspondem a medidas e não a transformações. Os números naturais são <u>números sem sinais</u>. Se os números naturais são números sem sinal, eles não podem representar transformações, posto que estas sejam necessariamente positivas ou negativas. É preciso então introduzir outro conjunto de números dotados de sinais, "os números relativos". Estes números representam adequadamente as transformações aditivas (adições e subtrações) que podem ser aplicadas à medida de um conjunto de objetos isoláveis, acrescentando elementos a este conjunto ou deles os retirando. Vamos designar por **Z** este conjunto de números relativos Z = {... –n,..., -cinco, -quatro, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3,..., + n...}. Os números naturais representam medidas dos conjuntos de objetos isoláveis. Os números relativos representam as transformações que essas medidas sofrem. (VERGNAUD, 2009, p.199)

E, de acordo com Vergnaud (1996, p.167), o campo aditivo é "um conjunto das situações que exigem uma adição, uma subtração ou uma combinação destas duas operações" para resolver as situações problema.

O Campo Conceitual das Estruturas Aditivas é, por um lado, o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias adições ou subtrações e, por outro lado, o conjunto dos conceitos e teoremas, que permitem analisar essas situações, como tarefas matemáticas (VERGNAUD, 1993, p. 10).

Nas estruturas aditivas, encontramos três grupos básicos de problemas que, segundo suas características, podem ser classificados: composição, transformação e comparação, conforme Magina et al (2001, p 20-21.) citam, baseados nos estudos de Vergnaud (1982):

1) **Problemas de *composição*:** compreendem as situações que envolvem parte-todo – juntar uma parte com outra parte para obter o todo, ou subtrair uma parte do todo para obter a outra parte.
2) **Problemas de *transformação*:** são aqueles que tratam de situações em que a ideia temporal está sempre envolvida, e, no estado inicial tem-se uma quantidade que se transforma (por acréscimo ou decréscimo), chegando ao estado final, com outra quantidade.
3) **Problemas de *comparação*:** dizem respeito aos problemas que comparam duas quantidades, uma denominada referente e a outra, referido.

O desenvolvimento do raciocínio aditivo pode ser observado claramente, quando apresentamos aos alunos problemas mais complexos, que exigem a utilização de raciocínios, que vão além da aplicação direta de algoritmos.

2 O ENSINO TRADICIONAL DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

- ✓ Há ênfase excessiva no cálculo numérico, necessário para a resolução, o qual constitui a formalização final da situação-problema. Mas, para que a criança chegue ao cálculo numérico, é necessário um raciocínio anterior, e a consideração de toda uma gama de aspectos lógico-matemáticos, implícitos na formalização final, os quais não são trabalhados, nem explicitados, na prática escolar.
- ✓ Trabalha-se com "palavras-chave", a partir de regras fornecidas à criança, como: "se a situação descrita no problema envolve ganhar, comprar, juntar, a operação a ser realizada é a adição e, quando a situação envolvida for de perder, vender, gastar, a operação é a subtração". Esse recurso tenta evitar a famosa pergunta "tia, essa conta é de mais ou de menos?", e permite que diversos tipos de problemas sejam resolvidos pelas crianças. No entanto, essa resolução não é fruto da compreensão das relações, entre os dados do problema, mas, sim, da "dica" fornecida pela palavra-chave. Assim, se forem apresentados problemas em que a palavra-chave não corresponde à operação necessária para a resolução, a criança não conseguirá resolvê-los.
- ✓ Não se trabalha com a compreensão do enunciado do problema. Para resolver um problema é preciso compreendê-lo e, para compreendê-lo, é necessário identificar o elemento desconhecido, a situação envolvida, os dados fornecidos por ele, e relacionar esses dados, trabalho este, que, infelizmente, raramente faz parte do repertório escolar.
- ✓ Não se identificam nem se analisam as diferenças entre os diversos tipos de problema. Os livros didáticos e a prática escolar dividem os problemas em, apenas, "problemas que envolvem a adição, e problemas que envolvem a subtração', não distinguindo classes ou categorias de problemas, segundo sua estrutura semântica, lógica ou sintática. Assim, os diversos problemas são trabalhados de forma homogênea, quando carecem, tanto de maior compreensão, sobre o raciocínio lógico-matemático envolvido, e necessário, para a resolução, quanto das estratégias mais adequadas para solução.
- ✓ Utiliza-se, indiscriminadamente, o material concreto como recurso auxiliar, sem a necessária análise sobre sua contribuição. Na tentativa de facilitar a compreensão por

parte das crianças, a prática educacional atual tem recorrido, ou pelo menos recomendado, a utilização de material concreto, como recurso auxiliar. A criança é levada a representar cada quantidade mencionada no problema, por meio de fichas, palitos etc., com a argumentação de que, tornando a situação mais concreta para a criança, ela compreenderá e resolverá o problema mais facilmente. Deste modo, para resolver, por exemplo, o problema "José tem 12 bolas brancas e 14 bolas azuis. Quantas bolas ele tem ao todo?" -- seguindo a prática educacional atual --, a criança representará a primeira série (12 bolas), depois a segunda série (14 bolas), e, finalmente, conta o total de bolas. Mas, em que a representação concreta facilitou a identificação da operação aritmética, necessária para a resolução? Ao tentar determinar qual operação aritmética que resolve o problema, a criança, na maioria das vezes, volta ao enunciado, à procura da palavra-chave, para poder fazer a sua opção. Assim, a sua escolha é baseada na palavra-chave, e não, na representação por meio de material concreto.

