



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

ALBERTO HELENO ROCHA DA SILVA

SIMETRIAS PARA O ENSINO DE EQUAÇÕES E FUNÇÕES NA  
EDUCAÇÃO BÁSICA

MACEIÓ-AL  
DEZEMBRO DE 2014

ALBERTO HELENO ROCHA DA SILVA

SIMETRIAS PARA O ENSINO DE EQUAÇÕES E FUNÇÕES NA  
EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação de Mestrado Profissional, submetida em 19 de dezembro de 2014, à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vânio Fragoso de Melo.

MACEIÓ-AL  
DEZEMBRO DE 2014

**Catlogação na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**  
**Bibliotecária Responsável: Maria Helena Mendes Lessa**

S586s Silva, Alberto Heleno Rocha da.  
Simetrias para o ensino de equações e funções na educação básica / Alberto Heleno Rocha da Silva. – Maceió, 2014.  
164 f. il.

Orientador: Vânio Fragoso de Melo.  
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2014.

Bibliografia: f. 156-159.  
Apêndices: f. 160-164

1. Simetria – Matemática. 2. Matemática – Ensino. 3. Equações. 4. Funções simétricas. I. Título.

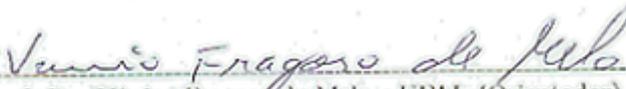
CDU: 512.644:37.046.12./14.

ALBERTO HELENO ROCHA DA SILVA

SIMETRIAS PARA O ENSINO DE EQUAÇÕES E FUNÇÕES NA  
EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação de Mestrado Profissional, submetida em 19 de dezembro de 2014, à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

  
Prof. Dr. Válio Fragoso de Melo - UFAL (Orientador)

  
Prof. Dr. José Carlos Almeida de Lima - UFAL

  
Prof. Dr. Givaldo Oliveira dos Santos - IFAL

À minha esposa Anne Suelly, pelo amor incondicional que nos uniu e nos tem dado forças de superar juntos os grandes obstáculos que a vida nos proporcionou. Juntos continuamos sonhando e traçando novas metas em busca de novas conquistas. Ao meu filho amado Adriel Henri, que muitas vezes me tirou dos estudos para lhe dar atenção, que muitas vezes sentou, pacientemente, no meu colo enquanto eu digitava este trabalho, esperando para assistirmos juntos ao *Gummy Bear* ou ao coelhinho traquino num minivídeo da *Walt Disney* chamado *PRESTO*, ou até mesmo para brincarmos juntos pela casa, proporcionando-me assim pequenos, mas grandiosos, momentos de descontração.

Aos meus pais, Maria Luiza e Erivan Bezerra, por terem me guiado no caminho da ciência e da educação, da paz e do bem. Eles que me ensinaram desde cedo que estudar é um dos melhores tesouros que podemos escolher.

Aos meus irmãos, Alfredo Erivan, que sempre cuidou de mim como um filho; Luiz Evânio, que muito me puxou a orelha por causa da Matemática, e Albérico Ely, companheiro das brincadeiras de infância e travessuras nas épocas das festas juninas.

A Frei Dimas — *in memoriam*. Tenho certeza de que ele está muito contente com a realização deste trabalho.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, força maior que me faz uno com o universo, pelo dom da vida, por todas as minhas conquistas e por nunca ter me abandonado. A Jesus Cristo, por sempre me dar forças nos meus momentos de fraqueza. A Maria concebida sem pecado, que todos os dias me acolhe como um filho em seus braços e sempre ouve as minhas preces, por todas as graças alcançadas.

Ao Prof. Dr. Vânio Fragoso de Melo, meu orientador, um agradecimento especial por ter acolhido a minha ideia e pelos valiosos ensinamentos, orientação, paciência e compreensão, tornando possível a realização deste trabalho.

A Antônio Sandoildo Freitas Tenório, doutor em Física pela Universidade Federal de Pernambuco, por acreditar no meu potencial, por se preocupar comigo (como um irmão mais velho) com relação à minha vida acadêmica, por todas as conversas que tivemos sobre a teoria dos invariantes e outras teorias revolucionárias da Física Quântica e Relativística, e por ter revisado analiticamente o meu trabalho. Obrigado por todos os seus ensinamentos.

Ao Prof. Me. Severino José Bezerra Filho, que acreditou na simetria e orientou no ano de 2006, minha monografia.

Aos professores Dr. Gregório Manoel da Silva Neto, Dr. Fernando Pereira Micena, Dr. Marcus Augusto Bronzi, Dr. Luis Guillermo Martínez Maza, Dr. Amauri da Silva Barros, Dr. Ediel Azevedo Guerra, Dr. André Luiz Flores, Dr. Walter Teófilo Huarcaca Vargas, Me. Viviane Oliveira Santos e Me. Adina Rocha dos Santos, que estiveram sempre conosco e foram verdadeiros mestres em nos transmitir conhecimentos e trocamos experiências. Também aos professores Dr. Elon Lages, Dr. Eduardo Wagner e Dr. Paulo César, do Instituto de Matemática Pura e Aplicada, que, mesmo à distância, através de videoaulas, muito nos ensinaram e continuam ensinando.

A Escola Coronel José Abílio na pessoa dos professores Jailson Barros de Oliveira (atual diretor), Ana Lúcia Soares da Silva (ex-diretora), Sebastiana Vilela (Vânia), Pollyana Marina, Quitéria Cabral e demais colegas de equipe, pelo apoio em todos os momentos em que estive cursando o mestrado.

Ao meu *brow* Jonatas Alberto (*my friend John, best friend...*), que me acolheu como irmão em sua humilde e solitária residência de estudante, por todo o período em que estive frequentando a UFAL. Também a seus pais, Sivaneide e Alberto Souza (meu colega de turma no último ano do ensino fundamental), que consentiram a minha estada.

A todos os meus colegas de curso, principalmente aqueles que me ajudaram a crescer, compartilhando seus conhecimentos. De um modo especial, a Ideogar Pereira, não só pela companhia (mesmo dormindo) nas viagens de Bom Conselho-PE a Maceió-AL e vice-versa, mas também por compartilhar conhecimentos durante nossas sessões de estudo.

A todos os discentes que contribuíram ao longo dos anos direta ou indiretamente, participando de minhas aulas em escolas públicas e particulares e resolvendo alguns probleminhas de Matemática e de Física.

Ao meu amigo, o professor Me. Valfrido da Silva Nunes, pela revisão linguística, deste trabalho.

À Sociedade Brasileira de Matemática, pela criação do PROFMAT. Sem esse programa, provavelmente eu demoraria bem mais a apresentar este trabalho.

À CAPES, pelo indispensável suporte financeiro.

E assim se fez. Deus contemplou toda a sua obra, e viu que tudo era muito bom.

Gênesis 1: 30c-31.

## RESUMO

Simetrias são amplamente encontradas na natureza, mas não se têm muitos trabalhos escritos sobre suas propriedades e aplicações. No tocante ao ensino, os livros didáticos, mais especificamente os de Matemática, tratam-na superficialmente. Na prática pedagógica então, raramente se encontra material com abordagens profundas sobre simetrias e aplicações no ensino. Apesar de se observar que os livros didáticos, usados nos ensinos fundamental e médio, abordam as simetrias com uma frequência bem maior nesses últimos quatro anos, não se observa uma aplicação mais intrínseca em determinados tópicos do ensino da Matemática ou Geometria. A maioria dos livros didáticos restringe-se às simetrias axiais, translacionais e rotacionais aplicadas a figuras geométricas e, raras as vezes, fazem um paralelo a algum tema interdisciplinar, como por exemplo, mostrar que a maioria dos seres vivos apresenta simetria bilateral. Porém, de um modo geral, não fazem um estudo analítico das simetrias. Um dos livros mais importantes sobre simetrias foi escrito pelo físico alemão Kepler, na tentativa de explicar as simetrias do objeto simétrico mais cobiçado na época: *o floco de neve de seis pontas*. Nesta dissertação, descrevemos um trabalho que vem sendo realizado há mais de dez anos em salas de aula de escolas públicas e particulares e que tem surtido efeitos positivos no que diz respeito ao ensino da Matemática. Iniciamos com uma abordagem sobre a educação matemática, as formas como as simetrias se apresentam na natureza, na arquitetura e nas artes plásticas. A importância das simetrias para o mundo físico clássico, relativístico e quântico. Em seguida, apresentamos um programa de ensino que leva em consideração uma sequência lógico-dedutiva do ensino da Matemática, partindo das resoluções de problemas cujas soluções levam à necessidade de resoluções de equações de primeiro e segundo grau, e sistemas de equações. As equações de primeiro grau são resolvidas utilizando simetria axial onde levamos em consideração que o sinal de igualdade é o eixo de simetria que mantém o equilíbrio. Equações do segundo grau são resolvidas pelo método de completar quadrados que mantém inalterada a simetria axial da equação, evitando assim a utilização da fórmula de Bháskara. Os sistemas de equação são resolvidos utilizando o princípio da simetria translacional, onde isolamos a mesma incógnita nas duas ou mais equações do sistema. Este trabalho culmina com um estudo analítico do comportamento das funções lineares, quadráticas, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas, diante das aplicações de operações das simetrias. São realizadas reflexões das curvas (simétricas axiais) que representam as funções em relação aos eixos das abscissas e ordenadas, também como em relação a uma reta qualquer e até mesmo à reta bissetriz dos quadrantes ímpares do plano cartesiano ortogonal, obtendo assim, as respectivas funções inversas; além disso, analisamos também a simetria rotacional de cada curva que representa as funções em relação à origem do plano cartesiano ortogonal. Da experiência de ensino, notamos que os discentes tiveram uma abertura maior para o trabalho interdisciplinar e, através desse mecanismo de ensino, desenvolveram maior capacidade de percepção geométrica e algébrica, bem como maior entusiasmo em relação ao estudo das outras ciências.

Palavras-chave: Simetrias. Ensino. Equações. Funções.

## ABSTRACT

Symmetries are widely found in nature, but do not have many written works on their properties and applications. In regard to school textbooks, more specifically those that deal with mathematics, treat them superficially. In the pedagogical practice textbooks with a deep approach to symmetries and their applications are rarely found. While reading those textbooks used in primary education and secondary education we have found symmetries applied frequently in the past four years, but the same does not happen with respect to a more intrinsic application in particular topics in the teaching of mathematics or geometry. Most textbooks are restricted to axial, translational and rotational symmetries applied to geometric figures, and seldom make a parallel to any interdisciplinary aspect, for example, to show that the majority of living beings exhibit bilateral symmetry. However, in the general sense, they do not make an analytical study of symmetries. One of the most important work on symmetries was written by the German physicist Kepler while attempting to explain the symmetries of the most coveted symmetrical object at that time: *snowflake of six points*. In this dissertation, we describe a work that has been done over ten years in public and private schools, and that has had positive results on mathematics teaching. We begin with an approach to mathematical education, the ways in which symmetries arise in nature, in architecture, and visual arts. The importance of symmetries for the classical, relativistic and quantum physics. Then, we present an educational program which takes into consideration one logical-deductive sequence of teaching of mathematics whose scope is the resolution of problems whose solutions need the resolution of equations of first and second degrees, as well as systems of equations. The first-degree equations are solved using axial symmetry in which we consider the equal sign is the axis of symmetry that keeps the balance of equation. Second-degree equations are solved by the method of complete on squares keeping unchanged the axial symmetry of the equation, thus avoiding the use of formula of Bháskara. Systems of equations are solved using the principle of translational symmetry, where one isolates the same term unknown in two or more equations of the system. This work culminates with an analytical study of the behavior of linear, quadratic, exponential, logarithmic, and trigonometric functions, considering applications of the operations of symmetry. The curve reflections are held (axially symmetrical) representing the functions in relation to the coordinate axes, as well as compared to any straight line and even to the bisectrix of the odd quadrants of the orthogonal Cartesian plane, obtaining their several inverse functions; furthermore, we also analyzed the rotational symmetry of each curve representing the functions relative to the origin of the orthogonal Cartesian plane. From our teaching experience, we have noticed that students have had a great openness to interdisciplinary works and through this learning mechanism have developed a great ability to algebraic and geometric perception and a greater enthusiasm for the study of other sciences.

Keywords: Symmetries. Teaching. Equations. Functions.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Ex. de rede de Bravais bidimensional. Ex. de simetria translacional	23
Figura 2. Redes de Bravais .....	24
Figura 3. Exemplo de simetrias no triângulo equilátero .....	27
Figura 4. Exemplo de simetria axial .....	28
Figura 5. Exemplo natural de eixo de simetria .....	29
Figura 6. Exemplo de simetria rotacional com ponto fixo no centro .....	30
Figura 7. Exemplo de simetria rotacional com ponto fixo de simetria fora .....	31
Figura 8. Catedral de Notre Dame de Paris: Ex. de aplicação de simetria .....	32
Figura 9. Vista frontal da basílica de São Pedro - Vaticano .....	33
Figura 10. Cúpula da basílica de São Pedro .....	34
Figura 11. Clowns (nº 21) - 1938, ink, watercolor .....	35
Figura 12. Shells and Starfish (nº 42) - 1941, colored ink, colored pencil .....	36
Figura 13. Circle Limit IV - 1960, woodcut in black and ocre, printed in two ...	37
Figura 14. Exemplo natural de floco de neve .....	38
Figura 15. Molécula de água ( $H_2O$ ) .....	39
Figura 16. Teorema do ângulo externo .....	42
Figura 17. Unicidade da reta perpendicular .....	43
Figura 18. Unicidade da reta paralela .....	44
Figura 19. Distância entre dois pontos distintos .....	45
Figura 20. Ponto médio de um segmento de reta .....	46
Figura 21. Condição de alinhamento de três pontos .....	47
Figura 22. Ângulo formado entre duas retas concorrentes .....	48
Figura 23. Operações de Simetria .....	50
Figura 24. Balança em equilíbrio simétrico. Esferas em azul e cubos em verde .	55
Figura 25. Uma resolução geométrica para o item (i) do exemplo 4.3.3. ....	56
Figura 26. Uma resolução geométrica para o item (ii) do exemplo 4.3.3. ....	57
Figura 27. Exemplo de variação nas escolhas de valores para $x$ e $y$ .....	58
Figura 28. Resolução do problema relativo ao exemplo 4.2.3 .....	62
Figura 29. Resolução do problema relativo ao exemplo 4.2.4 .....	63
Figura 30. Um cubinho tem massa menor do que duas esferas .....	67
Figura 31. Uma esfera tem massa maior do que meio cubinho .....	67
Figura 32. Gráfico da equação $ax^2 + bx + c = y$ e seus principais elementos ....	69
Figura 33. Gráfico da solução do problema do exemplo 4.4.1 .....	71
Figura 34. Gráfico da solução do problema do exemplo 4.4.2 .....	73
Figura 35. Gráfico da solução do problema do exemplo 4.4.3 .....	74
Figura 36. Gráfico da solução do problema do exemplo 4.4.4 .....	76
Figura 37. Gráfico da solução do problema do exemplo 4.4.5 .....	77
Figura 38. Ponto $P = (2, 1)$ e vetor $\vec{v} = (2, 1)$ .....	80
Figura 39. Ponto $P = (-2, 2)$ e seus simétricos e, vetor $\vec{v} = (-2, 2)$ .....	82
Figura 40. Simetria do ponto $P = (x_o, y_o)$ e seu respectivo vetor no plano .....	84
Figura 41. Simetria do ponto $P = (3, -1)$ e seu respectivo vetor no plano .....	85
Figura 42. $f(x) = -5x + 2$ , $S[f(x)]_x$ , $S[f(x)]_y$ e $S[f(x)]_O$ .....	86
Figura 43. Gráfico da solução do problema do exemplo 4.5.2.1 .....	94
Figura 44. Gráfico da solução do problema do exemplo 4.5.2.2 .....	96

Figura 45.	Gráfico da solução do problema do exemplo 4.5.2.3 .....	97
Figura 46.	Gráfico da solução do problema do exemplo 4.5.2.4 .....	99
Figura 47.	Gráfico da solução do problema do exemplo 4.5.2.5 .....	100
Figura 48.	Gráfico da solução do problema do exemplo 4.5.2.6 .....	102
Figura 49.	Gráfico da função $f(x) = x^2 + 2x + 1$ .....	107
Figura 50.	Gráfico da função $f(x) = x^2 + 2x + 1$ e suas respectivas funções .....	107
Figura 51.	Gráfico da função $f(x) = 4x^2 - 20x + 24$ com seus principais .....	114
Figura 52.	Gráficos da função $f(x) = x^2 + 2x + 2$ com seus respectivos .....	115
Figura 53.	Gráficos das funções $f(x) = x^2 + 2x + 2$ , $S[f(x)]_r$ e $S[f(x)]_s$ .....	116
Figura 54.	$f(x) = x^2 + 2x + 2$ e $f^{-1}(x) = -1 \pm \sqrt{x - 1}$ .....	119
Figura 55.	Gráfico semelhante ao construído pelos discentes para auxiliar .....	120
Figura 56.	Gráfico semelhante ao construído pelos discentes para auxiliar .....	121
Figura 57.	Gráfico para solução alternativa do problema const. no ex. 4.5.3.4 ..	122
Figura 58.	Gráfico da função $f(x) = 2^x$ com seus principais pontos .....	124
Figura 59.	Gráfico das funções $f(x) = 2^x$ , $S[f(x)]_x$ , $S[f(x)]_y$ e $S[f(x)]_O$ .....	125
Figura 60.	Gráfico da função $f(x) = \log_2 x$ com seus principais pontos .....	128
Figura 61.	Gráfico das funções $f(x) = \log_2 x$ , $S[f(x)]_x$ , $S[f(x)]_y$ e $S[f(x)]_O$ .....	129
Figura 62.	Gráfico das funções $f(x) = \log x$ , $S[f(x)]_x$ , $S[f(x)]_y$ e $S[f(x)]_O$ .....	131
Figura 63.	Gráfico das funções $f(x) = \ln x$ , $S[f(x)]_x$ , $S[f(x)]_y$ e $S[f(x)]_O$ .....	132
Figura 64.	Gráficos das funções $f(x) = 2^x$ , $g(x) = \log_2 x$ e a reta $r : y = x$ .....	133
Figura 65.	O ciclo trigonométrico e seus arcos simétricos .....	134
Figura 66.	$f(x) = \text{sen}(x)$ .....	137
Figura 67.	$f(x) = \text{sen}(x) = S[f(x)]_O$ e $S[f(x)]_x = -\text{sen}(x) = S[f(x)]_y$ .....	138
Figura 68.	$f(x) = \text{sen}(x)$ , $S[f(x)]_r = \text{arcsen}(x)$ e a equação $x = \text{sen}(y)$ .....	140
Figura 69.	$f(x) = \text{cos}(x)$ .....	142
Figura 70.	$f(x) = \text{cos}(x) = S[f(x)]_y$ e $S[f(x)]_x = -\text{cos}(x) = S[f(x)]_O$ .....	142
Figura 71.	$f(x) = \text{cos}(x)$ e $S[f(x)]_r = \text{arccos}(x)$ , e a equação $x = \text{cos}(y)$ .....	144
Figura 72.	$f(x) = \text{tg}(x)$ .....	146
Figura 73.	$f(x) = \text{tg}(x) = S[f(x)]_O$ e $S[f(x)]_x = -\text{tg}(x) = S[f(x)]_y$ .....	147
Figura 74.	$f(x) = \text{tg}(x)$ e $S[f(x)]_r = \text{arctg}(x) = f^{-1}(x)$ , e equação $x = \text{tg}(y)$ ....	149
Figura 75.	$f(x) = \text{sec}(x) = S[f(x)]_y$ e $S[f(x)]_x = -\text{sec}(x) = S[f(x)]_O$ .....	150
Figura 76.	$f(x) = \text{cossec}(x) = S[f(x)]_O$ e $S[f(x)]_x = -\text{cossec}(x) = S[f(x)]_y$ .....	151
Figura 77.	$f(x) = \text{cotg}(x) = S[f(x)]_O$ e $S[f(x)]_x = -\text{cotg}(x) = S[f(x)]_y$ .....	153
Figura 78.	Solução 2 do discente relativa ao problema do exemplo 4.2.4 .....	161
Figura 79.	Solução 3 do discente relativa ao problema do exemplo 4.2.4 .....	161
Figura 80.	$f(x) = \text{sec}(x)$ e a curva $x = \text{sec}(y)$ .....	162
Figura 81.	$f(x) = \text{cossec}(x)$ e a curva $x = \text{cossec}(y)$ .....	163
Figura 82.	$f(x) = \text{cotg}(x)$ e a curva $x = \text{cotg}(y)$ .....	164

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Implicações do teorema de Noether .....	22
Tabela 2. Os 7 sistemas cristalinos e as 14 redes de Bravais .....	24

## LISTA DE SÍMBOLOS

$S[P]_x \longrightarrow$  Simétrico axial do ponto  $P$  em relação ao eixo das abcissas.

$S[P]_y \longrightarrow$  Simétrico axial do ponto  $P$  em relação ao eixo das ordenadas.

$S[P]_O \longrightarrow$  Simétrico rotacional do ponto  $P$  em relação à origem (por rotação de  $180^\circ$ ).

$S[P]_r \longrightarrow$  Simétrico axial do ponto  $P$  em relação à reta  $r$ .

$S[(x, y)]_x \longrightarrow$  Simétrico axial do ponto de coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$  em relação ao eixo das abcissas.

$S[(x, y)]_y \longrightarrow$  Simétrico axial do ponto de coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$  em relação ao eixo das ordenadas.

$S[(x, y)]_O \longrightarrow$  Simétrico rotacional do ponto de coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$  em relação à origem (por rotação de  $180^\circ$ ).

$S[(x, y)]_r \longrightarrow$  Simétrico axial do ponto de coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$  em relação à reta  $r$ .

$S[f(x)]_x \longrightarrow$  Função simétrica axial da função  $f(x)$  em relação ao eixo das abcissas.

$S[f(x)]_y \longrightarrow$  Função simétrica axial da função  $f(x)$  em relação ao eixo das ordenadas.

$S[f(x)]_O \longrightarrow$  Função simétrica rotacional da função  $f(x)$  em relação à origem (por rotação de  $180^\circ$ ).

$S[f(x)]_r \longrightarrow$  Função simétrica axial da função  $f(x)$  em relação à reta  $r$ .

## SUMÁRIO

Introdução .....	14
1. Ensino, educação e a educação matemática no contexto social brasileiro .....	16
2. Simetrias .....	20
2.1. Definição de simetria .....	25
2.1.1. Simetria axial, especular, reflexiva ou bilateral .....	26
2.1.2. Simetria translacional .....	27
2.1.3. Simetria rotacional .....	27
2.1.4. Simetrias, formas modulares e transformações .....	28
2.2. Por que o simétrico nos atrai? .....	30
2.3. O mais simétrico de todos .....	36
2.4. Quebras de simetria .....	38
3. Propriedades importantes para o estudo e análise das simetrias .....	41
3.1. Conhecimentos preliminares .....	41
3.2. Operações de simetria .....	49
4. O ensino da matemática através das simetrias .....	53
4.1. Equações do primeiro grau .....	53
4.2. Sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas .....	58
4.3. Inequações do primeiro grau .....	66
4.4. Equações do segundo grau: uma curva e um eixo de simetria .....	68
4.5. Funções: pontos, retas e curvas - entes queridos das simetrias .....	79
4.5.1. Pontos no plano cartesiano ortogonal .....	79
4.5.2. Função afim .....	86
4.5.3. Função quadrática .....	106
4.5.4. Função exponencial .....	123
4.5.5. Função logaritmo .....	126
4.5.6. Função exponencial x função logaritmo .....	131
4.5.7. Funções trigonométricas .....	133
4.5.7.1. Função seno .....	136
4.5.7.2. Função cosseno .....	141
4.5.7.3. Função tangente .....	145
4.5.7.4. Função secante.....	149
4.5.7.5. Função cossecante .....	151
4.5.7.6. Função cotangente .....	152
5. Considerações finais .....	154
Bibliografia .....	156
Apêndices .....	160

## INTRODUÇÃO

Desde os primórdios da humanidade, o homem vem observando a regularidade que as simetrias apresentam. Inicialmente, com as simetrias que foram observadas na natureza visível aos olhos, como é o caso das borboletas, dos animais, de algumas plantas e do próprio ser humano. Depois, a humanidade começa a fabricar simetrias através das construções arquitetônicas (como é o caso das pirâmides no Egito, das igrejas, templos, castelos medievais etc.), das obras de arte, dos veículos e aeronaves. Por fim, tenta compreender a origem de tanta simetria no microcosmo (como é o caso das partículas e subpartículas atômicas, a formação do DNA etc.) e, no macrocosmo (como é o caso do movimento dos planetas, formação das galáxias, as teorias que explicam a expansão do universo etc.). Com isso, a humanidade descobre que as leis que regem a natureza são invariantes, ou seja, *simétricas*. Emmy Noether descreve as invariâncias da natureza associando-as a um dos tipos de simetrias, mas cabe a Albert Einstein aplicá-las (mesmo antes de Noether) em suas teorias revolucionárias, no ano de 1905, o que lhe rende um pouco mais tarde o prêmio Nobel.

As simetrias são tão comuns, simples e presentes nas nossas vidas que muitas vezes passam extremamente despercebidas. As simetrias estão presentes na singularidade da beleza, utilidade e funcionalidade dos objetos ou seres do nosso cotidiano. O estudo das simetrias em sala de aula, na maioria das vezes, está restrito ao traçado do eixo simétrico em algumas figuras geométricas bidimensionais ou tridimensionais. É necessário expandir essa dimensão das simetrias no ensino, fazer com que as simetrias façam parte do nosso cotidiano como um todo, inclusive no ensino. Utilizá-las na prática pedagógica pode facilitar, e muito, o trabalho dos docentes e a assimilação dos conteúdos pelos discentes, pois as simetrias têm um algo a mais, que nos atrai, mesmo que inconscientemente.

Fazer com que os discentes adquiram determinados tipos de conhecimentos, tem sido tarefa árdua para docentes, principalmente na educação de base das escolas públicas, pois quando se tem bons docentes em atividade, surgem os problemas sociais e até mesmo a falta de interesse dos discentes, devido a um mecanismo de políticas públicas criado para aprovação, ou como mais se costuma ouvir, para a busca de índices de aprovação.

Com este trabalho, pretendemos investigar como, utilizando uma prática pedagógica diferenciada, com base nas simetrias voltadas para o ensino da Matemática, os discentes se superam com relação a um obstáculo de aprendizagem, a fim de obterem uma capacidade de compreensão para determinadas disciplinas.

Através das simetrias e de uma atividade interdisciplinar, foram direcionadas aulas de Matemática para discentes em fases escolares diferentes, observando-se a capacidade de aprendizagem e de assimilação desses conceitos e de suas aplicações em relação à Matemática. Foi seguido uma espécie de programa lógico-dedutivo que vai desde o ensino equações de primeiro e segundo graus, incluindo os sistemas de equações, até o ensino das funções, incluindo as funções circulares. Entretanto, antes de seguir o programa, fazemos uma espécie de viagem que passa pela educação e o ensino, as simetrias existentes e aplicadas, as teorias revolucionárias baseadas nas simetrias, as dificuldades encontradas na tentativa de definir as simetrias, os tipos de simetrias, as formas modulares, por uma tentativa de entender por que as simetrias nos chamam tanta atenção, as aplicações na arquitetura e nas artes plásticas, as quebras das simetrias e as propriedades básicas da Matemática e da Geometria necessárias para as aplicações das simetrias voltadas para o ensino médio. Para isso, foi impossível não fazer uso de citações sobre temas voltados à Física, incluindo a mecânica quântica e as teorias da relatividade.

O universo artístico foi o que mais se utilizou do uso das simetrias visuais e de suas propriedades intrínsecas em obras de arte que se perpetuam por sua singularidade e beleza. Um dos artistas que mais aproveitou as simetrias na estruturação de seus trabalhos foi Maurits Cornelis Escher, grande admirador da perfeição da natureza e que se interessava tanto pelo mundo microscópico quanto pelo mundo macroscópico. Seus trabalhos não expunham apenas mosaicos e figuras geométricas, mas um campo grandioso em que a Física, e principalmente a Matemática, se manifestam.

Este trabalho também faz uma relevância à questão da educação na realidade socioeducacional do nosso país, trilhando caminhos para a compreensão da Educação Matemática, discutindo sua importância e métodos de ensino assim como a necessidade dos conhecimentos da Geometria e dando ênfase às simetrias e suas aplicações, através de um modelo didático-pedagógico para um trabalho interdisciplinar.

Supõe-se, então, que, se um aluno aprende e assimila conceito e definições das simetrias e suas aplicações, terá maior facilidade para interpretar e assimilar outros conteúdos e até mesmo outras disciplinas que necessitem do auxílio interdisciplinar das simetrias, uma das quais, podemos citar aqui, é a Física, que, quer queira ou não, caminha lado a lado, com a Matemática. Enquanto a Física tenta explicar e justificar os fenômenos da natureza, a Matemática tenta equacionar e descrever, de um modo preciso e consistente, as leis que a regem.

Portanto, é muito importante, no ensino das simetrias, não se limitar somente a desenvolver conceitos, definições ou meras aplicações como o traçado de eixos, mas que se busque contextualizá-los, em campos de aplicações cada vez mais amplos, relacionando-os, se possível, com outras disciplinas e interligando-os à vida real, ao mundo natural, seja ele clássico, relativístico ou quântico.

## 1. ENSINO, EDUCAÇÃO E A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO CONTEXTO SOCIAL BRASILEIRO

Façamos aqui uma breve reflexão sobre o ensino de Matemática na nossa realidade sociocultural. O ensino tem sido uma tarefa árdua para muitos profissionais da educação brasileira, sobretudo o ensino da Matemática. Além das dificuldades sócioeconômicas e culturais já existentes, há também as visões deturpadas desta disciplina que foram adquiridas, pelos discentes, desde os primeiros contatos com a Matemática. Visões essas, que foram repassadas muitas vezes por docentes que ensinaram, mas não tinham a menor afinidade com esta disciplina. Muitos desses docentes tiveram uma formação apenas em nível médio, do tipo profissionalizante, e estão em sala de aula lecionando, muitas vezes, disciplinas das quais não têm o mínimo necessário de domínio e/ou até mesmo com as quais não têm afinidade. Além disso, é muito comum ainda nos dias atuais, principalmente em escolas públicas, a existência de profissionais de outras áreas do conhecimento que se encontram lecionando a disciplina Matemática, muitas vezes pelo simples fato de que é necessário complementar a carga horária do profissional ou até mesmo pela ausência e indisponibilidade de profissionais de Ciências Exatas, mais especificamente de Matemática.

Outra dificuldade muito grande encontrada pelos profissionais de Matemática são os livros didáticos: principais eixos norteadores de professores e alunos na relação ensino-aprendizagem. Trataremos aqui dos livros de Matemática atuais, cujos autores, numa tentativa de seguir os PCNs para obterem aprovação de uma equipe avaliadora da ‘qualidade’ do livro didático do MEC, sofreram uma grande modificação no tocante a abordagem dos conteúdos, pois, muitas vezes, deixam de se aprofundarem em teoremas e demonstrações que fundamentam as bases do ensino de Matemática e formam os pilares de sustentação da disciplina, passando a fazer uma abordagem superficial com a única finalidade de aplicar o conteúdo em uma situação lúdico-didática, preferencialmente cotidiana. A modificação sofrida nesses livros é grande. Ao manusear, por exemplo, um livro de Matemática da 3ª série do 2º grau (atualmente 3ª série do nível médio), de Iezzi (1974), mais conhecido como “sete autores”, observa-se que nos conteúdos abordados no último volume tem-se acesso a abordagens precisas de limites, derivadas, regras de derivação e estudo da variação das funções. Atualmente não se veem mais esses conteúdos nos livros de Matemática do ensino médio.

A experiência mostra que a maior parte dos alunos sabe lidar bem com problemas matemáticos cotidianos e que o grande problema do ensino está justamente na base dos conceitos formais dos componentes matemáticos. Encontra-se, por exemplo, nos livros, quando se ensina subtração entre números naturais, que a operação de subtração deve ser feita *subtraindo o menor número do maior*, como se o contrário não fosse possível e o professor desatento esquece-se de mostrar que há essa possibilidade, mas no momento se está trabalhando com números estritamente naturais. A falta dessa observação cria obstáculos de aprendizagem no discente quando o mesmo começa a operar com números inteiros, pois ele acredita que não pode subtrair um número maior de um número menor. Observemos um fato interessante, por exemplo: quando se aborda sobre a resolução de equações do segundo grau, alguns livros (principalmente os de nível fundamental) admitem que a equação  $x^2 = -1$  não tem solução. Imaginemos um discente que vai desde o nono ano do ensino fundamental acreditando que aquela equação não tem solução e ao chegar na terceira série do ensino médio se depara com um professor que afirma que a mesma equação tem solução. Ensinar assim confunde a cabeça do discente. Notemos aqui que ela tem solução, o que

ela não tem é uma solução satisfatória no conjunto dos números reais e isso não impede de o professor esclarecer, mesmo no final do ensino fundamental, que ela tem uma solução, mas que será abordada bem mais adiante.

A forma como os professores abordam ou deveriam abordar os conteúdos de Matemática é tema de discussão de vários congressos, workshops e seminários no Brasil e no mundo, tais como usar ou não usar o quadro negro/branco, recursos de mídia, livro didático, calculadoras, internet, redes sociais, sites de busca de conteúdos, programas de computador, softwares didáticos etc. Ainda assim, há defensores da adoção de uma maneira de ensino universal para todas as disciplinas. De acordo com Machado (1997), Durkheim criou um sistema de consistência interna, como um estatuto de uma “Sociologia Universal” ou de uma educação universal, que englobaria as disciplinas do currículo escolar comum. Notemos que esse tipo de sistema seria ineficaz no que diz respeito a áreas distintas das ciências. Não é possível ensinar, por exemplo, Biologia da mesma forma como se ensina Matemática, pois essas duas áreas diferem suficientemente para que em conceitos ou aplicações haja uma grande ruptura do método empregado.

Observa-se, desde os primórdios da história da humanidade, que o desenvolvimento da Matemática se dá por meio de problemas matemáticos que vão surgindo ao longo do tempo e de acordo com a realidade e a necessidade de cada um dos povos, caracterizando assim uma etnomatemática. Podemos citar aqui os povos da mesopotâmia, mais especificamente os babilônios, que se deparavam frequentemente com problemas de medição de terras e cálculos de áreas. Eles já tinham um modo eficaz de calcular áreas de trapézios e de círculos. Em Roque (2012, p.62), há relatos de que foram encontrados tabletes que continham problemas matemáticos. Esses tabletes, que datam de aproximadamente 2000 a.E.C. a 1600 a.E.C., segundo pesquisadores, representavam exercícios que provavelmente os aprendizes levavam para resolver “em casa”, como se fossem os atuais exercícios escolares. Isso mostra que a eficácia do mecanismo ensino-aprendizagem da Matemática, desde os primórdios, se dá por meio da repetição de exercícios pré-definidos.

O exemplo mais conhecido de cálculo de raízes quadradas pelos babilônios encontra-se no tablete YBC 7289, produzido entre 2.000 e 1.600 a.E.C., em um contexto escolar. (ROQUE e CARVALHO, 2012, p.19).

Pode-se observar que já existiam métodos pré-definidos para resolver tipos específicos de problemas. Os egípcios também tinham métodos pré-definidos para a resolução de problemas. Provavelmente o Papiro Ahmes (ou Papiro de Rhind) traz vários exercícios matemáticos de aritmética e de geometria mostrando também a importância da repetição no mecanismo ensino-aprendizagem.

Assim, por exemplo, encontramos no Papiro Ahmes, o cálculo de como reduzir  $\frac{2}{n}$  a uma soma de partes, para  $n$  ímpar entre 5 e 101. (ROQUE e CARVALHO, 2012, p.37).

Além desses fatos, que mostram como eram ensinados os métodos de resolução, há um relato do próprio escriba Ahmes, no qual ele afirma que transcreveu este papiro de um outro papiro muito mais antigo. Num artigo de O’connor e Robertson (1997), temos que Ahmes afirma não ser o autor da obra, sendo, segundo ele, apenas um escriba. Ahmes escreve que o material vem de um trabalho anterior de cerca de 2000 a.C.

O Papiro de Ahmes servia de referência aos egípcios para a resolução de vários problemas semelhantes aos que nele haviam. Segundo Tahan (1964), os papiros egípcios mais notáveis são: de Kahun, de Moscou e o papiro Rhind, sendo este último considerado o monumento capital da Matemática egípcia. Contudo, nos métodos de resolução

egípcios e babilônicos, não havia demonstrações formais, afirma Roque (2012), mas continham métodos de resolução eficazes para determinados problemas, mostrando que um aprendiz naquela época já deveria treinar suficientemente bem para dominar tais técnicas, reforçando a ideia de que o processo de ensino-aprendizagem da Matemática é feito através de processos repetitivos, e esse mesmo processo se mostra eficiente até os dias atuais.

A educação Matemática carece de um cuidado especial e de um acompanhamento intensivo, a fim de que o discente seja capaz de compreender os processos construtivos dos conteúdos intrínsecos da disciplina. Deve-se fazer com que tais processos construtivos fiquem arraigados em cada um dos discentes. Para isso, é necessário um acompanhamento intensivo de um profissional, com a finalidade de perceber o nível de assimilação que está sendo adquirido por cada um dos educandos. Maranhão afirma que:

Se o aluno puder conhecer um sistema matemático e, mais que isso, *participar da construção* desse sistema, terá oportunidade de compreender como se dá a organização de conhecimentos em Matemática (uma apresentação de uma teoria Matemática) e conhecer uma forma de seu desenvolvimento (a descoberta de propriedades através do sistema e não apenas a partir de modelos concretos). (MARANHÃO, 1994, p.35).

A construção de um conhecimento, em especial a Matemática, necessita de ferramentas e, nesse caso, a Geometria, um dos principais, e por que não dizer, primordial ramo da Matemática, é uma dessas ferramentas para muitas demonstrações. Em Roque (2012) e Roque e Carvalho (2012), vemos que a Geometria foi a base dessas demonstrações, não só dos postulados e teoremas de Euclides, mas também de problemas clássicos de álgebra, como os problemas de equações quadráticas e cúbicas. Cardano e Tartaglia resolviam problemas de álgebra sempre buscando uma demonstração geométrica - uma espécie de prova, para validar as soluções dos problemas, inclusive problemas que envolviam raízes de números negativos como solução. Naquela época, não teria sentido algum falar de número sem uma representação geométrica, pois o número estava relacionado à ideia de grandeza. Segundo Machado (1998), nenhum outro ramo da Matemática se presta mais eficiente à explicitação da impregnação entre a Matemática ou até mesmo a uma estruturação compatível da ação docente do que a Geometria. Talvez Machado afirme isso devido ao poder de demonstração da Geometria.

A primeira fase da Matemática egípcia e babilônica, repleta de fórmulas e receitas práticas derivadas do conhecimento empírico, vem desde o século VI a.C. atingindo seu ápice apenas no século III a.C. com os trabalhos de Euclides.

Entretanto, é apenas na Grécia, por volta do século III a.C., com os trabalhos de Euclides, que a Geometria logrou uma notável sistematização, tornando-se modelo de organização do conhecimento em qualquer área. (MACHADO, 1998, p.137).

Além disso, “os êxitos dos geômetras gregos estimularam mais e mais o alheamento ao mundo sensível” (MACHADO, 1997, p.11). Ou seja, devido ao nível de abstração da Geometria, a partir de Euclides, o mundo físico (visível aos olhos) ficou alheio à observação das aplicações geométricas.

Atualmente, um dos ramos mais importantes da Matemática é o do estudo das transformações, que possui um alto nível de simetria, cujos obstáculos em relação aos conceitos e às aplicações interferem de forma direta na construção de um conhecimento e indireta na construção de determinados conhecimentos posteriores e específicos das principais áreas do conhecimento científico. De fato, a natureza apresenta-se nas mais diversas formas, e essa

representação é completamente geométrica, não há como negar. Contudo, a geometria que mais nos atrai é a geometria do belo, do perfeito, das “coisas” que são simétricas. Portanto, cabe aqui tratarmos um pouco da simetria, dos seus conceitos e das suas aplicações.

## 2. SIMETRIAS

A simetria ainda não é tão difundida como campo de estudo das ciências, principalmente no ensino. Sabe-se, contudo, que a simetria, em suas diversas manifestações, está presente na natureza desde as subpartículas atômicas, passando pelas mais impressionantes construções do ser humano até as teorias e leis físicas que explicam o imenso universo. A maioria das moléculas é simétrica com relação à disposição de seus átomos. Os nossos rostos são “perfeitamente” simétricos com relação a um eixo vertical que o divide ao meio. Em Cole (2006), a definição de simetria transcende o mundo palpável e visível aos olhos humanos.

A linguagem matemática costuma referir-se aos invariantes no sentido de simetrias. Simetrias, entretanto, que não se restringem àquelas que admiramos nos flocos de neve e nas asas das borboletas. Uma coisa apresenta simetrias na medida em que não sofre determinados tipos de mudança. (COLE, 2006, p.240).

Observemos que Cole refere-se aqui às leis da natureza que nos parecem sempre as mesmas para as mesmas condições experimentais e para vários observadores distintos, ou seja, elas são invariantes. O próprio Albert Einstein (1879-1955) utilizou-se dos princípios da simetria para formular a teoria que iria mudar para sempre a concepção que a humanidade tem do universo. Essa teoria, publicada em vários artigos (um deles lhe rendeu o Prêmio Nobel de Física em 1917), desde maio de 1905, faz com que um desses artigos torne-se conhecido mundialmente como *teoria especial da relatividade*. Einstein defende que a velocidade da luz é invariante (é simétrica), ou seja, é constante, não importa qual seja o movimento da fonte de radiação.

Em vez de começar com uma imensa coleção de fatos experimentais e observacionais sobre a natureza, formular uma teoria e, então, verificar se a teoria obedece alguns princípios de simetria, Einstein se deu conta de que as exigências da simetria podem vir antes e ditar as leis que a natureza precisa obedecer. (LIVIO, 2011, p.236s).

Por isso, a teoria da relatividade especial expande os horizontes da simetria das leis da física a todos os observadores em movimento uniforme. Segundo Brennan,

Diferentemente dos *Principia* de Newton, documento reconhecido quase instantaneamente como revolucionário, a publicação da teoria especial da relatividade de Einstein não assombrou de imediato a comunidade científica. Para o dissabor de Einstein, o artigo foi em geral ignorado. Ali onde se esperava controvérsia, houve silêncio. (BRENNAN, 2003, p.70).

Isso se sucedeu porque, naquela época, acreditava-se que a mecânica newtoniana era suficiente para explicar e justificar todos os fenômenos relacionados ao movimento, e as teorias de Einstein davam completude às teorias da mecânica de Newton, no tocante a explicar o funcionamento do universo para velocidades superiores a 10% da velocidade da luz, ou seja, as leis de Newton precisavam ser ajustadas num universo de altas velocidades. Einstein foi ainda mais distante. Ele ampliou o alcance da simetria.

Uma das principais metas de Einstein tornou-se, portanto, ampliar ainda mais o alcance da simetria. Em particular, ele sentia que as leis da natureza tinham de parecer precisamente as mesmas, não apenas aos observadores movendo-se a velocidades constantes, mas a todos os observadores, seja em um laboratório que está se acelerando em uma linha reta, girando em um carrossel ou movendo-se de uma maneira qualquer. (LIVIO, 2011, p.239s).

Com o passar dos anos, a teoria de Einstein vai tornando-se aceita e sendo posta à prova das mais divesas formas. Segundo Brennan (2003), as teses de Einstein foram se confirmando aos poucos e principalmente à medida que a Ciência, a Matemática e a Tecnologia foram evoluindo para criar ambientes favoráveis a tais experimentos, como é o caso dos aceleradores de partículas.

Desse modo, a simetria empresta uma certa concretude à vaga noção de que há beleza na verdade, e verdade na beleza. Não é à toa que muitas das coisas que as pessoas admiram são simétricas: quer se trate das simetrias naturais, como as das conchas do caracol, quer se trate das simetrias fabricadas pelo homem, como a dos códigos legais, elaboradas com a intenção de oferecer soluções igualmente satisfatórias para ambas as partes envolvidas numa contenda. É bom saber que existe uma ligação quantitativa real entre as coisas que admiramos por razões estéticas e as que conduzem a um entendimento profundo da natureza, inclusive, talvez, da natureza humana. (COLE, 2006, p.240s).

Matemáticos e físicos trabalham com um conceito bem amplo de simetria, pois, além da simetria espacial existe a simetria no tempo e outras simetrias ainda mais sutis como a simetria da paridade que era considerada como regra indiscutível para todos os fenômenos físicos – mais adiante discutiremos sobre a paridade num tópico sobre quebras de simetria. A fim de compreendermos um pouco mais, precisamos citar aqui a matemática alemã Emmy Noether (1882-1935). Compreendamos inicialmente que, além das simetrias geométricas, há as simetrias contínuas e descontínuas e que toda simetria implica uma invariância, ou seja, uma não modificação num sistema em que foi aplicado determinado tipo de simetria. Para um exemplo de simetria contínua, tomemos um círculo e consideremos fixo o seu centro, giros de qualquer  $\theta rad$  tal que  $\theta \in R$  no sentido horário/anti-horário o deixam invariante (sua forma não se altera). No mesmo círculo, assinalemos dois pontos diametralmente opostos, agora sua invariância só é permitida para giros de  $180^\circ$  no sentido horário/anti-horário, este é um exemplo de quebra de simetria, a simetria contínua transformada em descontínua. Consequentemente, se um sistema é invariante, então é dotado de simetria. Foi isso que deu sustentação às teorias de Einstein, por exemplo. Em Hassani (1999), Noether afirma que *toda invariância está associada a uma simetria*. Em Göetingen, no ano de 1917, Noether anuncia um teorema que contribui definitivamente para o entendimento matemático das leis de conservação da física, pois associa cada simetria em Física a uma lei de conservação. Tal teorema ficou posteriormente conhecido como **Teorema de Noether**. Vejamos o enunciado de acordo com Goldstein (1980):

### TEOREMA DE NOETHER

**A cada simetria contínua corresponde uma lei de conservação e reciprocamente.**

Numa linguagem mais simplificada, poderíamos escrevê-lo da seguinte forma:

- (i) **Toda simetria do universo leva a uma lei de conservação.**
- (ii) **Toda lei de conservação revela uma simetria.**

Vejamos na tabela seguinte as implicações desse teorema:

Tabela 1: Implicações do teorema de Noether

SIMETRIA	LEI DE CONSERVAÇÃO
Homogeneidade do espaço (translação espacial)	quantidade de movimento
Isotropia do espaço (rotação espacial)	momento angular
Simetria de calibre (transformação/simetria de gauge)	carga elétrica
Homogeneidade do tempo (translação temporal)	energia

Fonte: Goldstein, 1980.