3 IDEIAS DO CAMPO CONCEITUAL ADITIVO

(Continua)

PROBLEMAS
• **Problemas de reunir (transformação)**
Pedro tinha 8 reais. Maria lhe deu mais 4reais. Ao total, com quantos reais Pedro ficou?
Pedro tinha 8 reais. Maria lhe deu um pouco mais. Agora Pedro tem 12 reais. Quantos reais Maria lhe deu?
Pedro tinha alguns reais. Maria lhe deu mais 4reais. Agora Pedro tem 12 reais. Quantos reais Pedro tinha no início?
• **Problemas de separar (transformação)**
Pedro tinha 12 reais. Ele deu 4 reais a Maria. Quantos reais Pedro tem agora?

(Conclusão)

PROBLEMAS
Pedro tinha 12 reais. Ele deu alguns reais para Maria. Agora tem 8 reais. Quantos reais ele deu a Maria?
Maria tinha alguns reais. Ela deu 4 reais a Pedro. Agora Maria tem apenas 8 reais. Quantos reais Maria tinha no início?
• **Problemas parte-todo (composição)**
Pedro tem 4 bolas azuis e 8 bolas vermelhas. Quantas bolas ele tem?
Pedro e Maria colocaram 12 reais no cofrinho. Pedro colocou 4 reais. Quantos reais Maria colocou?
• **Problemas de comparação**
Pedro tem 12 reais e Maria tem 8 reais. Quantos reais a mais Pedro tem de Maria?
Maria tem 4 reais a menos que Pedro. Maria tem 8 reais. Quantos reais Pedro possui?
Pedro tem 4 reais a mais que Maria. Pedro tem 12 reais. Quantos reais Maria possui?

4 PARA RESOLVER UM PROBLEMA

Podemos resolver problemas de várias maneiras, mas sempre seguimos alguns passos e fazemos algumas perguntas.

PRIMEIRO

- ✓ Ler atentamente o enunciado.
- ✓ Analisar: de que trata a história? Qual quantidade conheceu? O que queremos saber?

DEPOIS

- ✓ Pensar na operação que é preciso fazer para responder à pergunta do problema.
- ✓ Escrever a adição ou a subtração.
- ✓ Fazer as operações.
- ✓ Fazer a revisão, conferindo os dados, a operação e o resultado.

5 Objetivos:

- ✓ Perceber que cada um pode resolver um problema, usando seus próprios recursos de operações, e, com isso, descobrir que não há um caminho único para encontrar a solução;
- ✓ Comparar as soluções encontradas e discutir quais são os procedimentos mais eficientes;
- ✓ Analisar diferentes formas de representação, indicando as mais eficientes, para comunicar as operações feitas na solução de problemas do campo aditivo.

6 Encaminhamentos

- ✓ Examine os problemas apresentados nas páginas a seguir, para selecionar os quais irá trabalhar com seus alunos. Eles não precisam ser resolvidos todos no mesmo dia. Lembre-se de que a intenção é proporcionar aos alunos a oportunidade de falar sobre como pensaram, para encontrar o resultado do problema, dando-lhes espaço para discutir com seus colegas os procedimentos que adotaram.
- ✓ Leia o problema junto com os alunos e proponha que cada dupla pense em uma maneira de resolvê-lo, explicando que devem registrar o procedimento utilizado no quadro reservado para isso. Quando terminarem, peça-lhes que se reúnam com outra dupla e comparem as resoluções encontradas. Estimule-os a falar sobre seus procedimentos de resolução, insistindo para que escutem, atentamente, os procedimentos adotados pelos colegas.
- ✓ Socialize a discussão, propondo a algumas duplas que expliquem, para toda a classe, o caminho que utilizaram, compartilhando seus registros. Como variação, peça que copiem a solução apresentada por alguma das duplas –

escolha uma que considere interessante --, deixando-a como modelo ou mesmo como fonte de consulta, para outras situações-problema.

✓ Em cada situação acrescentar este quadro.

Registre aqui como pensou para chegar à resposta

PROBLEMAS ENVOLVENDO NÚMEROS NEGATIVOS (Continua)
1. Desenhe uma figura que represente um prédio de apartamentos com 1 andar térreo, 12 andares acima do térreo, e três andares de garagens abaixo do térreo.
2. Juliane está jogando figurinhas. Na primeira partida, ganha 3figurinhas e, na segunda, perde 5figurinhas. Qual o saldo de figurinhas de Juliane após as duas partidas?
3. Em um jogo, Eliane ganhou 6 pontos, em seguida perdeu 9 pontos. Qual a quantidade de pontos de Eliane?
4. Pedro foi fazer compras e gastou R$42,00, mas ele só tinha R$27,00. Qual o saldo de Pedro?
5. Uma pessoa está no 4º andar de um edifício. Toma o elevador e desce 6 andares. Em que andar está no final?
6. Mary ganha R$30,00, de sua mãe. Compra um livro por 20,00. Seu pai lhe deu R$10,00. Mary vai ao cinema e gasta R$25,00. Qual o saldo de Mary?
7. Flávia tinha 19pontos ao iniciar um jogo. Ela ganhou 9 pontos e em seguida perdeu 30. Ao final do jogo com quantos pontos ela ficou?

PROBLEMAS ENVOLVENDO NÚMEROS NEGATIVOS (Conclusão)
8. No dia 03 de outubro, o saldo da conta bancária de Márcia em certo banco era de R$. -200,00. Depositou R$120,00. Qual o novo saldo de Márcia? Explique como chegou ao resultado.
9. Júlio está escalando uma montanha. Na primeira etapa, ele chega a 100 metros de altura. Na segunda etapa, ele escorrega 300 metros e, finalmente, para. Qual a posição de Júlio na montanha?

Obs.: Sugerimos a reflexão dos problemas, tentando aprimorá-los quanto a escrita para que facilitem a compreensão e a resolução dos mesmos. Em anexo segue uma sugestão de leitura[7]

7 PLANO DE ATIVIDADES: Campo aditivo

ATIVIDADE 1

CONVERSA INICIAL

Inicie com uma conversa, questionando: - *Vocês sabem quantas crianças estudam, do 1º ao 5º ano, em nossa escola? Quantos estudantes estão no 4º ano? Quantas crianças entraram no 1º ano da nossa escola?* Questione também: - *Como poderemos obter essas informações?* Esclareça sobre a função de uma secretaria de escola, informando que é lá que estão registradas todas as informações de que necessitamos, para saber quantos alunos frequentam nossa escola. Converse também, que, para organizarmos esses dados, precisamos registrá-los e que, para isso, as tabelas são úteis, pois contribuem para sintetizar diversas informações, em um único registro. E que nesta atividade, será feito o levantamento do número de alunos de 1º ao 5º ano, com anotações feitas em uma tabela.

[7] Aperfeiçoando a resolução de problemas-história na matemática da elementary school. Davis e Mckillip (1997, p. 114- 130).

PROBLEMATIZAÇÃO

A atividade propõe que os alunos verifiquem quantas crianças estudam na escola, pesquisando a quantidade na secretaria da escola e os respectivos anos, e anotando em uma tabela, com análise posterior dessas informações.

OBSERVAÇÃO/INTERVENÇÃO

Oriente os alunos para que organizem uma forma de registro para obtenção das informações junto à secretaria da escola. E que, de volta à sala de aula, essas informações devem ser compartilhadas e registradas no material. Em seguida, solicite que, em duplas, resolvam as questões propostas. Acompanhe o trabalho das duplas, para verificar quais operações e procedimentos utilizam para responder aos questionamentos. No momento de socialização das respostas, promova o compartilhar das diferentes estratégias de resolução e questione também:

- *A tabela tem um título? Qual é? É importante ter título?*
- *Quantas crianças há no primeiro ano? Como você obtém essa resposta?*
- *Qual dessas turmas é mais numerosa?*
- *Onde foram obtidos os números apresentados na tabela?*

ATIVIDADE

Você saberia responder quantos alunos estudam em sua escola nas turmas do 1º ao 5º ano? Obtenha esses dados e complete a tabela abaixo:

ALUNOS DOS ANOS INICIAIS DE MINHA ESCOLA

TURMAS	NÚMERO DE ALUNOS
PRIMEIROS ANOS	
SEGUNDOS ANOS	
TERCEIROS ANOS	
QUARTOS ANOS	
QUINTOS ANOS	
TOTAL	

Fonte: Secretaria da Escola.

Com base nessas informações, responda:

Qual das turmas tem mais alunos?____

Que operação você realizou para achar o total de alunos?______________________________

Qual a diferença entre o número de alunos dos quartos e quintos anos? ____

Que operação você realizou para obter essa resposta? ________________________________

ATIVIDADE 2

CONVERSA INICIAL

Comente que, nesta atividade, vão resolver 3 problemas, da maneira que acharem mais conveniente, e que devem resolver cada um de uma vez, e depois, colocar a resposta. Proponha que irão socializar seus procedimentos com a classe.

PROBLEMATIZAÇÃO

Auxilie os alunos na leitura e interpretação de cada problema, observando os procedimentos utilizados, selecionando os mais interessantes para discussão. Os três problemas envolvem situações de adição e subtração, com valores monetários e situações comerciais, porém, cada um deles explora uma situação diferente. O primeiro compara o valor que têm, com o que será gasto, no pagamento de 3 contas, mas, a questão é saber se o dinheiro é suficiente para pagar a conta. O segundo pergunta quanto é preciso economizar para fazer uma compra, e o terceiro pergunta o saldo bancário, após movimentações de retirada e depósito. Discuta cada uma dessas situações e, se possível, exemplifique outras situações para análise. Fique atenta ao problema 3, no qual eles precisam subtrair R$218,00 de R$ 2653,00. Como os números são de ordem de grandeza diferente, verifique se percebem que o menor é da ordem das centenas e o maior das unidades de milhar.