Observe que a simetria (ou invariância) das leis físicas em relação à translação espacial implica, como resultado natural, a conservação do movimento, ou *momentum*. A simetria das leis físicas em relação ao tempo resulta na conservação da energia. Esse resultado foi levado às últimas consequências pelos físicos teóricos, dentre eles Einstein, desde que surgiu das mãos de Emmy Noether, em 1917.

Atualmente, os trabalhos dos físicos teóricos consiste, significativamente, na busca e compreensão de simetrias e suas leis de conservação associadas. Algumas dessas simetrias são simples, como as rotações e translações. Outras são muito mais complicadas como a *simetria de calibre* ou de *gauge* que ainda é um enigma sendo desvendado. Chega-se a todas as propriedades da força eletromagnética partindo-se dessa hipótese de simetria. Por exemplo, as leis da Eletrodinâmica Quântica, anunciadas por Feynman, Tomonaga e outros, têm simetria de *gauge*. Partindo dessa hipótese de simetria, chega-se a todas as propriedades da força eletromagnética. Uma dessas propriedades, por exemplo, resulta no fato de que o transportador dessa força, o fóton, não pode ter massa.

Argumentos de simetria também orientam a descrição das forças **forte** e **fraca** que agem dentro do núcleo atômico e seus componentes; essas forças também devem obedecer a uma simetria de *gauge*, a qual não discutiremos aqui, pois é bem mais interessante para os físicos de partículas, contudo não podemos deixar de citá-la devido à sua grande relevância.

De acordo com Goldstein (1980) e Hassani (1999), as propriedades de um grupo que descreve simetrias são:

**Fechamento:** Se  $R_i$  e  $R_j$  estão em um grupo,  $R_i R_j$  também está no grupo.

**Identidade:** Existe um elemento identidade, tal que  $IR_i = R_i I = R_i$  para todo elemento.

**Inversa:** Para cada elemento  $R_i$  existe um elemento inverso  $R_i^{-1}$  tal que  $R_i R_i^{-1} = I$ .

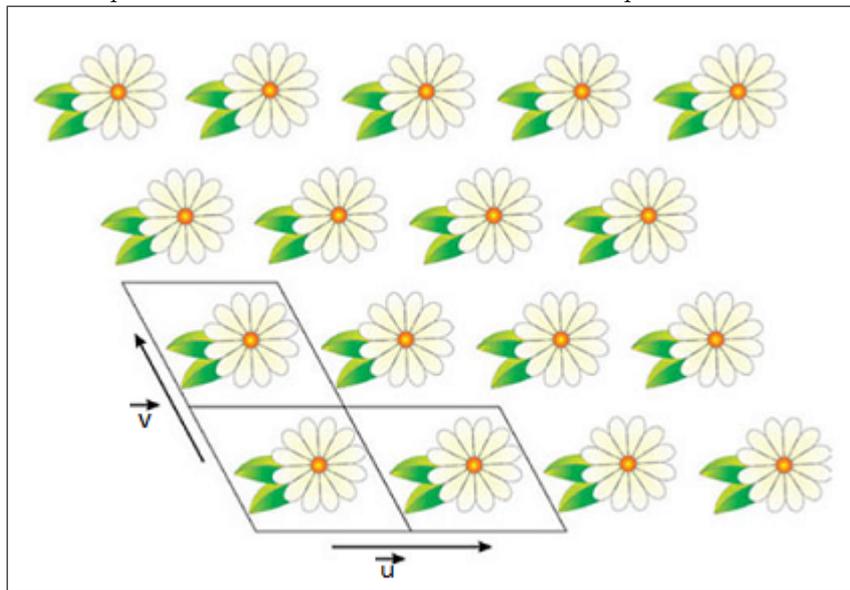
**Associatividade:**  $R_i(R_j R_k) = (R_i R_j)R_k$ .

Observemos que não é necessário que os elementos do grupo comutem, ou seja, podemos ter  $R_i R_j \neq R_j R_i$ . Portanto, se comutam, o grupo é chamado de abeliano (e temos translações no espaço), se não comutam, o grupo é não abeliano (e temos rotações no espaço). Por exemplo, rotações no espaço tridimensional podem ser parametrizadas por três rotações nos três eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Em Ashcroft e Mermin (1976), podemos observar que as **Redes de Bravais** e os **Sistemas Cristalinos** são riquíssimos em simetria. A natureza é simétrica. Os átomos, as moléculas ou os iões se organizam de forma sistemática, como se fossem uma *base* ou um *motivo*, que se repete com a periodicidade de uma rede, gerando assim as estruturas cristalinas. Encontramos, no dia a dia, muitos exemplos que sugerem redes bidimensionais ou tridimensionais com um motivo associado: um tecido ou papel de parede, um tabuleiro de xadrez, um mosaico ou até mesmo os favos de mel sobrepostos, cujos alvéolos se distribuem

regular e periodicamente. Para se ter uma noção precisa de base (ou motivo), observemos a figura 1. Tal figura representa uma rede de Bravais, em duas dimensões, para um sistema cristalino. O motivo dessa rede é uma única flor. Notemos que ela se repete bidimensionalmente nos sentidos descritos por dois vetores (duas setas). Contudo, os sistemas cristalinos são constituídos de redes tridimensionais. Suponhamos então que uma rede de Bravais é formada pelas mesmas flores, mas agora reais (tridimensionais), e que essas flores se deslocam no sentido de três vetores, de modo a formar um poliedro, por exemplo, um cubo. É assim que um cristal é constituído: de átomos, moléculas ou iões que se agrupam formando um motivo que se repete segundo uma lei que os dispõe por simetria translacional em três dimensões.

Figura 1: Exemplo de rede de Bravais bidimensional. Exemplo de simetria translacional.



Fonte: HADDOW

Em síntese, temos: **rede periódica + base(motivo) = estrutura cristalina**  
(matematicamente:  $\vec{R} = n_1 \cdot \vec{v}_1 + n_2 \cdot \vec{v}_2 + n_3 \cdot \vec{v}_3$ ).

As operações de simetria que deixam invariante uma rede de Bravais constituem o **grupo de simetria (da rede) de Bravais**. As operações de simetria de um grupo incluem: (i) translações de vetores na rede; (ii) operações que deixam fixo um ou mais pontos da rede (operações pontuais) e (iii) qualquer combinação dos dois tipos anteriores. Cada rede de Bravais tridimensional é caracterizada por um conjunto de operações de simetria que o deixam invariante e formam o *grupo de simetria de Bravais*. Existem 14 tipos de redes de Bravais, isto é, 14 células unitárias distintas; uma delas é geral e as demais especiais. Existem, a três dimensões, 7 grupos pontuais distintos para as 14 redes de Bravais, cada grupo corresponde a um sistema cristalográfico. Observemos, na tabela 2, a seguinte relação (Notação: P = primitiva, C = bases centradas, I = corpo centrado e F = faces centradas):

Tabela 2: Os 7 sistemas cristalinos e as 14 redes de Bravais.

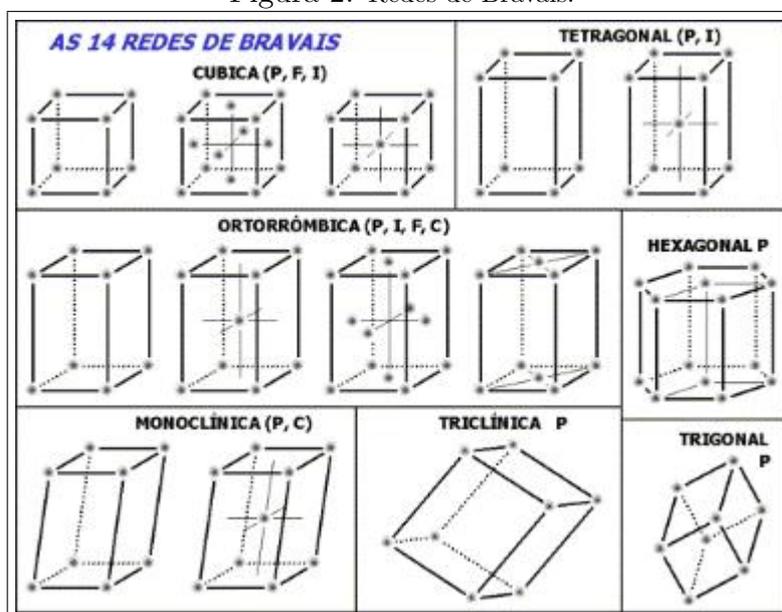
GRUPO PONTUAL	CÉLULA UNITÁRIA
Triclínico	P (1)
Monoclínico	P C (2)
Ortorrombico	P C I F (4)
Tetragonal	P I (2)
Hexagonal	P (1)
Trigonal	P (1)
Cúbico	P I F (3)

Fonte: XAVIER JUNIOR, 2012 (adaptado).

Para saber mais sobre os grupos de simetria de Bravais recomendamos a leitura de Ashcroft e Mermin (1976).

Observemos, contudo, que, com todas essas expressões da simetria na natureza, ainda não se compreende bem o “porquê” de a simetria ser tão absoluta, presente no nosso meio e complexa de ser compreendida. Tentemos então entender o que é a simetria, como ela se manifesta na natureza, por que ela é tão presente na natureza, atrai nossa atenção e é tão complexa de ser compreendida. Começemos, então, buscando uma definição precisa de simetria.

Figura 2: Redes de Bravais.



Fonte: XAVIER JUNIOR, 2012.

## 2.1 Definição de Simetria

Na linguagem popular, costuma-se dizer que um objeto é simétrico se possui algum tipo de balanceamento. Diz-se, por exemplo, que o rosto humano é simétrico porque o lado direito se parece com o esquerdo, porém invertido. Há uma confusão muito grande no tocante ao conceito ou à definição de simetria. Analisemos aqui algumas das definições mais comuns encontradas em alguns dicionários. Por exemplo, em Barbosa (1979), encontramos:

**SIMETRIA**, s.f. Relações ou igualdade de grandeza, forma, posição de partes que estão em lados opostos; harmonia resultante de certas combinações e proporções regulares. (BARBOSA, 1979, p.612).

Com essa definição, não temos precisão do que seja a simetria ou de como ela se manifesta na natureza. Temos apenas certa intuição somente de um dos tipos de simetria, a simetria axial - ou especular ou, ainda mais, bilateral. O lado bom da definição supracitada é que nos mostra que as equações matemáticas são simétricas e podemos interpretar que a igualdade numa equação é o eixo de simetria, o seu ponto de equilíbrio. Vejamos uma outra definição, um tanto confusa, encontrada em Rosamíglia (1998).

**SIMETRIA**, s.f. - Disposição harmônica de partes semelhantes; harmonia resultante de certas combinações e proporções regulares. (ROSAMIGLIA et al. 1998).

Com a definição de Rosamíglia, fica impossível identificar que tipo de disposição harmônica das partes semelhantes é este. Ou seja, como dispor harmonicamente tais partes semelhantes; ou, ainda mais, como se dá este tipo de harmonia. No dicionário de português on-line Michaelis, encontramos o seguinte:

simetria  
si.me.tri.a  
**sf (simetro+ia)** **1** Qualidade de simétrico. **2** Correspondência em tamanho, forma ou arranjo, de partes em lados opostos de um plano, seta ou ponto, tendo cada parte em um lado a sua contraparte, em ordem reversa, no outro lado. **3** Proporção correta das partes de um corpo ou de um todo entre si, quanto a tamanho e forma. **4 Bot** Disposição simétrica das partes de uma flor. **Antôn: assimetria. S. bilateral:** condição de serem os lados esquerdo e direito (do corpo, **p ex**), contrapartes um do outro. (MICHAELIS, 2014).

Observemos que essa definição do Michaelis está mais satisfatória que as demais. Em **2**, ele apresenta com clareza a definição de simetria axial (especular/bilateral) e rotacional. Por fim, ele ainda é mais objetivo ao descrever a simetria bilateral que é a mais presente na natureza, pois é desse tipo de simetria que o nosso corpo é dotado e com ele a maioria dos seres vivos se apresenta, pelo menos externamente, aos nossos olhos. Todavia, ainda assim, essa definição é insuficiente para termos noção precisa das diversas manifestações da simetria no universo físico, tanto visível a olho nu ou não. Não pretendemos aqui tentar definir a simetria ou os tipos de simetria. Isso não está ao nosso alcance. Pretendemos explicar, da melhor forma possível, cada tipo possível de simetria.

A palavra *simetria* tem raízes muito antigas, que vêm do grego *sym* e *metria* que se traduzem em ‘a mesma medida’. (LIVIO, 2011, p.14)

Para a Matemática, o conceito ou a definição de simetria vai muito além do que se encontra na maioria dos dicionários. Vejamos, por exemplo, como Devlin, trata essa definição:

Matematicamente um objeto é dito simétrico *com respeito a algum movimento ou transformação* se este movimento ou transformação o deixa parecendo exatamente como antes. (DEVLIN, 2004, p.121).

Podemos então considerar aqui que a propriedade comutativa da adição ( $a + b = b + a$ ) e do produto ( $ab = ba$ ) são simétricas. E de fato são, pois seus resultados não se alteram; são invariantes, quando transformados por essas propriedades.

Finalmente, podemos aceitar uma definição bem mais ampla de simetria, que abrange todos os aspectos, sejam geométricos, contínuos, descontínuos, algébricos, abstratos ou físicos, mas que englobe todas as simetrias, inclusive as discutidas no tópico anterior:

### DEFINIÇÃO DE SIMETRIA

**Simetria é uma propriedade do sistema que o deixa invariante sob determinadas transformações.**

Exemplo:

Consideremos um triângulo equilátero (figura 3, página 27).

- (i) Fixemos um ponto em seu baricentro. Girá-lo de  $120^\circ$  ou  $240^\circ$  no sentido horário/anti-horário o deixa invariante;
- (ii) tracemos suas alturas e as consideremos eixos. Toda reflexão em torno de qualquer de seus eixos o deixa invariante;
- (iii) trasladá-lo de um lugar do plano ou do espaço a outro o deixa invariante;
- (iv) não fazer nada. Isso já é suficiente para deixá-lo invariante.

Ao observar os estilos geométricos existentes, nos padrões simétricos naturais e artificiais, alguns autores definem e classificam esses padrões como veremos a seguir.

#### 2.1.1. Simetria axial, especular, reflexiva ou bilateral

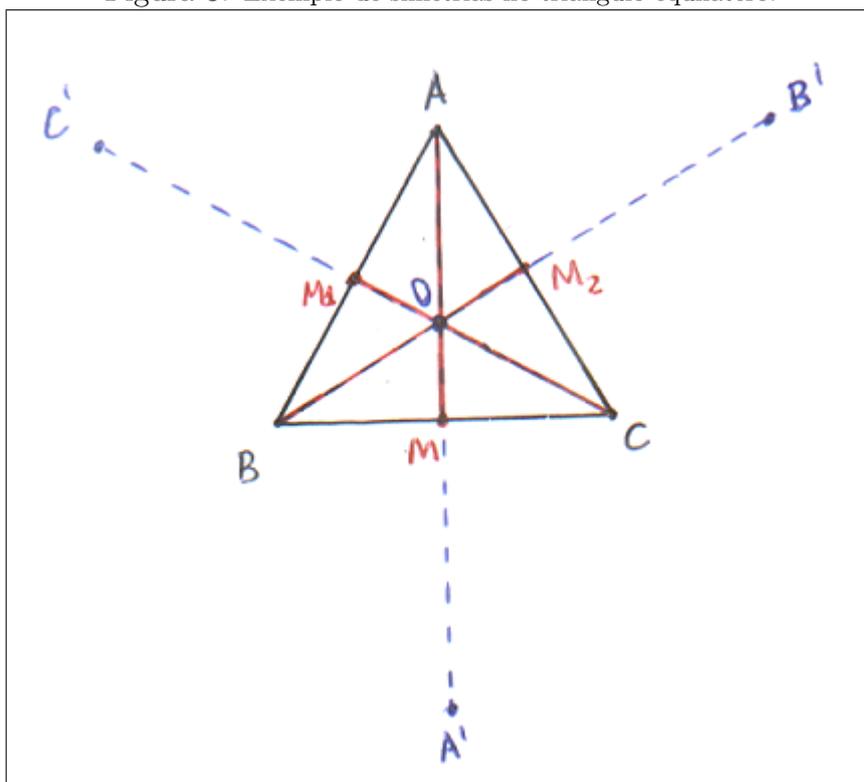
A simetria axial é o tipo de simetria definido por um eixo, podendo também se classificar como simetria bilateral ou simetria especular (CAVALCANTE et al., 2001a). Esse tipo de simetria também pode ser considerado como simetria de reflexão, em que um ponto ou a figura geométrica encontra-se à mesma distância, porém em semiplanos opostos de uma mesma reta, reta esta que se denominará eixo de reflexão - eixo de simetria (OLIVEIRA; SILVA, 1968). Vejamos um exemplo.

Com relação ao eixo de simetria, Souza e Pataro (2012a) dizem o seguinte:

O eixo de simetria divide a figura em duas partes, de maneira que, se dobrarmos essa figura ao longo desse eixo as duas partes vão se sobrepor, isto é, uma fica exatamente sobre a outra. (SOUZA e PATARO, 2012.a, p.193).

Observemos, na figura 5 (página 29), um exemplo de eixo de simetria.

Figura 3: Exemplo de simetrias no triângulo equilátero.



Fonte: SILVA, 2006.

### 2.1.2. Simetria translacional

Simetria translacional é o tipo de simetria em que há repetições de uma mesma figura sem alteração no seu sentido de orientação em intervalos de espaço constantes ou não. Segundo Oliveira e Silva (1968), dá-se o nome de translação a todo o movimento de uma figura no espaço, tal que as posições final e inicial definem segmentos orientados congruentes de mesmo sentido (equipolentes); essas figuras se dizem homólogas. Observemos um exemplo de translação na figura 1, já mostrada na página 23 deste trabalho.

### 2.1.3. Simetria rotacional

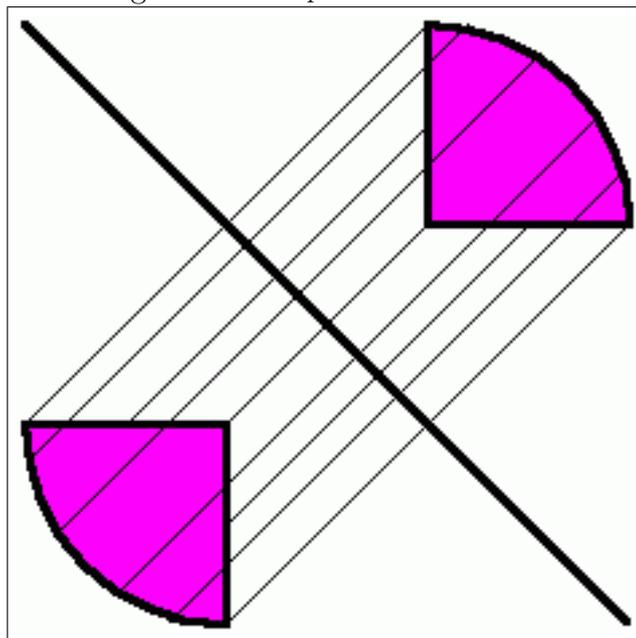
Esse tipo de simetria é identificado pela colocação de um ponto, o qual denominaremos ponto fixo de rotação. Esse ponto pode ser disposto de duas formas: (i) no centro da figura e (ii) fora da figura.

Quando o ponto está no centro da figura, observa-se que, girando a figura em torno desse ponto, tanto no sentido horário como no sentido anti-horário, sempre obedecendo a um padrão, de giros constantes, em graus, não se percebe modificação e é como se a figura continuasse sendo a mesma. Segundo Cavalcante et al. (2001b), esse tipo de simetria também pode ser chamado de simetria central.

Vejamos, na figura 6 (página 30), um exemplo de simetria rotacional do tipo (i).

Em Souza e Pataro (2012), temos:

Figura 4: Exemplo de simetria axial.



Fonte: TOFFOLI e SODRÉ, 2005

A transformação pela qual a imagem de uma figura é obtida ao rotacioná-la em torno de um ponto **O** é chamada **simetria de rotação**. O ângulo de rotação pode ser no sentido **horário** ou **anti-horário**. (SOUZA e PATARO, 2012b, p.279).

Quando o giro em uma simetria de rotação for de  $180^\circ$ , no sentido horário ou anti-horário, dizemos que esse é um caso de **simetria central**. (SOUZA e PATARO, 2012c, p.72).

Vejamos, na figura 7 (página 31), um exemplo de simetria rotacional do tipo (ii).

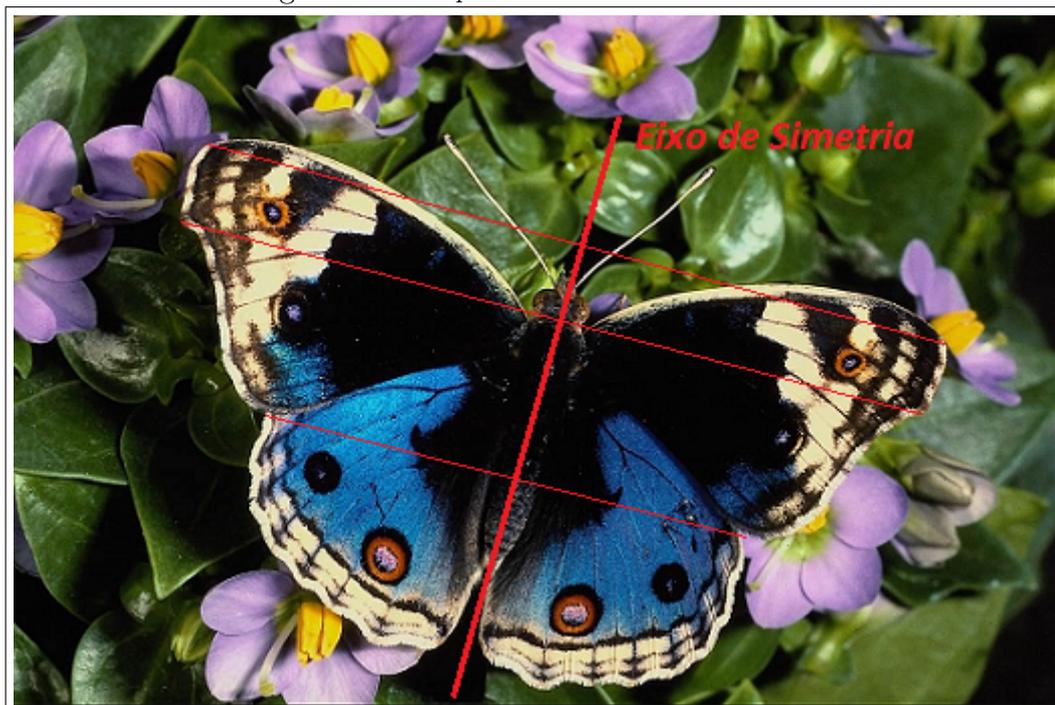
#### 2.1.4. Simetrias, formas modulares e transformações

No tocante a isso, é importante citar dois matemáticos que eram fascinados pelo estudo das formas modulares. Esses matemáticos são Taniyama e Shimura. Segundo Singh (2004), as formas modulares, apesar de fora de moda na época de Taniyama e Shimura, os fascinavam por estarem entre os objetos mais bizarros e maravilhosos da Matemática. O fator principal das formas modulares é seu nível excessivo de simetria.

Embora a maioria das pessoas esteja familiarizada com o conceito normal de simetria, ele tem um significado muito especial em matemática. Significa que um objeto tem simetria se ele puder ser transformado de um modo especial e depois disso parecer o mesmo. (SINGH, 2004, p.187).

Tomemos como exemplo um quadrado. Ele exibe simetria rotacional e reflexiva. *A priori*, o quadrado tem quatro eixos de simetria: dois eixos que passam pelas diagonais do quadrado e dois eixos que passam pelos pontos médios de dois lados opostos do quadrado. Além disso, fixando um ponto na intersecção de suas diagonais, o quadrado pode ser rotacionado de  $90^\circ$  e seus múltiplos, tanto no sentido horário como no sentido anti-horário,

Figura 5: Exemplo natural de eixo de simetria.

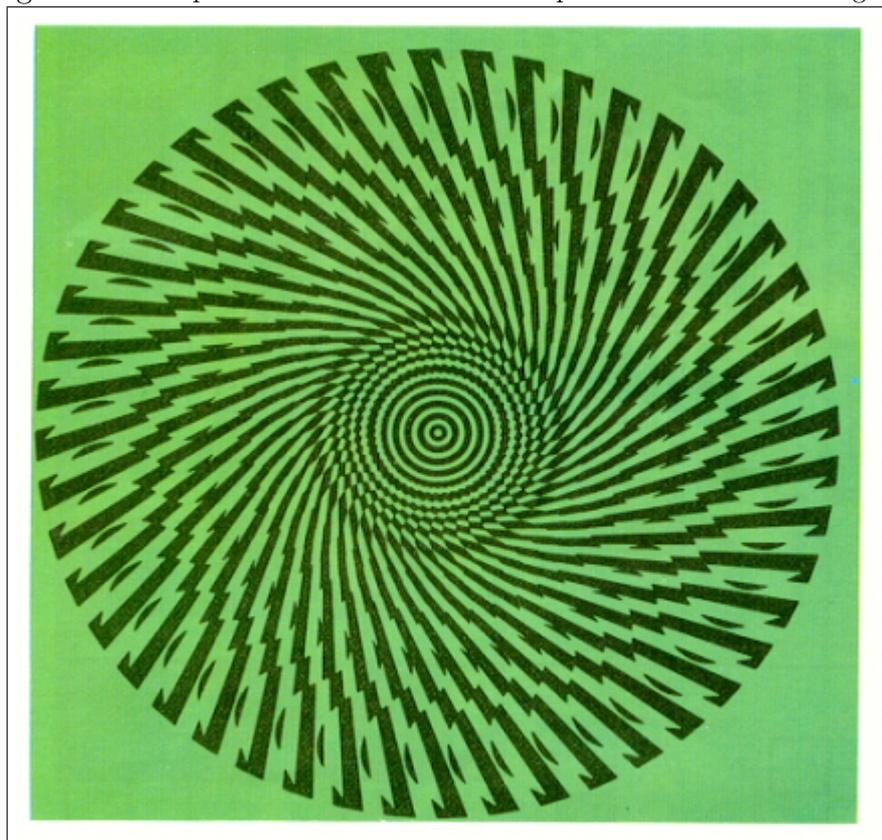


Fonte: Autor, 2014.

sem que haja mudança na sua forma primordial; temos, então, simetria de rotação central ou simplesmente simetria central de ângulos múltiplos de  $90^\circ$ . Fazendo tais rotações no quadrado, ele sempre se apresenta imutável. Não se percebe diferença alguma no quadrado após  $n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) rotações de  $90^\circ$ , ou seja, se pedirmos a um espectador que olhe fixamente o quadrado e em seguida vendarmos seus olhos, a fim de rotacionarmos o quadrado de  $n \cdot 90^\circ$ , no sentido horário ou anti-horário, ao tirar suas vendas, o espectador não será capaz de identificar modificação alguma na forma original. Na verdade, o que mudou de lugar foram os vértices, as arestas e os ângulos, mas, ainda assim, a sua forma original não se altera. Segundo Singh (2004), quanto à simetria reflexiva, imaginemos uma superfície infinita, tal como um piso com azulejos quadrados, em que cada um dos azulejos é reflexão do primeiro azulejo quadrado. Além disso, esse piso possuirá infinitas simetrias rotacionais, reflexivas e translacionais.

As transformações podem nos parecer um assunto que não tem muita importância ou que não tem nenhuma relação com o dia a dia. Contudo, a partir de um olhar analítico, somos capazes de se observar que as simetrias estão muito presentes no nosso cotidiano. Na hora em que nos acordamos, por exemplo, vamos ao espelho pentear os cabelos e nos deparamos com o nosso simétrico, ou seja, não estamos nos vendo, mas vendo o nosso reflexo no espelho, o nosso braço direito corresponde ao braço esquerdo da nossa imagem refletida. Todos os dias nós temos contato direto com a simetria reflexiva. Quase impossível não observarmos que as pessoas com as quais nos comunicamos diariamente são também produto da simetria: seus rostos possuem simetria bilateral (ou axial), seus corpos como um todo foram geneticamente preparados para se formarem simétricos, pelo menos externamente, e são raras as exceções. Mas não paramos por aí, há simetria em animais diversos, plantas, flores, árvores, azulejos, tapeçarias, vasos, cerâmicas, pisos, desenhos de aeronaves e automóveis, edifícios, templos, catedrais, igrejas, móveis, grades de janelas, portas, portões, copos, pratos, bordados, logotipos de empresas e uma vasta aplicação das criações do ho-

Figura 6: Exemplo de simetria rotacional com ponto fixo no centro da figura.



Fonte: ROBLE (site).

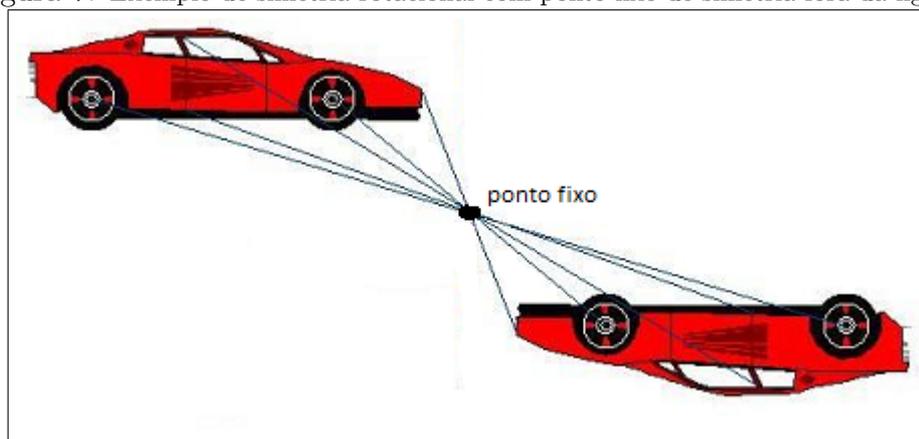
mem. Em várias das disciplinas elementares do currículo escolar há uma vasta aplicação das simetrias. Para conhecer mais sobre uma visão inter-trans-disciplinar recomendamos a leitura de Silva (2006). Ao tratar da simetria e após observados analiticamente todos esses aspectos, há uma coisa que ainda se precisa discutir: o porquê dessa fascinação tão grande pela simetria.

## 2.2. Por Que o Simétrico Nos Atrai?

De todas as coisas todas visíveis aos olhos humanos, as que são simétricas são as que mais nos atraem. A nossa atração pelo simétrico inicia-se quando ainda somos crianças. Livio (2011) descreve que vários experimentos foram realizados com crianças a partir dos dois anos de idade e, nessas experiências, verificou-se que as crianças de 2 anos identificam mais rapidamente as figuras que possuem simetria bilateral (com eixo de simetria vertical). As crianças a partir dos 3 anos já começam a identificar melhor as figuras que possuem eixo de simetria horizontal.

Desde os gregos até os dias atuais, a simetria vem despertando o interesse do ser humano, pois acabamos por associar a simetria ao conceito de beleza. Além disso, o que é simétrico é também harmônico, equilibrado e proporcional, ao contrário do assimétrico. Com relação à beleza, Aristóteles afirma que:

Figura 7: Exemplo de simetria rotacional com ponto fixo de simetria fora da figura.



Fonte: BELLORIN, 2012.

As principais formas de beleza são o arranjo sistemático [do grego *taxia*], proporção [*symmetria*] e determinação [*horismenon*], revelados em particular pela matemática. (LIVIO, 2011, p.14).

Quando nos deparamos com algumas obras de arte, apreciamos, principalmente, aquelas que nos parecem mais belas e, em geral, essas obras apresentam algum tipo de simetria. A arquitetura foi um dos campos que mais se beneficiou dos padrões de simetria. Vitruvius (*Vitruvius*) (c. 70 – 25 a.C.) escreve em seu livro, *De Architectura Libris Decem* (Dez livros sobre arquitetura), que ficou conhecido como a bíblia da arquitetura da Europa por vários séculos, o seguinte:

O desenho de um templo depende da simetria, cujos princípios devem ser cuidadosamente observados pelo arquiteto. São decorrentes da proporção. Proporção é uma correspondência entre as medidas dos membros de uma obra inteira e do todo como uma determinada parte selecionada como padrão. Disto resultam os princípios da simetria. (VITRUVIUS. c. 27 a.C.).

De fato, a arquitetura tem se beneficiado bastante do uso da simetria, pois, para construir um templo, o arquiteto somente necessitaria desenhar uma metade deste e reproduzir simetricamente, através de um eixo imaginário, a outra. Vejamos a seguir uma imagem (figura 8, página 32) da face ocidental da Catedral de Notre Dame em Paris – França.

Observemos que a estrutura arquitetônica frontal da catedral é perfeitamente dotada de simetria. Predomina aqui a mais simples de todas as formas de simetria: a **simetria axial** ou **bilateral**. É realmente um dos maiores monumentos simétricos da história das catedrais. Além disso, notemos que há uma boa aplicação de **simetria translacional** como é o caso das portas, dos portais, e das figuras que se repetem ao longo da face da catedral, e de **simetria rotacional** nas figuras circulares que se apresentam na imagem. Há também boas quebras de simetria na estrutura, citemos uma por exemplo, as portas centrais de acesso à catedral são simétricas entre si, por translação, mas diferem, também por translação, das portas de acesso laterais, que por sua vez também são simétricas entre si. Com um olhar mais atento, é possível observar que há mais quebras de simetria na parte estrutural.

A Basílica de São Pedro, no Vaticano, é um outro monumento rico em simetria. Antes de comentarmos sobre sua estrutura, observemos as seguintes imagens: vista frontal (figura 9, página 33) e cúpula (figura 10, página 34).

Figura 8: Catedral de Notre Dame de Paris: exemplo de aplicação de simetria axial na arquitetura.



Fonte: NOTRE DAME DE PARIS (site).

A vista frontal da basílica de São Pedro no Vaticano fornece-nos uma aplicação da definição de **simetria axial**, quanto à sua estrutura física. Observemos que, traçando-se uma reta vertical que passe pelo centro da basílica, temos que é possível dividi-la ao meio e, uma vez tendo construído um dos dois lados, o esquerdo ou o direito, facilmente se constrói o outro lado, pois este é perfeitamente simétrico com relação ao eixo. Pode-se também construí-la por simetria de translação, visto que a torre esquerda é exatamente igual à torre direita, assim como, a maioria das portas e janelas, possuindo estas também (tanto as torres laterais, como as portas e janelas), simetria axial. A cúpula da basílica apresenta muito de simetria translacional e rotacional, além da simetria bilateral, pois também é possível construí-la por **simetria axial**. Há também quebras de simetria na estrutura, as mais notórias são as das imagens dispostas sobre a catedral. Note que as imagens são de personagens diferentes (santos da história da igreja católica apostólica romana), treze no total. Apesar de estarem dispostas por distâncias congruas da imagem central, não são simétricas entre si. Se numerarmos as imagens da esquerda para a direita, com os números de 1 a 13, poderemos observar que, as distâncias 1 e 7, e, 7 e 13, são congruentes, ou seja, as distâncias são simétricas, mas as imagens não. Analogamente, para as imagens 2 e 7, e, 7 e 12; 3 e 7, e, 7 e 11; e assim por diante. Na cúpula da basílica de São Pedro (figura 10, página 34) é possível também observar predominância de simetria axial e translacional, assim como, quebras de simetria, a mais notória, é dada por uma base com uma haste vertical na base da cúpula um pouco à esquerda da imagem (ver figura 10 na página 34).

As artes plásticas também se beneficiaram dos princípios da simetria. Citemos aqui um artista que deixou um legado de obras que apresentam um altíssimo nível de

Figura 9: Vista frontal da basílica de São Pedro - Vaticano.



Fonte: BASÍLICA DE SÃO PEDRO (site).

simetrias. Trata-se do holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972), ele é mais famoso por suas chamadas construções impossíveis, como Ascendente e Descendente, Relatividade, suas impressões de transformação, como Metamorfose I, II e Metamorfose III, Céu e Água I ou répteis.

Vejam algumas obras de Escher que têm o uso das mais diversas simetrias e façamos uma breve análise da simetria utilizada. Iniciemos com uma obra do ano de 1938 denominada *Clowns* (Palhaços, em português), conforme mostra a figura 11 na página 35.

A primeira impressão que a obra *Clowns* passa para um simples observador é de que não há tipo algum de simetria, mas nem por isso um observador desatento deixa de apreciá-la, porque por algum motivo a obra lhe chama atenção. Observando com atenção, Escher usa cores diferentes para os palhaços, isso dá uma ilusão de que a obra não apresenta simetria; porém, com isso, é possível notar que existe **simetria do tipo translacional** para os palhaços que apresentam o mesmo tipo de cor. Além disso, um palhaço é um transformado simétrico de outro palhaço quanto às suas formas. Para entender melhor, tracemos uma reta vertical passando pelos centros dos dois palhaços em tons de azul que aparecem inteiros na obra. Tomemos um desses palhaços, e giremo-lo de um ângulo de  $120^\circ$  para a direita e notemos que ele se sobrepõe a qualquer um dos palhaços em tons de amarelo; fazendo um giro de um ângulo de  $120^\circ$  para a esquerda em um dos palhaços em tons de azul, o palhaço se sobrepõe a qualquer um dos palhaços em tons de vermelho. Temos então uma **transformação de simetria** do tipo **rotação seguida de translação**, mantendo suas formas completamente inalteradas e desconsiderando as cores. Além disso, fixando um **ponto fixo de rotação** no ponto de encontro das três cabeças dos três tipos de palhaço (os três que aparecem inteiros, por exemplo) é perfeitamente possível observar que a obra possui **simetria central** com rotação de um ângulo de  $120^\circ$ , tanto no sentido horário como no sentido anti-horário; mais ainda, podemos girar, em torno do ponto fixo de rotação, de um ângulo de  $120^\circ$ ,  $240^\circ$  ou  $360^\circ$ , em qualquer sentido, que sua forma primordial “não se altera”. Além disso, um conjunto dos três palhaços distintos sempre se sobrepõe a outro conjunto de três palhaços distintos, levando em consideração inclusive as cores,

Figura 10: Cúpula da Basílica de São Pedro.



Fonte: BASÍLICA DE SÃO PEDRO (site).

apresentando mais um tipo de translação.

Tomemos agora uma obra do ano de 1941 denominada *Shells and Starfish* (Conchas e Estrelas do Mar, em português), vejamos a figura 12 na página 36.

Inicialmente, já é perceptível que há **simetria do tipo translacional**, pois há quatro grupos com quatro conchas idênticas que se sobrepõem uns aos outros por meio de translação. Além disso, tomando um único grupo de conchas e fixando um **ponto fixo de rotação** no centro das conchas é possível observar que há **simetia central** com um ângulo de rotação de  $90^\circ$  e seus múltiplos, tanto no sentido horário como no sentido anti-horário. Cada uma das estrelas do mar que aparecem na obra é uma **transformação de simetria** do tipo **rotação seguida de translação** de uma única estrela. No encontro das quatro estrelas do mar, no centro da obra, podemos colocar um **ponto fixo de rotação** e fazer rotações de ângulos de  $90^\circ$  e seus múltiplos, em qualquer sentido, sempre em torno deste ponto e os espaços deixados entre as estrelas do mar se mantêm inalterados, quanto às formas e quanto às cores.

O nível de simetria é grandioso nessas duas obras de Escher. Mas ainda não encontramos simetria do tipo axial. Por esse motivo, analisemos apenas uma obra mais do Escher, a fim de que possamos identificar esse tipo de simetria que é tão comum na natureza. Para tal, tomemos uma obra do ano de 1960 que pertence a um conjunto de obras denominadas pelo próprio Escher de *Circle Limit*. A obra seguinte, figura 13 (página 37), denomina-se *Circle Limit IV* (Limite Circular IV, em português).

A obra apresenta-se em tons de preto e escalas de cinza. A ideia primeira de Escher é passar a impressão de que a obra foi construída sobre uma grande esfera e que o observador tenha a sensação de olhá-la de um ponto específico, ao qual se possa colocar no centro da

Figura 11: Clowns (nº 21) - 1938, ink, watercolor.



Fonte: ESCHER, 1938.

obra um **ponto fixo de rotação**. Os personagens da figura mais parecem anjos em tons claros e demônios em tons mais escuros. Escher tentamos causar a impressão de que a obra foi construída sobre uma esfera, pois à medida que os personagens vão se afastando do centro, eles vão nos parecendo menores, obedecendo às leis da Física que regem o ângulo de visão, pois, quanto mais nos afastamos de um objeto, menor é o nosso ângulo visual e, por isso, o objeto nos parece cada vez menor. Considerando a figura em duas dimensões (um círculo) ou em três dimensões (uma esfera) e fixado o ponto de rotação central, podemos observar que a figura possui **simetria central** com um ângulo de rotação de  $120^\circ$  e seus múltiplos em qualquer sentido. Além disso, há três eixos de simetria que dividem a obra ao meio e fazem com que as partes opostas se tornem simétricas por um eixo. Cada um desses eixos passa pelo centro da obra e divide um “anjo” e um “demônio” bilateralmente.

As obras de Escher são perfeitamente matemáticas. Contudo, cabe aqui comentar, e não deveríamos em hipótese alguma deixar passar, que o próprio Escher nunca teve certeza do motivo que o levou a essa obsessão pelos padrões com simetria translacional e simetria de cor. Com suas próprias palavras ele afirma que:

Figura 12: Shells and Starfish (n° 42) - 1941, colored ink, colored pencil, watercolor.



Fonte: ESCHER, 1941.

Muitas vezes eu ficava espantado com a minha própria mania de fazer desenhos periódicos. Certa vez, perguntei a um amigo meu, um psicólogo, sobre a razão de eu ser tão fascinado por eles, mas a resposta dele – de que devo ser impelido por um instinto primitivo, prototípico – não explica nada. Qual deve ser a razão de eu estar sozinho nesse campo? Por que nenhum de meus colegas artistas parece ser tão fascinado como eu por essas formas entrelaçadas? Contudo suas regras são puramente objetivas, regras essas que todo artista poderia aplicar de sua própria maneira pessoal! (MACGILLAVRY, 1976, prefácio).

A simetria é realmente fascinante. Contudo, há ainda muito que se discutir com relação a esse assunto.

### 2.3. O Mais Simétrico de Todos

Há uma grande discussão sobre quem ou o que é o mais simétrico de todos. Que figura? Que objeto? Que forma geométrica? Não há dúvida de que há figuras que possuem um nível altíssimo de simetrias. Livio (2011) descreve que o *floco de neve de seis pontas* foi tão admirado por sua simetria que rendeu ao famoso astrônomo Johannes Kepler (1571-1630) a dedicação de todo um tratado na tentativa de explicar sua simetria. De fato, o floco de neve de seis pontas é rico em simetrias e é de uma beleza admirável, contudo sua simetria não é contínua. Vejamos na figura 14 (página 38) uma fotografia microscópica de um espécime (existem vários espécimes) de floco de neve de seis pontas, tirada pelo fotógrafo Libbrecht, que tem um trabalho de mais de 11 anos coletando imagens de flocos de neve.

Entretanto, não há certeza alguma de que tais figuras são as mais perfeitamente

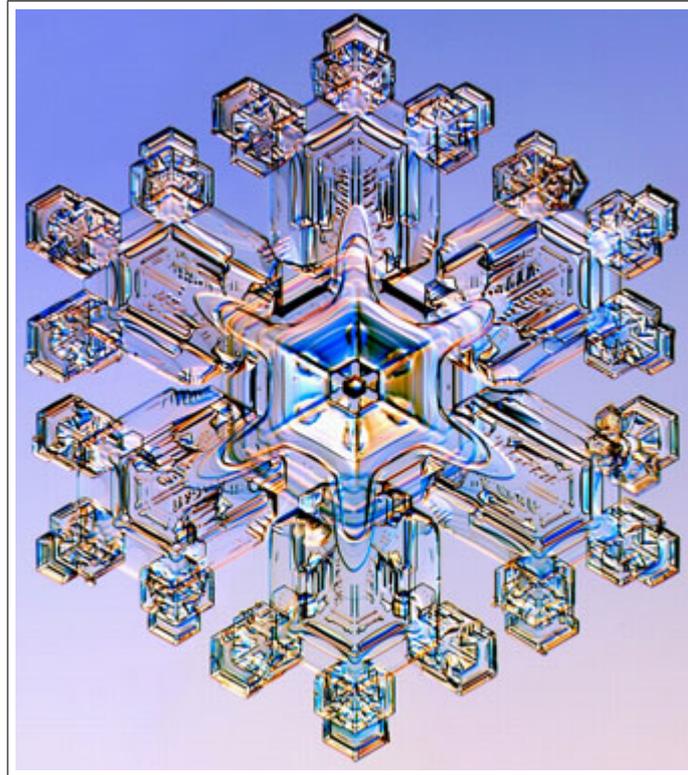
Figura 13: Circle Limit IV - 1960, woodcut in black and ocre, printed from two blocks.



Fonte: ESCHER, 1960.

simétricas. No caso de duas dimensões, há quem defenda que o **círculo** é o mais simétrico de todos. De fato, o círculo é dotado de simetria contínua. Há infinitos eixos de simetria que o dividem ao meio e tornam uma parte diametralmente oposta à outra parte exatamente igual, porém invertida; há também infinitas rotações em torno de seu centro que o deixam perfeitamente inalterado.