INTERVENÇÃO/OBSERVAÇÃO

Verifique em que problema as dificuldades foram maiores e proponha outras situações parecidas para que os alunos resolvam.

ATIVIDADE

Resolva as situações abaixo:

Carlos foi ao banco pagar algumas contas:

- Luz R$ 95,00
- Água R$ 78,00
- Telefone R$ 178,00

Com R$ 350,00 foi possível pagar as três contas?

Clara está juntando dinheiro para comprar uma lavadora de roupas. Em um mês ela economizou R$ 435,00 e no mês seguinte, R$ 460,00. Como o produto que ela deseja comprar custa RS 999,00, quanto ela ainda precisa economizar?

Marcelo tinha R$ 2 653,00 em sua conta corrente. Ele fez uma retirada de R$ 218,00 e depositou um cheque de R$ 277,00. Qual o saldo da conta após essas movimentações?

Compare seus procedimentos e resultados, com os de um colega.

ATIVIDADE 3

CONVERSA INICIAL

Inicie a conversa com os alunos, contando que nesta atividade darão continuidade à resolução de situações-problema e que deverão comparar seus procedimentos com os de um colega.

PROBLEMATIZAÇÃO

A atividade propõe a resolução de situações-problema do campo aditivo, agora com números maiores, envolvendo a ordem de grandeza das centenas.

OBSERVAÇÃO/INTERVENÇÃO

Acompanhe o trabalho dos alunos e verifique como resolvem as quatro situações. Observe os procedimentos utilizados, para calcular os resultados das operações, se usam técnicas operatórias, ou se usam decomposição dos números, como por exemplo, na primeira situação: 312 + 217 = 300 + 10 + 2 + 200 + 10 + 7 = 500+ 20 + 9 = 529. As quatro situações trazem ideias do campo aditivo: composição; variação da ideia de composição, com o total e uma das parcelas conhecidas; transformação positiva; transformação positiva e negativa.

Cabe ressaltar que não precisamos apresentar essas diferentes denominações às crianças, mas elas devem orientar a escolha das atividades que serão propostas pelo professor, com o objetivo de colocar as crianças em contato com diferentes significados e usos sociais, das operações.

ATIVIDADE

Leia com atenção e resolva cada uma das situações abaixo. Depois, compare os procedimentos usados e as respostas com um colega**.**

Numa escola há 312 meninos e 217 meninas. Quantos alunos há nessa escola?	Numa outra escola há 432 estudantes, sendo que 229 são meninas. Quantos são os meninos dessa escola?
Num campeonato estudantil havia 426 atletas inscritos. No último dia, inscreveram-se outros 147 atletas. Qual o total de atletas participantes desse campeonato?	Na escola de Luísa havia 678 alunos matriculados no ano passado. Este ano foram matriculados 127 alunos e saíram da escola 95. Quantos alunos há na escola este ano?

ATIVIDADE 4

CONVERSA INICIAL

Inicie com uma conversa, verificando se seus alunos conhecem o “jogo de bafo”. Peça para alguns alunos descreverem como se joga “bafo” e observe se há discrepâncias nas regras. Se isso acontecer, pergunte se há diferenças entre as formas deles jogarem, quais são essas variações e se algum aluno desconhece o jogo. Diante disso, combine como serão as regras para o seu grupo de alunos e organize com eles outro momento, para que possam jogar “bafo”. Conte-lhes que, neste momento, irão resolver, em duplas, algumas situações vividas por um grupo de alunos, que já jogou bafo.

PROBLEMATIZAÇÃO

A atividade propõe a resolução de problemas envolvendo situações de jogo, com foco no campo aditivo, em que os alunos analisarão ganhos e perdas de figurinhas, durante os eventos.

OBSERVAÇÃO/INTERVENÇÃO

Proponha que os alunos resolvam os problemas em duplas e acompanhe a discussão e resolução dos mesmos, para que se possam identificar diferentes formas de resolução e organizar suas intervenções, no momento de socialização dos procedimentos, o qual tem o intuito de garantir que todos os alunos percebam que a adição e a subtração podem ser recursos, para resolver problemas do campo aditivo, como os apresentados nesta atividade e que, é importante conhecer procedimentos de resolução dos colegas, pois isso faz com que ampliemos a nossa forma de pensar. A cada problema, solicite que registrem seus procedimentos, verifique se houve maneiras diferentes de resolução, e porque isso foi possível.

Ressalte a relevância de cada dupla trocar ideias, compartilhar a maneira como cada um pensou e organizar uma forma de relatar, para as outras duplas, como resolveram o problema. Por exemplo, no primeiro problema, os alunos, de modo geral, utilizam uma adição, mas podem também, usar a sobrecontagem, isto é, podem partir do número 27, contando mais 18, para descobrir o total de figurinhas dos dois amigos. É importante que você identifique as "categorizações" que o pesquisador Gerard Vergnaud propõe para as situações (problema envolvendo o Campo Aditivo):

A situação - "*André tinha 27 figurinhas e Paulo 18 figurinhas. Quantas figurinhas tinham os dois juntos?*" Apresenta a ideia de composição de dois estados, para obtenção de um terceiro, e é uma das situações mais frequentemente trabalhadas, nos anos iniciais, com a identificação da ação de "juntar".

A partir dessa situação, é possível formular outras duas, mudando-se a pergunta, como por exemplo: *André e Paulo, juntos, tinham 45 figurinhas, sendo que André tinha 27. Quantas figurinhas tinha o Paulo?* Ou: *André e Paulo, juntos, tinham 45 figurinhas. O Paulo tinha 18 figurinhas. Quantas figurinhas tinha o André?*

Na situação vivenciada pela Alice e Bruno, a ideia envolvida é decorrente, também, de uma variação da composição, em que se conhece o total de figurinhas dos dois amigos e uma das parcelas da adição e, pede-se para calcular a outra parcela. Os outros problemas, segundo os critérios de Vergnaud, apresentam a ideia de transformação, como se tivéssemos que observar cenas sucessivas de um acontecimento e identificar o que foi alterado. Aí existe uma questão temporal. Por exemplo, na situação: *Rubens tinha 22 figurinhas, ganhou 15 durante um jogo. Quantas figurinhas Rubens têm agora?* Apresenta-se aí a ideia de transformação, pois ele possuía certo número de figurinhas, ganhou outras e pergunta-se com quantas ficou. Essa é a ideia que muitos professores chamam *de acrescentar,* e que na perspectiva dos Campos Conceituais consideramos como *transformação positiva.* Nesta atividade, é proposta uma das variações desse tipo de problema, em que, a quantidade de figurinhas que Rubens possuía inicialmente, era desconhecida, mas, com informações do que ganhou e com quantas figurinhas terminou. A situação *"Marcelo tinha 19 figurinhas, ganhou algumas e ficou com 25. Quantas figurinhas ele ganhou?"* apresenta também a ideia de transformação positiva, com outro termo desconhecido. Nas duas ultimas situações-problema, desta atividade, a ideia envolvida é de transformação negativa, mas é preciso observar na situação: "*No início de um jogo, Luana tinha algumas figurinhas. No decorrer do jogo, ela perdeu 12 e terminou com 25 figurinhas. Quantas figurinhas ela possuía no início do jogo*?". Embora haja a palavra *perdeu,* no enunciado – fato que, muitas vezes, induz a resolução para o uso de uma subtração --, nem sempre isso é o correto, pois, neste caso, pode-se resolver o problema por adição.

Cabe ressaltar que, não precisamos apresentar essas diferentes denominações às crianças, mas elas devem orientar a escolha das atividades que serão propostas pelo professor, com o objetivo de colocá-las em contato com diferentes significados, e usos sociais, das operações.

ATIVIDADE

Um grupo de crianças aprendeu a jogar bafo, antiga brincadeira com figurinhas. Você conhece o jogo de bafo?

Animados com o jogo, propuseram algumas situações para serem resolvidas, usando apenas cálculo mental. Resolva você também.

André tinha 27 figurinhas e Paulo 18 figurinhas. Quantas figurinhas tinham os dois juntos?	Alice e Bruno juntaram suas figurinhas num total de 58. Como Alice tinha 31 figurinhas, qual era a quantidade de figurinhas de Bruno?
Rubens tinha algumas figurinhas, ganhou 15 no jogo e ficou com 37. Quantas figurinhas ele possuía?	Marcelo tinha 19 figurinhas, ganhou algumas e ficou com 25. Quantas figurinhas ele ganhou?
No início de um jogo, Luana tinha algumas figurinhas. No decorrer do jogo ela perdeu 12 e terminou o jogo com 25 figurinhas. Quantas figurinhas ela possuía no início do jogo?	No início do jogo, Tereza tinha 37 figurinhas. Ela terminou o jogo com 25 figurinhas. O que aconteceu no decorrer do jogo?

ATIVIDADE 5

CONVERSA INICIAL

Nesta atividade, os alunos deverão ser organizados em grupos de quatro e completar situações dadas, para transformá-las em problemas.

PROBLEMATIZAÇÃO

Explique que cada um retira duas cartelas e lê os textos escritos nelas. Depois, cada um formula perguntas, ou completa os textos com dados necessários para que se tornem problemas, e, em seguida, passa a resolvê-los. Depois, eles trocam as cartelas, de modo que cada um também resolva os problemas, que foram elaborados pelos colegas.

INTERVENÇÃO/OBSERVAÇÃO

Socialize os textos dos problemas completos e as resoluções. Faça um mural com esses textos completos e as resoluções. Discuta se há outros encaminhamentos, tanto para os textos, como para as resoluções e, se achar necessário, proponha outras situações parecidas.

ATIVIDADE

Com três colegas, recortem as cartelas abaixo. Cada um retira duas cartelas e lê os textos escritos nelas. Formulem perguntas ou complete-os, com dados necessários, para que se tornem problemas; em seguida, resolva-os.

Troquem as cartelas, de modo que cada um também resolva os problemas que foram elaborados pelos colegas.

Paula quer comprar uma bicicleta. Ela já economizou R$ 96,00.	Leila comprou sabonete, creme dental e xampu. Recebeu 18 reais de troco.
Mamãe foi ao mercado com R$ 100,00 e voltou com R$ 20,50 de troco Mamãe foi ao mercado com R$ 100,00 e voltou com R$ 20,50 de troco.	Patrícia tem R$ 251,00 e sua irmã Priscila tem R$ 314,00.