Isso, analogamente, ocorre com a esfera, no universo tridimensional. Ela possui infinitos planos de simetria que a dividem ao meio deixando cada parte exatamente igual à outra e há também infinitas rotações que a deixam perfeitamente inalterada. Mas seriam essas as formas mais perfeitamente simétricas? Por que não seria o ponto o mais simétrico de todos, já que, ele satisfaz todas as simetrias do círculo e da esfera? Ainda em Livio (2011), encontramos uma grande discussão sobre o vazio, ou seja, o **nada**, como sendo a mais simetricamente perfeita de todas as coisas do universo inteiro. Não queremos defender aqui que este o seja, mas é incontestável que o nada é sempre o mesmo em qualquer cultura do mundo e em qualquer período histórico. O nada é completamente imutável, logo é perfeitamente simétrico por qualquer rotação, translação no espaço e no tempo ou reflexão por qualquer eixo ou plano de simetria.

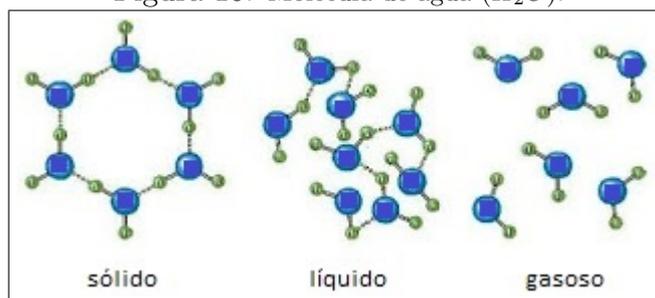
Figura 14: Exemplo natural de *floco de neve*.

Fonte: LIBBRECHT (site).

## 2.4. Quebras de Simetria

As quebras de simetria são fundamentais para o mundo físico, para a natureza e para a nossa própria existência. Por exemplo, a expansão do universo é um resultado dessa quebra de simetria, pois, devido à expansão, o universo deixa de ser invariante (simétrico). Podemos citar uma outra quebra de simetria num experimento que pode ser facilmente realizado. Sabemos que os estados físicos da matéria influenciam na composição estrutural de seus átomos. No estado sólido, os átomos estão mais próximos uns dos outros que no estado líquido e, conseqüentemente, mais próximos no estado líquido que no estado gasoso. Isso é uma lei física que rege as propriedades físicas dos estados da matéria; tal lei implica que o volume de uma substância no estado sólido  $V_s$  é menor que o volume no estado líquido  $V_l$  que é menor que o volume no estado gasoso  $V_g$ . Tomemos como exemplo de quebra de simetria a água ( $H_2O$ ), que é simétrica por sua própria estrutura atômica, pois uma molécula de água é formada por dois átomos de hidrogênio  $H$  e um átomo de oxigênio  $O$ , de tal modo que o átomo de oxigênio (em azul) equidista de dois átomos de hidrogênio (em verde), conforme podemos ver na figura 15 (página 39).

No entanto, observou-se um fenômeno estranho em relação ao congelamento da água: o volume da água congelada (no estado sólido) é maior que no estado líquido. Isso mesmo,  $V_s > V_l$ . Mas como? Não deveríamos ter  $V_s < V_l$ ? A lei deixou de ser invariante, houve uma quebra grandiosa da simetria com relação a essa lei. Segundo Toffoli, em seu artigo sobre *a dilatação anômala da água*, esse fenômeno ocorre porque a água tem densidade máxima em torno dos  $4^\circ C$ , ainda líquida, mas só congela a  $0^\circ C$ . Ou seja, suponhamos que se tenha água à  $10^\circ C$  e se queira congelar. Seu volume vai diminuindo até que ela chegue, ainda líquida, aos  $4^\circ C$  e, a partir daí, seu volume começa a aumentar novamente, à medida

Figura 15: Molécula de água ( $H_2O$ ).

Fonte: Autor, 2014.

que a temperatura cai ainda mais; por isso, seu volume se expande novamente e começa a ocupar um espaço maior.

Lembremos agora que havíamos afirmado anteriormente que a simetria da paridade *era* considerada como regra indiscutível para todos os fenômenos físicos. Todavia, quando foi demonstrado que certos fenômenos subnucleares não obedecem essa simetria, a comunidade científica ficou estarrecida. Esse resultado não era esperado teoricamente. Tentemos entender um pouco melhor a simetria da paridade. Uma pessoa diante do espelho é simétrica em relação à sua imagem no espelho  $\rightarrow$  *paridade*. Quando uma pessoa diante do espelho move o seu braço direito a imagem no espelho move seu braço esquerdo, ou seja, existe um “mundo” espelhado. É assim com a relação **matéria** $\leftrightarrow$ **antimatéria**. Por exemplo, a antimatéria do elétron é o pósitron (um antielétron), que é uma partícula do mundo espelhado com as mesmas características do elétron exceto em sua carga, que é positiva (mundo espelhado: direito $\leftrightarrow$ esquerdo $\iff$ negativo $\leftrightarrow$ positivo).

Em 1956, os físicos Lee e Yang começaram a imaginar se a paridade já havia sido testada. Descobriram que, apesar de ser uma boa simetria no que diz respeito às forças forte e eletromagnética, não havia testes experimentais de invariância de paridade com relação à interação fraca. Para esses testes, foram utilizados átomos de Cobalto 60. Esses átomos foram cuidadosamente alinhados, de forma que seus *spins* apontassem na mesma direção. O Cobalto 60 sofre decaimento beta, pois um elétron e um neutrino são emitidos. Os resultados mostraram que a maioria dos elétrons saía na direção do *spin* do átomo. A consequência disso é que o decaimento beta do Cobalto 60 não existe num mundo espelhado. Ou seja, a paridade é violada nas interações eletrofracas.

Há também quebra de simetria espontânea na natureza. Para darmos um exemplo dessa espontaneidade da quebra da simetria precisamos do auxílio da física quântica, mas especificamente do **Princípio da incerteza de Heisenberg**, também conhecido como *Princípio da Indeterminação*. Em Cassidy (1992) e em Gribbin (1984), esse princípio afirma que a posição e o momento de uma partícula elementar (como é o caso do elétron) não podem ser ambos conhecidos simultaneamente.

Suponhamos uma superfície perfeitamente lisa e um lápis que foi apontado até que a extremidade de sua ponta pudesse ser reduzida a um único átomo de carbono. Levemos o experimento às condições mais extremas, ao vácuo. Devemos colocar o lápis perfeitamente equilibrado, sobre sua ínfima ponta, verticalmente em relação à superfície perfeitamente lisa. Pelo fato de estarmos no vácuo, é fisicamente provável que o lápis jamais se desequilibre e caia, pois o vácuo deve manter o sistema superfície-lápis invariante, ou seja, a simetria do sistema deve permanecer constante. Mas isso não acontece. A própria experiência mostra que a invariância do sistema é rompida, ou seja, a simetria é quebrada espontaneamente. É

aí onde entra a mecânica quântica, pois ela não permite que a invariância seja mantida. Os experimentos de Heisenberg têm mostrado que os elétrons não estão em lugares específicos. A razão disso é que se fosse possível manter um elétron imóvel durante tempo suficiente para determinar sua posição, já não seria possível determinar seu *momentum* e reciprocamente. Devido a essa incerteza, a invariância do sistema superfície-lápis é quebrada e, por isso, num determinado instante, o lápis “cai”. Eis aí um exemplo de quebra espontânea de simetria na natureza.

Finalmente, é chegada a hora de tratarmos as simetrias como ferramenta para o ensino da Matemática e da Geometria.

### 3. PROPRIEDADES IMPORTANTES PARA O ESTUDO E ANÁLISE DAS SIMETRIAS

Apresentaremos neste capítulo, propriedades importantes que devem ser aprendidas e compreendidas pelos discentes. Essas propriedades, são conhecimentos prévios que os docentes devem lecionar antes de iniciar o ensino de Matemática através dos conceitos, definições e propriedades das simetrias. Pois, como já vimos anteriormente, as simetrias são dotadas de propriedades matemáticas.

#### 3.1. Conhecimentos Preliminares

Antes de definirmos, enunciarmos e demonstrarmos aqui algumas propriedades da simetria, faz-se necessário conhecermos um pouco da *Geometria Euclidiana*, tal qual o próprio *Euclides de Alexandria* (360a.C-295a.C) a descreveu e organizou. Para tal, necessitaremos do auxílio do matemático italiano, nascido em Turim, no final do século XIX, Beppo Levi (1875-1961), que é considerado uma das maiores autoridades quando o assunto é Euclides de Alexandria e seus *Elementos*. Começemos então pela definição de ponto.

A primeira definição diz, segundo a tradição mais comumente aceita: *Ponto é o que não tem partes*. Possivelmente, a tradução mais literal seria: *Ponto é aquilo cuja parte é nada*. (LEVI, 2008, p.97).

Vamos a dois **axiomas euclidianos** importantes para nós, do ponto de vista geométrico:

1. As coisas iguais a uma mesma são iguais entre si.  
(...)
4. E as coisas coincidentes são iguais entre si. (LEVI, 2008, p.109)

Não esqueçamos que há três postulados importantíssimos para a Geometria. (i) *por dois pontos distintos no plano ou no espaço passa uma única reta*; (ii) *dados um ponto  $P$  e uma reta  $r$ , tal que  $P \notin r$ , há um único plano que os contém* e (iii) *três pontos distintos não colineares definem um plano que os contém*.

Antes de prosseguirmos, vamos considerar o plano cartesiano ortogonal, onde todo ponto será da forma  $P = (x, y)$ , tal que  $x$  é coordenada do eixo das abcissas e  $y$  é coordenada do eixo das ordenadas e toda reta  $r$  tem por equação geral a seguinte forma  $r : ax + by + c = 0$  e, por equação reduzida, a seguinte forma  $r : y = mx + n$  onde  $m = \frac{-a}{b}$  é coeficiente angular da reta  $r$  e  $n = \frac{-c}{b}$  é coeficiente linear da reta  $r$ .

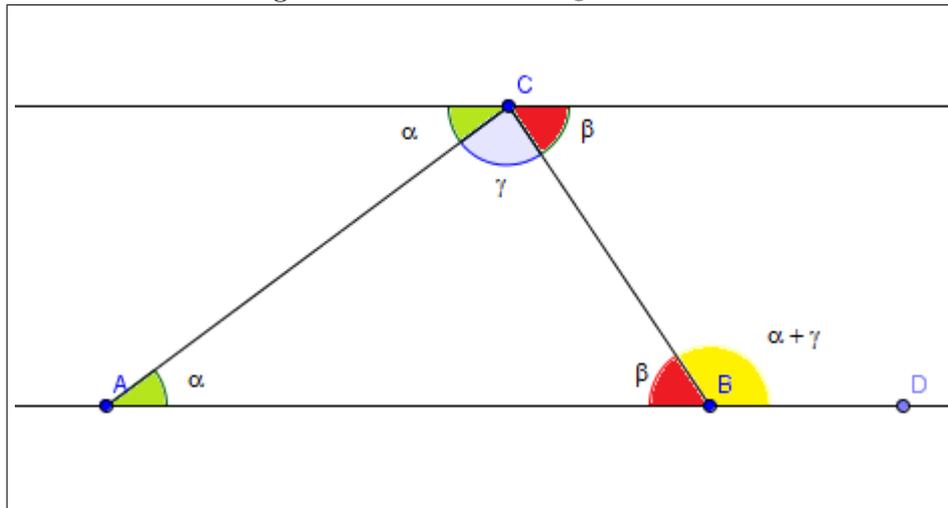
Vamos ao **teorema do ângulo externo** e, em seguida, a alguns lemas importantes.

**TEOREMA DO ÂNGULO EXTERNO:** Em todo triângulo a medida do ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

**Demonstração:** Consideremos o triângulo  $ABC$ , cujos ângulos internos são  $\alpha$  no vértice  $A$ ,  $\beta$  no vértice  $B$  e  $\gamma$  no vértice  $C$ . Seja  $r$  a reta que passa pelos vértices  $A$  e  $B$  e  $s$  a reta paralela a  $r$  passando pelo vértice  $C$  (ver figura 16 na página 42).

Temos agora que o ângulo à esquerda de  $\gamma$  é alterno interno de  $\alpha$ , logo, são iguais. Analogamente, com o ângulo à direita de  $\gamma$  que é igual a  $\beta$ . Segue daí que,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  formam

Figura 16: Teorema do ângulo externo.



Fonte: Autor, 2014.

um ângulo raso, ou seja, somam  $180^\circ$ . Agora, tomando o ponto  $D$  à direita de  $B$  sobre a reta  $r$ , temos que os ângulos  $\widehat{ABC} = \beta$  e  $\widehat{CBD}$  são suplementares, ou seja, também somam  $180^\circ$ . Segue daí que,  $\alpha + \beta + \gamma = \widehat{CBD} + \beta \iff \widehat{CBD} = \alpha + \gamma$ , *quod erat demonstrandum*.

**LEMA:** Dado um ponto  $P$  e uma reta  $r$ , tal que,  $P \in r$ , existe uma única reta  $s$  que passa por  $P$  tal que  $s \perp r$ .

**Demonstração:** Seja  $r$  uma reta e  $Q$  um ponto, tal que,  $Q \notin r$ . Agora seja  $P$  a projeção ortogonal do ponto  $Q$  sobre a reta  $r$ . Temos assim  $P \in r$  e pelos pontos  $P$  e  $Q$  existe uma reta. Seja  $s$  a reta que contém os pontos  $P$  e  $Q$ . Temos então que  $s \perp r$ . Mostremos agora que essa reta  $s$  é única. Suponhamos que existe um ponto  $P' \in r$ , com  $P' \neq P$ , tal que,  $P'$  é também projeção ortogonal do ponto  $Q$  sobre a reta  $r$ . Temos assim que o triângulo formado pelos pontos  $P$ ,  $Q$  e  $P'$  (figura 17, página 43) tem exatamente dois ângulos retos. Além disso, pelo **teorema do ângulo externo**, temos que o ângulo externo em  $P$  é menor que a soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes. Portanto, dados um ponto  $P \in r$ , existe uma única reta  $s$ , com  $P \in s$ , tal que  $s \perp r$ . *Quod erat demonstrandum*.

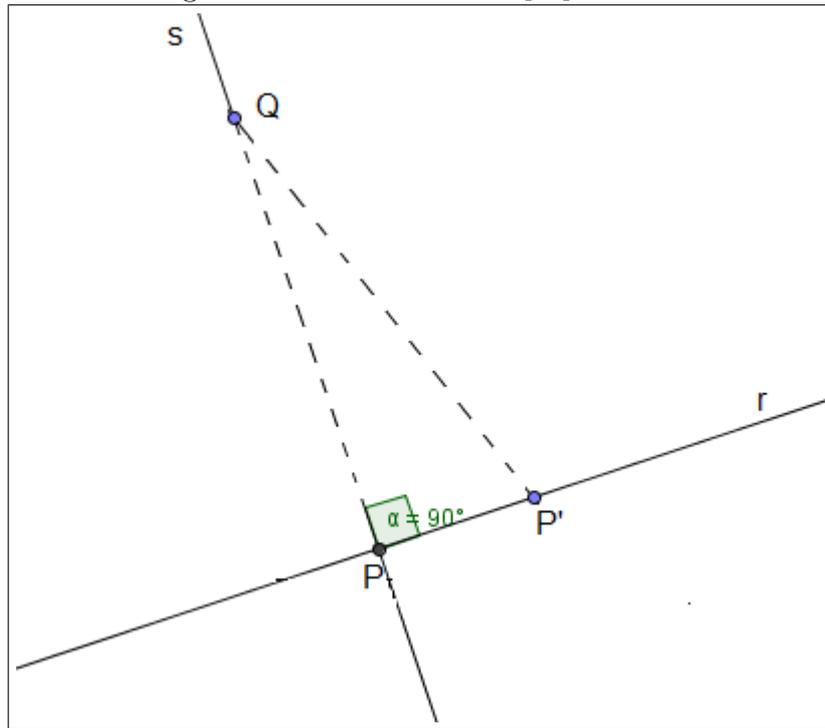
**PROPOSIÇÃO 1:** Duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas entre si.

**Demonstração:** Seja  $r$  uma reta e  $P$  um ponto tal que  $P \notin r$ . Seja  $Q$  a projeção ortogonal do ponto  $P$  sobre a reta  $r$ . Pelo **lema**, temos que existe uma reta  $r'$  tal que  $r' \perp r$  e contém o ponto  $P$  e  $Q$ . Novamente pelo **lema**, existe a reta  $s$  que contém o ponto  $P$  e é perpendicular à reta  $r'$  (figura 18, página 44). Como  $r \perp r'$  e  $r' \perp s$  temos que  $r \parallel s$ . *Quod erat demonstrandum*.

**PROPOSIÇÃO 2:** Dados dois pontos distintos no plano cartesiano ortogonal,  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$ , com  $x_A \neq x_B$  e  $y_A \neq y_B$ , temos que a distância do ponto  $A$  até o ponto  $B$  é dada por

$$d_{(A,B)} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}. \quad (1)$$

Figura 17: Unicidade da reta perpendicular.



Fonte: Autor, 2014.

**Demonstração:** Sejam  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$ , com  $x_A \neq x_B$  e  $y_A \neq y_B$ . Consideremos o ponto  $C = (x_B, y_A)$ . Temos que a figura formada pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  é um triângulo retângulo com  $\widehat{ACB} = 90^\circ$ . Observemos que a medida do segmento  $\overline{AC}$  é dada por  $|x_B - x_A|$  e a medida do segmento  $\overline{BC}$  é dada por  $|y_B - y_A|$  (figura 19, página 45). Aplicando o **Teorema de Pitágoras** no  $\triangle ABC$  temos:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

$$d_{(A,B)}^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2$$

mas  $|x_B - x_A|^2 = (x_B - x_A)^2$  e  $|y_B - y_A|^2 = (y_B - y_A)^2$ ,  $\forall x_A, x_B, y_A, y_B \in R$ , portanto

$$d_{(A,B)} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

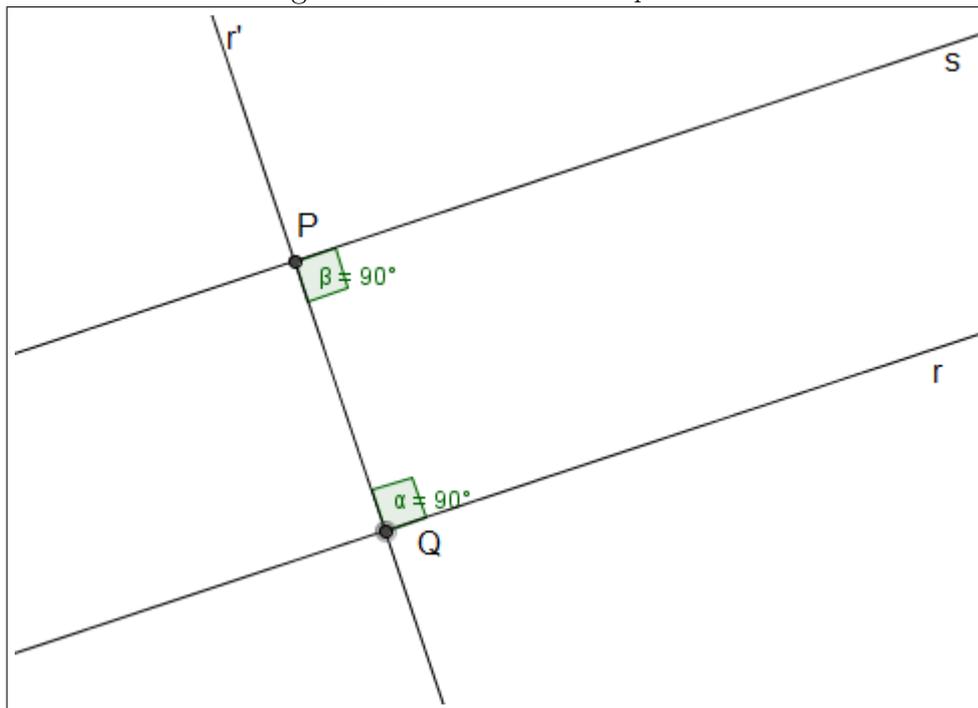
que é exatamente igual a equação (1), *quod erat demonstrandum*.

**PROPOSIÇÃO 3:** Dados dois pontos distintos no plano cartesiano ortogonal,  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$ , com  $x_A \neq x_B$  e  $y_A \neq y_B$ , temos que o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$  é dado por

$$M = (x_M, y_M) = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right). \quad (2)$$

**Demonstração:** Sejam  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$ , com  $x_A \neq x_B$  e  $y_A \neq y_B$ . Consideremos o ponto  $C = (x_B, y_A)$ . Temos que a distância de  $A$  até  $C$  é  $d_{(A,C)} = |x_C - x_A|$ , acrescentando  $|x_A|$  à abscissa  $|x_B|$ , temos que o ponto médio do segmento  $\overline{AC}$  é dado por  $\left(\frac{x_A + x_B}{2} = x_M\right)$ , seja  $D = (x_M, y_A)$ . Analogamente, temos que  $\left(\frac{y_A + y_B}{2} = y_M\right)$  é ponto médio

Figura 18: Unicidade da reta paralela.



Fonte: Autor, 2014.

do segmento  $\overline{BC}$ , seja  $E = (x_B, y_M)$ . Consideremos agora o ponto  $M = (x_M, y_M)$ , tal que  $M \in \overline{AB}$ . Agora observemos os triângulos  $ADM$ ,  $ACB$  e  $MEB$ . Temos:  $\overline{AD} \equiv \overline{DC} \equiv \overline{ME}$ ,  $\widehat{ADM} \equiv \widehat{ACB} \equiv \widehat{MEB}$  e  $\overline{DM} \equiv \overline{CE} \equiv \overline{EB}$ . Temos que  $\triangle ADM \equiv \triangle MEB$  pelo caso de congruência de triângulos LAL (lado, ângulo, lado) - (figura 20, página 46). Logo,  $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$ . Portanto

$$M = (x_M, y_M) = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

que é exatamente igual à equação (2), *quod erat demonstrandum*.

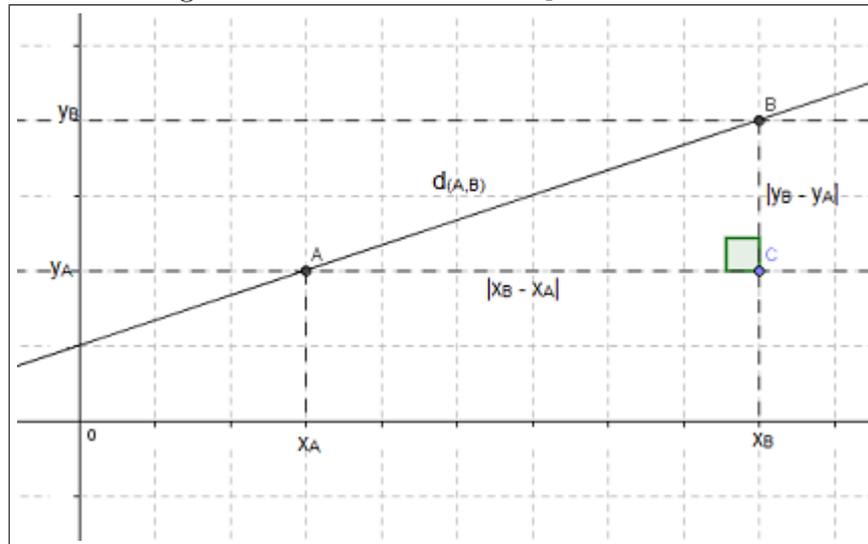
**PROPOSIÇÃO 4: (Condição de alinhamento de três pontos no plano):** Dados três pontos  $P = (x, y)$ ,  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$ , afirmamos que eles estão alinhados se, e somente se, o determinante abaixo se anula,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

**Demonstração:** Sejam os pontos distintos  $P = (x, y)$ ,  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$ , tal que  $P \in \overline{AB}$ , com  $x \neq x_A \neq x_B \neq x$ . Agora, tomemos os pontos  $C = (x, y_A)$  e  $D = (x_B, y_A)$ . Observemos os seguintes triângulos:  $\triangle ACP$  e  $\triangle ADB$ . Temos  $\widehat{ACP} = 90^\circ = \widehat{ADB}$ ,  $\widehat{CAP} \equiv \widehat{DAB}$  e pela soma dos ângulos internos de um triângulo  $\widehat{APC} \equiv \widehat{ABD}$ . Pelo caso AA (ângulo-ângulo) de semelhança de triângulos, temos  $\triangle ACP \approx \triangle ABD$  (figura 21, página 47). Por proporção temos:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{DB}}$$

Figura 19: Distância entre dois pontos distintos.



Fonte: Autor, 2014.

$$\frac{d_{(A,P)}}{d_{(A,B)}} = \frac{d_{(A,C)}}{d_{(A,D)}} = \frac{d_{(C,P)}}{d_{(D,B)}}$$

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

$$(x - x_A)(y_B - y_A) = (y - y_A)(x_B - x_A)$$

$$x(y_B - y_A) - x_A(y_B - y_A) = y(x_B - x_A) - y_A(x_B - x_A)$$

$$x(y_B - y_A) - y(x_B - x_A) + y_A(x_B - x_A) - x_A(y_B - y_A) = 0$$

$$(y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y + x_B y_A - x_A y_A - x_A y_B + x_A y_A = 0$$

$$(y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y + x_B y_A - x_A y_B = 0 \quad (4)$$

Desenvolvamos agora o mesmo determinante em (3), aplicando a regra de Sarrus e igualando a zero.

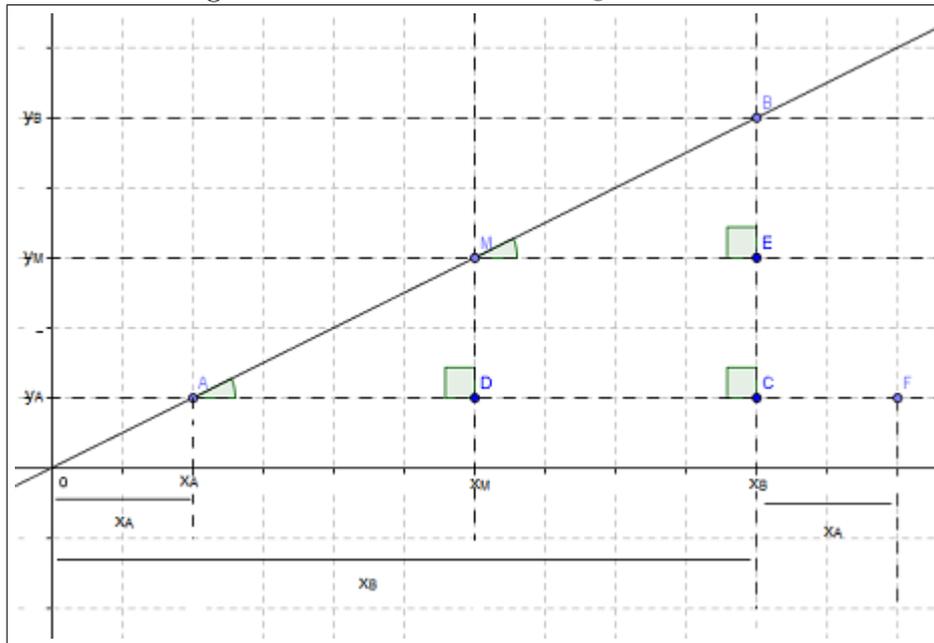
$$\begin{aligned} & (-1)^{1+1}(a_{11})(a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) + \\ & + (-1)^{1+2}(a_{12})(a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + \\ & + (-1)^{1+3}(a_{13})(a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}) = 0 \end{aligned}$$

$$(y_A - y_B)x - (x_A - x_B)y + x_A y_B - x_B y_A = 0 \quad (5)$$

Multiplicando a igualdade em (5) por  $-1$  e organizando os termos, temos

$$(y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y + x_B y_A - x_A y_B = 0$$

Figura 20: Ponto médio de um segmento de reta.



Fonte: Autor, 2014.

que é exatamente o resultado em (4). Isso mostra que, se os pontos  $P$ ,  $A$  e  $B$  estão alinhados, o determinante (3) é igual a zero. Neste caso, a recíproca também é verdadeira.

Portanto, três pontos  $P = (x, y)$ ,  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  estão alinhados se, e somente se, o determinante em (3) é igual a zero. *Quod erat demonstrandum.*

**OBSERVAÇÃO 1:** Da igualdade em (4) podemos deduzir uma forma geral para a equação da reta. Suponhamos que seja  $r$  a reta que passa pelos pontos  $P$ ,  $A$  e  $B$  do lema 5. Fazendo  $y_B - y_A = a$ ,  $x_A - x_B = b$  e  $x_B y_A - x_A y_B = c$ , temos que a **equação geral da reta  $r$**  é da forma

$$r : ax + by + c = 0 \quad (6)$$

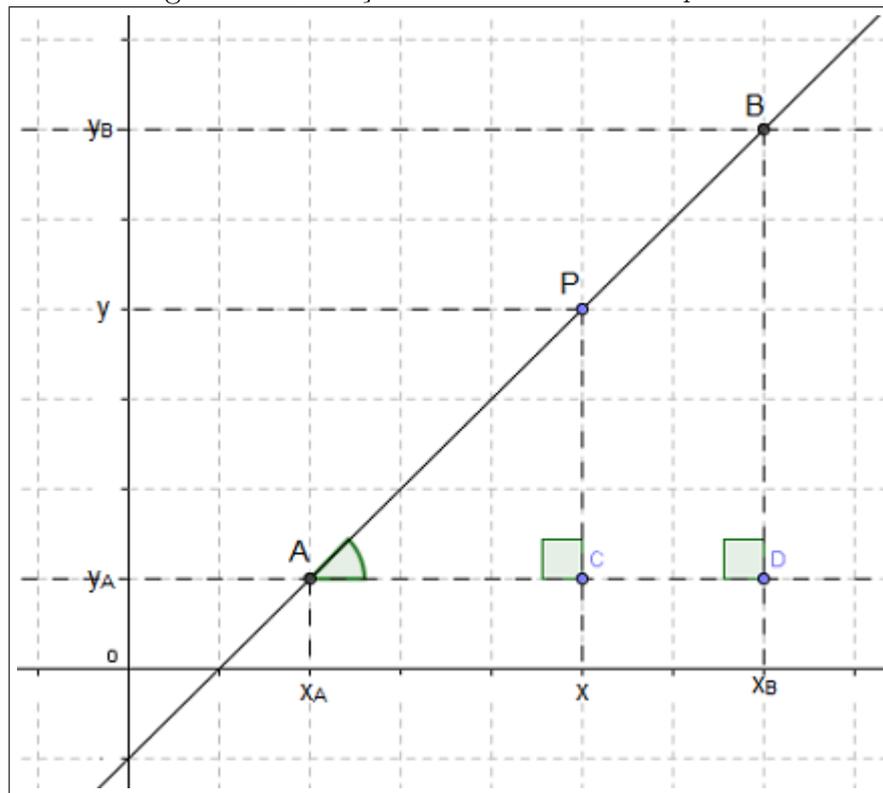
**OBSERVAÇÃO 2:** Da equação em (6) podemos deduzir uma forma reduzida para a equação da reta. Fazendo  $-\frac{a}{b} = m$  e  $-\frac{c}{b} = n$ , temos que a **equação reduzida da reta  $r$**  é da forma

$$r : y = mx + n \quad (7)$$

A vantagem da equação em (7) é que ela nos fornece o coeficiente (ângulo) de inclinação da reta  $r$ , em relação ao eixo das abcissas, dado pela letra  $m$  e a letra  $n$  é o coeficiente linear da reta  $r$ . Ou seja,  $\theta = \arctan m$  é o ângulo da reta  $r$  em relação ao eixo das abcissas.

**De fato**, observemos o  $\triangle ABD$ , da figura 21 (página 47), e notemos que, por definição temos:

Figura 21: Condição de alinhamento de três pontos.



Fonte: Autor, 2014.

$$\operatorname{tg}(\hat{A}) = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{d_{(B,D)}}{d_{(A,D)}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}. \quad (8)$$

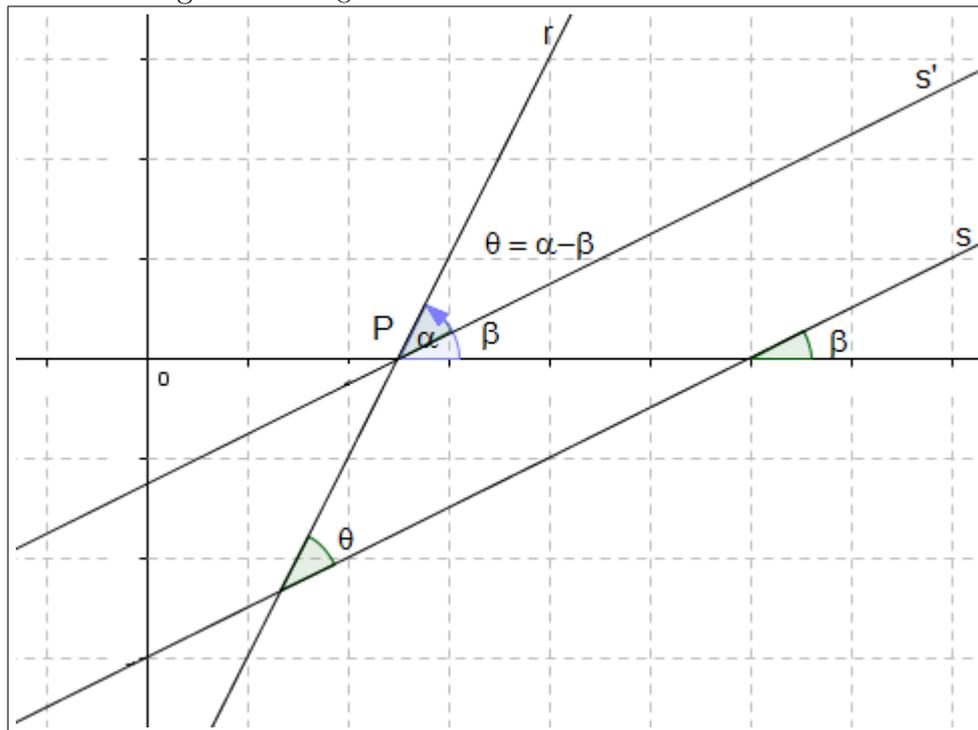
**PROPOSIÇÃO 5: (Menor ângulo formado entre duas retas no plano cartesiano ortogonal):** Dadas duas retas  $r : y = m_r x + n_r$  e  $s : y = m_s x + n_s$  no plano cartesiano ortogonal, então o menor ângulo formado entre elas é dado por

$$\theta = \operatorname{arctg} \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right|. \quad (9)$$

**Demonstração:** Consideremos duas retas  $r : y = m_r x + n_r$  e  $s : y = m_s x + n_s$  no plano cartesiano ortogonal, tais que  $\operatorname{tg}(\alpha) = m_r$ , onde  $\alpha$  é o ângulo de inclinação que a reta  $r$  faz com o eixo das abcissas, e  $\operatorname{tg}(\beta) = m_s$ , onde  $\beta$  é o ângulo que a reta  $s$  faz com o eixo das abcissas. Consideremos agora  $\alpha > \beta$  (o caso  $\alpha < \beta$  é análogo). Construindo uma reta  $s'$  tal que  $s' // s$  e  $(r \cap s' \cap y = 0) = (x_p, 0)$  (figura 22, página 48), temos, pelo **Teorema de Thales**, que o ângulo que a reta  $r'$  faz com o eixo das abcissas é o mesmo que a reta  $r$  faz com tal eixo; segue daí que o menor ângulo entre as retas  $r$  e  $s$  permanece inalterado. Agora, seja  $\theta$  o menor ângulo formado entre as retas  $r$  e  $s'$  que, também pelo **Teorema de Thales** é o mesmo entre as retas  $r$  e  $s$  (figura 22, página 48). Segue daí, que  $\theta = \alpha - \beta$ , pois  $\alpha > \beta$ .

Temos:

Figura 22: Ângulo formado entre duas retas concorrentes.



Fonte: Autor, 2014.

$$\operatorname{tg}(\theta) = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\operatorname{cos}(\alpha - \beta)} \quad (10)$$

Sabemos, das razões trigonométricas, que  $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\operatorname{cos}(b) + \operatorname{sen}(b)\operatorname{cos}(a)$  e  $\operatorname{cos}(a+b) = \operatorname{cos}(a)\operatorname{cos}(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$ . Substituindo em (10), temos:

$$\begin{aligned} \tan(\theta) &= \frac{\operatorname{sen}[\alpha + (-\beta)]}{\operatorname{cos}[\alpha + (-\beta)]} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{cos}(-\beta) + \operatorname{sen}(-\beta)\operatorname{cos}(\alpha)}{\operatorname{cos}(\alpha)\operatorname{cos}(-\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(-\beta)} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{cos}(\beta) - \operatorname{sen}(\beta)\operatorname{cos}(\alpha)}{\operatorname{cos}(\alpha)\operatorname{cos}(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)} \end{aligned}$$

dividindo todas as parcelas da fração acima por  $\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{cos}(\beta)$ , temos:

$$= \frac{1 - \frac{\operatorname{sen}(\beta)\operatorname{cos}(\alpha)}{\operatorname{cos}(\beta)\operatorname{sen}(\alpha)}}{\frac{\operatorname{cos}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)} + \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{cos}(\beta)}}$$

multiplicando o numerador e o denominador da fração acima por  $\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{cos}(\alpha)}$ , temos:

$$= \frac{\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{cos}(\alpha)} - \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{cos}(\beta)}}{1 + \frac{\operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{cos}(\beta)\operatorname{cos}(\alpha)}}$$

$$= \frac{tg(\alpha) - tg(\beta)}{1 + tg(\alpha)tg(\beta)} = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} = tg(\theta)$$

Mas, notemos aqui que a  $tg(\theta) = -tg(180^\circ - \theta)$ , ou seja, a tangente de um ângulo é o oposto (simétrico) da tangente de seu suplementar; como queremos o menor ângulo formado entre as retas  $r$  e  $s$ , devemos então considerar o seu módulo. Logo,

$$tg(\theta) = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right| \Rightarrow \theta = \arctg \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right|$$

é o menor ângulo formado entre as retas  $r$  e  $s$ , *quod erat demonstrandum*.

**COROLÁRIO: (Condição de perpendicularismo entre duas retas):** Se o ângulo formado entre duas retas  $r$  e  $s$  é de  $90^\circ$ , então

$$m_r \cdot m_s = -1. \quad (11)$$

**Demonstração:** De fato, notemos que, por definição,

$$tg(90^\circ) = \frac{sen(90^\circ)}{cos(90^\circ)} = \frac{1}{0}$$

contudo do **proposição 5**, temos que  $tg(90^\circ) = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \right|$ , segue então que

$$\left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \right| = \frac{1}{0}$$

$$|1 + m_r \cdot m_s| = 0 \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1$$

*quod erat demonstrandum*.

## 3.2. Operações de Simetrias

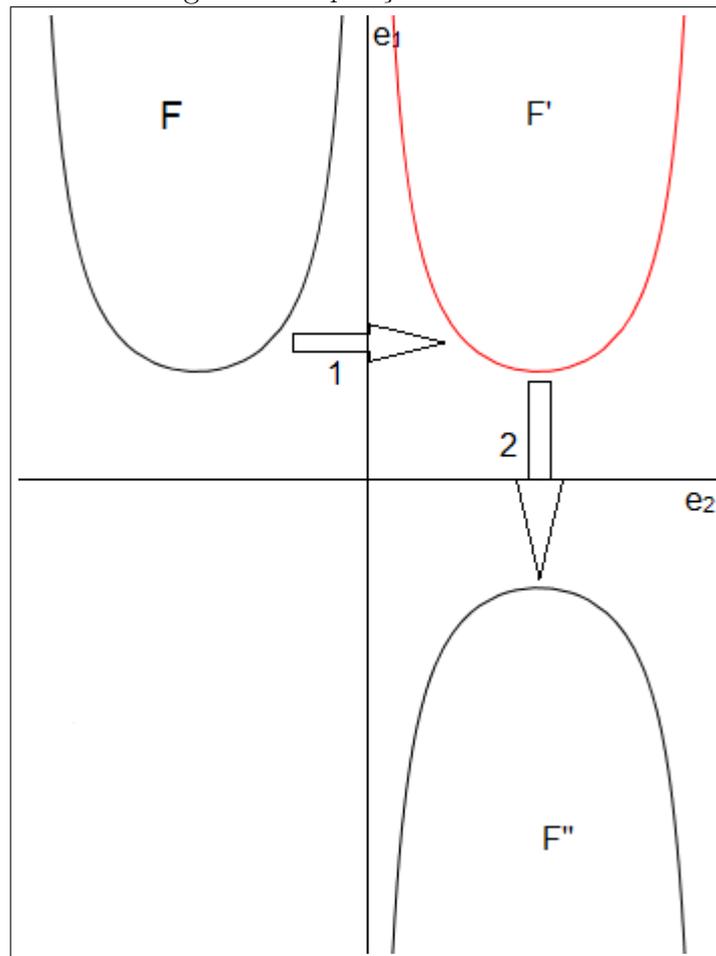
**DEFINIÇÃO 1: Operação de simetria** é qualquer operação ou conjunto de operações que são aplicados a um sistema, deixando-o invariante.

**Exemplo:** Tomar uma figura  $F$ , construir o seu simétrico axial em torno de um eixo de simetria ( $e_1$ ) resultando em  $F'$ , rotacionar  $F'$  de  $180^\circ$  e transladá-lo (deslocá-lo) no plano de uma distância  $\mathbf{d}$ , resultando em  $F''$  (ver figura 23 na página 50). O mesmo teria acontecido se tivéssemos construído o simétrico axial de  $F'$  em torno do eixo  $e_2$ .

Notemos que a figura  $F$  não sofreu alteração em sua forma, o que mudou de  $F$  para  $F''$  foi apenas sua posição. Estamos prontos agora para enunciar a primeira proposição da simetria.

**PROPOSIÇÃO 6 - (Lei Fundamental das Simetrias):** Todo ponto é simétrico, por qualquer operação de simetria, de um ponto distinto dado.

Figura 23: Operações de simetrias.



Fonte: Autor, 2014.

**Demonstração:** De fato, tomemos dois pontos distintos  $A$  e  $B$ , pela definição euclidiana de ponto e pelo **axioma euclidiano 1**, temos que,  $A$  é simétrico por translação de  $B$ ; e, pelo **axioma euclidiano 4**, tomando um terceiro ponto  $C$  no plano ou no espaço, tal que, este ponto equidiste dos dois pontos dados, temos que,  $A$  é simétrico de  $B$  por uma rotação em torno do ponto  $C$ , pois o ponto  $A$  coincide com o ponto  $B$ , após ser rotacionado de um ângulo  $\theta$  em torno do ponto  $C$ .

**PROPOSIÇÃO 7:** Se existem dois pontos distintos no plano,  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$ , então existe uma única reta que é eixo de simetria desses dois pontos.

**Demonstração:** Sejam  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  dois pontos distintos no plano, sabemos da geometria euclidiana que por dois pontos distintos passa uma única reta. Seja  $r$  a reta que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ , então essa reta é da forma da equação (7). Sabemos também da geometria euclidiana que dois pontos distintos limitam um segmento de reta. Segue que todo segmento de reta tem um único ponto médio. Considerando a equação (2), seja  $M$  o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ . Pelo lema 1, existe uma única reta  $s$  que contém o ponto  $M$  e é perpendicular à reta  $r$  que contém os pontos  $A$  e  $B$ . Como  $s \perp r$ , temos, pela equação (11),  $m_s \cdot m_r = -1$  o que nos dá

$$m_s = \frac{x_A - x_B}{y_A - y_B}.$$

Daí,

$$s : y = m_s \cdot x + n_s \Rightarrow s : y = \frac{x_A - x_B}{y_A - y_B} \cdot x + \frac{x_B^2 - x_A^2 + y_B^2 - y_A^2}{2 \cdot (y_B - y_A)}$$

é a equação da reta  $s$ , que é exatamente o eixo de simetria dos pontos  $A$  e  $B$ . Ou seja, os pontos  $A$  e  $B$  equidistam perpendicularmente da reta  $s$ , *quod erat demonstrandum*.

**PROPOSIÇÃO 8:** Dados dois pontos distintos  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  no plano cartesiano ortogonal e uma reta  $r : ax + by + c = 0$  no mesmo plano, existe um ponto  $C \in r$ , que equidista dos pontos  $A$  e  $B$ , tal que, o ponto  $B$  é simétrico rotacional do ponto  $A$  em relação a  $C$  por um ângulo de rotação  $\theta$ .

**Demonstração:** Temos três possibilidades para os pontos  $A$  e  $B$ .

Primeiro,  $A \in r$  e  $B \in r$ . Segundo,  $A \in r$  e  $B \notin r$  ou  $A \notin r$  e  $B \in r$ . Terceiro,  $A \notin r$  e  $B \notin r$ .

O primeiro caso é o mais simples, pois  $C \in r$  e além disso  $C$  é ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ . Logo, o ângulo de rotação em torno do ponto  $C$  é de  $180^\circ$ .

Demonstremos o terceiro caso, pois o segundo é mais simples e análogo.

Sejam  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$  dois pontos distintos, e considerando a equação (6) uma reta no plano, tomemos um ponto  $C \in r$ , tal que  $C = (x, -\frac{a}{b} \cdot x - \frac{c}{b})$  e  $C$  equidista do ponto  $A$  e do ponto  $B$ . Temos que:

$$d_{(A,C)} = d_{(B,C)}$$

pela equação (1), segue

$$\begin{aligned} (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 &= (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 \\ x_C(-2bx_A + 2bx_B + 2ay_A - 2ay_B) &= -2cy_A + 2cy_B - bx_A^2 + bx_B^2 - by_A^2 + by_B^2 \\ x_C &= \frac{b(x_B^2 - x_A^2 + y_B^2 - y_A^2) + 2c(y_B - y_A)}{2b(x_B - x_A) + 2a(y_A - y_B)} \end{aligned}$$

Logo,  $x_C$  é a abscissa de  $C \in r$ . Como  $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ , fazendo  $x = x_C$ , temos que:

$$y_C = -\frac{a}{b} \left( \frac{b(x_B^2 - x_A^2 + y_B^2 - y_A^2) + 2c(y_B - y_A)}{2b(x_B - x_A) + 2a(y_A - y_B)} \right) - \frac{c}{b}$$

Temos agora duas retas,  $AC$  e  $BC$ , concorrentes no ponto  $C$  de abscissa  $x_C$  e ordenada  $y_C$ . Temos assim que a equação geral da reta  $\overleftrightarrow{AC}$ , de acordo com a igualdade em (3), é dada por

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

daí,

$$x \cdot y_A + y \cdot x_C + x_A \cdot y_C - y \cdot x_A - x \cdot y_C - x_C \cdot y_A = 0$$

$$(y_A - y_C) \cdot x + (x_C - x_A) \cdot y + (x_A \cdot y_C - x_C \cdot y_A) = 0$$

Substituindo os valores de  $x_C$  e  $y_C$  encontrados acima, temos que a equação geral da reta  $\overleftrightarrow{AC}$  é

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{AC}: & \{[a(x_A + x_B) + 2by_A + 2c](x_B - x_A) + a(y_A - y_B)^2\}x + \\ & + \{[b(y_A + y_B) + 2c + 2ax_A](y_B - y_A) + b(x_A - x_B)^2\}y + \\ & + \{[(ax_A + by_A)(x_A + x_B) + 2cx_A](x_A - x_B) + [(ax_A + by_A)(y_A + y_B) + 2cy_A](y_A - y_B)\} = 0 \end{aligned}$$

Analogamente, a equação geral da reta  $\overleftrightarrow{BC}$  é

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{BC}: & \{[a(x_A + x_B) + 2by_B + 2c](x_B - x_A) - a(y_B - y_A)^2\}x + \\ & + \{b[(y_B^2 - y_A^2) - (x_B - x_A)^2] + 2c - 2ax_B(y_A - y_B)\}y + \\ & - \{(ax_B + by_B)(x_B^2 - x_A^2 + y_B^2 - y_A^2) + 2c[(x_B - x_A)x_B + (y_B - y_A)y_B]\} = 0 \end{aligned}$$

Segue que os coeficientes angulares  $m_{AC}$  e  $m_{BC}$  das retas  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{BC}$ , respectivamente, são dados por:

$$m_{\overleftrightarrow{AC}} = -\frac{[a(x_A + x_B) + 2by_A + 2c](x_B - x_A) + a(y_A - y_B)^2}{[b(y_A + y_B) + 2c + 2ax_A](y_B - y_A) + b(x_A - x_B)^2} \quad (12)$$

e

$$m_{\overleftrightarrow{BC}} = \frac{a(y_B + y_A)^2 - [a(x_A + x_B) + 2by_B + 2c](x_B - x_A)}{b[(y_B^2 - y_A^2) - (x_B - x_A)^2] + 2c - 2ax_B(y_A - y_B)} \quad (13)$$

Como o menor ângulo entre duas retas,  $r$  e  $s$ , é dado pela equação (9), temos que o menor ângulo de rotação em torno do ponto  $C$  pertencente à reta  $r$  será dado por:

$$\theta = \arctan \left| \frac{m_{\overleftrightarrow{AC}} - m_{\overleftrightarrow{BC}}}{1 + m_{\overleftrightarrow{AC}} \cdot m_{\overleftrightarrow{BC}}} \right| \quad (14)$$

sendo os valores de  $m_{\overleftrightarrow{AC}}$  e  $m_{\overleftrightarrow{BC}}$ , são dados pelas equações (12) e (13), respectivamente.

## 4. O ENSINO DA MATEMÁTICA ATRAVÉS DAS SIMETRIAS

Nesta seção, exporemos um trabalho que vem sendo realizado desde o ano de 2004, que logrou uma monografia, no ano de 2006, mas que não parou por aí e continuou sendo realizado e cada vez mais aprofundado dentro do contexto escolar do ensino de Matemática e aplicado cada vez mais com um grau de aprimoramento maior. O nosso objetivo aqui é mostrar como é possível lecionar Matemática e Geometria utilizando um recurso tão natural como a simetria o é; apresentar algumas atividades e relatar um pouco da experiência obtida no contexto escolar, principalmente na relação ensino-aprendizagem. Antes de iniciarmos os tópicos específicos, faz-se necessário comentar que é importante que os discentes que estão se submetendo à pesquisa já conheçam bem as quatro operações fundamentais da aritmética; contudo, mesmo estes não conhecendo, não se tornará impossível a realização de tais atividades, até porque em alguns momentos faremos menções a tais dificuldades.

É importante também fazer uma boa apresentação da simetria e de suas aplicações, mostrando como ela está tão presente em cada momento da vida de cada um dos discentes. Deve-se para tal fazer uma apresentação bem lúdica, mostrar imagens de animais, de obras de arte, de estruturas arquitetônicas, deixar claro cada um dos tipos de simetria e de suas aplicações.

### 4.1. Equações do Primeiro Grau

Para esta etapa do aprendizado, os discentes já devem estar convencidos de que toda igualdade é simétrica. Inicialmente, deve-se resolver uma equação do 1º grau, mostrando e explicando o que de fato acontece em cada etapa da resolução, evidenciando que a simetria deve ser mantida em cada um dos procedimentos. Para isso, mostra-se que tudo o que é retirado ou acrescentado em um dos membros da igualdade deve também ser feito no outro membro, fim de manter o equilíbrio simétrico da equação. Vejamos, no exemplo 4.1.1, uma aplicação num caso geral de uma equação do 1º grau.

Exemplo 4.1.1.

Suponhamos  $a, b, c \in R$  e  $x$  uma incógnita real e seja  $ax + b = c$  uma equação que é satisfeita para um determinado  $x \in R$ . Para determinar o valor de  $x$  geralmente se observa que a maioria dos docentes ensina da seguinte maneira:

$$ax + b = c$$

pegue o termo que não tem  $x$  e passemos para o outro lado da igualdade trocando o seu sinal, fica

$$ax = c - b$$

Agora, observemos que o número  $a$  está multiplicando  $x$ , então ele passa para o outro lado da igualdade dividindo, fica

$$x = \frac{c - b}{a}$$

e esse é o valor de  $x$  que se procura.

Contudo, esse método de resolução, apesar de mais resumido, em nada contribui para fazer o discente compreender que realmente o equilíbrio está acontecendo. O mais coerente seria que o discente mostrasse que a simetria realmente acontece em cada dos procedimentos utilizados para resolver a equação. Ou seja, a forma mais coerente e que raramente deixa dúvidas para os discente é:

$$ax + b = c$$

a fim de determinarmos  $x$  devemos observar que ao termo  $ax$  foi acrescido o valor  $b$ , então se retirarmos o valor  $b$  desse membro da igualdade, devemos retirá-lo também do outro membro, a fim de que se mantenha o equilíbrio, a simetria; assim fazemos

$$ax + b - b = c - b \implies ax = b - c.$$

Temos agora que o valor  $a$  está multiplicando o valor desconhecido  $x$ , ou seja, temos  $a$  parcelas do termo  $x$  e queremos saber quanto é uma única dessas parcelas. Para tal, devemos então dividir o termo  $ax$  por  $a$  e para que a simetria seja mantida, devemos dividir também o valor  $c - b$  por  $a$ . Assim fica,

$$\frac{ax}{a} = \frac{c - b}{a} \implies x = \frac{c - b}{a}.$$

Portanto, o valor desconhecido procurado é  $x = \frac{c-b}{a}$ .

Notemos que apesar de mais longo, esse procedimento deixa claro as entrelinhas que foram saltadas para se resumir a resolução da equação, e tira a ideia do discente de que de um modo “mágico” os números passam de um membro a outro e trocam de sinal ou de operação.

Vejamos um problema (exemplo 4.1.2) que foi resolvido por um discente do 7º ano do ensino fundamental, em que ele aplica, na sua resolução, todos os procedimentos necessários para obter o valor desconhecido.

Exemplo 4.1.2.

O dobro de um número subtraído de 6 vale 10. Que número é esse?

Solução:

$$2 \times x - 6 = 10 \implies 2 \times x - 6 + 6 = 10 + 6 \implies 2 \times x = 16$$

$$\implies \frac{2 \times x}{2} = \frac{16}{2} \implies x = 8.$$

Vejamos no exemplo a seguir uma outra atividade, bem mais rebuscada, que também foi resolvida por um dos discentes do 7º ano.

## Exemplo 4.1.3.

O triplo de um número adicionado de quatro é igual ao quántuplo desse mesmo número subtraído do dobro de quatro. Qual é esse número?

Solução:

$$3x + 4 = 5x - 2 \times 4 \implies 3x + 4 = 5x - 8$$

$$\implies 3x + 4 - 3x = 5x - 8 - 3x \implies 4 = 2x - 8 \implies 4 + 8 = 2x - 8 + 8$$

$$\implies 12 = 2x \implies \frac{12}{2} = \frac{2x}{2} \implies 6 = x.$$

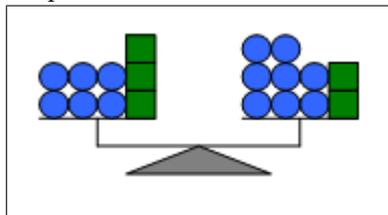
O número procurado é 6.

Observemos, na solução dada ao problema do exemplo 4.1.3, que o discente em momento algum precisou se preocupar em deixar o termo que tem  $x$  no primeiro membro da igualdade, como de costume se ensina nas escolas. Quando o docente pode observar que os discentes já estão dominando tais técnicas de resolução, ele pode aplicar uma atividade (exemplo 4.1.4) que vai dar uma ideia mais geral do método de resolução e que vai auxiliar na resolução de sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas. Nessa atividade, solicita-se que o discente a resolva de duas formas distintas: na primeira forma, de um modo geométrico, desenhando uma representação da solução do problema e, na segunda forma, que o resolva através de equações que eles podem identificar e construir, observando as suas próprias ilustrações. Foi solicitado também que os alunos escrevessem uma explicação para cada uma das duas formas de resolução.

## Exemplo 4.1.4.

Atividade em grupo: Observe a balança a seguir (figura 24), note que ela está em equilíbrio perfeitamente simétrico, ou seja, a massa de seis esferas azuis e de três cubos verdes é a mesma massa de oito esferas azuis e dois cubos verdes. Determine: (i) a massa de um cubo em relação as esferas; (ii) a massa de uma esfera em relação aos cubos.

Figura 24: Balança em equilíbrio simétrico. Esferas em azul e cubos em verde.

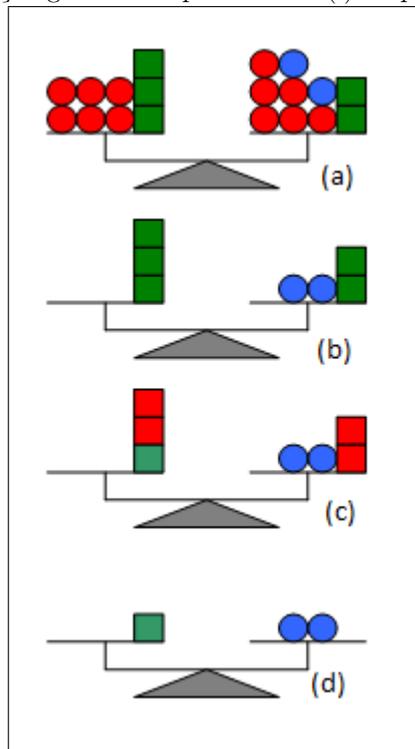


Fonte: SILVA, 2006.

Solução geométrica do item (i): Partindo da ilustração da figura (24), os discentes construíram outras figuras para demonstrar a solução de modo geométrico, utilizando-se para tal da propriedade da simetria axial. Preferiu-se reproduzir aqui (através de construções geométricas com recursos computacionais), da maneira mais leal possível, as construções

feitas por um dos grupos de uma turma do 7º ano do ensino fundamental. Observemos a figura 25.

Figura 25: Uma resolução geométrica para o item (i) do problema do exemplo 4.3.3.



Fonte: Autor, 2014.

Explicação dada pelo grupo: “Olhando a figura 24, podemos ver num lado da balança 6 bolas azuis e 3 quadrados verdes e no outro lado da balança 8 bolas azuis e 2 quadrados verdes e a gente sabe que a balança está em equilíbrio simétrico, que eles são iguais no peso. Tem menos bolas no lado esquerdo, que é 6, a gente vai tirar 6 bolas de cada um dos lados, pra balança ficar igual. Pintamos de vermelho as bolas que estão sendo tiradas [figura 25(a)] e a balança fica agora com 3 quadrados verdes em um lado e 2 bolas azuis e dois quadrados verdes do outro lado [figura 25(b)]. Agora o lado que tem menos quadrados é 2, então a gente vai tirar 2 quadrados de cada um dos lados da balança. Pintamos de vermelho os quadrados que estão sendo tirados [figura 25(c)], e a gente vê que pode ficar só com um quadrado de um lado e duas bolas do outro lado [figura 25(d)]. Então, o peso de um quadrado verde é igual ao peso de duas bolas.”

Observação: reproduziu-se aqui o texto na íntegra como o próprio grupo o escreveu, as palavras [entre colchetes] foram acrescentadas pelo autor.

Solução algébrica do item (i): “Vamos imaginar que o sinal de igual é o eixo de simetria na figura 24. [Esferas azuis  $\rightarrow$ ]  $b$  = bolinhas e [cubos verdes  $\rightarrow$ ]  $q$  = quadrinhos.

Tem 6 bolinhas e 3 quadrinhos em um lado e o peso é igual ao de 8 bolinhas e 2 quadrinhos, aí, a gente pode escrever uma continha assim

$$6b + 3q = 8b + 2q.$$

Aí, a gente tira  $6b$ , que é o que tem menos, de cada lado e vai ficar assim.

$$6b + 3q - 6b = 8b + 2q - 6b$$

que dá

$$3q = 2b + 2q.$$

Agora a gente tira  $2q$  de cada lado que vai ficar

$$3q - 2q = 2b + 2q - 2q$$

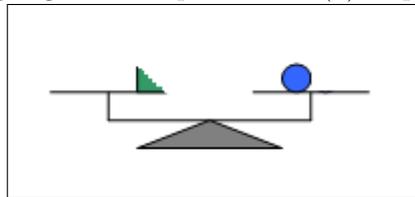
que vai ser

$$q = 2b.$$

Assim, a gente pode dizer que o peso de um quadradinho é igual ao peso de duas bolinhas.”

Solução geométrica do item (ii): “Na última figura 25(d) que a gente desenhou, dá pra ver que tem um quadrado verde de um lado e duas bolas azuis do outro. Aí se a gente apagar uma bolinha azul a gente vai ter que apagar a metade do quadrado pra que a balança (figura 26) dê o mesmo peso dos dois lados. Assim a gente fica sabendo que o peso de uma bola é igual ao peso de meio quadrado verde.”

Figura 26: Uma resolução geométrica para o item (ii) do problema do exemplo 4.3.3.



Fonte: Autor, 2014.

Solução algébrica do item (ii): “A gente viu que resolvendo ficou

$$q = 2b$$

então a gente vai ter que dividir os dois lados pelo número 2 ai vai ficar assim

$$\frac{q}{2} = \frac{2b}{2}$$

que vai ser

$$\frac{q}{2} = b.$$

A gente pode então dizer que o peso de um quadradinho verde dividido por dois é igual ao peso de uma bolinha azul.”

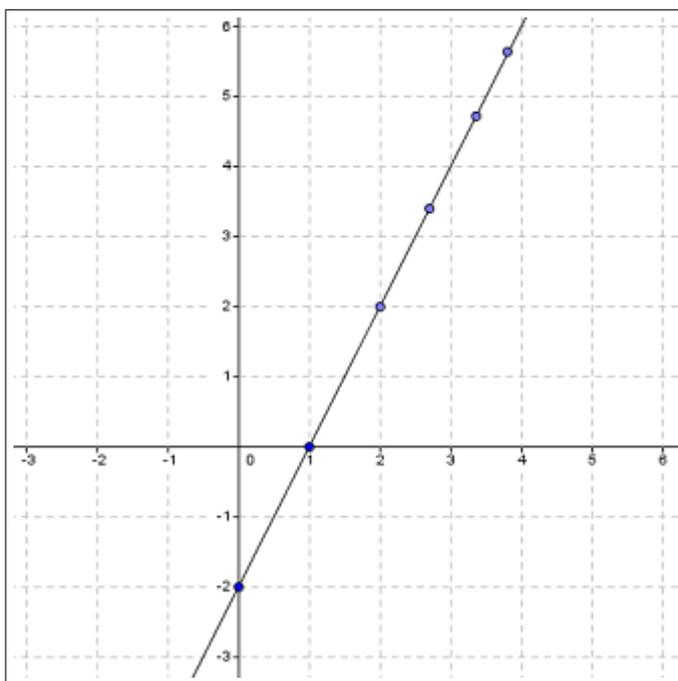
## 4.2. Sistemas de Equações do Primeiro Grau com Duas Incógnitas

Euclides deixou um axioma importante que foi muito útil nesta etapa de nossa prática pedagógica: As coisas coincidentes são iguais entre si (citado na seção 3.3.1). Segue daí que, se duas coisas são iguais, então elas coincidem entre si; conseqüentemente, são simétricas por translação. A vantagem disso é que, num sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas, que, como já vimos anteriormente, são duas retas, elas podem coincidir em todos os seus pontos e, assim, as duas retas na verdade são uma só; em um único ponto e nesse caso elas são concorrentes; ou até mesmo não coincidir e nesse caso uma delas é translação da outra porque elas serão paralelas. O fato é que, se o sistema tiver uma única solução, é porque essa solução é a mesma para as duas equações, ou seja, é simétrica. Vejamos, no exemplo 4.2.1, uma generalização dessa solução.

Pode-se iniciar mostrando que, dada uma equação  $ax + by + c = 0$ , para cada valor de  $x \in R$  escolhido, vamos ter um valor  $y \in R$  e assim ter-se-á um par ordenado  $(x, y)$ , ao qual denominaremos ponto, que pode ser localizado no plano cartesiano ortogonal. Analogamente, para cada valor escolhido de  $y \in R$ , ter-se-á um valor  $x \in R$  que também resulta num ponto e pode ser localizado no plano cartesiano ortogonal. Por fim pode-se mostrar também que a marcação dos infinitos pontos que podem ser encontrados resulta numa reta. Um ente geométrico bem conhecido dos discentes.

Tomemos, por exemplo, a equação com duas incógnitas  $2x - y - 2 = 0$ . Pode-se mostrar aos discentes que quando adotamos  $x = 0$  temos  $y = -2$ , e vice-versa;  $x = 1$  temos  $y = 0$  e vice-versa; e assim por diante. Fazendo isso, deve-se mostrar que é possível localizar esses pontos no plano cartesiano ortogonal, sem muita profundidade no assunto (ver figura 27) e pode-se mostrar que, seguindo a sequência dos números naturais (para não utilizar os reais), é possível observar que, ligando esses pontos dois a dois, temos uma reta. Com isso, para cada valor escolhido em  $x$  temos um único valor em  $y$  e vice-versa.

Figura 27: Exemplo de variação nas escolhas de valores para  $x$  e  $y$  numa equação do primeiro grau com duas incógnitas.



Fonte: Autor, 2014.

Observemos que, com isso, apresenta-se ao discente uma ótima noção de função afim, sem sequer falar em função ou tentar defini-la.

Exemplo 4.2.1.

Sejam  $a, b, c, d, e, f \in R$  e  $x$  e  $y$ , duas incógnitas. Para determinarmos os valores de  $x \in R$  e  $y \in R$  que satisfazem as equações  $ax + by + c = 0$  (i) e  $dx + ey + f = 0$  (ii), respectivamente, partiremos do axioma de Euclides e das operações de simetria para isolarmos uma das incógnitas em ambas as equações.

Solução: Sabemos que a fim de encontrarmos uma solução que satisfaz as equações (i) e (ii) ao mesmo tempo, ou seja, uma solução simétrica a ambas, equivale a resolver um sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas que contém as equações (i) e (ii). Como já vimos anteriormente, cada uma dessas equações representa uma reta. Seja  $r$  a reta dada pela equação (i) e  $s$  a reta dada pela equação (ii). Essa solução que procuramos é dada pela intersecção das retas  $r$  e  $s$ , como mostra o sistema a seguir:

$$r \cap s = \begin{cases} ax + by + c = 0 & (i) \\ dx + ey + f = 0 & (ii) \end{cases}$$

Isolando  $x$  em (i) pelo método simétrico temos:

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ ax + by + c - by - c &= 0 - by - c \\ ax &= -(by + c) \\ \frac{ax}{a} &= -\frac{by + c}{a} \\ x &= -\frac{by + c}{a} \end{aligned} \tag{15}$$

e, isolando  $x$  em (ii), também pelo método simétrico, temos:

$$\begin{aligned} dx + ey + f &= 0 \\ dx + ey + f - ey - f &= 0 - ey - f \\ dx &= -(ey + f) \\ \frac{dx}{d} &= -\frac{ey + f}{d} \\ x &= -\frac{ey + f}{d} \end{aligned} \tag{16}$$

Agora, notemos que a abcissa  $x$  é simétrica para os valores encontrados em (15) e (16), ou seja, se  $x = -\frac{by+c}{a}$  e  $x = -\frac{ey+f}{d}$ , então

$$\begin{aligned} -\frac{by + c}{a} &= -\frac{ey + f}{d} \\ \frac{by + c}{a} &= \frac{ey + f}{d}. \end{aligned} \tag{17}$$

é só manipular, também simetricamente, a igualdade em (17), a fim de obtermos o valor de  $y$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{by + c}{a} &= \frac{ey + f}{d} \\
 \frac{by + c}{a} \times ad &= \frac{ey + f}{d} \times ad \\
 d \times (by + c) &= a \times (ey + f) \\
 dby + dc &= aey + af \\
 dby + dc - dby &= aey + af - dby \\
 dc &= aey + af - dby \\
 dc - af &= aey + af - dby - af \\
 dc - af &= aey - dby \\
 dc - af &= (ae - db)y \\
 \frac{dc - af}{ae - db} &= \frac{(ae - db)y}{ae - db} \\
 y &= \frac{dc - af}{ae - db} \tag{18}
 \end{aligned}$$

Admitindo que  $ae \neq db$ , observemos agora que a incógnita  $y$  tem um valor real fixo, (equação 18), que satisfaz a ambas as equações. Temos somente que substituir o valor real  $y$  da equação (18) em qualquer uma das igualdades em (15) ou em (16) - essa é mais uma das vantagens da simetria, para encontrarmos o valor real da incógnita  $x$ . Substituindo em (15), temos:

$$\begin{aligned}
 x &= -\frac{by + c}{a} \\
 x &= -\frac{b\frac{dc-af}{ae-db} + c}{a} \\
 x &= -\frac{\frac{b(dc-af)+c(ae-db)}{ae-db}}{a} \\
 x &= -\frac{b(dc - af) + c(ae - db)}{a(ae - db)} \\
 x &= \frac{c}{a} - \frac{b(dc - af)}{a(ae - db)} \tag{19}
 \end{aligned}$$

que também é um número real  $\forall a \neq 0$  e  $ae \neq db$ . Temos assim os valores de  $x$  e  $y$  que satisfazem ambas as equações (i) e (ii).

É bem óbvio que uma demonstração como esta não deve ser feita para turmas do 7º ano que estão entrando em contato com o conteúdo, mas ela pode ser feita tranquilamente numa turma de ensino médio, em ocasiões propícias para tal. Contudo, ela mostra que a simetria é satisfatória também quando se resolvem problemas que necessitam da resolução de um sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas. Vejamos os exemplos (4.2.2, 4.2.3 e 4.2.4) seguintes, que foram aplicados em turmas do 7º e 8º

anos do ensino fundamental. É preciso deixar claro para o discente que ele precisa escolher qual incógnita ele quer isolar primeiro para que a solução seja satisfeita por meio da simetria.

Exemplo 4.2.2.

O quádruplo de um número desconhecido  $x$  adicionado do triplo de um outro número desconhecido  $y$  é igual a 18. Sabe-se que o triplo do número  $x$  subtraído do quádruplo do número  $y$  é igual a 1. Determine os valores desconhecidos.

Solução (dada por um discente do 8º ano): Temos:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 18 & (i) \\ 3x - 4y = 1 & (ii) \end{cases}$$

Isolando  $x$  em (i), fica:

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 18 \\ 4x + 3y - 3y &= 18 - 3y \\ \frac{4x}{4} &= \frac{18 - 3y}{4} \\ x &= \frac{18 - 3y}{4} \end{aligned}$$

Isolando  $x$  em (ii), fica:

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 1 \\ 3x - 4y + 4y &= 1 + 4y \\ \frac{3x}{3} &= \frac{1 + 4y}{3} \\ x &= \frac{1 + 4y}{3} \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{18 - 3y}{4} &= \frac{1 + 4y}{3} \\ \frac{18 - 3y}{4} \times 12 &= \frac{1 + 4y}{3} \times 12 \\ 3(18 - 3y) &= 4(1 + 4y) \\ 54 - 9y &= 4 + 16y \\ 54 - 9y + 9y &= 4 + 16y + 9y \\ 54 - 4 &= 4 + 25y - 4 \\ \frac{50}{25} &= \frac{25y}{25} \\ 2 &= y \end{aligned}$$

e, substituindo  $y = 2$ , vai ficar

$$x = \frac{1 + 4y}{3}$$

$$x = \frac{1 + 4 \times 2}{3}$$

$$x = \frac{1 + 8}{3} = \frac{9}{3}$$

$$x = 3$$

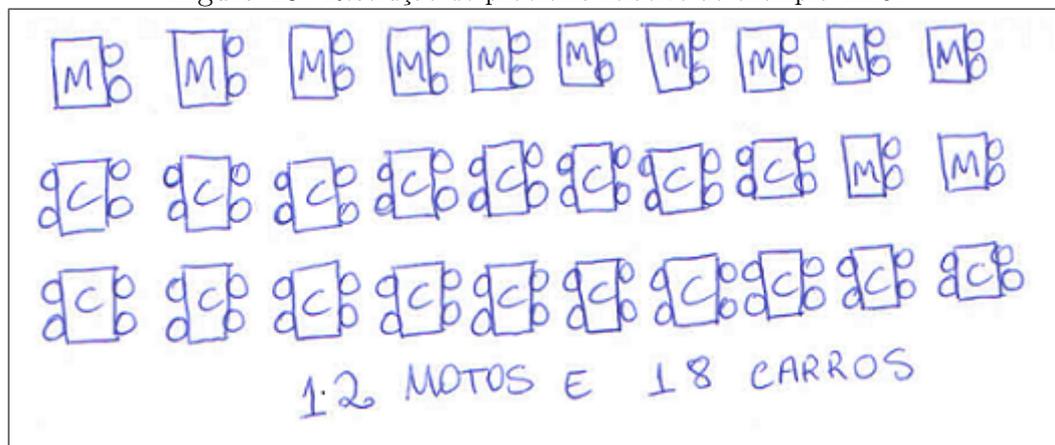
Por isso os números procurados são  $x = 3$  e  $y = 2$ .

O problema seguinte (exemplo 4.4.3) foi apresentado a turma do 8º ano do ensino fundamental sem que o docente em momento algum tivesse resolvido algum problema parecido. Quer-se destacar aqui como é muito interessante a solução dada por um dos discentes, porque ele usa um artifício lógico que nos propicia uma resolução que mantém coerente uma aplicação da simetria.

Exemplo 4.2.3.

No pátio de estacionamento de uma loja há 30 veículos entre carros e motocicletas num total de 96 pneus. Determine o número exato de carros e de motos que estão no estacionamento desta loja. (Dica: não se deve contar o pneu estepe dos carros).

Figura 28: Resolução do problema relativo ao exemplo 4.2.3.



Fonte: Autor, 2014.

Solução: ver figura 28, que apresenta uma solução correta, para o problema, dada pelo discente. Observemos os argumentos lógicos que o discente apresentou quando interrogado pelo docente: ele afirma que são 30 veículos e, portanto, desenha trinta “quadrados”; afirma também que cada um dos “quadrados” tem pelo menos dois pneus, porque toda motocicleta deve ter dois pneus, e desenha duas “bolinhas” em cada um deles. Ele observa que já existem 60 pneus e lê no enunciado do problema onde percebe que são 96 pneus, ou seja, faltam ainda 36 pneus. Então ele acrescenta mais dois pneus (duas “bolinhas”) a cada um dos “quadrados” até completar os 36 que faltam, para que represente um carro;

segundo ele, porque cada carro tem quatro rodas. Por fim, ele conta quantos “quadradi-nhos” há com apenas duas rodas e quantos “quadradinhos” há com quatro rodas e conclui que existem 18 carros e 12 motocicletas. Observação: as palavras entre “aspas”, foram assim descritas pelo discente.

Notemos que é uma resolução interessante, pois ele usou o princípio da simetria, quando admitiu que toda motocicleta tem exatamente duas rodas (simetria translacional) e todo carro tem quatro rodas (idem).

A fim de provocar uma discussão na resolução de problemas que envolvem sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas, propôs-se um problema (exemplo 4.2.4), um tanto intrigante e polêmico. Esse problema foi apresentado após mostrar-se aos alunos, num caso específico, a forma de resolução apresentada no início deste tópico. A vantagem do problema proposto é que gerou muita discussão em sala de aula e pôde-se perceber a importância de se conhecer métodos de resolução diferenciados. O problema foi tão polêmico que apresentaremos três soluções distintas dos discentes. Apresentemos o problema e em seguida as três soluções, deixando os comentários para o final. É importante destacar aqui que houve uma adaptação das respostas dos discentes, quando digitado, porém, nos apêndices há figuras com as respostas tal como elas foram construídas pelos discentes.

#### Exemplo 4.2.4.

Na chácara de seu João, Julinho, seu sobrinho, decidiu contar, de uma forma bem diferente, os animais da criação de galinhas e coelhos de seu tio. Ele decidiu primeiramente contar as cabeças dos animais, contou as das galinhas e em seguida as dos coelhos num total de 30, em seguida ele contou as patas (os pés) dos animais, primeiramente as das galinhas e em seguida as dos coelhos num total de 58. Mas agora ficou uma dúvida: quantas são as galinhas e quantos são os coelhos que existem na chácara de seu João?

Solução 1: ver figura 29, que apresenta uma possível solução para o problema (exemplo 4.2.4). Esta solução foi feita pelo mesmo discente que resolveu o problema anterior (exemplo 4.2.3). Observemos como inocentemente ele conclui uma solução para o problema afirmando que existem 29 galinhas com duas patas e uma galinha sem patas e, conseqüentemente, não há coelhos.

Figura 29: Resolução do problema relativo ao exemplo 4.2.4.



Solução 2 (feita por um discente que utilizou um sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas - ver nos apêndices, solução 2 do exemplo 4.2.4):  $G$  = galinhas e  $C$  = coelhos.  $G \times 2 = 2G$  (pés das galinhas) e  $C \times 4 = 4C$  (pés dos coelhos).  $G + C = 30$  (i), porque são trinta cabeças, e,  $2G + 4C = 58$  (ii), porque são cinquenta e oito pés. Ficamos com o sistema:

$$\begin{cases} G + C = 30 & (i) \\ 2G + 4C = 58 & (ii) \end{cases}$$

Isolando  $G$  nas duas temos:

(i)

$$\begin{aligned} G + C &= 30 \\ G + C - C &= 30 - C \\ G &= 30 - C \end{aligned}$$

e

(ii)

$$\begin{aligned} 2G + 4C &= 58 \\ 2G + 4C - 4C &= 58 - 4C \\ 2G &= 58 - 4C \\ \frac{2G}{2} &= \frac{58 - 4C}{2} \\ G &= 29 - 2C \end{aligned}$$

Segue daí, que:

$$\begin{aligned} 30 - C &= 29 - 2C \\ 30 - C + 2C &= 29 - 2C + 2C \\ 30 + C &= 29 \\ 30 + C - 30 &= 29 - 30 \\ C &= -1 \end{aligned}$$

Substituindo o valor acima em  $G = 30 - C$ , segue

$$\begin{aligned} G &= 30 - (-1) \\ G &= 30 + 1 \\ G &= 31 \end{aligned}$$

Resposta: 31 galinhas e  $-1$  coelho.

Solução 3 (feita por um discente que utiliza o método distributivo - ver nos apêndices, solução 3 do exemplo 4.2.4): O dicente afirma o seguinte:  
Uma galinha tem dois pés  $\rightarrow 58 \div 2 = 29$  galinhas. Não sobram pés.

Um coelho tem quatro pés  $\rightarrow 58 \div 4 = 14$  coelhos e sobram dois pés, que corresponde a uma galinha.

Resposta: Tem 29 galinhas e nenhum coelho ou então tem 14 coelhos e 1 galinha.

Observemos agora que as três soluções são bem distintas e os artifícios utilizados fizeram com que os alunos raciocinassem de maneiras bem distintas, porém chegando a resultados que obedecem às leis da simetria e que apesar de não resolverem o problema nos levam a possíveis resultados. Foram realizadas perguntas dirigidas aos três discentes com relação às suas respostas.

O discente da solução 1 foi questionado sobre a “galinha sem pés” que aparece em sua resposta (a turma foi irônica e o docente teve que intervir). Muito acanhado, o discente comentou que “tinha que ter trinta animais porque eram trinta cabeças” e por isso tinha que ter uma “galinha sem pés”. Um outro discente da turma comentou que “podia ter uma galinha com duas cabeças” (ao que a turma foi aos risos novamente). O docente comentou que isso poderia ser uma possibilidade, já que é possível ocorrer algum tipo de anomalia genética que “quebra” a simetria natural do animal, mas que a probabilidade de uma ocorrência dessa seria praticamente zero. Um outro discente ainda comentou que podia ter duas galinhas que só tem um pé cada uma, por isso a conta daria certo (risos da turma novamente). Questionado sobre a não existência de coelhos, ele respondeu que “não tinha como ter coelhos” porque não tinha mais pés para fazer coelhos como foi com os pneus para fazer os carros. A turma tentou criar mais situações confusas de anomalias, mas o docente os conteve e se deu por satisfeito quanto às explicações do discente, pois o objetivo aqui era tentar perceber que argumentos lógicos ele utilizou para chegar a tal resultado.

O discente da solução 2 foi questionado sobre o “coelho negativo” que aparece em sua resposta. Primeiro, ele afirma que não sabe; em seguida, diz que “acha” que tinha um coelho e depois o coelho desapareceu, por isso ficou negativo (risos da turma). Quando questionado sobre as 31 galinhas que aparecem, ele responde que “acha” que o menino contou errado as cabeças porque na conta davam 31 galinhas e depois dava  $-1$  coelho, ou seja, desaparecia um coelho, então devia ter 32 animais e não 30 como o menino contou.

O discente da solução 3 foi questionado sobre suas duas respostas. Ele comentou que só sabia que uma galinha tinha que ter dois pés e que um coelho tinha que ter quatro pés. Ao ser questionado sobre o número de animais, ele argumentou que achava que o Julinho devia ter contado errado, porque não tinham 30, só tinham 29 galinhas ou então tinha que ter 14 coelhos e 1 galinha, ou seja, ou eram 29 animais ou eram 15 animais. Questionou-se ainda o discente se era possível ter treze coelhos e três galinhas num total de dezesseis animais. Ele pensou:  $13 \times 4 = 52$  e  $3 \times 2 = 6$  que juntando dá 58; então, poder-se-ia.

Agora, a pergunta dirigida a turma foi: qual dos três respondeu corretamente? A maioria da turma afirmou que nenhum deles. Coube ao docente esclarecer que em problemas dessa natureza deve-se levar em consideração todas as informações possíveis que estão especificadas no enunciado do problema. A verdade é que nenhum deles errou, mas também não acertou. Cada um, da sua melhor maneira, apresentou uma interpretação “convincente” para o problema, mas não levou em consideração todas as informações contidas no enunciado. A solução 1 levou em conta o número de animais e de patas, mas esqueceu de observar que deve haver no mínimo o dobro de patas em relação ao número de cabeças, o que não havia, e que criou uma dificuldade a ponto de o discente fazer surgir uma galinha sem patas. O discente já poderia de imediato ter percebido que alguma coisa estava errada no enunciado do problema ou o número de cabeças ou o número de patas. A solução 2 apresenta uma resposta mais convincente, afinal foi provado por meio de cálculos que existe

um determinado número negativo de coelhos, mas poderia ter sido facilmente resolvido se o discente tivesse observado de imediato que o número de galinhas já supera o número de cabeças contadas. A resposta dada na solução 2 está parcialmente correta, pois em seus cálculos não encontramos erros, já que ele conseguiu resolver corretamente um sistema no universo do conjunto dos números inteiros que satisfaz o sistema, mas não resolve o problema. Esse problema é de contagem, o que nem sempre ocorre nos números inteiros, pois, por exemplo, como é possível contar  $-1$  coelho? Logo, o erro não está nas contas e mais uma vez na interpretação do problema, visto que esse problema deve ser resolvido restritamente no conjunto dos números naturais e não inteiros. A solução 3 é também elegante, mas quando se resolve o problema dessa forma ele leva em conta somente a segunda parte da informação (58 patas) e desconsidera a primeira e mais importante (30 cabeças); dessa forma ele poderia ter mais algumas soluções, pois dentro dos números naturais existem mais soluções possíveis para a equação (ii). A verdadeira resposta aqui seria que o problema é impossível no conjunto dos números naturais, ou seja, ele não tem solução natural que satisfaça a situação descrita no problema, que são as condições de se ter 30 cabeças (animais) e 58 patas entre galinhas e coelhos.

É sempre bom expor problemas que façam os discentes refletirem sobre suas possíveis respostas, porque esses tipos de problemas os fazem desenvolver a criticidade sobre a verdade provada matematicamente e a realidade física.

### 4.3. Inequações do Primeiro Grau

Diferente das equações, as inequações não são satisfeitas através do equilíbrio, mas sim do desequilíbrio, ou seja, não há simetria e sim uma quebra de simetria, uma assimetria. Tome-se aqui uma situação geral (exemplo 4.3.1) de uma inequação do primeiro grau, a fim de se observar como, utilizando os princípios da simetria, é possível resolver.

Exemplo 4.3.1.

Dados  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ;  $a \neq 0$ , e  $x$  uma variável real, determinar os valores de  $x \in \mathbb{R}$  que satisfaçam  $ax + b < c$ .

Solução:

$$\begin{aligned} ax + b &< c \\ ax + b - b &< c - b \\ ax &< c - b \\ \frac{ax}{a} &< \frac{c - b}{a} \\ x &< \frac{c - b}{a} \end{aligned}$$

Importante observar aqui que não há valor algum maior ou igual a  $\frac{c-b}{a}$  que satisfaz a inequação. Note que a inequação é satisfeita apenas quando  $x \in \mathbb{R}$  tem valor menor do que  $\frac{c-b}{a}$ , ou seja,

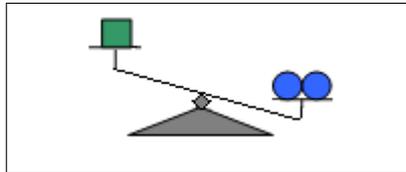
$$\forall x \in \mathbb{R}; x < \frac{c - b}{a} \iff \frac{c - b}{a} > x.$$

Deve-se fazer com que o discente compreenda que o que se quer é que não haja simetria, mas uma condição satisfatória para o desequilíbrio. Para tal, uma boa demonstração com uma balança de dois pratos (exemplo 4.3.2), é fundamental, porque fica arraigado na mente do discente a ideia da antissimetria (do desequilíbrio).

Exemplo 4.3.2.

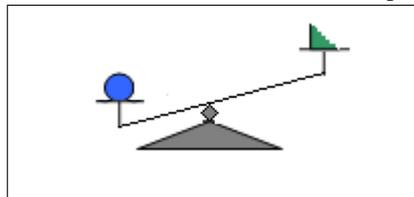
Suponha a balança do exemplo 4.1.4, em que  $q$  são os cubinhos e  $b$  são as esferas. Admita que a massa total contida no prato esquerdo é menor que a massa total contida no prato direito. Ou seja,  $6b + 3q < 8b + 2q$ . Isso implica que, na balança, o lado esquerdo está mais elevado do que o direito. Resolvendo analogamente como no método simétrico chegamos à figura 30 que mostra que  $q < 2b$ . Ainda mais, mostra que (figura 31)  $b > \frac{q}{2}$ . Em outras palavras, um cubinho tem massa menor que duas esferas e uma esfera tem massa maior que meio cubinho.

Figura 30: Um cubinho tem massa menor do que duas esferas.



Fonte: Autor, 2014.

Figura 31: Uma esfera tem massa maior do que meio cubinho.



Fonte: Autor, 2014.

Com este tipo de demonstração o discente consegue compreender, por exemplo, porque

$$-x \leq 1 \iff x \geq -1,$$

pois note-se que ao resolvermos a inequação  $-x \leq 1$ , tentando manter a simetria, tem-se:

$$\begin{aligned} -x &\leq 1 \\ -x - 1 &\leq 1 - 1 \\ -x - 1 &\leq 0 \\ -x - 1 + x &\leq 0 + x \\ -1 &\leq x \end{aligned}$$

$$x \geq -1.$$

Observemos que esta simples demonstração algébrica é muito abstrata e de difícil compreensão para discentes que não estão familiarizados com as inequações. Com uma simples demonstração geométrica (figuras 30 e 31) o discente passa a ter uma melhor compreensão do porquê as desigualdades  $\leq$ ,  $\geq$ ,  $<$  e  $>$  “mudam” quando se está resolvendo determinados tipos de inequação.

#### 4.4. Equação do Segundo Grau: Uma Curva e Um Eixo de Simetria

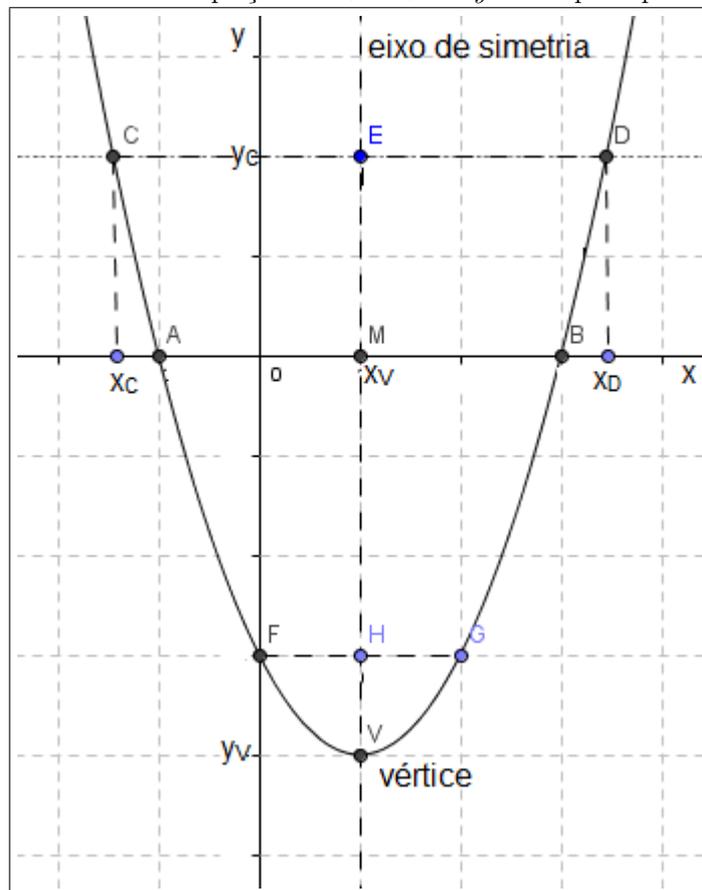
Trabalhar com equações do segundo grau não é tarefa fácil para os docentes do ensino fundamental ou médio. Geralmente se trabalha a equação do segundo grau nas turmas do 9º ano do ensino fundamental de forma totalmente algébrica, aplica-se a famosa **fórmula de Bháskara** para se determinar o(s) zero(s) da equação caso exista(m) nos reais, e só posteriormente é que se faz uma analogia geométrica no plano cartesiano ortogonal. Esse método atrasa e muito, pois quando se solicita que o discente resolva uma equação do tipo  $ax^2 + bx + c = 0$ , o discente se preocupa em encontrar única e tão somente um ou dois valores para  $x$  que satisfaz a equação, ou seja, que fazem com que a expressão  $ax^2 + bx + c$  se iguale a zero. Mas, que sentido tem isso? Por que descobrir tais valores? É muito importante destacar aqui que se espera nesse nível que o discente já esteja habituado com a simples tarefa de localizar pontos no plano cartesiano ortogonal e também com a tarefa de completar quadrados da soma e da diferença na composição do trinômio quadrado perfeito. Neste tópico, quer-se mostrar uma maneira clara e eficiente de como se pode determinar os zeros de uma função do segundo grau e o vértice de uma parábola sem recorrer as “assustadoras” (pelo menos para os discentes) equações  $x_V = -\frac{b}{2a}$  e  $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$  que determinam as coordenadas do vértice de uma parábola.

Analogamente à forma como se inicia o trabalho do ensino de resolução de sistemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas, é possível mostrar aos discentes que para cada valor de  $x \in R$  aplicado na expressão  $ax^2 + by + c$  essa expressão pode assumir um outro valor real e podemos igualar a expressão a uma outra variável  $y$ , de modo que fiquemos com a seguinte equação  $ax^2 + bx + c = y$ . Do mesmo modo, ao escolhermos um valor  $y \in R$ , podemos encontrar algum valor real ou não para a incógnita  $x$ . A vantagem de se fazer isso é que se pode mostrar que a expressão  $ax^2 + bx + c$ , dado um determinado valor  $x \in R$ , assume um valor  $y \in R$  que pode ser localizado no plano cartesiano ortogonal. Inconscientemente, iniciamos a noção de função do segundo grau, sem se falar na palavra função ou tentar defini-la. Ao localizar-se vários pontos, pode-se mostrar ao discente que tentando unir esses pontos tem-se uma curva. Assim, o discente assimila melhor a questão do(s) zero(s) rea(l)(is) e outras propriedades da parábola.