ATIVIDADE 6

CONVERSA INICIAL

Diga que, nesta atividade, os alunos vão analisar alguns procedimentos de resolução de uma adição. Pergunte como fazem para resolver uma adição e incentive seus alunos a apresentarem seus procedimentos, destacando os que não usarem os algoritmos.

PROBLEMATIZAÇÃO

Peça que analisem os procedimentos de Pedro e Talita e pergunte: *os dois procedimentos de resolução estão corretos? O que diferencia o procedimento de Pedro do de Talita? O que significa o número 1 escrito acima do número 8, no cálculo feito por Talita? Por que no procedimento de Pedro não apareceu esse "1"?*

Proponha que resolvam individualmente as outras operações.

INTERVENÇÃO/OBSERVAÇÃO

A partir dos comentários dos alunos, você poderá obter informações sobre o conhecimento deles. Acompanhe a resolução das outras operações para que possa perceber seus conhecimentos individuais. Quando permitimos que os que nossos alunos encontrem suas próprias estratégias, estamos garantindo que utilizem, em uma situação nova, os conhecimentos que já possuem, sobre os números.

ATIVIDADE 7 Jogo: Subindo e escorregando

Subindo e escorregando

Vamos escalar a montanha?
Cuidado que ela é escorregadia!

Para jogar são necessários dois dados: um verde e outro branco.

Este jogo pode ser disputado por duas ou mais pessoas, cada uma tendo seu peãozinho.

Quando chegar sua vez, cada jogador lança os dois dados. O dado verde mostra quantas casas ele vai subir e o branco quantas vai escorregar, tudo na mesma jogada.

Aí é a vez do próximo jogador. Quem volta até o –10 cai fora da brincadeira.

O jogo terminará quando restar apenas um jogador ou quando alguém chegar no topo.

O registro de uma jogada pode ser feito assim:

❍ Uma jogada foi registrada assim: **4 + 4 – 6 = 2**. Que número saiu no dado branco?

❐ Veja: –5 + 2 – 6 = ?
Nessa jogada, em que casa foi parar o peão?

∇ Você lançou os dados:  e 
Assim você foi parar acima ou abaixo da casa em que você estava? Quantas casas acima ou abaixo?

✰ O jogo mal começou e Liliana mostrou que está com sorte. Foi o mais alto que se pode ir na primeira rodada. Responda: em que casa ela foi parar?

➢ É possível alguém, na primeira rodada, já vencer o jogo? E na segunda? Explique.

✧ Na primeira rodada, é possível alguém cair fora da brincadeira? E na segunda? Explique.

➪ Ao fim da primeira rodada, a diferença máxima possível entre dois jogadores é de quantas casas?

ATIVIDADE 8 - Jogo: Fichas e mais fichas

Vamos jogar?

Neste jogo usam-se fichas, azuis e brancas, e os cartões do encarte.

As fichas azuis são positivas: cada uma vale +1. As brancas são negativas: cada uma vale –1. Assim, uma azul e uma branca, juntas, “não valem nada”.

São *cinco* participantes: *um* banqueiro e *quatro* jogadores. O banqueiro dá 12 fichas azuis para cada jogador e fica com as demais. Embaralha os cartões, colocando-os no meio da mesa, com a parte escrita para baixo.

Pronto, o jogo pode começar. O primeiro jogador compra um cartão e o mostra para todos. Aí, esse jogador faz o que manda o cartão e passa a vez ao próximo. Cada jogador fica com seu cartão e assim o jogo prossegue até acabarem-se os cartões da mesa.

Na sua vez, se necessário, o jogador deve pedir ao banqueiro, por exemplo, 3 fichas azuis e 3 brancas, porque, juntas, elas “não valem nada”.

No fim, cada ficha branca desconta uma azul. Feito o desconto, vence quem tiver mais fichas azuis. Se todos “ficarem negativos”, vence quem tiver menos fichas brancas. Quem ficar com zero vence de quem ficar negativo, mas perde de quem ficar positivo.