Agora, observemos o gráfico seguinte (figura 32). Através do gráfico, tem-se uma visão mais convincente de que a expressão do segundo grau  $ax^2 + bx + c$  tem um algo a mais. Notemos, inicialmente, que a expressão  $ax^2 + bx + c$  pode assumir qualquer valor real, escolhido um  $x \in R$ . Denominemos  $y$  esse valor. Daí, tem-se que  $ax^2 + bx + c = y$  ou  $y = ax^2 + bx + c$  como se encontra em praticamente todos os livros didáticos. Observando o gráfico, o discente que já está acostumado com a simetria não vê problema algum sobre em que “lado” está um determinado ponto  $(x, y)$  em relação a um dado eixo de simetria. Mostra-se que a cada um dos valores que se escolhe para  $x$  (eixo das abcissas) existe um único valor  $y$  (eixo das ordenadas). Desse modo, o discente já pode observar que, quando

queremos que a expressão  $ax^2 + bx + c$  seja igual a zero, ou seja, que  $y = 0$ , no gráfico dado, temos os seguintes valores para  $x$  que são  $x_A$  e  $x_B$ , e é simples mostrar que o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ , que vai de  $x_A$  até  $x_B$ , é o ponto  $M$  de abscissa  $x = \frac{x_A + x_B}{2}$  e ordenada zero  $M = (\frac{x_A + x_B}{2}, 0)$  e por esse ponto passa uma única reta que é perpendicular ao eixo das abscissas e essa reta é eixo de simetria dos dois pontos  $A$  e  $B$ , dados. Além disso, essa reta também intersecta a curva dada pela equação  $ax^2 + bx + c = y$  quando se toma um valor  $x = \frac{x_A + x_B}{2}$  do eixo das abscissas, tem-se um correspondente valor  $y = y_V$ , pertencente à curva, no eixo das ordenadas (ver figura 32). A esse ponto chamemos de vértice e o representemos por  $V$ , pois ele divide a curva ao meio. É importante mostrar também que, dado um ponto  $C$  pertencente à curva, existe uma abscissa  $x_C$  e uma ordenada  $y_C$  e para esse mesmo valor de  $y_C$  nas ordenadas, existe um outro valor  $x = x_D$  que satisfaz a mesma equação e pertence à curva dada, e que esse novo ponto  $D = (x_D, y_C)$  é simétrico em relação ao eixo de simetria do ponto  $C = (x_C, y_C)$ .

Figura 32: Gráfico da equação  $ax^2 + bx + c = y$  e seus principais elementos.



Fonte: Autor, 2014.

Não se deve deixar de mostrar que essa curva intersecta o eixo das ordenadas num ponto  $F$  de coordenadas  $(0, y_F)$  e que também existe um outro valor de  $x$ , que satisfaz a equação quando  $y = y_F$ , resultando num ponto  $G$  que é simétrico em relação ao eixo de simetria do ponto  $F$ . Mostrou-se que  $\overline{AM} = \overline{MB}$  ( $A$  é simétrico de  $B$ );  $\overline{CE} = \overline{ED}$  ( $C$  é simétrico de  $D$ );  $\overline{FH} = \overline{HG}$  ( $F$  é simétrico de  $G$ ) e que quando  $ax^2 + bx + c = y_V$  o único valor de  $x$  que satisfaz é  $\frac{x_A + x_B}{2}$  que pertence ao eixo de simetria da curva. Em outras palavras mostrou-se intuitivamente que a curva é simétrica em relação à reta perpendicular que passa pelos zeros da equação. A partir daí, encontrar os zeros de uma equação do segundo

grau passa a ter um sentido na percepção do discente.

A partir daí, é possível mostrar que quando fazemos  $ax^2 + bx + c = 0$ , pode-se ter  $n = \{0, 1, 2\}$  valores distintos para a incógnita  $x \in R$ . Notemos que fazendo uma demonstração desse tipo, não é necessário, em momento algum, falar em função e, para tal, o discente necessita apenas compreender que pode associar uma curva, traçada num plano cartesiano ortogonal, com uma equação. Ou seja, a curva e a equação são simétricas, um é representação do outro. Surge apenas um problema: e se a expressão  $ax^2 + bx + c$  não puder ser igualada a zero, ou seja, se não existir  $x \in R$  capaz de satisfazer a igualdade  $ax^2 + bx + c = 0$  como determinar então o eixo de simetria dessa curva e o vértice dessa parábola sem recorrer as igualdades  $x_V = -\frac{b}{2a}$  para determinar a abcissa do vértice e  $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$  para determinar a ordenada do vértice? Isso é uma questão que poderemos discutir mais adiante.

Os exemplos seguintes mostram atividades que foram dirigidas a turmas do nono ano do ensino fundamental e primeiras e terceiras séries do ensino médio. Mostram como determinar os zeros de uma função do segundo grau, se houver; determinar a reta que é eixo de simetria da curva que representa uma expressão algébrica do segundo grau (parábola); determinar o vértice da parábola e traçar a parábola. O detalhe é que sempre se pede para que o discente resolva as equações que surgem completando os quadrados, a fim de obter trinômios quadrados perfeitos (T.Q.P.). Se possível, é um ponto muito positivo não falar na fórmula de Bháskara, ou sequer apresentá-la aos discentes. Deve-se deixar para fazer essa apresentação quando a maioria dos discentes já estiver bem acostumada a completar quadrados. A técnica de completar quadrados é uma ferramenta muito importante para a Matemática, principalmente quando o discente se depara com o estudo das cônicas em geometria analítica, conteúdo essencial da terceira série do ensino médio. Vamos então aos problemas.

#### Exemplo 4.4.1.

Dada a expressão algébrica do segundo grau  $x^2 - 2x - 3$ , faça o que se pede abaixo.

- Determine o(s) valor(es) de  $x$  que anula(m) a expressão. Localize esse(s) valores no plano cartesiano ortogonal;
- Determine e trace a reta que é eixo de simetria do(s) ponto(s) localizados no item (a);
- Fazendo a substituição  $x = 0$ , que valor a expressão assume? Localize no plano;
- Determine o ponto simétrico, em relação ao eixo de simetria, do ponto localizado no item (c) e localize-o no plano.
- Que ponto representa o vértice da parábola?

Solução do item (a): Devemos ter:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \iff x^2 - 2x - 3 + 3 = 0 + 3 \iff x^2 - 2x = 3.$$

Completando quadrados temos:

$$x^2 - 2x + 1 = 3 + 1$$

a expressão no membro esquerdo da igualdade é um T.Q.P. Simplificando, temos:

$$(x - 1)^2 = 4$$

segue daí que:

(i)

$$x - 1 = -2$$

ou

(ii)

$$x - 1 = 2$$

pois ambos os quadrados serão iguais a 4.

De (i) fica

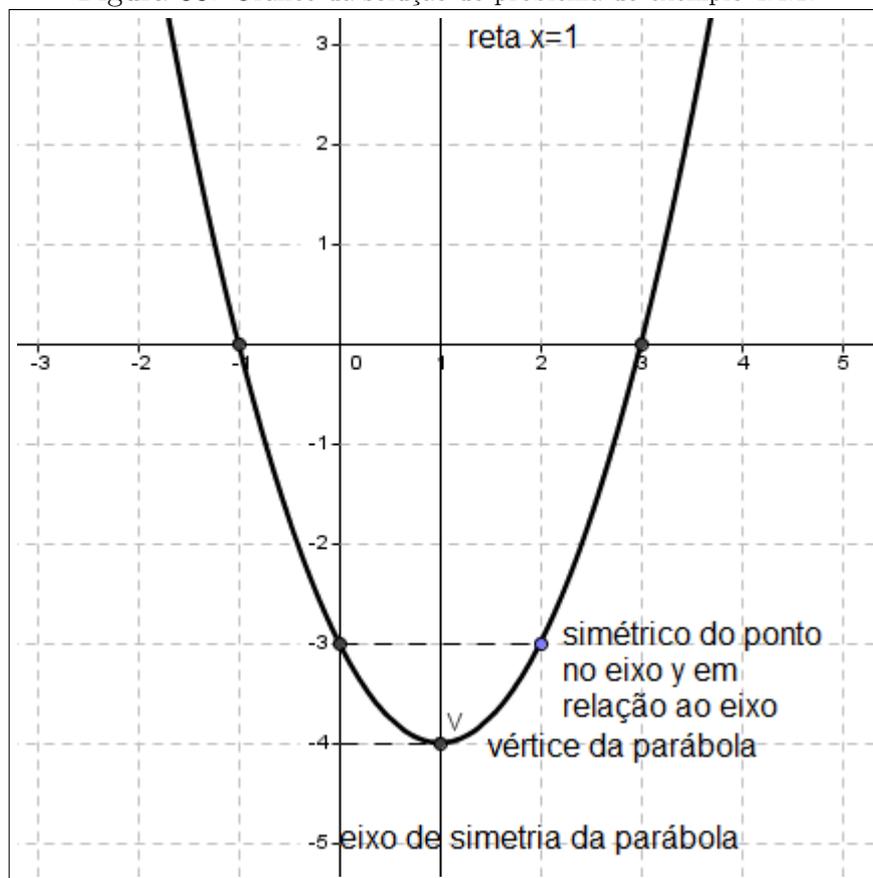
$$x = -1$$

e de (ii) fica

$$x = 3$$

Localização no plano cartesiano ortogonal (ver figura 33).

Figura 33: Gráfico da solução do problema do exemplo 4.4.1.



Fonte: Autor, 2014.

Solução do item (b): Olhando para o gráfico (figura 33), temos que

$$x = 1$$

está no meio dos dois pontos já localizados. Analogamente, pode-se dizer que o eixo de simetria passa no ponto

$$x = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$

Portanto, a reta que é eixo de simetria é

$$x = 1$$

Solução do item (c): Substituindo  $x = 1$  na expressão  $x^2 - 2x - 3$  temos:

$$0^2 - 2 \times 0 - 3 = -3$$

que vai ser localizado em cima do eixo  $y$ .

Solução do item (d): Olhando para o gráfico (figura 33), pode-se observar que o ponto simétrico do ponto localizado sobre o eixo  $y$  tem abscissa  $x = 2$ , ou seja, o ponto é  $(2, -3)$ . Analogamente, quer-se saber para qual outro valor de  $x$  se tem  $x^2 - 2x - 3 = -3$ . Daí,

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 + 3 &= -3 + 3 \\ x^2 - 2x &= 0 \end{aligned}$$

pondo  $x$  em evidência fica  $x(x - 2) = 0$ . Tem-se duas possibilidades: (i)  $x = 0$  ou (ii)  $x - 2 = 0$ . De (i) já temos do item (c) então de (ii) vem  $x = 2$ . Portanto, o ponto simétrico procurado é  $(2, -3)$ .

Solução do item (e): Substituindo  $x = 1$  em  $x^2 - 2x - 3$  encontramos  $-4$ . Daí o vértice da parábola é  $V = (1, -4)$ , (ver figura 33).

Exemplo 4.4.2.

Dada a expressão algébrica do segundo grau  $-x^2 + 4x$ . Encontre o(s) valor(es) de  $x$  que anulam a expressão, a reta que é eixo de simetria da curva e o vértice da parábola. Em seguida, localize os pontos no plano cartesiano ortogonal e trace a curva com seu eixo de simetria.

Solução: (dada por um discente de uma turma da 1ª série do ensino médio).

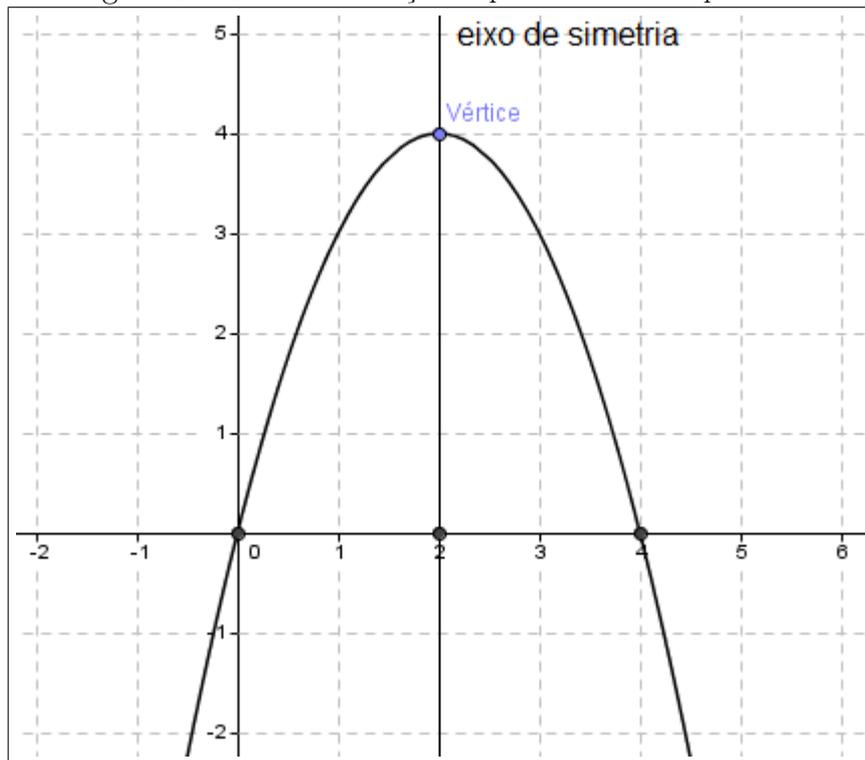
$$\begin{aligned} -x^2 + 4x = 0 &\iff -x(x - 4) = 0 \\ &\Downarrow \\ x &= 0 \\ &\text{ou} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

O ponto médio é  $x = 2$  a reta que é eixo de simetria é  $x = 2$ . Substituindo

$$-2^2 + 4 \times 2 = -4 + 8 = 4$$

o vértice é  $(2, 4)$ . Ver gráfico (figura 34).

Figura 34: Gráfico da solução do problema do exemplo 4.4.2.



Fonte: Autor, 2014.

Exemplo 4.4.3.

Dada a expressão algébrica do segundo grau  $9x^2 + 12x + 4$ . Encontre o(s) valor(es) de  $x$  que anula(m) a expressão, a reta que é eixo de simetria da curva e o vértice da parábola. Em seguida, localize os pontos no plano cartesiano ortogonal e trace a curva com seu eixo de simetria.

Solução: Notemos inicialmente que a expressão  $9x^2 + 12x + 4$  é um T.Q.P. Simplificando, temos:

$$9x^2 + 12x + 4 = (3x + 2)^2$$

o valor de  $x$  que anula a expressão é dado por

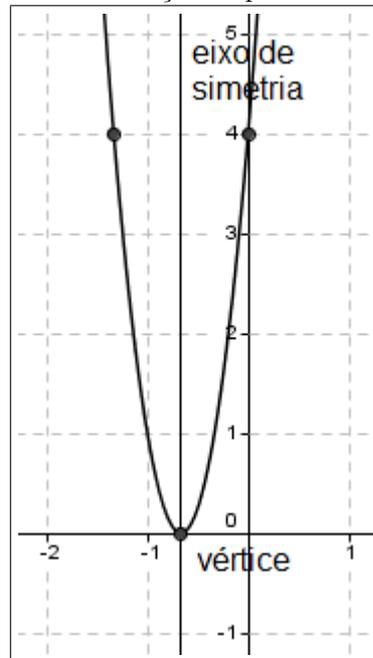
$$(3x + 2)^2 = 0 \iff 3x + 2 = 0 \iff 3x + 2 - 2 = 0 - 2 \iff 3x = -2 \iff \frac{3x}{3} = \frac{-2}{3}$$

⇕

$$x = -\frac{2}{3}$$

Logo só existe um zero real e a reta que é eixo de simetria é  $x = -\frac{2}{3}$  (ver figura 35), sendo  $(-\frac{2}{3}, 0)$  o vértice da parábola.

Figura 35: Gráfico da solução do problema do exemplo 4.4.3.



Fonte: Autor, 2014.

Para traçar essa parábola, devemos determinar um ponto à esquerda e outro à direita, preferencialmente simétricos em relação ao eixo. Para tal, fazemos a substituição  $x = 0$  o que nos dá

$$(3 \times 0 + 2)^2 = 2^2 = 4$$

e temos o ponto  $(0, 4)$ . Para localizar com precisão a outra abscissa, devemos encontrar o outro valor de  $x$  que torna a expressão  $9x^2 + 12x + 4$  igual a 4.

Assim fazemos

$$9x^2 + 12x + 4 = 4 \iff (3x + 2)^2 = 4 \iff |3x + 2| = 2$$

segue daí que:

(i)  $-3x - 2 = 2$  ou (ii)  $3x + 2 = 2$ .

De (i) temos  $x = -\frac{4}{3}$  e de (ii)  $x = 0$  que já sabemos.

Logo, o ponto simétrico é  $(-\frac{4}{3}, 4)$ .

O problema do exemplo 4.4.3 apresenta uma pequena dificuldade para traçar a curva, contudo, quando os discentes já estão habituados a fazer a substituição  $x = 0$  e localizar esse ponto no eixo das ordenadas, simplesmente eles conseguem determinar e localizar o seu simétrico em relação ao eixo, pois é só determinar para qual outro valor de  $x \neq 0$  a expressão assume o mesmo valor que  $x = 0$  (ver solução do discente nos apêndices). Os

próximos dois problemas (exemplos 4.4.4 e 4.4.5) apresentam uma dificuldade maior para os discentes pelo fato de as equações não apresentarem zeros reais. Vamos aos problemas e deixemos os comentários para depois.

Exemplo 4.4.4.

Dada a expressão algébrica do segundo grau  $x^2 - 2x + 2$ . Encontre o(s) valor(es) de  $x$  que anulam a expressão, a reta que é eixo de simetria da curva e o vértice da parábola. Em seguida, localize os pontos no plano cartesiano ortogonal e trace a curva com seu eixo de simetria.

Solução: Igualando a expressão dada a zero e completando quadrados temos:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 2 = 0 &\iff x^2 - 2x + 2 - 2 = 0 - 2 \iff x^2 - 2x = -2 \\ &\Downarrow \\ x^2 - 2x + 1 = -2 + 1 &\iff (x - 1)^2 = -1 \iff |x - 1| = \sqrt{-1} \end{aligned}$$

da igualdade acima, podemos ter:

(i)  $-x + 1 = \sqrt{-1}$  ou (ii)  $x - 1 = \sqrt{-1}$ .

De (i) temos  $x = 1 - \sqrt{-1}$  e de (ii)  $x = 1 + \sqrt{-1}$ . Não é possível localizar esses pontos na reta real, mais especificamente, no eixo das abscissas, pois ambos os números não são reais. Observemos agora que, quando  $x = 0$ , temos que a expressão vale 2, e podemos localizar o ponto  $(0, 2)$  no eixo das ordenadas do plano cartesiano ortogonal (ver figura 36), então procuremos o outro valor de  $x$  que torna a expressão dada igual a 2. Igualando e simplificando, temos:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 2 = 2 &\iff x^2 - 2x + 2 - 2 = 2 - 2 \iff x^2 - 2x = 0 \\ &\Downarrow \\ x(x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

dessa igualdade, podemos ter: (i)  $x = 0$  ou (ii)  $x - 2 = 0$ .

Agora de (ii) temos  $x = 2$ .

Localizando no plano é possível determinar a abcissa do ponto médio desses dois pontos e é por essa abcissa que passa o eixo de simetria da parábola (ver figura 36). Temos assim que  $x = 1$  é a reta que é eixo de simetria da curva representada pela expressão  $x^2 - 2x + 2$ . A abcissa do vértice é dada fazendo a substituição  $x = 1$ . Portanto, o vértice é  $(1, 1)$ .

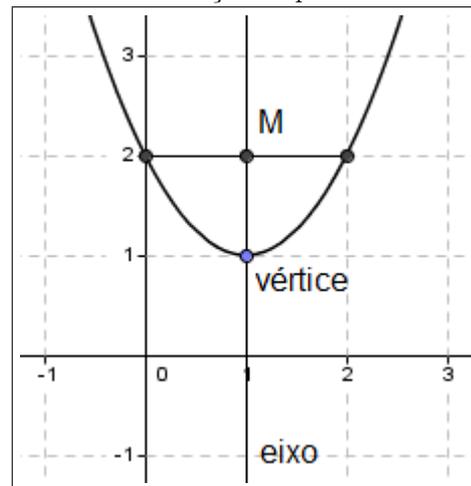
Exemplo 4.4.5.

Dada a expressão algébrica do segundo grau  $x^2 + 1$ . Encontre o(s) valor(es) de  $x$  que anula(m) a expressão, a reta que é eixo de simetria da curva e o vértice da parábola. Em seguida, localize os pontos no plano cartesiano ortogonal e trace a curva com seu eixo de simetria.

Solução:

$$x^2 + 1 = 0 \iff x^2 + 1 - 1 = 1 - 1 \iff x^2 = -1 \iff |x| = \sqrt{-1}$$

Figura 36: Gráfico da solução do problema do exemplo 4.4.4.



Fonte: Autor, 2014.

Agora, só podemos ter:

(i)  $x = -\sqrt{-1}$  ou (ii)  $x = \sqrt{-1}$

que não podem ser localizados no plano cartesiano ortogonal, pois  $\sqrt{-1}$  não é um número real.

Fazendo a substituição  $x = 0$  temos  $y = 1$  que pode ser localizado no plano cartesiano ortogonal (ver figura 37).

Para traçarmos a curva no gráfico precisamos de três pontos. Tomemos uma abscissa real  $x = 1$ , por exemplo, e façamos a substituição na expressão  $x^2 + 1$ , o que nos dá o valor 2 e podemos localizar no plano cartesiano ortogonal o ponto  $(1, 2)$ . Determinemos então o outro valor de  $x$  que torna a expressão igual a 2. Façamos:

$$x^2 + 1 = 2 \iff x^2 + 1 - 1 = 2 - 1 \iff x^2 = 1 \iff |x| = 1$$

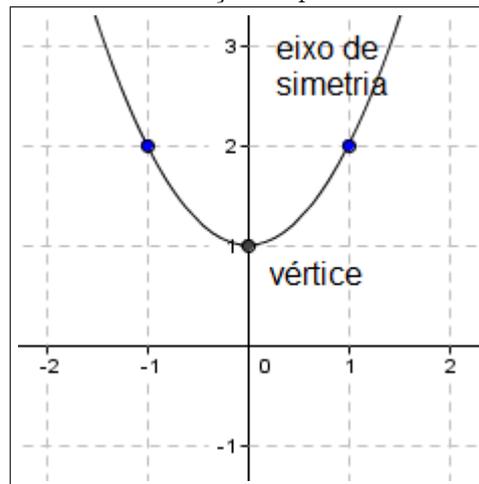
que nos fornece:

(i)  $x = -1$  ou (ii)  $x = 1$  (que já sabemos).

Localizando o ponto  $(-1, 2)$  no plano é possível observar que a abscissa do ponto médio no plano é  $x = 0$ , ou seja, a reta que é eixo de simetria é o próprio eixo das ordenadas (ver figura 37).

Inicialmente, observou-se que a grande preocupação dos discentes, quando encontrados os valores de  $x$  que anulam as equações dos exemplos 4.4.4 e 4.4.5, foi: quanto é  $\sqrt{-1}$ ? Notemos que, apesar de ter encontrado o(s) valor(es) de  $x$  que anulam a(s) express(ão)(ões), não se tem possibilidade alguma de localizar na reta real ou no plano cartesiano ortogonal. Diante dessa dificuldade, o docente estimula os alunos a verificarem o valor da expressão quando  $x = 0$  e determinar o outro valor de  $x$  que nos dá o mesmo resultado. O problema fica resolvido para o exemplo 4.4.4, pois se tem um segmento no qual é possível localizar o ponto médio (ver figura 37) e os discentes já sabem que o eixo de simetria da curva que representa a expressão passa por esse ponto médio. Assim, o discente já é capaz de traçar o eixo de simetria da curva e conseqüentemente determinar o seu vértice. Mas, fazendo a substituição  $x = 0$  não se resolve o problema do exemplo 4.4.5, pois esse valor é único. O que fazer então? O docente deve solicitar que ele tome um valor para  $x$  que seja diferente

Figura 37: Gráfico da solução do problema do exemplo 4.4.5.



Fonte: Autor, 2014.

de zero. Por exemplo,  $x = 1$  como foi adotado na resolução. Depois, o discente solicita que ele procure o outro valor de  $x$  que também satisfaz aquela igualdade. Assim, ele já pode localizar os dois pontos no plano (figura 37) e com isso determinar o ponto médio desse segmento e finalmente determinar o seu vértice que, por coincidência, acaba sendo o valor encontrado quando foi feita a substituição  $x = 0$  e traçar a curva.

Por fim, é possível mostrar que toda curva que representa uma equação do tipo  $ax^2 = k$  tem eixo de simetria coincidente com o eixo das ordenadas, ou seja, o eixo  $y$  é também o eixo de simetria da curva. Como os discentes já estão bem habituados a completar quadrados após uma “maratona” de exercícios, é possível fazer a demonstração que generaliza a equação do segundo grau  $ax^2 + bx + c = 0$  levando os discentes à tão conhecida fórmula de **Bháskara**, utilizada para determinar os zeros da equação.

### Demonstração da fórmula de Bháskara.

Dada a expressão geral do segundo grau  $ax^2 + bx + c$ ,  $\forall a \neq 0$ , igualando a expressão a zero e completando quadrados, temos:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ ax^2 + bx + c - c &= 0 - c \\ ax^2 + bx &= -c \end{aligned}$$

multiplicando ambos os membros por  $a$ , para que tenhamos  $ax^2 \rightarrow a^2x^2$  um quadrado perfeito, temos:

$$a^2x^2 + abx = -ac$$

acrescentando  $\frac{1}{4}b^2$  a ambos os membros, a fim de obter um T.Q.P. no lado esquerdo da igualdade, temos:

$$a^2x^2 + abx + \frac{1}{4}b^2 = -ac + \frac{1}{4}b^2$$

$$a^2x^2 + abx + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - ac$$

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4}$$

Segue daí que

$$\left|ax + \frac{b}{2}\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4}}$$

$$\left|ax + \frac{b}{2}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

Tem-se assim,

$$-ax - \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \quad (20)$$

e

$$ax + \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \quad (21)$$

Agora, da equação (20) tem-se:

$$-ax - \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

$$-ax - \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2} + \frac{b}{2}$$

$$-ax = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

$$-ax \times \frac{1}{-a} = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \times \frac{1}{-a}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (22)$$

e da equação (21), tem-se:

$$ax + \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

$$ax + \frac{b}{2} - \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2} - \frac{b}{2}$$

$$ax = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

$$ax \times \frac{1}{a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \times \frac{1}{a}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (23)$$

Finalmente, com as equações (22) e (23), temos a seguinte igualdade:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (24)$$

que é conhecida como a **Fórmula de Bháskara**.

## 4.5. Funções: Pontos, Retas e Curvas - Entes Queridos das Simetrias

As aplicações das simetrias nas funções já foram iniciadas quando os discentes trabalharam com resoluções de sistemas do 1º grau com duas incógnitas (função afim) e equações do segundo grau (função quadrática). Contudo, temos ainda uma infinidade de aplicações da simetria que podem ser realizadas especificamente pelos discentes do ensino médio. Iniciaremos pela simetria dos pontos no plano cartesiano ortogonal e, em seguida, analisaremos como essa simetria dos pontos se comporta com relação às funções afim e quadrática, mais especificamente, como essas funções se comportam diante da simetria dos pontos. Ainda assim resta-nos analisar como se comportam às funções logaritmo e exponencial, além das funções trigonométricas que apresentam, em suas propriedades características, aplicações da simetria.

### 4.5.1. Pontos no plano cartesiano ortogonal

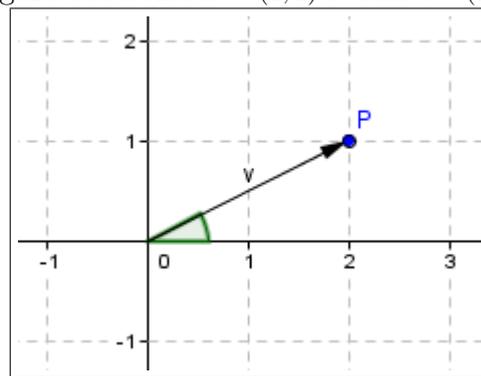
Localizar pontos no plano cartesiano ortogonal nos parece ser uma tarefa simples de executar. Mas, para os docentes, às vezes parece uma tarefa impossível fazer com que os discentes aprendam a localizar corretamente pontos no plano cartesiano. Alguns discentes, principalmente no ensino médio, fazem uma confusão muito grande com as coordenadas, talvez pela dificuldade inicial de compreender que um par ordenado  $(x, y)$  é a representação algébrica de um ponto, que nada mais é do que um ente geométrico, tão abstrato quanto a própria álgebra.

Deve-se deixar claro para o discente que um ponto é apenas um ponto (assim como uma pessoa é apenas uma pessoa) e nada se pode afirmar sobre ele se não conhecemos suas características distintas, sua localização (como um endereço para a correspondência de uma pessoa normal, que tem um nome e que mora numa determinada cidade, em uma determinada casa de uma determinada rua). Analogamente, damos ao ponto um nome (geralmente uma letra maiúscula do alfabeto latino), uma cidade (um dos quatro quadrantes), uma rua (uma abscissa  $x$ ) e uma casa (uma ordenada  $y$ ). Temos assim as características principais de um ponto:  $P = (x, y)$ .

Além disso, é possível mostrar ao discente que dois pontos ou um ponto pode representar a(s) extremidade(s) de um *vetor*. Pode-se tranquilamente introduzir a noção de vetor, pois este é um ente matemático importante. Em Física dizemos que uma grandeza vetorial tem módulo, direção e sentido. O módulo de um vetor representa o comprimento (tamanho/intensidade) do segmento orientado que representa o valor numérico da grandeza

em questão; a direção de um vetor é a mesma da reta que o contém; e, o sentido é para onde o vetor aponta. Em síntese, vetor é uma entidade matemática abstrata, caracterizada por um número (não negativo), uma direção e um sentido. Mas, neste trabalho, podemos considerar, por simplicidade, que um vetor é uma seta, seu representante natural (segmento orientado) com origem na origem do plano cartesiano ortogonal e extremidade no ponto  $P = (x, y)$  (que aponta da origem do plano para um ponto no plano). Talvez se pense que a ideia de vetor seja muito abstrata para os discentes no início do ensino médio, principalmente quando o discente faz operações com vetores quando está estudando Física. A nossa função é torná-lo compreensível. Os bons livros de Física não poupam os vetores. A aceleração  $\vec{a}$  é um vetor, a força  $\vec{F}$  é um vetor, o peso  $\vec{P}$  de um corpo é um vetor. As equações da Física estão repletas de grandezas vetoriais; e, os vetores que representam essas grandezas mostram (apontam) a direção e o sentido de um determinado movimento. Por exemplo, a aceleração  $\vec{g}$  da gravidade aponta para o centro do planeta Terra. Os vetores estão justamente no plano cartesiano ortogonal, isso não há como negar, não há como esconder. Tomemos, por exemplo, o vetor  $\vec{v} = (2, 1)$ . Esse vetor é uma seta no plano cartesiano ortogonal (ver figura 38), que sai da origem e vai até o ponto  $P = (2, 1)$ , onde 2 é o valor da abscissa  $x$  e 1 é o valor da ordenada  $y$ .

Figura 38: Ponto  $P = (2, 1)$  e vetor  $\vec{v} = (2, 1)$ .



Fonte: Autor, 2014.

Pode-se mostrar também aos discentes que o comprimento (módulo) do vetor é dado pela distância entre a origem do plano cartesiano e o ponto no qual o vetor aponta que no caso anterior é o ponto  $P = (2, 1)$ . Segue daí que o comprimento  $\|\vec{v}\|$  do vetor  $\vec{v} = (2, 1)$  é dado por:

$$\|\vec{v}\| = d_{OP}$$

que pela equação (1), é

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| &= \sqrt{(x_P - x_O)^2 + (y_P - y_O)^2} \\ \|\vec{v}\| &= \sqrt{(2 - 0)^2 + (1 - 0)^2} \\ \|\vec{v}\| &= \sqrt{2^2 + 1^2} \\ \|\vec{v}\| &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

De um modo geral, dado um vetor  $\vec{v} = (x_o, y_o)$  o seu comprimento (*sua norma*) é dado por

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x_o^2 + y_o^2} \quad (25)$$

Outro aspecto importante também é não deixar de mostrar o ângulo  $\theta$  que o vetor  $\vec{v}$  forma com o semi-eixo  $\vec{OX}$  no sentido anti-horário. Consideramos o semieixo  $\vec{OX}$  a semirreta  $x$  que parte da origem e segue no sentido positivo do eixo das abcissas. Esse exercício auxilia o discente a compreender como os arcos simétricos se comportam no ciclo trigonométrico. O docente deve compreender, ou pelo menos ter a noção de que a 1ª série do ensino médio engloba grande parte da matemática do ensino médio que se utiliza do plano cartesiano ortogonal. Nesse caso, deve-se observar em que quadrante do ciclo trigonométrico o vetor  $\vec{v}$  se encontra, pois seu ângulo em relação ao semieixo  $\vec{OX}$  depende dessa localização, como veremos mais adiante. No nosso caso, o ângulo  $\theta$  que o vetor  $\vec{v} = (2, 1)$  forma com o semieixo  $\vec{OX}$  é dado por:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\theta_{\vec{v}} &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta_{\vec{v}} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \\ \theta_{\vec{v}} &\approx 27^\circ \end{aligned}$$

De um modo geral, dado um vetor  $\vec{v} = (x_o, y_o)$  o ângulo  $\theta$  que ele forma, (respeitando o quadrante do plano cartesiano ortogonal), com o semieixo  $\vec{OX}$  é dado por

$$\theta_{\vec{v}} = \operatorname{arctg}\frac{y_o}{x_o} \quad (26)$$

A simetria pode ser muito bem explorada quando os discentes tomam conhecimento das propriedades acima. Vamos agora a um problema (exemplo 4.5.1.1) interessante que foi aplicado numa turma de 1ª série do ensino médio. Descreveremos a seguir, do modo mais fiel possível (com alguns pequenos ajustes na linguagem) os passos que um dos discentes seguiu para resolver totalmente o problema.

Exemplo 4.5.1.1.

Dado o ponto  $P = (-2, 2)$ .

(a) Determine o ponto  $A = S[P]_x$ , simétrico axial de  $P$  em relação ao eixo das abcissas  $x$ ; o ponto  $B = S[P]_y$ , simétrico axial de  $P$  em relação ao eixo das ordenadas  $y$ ; em seguida, determine o ponto  $C = S[A]_y$  e  $D = S[B]_x$ . O que é possível observar em relação aos pontos  $C$  e  $D$ ?

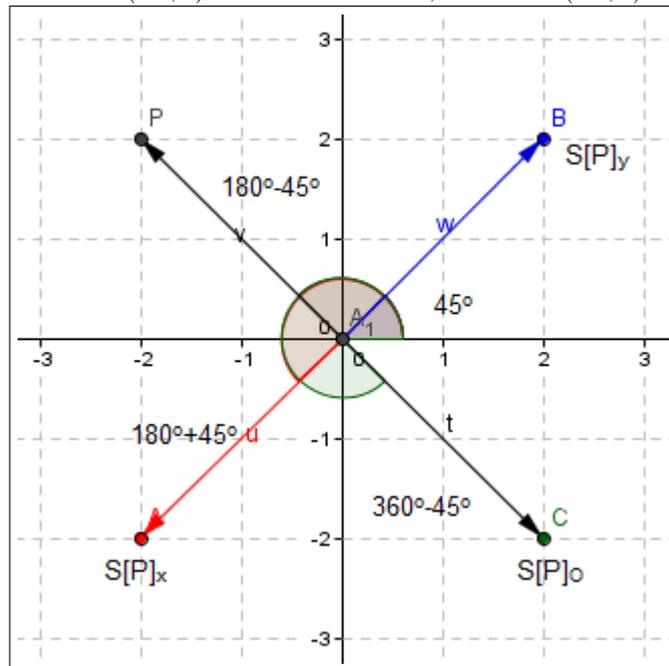
(b) Verifique se os pontos  $C = D$ ,  $O$  e  $P$  estão alinhados. Se eles estiverem alinhados podemos dizer que o ponto  $C = D$  é simétrico do ponto  $P$  por uma rotação de  $180^\circ$  em torno da origem do plano cartesiano ortogonal? Se sim, chamemos então esse ponto de simétrico rotacional de  $P$  em relação à origem (por uma rotação de  $180^\circ$ ) e o representemos por  $S[P]_O$ .

(c) Assinale no plano cartesiano os vetores que representam cada um dos pontos dos itens (a) e (b), determine seus comprimentos (suas normas) e os respectivos ângulos que formam com o semieixo positivo  $\vec{OX}$ .

Solução do item (a): Temos o ponto  $P = (-2, 2)$ . O simétrico de  $P$  em relação ao eixo  $x$  tem

sua ordenada com sinal oposto (ver figura 39), ou seja,  $A = S[P]_x = (-2, -2)$ . O simétrico de  $P$  em relação ao eixo  $y$  tem sua abcissa com sinal oposto, ou seja,  $B = S[P]_y = (2, 2)$ . Agora o ponto  $C$  simétrico de  $A$  em relação ao eixo  $y$  tem sua abcissa com sinal oposto, ou seja,  $C = S[A]_y = (2, -2)$  e o ponto  $D$  simétrico de  $B$  em relação ao eixo  $x$  tem sua ordenada com sinal oposto, ou seja,  $D = S[B]_x = (2, -2)$ . Podemos observar que  $C = S[A]_y = (2, -2) = S[B]_x = D$ , ou seja,  $C = D$ .

Figura 39: Ponto  $P = (-2, 2)$  e seus simétricos e, vetor  $\vec{v} = (-2, 2)$  e seus simétricos.



Fonte: Autor, 2014.

Solução do item (b): Se os três pontos  $C = D$ ,  $O$  e  $P$  estão alinhados, então, pela igualdade em (3), devemos ter:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Notemos que o determinante acima é realmente 0 (zero). Isso mostra que eles estão alinhados (ver figura 39). A fim de sabermos se  $C = D$  e  $P$  são simétricos em relação ao ponto  $O$ , devemos verificar se a distância de  $O$  até  $C = D$  é a mesma de  $O$  até  $P$ .

$$d_{OP} = d_{OC}$$

Aplicando a equação (1), temos

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_P - x_O)^2 + (y_P - y_O)^2} &= \sqrt{(x_C - x_O)^2 + (y_C - y_O)^2} \\ (x_P - x_O)^2 + (y_P - y_O)^2 &= (x_C - x_O)^2 + (y_C - y_O)^2 \\ (-2 - 0)^2 + (2 - 0)^2 &= (2 - 0)^2 + (-2 - 0)^2 \\ (-2)^2 + (2)^2 &= (2)^2 + (-2)^2 \end{aligned}$$

$$4 + 4 = 4 + 4$$

$$8 = 8$$

Portanto, como os pontos  $C = D$ ,  $O$  e  $P$  estão alinhados e  $d_{OP} = d_{OC}$ , podemos afirmar que o ponto  $C = D$  é simétrico do ponto  $P$  por uma rotação de  $180^\circ$  em relação à origem. Chamemos então esse ponto de simétrico de  $P$  em relação à origem  $S[P]_O$ .

Solução do item (c): Seja  $\vec{v} = \vec{OP} = (-2, 2)$  (ver figura 39),  $\vec{u} = \vec{OA} = (-2, -2)$ ,  $\vec{w} = \vec{OB} = (2, 2)$  e  $\vec{t} = \vec{OC} = (2, -2)$ . Aplicando a equação (25), temos que seus comprimentos (suas normas) são:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$\|\vec{t}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

Os ângulos que formam com o semieixo  $\vec{OX}$  devem ser calculados a partir do vetor  $\vec{w}$ , pois este se encontra no 1º quadrante (ver figura 39). Pela equação (26), temos então que

$$\theta_{\vec{w}} = \arctg\left(\frac{2}{2}\right) = \arctg(1) \Leftrightarrow \theta_{\vec{w}} = 45^\circ.$$

O vetor  $\vec{v}$  está no segundo quadrante, assim

$$\theta_{\vec{v}} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

O vetor  $\vec{u}$  está no terceiro quadrante, assim

$$\theta_{\vec{u}} = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ.$$

E o vetor  $\vec{t}$  está no quarto quadrante, então

$$\theta_{\vec{t}} = 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ.$$

É importante aqui o docente chamar a atenção dos discentes para alguns pequenos e importantes detalhes (ver figura 40). A seguir apresentaremos as simetrias vistas no exemplo 4.5.1.1 de uma forma geral. Pois, temos a seguinte **relação das simetrias dos pontos no plano cartesiano ortogonal**

Se  $P = (x_o, y_o)$ , então teremos a seguinte **relação de simetria dos pontos no plano cartesiano ortogonal**:

Dado o ponto  $P = (x_o, y_o)$ , temos:

$$S[P]_x = (-x_o, y_o)$$

$$S[P]_y = (x_o, -y_o)$$

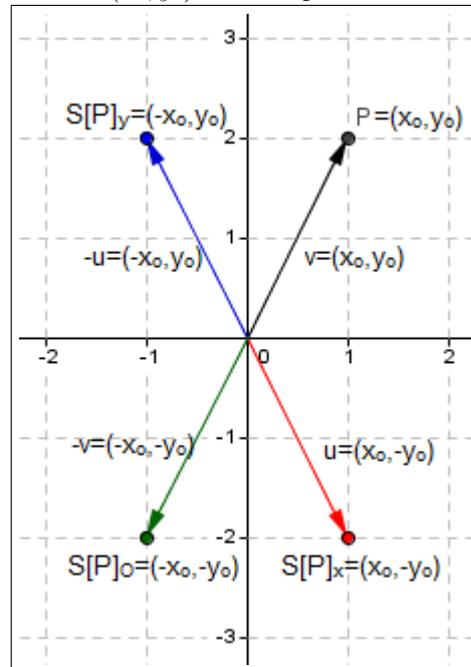
$$S[P]_O = (-x_o, -y_o) = -(x_o, y_o) = -P$$

*Quod erat demonstrandum.*

Além disso, os vetores também são opostos dois a dois; ou seja, eles tem, dois a dois, sentidos opostos.

No caso do problema do exemplo 4.5.1.1, notemos que  $\vec{t} = -\vec{v}$  e  $\vec{w} = -\vec{u}$ . O exercício do item (c) também é muito importante, pois além de mostrar aos discentes que os vetores têm o mesmo comprimento, ou seja, as distâncias se preservam na simetria, ajudam a mostrar que os ângulos que eles formam com o semi-eixo  $\vec{OX}$  são os arcos simétricos do ciclo trigonométrico que eles verão mais adiante. É muito importante que eles já carreguem consigo essa propriedade. Vejamos a seguir mais um problema (exemplo 4.5.1.2) que foi resolvido por um dos discentes da 1ª série do ensino médio.

Figura 40: Simetria do ponto  $P = (x_o, y_o)$  e seu respectivo vetor no plano cartesiano ortogonal.



Fonte: Autor, 2014.

Exemplo 4.5.1.2.

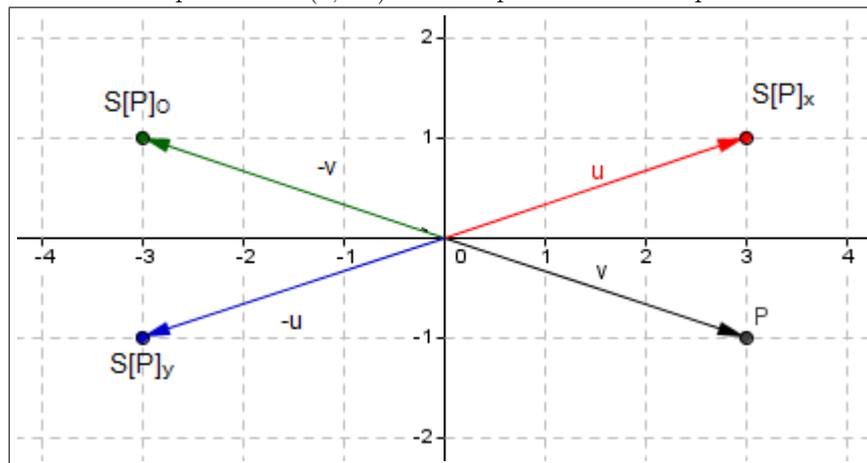
Dado o ponto  $P = (3, -1)$ , assinale no plano o seu vetor correspondente  $\vec{v}$ . Determine e assinale no plano os pontos  $S[P]_x$ ,  $S[P]_y$  e  $S[P]_O$  com seus respectivos vetores, seus comprimentos e os ângulos que eles formam com o semi-eixo  $\vec{OX}$ .

Solução: (Apresentamos aqui a solução dos discentes). Como  $P = (3, -1)$ , temos  $S[P]_x = (3, 1)$ ,  $S[P]_y = (-3, -1)$  e  $S[P]_O = (-3, 1)$ .

Sabemos que todos os vetores simétricos têm o mesmo comprimento, dessa forma, pela equação (25),

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}.$$

Figura 41: Simetria do ponto  $P = (3, -1)$  e seu respectivo vetor no plano cartesiano ortogonal.



Fonte: Autor, 2014.

Portanto,

$$\|\vec{v}\| = \|\vec{u}\| = \|\vec{-u}\| = \|\vec{-v}\| = \sqrt{10}.$$

Como o ponto  $P$  está no quarto quadrante, consideremos o ponto  $S[P]_x$  que está no primeiro quadrante e determinemos o ângulo do vetor  $\vec{u}$  com o semieixo  $\vec{OX}$ . Pela equação (26), temos

$$\theta_{\vec{u}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}.$$

Observando a tábua trigonométrica podemos verificar que o ângulo está próximo de  $18^\circ$ , ou seja,

$$\theta_{\vec{u}} \approx 18^\circ.$$

Assim,

$$\theta_{\vec{-v}} \approx 162^\circ$$

$$\theta_{\vec{-u}} \approx 198^\circ$$

$$\theta_{\vec{v}} \approx 342^\circ.$$

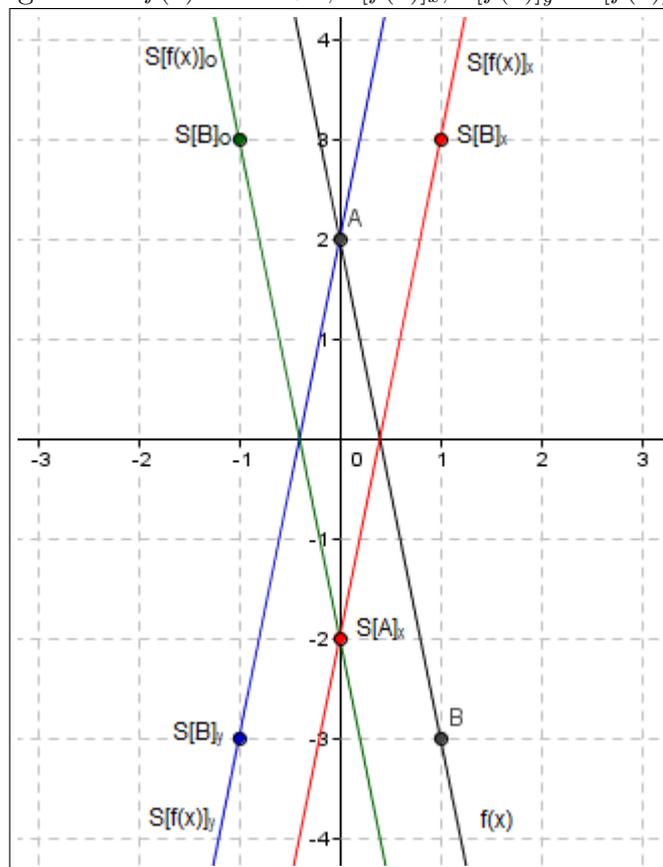
Agora estamos prontos para discutirmos as simetrias no estudo das funções. A seguir, vamos analisar como essa simetria dos pontos no plano cartesiano ortogonal atua nas funções. Mais especificamente, como as funções se comportam com essa simetria dos pontos no plano cartesiano ortogonal.

### 4.5.2. Função afim

Vamos começar analisando quais são as implicações da simetria dos pontos no plano cartesiano ortogonal. Tomemos inicialmente uma função afim particular, para facilitar a compreensão. Tomemos a função  $f(x) = -5x + 2$  e busquemos as suas funções simétricas  $S[f(x)]_x$  (simétrica de  $f(x)$  em relação ao eixo  $x$  das abcissas),  $S[f(x)]_y$  (simétrica de  $f(x)$  em relação ao eixo  $y$  das ordenadas), e,  $S[f(x)]_O$  (simétrica de  $f(x)$  em relação à origem).

Fazendo  $f(x) = y$ , podemos observar que a reta que representa  $f(x)$  passa pelos pontos  $A = (0, 2)$  e  $B = (1, -3)$ , pois quando  $x = 0$  temos  $y = 2$  e quando  $x = 1$  temos  $y = -3$  (ver figura 42).

Figura 42:  $f(x) = -5x + 2$ ,  $S[f(x)]_x$ ,  $S[f(x)]_y$  e  $S[f(x)]_O$ .



Fonte: Autor, 2014.

Determinemos  $S[f(x)]_x$ , a função simétrica axial de  $f(x)$  em relação ao eixo das abcissas  $x$ . Sabemos que essa função tem a forma da equação (7). Como  $f(x)$  passa pelos pontos  $A = (0, 2)$  e  $B = (1, -3)$ , temos que  $S[f(x)]_x$  passa pelos pontos  $S[A]_x = (0, -2)$  e  $S[B]_x = (1, 3)$ . Pela forma da equação em (7), temos que: (i)  $-2 = m \cdot 0 + n$  e (ii)  $3 = m \cdot 1 + n$ . Isso nos fornece o sistema:

$$\begin{cases} -2 = m \cdot 0 + n & (i) \\ 3 = m \cdot 1 + n & (ii) \end{cases}$$

O sistema acima nos fornece:

$$\begin{cases} n = -2 & (i) \\ 3 = m + n & (ii) \end{cases}$$

substituindo (i) em (ii), temos:

$$m = 5$$

Segue daí, que

$$S[f(x)]_x = 5x - 2.$$

Determinemos  $S[f(x)]_y$ , a função simetria axial da função  $f(x)$  com relação ao eixo das ordenadas  $y$ . Sabemos que essa função também é da forma da equação (7). Além disso, a reta que representa  $S[f(x)]_y$  passa pelos pontos  $S[A]_y = (0, 2)$  e  $S[B]_y = (-1, -3)$ . Temos, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2 = \mu \cdot 0 + \nu & (i) \\ -3 = \mu \cdot (-1) + \nu & (ii) \end{cases}$$

Resolvendo, temos

$$\nu = 2$$

e

$$-3 = -\mu + 2$$

$$-\mu = -5$$

$$\mu = 5$$

Segue, daí, que:

$$S[f(x)]_y = 5x + 2.$$

Determinemos  $S[f(x)]_O$ , simétrica por uma rotação de  $180^\circ$  em relação à origem do plano cartesiano ortogonal. Sabemos que é também da forma da equação em (7). Além disso ela passa pelos pontos  $S[A]_O = -A = -(0, 2) = (0, -2)$  e  $S[B]_O = -B = -(1, -3) = (-1, 3)$ . Temos, assim, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -2 = \chi \cdot 0 + \delta & (i) \\ 3 = \chi \cdot (-1) + \delta & (ii) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos

$$\delta = -2$$

e

$$3 = -\chi + (-2)$$

$$-\chi = 5$$

$$\chi = -5$$

Segue, daí, que

$$S[f(x)]_O = -5x - 2.$$

Vamos agora analisar os resultados obtidos. Temos:

$$f(x) = -5x + 2$$

$$S[f(x)]_x = 5x - 2 = -(-5x + 2) = -f(x)$$

$$S[f(x)]_y = 5x + 2 = -(-5x) + 2$$

$$S[f(x)]_O = -5x - 2 = -5x - (+2)$$

Esse problema, que acabamos de resolver, foi apresentado a uma das turmas da 1ª série do ensino médio, numa aula de introdução às implicações da simetria dos pontos nas funções.

Mas, ocorreu uma questão dirigida pela turma ao docente: será que dada uma função do primeiro grau  $f(x) = mx + n$  teremos sempre  $S[f(x)]_x = -f(x)$ ,  $S[f(x)]_y = -mx + n$  e  $S[f(x)]_O = mx - n$ ? A resposta dada aos discentes foi: vamos verificar juntos se isso sempre acontece?

Suponhamos que  $f(x) = mx + n$  passa pelos pontos  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$ .

Fazendo  $f(x) = y$ , ficamos com  $y = mx + n$ .

Segue daí que ficamos com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y_A = m \cdot x_A + n & (i) \\ y_B = m \cdot x_B + n & (ii) \end{cases}$$

De (i) temos:

$$n = y_A - m \cdot x_A$$

e de (ii) temos:

$$n = y_B - m \cdot x_B$$

Segue daí que:

$$y_A - m \cdot x_A = y_B - m \cdot x_B$$

$$m \cdot x_B - m \cdot x_A = y_B - y_A$$

$$m(x_B - x_A) = y_B - y_A$$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (27)$$

Substituindo o valor de (27) em (i), temos:

$$\begin{aligned}
 y_A &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x_A + n \\
 n &= y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x_A \\
 n &= \frac{y_A(x_B - x_A) - (y_B - y_A)x_A}{x_B - x_A} \\
 n &= \frac{x_B y_A - x_A y_A - x_A y_B + x_A y_A}{x_B - x_A} \\
 n &= \frac{x_B y_A - x_A y_B}{x_B - x_A}
 \end{aligned} \tag{28}$$

Portanto, decorrente das equações (27) e (28), temos:

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}x + \frac{x_B y_A - x_A y_B}{x_B - x_A} \Rightarrow f(x) = mx + n \tag{29}$$

Vamos agora à simétrica de  $f(x)$  em relação ao eixo das abscissas  $x$ . Como ela tem a forma da equação em (7), façamos  $S[f(x)]_x = Mx + N$ .

Sabemos que a reta que a representa, pela simetria dos pontos no plano cartesiano ortogonal, passa pelos pontos  $S[A]_x = (x_A, -y_A)$  e  $S[B]_x = (x_B, -y_B)$ .

Fazendo  $S[f(x)]_x = y$ , temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -y_A = M \cdot x_A + N & (i) \\ -y_B = M \cdot x_B + N & (ii) \end{cases}$$

De (i) temos:

$$N = -y_A - Mx_A$$

e, de (ii) temos:

$$N = -y_B - Mx_B$$

Segue daí que:

$$\begin{aligned}
 -y_A - Mx_A &= -y_B - Mx_B \\
 M(x_B - x_A) &= y_A - y_B \\
 M &= \frac{y_A - y_B}{x_B - x_A} \\
 M &= \frac{y_B - y_A}{-(x_B - x_A)} \\
 M &= -\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}
 \end{aligned} \tag{30}$$

Substituindo (30) em (i), temos:

$$\begin{aligned}
 -y_A &= -\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x_A + N \\
 N &= -y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x_A \\
 N &= \frac{-y_A(x_B - x_A) + (y_B - y_A)x_A}{x_B - x_A} \\
 N &= \frac{-x_B y_A + x_A y_A + x_A y_B - x_A y_A}{x_B - x_A} \\
 N &= \frac{-x_B y_A + x_A y_B}{x_B - x_A} \\
 N &= \frac{-(x_B y_A - x_A y_B)}{x_B - x_A} \\
 N &= -\frac{x_B y_A - x_A y_B}{x_B - x_A} \tag{31}
 \end{aligned}$$

Dos resultados (30) e (31), temos:

$$y = -\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x - \frac{x_B y_A - x_A y_A}{x_B - x_A}$$

comparando com a equação em (29),

$$S[f(x)]_x = -mx - n = -(mx + n) = -f(x) \tag{32}$$

Vamos agora à simétrica de  $f(x)$  em relação ao eixo das ordenadas  $y$ . Como ela é da forma da equação em (7), temos  $S[f(x)]_y = \mu x + \nu$ .

Sabemos que a reta que representa graficamente a função, pela simetria dos pontos no plano cartesiano ortogonal, passa pelos pontos  $S[A]_y = (-x_A, y_A)$  e  $S[B]_y = (-x_B, y_B)$ .

Fazendo  $S[f(x)]_y = y$ , temos, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y_A = \mu(-x_A) + \nu & (i) \\ y_B = \mu(-x_B) + \nu \end{cases}$$

De (i), temos:

$$\nu = \mu x_A + y_A$$

e, de (ii), temos:

$$\nu = \mu x_B + y_B$$

Segue daí que:

$$\mu(x_A - x_B) = y_B - y_A$$

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{y_B - y_A}{x_A - x_B} \\ \mu &= -\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\end{aligned}\tag{33}$$

Substituindo o resultado (33) em (i) temos:

$$\begin{aligned}y_A &= -\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (-x_A) + \nu \\ \nu &= y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x_A \\ \nu &= \frac{y_A(x_B - x_A) - (y_B - y_A)x_A}{x_B - x_A} \\ \nu &= \frac{y_A x_B - y_A x_A - y_B x_A + y_A x_A}{x_B - x_A} \\ \nu &= \frac{x_B y_A - x_A y_B}{x_B - x_A}\end{aligned}\tag{34}$$

Dos resultados em (33) e (34), temos:

$$y = -\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x + \frac{x_B y_A - x_A y_B}{x_B - x_A}$$

Comparando com a equação em (29), temos:

$$S[f(x)]_y = -mx + n\tag{35}$$

Analogamente, a simétrica de  $f(x)$  em relação à origem,  $S[f(x)]_O = \pi x + \vartheta$ , passa, pela simetria dos pontos no plano cartesiano ortogonal, pelos pontos  $S[A]_O = (-x_A, -y_A)$  e  $S[B]_O = (-x_B, -y_B)$ .

Fazendo  $S[f(x)]_O = y$ , temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -y_A = \pi(-x_A) + \vartheta & (i) \\ -y_B = \pi(-x_B) + \vartheta & (ii) \end{cases}$$

De (i), temos:

$$\vartheta = \pi x_A - y_A$$

e, de (ii), temos:

$$\vartheta = \pi x_B - y_B$$

Segue daí que:

$$\begin{aligned}\pi x_A - y_A &= \pi x_B - y_B \\ \pi &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\end{aligned}\tag{36}$$

Substituindo (36) em (i), temos:

$$\begin{aligned}
 -y_A &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (-x_A) + \vartheta \\
 \vartheta &= -y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x_A \\
 \vartheta &= \frac{-y_A(x_B - x_A) + (y_B - y_A)x_A}{x_B - x_A} \\
 \vartheta &= \frac{-x_B y_A + x_A y_A + x_A y_B - x_A y_A}{x_B - x_A} \\
 \vartheta &= \frac{-(x_B y_A - x_A y_B)}{x_B - x_A} \\
 \vartheta &= -\frac{x_B y_A - x_A y_B}{x_B - x_A}
 \end{aligned} \tag{37}$$

Dos resultados em (36) e (37), temos:

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x - \frac{x_B y_A - x_A y_B}{x_B - x_A}$$

Comparando com a equação em (29), temos:

$$S[f(x)]_O = mx - n \tag{38}$$

Finalmente, observando as equações em (29), (32), (35) e (38), temos as seguintes **relações de simetrias da função afim**:

Se  $f(x) = mx + n$ , uma função afim, então:

$$\begin{aligned}
 S[f(x)]_x &= -f(x) \\
 S[f(x)]_y &= -mx + n \\
 S[f(x)]_O &= mx - n
 \end{aligned}$$

*Quod erat demonstrandum.*

Agora, vamos ao seguinte problema (exemplo 4.5.2.1), apresentado à turma, e que foi resolvido pelos discentes. Vejamos duas soluções feitas por dois discentes: uma mais breve, baseada nas demonstrações; outra menos breve, mas que também se baseia nas demonstrações. Deixemos os comentários sobre as resoluções para mais adiante.

Exemplo 4.5.2.1.

Dada a equação segmentária da reta  $r : \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ . Determine os pontos de intersecção da reta  $r$  com os eixos  $x$  e  $y$  e em seguida determine as equações das funções  $S[f(x)]_x$ ,  $S[f(x)]_y$  e  $S[f(x)]_O$ .

Solução 1: Inicialmente notemos que, fazendo  $x = 0$ , temos:

$$\begin{aligned} -\frac{y}{3} &= 1 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

e, fazendo  $y = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &= 1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Daí, temos os pontos  $A = (0, -3)$  e  $B = (2, 0)$ , ver figura 43. Agora, notemos que:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} &= 1 \\ 3 \cdot \frac{x}{2} - 3 \cdot \frac{y}{3} &= 3 \cdot 1 \\ \frac{3}{2} \cdot x - y &= 3 \\ y &= \frac{3}{2}x - 3 \end{aligned}$$

Fazendo  $y = f(x)$ , e utilizando as relações de simetrias das funções afins, temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{2}x - 3 \\ S[f(x)]_x &= -f(x) = -\frac{3}{2}x + 3 \\ S[f(x)]_y &= -\frac{3}{2}x - 3 \\ S[f(x)]_O &= \frac{3}{2}x + 3 \end{aligned}$$

Solução 2: Observemos que quando

$$x = 0 \implies y = -3 \implies A = (0, -3)$$

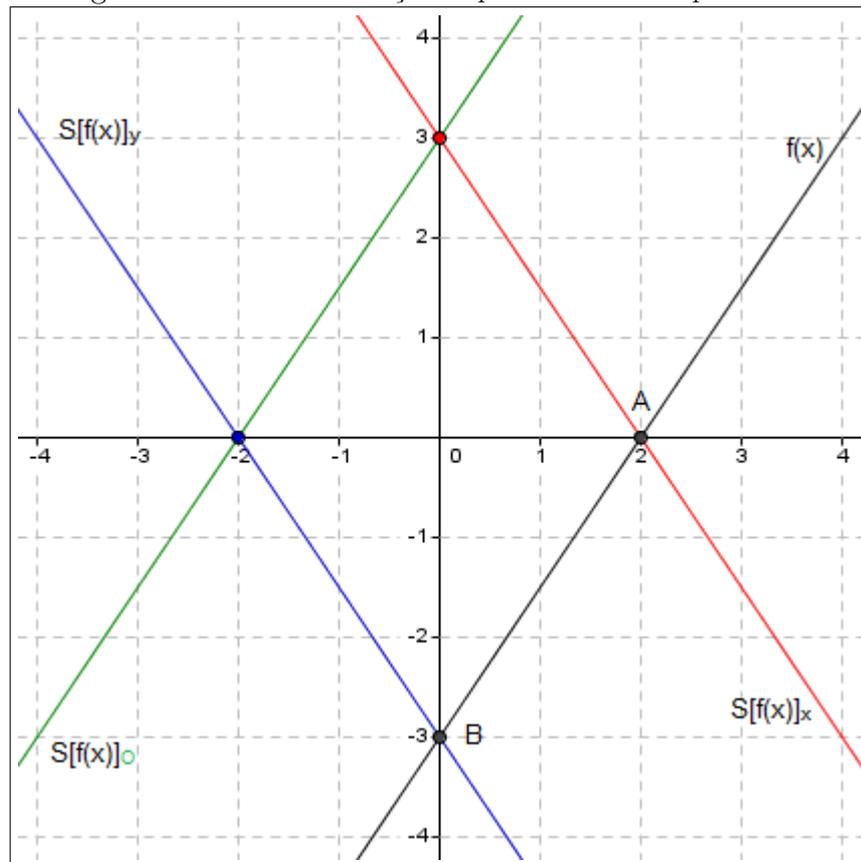
e quando

$$y = 0 \implies x = 2 \implies B = (2, 0)$$

Então, a reta  $S[f(x)]_x = mx + n$  passa pelos pontos  $S[A]_x = (0, 3)$  e  $S[B]_x = (2, 0)$ . Como  $S[f(x)]_x = y$ , pela equação (7), temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3 = m \cdot 0 + n & (i) \\ 0 = m \cdot 2 + n & (ii) \end{cases}$$

Figura 43: Gráfico da solução do problema do exemplo 4.5.2.1.



Fonte: Autor, 2014.

$$\begin{cases} n = 3 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Assim,

$$S[f(x)]_x = -\frac{3}{2}x + 3$$

Pelo que foi mostrado nas relações de simetria das funções afins, temos:

$$f(x) = \frac{3}{2}x - 3$$

$$S[f(x)]_y = -\frac{3}{2}x - 3$$

$$S[f(x)]_O = \frac{3}{2}x + 3$$

Com relação à solução 1, para o problema do exemplo 4.5.2.1, é possível observar que o discente levou em consideração a generalização demonstrada em sala de aula pelo

docente e, dessa forma, somente determinou os pontos  $A$  e  $B$  e desenvolveu a equação segmentária da reta até obter a equação reduzida da reta. No caso da solução 2, o discente determinou os pontos  $A$  e  $B$  e determinou a equação reduzida da reta simétrica em relação ao eixo das abscissas, pois ele já sabia da generalização,  $S[f(x)]_x = -f(x)$  o que o levou a determinar  $f(x)$  e em seguida as demais simétricas. Houve muito mais soluções corretas na turma, contudo a maioria delas segue um caminho de resolução muito próximo do que foi realizado pelo professor na turma antes da generalização. É bom lembrar aqui que as soluções apresentadas anteriormente foram feitas por alunos e transcritas (digitadas) muito próximas da escrita original dos discentes, com apenas uns pequenos ajustes feitos pelo autor.

Exemplo 4.5.2.2.

Dados os pontos simétricos por rotação  $A = (3, 3)$  e  $B = (2, 4)$  e um ponto  $R = (x, 0) \in \vec{OX}$  que é ponto de rotação de  $A$  para  $B$ . Determine:

- as coordenadas do ponto  $R$ ;
- as retas suportes dessa rotação;
- o menor ângulo  $\theta$  e o maior ângulo  $\Theta$  de rotação em torno de  $R$  que torna  $B$  simétrico rotacional de  $A$ .

Solução do item (a): Como o ponto  $R = (x, 0)$  é ponto fixo de rotação de  $A$  e  $B$ , então temos que as distâncias dos pontos  $A$  e  $B$  até o ponto  $R$  são as mesmas, ou seja,  $d_{AR} = d_{BR}$ . Pela equação (1), temos:

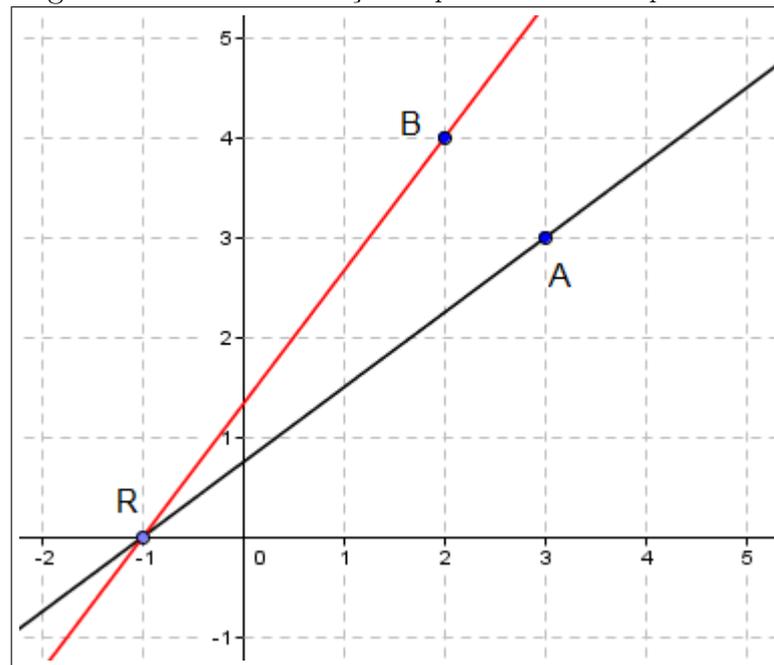
$$\begin{aligned}\sqrt{(x_R - x_A)^2 + (y_R - y_A)^2} &= \sqrt{(x_R - x_B)^2 + (y_R - y_B)^2} \\ (x_R - x_A)^2 + (y_R - y_A)^2 &= (x_R - x_B)^2 + (y_R - y_B)^2 \\ (x - 3)^2 + (0 - 3)^2 &= (x - 2)^2 + (0 - 4)^2 \\ x^2 - 6x + 9 + 9 &= x^2 - 4x + 4 + 16 \\ -6x + 18 &= -4x + 20 \\ -2x &= 2 \\ x &= -1\end{aligned}$$

Logo,  $R = (-1, 0)$  é o ponto fixo de rotação dos pontos simétricos  $A$  e  $B$ .

Solução do item (b): A reta que passa pelos pontos  $A$  e  $R$  (ver figura 44) é a reta  $r$ , da forma da equação (6), que é dada, de acordo com a igualdade em (3), por: :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= 0 \\ 3x - y - 3y + 3 &= 0 \\ 3x - 4y + 3 &= 0 \\ y &= \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \\ r : y &= \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Figura 44: Gráfico da solução do problema do exemplo 4.5.2.2.



Fonte: Autor, 2014.

Analogamente, a reta que passa pelos pontos  $B$  e  $R$  é a reta  $s$  dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$4x - y - 2y + 4 = 0$$

$$4x - 3y + 4 = 0$$

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$s : y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$$

Solução do item (c): Os coeficientes angulares das retas  $r$  e  $s$  são, respectivamente,  $m_r = \frac{3}{4}$  e  $m_s = \frac{4}{3}$ . Daí o menor ângulo de rotação  $\theta$ , de acordo com a equação (9), é dado por:

$$\theta = \arctg \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \right|$$

$$\theta = \arctg \left| \frac{\frac{3}{4} - \frac{4}{3}}{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}} \right|$$

$$\theta = \arctg \left| \frac{-\frac{7}{12}}{2} \right|$$

$$\theta = \arctg \left| -\frac{7}{24} \right|$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{7}{24}.$$

Com o auxílio de uma tábua trigonométrica, temos:

$$\theta \approx 16^\circ,$$

no sentido anti-horário, é o menor ângulo de rotação de  $A$  para  $B$ . O maior ângulo de rotação é o que falta de  $16^\circ$  para  $360^\circ$ , temos então que o maior ângulo é

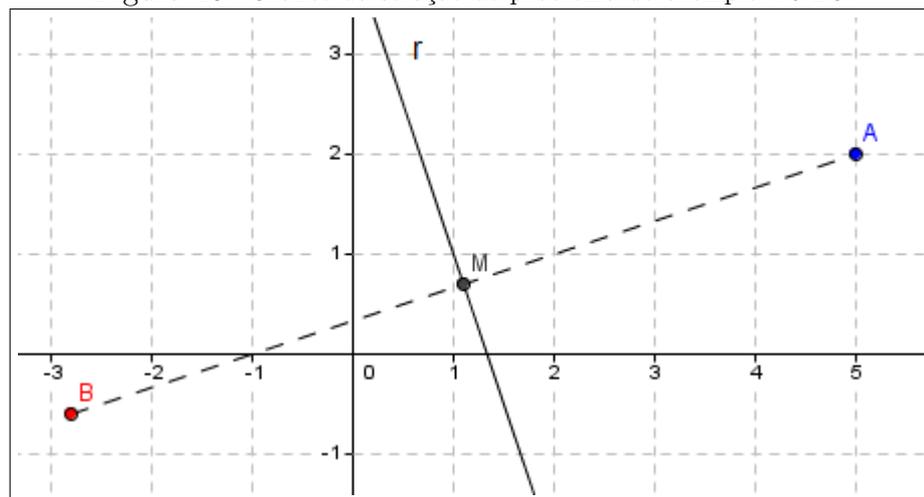
$$\Theta \approx 344^\circ$$

no sentido horário (ver figura 44).

Exemplo 4.5.2.3.

Dado o ponto  $A = (5, 2)$  e a reta  $r : 3x + y - 4 = 0$ , determine o ponto  $B$  que é simétrico axial do ponto  $A$  em relação à reta  $r$ .

Figura 45: Gráfico da solução do problema do exemplo 4.5.2.3.



Fonte: Autor, 2014.

Solução: Como  $r$  é eixo de simetria entre os pontos  $A$  e  $B$ , então existe uma reta  $s$  que é perpendicular a reta  $r$  e passa pelos pontos  $A$  e  $B$ .

Da reta  $r$ , temos que seu coeficiente angular é  $m_r = -3$ , como  $r \perp s$ , pela equação (11), temos:

$$m_s = \frac{1}{3}.$$

Segue que  $s$  é da forma:

$$y = \frac{1}{3}x + b$$

com  $A \in s$ .

Substituindo, temos:

$$2 = \frac{1}{3} \cdot 5 + b \implies b = \frac{1}{3}$$

Portanto,

$$s : y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}.$$

A fim de determinarmos o ponto  $B$  devemos encontrar o ponto  $M$  que é interseção entre as retas  $r$  e  $s$ , pois, temos que  $M$  é ponto médio do segmento  $\overline{AB}$  (ver figura 45).

Como

$$r : y = -3x + 4$$

e

$$s : y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

temos, que:

$$-3x + 4 = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \implies x = \frac{11}{10}$$

e, daí,

$$y = \frac{7}{10}.$$

Portanto,

$$M = \left( \frac{11}{10}, \frac{7}{10} \right).$$

Agora, sabemos da equação (2), que

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \iff x_B = -\frac{14}{5}$$

e

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \iff y_B = -\frac{3}{5}$$

Portanto, o ponto simétrico axial de  $A$  em relação a reta  $r$  é

$$B = \left( -\frac{14}{5}, -\frac{3}{5} \right).$$

Exemplo 4.5.2.4.

Dado o ponto  $A = (-3, 2)$  e a reta  $r : x - y = 0$  tal que  $R = (1, 1) \in r$ . Determine:

- (a) o ponto  $B$  simétrico de  $A$  por uma rotação de  $180^\circ$  em torno do ponto  $R$ ;  
 (b) o menor ângulo  $\theta$  e o maior ângulo  $\Theta$  entre a reta  $s$  que contém os pontos  $A$  e  $B$  e a reta  $r$ .

Solução do item (a): Como a rotação de  $A$  em torno de  $R$  é de  $180^\circ$ , temos que os pontos  $A$  e  $B$  definem uma reta. Seja  $s$  essa reta. Segue que  $R$  é ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ . Daí, pela equação (2):

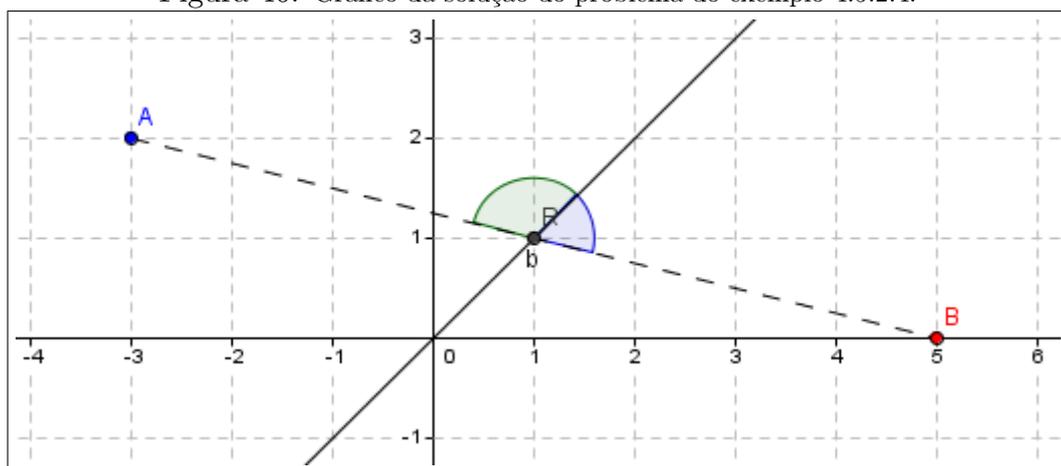
$$x_R = \frac{x_A + x_B}{2} \iff 1 = \frac{-3 + x_B}{2} \iff x_B = 5$$

e

$$y_R = \frac{y_A + y_B}{2} \iff 1 = \frac{2 + y_B}{2} \iff y_B = 0$$

Portanto,  $B = (5, 0)$  (ver figura 46).

Figura 46: Gráfico da solução do problema do exemplo 4.5.2.4.



Fonte: Autor, 2014.

Solução do item (b): Inicialmente, determinemos a equação da reta  $s$ , que é dada pela igualdade em (3). Daí,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$2x + 5y + 3y - 10 = 0$$

$$x + 4y - 5 = 0$$

$$s : y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

Assim, temos:

$$m_r = 1$$

e

$$m_s = -\frac{1}{4}$$

e o menor ângulo  $\theta$  entre as duas retas, pela equação (9), é dado por:

$$\theta = \arctan \left| \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)}{1 + 1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} \right|$$

$$\theta = \arctan \left| \frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{4}} \right|$$

$$\theta = \arctan \frac{5}{3}$$

$$\theta \approx 59^\circ.$$

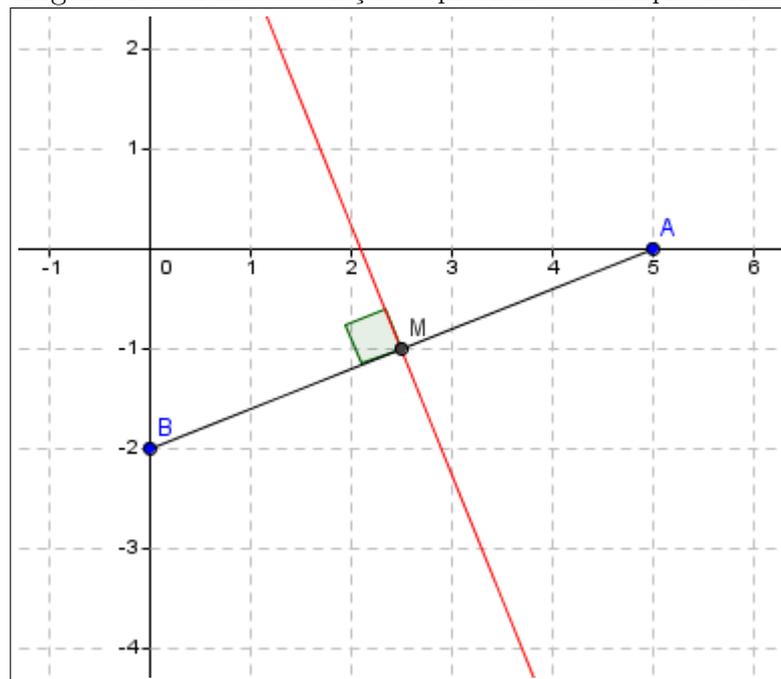
Como o maior ângulo entre elas é o que falta do ângulo  $\theta$  para completar  $360^\circ$ , temos que o maior ângulo entre as retas  $r$  e  $s$  é:

$$\Theta \approx 301^\circ.$$

Exemplo 4.5.2.5.

Dados os pontos  $A = (5, 0)$  e  $B = (0, -2)$ . Determine a equação do eixo de simetria entre os pontos  $A$  e  $B$ .

Figura 47: Gráfico da solução do problema do exemplo 4.5.2.5.



Fonte: Autor, 2014.

Solução: O eixo de simetria passa pelo ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ . Seja  $M$  esse ponto (ver figura 47). Pela equação (2), temos:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5 + 0}{2} = \frac{5}{2}$$

e

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + (-2)}{2} = -1.$$

Agora notemos que a equação da reta que passa pelos pontos  $A$  e  $B$  é da forma  $y = \frac{2}{5}x - 2$  e portanto o coeficiente angular do eixo de simetria (que é uma reta perpendicular), dado pela equação (11), é  $m = -\frac{5}{2}$ . Segue assim que:

$$y = mx + n \iff -1 = -\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} + b \iff b = \frac{21}{4}.$$

Logo, a equação da reta que é eixo de simetria dos pontos  $A$  e  $B$  é

$$4y + 10x - 21 = 0.$$

Devemos agora buscar, um aprofundamento maior para as propriedades simétricas da função afim no plano cartesiano, introduzindo a simetria com relação a uma reta dada. Para tanto, faz-se necessário tomarmos uma nova notação dada por  $S[f(x)]_r$  (função simétrica axial da função  $f(x)$  com relação à reta  $r$ ).

Tomemos a reta  $r : x - y = 0$  (que é bissetriz dos quadrantes ímpares do plano cartesiano ortogonal). Vejamos a aplicação do seguinte problema (exemplo 4.5.2.6), numa turma da 1ª série do ensino médio, que apresenta a simetria de uma função  $f(x)$  com relação à reta  $r$ .

Exemplo 4.5.2.6.

Dada a função  $f(x) = 4x + 4$  e a reta  $r : x - y = 0$  (bissetriz dos quadrantes ímpares), determine a função  $S[f(x)]_r$  (simétrica de  $f(x)$  com relação à reta  $r$ ) e construa seus gráficos.

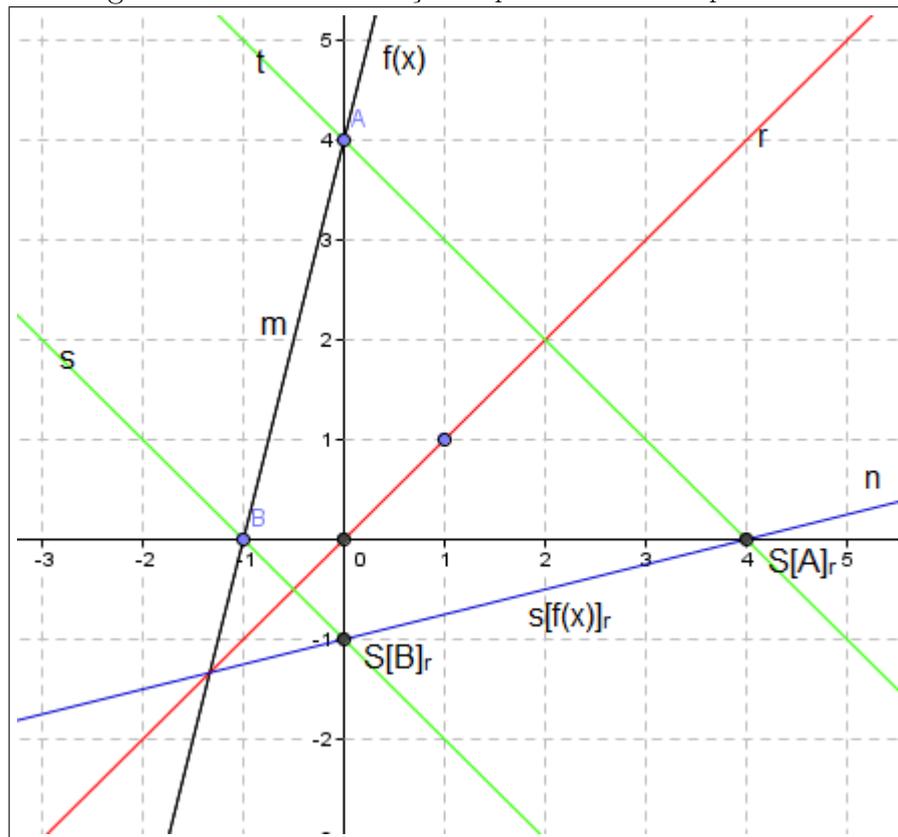
Solução: Para traçarmos a reta  $r$  precisamos de dois pontos. Como  $r : x - y = 0$  devemos ter  $x = y$ , portanto a reta  $r$  passa pelos pontos  $(0, 0)$  e  $(1, 1)$ . Fazendo  $x = 0$  em  $f(x)$ , temos  $y = 4$  e conseqüentemente, o ponto  $A = (0, 4)$ ; e fazendo  $f(x) = 0$ , temos  $x = -1$  o que nos dá o ponto  $B = (-1, 0)$ . Podemos traçar a reta que passa por esses dois pontos. Chamemos essa reta de reta  $m$  (ver figura 48).

Devemos encontrar os pontos simétricos axiais de  $f(x)$ , em relação à reta  $r$ . Esses pontos serão chamados de simétricos axiais dos pontos  $A$  e  $B$  com relação à reta  $r$ . Representaremos eles por  $S[A]_r$  e  $S[B]_r$ , respectivamente.

Inicialmente, encontremos as retas perpendiculares à reta  $r$  e que passam pelos pontos  $A = (0, 4)$  e  $B = (-1, 0)$ . Devemos fazer esse procedimento a fim de encontrar as interseções dessas retas com a reta  $r$ .

Seja  $t$  a reta perpendicular à reta  $r$ , passando pelo ponto  $A = (0, 4)$ . Da equação

Figura 48: Gráfico da solução do problema do exemplo 4.5.2.6.



Fonte: Autor, 2014.

(11), temos:

$$m_r \cdot m_t = -1$$

$$1 \cdot m_t = -1$$

$$m_t = -1$$

agora, da equação(7),  $s$  tem a forma  $s : y = mx + n$ , segue daí, que:

$$y = m_t \cdot x + n_t$$

$$y = -1 \cdot x + n_t$$

como a reta  $t$  passa pelo ponto  $A = (0, 4)$ , temos:

$$4 = -1 \cdot 0 + n_t$$

$$n_t = 4$$

temos, assim, que a reta  $t$  perpendicular à reta  $r$  é dada pela equação:

$$t : y = -x + 4.$$

A interseção das retas  $r$  e  $t$  é dada pelo seguinte sistema:

$$r \cap t = \begin{cases} y = x \\ y = -x - 4 \end{cases}$$

Resolvendo, temos:

$$r \cap t = (2, 2).$$

Temos agora o ponto médio (pertencente ao eixo de simetria)  $M_1 = (2, 2)$ . A fim de encontrarmos o ponto  $S[A]_r$  usamos a equação (2). Teremos:

$$x_{S[A]} = 4$$

e

$$y_{S[A]} = 0$$

segue assim que, o ponto simétrico axial do ponto  $A$  em relação à reta  $r$  é  $S[A]_r = (4, 0)$  (ver figura 48).

Agora, seja  $s$  a reta perpendicular à reta  $r$  que passa pelo ponto  $B = (-1, 0)$ . Pela equação (7),  $s$  tem a forma  $t : y = mx + n$ . Já temos  $m_s = -1$ , pois  $s \perp r$ , assim:

$$t : y = -1 \cdot x + n_s$$

Como  $s$  passa pelo ponto  $B = (-1, 0)$ , segue

$$0 = -1 \cdot (-1) + n_s$$

$$n_s = -1$$

Portanto,

$$t : y = -x - 1.$$

Agora, fazendo  $r \cap s$ , temos:

$$\begin{cases} y = x \\ y = -x - 1 \end{cases}$$

que resulta no ponto  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ , médio dos pontos  $B$  e  $S[B]_r$ .

Pela equação (2), temos  $x_{S[B]} = 0$  e  $y_{S[B]} = -1$ .

Portanto,  $S[B]_r = (0, -1)$  (ver figura 48).

Podemos finalmente definir a função  $S[f(x)]_r$ , simétrica axial de  $f(x)$  com relação à reta  $r$ , pois sabemos que ela passa pelos pontos  $S[A]_r = (4, 0)$  e  $S[B]_r = (0, -1)$ . Partindo

da equação (7), resolvamos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 0 = m \cdot 4 + n & (i) \\ -1 = m \cdot 0 + n & (ii) \end{cases}$$

De (ii), temos:

$$n = -1$$

e, substituindo em (i), temos:

$$m = \frac{1}{4}$$

Portanto, a função procurada, simétrica axial com relação à reta  $r$ , é definida da seguinte forma:

$$S[f(x)]_r = \frac{1}{4}x - 1.$$

Após trabalharmos com os discentes a simétrica axial da função afim com relação à reta  $r : x - y = 0$ , temos uma oportunidade de iniciarmos uma discussão em torno do conhecimento e das propriedades das funções inversas.

Formalmente, diz-se que a função  $g : Y \rightarrow X$  é a **inversa** da função  $f : X \rightarrow Y$ , quando se tem  $g(f(x)) = x$  e  $f(g(y)) = y$ , para quaisquer  $x \in X$  e  $y \in Y$ . Em outras palavras, dizemos que uma função  $g$  que tem domínio no conjunto  $Y$  e imagem no conjunto  $X$  (onde, um elemento  $y$ , do conjunto  $Y$ , aplicado à função  $g$  resulta num elemento  $x$ , do conjunto  $X$ ), é inversa da função  $f$  que tem domínio no conjunto  $X$  e imagem no conjunto  $Y$ .

Agora, de um modo bem simples, podemos dizer aos discentes que a função  $f^{-1}(x)$ , inversa da função  $f(x)$ , “transforma” o ponto  $P = (x, y)$  no ponto  $P' = (y, x)$ , que é exatamente o ponto  $S[P]_r$ , simétrico axial de  $P$  com relação à reta  $r : x - y = 0$ . Agora, aplicando essa ideia para a função  $f(x) = 4x + 4$  (exemplo 4.5.2.6), temos que  $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x - 1$ , que comparando com o resultado obtido no problema anterior, encontramos exatamente  $f^{-1}(x) = S[f(x)]_r$  onde  $r : x - y = 0$ .

Podemos dizer aos discentes que, a fim de obtermos a função inversa de uma função  $f$ , devemos fazer a permuta das incógnitas  $x$  por  $y$  e vice-versa e isolar a incógnita  $y$ .

Tomemos a função  $f(x) = 2x + 3$  e determinemos sua inversa.

Considerando  $f(x) = y$  temos,

$$f(x) = 2x + 3 \implies y = 2x + 3$$

permutando as incógnitas  $x$  e  $y$ , ficamos com

$$x = 2y + 3$$

isolando  $y$ , temos

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

ou seja,

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

Ocorreu durante a aula o seguinte questionamento: dada uma função  $f(x)$ , se queremos determinar a função  $S[f(x)]_r$ , tal que  $r : x - y = 0$ , basta determinar a função inversa  $f^{-1}(x)$ . Em outras palavras, se  $r : x - y = 0$ , então  $S[f(x)]_r = f^{-1}(x)$ . Verifiquemos.

Com uma demonstração mais geral, é possível mostrar aos discentes que, dada uma função  $f(x)$  e a reta  $r : x - y = 0$ , teremos sempre  $S[f(x)]_r = f^{-1}(x)$ .

**Demonstração:** Inicialmente, mostremos que, todo ponto  $P = (x, y)$  refletido na reta  $r : x - y = 0$  resulta no ponto  $S[P]_r = (y, x)$ .

Como  $r$  contém todos os pontos médios  $(x, x)$  e  $(y, y)$  dos seguimentos com extremidades em  $P$  e  $S[P]_r$ , temos, pela equação (2)

$$x_M = \frac{x_P + x_{S[P]}}{2} \implies y = \frac{y + x_{S[P]}}{2} \implies 2y = y + x_{S[P]} \longrightarrow x_{S[P]} = y$$

e

$$y_M = \frac{y_P + y_{S[P]}}{2} \implies x = \frac{x + y_{S[P]}}{2} \implies 2x = x + y_{S[P]} \longrightarrow y_{S[P]} = x.$$

Logo, a função  $S[f(x)]_r$  transforma o ponto  $P = (x, y)$  no ponto  $S[P]_r = (y, x)$ . Vamos agora, mostrar que, a função inversa também faz a mesma transformação. Evidentemente,  $g$  é inversa de  $f$  se, e somente se,  $f$  é inversa de  $g$ . Quando  $g$  é a inversa de  $f$ , tem-se  $g(y) = x$  se, e somente se,  $f(x) = y$ . Se  $g(f(x)) = x$  para todo  $x$  pertencente à  $X$  então a função é injetiva, pois

$$f(x_A) = f(x_B) \implies g(f(x_A)) = g(f(x_B)) \implies x_A = x_B.$$

Por sua vez, a igualdade  $f(g(y)) = y$ , valendo para todo  $y$  pertencente a  $Y$ , implica que  $f$  é sobrejetiva, pois, dado  $y$  pertencente a  $Y$  arbitrário, tomamos  $x = g(y)$  pertencente a  $X$  e temos  $f(x) = y$ .

Portanto, se a função  $f : X \rightarrow Y$  possui inversa então  $f$  é injetiva e sobrejetiva, ou seja, é uma correspondência biunívoca entre  $X$  e  $Y$ .

Reciprocamente, se  $f : X \rightarrow Y$  é uma correspondência biunívoca entre  $X$  e  $Y$  então  $f$  possui uma inversa  $g : Y \rightarrow X$ . A fim de definir  $g$ , notamos que, sendo  $f$  sobrejetiva, para todo  $y$  pertencente a  $Y$  existe algum  $x$  pertencente a  $X$  tal que  $f(x) = y$ . Além disso, como  $f$  é injetiva, este  $x$  é único. Fazemos então  $g(y) = x$ . Dessa forma,  $g : Y \rightarrow X$  é a função que associa a cada  $y$  pertencente a  $Y$  o único  $x$  pertencente a  $X$  tal que  $f(x) = y$ . É imediato que  $g(f(x)) = x$  e  $f(g(y)) = y$  para quaisquer que sejam  $x$  pertencente a  $X$  e  $y$  pertencente a  $Y$ .