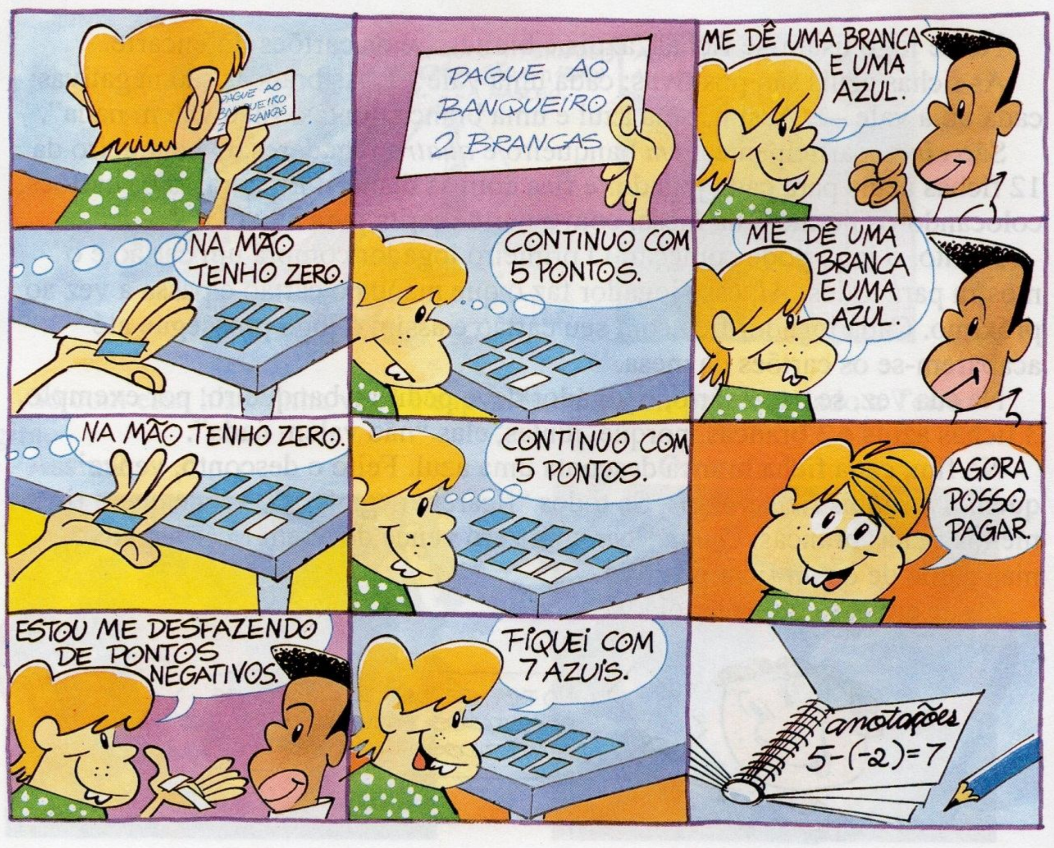
Jogue em casa ou na escola.

O registro de uma jogada pode ser feito assim:

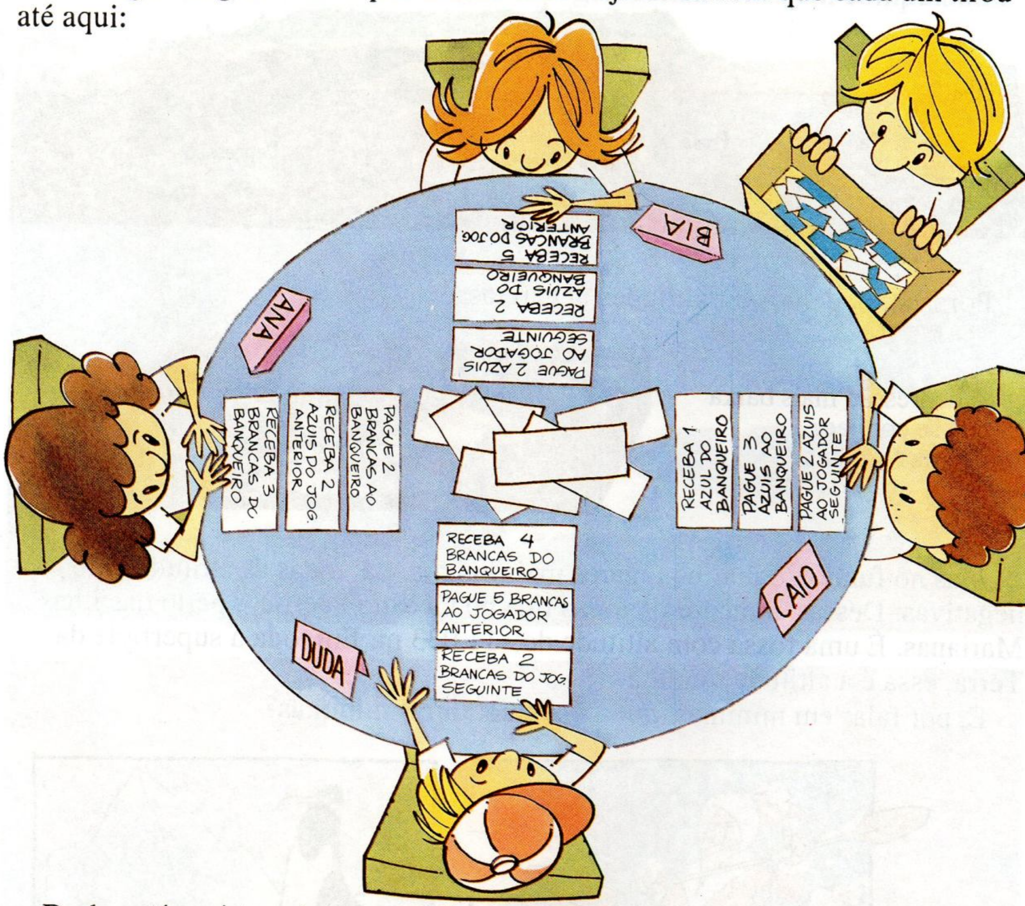
- com uma adição, quando se recebem fichas;
- com uma subtração, quando se pagam fichas.