Assim, podemos assegurar que, a função inversa transforma o ponto  $P = (x, y)$  de  $f$  no ponto  $P' = (y, x)$  de  $f^{-1}$  e o mesmo ocorre com a função simétrica axial  $S[f(x)]_r$  onde  $r : x - y = 0$ .

*Quod erat demonstrandum.*

Finalmente, temos a seguinte **relação de simetria axial da função  $f$  com relação à reta  $r : x - y = 0$** .

Dada uma função  $f$  e a reta  $r : x - y = 0$ , temos que a função simétrica axial de  $f$  em relação à reta  $r$  é a sua inversa  $f^{-1}$ , ou seja,

$$S[f(x)]_r = f^{-1}(x).$$

### 4.5.3. Função quadrática

Os problemas de determinação dos zeros da função e do vértice da parábola já foram tratados, quando trabalhou-se as equações do segundo grau e deverão ser tratadas aqui pelo docente de maneira análoga. Portanto, nesta seção trataremos das implicações das simetrias dos pontos aplicados a funções do segundo grau. Analogamente, à seção anterior, utilizaremos as notações  $S[f(x)]_x$ ,  $S[f(x)]_y$  e  $S[f(x)]_O$ . Iniciemos com um problema (exemplo 4.5.3.1), que foi apresentado aos discentes num momento inicial para levantar hipóteses e questionamentos diante da turma.

Exemplo 4.5.3.1.

Dada a função quadrática  $f(x) = x^2 + 2x + 1$ , construa seu gráfico e os gráficos das funções  $S[f(x)]_x$ ,  $S[f(x)]_y$  e  $S[f(x)]_O$  e determine-as.

Solução: Temos  $f(x) = x^2 + 2x + 1$  e fazendo  $f(x) = 0$ :

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + 1 &= 0 \\(x + 1)^2 &= 0 \\x &= -1\end{aligned}$$

ou seja,  $f(x)$  tem um único zero real e esse zero é também abcissa do vértice da parábola  $V = (-1, 0)$ , por onde passa a reta  $r : x = -1$ , eixo de simetria da parábola (ver figura 49). Agora fazendo  $x = 0$  em  $f(x)$  temos que  $f(0) = 1$  o que nos dá o ponto  $A = (0, 1)$  cujo simétrico em relação ao eixo da parábola é o ponto  $B = (-2, 1)$ , (figura 49).

Agora notemos que  $S[f(x)]_x$  deve passar pelos pontos  $S[V]_x = (-1, 0)$ ,  $S[A]_x = (0, -1)$  e  $S[B]_x = (-2, -1)$ . Admitindo que  $S[f(x)]_x = ax^2 + bx + c$ , temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c & (i) \\ -1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & (ii) \\ -1 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c & (iii) \end{cases}$$

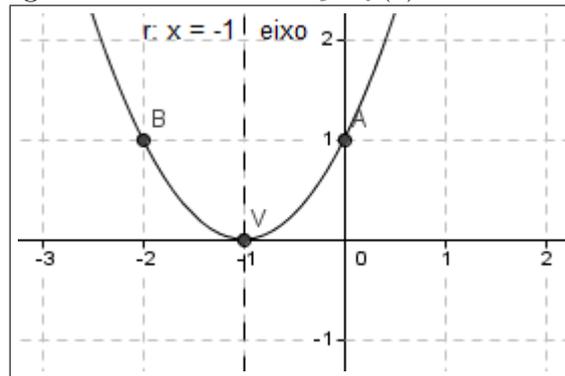
segue daí que  $c = -1$  e fazendo a substituição ficamos com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a - b = 1 & (I) \\ 4a - 2b = 0 & (II) \end{cases}$$

resolvendo, temos  $a = -1$  e  $b = -2$ . Daí,

$$S[f(x)]_x = -x^2 - 2x - 1.$$

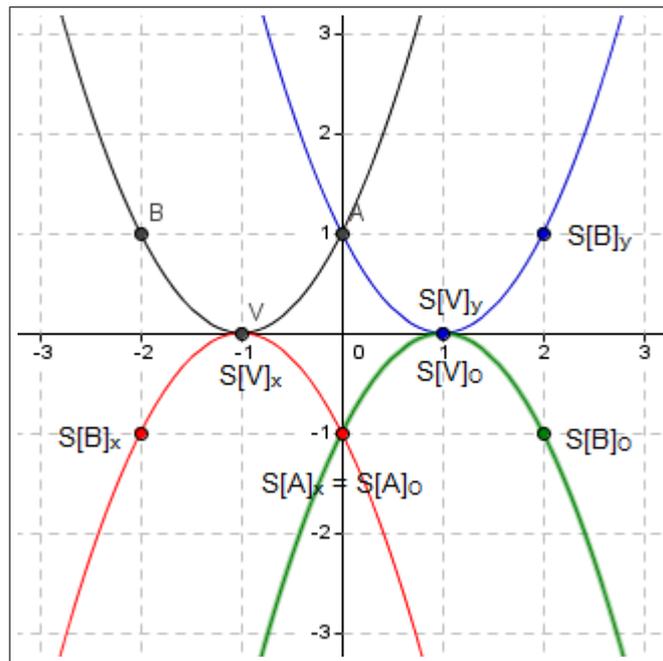
Figura 49: Gráfico da função  $f(x) = x^2 + 2x + 1$ .



Fonte: Autor, 2014.

Ver figura 50.

Figura 50: Gráficos da função  $f(x) = x^2 + 2x + 1$  e suas respectivas funções simétricas  $S[f(x)]_x$ ,  $S[f(x)]_y$  e  $S[f(x)]_o$ .



Fonte: Autor, 2014.

A função  $S[f(x)]_y$  passa pelos pontos  $S[V]_y = (1, 0)$ ,  $S[A]_y = (0, 1)$  e  $S[B]_y = (2, 1)$ . Admitindo que  $S[f(x)]_y = ax^2 + bx + c$  temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c & (i) \\ 1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & (ii) \\ 1 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & (iii) \end{cases}$$

segue daí que  $c = 1$  e fazendo a substituição ficamos com o novo sistema:

$$\begin{cases} a + b = -1 & (I) \\ 4a + 2b = 0 & (II) \end{cases}$$

resolvendo, temos  $a = 1$  e  $b = -2$ . Daí,

$$S[f(x)]_y = x^2 - 2x + 1.$$

Ver figura 50.

A função  $S[f(x)]_O$  passa pelos pontos  $S[V]_O = (1, 0)$ ,  $S[A]_O = (0, -1)$  e  $S[B]_O = (2, -1)$ . Admitindo que  $S[f(x)]_y = ax^2 + bx + c$  temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c & (i) \\ -1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & (ii) \\ -1 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c & (iii) \end{cases}$$

segue daí que  $c = -1$  e fazendo a substituição ficamos com o sistema a seguir:

$$\begin{cases} a + b = 1 & (I) \\ 4a + 2b = 0 & (II) \end{cases}$$

resolvendo, temos  $a = -1$  e  $b = 2$ . Daí,  $S[f(x)]_O = -x^2 + 2x - 1$  (ver figura 50).

Vamos agora analisar os resultados obtidos a partir de  $f(x)$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2x + 1 \\ S[f(x)]_x &= -x^2 - 2x - 1 = -(x^2 + 2x + 1) = -f(x) \\ S[f(x)]_y &= x^2 - 2x + 1 \\ S[f(x)]_O &= -x^2 + 2x - 1 \end{aligned}$$

Notemos que:

- (i) a função simétrica axial de  $f(x)$  em relação ao eixo  $x$  corresponde a trocar todos os sinais dos termos de  $f(x)$ , o que resulta em  $-f(x)$ ;
- (ii) a função simétrica axial de  $f(x)$  em relação ao eixo  $y$  corresponde a trocar o sinal do termo que acompanha  $x$ , ou seja, do termo central do trinômio do segundo grau;
- e
- (iii) a função simétrica por uma rotação de  $180^\circ$  em relação à origem do plano cartesiano ortogonal de  $f(x)$  corresponde a trocar o sinal do termo que acompanha  $x^2$  e do termo independente de  $x$ , o que corresponde a trocar o sinal da função  $S[f(x)]_y$ .

Mas agora, como ocorrera com as funções afim, a pergunta foi: Será que isso sempre ocorre? Será que, se tivéssemos  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , teríamos sempre  $S[f(x)]_x = -f(x)$ ,  $S[f(x)]_y = ax^2 - bx + c$  e  $S[f(x)]_O = -S[f(x)]_y = -ax^2 + bx - c$ ?

Podemos verificar juntos, buscando generalizar as propriedades das simetria para as funções quadráticas.

## GENERALIZAÇÃO

Tomemos uma função quadrática da forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$  que corta o eixo

das abcissas nos pontos  $A = (x_A, 0)$  e  $B = (x_B, 0)$  e corta o eixo das ordenadas no ponto  $C = (0, y_C)$ . Tomamos esses pontos, por questões de simplificar a demonstração. Definamos os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  de acordo com as coordenadas dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Temos inicialmente o sistema:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot x_A^2 + b \cdot x_A + c & (i) \\ 0 = a \cdot x_B^2 + b \cdot x_B + c & (ii) \\ y_C = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & (iii) \end{cases}$$

Segue, do sistema acima, em (iii), que  $c = y_C$  e, fazendo a substituição ficamos com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot x_A^2 + b \cdot x_A + y_C \iff a \cdot x_A^2 + b \cdot x_A = -y_C & (I) \\ 0 = a \cdot x_B^2 + b \cdot x_B + y_C \iff a \cdot x_B^2 + b \cdot x_B = -y_C & (II) \end{cases}$$

agora de (I) e de (II). temos:

$$\begin{aligned} a \cdot x_A^2 + b \cdot x_A &= a \cdot x_B^2 + b \cdot x_B \\ a \cdot (x_A^2 - x_B^2) &= b \cdot (x_B - x_A) \\ a &= b \cdot \frac{x_B - x_A}{x_A^2 - x_B^2} \\ a &= b \cdot \frac{x_B - x_A}{(x_A + x_B) \cdot (x_A - x_B)} \\ a &= b \cdot \frac{-(x_A - x_B)}{(x_A + x_B) \cdot (x_A - x_B)} \\ a &= -b \cdot \frac{1}{x_A + x_B} \end{aligned}$$

Fazendo a substituição  $a = -b \cdot \frac{1}{x_A + x_B}$  em (I), temos:

$$\begin{aligned} -b \cdot \frac{1}{x_A + x_B} \cdot x_A^2 + b \cdot x_A &= -y_C \\ -b \cdot x_A^2 + b \cdot x_A \cdot (x_A + x_B) &= -y_C \cdot (x_A + x_B) \\ -b \cdot x_A^2 + b \cdot x_A^2 + b \cdot x_A \cdot x_B &= -y_C \cdot (x_A + x_B) \\ b &= -y_C \cdot \frac{x_A + x_B}{x_A \cdot x_B} \end{aligned}$$

Fazendo a substituição  $b = -y_C \cdot \frac{x_A + x_B}{x_A \cdot x_B}$  em  $a = -b \cdot \frac{1}{x_A + x_B}$ , temos:

$$\begin{aligned} a &= - \left( -y_C \cdot \frac{x_A + x_B}{x_A \cdot x_B} \right) \cdot \frac{1}{x_A + x_B} \\ a &= y_C \cdot \frac{1}{x_A \cdot x_B} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$f(x) = y_C \cdot \frac{1}{x_A \cdot x_B} \cdot x^2 - y_C \cdot \frac{x_A + x_B}{x_A \cdot x_B} \cdot x + y_C = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad (39)$$

Tomemos agora a função  $S[f(x)]_x = Ax^2 + Bx + C$ , simétrica axial, em relação ao eixo das abcissas, da função quadrática da forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

Sabemos, da simetria dos pontos no plano cartesiano ortogonal, que seu gráfico corta o eixo das abcissas nos pontos  $S[A]_x = (x_A, 0)$  e  $S[B]_x = (x_B, 0)$  e corta o eixo das ordenadas no ponto  $S[C]_x = (0, -y_C)$ .

Definamos os coeficientes  $A$ ,  $B$  e  $C$  de acordo com as coordenadas dos pontos  $S[A]_x$ ,  $S[B]_x$  e  $S[C]_x$ .

Temos inicialmente o sistema:

$$\begin{cases} 0 = A \cdot x_A^2 + B \cdot x_A + C & (i) \\ 0 = A \cdot x_B^2 + B \cdot x_B + C & (ii) \\ -y_C = A \cdot 0^2 + B \cdot 0 + C & (iii) \end{cases}$$

Segue, do sistema acima, em (iii), que  $C = -y_C$ , e fazendo a substituição ficamos com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 0 = A \cdot x_A^2 + B \cdot x_A - y_C \iff A \cdot x_A^2 + B \cdot x_A = y_C & (I) \\ 0 = A \cdot x_B^2 + B \cdot x_B - y_C \iff A \cdot x_B^2 + B \cdot x_B = y_C & (II) \end{cases}$$

de (I) e (II), temos:

$$\begin{aligned} A \cdot x_A^2 + B \cdot x_A &= A \cdot x_B^2 + B \cdot x_B \\ A &= -B \cdot \frac{1}{x_A + x_B} \end{aligned}$$

Fazendo a substituição  $A = -B \cdot \frac{1}{x_A + x_B}$  em (I), temos:

$$\begin{aligned} -B \cdot \frac{1}{x_A + x_B} \cdot x_A^2 + B \cdot x_A &= y_C \\ -B \cdot x_A^2 + B \cdot x_A \cdot (x_A + x_B) &= y_C \cdot (x_A + x_B) \\ B &= y_C \cdot \frac{x_A + x_B}{x_A \cdot x_B} \end{aligned}$$

Fazendo a substituição  $B = y_C \cdot \frac{x_A + x_B}{x_A \cdot x_B}$  em  $A = -B \cdot \frac{1}{x_A + x_B}$ , temos:

$$\begin{aligned} A &= - \left( y_C \cdot \frac{x_A + x_B}{x_A \cdot x_B} \right) \cdot \frac{1}{x_A + x_B} \\ A &= -y_C \cdot \frac{1}{x_A \cdot x_B} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$S[f(x)]_x = -y_C \cdot \frac{1}{x_A \cdot x_B} \cdot x^2 + y_C \cdot \frac{x_A + x_B}{x_A \cdot x_B} \cdot x - y_C = -a \cdot x^2 - b \cdot x - c = -f(x) \quad (40)$$

Tomemos agora a função  $S[f(x)]_y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ , simétrica, em relação ao eixo das ordenadas, da função quadrática da forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

Sabemos, da simetria dos pontos no plano cartesiano ortogonal, que seu gráfico corta o eixo das abcissas nos pontos  $S[A]_y = (-x_A, 0)$  e  $S[B]_y = (-x_B, 0)$  e corta o eixo das ordenadas no ponto  $S[C]_y = (0, y_C)$ .

Definamos os coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  de acordo com as coordenadas dos pontos  $S[A]_y$ ,  $S[B]_y$  e  $S[C]_y$ .

Temos inicialmente o sistema:

$$\begin{cases} 0 = \alpha \cdot (-x_A)^2 + \beta \cdot (-x_A) + \gamma & (i) \\ 0 = \alpha \cdot (-x_B)^2 + \beta \cdot (-x_B) + \gamma & (ii) \\ y_C = \alpha \cdot 0^2 + \beta \cdot 0 + \gamma & (iii) \end{cases}$$

Segue, do sistema acima, em (iii), que  $\gamma = y_C$ , e fazendo a substituição ficamos com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 0 = \alpha \cdot x_A^2 - \beta \cdot x_A + y_C \iff \alpha \cdot x_A^2 - \beta \cdot x_A = -y_C & (I) \\ 0 = \alpha \cdot x_B^2 - \beta \cdot x_B + y_C \iff \alpha \cdot x_B^2 - \beta \cdot x_B = -y_C & (II) \end{cases}$$

de (I) e (II),

$$\begin{aligned} \alpha \cdot x_A^2 - \beta \cdot x_A &= \alpha \cdot x_B^2 - \beta \cdot x_B \\ \alpha &= \beta \cdot \frac{1}{x_A + x_B} \end{aligned}$$

Fazendo a substituição  $\alpha = \beta \cdot \frac{1}{x_A + x_B}$  em (I), temos:

$$\begin{aligned} \beta \cdot \frac{1}{x_A + x_B} \cdot x_A^2 - \beta \cdot x_A &= -y_C \\ \beta \cdot x_A^2 - \beta \cdot x_A \cdot (x_A + x_B) &= -y_C \cdot (x_A + x_B) \\ \beta &= y_C \cdot \frac{x_A + x_B}{x_A \cdot x_B} \end{aligned}$$

Fazendo a substituição  $\beta = y_C \cdot \frac{x_A + x_B}{x_A \cdot x_B}$  em  $\alpha = \beta \cdot \frac{1}{x_A + x_B}$ , temos:

$$\begin{aligned} \alpha &= y_C \cdot \frac{x_A + x_B}{x_A \cdot x_B} \cdot \frac{1}{x_A + x_B} \\ \alpha &= y_C \cdot \frac{1}{x_A \cdot x_B} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$S[f(x)]_y = y_C \cdot \frac{1}{x_A \cdot x_B} \cdot x^2 + y_C \cdot \frac{x_A + x_B}{x_A \cdot x_B} \cdot x + y_C = a \cdot x^2 - b \cdot x + c \quad (41)$$

Tomemos agora a função  $S[f(x)]_O = \Lambda x^2 + \Phi x + \Gamma$ , simétrica, em relação ao eixo das ordenadas, da função quadrática da forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

Sabemos, da simetria dos pontos no plano cartesiano ortogonal, que seu gráfico corta o eixo das abcissas nos pontos  $S[A]_O = (-x_A, 0)$  e  $S[B]_O = (-x_B, 0)$  e corta o eixo das ordenadas no ponto  $S[C]_O = (0, -y_C)$ .

Definamos os coeficientes  $\Lambda$ ,  $\Phi$  e  $\Gamma$  de acordo com as coordenadas dos pontos  $S[A]_O$ ,

$S[B]_O$  e  $S[C]_O$ .

Temos inicialmente o sistema:

$$\begin{cases} 0 = \Lambda \cdot (-x_A)^2 + \Phi \cdot (-x_A) + \Gamma & (i) \\ 0 = \Lambda \cdot (-x_B)^2 + \Phi \cdot (-x_B) + \Gamma & (ii) \\ -y_C = \Lambda \cdot 0^2 + \Phi \cdot 0 + \Gamma & (iii) \end{cases}$$

Segue do sistema acima que  $\Gamma = -y_C$ , e fazendo a substituição ficamos com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 0 = \Lambda \cdot x_A^2 - \Phi \cdot x_A - y_C \iff \Lambda \cdot x_A^2 - \Phi \cdot x_A = y_C & (I) \\ 0 = \Lambda \cdot x_B^2 - \Phi \cdot x_B - y_C \iff \Lambda \cdot x_B^2 - \Phi \cdot x_B = y_C & (II) \end{cases}$$

a partir de (I) e (II), temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \Lambda \cdot x_A^2 - \Phi \cdot x_A &= \Lambda \cdot x_B^2 - \Phi \cdot x_B \\ \Lambda &= \Phi \cdot \frac{1}{x_A + x_B} \end{aligned}$$

Fazendo a substituição  $\Lambda = \Phi \cdot \frac{1}{x_A + x_B}$  em (I), temos:

$$\begin{aligned} \Phi \cdot \frac{1}{x_A + x_B} \cdot x_A^2 - \Phi \cdot x_A &= y_C \\ \Phi \cdot x_A^2 - \Phi \cdot x_A \cdot (x_A + x_B) &= y_C \cdot (x_A + x_B) \\ \Phi &= -y_C \cdot \frac{x_A + x_B}{x_A \cdot x_B} \end{aligned}$$

Fazendo a substituição  $\Phi = -y_C \cdot \frac{x_A + x_B}{x_A \cdot x_B}$  em  $\Lambda = \Phi \cdot \frac{1}{x_A + x_B}$ , temos:

$$\begin{aligned} \Lambda &= -y_C \cdot \frac{x_A + x_B}{x_A \cdot x_B} \cdot \frac{1}{x_A + x_B} \\ \Lambda &= -y_C \cdot \frac{1}{x_A \cdot x_B} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$S[f(x)]_O = -y_C \cdot \frac{1}{x_A \cdot x_B} \cdot x_2 - y_C \cdot \frac{x_A + x_B}{x_A \cdot x_B} \cdot x - y_C = -a \cdot x^2 + b \cdot x - c \quad (42)$$

Observando as equações em (39), (40), (41) e (42), chegamos a seguinte **relação de simetrias da função quadrática**:

se  $f(x) = ax^2 + bx + c$  é uma função quadrática teremos sempre

$$\begin{aligned} S[f(x)]_x &= -f(x) \\ S[f(x)]_y &= ax^2 - bx + c \\ S[f(x)]_O &= -ax^2 + bx - c \end{aligned}$$

*quod erat demonstrandum.*

Agora vamos a um problema (exemplo 4.5.3.2) que foi aplicado aos discentes e, resolvido brevemente pelos próprios discentes.

Exemplo 4.5.3.2.

Dada a função quadrática  $f(x) = 4x^2 - 20x + 24$ , pede-se: (a) traçar o gráfico de  $f(x)$ ,  $S[f(x)]_x$ ,  $S[f(x)]_y$  e  $S[f(x)]_O$  destacando seus principais pontos; e, (b) determinar  $S[f(x)]_x$ ,  $S[f(x)]_y$  e  $S[f(x)]_O$ .

Solução do item (a): Ver gráfico da figura 50. Os pontos mais importantes para esta curva são o ponto que corta o eixo das ordenadas  $P = (0, 24)$ , os zeros reais dados por

$$\begin{aligned} 4x^2 - 20x + 24 &= 0 \\ 4x^2 - 20x &= -24 \\ 4x^2 - 20x + 25 &= -24 + 25 \\ (2x - 5)^2 &= 1 \\ |2x - 5| &= 1 \\ \pm(2x - 5) &= 1 \\ 2x - 5 &= \pm 1 \end{aligned}$$

dando os valores  $x = 2$  ou  $x = 3$ , o que nos dá os pontos  $A = (2, 0)$  e  $B = (3, 0)$  e o vértice, que é dado pela equação (2), tendo abcissa  $x = 2,5$  média dos zeros reais, acarretando no ponto  $V = (2,5; -1)$ , pois  $f(2,5) = -1$ . Os demais pontos são localizados através da visualização dos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $P$  e  $V$ , como mostra a figura 51.

Solução do item (b): Como  $f(x) = 4x^2 - 20x + 24$ , temos, pela relação de simetria das funções quadráticas, que  $S[f(x)]_x = -4x^2 + 20x - 24$ ,  $S[f(x)]_y = 4x^2 + 20x + 24$  e  $S[f(x)]_O = -4x^2 - 20x - 24$ .

Vamos agora (exemplo 4.5.3.3), a uma aplicação bem polêmica da simetria de uma curva do tipo  $y = ax^2 + bx + c$  em relação a uma reta  $r$  dada. A curva simétrica denominaremos de simétrica de  $f(x)$  em relação à reta  $r$  e a representaremos por  $S[f(x)]_r$ . O problema seguinte foi resolvido pelos discentes da 1ª série do ensino médio. Para a resolução do item (b), foi necessária a intervenção do docente e deixaremos os comentários para mais adiante.

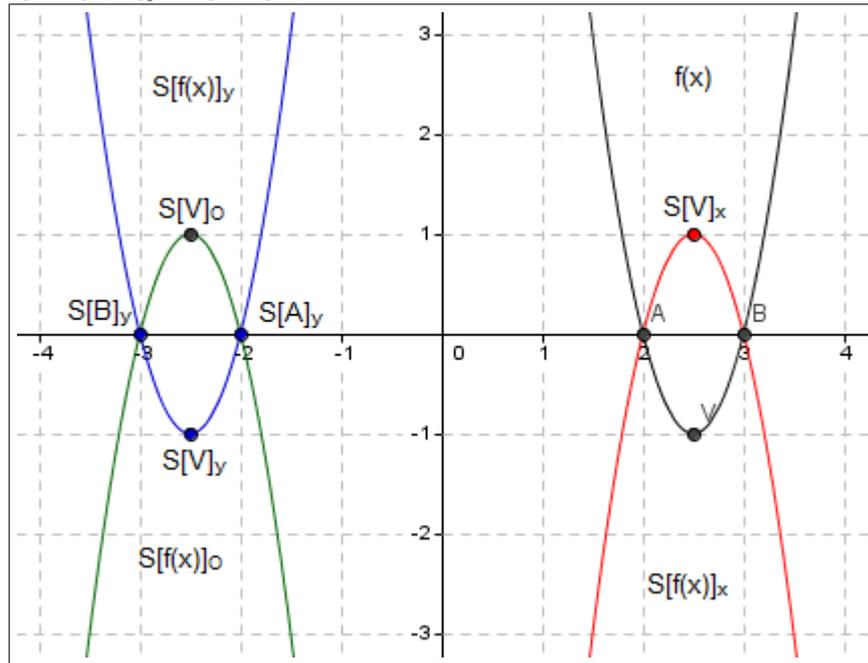
Exemplo 4.5.3.3.

Dada a função quadrática  $f(x) = x^2 + 2x + 2$  e as retas  $r : y - 1 = 0$  e  $s : x - y = 0$ , determine:

- (a) a função  $S[f(x)]_r$ , simétrica de  $f(x)$  em relação à reta  $r$ ;
- (b) a função  $S[f(x)]_s$ , simétrica de  $f(x)$  em relação à reta  $s$ .

Solução: Inicialmente, observemos o gráfico da função quadrática  $f(x) = x^2 + 2x + 2$ , juntamente com as retas  $r : y = 1$  e  $s : y = x$  (ver figura 52), e destaquemos no gráfico de  $f(x)$  o vértice  $V = (-1, 1)$ , o ponto  $A = (0, 2)$  que intersecta o eixo das ordenadas e o

Figura 51: Gráficos da função  $f(x) = 4x^2 - 20x + 24$  com seus principais pontos e suas respectivas funções simétricas  $S[f(x)]_x$ ,  $S[f(x)]_y$  e  $S[f(x)]_O$ .



Fonte: Autor, 2014.

ponto  $B = (-2, 2)$  simétrico de  $A$  em relação ao eixo de simetria da parábola. Destaquemos agora os pontos simétricos  $S[A]_r = (0, 0)$ ,  $S[A]_s = (2, 0)$ ,  $S[B]_r = (-2, 0)$ ,  $S[B]_s = (2, -2)$  e  $S[V]_s = (1, -1)$ .

Solução item (a): A fim de determinarmos a função  $S[f(x)]_r$  e admitindo que  $S[f(x)]_r = ax^2 + bx + c$ , devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 1 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c & (i) \\ 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & (ii) \\ 0 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c & (iii) \end{cases}$$

a equação (ii) nos dá  $c = 0$ . Substituindo em (i) e (iii) temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a - b = 1 & (I) \\ 4a - 2b = 0 & (II) \end{cases}$$

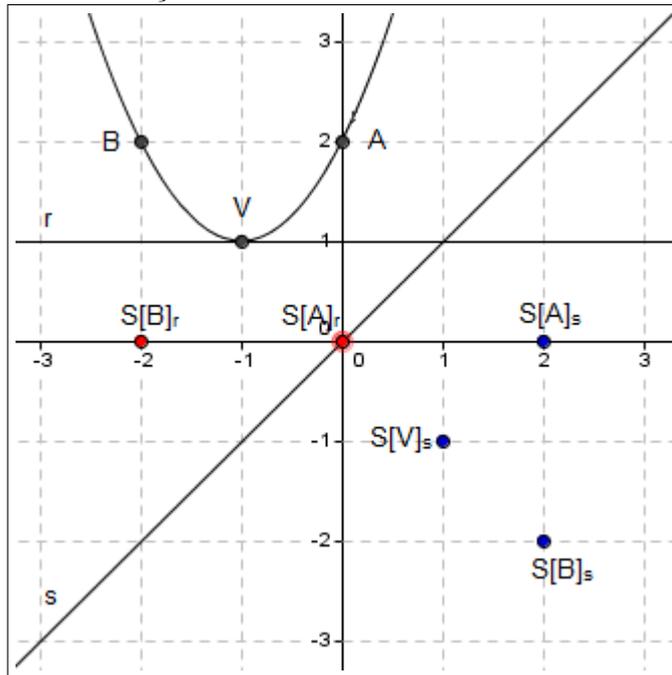
resolvendo o sistema acima, temos:  $a = -1$  e  $b = -2$ .

Portanto, temos que a função simétrica de  $f(x)$  em relação à reta  $r$  é

$$S[f(x)]_r = -x^2 - 2x.$$

Solução do item (b): Mostraremos aqui a solução inicial dos discentes (resumimos a solução). De acordo com a simetria dos pontos, e assumindo  $S[f(x)]_s = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ , devemos resolver o seguinte sistema:

Figura 52: Gráficos da função  $f(x) = x^2 + 2x + 2$  com seus principais pontos, as retas  $r$  e  $s$  e seus respectivos pontos simétricos em relação as retas.



Fonte: Autor, 2014.

$$\begin{cases} -1 = \alpha \cdot 1^2 + \beta \cdot 1 + \gamma & (i) \\ 0 = \alpha \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 + \gamma & (ii) \\ -2 = \alpha \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 + \gamma & (iii) \end{cases}$$

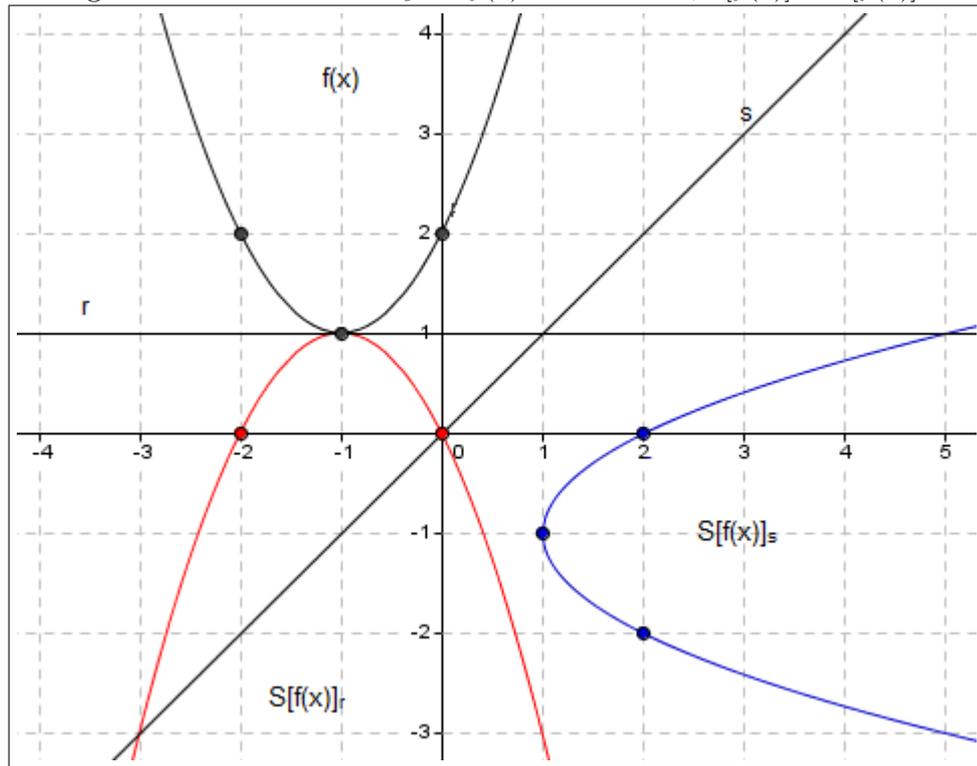
Simplificando o sistema acima, chegamos ao equivalente sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -1 & (i) \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = 0 & (ii) \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = -2 & (iii) \end{cases}$$

o que nos dá um absurdo, pois temos  $0 = 4\alpha + 2\beta + \gamma = -2$ . Logo, essa curva “não deveria existir”, contudo ela existe. Observemos a figura 53.

A intervenção do docente é propícia aqui. Observemos que o absurdo deve acontecer e é proposital, pois os discentes não levaram em consideração que somente é função a curva na qual para cada valor escolhido em  $x$  deve-se ter um, e somente um, valor correspondente em  $y$ . Isso não acontece com a curva que representa  $S[f(x)]_s$ . Mas vem aí a grande questão: será que essa curva não pode ser algebrizada? A resposta é sim. Pois, a forma original é mantida, mesmo depois de refletida axialmente em torno da reta  $s$ , então teremos ainda uma parábola. Contudo, essa curva não é uma  $f(x)$ , portanto devemos observá-la como uma  $f(y)$ . Assim, pediu-se aos discentes que rotacionassem o sistema cartesiano da figura 53, juntamente com a parábola, de  $90^\circ$  para a esquerda em torno de sua origem. Fazendo isso, devemos observar que os pontos desse “novo” plano cartesiano ortogonal deverão ser escritos em função de  $y$ , ou seja, eles serão agora da forma  $P = (y, x)$ . Após essa rotação, o eixo  $\vec{OX}$  passa a ocupar o lugar do eixo  $\vec{OY}$  e este último aponta com o sentido positivo para à esquerda da origem. Explicado esse fato, os discentes resolveram, ainda com um pouco de dificuldade, o item (b). A seguir, abreviamos a solução dos discente.

Figura 53: Gráficos das funções:  $f(x) = x^2 + 2x + 2$ ,  $S[f(x)]_r$  e  $S[f(x)]_s$ .



Fonte: Autor, 2014.

Solução correta do item (b): Levando em consideração que:

$$S[f(x)]_s = f(y) = \alpha y^2 + \beta y + \gamma = x,$$

e considerando que os pontos agora tomam a forma  $P = (y, x)$ , temos que a nova parábola passa pelos pontos  $(0, 2)$ ,  $(-1, 1)$  e  $(-2, 2)$  e deve satisfazer o sistema:

$$\begin{cases} \alpha \cdot 0^2 + \beta \cdot 0 + \gamma = 2 & (i) \\ \alpha \cdot (-1)^2 + \beta \cdot (-1) + \gamma = 1 & (ii) \\ \alpha \cdot (-2)^2 + \beta \cdot (-2) + \gamma = 2 & (iii) \end{cases}$$

a igualdade em (i) nos dá  $\gamma = 2$  e o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha - \beta = -1 & (I) \\ 4\alpha - 2\beta = 0 & (II) \end{cases}$$

que resolvido nos fornece  $\alpha = 1$  e  $\beta = 2$ .

Finalmente, temos que:

$$S[f(x)]_s = y^2 + 2y + 2.$$

Notemos que esse exercício (problema do exemplo 4.5.3.3) tem uma vantagem muito grande, principalmente para os discentes das turmas da primeira série do ensino

médio, pois sem sequer iniciar o conteúdo de cônicas, que é visto mais especificamente na terceira série do ensino médio, ajuda a representar no plano cartesiano ortogonal uma parábola, cujos vértice e foco pertencem a uma reta paralela ao eixo das abscissas e, além disso, mostra que existe uma equação que descreve essa parábola. É muito importante também deixar claro que essa solução, que não necessita da definição precisa de parábola, somente é possível se a reta à qual queremos sua simétrica tiver coeficiente angular igual a 1. Em outras palavras, essa reta tem que formar um ângulo de  $45^\circ$  em relação ao eixo das abscissas que nos possibilita rotacioná-la de  $90^\circ$  em torno da origem do plano cartesiano ortogonal; ainda mais, ela pode ser qualquer reta da forma  $y = x + n$ .

Apesar da discussão acima, não podemos deixar de comentar, que deve existir pelo menos uma função  $g(x)$  que represente à curva descrita pela equação  $x = y^2 + 2y + 2$ . Devemos voltar à definição de função inversa, que já abordamos no tópico anterior sobre função afim. Vimos que, a função simétrica axial em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares do plano cartesiano ortogonal é dada pela sua inversa, ou seja,  $S[f(x)]_r = f^{-1}(x)$ . Antes de prosseguirmos, devemos chamar a atenção dos discentes para o domínio e a imagem da função  $f(x) = x^2 + 2x + 2$ . Temos o seguinte:

$$D_f = R$$

e

$$Im_f = \{y \in R; y \geq 1\}$$

Consequentemente, pelo que foi demonstrado sobre função inversa, devemos ter:

$$D_{f^{-1}} = \{x \in R; x \geq 1\}$$

e

$$Im_{f^{-1}} = R$$

Verifiquemos, então, se isso acontece. Partindo da definição de função inversa, e dada  $f(x) = x^2 + 2x + 2$ , determinemos  $f^{-1}(x)$  e, em seguida, verifiquemos seus domínio e imagem.

$$f(x) = x^2 + 2x + 2$$

fazendo  $f(x) = y$ , temos:

$$y = x^2 + 2x + 2$$

fazendo a permuta  $x$  por  $y$  e vice-versa, ficamos com

$$x = y^2 + 2y + 2$$

agora, isolando  $y$  a fim de obtermos uma função em  $x$ , temos

$$x - 1 = y^2 + 2y + 2 - 1$$

$$x - 1 = y^2 + 2y + 1$$

$$\begin{aligned}x - 1 &= (y + 1)^2 \\ \pm\sqrt{x - 1} &= y + 1 \\ -1 \pm \sqrt{x - 1} &= y\end{aligned}$$

segue do resultado acima que a função inversa é da forma:

$$f^{-1}(x) = -1 \pm \sqrt{x - 1}$$

Aparece aqui mais um problema: uma função que pode adicionar  $\sqrt{x - 1}$  ao valor  $-1$  ou pode subtrair  $\sqrt{x - 1}$  ao valor  $-1$ . Como resolver então esse problema? O docente pode informar aos docentes que a simétrica axial da parábola de  $f(x)$  com relação à reta  $r : x - y = 0$  é uma curva que representa a união de duas funções (contudo à curva simétrica não é uma função é uma equação). Observemos (figura 54) que, a curva que representa a função simétrica axial de  $f(x)$  com relação à reta  $r$  é  $f^{-1}(x) = g(x) \cup h(x)$  onde  $g(x) = -1 + \sqrt{x - 1}$  e  $h(x) = -1 - \sqrt{x - 1}$ . Em outras palavras, a curva que representa  $S[f(x)]_r$  dada pela equação  $x = y^2 + 2y + 2$  é dada pela união das curvas representadas pelas funções  $g(x)$  e  $h(x)$ , como mostra a figura 54. Verifiquemos, agora os domínio e imagem de cada uma das funções  $g$  e  $h$ . Temos:

$$D_g = \{x \in R; x \geq 1\}$$

$$Im_g = \{y \in R; y \geq -1\}$$

e

$$D_h = \{x \in R; x \geq 1\}$$

$$Im_h = \{y \in R; y \leq -1\}$$

Observemos, ainda na figura 54, que a união das imagens de  $g$  e  $h$  cobre todo o conjunto dos números reais, como havíamos pressuposto. Logo, apesar de não podermos determinar diretamente a função inversa da parábola representada pela função  $f(x) = x^2 + 2x + 2$ , podemos determinar as funções que unidas nos dão à curva que representa essa inversa.

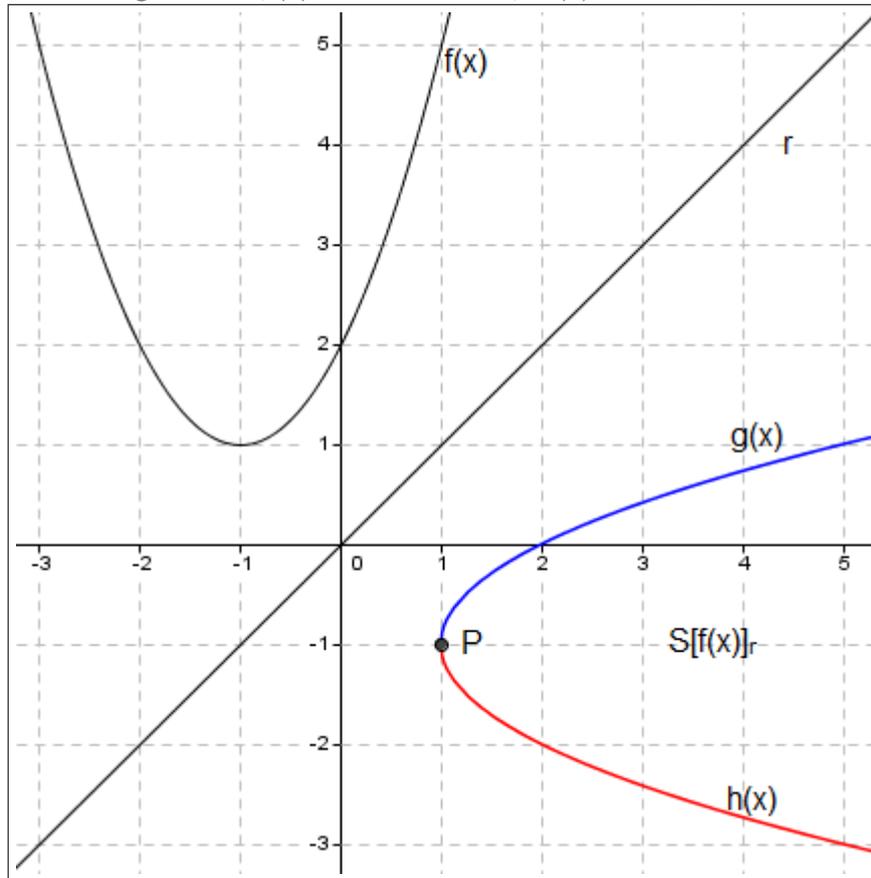
Vamos agora a um problema (exemplo 4.5.3.4) mais analítico que envolve simetrias. Esse problema foi proposto para os alunos da primeira série do ensino médio. Para tal utilizamos a mesma curva dada pela função do problema anterior e utilizaremos a sutileza da distância entre pontos no plano e relações de pertinência. Vamos ao problema e deixemos os comentários para posteriormente.

Exemplo 4.5.3.4.

Dada a função  $f(x) = x^2 + 2x + 2$  e os pontos  $V = (-1, 1) \in f(x)$  e  $R = (-1, 6) \notin f(x)$ , determine as coordenadas dos pontos  $A \in f(x)$  e  $B \in f(x)$  simétricos do ponto  $V$  por rotação em torno do ponto  $R$ , determine também o ângulo e o sentido da rotação de  $V$  em torno de  $R$  para cada um dos pontos.

Observação: (i) Antes de resolvermos o problema de um modo analítico vamos apresentar uma solução bem simples dada por um grupo de discentes da primeira série do ensino médio. (ii) Ao resolvermos pelo método analítico devemos considerar uma generalização com relação às distâncias entre os pontos envolvidos na questão.

Figura 54:  $f(x) = x^2 + 2x + 2$  e  $f^{-1}(x) = -1 \pm \sqrt{x-1}$ .



Fonte: Autor, 2014.

Solução dada pelos discentes: Observando a figura 55, podemos verificar que o ponto  $V$  é vértice da parábola dada por  $f(x)$  e o ponto  $R$  tem mesma abcissa que  $V$ , portanto pertence ao eixo de simetria da parábola dada por  $f(x)$ .

É fácil ver que a distância de  $R$  a  $V$  é igual a  $5u$  ( $u$  = unidades).

Então, qualquer rotação desse ponto equidista  $5u$ .

Tomando as abcissas inteiras  $x$  à direita do vértice, temos os pontos  $A = (0, 2)$ ,  $B = (1, 5)$  e  $C = (2, 10)$ .

Notemos que a distância de  $A$  a  $R$  é, pela equação (1),

$$d_{AR} = \sqrt{(0 - (-1))^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{17}u,$$

a distância de  $B$  a  $R$  é, também pela equação (1),

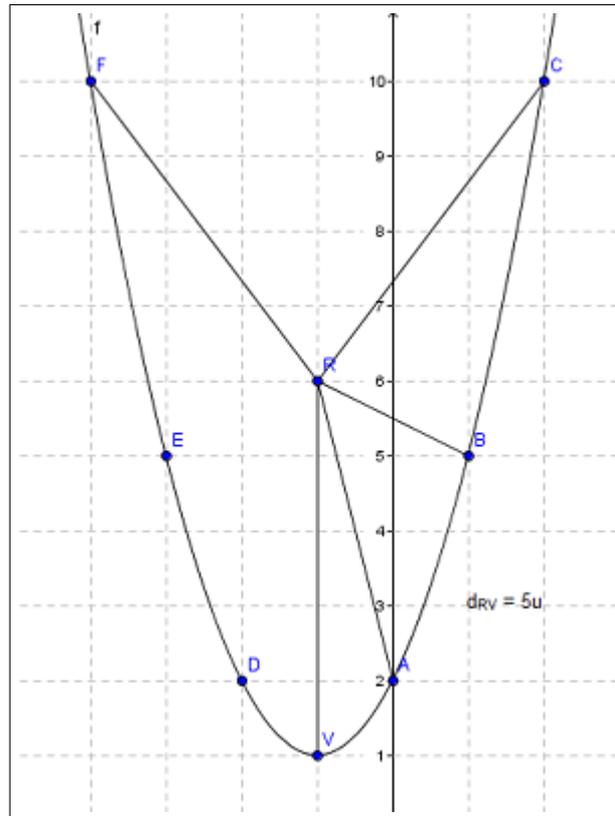
$$d_{BR} = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (6 - 5)^2} = \sqrt{5}u,$$

e, a distância de  $C$  a  $R$ , pela equação (1), é

$$d_{CR} = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (6 - 10)^2} = \sqrt{25} = 5u.$$

Portanto, o ponto  $C$  é um ponto simétrico rotacional de  $V$  em torno do ponto  $R$ .

Figura 55: Gráfico semelhante ao construído pelos discentes para auxiliar a solução do problema constante no exemplo 4.5.3.4.



FONTE: Autor, 2014.

Um outro ponto que também é simétrico por rotação de  $V$  em torno de  $R$  é o ponto de abscissa  $x = -4$  que nos dá a mesma ordenada do ponto  $C$ .

Nesse caso o ponto é  $F = (-4, 10)$  (ver figura 55). Vamos agora determinar o ângulo e o sentido da rotação de  $V$  em torno de  $R$  para chegar até os pontos  $C$  e  $F$ .