Por exemplo: Tenho 10 fichas azuis e tiro: *Receba 3 brancas do banqueiro*. Registro: $10 + (-3) = 7$

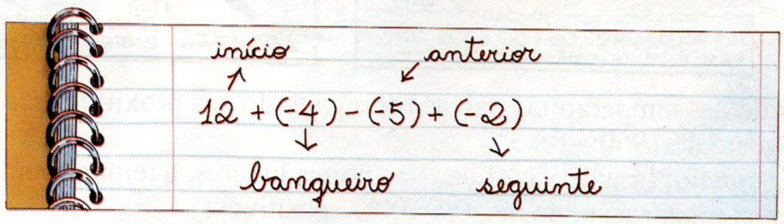
Outro exemplo: Tenho 3 fichas brancas e tiro: *Pague 2 brancas ao jogador seguinte.* Registro: $(-3) - (-2) = -1$



Quatro colegas estão disputando uma partida. Primeiro joga Ana, depois Duda, logo a seguir Caio e por último Bia. Veja os cartões que cada um tirou até aqui:



Duda está registrando seus resultados assim:



❍ Quantos pontos ele fez até aqui?
❐ Quantos pontos fizeram, até aqui, os demais jogadores?

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **PDE**: Plano de Desenvolvimento da Educação: Prova Brasil: ensino fundamental: matrizes de referência, temas, tópicos e descritores. Brasília, DF: INEP, 2008. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/prova%20brasil_matriz2.pdf. Acesso em: 2 mar. 2012.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. Brasília, DF, 1997. 142 p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 14 fev. 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Matemática**: orientações para o professor, Saeb/Prova Brasil, 4ª série/5º ano, ensino fundamental. Brasília, DF: MEC, SEB; INEP, 2009. 118 p. il. Disponível em: http://revistaescola.abril.com.br/downloads/saeb_matematica.pdf. Acesso em: 14 fev. 2012.

CASTRO, A. D; CARVALHO, A. M. P. de (Org.). **Ensinar a ensinar**: didática para a escola fundamental e média. São Paulo: Thompson Learning, 2006. 195p.

CENTURIÓN, M. **Conteúdos e metodologia da matemática**: números e operações. São Paulo: Scipione, 2002.

COLL, C.; TEBEROSKY, A. **Aprendendo matemática**: conteúdos essenciais para o ensino fundamental de 1ª a 4ª série. Barcelona: Ática, 1999.

DAVIS, E. J. et al. **A resolução de problemas na matemática escolar** . Tradução Hygino H. Domingues, Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

GARRIDO, E. Sala de aula: espaço de construção do conhecimento para o aluno e de pesquisa e desenvolvimento profissional para o professor. In: CASTRO, A. D. de; CARVALHO, A. M. P. de; PÉREZ, D. G. (Org.). **Ensinar a ensinar**: didática para a escola fundamental e média. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2005.

HLIEMANN, A.; CARRAHER, D. (Org.). **A compreensão de conceitos aritméticos**: ensino e pesquisa. Campinas: Papirus, 1998.

IMENES, L. M. P.; JAKUBOVIC, J.; LELLIS, M. C. **Pra que serve matemática**? números negativos. São Paulo: Atual, 1992.

KAMII, C. **A criança e o número**: implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação junto a escolares de 4 a 6 anos. [Trad. Regina A. de Assis]. 11. ed. Campinas: Papirus, 1990.

MOREIRA, M. A. (Org.). **A teoria dos campos conceituais, o ensino de ciências e a investigação nesta área.** Porto Alegre: Instituto de Física da UFRGS, 2004.

MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigação em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 7, n. 1, p. 7-29, 2002.

MORENO, B. R. O ensino do número e do sistema de numeração na educação infantil e na 1ª série. In: PANIZZA, M. et al. **Ensinar matemática na educação infantil e nas séries iniciais**: análises e propostas. [Trad. Antonio Feltrin]. Porto Alegre: Artmed, 2006.

SÃO PAULO (Cidade). Prefeitura Municipal. **Cadernos de apoio e aprendizagem**: matemática: Programa de Orientações Curriculares: primeiro ano. São Paulo: Fundação Padre Anchieta, 2010.

______. **Cadernos de apoio e aprendizagem**: matemática: Programa de Orientações Curriculares: segundo ano. São Paulo: Fundação Padre Anchieta, 2010.

SÃO PAULO (Estado). Coordenadoria de Gestão da Educação Básica. **Projeto Educação Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**: EMAI 4º e 5º ano. São Paulo. Versão preliminar. 2013. Disponível em: http://lereescrever.fde.sp.gov.br/SysPublic/InternaMaterial.aspx?alkfjlklkjaslkA=302&manudjsns=0&tpMat=1&FiltroDeNoticias=3. Acesso em: 29 out. 2014.

SILVA, V. A. da; SILVA, A. da F. G. **Concepções de professores que ensinam matemática para os anos iniciais a respeito do campo conceitual aditivo no âmbito do observatório da educação.** [2011?] Disponível em: http://editorarealize.com.br/revistas/ebrapem/trabalhos/25a2a2b25a0c59d059518813d755e8fb.pdf Acesso em: 29 out. 2014.

VAN DE WALLE, J. A. de. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.