Inicialmente, tracemos a reta  $y = 1$  pois sabemos que esta é perpendicular ao segmento  $\overline{RV}$ . Como a reta  $y = 1$  é paralela ao eixo das abscissas, encontrando o ângulo da reta que passa pelos pontos  $R$  e  $C$  forma com o eixo das abscissas é só acrescentar aos  $90^\circ$  que já temos (ver figura 53). A reta que passa pelos pontos  $R$  e  $C$  é dada pelo sistema:

$$6 = m \cdot (-1) + n$$

$$10 = m \cdot 2 + n$$

resolvendo o sistema, temos  $m = \frac{4}{3} \approx 1,33333\dots$  e portanto temos que a rotação do ponto  $V$  em torno de  $R$  até sobrepor o ponto  $C$  é dada por:

$$\theta = 90^\circ + \arctan \frac{4}{3}$$

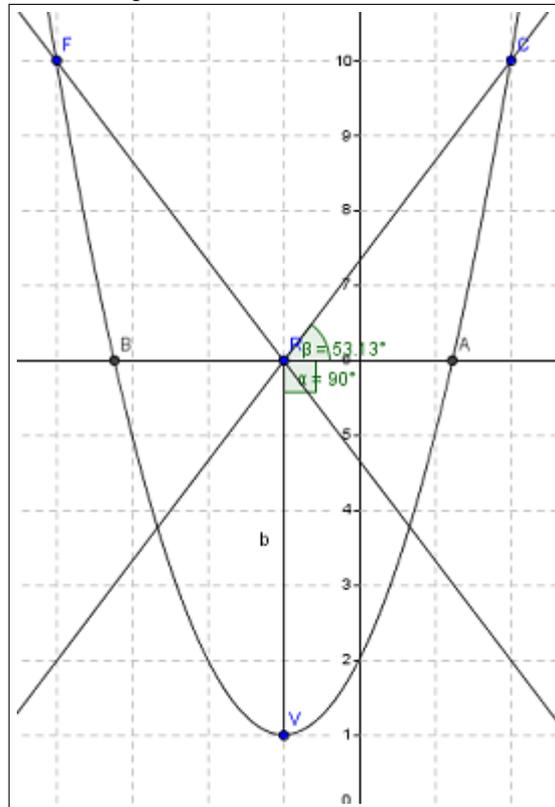
$$\theta \approx 90^\circ + 53,13^\circ$$

$$\theta \approx 143,13^\circ$$

Portanto, o ponto  $V$  sofreu uma rotação de aproximadamente  $143,13^\circ$  no sentido

anti-horário para chegar até o ponto  $C$  e outra rotação, também de  $143,13^\circ$  no sentido horário para chegar até o ponto  $F$ . Ver figura 56.

Figura 56: Gráfico semelhante ao construído pelos discentes para auxiliar na determinação dos ângulo de rotação do problema constante no exemplo 4.5.3.4.



Fonte: Autor, 2014.

Observemos que os discentes usaram bem a criatividade e os conhecimentos prévios que já possuíam para descrever, de um modo simples, uma solução suficiente para o problema. Não deixaram, portanto, de usar a simetria, haja vista que o ângulo  $\widehat{VRF}$  é simétrico axial do ângulo  $\widehat{VRC}$  com relação ao eixo de simetria da parábola. Contudo, há outros meios não menos elegantes e outros até mais rebuscados de chegarmos a uma solução para o mesmo problema. Observe na solução seguinte, sugerida como solução alternativa pelo docente.

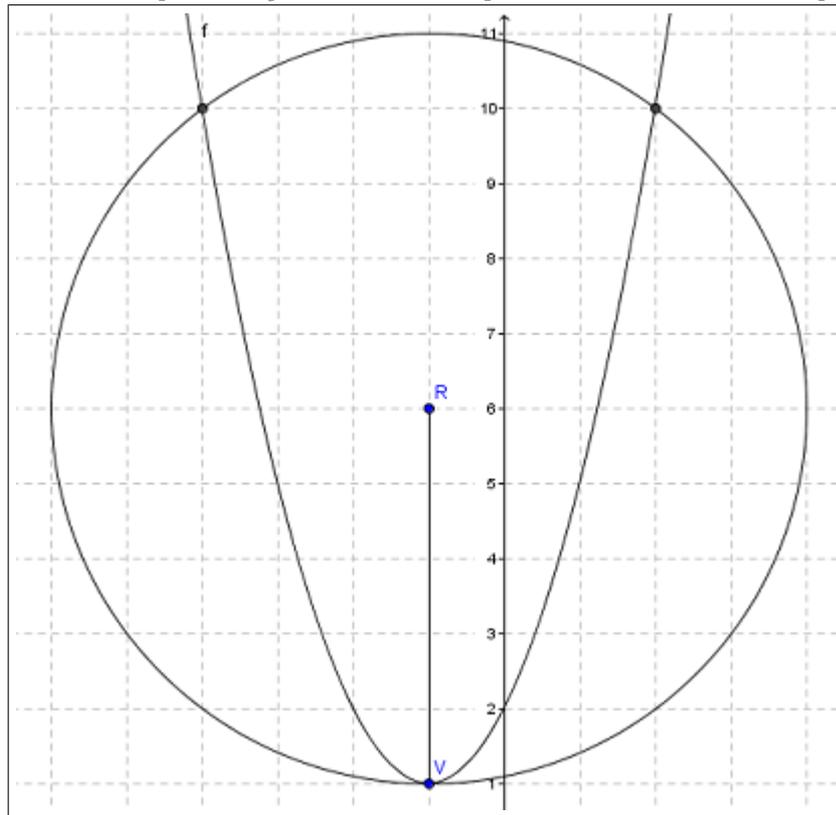
Outra solução: Inicialmente notemos que o ponto  $V$  é vértice da parábola e, que o ponto  $R$  pertence ao eixo de simetria da mesma. Temos que se um ponto  $P$  é simétrico de  $V$  por rotação em torno do ponto  $R$ , então todo ponto deve equidistar  $5u$  do ponto  $R$ , pois essa é a distância entre  $R$  e  $V$ , facilmente observável no plano cartesiano ortogonal. Considerando todo ponto do plano cartesiano ortogonal com a forma  $P = (x, y)$ , devemos ter que qualquer ponto  $P$  equidista  $5u$  do ponto  $R = (-1, 6)$ . Agora, basta observar a figura 57 e já é possível deduzir os dois pontos simétricos rotacionais de  $V$  em torno do ponto  $R$ .

Fazendo isso, temos que o conjunto de todos os pontos  $P$ , simétricos rotacionais do ponto  $V$  em torno do ponto  $R$ , são dados por

$$d_{PR}^2 = (x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2$$

$$5^2 = (x - (-1))^2 + (y - 6)^2$$

Figura 57: Gráfico para solução alternativa do problema constante no exemplo 4.5.3.4.



Fonte: Autor, 2014.

$$(x + 1)^2 + (y - 6)^2 = 25$$

Observemos que, sem ao menos falar em equação da circunferência no plano cartesiano ortogonal, é possível apresentá-la de forma simples aos discentes da primeira série do ensino médio.

Agora, é só traçar a circunferência (ver figura 57) e analisar no gráfico os pontos de intersecção da parábola com a circunferência.

Devemos mostrar aos discentes que, este problema, também pode ser resolvido pelo sistema que nos dá a intersecção da parábola  $y = x^2 + 2x + 2$  com a circunferência  $(x + 1)^2 + (y - 6)^2 = 25$ . Vejamos a seguir:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x + 2 & (i) \\ (x + 1)^2 + (y - 6)^2 = 25 & (ii) \end{cases}$$

Substituindo (i) em (ii), temos:

$$\begin{aligned} (x + 1)^2 + (x^2 + 2x + 2 - 6)^2 &= 25 \\ x^2 + 2x + 1 + (x^2 + 2x - 4)^2 - 25 &= 0 \\ x^2 + 2x + 1 + x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 16x + 16 - 25 &= 0 \\ x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 14x - 8 &= 0 \end{aligned}$$

Temos uma equação difícil de resolver diante dos discentes da 1ª série do ensino

médio. Por esse motivo, optamos pela solução geométrica. Devemos explicar também aos discentes que mais adiante, quando eles estiverem estudando os polinômios e as funções polinomiais, este tipo de equação será comum em alguns problemas.

#### 4.5.4. Função exponencial

A simetria nas funções exponenciais apresenta-se de modo simples. Por enquanto, vamos nos deter nas simetrias em relação aos eixos das abscissas e das ordenadas e com relação à origem. Deixaremos o caso da simetria axial em relação à reta  $r : x - y = 0$  para mais adiante. Analogamente ao que foi trabalhado com relação às funções quadráticas, vamos analisar o comportamento dos pontos que seguem a relação  $y = a^x, \forall a \in R_+ - \{1\}$  e  $x \in R$ , à medida que  $x$  varia nos números reais. Vejamos a seguir (exemplo 4.5.4.1) a análise isolada do caso  $f(x) = 2^x$ . Esse problema foi apresentado numa turma da primeira série do ensino médio.

Exemplo 4.5.4.1.

Dada a função exponencial  $f(x) = 2^x$ , construa seu gráfico e em seguida determine  $S[f(x)]_x$ ,  $S[f(x)]_y$  e  $S[f(x)]_O$ .

Solução: Notemos que, admitindo  $x \in R$ , temos o seguinte:

$$x = -2 \implies y = \frac{1}{4},$$

$$x = -1 \implies y = \frac{1}{2},$$

$$x = 0 \implies y = 1,$$

$$x = 1 \implies y = 2,$$

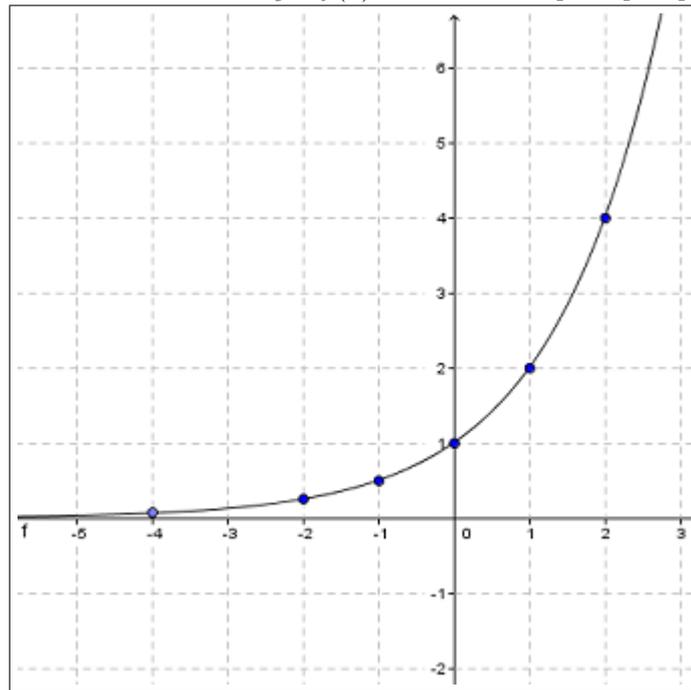
e

$$x = 2 \implies y = 4.$$

Daí, pode-se deduzir, junto aos discentes, que o gráfico de  $f(x) = 2^x$  só tem valores positivos (ver figura 58). Além disso, cabe mostrar também aos discentes que essa curva nunca vai tocar o eixo das abscissas. Para tal, usaremos a noção de limite, que não impede, de modo algum, ser introduzida para os discentes ainda na primeira série do ensino médio. Não é necessário fazer-se aqui uma demonstração formal de que quando  $x$  tende a  $-\infty$  temos que  $y$  tende a zero, mas não é necessariamente zero. Basta tomarmos por exemplo o valor  $x = -10$  que implica em  $y = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} = 0,0009765625$  e, à medida que  $x$  diminui (tende à  $-\infty$ ),  $y$  se aproxima cada vez mais de zero (tende à zero). O que é mais importante é o discente entender que essa curva é assintótica ao eixo das abscissas, ou seja, ela chega muito próximo de zero mas nunca será igual a zero. É fácil mostrar também que, quando  $x$  tende para  $+\infty$ ,  $y$  também tende para  $+\infty$ , sem fazer uma demonstração formal. Por exemplo, quando  $x = 15 \implies y = 32768$ . Dando exemplos desse tipo, consegue-se pelo menos convencer os discentes de que essa curva nunca toca o eixo das abscissas quando  $x$  tende a  $-\infty$  e que tende a  $+\infty$  à medida que  $x$  cresce.

Agora, vamos analisar como se comportam as funções simétricas de  $f(x)$ .

Adotando  $A = (-2, \frac{1}{4})$ ,  $B = (-1, \frac{1}{2})$ ,  $C = (0, 1)$ ,  $D = (1, 2)$  e  $E = (2, 4)$ , sabe-se

Figura 58: Gráfico da função  $f(x) = 2^x$  com seus principais pontos.

Fonte: Autor, 2014.

que a função  $S[f(x)]_x$  passa pelos pontos  $S[A]_x = (-2, -\frac{1}{4})$ ,  $S[B]_x = (-1, -\frac{1}{2})$ ,  $S[C]_x = (0, -1)$ ,  $S[D]_x = (1, -2)$  e  $S[E]_x = (2, -4)$ ; a função  $S[f(x)]_y$  passa pelos pontos  $S[A]_y = (-2, 4)$ ,  $S[B]_y = (-1, 2)$ ,  $S[C]_y = (0, 1)$ ,  $S[D]_y = (1, \frac{1}{2})$  e  $S[E]_y = (2, \frac{1}{4})$ ; e, a função  $S[f(x)]_O$  passa pelos pontos  $S[A]_O = (-2, -4)$ ,  $S[B]_O = (-1, -2)$ ,  $S[C]_O = (0, -1)$ ,  $S[D]_O = (1, -\frac{1}{2})$  e  $S[E]_O = (2, -\frac{1}{4})$ . Ver figura 59.

Desse modo, temos que os gráficos das funções simétricas de  $f(x)$  são os da figura 59. Mas, em que isso muda  $f(x)$ ? Ou seja, como devemos escrever  $S[f(x)]_x$ , e as outras simétricas? Observemos que: (i)  $S[f(x)]_x = -(2^x)$ , pois

$$S[f(-2)]_x = -(2^{-2}) = -\frac{1}{4}$$

$$S[f(-1)]_x = -(2^{-1}) = -\frac{1}{2}$$

$$S[f(0)]_x = -(2^0) = -1$$

$$S[f(1)]_x = -(2^1) = -2$$

$$S[f(2)]_x = -(2^2) = -4$$

(ii)  $S[f(x)]_y = 2^{-x}$ , pois

$$S[f(-2)]_y = 2^{-(-2)} = 4$$

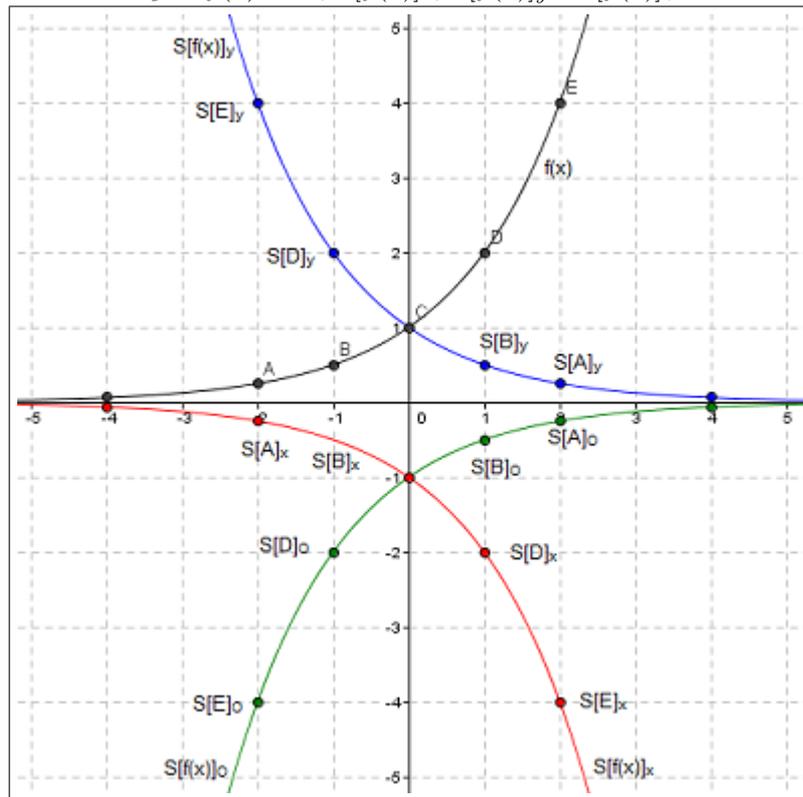
$$S[f(-1)]_y = 2^{-(-1)} = 2$$

$$S[f(0)]_y = 2^{-0} = 1$$

$$S[f(1)]_y = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$S[f(2)]_y = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

Figura 59: Gráfico das funções  $f(x) = 2^x$ ,  $S[f(x)]_x$ ,  $S[f(x)]_y$  e  $S[f(x)]_O$  com seus principais pontos.



Fonte: Autor, 2014.

e, (iii)  $S[f(x)]_O = -(2^{-x})$ , pois

$$S[f(-2)]_O = -(2^{-(-2)}) = -4$$

$$S[f(-1)]_O = -(2^{-(-1)}) = -2$$

$$S[f(0)]_O = -(2^0) = -1$$

$$S[f(1)]_O = -(2^{-1}) = -\frac{1}{2}$$

$$S[f(2)]_O = -(2^{-2}) = -\frac{1}{4}$$

(ver figura 59).

Mas a questão agora é: será que dada uma função exponencial  $f(x) = a^x$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}_+ - \{1\}$  e  $x \in \mathbb{R}$ , teremos sempre  $S[f(x)]_x = -(a^x)$ ,  $S[f(x)]_y = a^{-x}$  e  $S[f(x)]_O = -(a^{-x})$ ?

Façamos uma demonstração simples, porém convincente, ao menos para discentes da primeira série do ensino médio. Para tal, consideremos o ponto  $P = (x_P, y_P)$  pertencente ao gráfico de  $f(x) = a^x$ ,  $\forall a > 0, a \neq 1$ .

(I) A função  $S[f(x)]_x$  passa pelo ponto  $S[P]_x = (x_P, -y_P)$ . Segue que  $S[f(x)]_x$  pode ser escrita como  $-y_P = a^{x_P}$ , mas isso acontece se, e somente se,  $y_P = -(a^{x_P})$ .

Logo,

$$S[f(x)]_x = -(a^x)$$

(II) A função  $S[f(x)]_y$  passa pelo ponto  $S[P]_y = (-x_P, y_P)$ . Desse modo,  $S[f(x)]_y$  é escrita

como  $y_P = a^{-x_P}$ .

Logo,

$$S[f(x)]_y = a^{-x}$$

(III) A função  $S[f(x)]_O$  passa pelo ponto  $S[P]_O = (-x_P, -y_P)$ . Segue que, nesse ponto,  $S[f(x)]_O$  pode ser escrita como  $-y_P = a^{-x_P}$ , mas isso acontece se, e somente se,  $y_P = -(a^{-x_P})$ .

Logo,

$$S[f(x)]_O = -(a^{-x}).$$

Portanto, chegamos a uma generalização, ou seja, temos uma **relação de simetrias da função exponencial**:

se  $f(x) = a^x, \forall a \in R_+ - \{1\}$  e  $x \in R$ , então

$$S[f(x)]_x = -(a^x)$$

$$S[f(x)]_y = a^{-x}$$

$$S[f(x)]_O = -(a^{-x})$$

*quod erat demonstrandum.*

#### 4.5.5. Função logaritmo

A função logaritmo é a função do tipo  $f(x) = \log_a x, \forall x \in R_+^*, a \in R_+ - \{1\}$ .

Inicialmente façamos o valor de  $x$  variar e observemos como se comporta a função  $f(x) = \log_2 x$  (função logaritmo de  $x$  na base 2). Iniciemos propositalmente com os números inteiros negativos. Qual o valor de  $f(x)$  quando  $x = -2$ ?  $f(-2) = \log_2(-2) \iff 2^{f(-2)} = -2 \implies f(-2) = ?$ , impossível definir. Qual é o valor de  $f(x)$  quando  $x = -1$ ?  $f(-1) = \log_2(-1) \iff 2^{f(-1)} = -1 \implies f(-1) = ?$ , impossível definir novamente. Tentemos então com  $x = -\frac{1}{2}$ :  $f(-\frac{1}{2}) = \log_2(-\frac{1}{2}) \iff 2^{f(-\frac{1}{2})} = -\frac{1}{2} \implies f(-\frac{1}{2}) = ?$ , novamente, impossível.

Já é possível perceber que a função  $f(x) = \log_2 x$  não possui valores reais quando  $x \in R_-$ , pois observemos que não temos valor real  $y$  que possamos substituir no expoente  $f(-2)$ , a fim de que  $2^y = -2$ , pois, qualquer que seja o valor de  $y \in R$  que escolhermos, teremos sempre um valor positivo para  $2^y$  e jamais obteremos  $-2$  como igualdade.

Isso se deve justamente ao caso  $2^y$  ser uma função exponencial, e sabemos da seção 4.5.4, que a função exponencial não muda de sinal à medida que  $y$  varia nos reais. Verifiquemos o que ocorre quando  $x = 0$ :  $f(0) = \log_2 0 \implies 2^{f(0)} = 0 \implies f(0) = ?$  Não existe expoente  $f(0) \in R$  capaz de satisfazer a equação.

Não é possível também determinar um expoente  $y \in R$  que possamos substituir em  $f(0)$  a fim de que o resultado seja zero. Isso também decorre das propriedades das funções exponenciais.

Já que verificamos que é realmente impossível admitirmos valores negativos, incluindo o zero, para a variável  $x$ , deve ser obviamente possível para valores positivos.

Verificamos então o comportamento de  $f(x) = \log_2 x$  para  $x > 0$ :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{8}\right) &= \log_2 \frac{1}{8} \\ 2^{f\left(\frac{1}{8}\right)} &= \frac{1}{8} \\ 2^{f\left(\frac{1}{8}\right)} &= \frac{1}{2^3} \\ 2^{f\left(\frac{1}{8}\right)} &= \frac{1}{2^3} \cdot \frac{2^{-3}}{2^{-3}} \\ 2^{f\left(\frac{1}{8}\right)} &= \frac{2^{-3}}{2^0} \\ 2^{f\left(\frac{1}{8}\right)} &= 2^{-3} \\ f\left(\frac{1}{8}\right) &= -3. \end{aligned}$$

Analogamente, podemos fazer:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{4}\right) &= \log_2 \frac{1}{4} \implies 2^{f\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4} \implies f\left(\frac{1}{4}\right) = -2 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= \log_2 \frac{1}{2} \implies 2^{f\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} \implies f\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \\ f(1) &= \log_2 1 \implies 2^{f(1)} = 1 \implies f(1) = 0 \\ f(2) &= \log_2 2 \implies 2^{f(2)} = 2 \implies f(2) = 1 \\ f(4) &= \log_2 4 \implies 2^{f(4)} = 4 \implies f(4) = 2 \\ f(8) &= \log_2 8 \implies 2^{f(8)} = 8 \implies f(8) = 3 \end{aligned}$$

Agora, podemos observar o gráfico de  $f(x) = \log_2 x$  (ver figura 60).

Notemos que, analogamente ao que ocorre com as funções exponenciais, o gráfico de  $f(x) = \log_2 x$  é assintótico ao eixo das ordenadas. Ou seja, ele nunca tocará o eixo das ordenadas. Mais uma boa oportunidade de aplicar intuitivamente a definição de limite, que nesse caso, teremos que o limite de  $f(x) = \log_2 x$  quando  $x$  tende a zero é  $-\infty$ .

Vamos agora verificar como devem se comportar as funções simétricas da função logaritmo em relação aos eixos das abcissas e ordenadas e em relação à origem do plano cartesiano ortogonal.

A função  $S[f(x)]_x$  deve passar pelos pontos  $S[A]_x = \left(\frac{1}{8}, 3\right)$ ,  $S[B]_x = \left(\frac{1}{4}, 2\right)$ ,  $S[C]_x = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ,  $S[D]_x = (1, 0)$ ,  $S[E]_x = (2, -1)$ ,  $S[F]_x = (4, -2)$  e  $S[G]_x = (8, -3)$ .

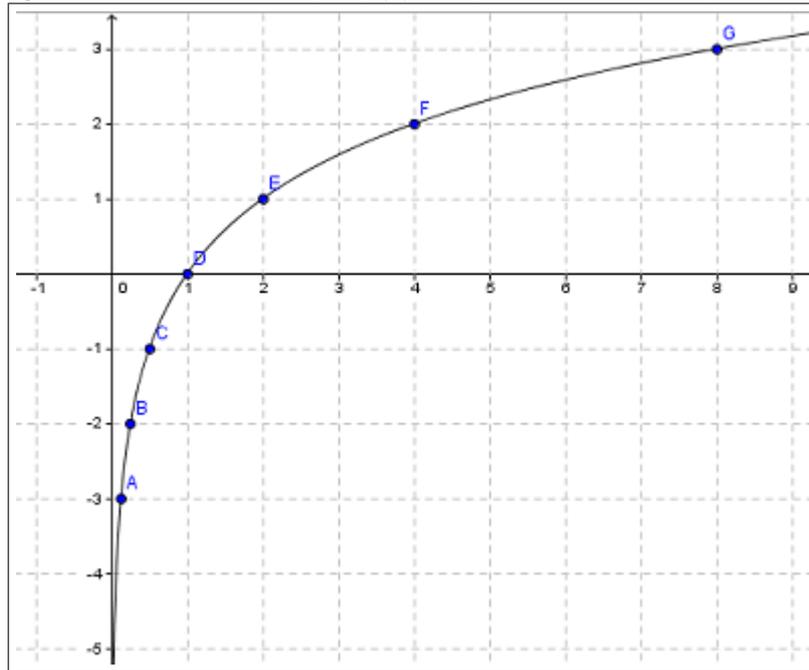
Mas, notemos que:

$$S\left[f\left(\frac{1}{8}\right)\right]_x = 3 \iff S\left[f\left(\frac{1}{8}\right)\right]_x = -f\left(\frac{1}{8}\right)$$

como  $f\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2 \frac{1}{8}$ , e sabendo que  $f\left(\frac{1}{8}\right) = -3$ , temos o seguinte:

$$-f\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2 \frac{1}{8} \iff -3 = \log_2 \frac{1}{8} \iff 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

Figura 60: Gráfico da função  $f(x) = \log_2 x$  com seus principais pontos.



Fonte: Autor, 2014.

que é absolutamente verdadeiro. Ver gráfico da figura 61. Segue daí, que:

$$S[f(\frac{1}{8})]_x = -\log_2 \frac{1}{8}$$

Analogamente ocorre com os demais pontos da função simétrica de  $f(x)$  em relação ao eixo das abscissas. Logo,

$$S[f(x)]_x = -\log_2 x$$

A função  $S[f(x)]_y$  deve passar pelos pontos  $S[A]_y = (-\frac{1}{8}, -3)$ ,  $S[B]_y = (-\frac{1}{4}, -2)$ ,  $S[C]_y = (-\frac{1}{2}, -1)$ ,  $S[D]_y = (-1, 0)$ ,  $S[E]_y = (-2, 1)$ ,  $S[F]_y = (-4, 2)$  e  $S[G]_y = (-8, 3)$ .

Mas, notemos que:

$$S[f(-\frac{1}{8})]_y = -3 \iff S[f(-\frac{1}{8})]_y = \log_2[-(-\frac{1}{8})] = \log_2 \frac{1}{8}$$

como  $f(-\frac{1}{8}) = \log_2[-(-\frac{1}{8})]$ , e sabendo que  $f(\frac{1}{8}) = -3$ , temos o seguinte:

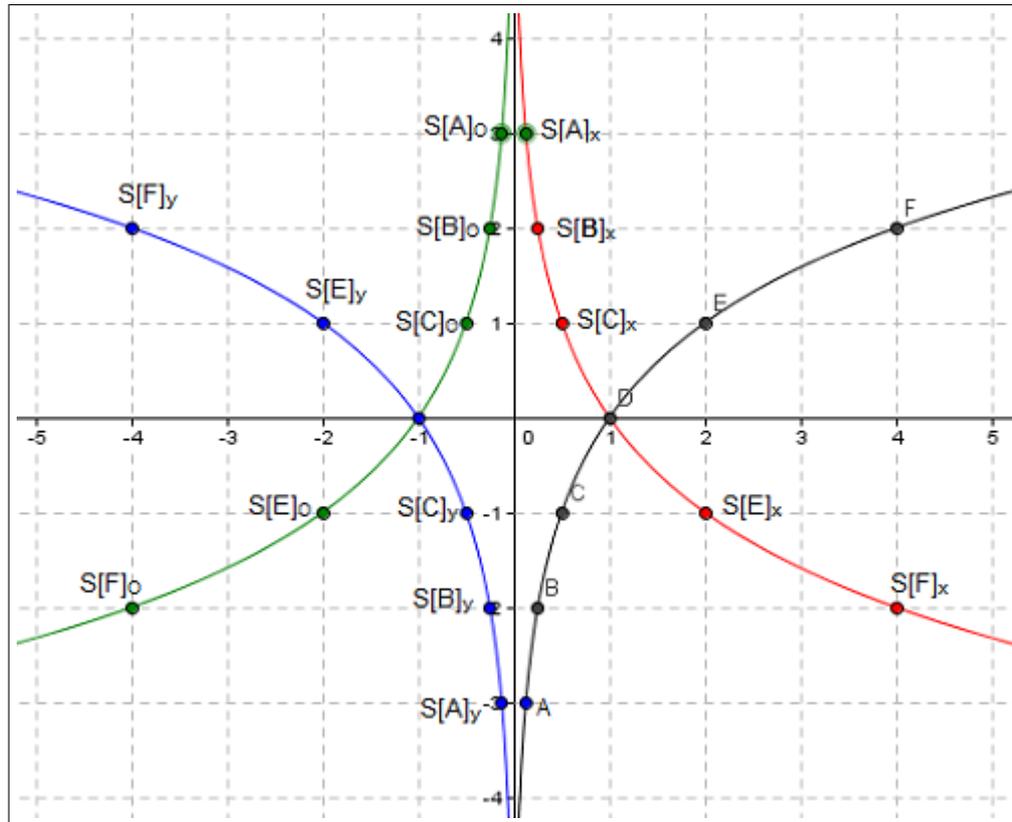
$$f(-\frac{1}{8}) = \log_2[-(-\frac{1}{8})] \iff -3 = \log_2(\frac{1}{8}) \iff 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

que é absolutamente verdadeiro. Segue daí, que:

$$S[f(-\frac{1}{8})]_y = \log_2[-(-\frac{1}{8})]$$

Analogamente ocorre com os demais pontos da função simétrica de  $f(x)$  em relação

Figura 61: Gráfico das funções  $f(x) = \log_2 x$ ,  $S[f(x)]_x$ ,  $S[f(x)]_y$  e  $S[f(x)]_O$ , assinalados os seus principais pontos.



Fonte: Autor, 2014.

ao eixo das ordenadas. Logo,

$$S[f(x)]_y = \log_2(-x)$$

A função  $S[f(x)]_O$  deve passar pelos pontos  $S[A]_O = (-\frac{1}{8}, 3)$ ,  $S[B]_O = (-\frac{1}{4}, 2)$ ,  $S[C]_O = (-\frac{1}{2}, 1)$ ,  $S[D]_O = (-1, 0)$ ,  $S[E]_O = (-2, -1)$ ,  $S[F]_O = (-4, -2)$  e  $S[G]_O = (-8, -3)$ .

Mas, notemos que:

$$S[f(-\frac{1}{8})]_O = 3 \iff S[f(-\frac{1}{8})]_O = -f(-\frac{1}{8}) = -\log_2(-\frac{1}{8})$$

como  $-f(-\frac{1}{8}) = -\log_2(-\frac{1}{8})$ , e sabendo que  $-f(-\frac{1}{8}) = 3$ , temos o seguinte:

$$S[f(-\frac{1}{8})]_O = -\log_2(-\frac{1}{8}) \iff 3 = -\log_2(-\frac{1}{8}) \iff 2^3 = -(-\frac{1}{8})$$

que é absolutamente verdadeiro. Segue daí, que:

$$S[f(-\frac{1}{8})]_O = -\log_2(-\frac{1}{8})$$

Analogamente ocorre com os demais pontos da função simétrica de  $f(x)$  em relação

à origem. Logo,

$$S[f(x)]_O = -\log_2(-x)$$

Mas a questão agora é a seguinte: será que dada uma função logaritmo  $f(x) = \log_a x$  (logaritmo de  $x$  na base  $a$ ), teremos sempre  $S[f(x)]_x = -\log_a x$ ,  $S[f(x)]_y = \log_a(-x)$  e  $S[f(x)]_O = -\log_a(-x)$ ?

Façamos uma demonstração simples, porém convincente, ao menos para os alunos da primeira série do ensino médio. Para tal, tomemos a função  $f(x) = \log_a x$ ,  $\forall b > 0 - \{1\}$  e consideremos o ponto  $P = (x_P, y_P)$  pertencente ao gráfico de  $f(x)$ .

(I) O gráfico da função  $S[f(x)]_x$  deve passar, pela simetria dos pontos no plano cartesiano ortogonal, obrigatoriamente, pelo ponto  $S[P]_x = (x_P, -y_P)$ . Segue daí, que

$$-y_P = \log_a x_P \iff y_P = -\log_a x_P.$$

Logo,

$$S[f(x)]_x = -\log_a x$$

(II) O gráfico da função  $S[f(x)]_y$  deve passar, pela simetria dos pontos no plano cartesiano ortogonal, obrigatoriamente, pelo ponto  $S[P]_y = (-x_P, y_P)$ . Segue daí que  $y_P = \log_a(-x_P)$ .

Logo,

$$S[f(x)]_y = \log_a(-x_P)$$

(III) O gráfico da função  $S[f(x)]_O$  deve passar, pela simetria dos pontos no plano cartesiano ortogonal, obrigatoriamente, pelo ponto  $S[P]_O = (-x_P, -y_P)$ . Segue daí que  $-y_P = \log_a(-x_P) \iff y_P = -\log_a(-x_P)$ .

Logo,

$$S[f(x)]_O = -\log_a(-x).$$

Portanto, chegamos a uma **relação de simetrias da função logaritmo**:

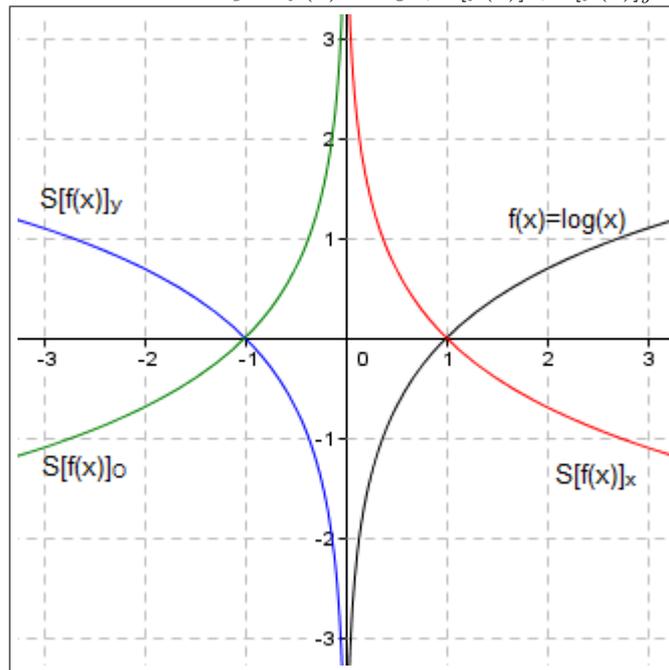
Dada a função logaritmo  $f(x) = \log_a x$ , então

$$\begin{aligned} S[f(x)]_x &= -\log_a x \\ S[f(x)]_y &= \log_a(-x) \\ S[f(x)]_O &= -\log_a(-x) \end{aligned}$$

*quod erat demonstrandum.*

Para efeito de curiosidade, mostramos (figuras 62 e 63) o gráfico das funções  $f(x) = \log x$  (logaritmo decimal de  $x$ , ou logaritmo de  $x$  na base 10) com suas respectivas simétricas e,  $f(x) = \ln x$  (logaritmo neperiano de  $x$ , ou logaritmo de  $x$  na base  $e$ ) com suas respectivas simétricas.

Figura 62: Gráfico das funções  $f(x) = \log x$ ,  $S[f(x)]_x$ ,  $S[f(x)]_y$  e  $S[f(x)]_O$ .



Fonte: Autor, 2014.

#### 4.5.6. Função exponencial X função logaritmo

Agora, vamos analisar como se comportam a função simétrica axial da função exponencial e a função simétrica axial da função logaritmo com relação à reta  $r : x - y = 0$ .

Já vimos, anteriormente, que a função  $S[f(x)]_r = f^{-1}(x)$ . Sabemos que a função inversa (que é equivalente à função simétrica axial em relação à reta  $r : x - y = 0$ ) é dada pela permuta das incógnitas  $x$  por  $y$  e vice-versa. Então, consideremos o seguinte:

(i) seja  $f(x) = a^x$ , fazendo  $f(x) = y$ , para sua inversa, teremos:

$$x = a^y$$

$$\log_a x = y$$

$$f^{-1}(x) = \log_a x;$$

(ii) seja  $f(x) = \log_a x$ , fazendo  $f(x) = y$ , para sua inversa, teremos:

$$x = \log_a y$$

$$a^x = y$$

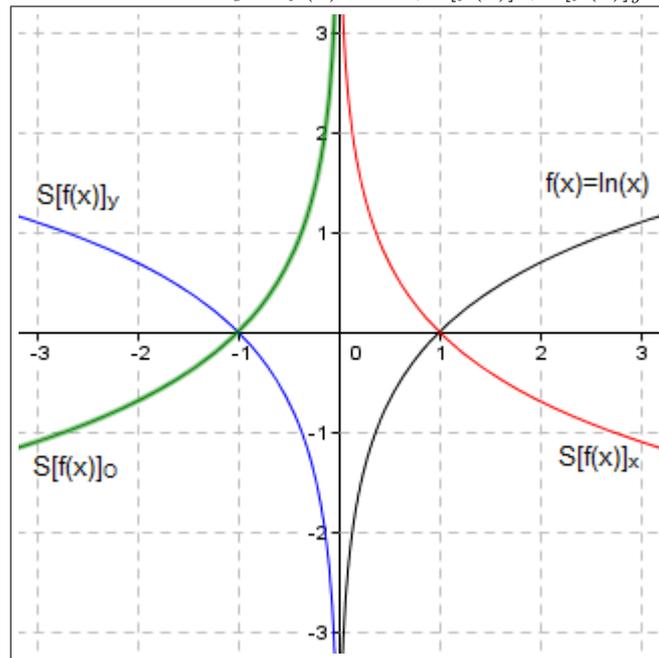
$$f^{-1}(x) = a^x.$$

Analogamente ocorre com a função  $S[f(x)]_r$ , pois sabemos que o ponto simétrico axial de  $P = (x, y)$  em relação à reta  $r : x - y = 0$  é  $S[P]_r = (y, x)$ , ou seja, a função simétrica axial em relação à reta  $r$  também permuta as coordenadas dos pontos.

**De modo geral**, dada a reta  $r : x - y = 0$ , temos:

$$f(x) = a^x \implies S[f(x)]_r = \log_a x$$

Figura 63: Gráfico das funções  $f(x) = \ln x$ ,  $S[f(x)]_x$ ,  $S[f(x)]_y$  e  $S[f(x)]_O$ .



Fonte: Autor, 2014.

e

$$f(x) = \log_a x \implies S[f(x)]_r = a^x$$

Observe, o que ocorre com a função  $f(x) = 2^x$  quando é refletida pela reta  $r : x - y = 0$  (ver figura 64).

Isso ocorre porque, quando fazemos  $f(x) = y$ , temos  $y = 2^x$  e pela simetria axial com relação à reta  $r$  devemos fazer a permuta da incógnita  $x$  por  $y$  e vice-versa (ocorre o mesmo quando queremos a função inversa). Segue daí, que:

$$x = 2^y$$

Quando escrevemos na forma acima, estamos dizendo: qual é o valor do expoente  $y$  que na base 2 nos dá o valor  $x$ . Isso nos remete à noção do logaritmo, pois quando escrevemos:

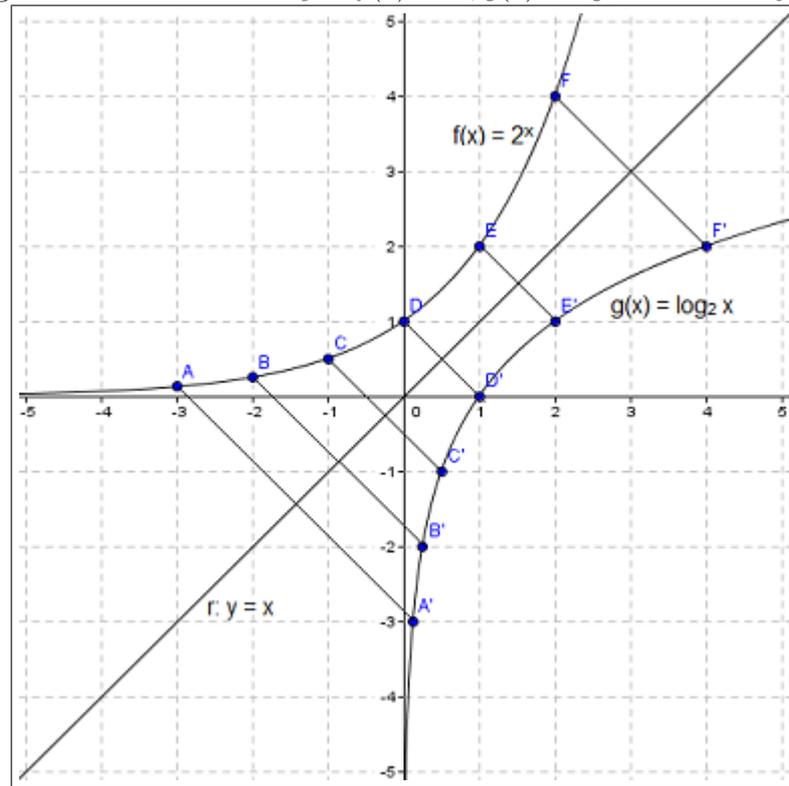
$$\log_2 x = y$$

estamos dizendo que o valor de  $x$  escrito na base 2 é igual a  $y$ . Por esse motivo, temos:

$$S[f(x)]_r = \log_2 x.$$

Observando a figura 64, é possível notarmos que o ponto  $F' = (4, 2)$  pertencente ao gráfico de  $g(x) = \log_2 x$  é simétrico axial com relação à reta  $r$  do ponto  $F = (2, 4)$  pertencente ao gráfico de  $f(x) = 2^x$ , ou seja, o segmento  $\overline{FF'}$  é perpendicular à reta  $r$  e

Figura 64: Gráfico das funções  $f(x) = 2^x$ ,  $g(x) = \log_2 x$  e a reta  $r : y = x$ .



Fonte: Autor, 2014.

ambos os pontos  $F$  e  $F'$  equidistam da reta  $r$ . A fim de verificar essa igualdade, notemos que a intersecção do segmento  $\overline{FF'}$  com a reta  $r$  é o ponto  $P = (3, 3)$ . Segue daí que:

$$d_{FP} = \sqrt{2}$$

e

$$d_{F'P} = \sqrt{2}.$$

O mesmo ocorre com os demais pontos. Isso já é suficiente para nos assegurar que: (a) se  $f(x) = a^x$  então  $S[f(x)]_r = f^{-1}(x) = \log_a x$  e  $S[g(x)]_r = f(x)$ ; e, (b) se  $f(x) = \log_a x$  então  $S[f(x)]_r = f^{-1}(x) = a^x$ . De fato isso ocorre, porque todo ponto  $P = (x_P, y_P)$ , do plano cartesiano ortogonal tem como simétrico axial, em relação à reta  $r : x - y = 0$ , o ponto  $S[P]_r = (y_P, x_P)$ .

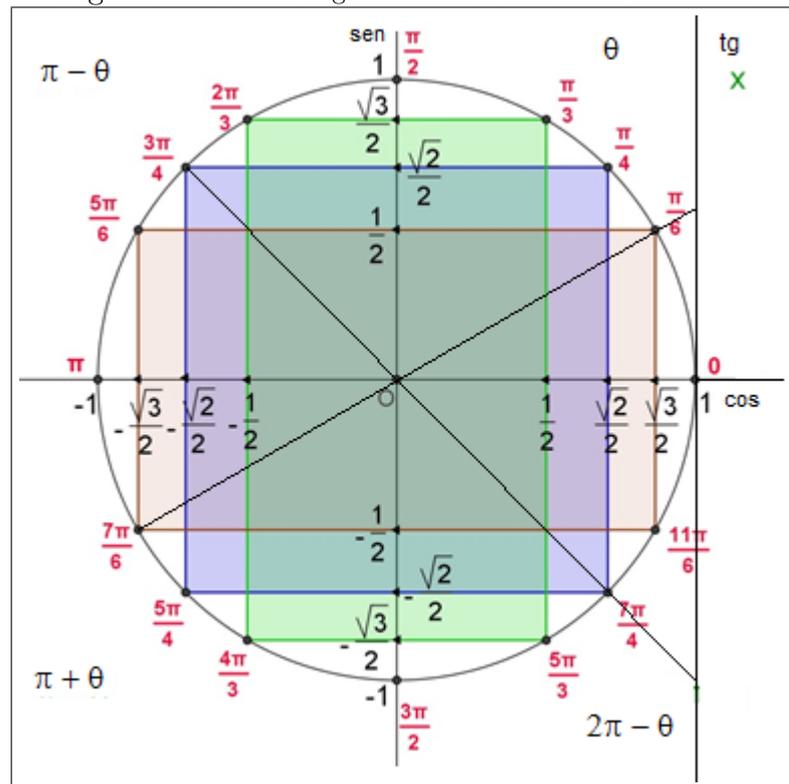
#### 4.5.7. Funções trigonométricas

As funções trigonométricas já têm propriedades simétricas por suas próprias naturezas, pois são funções periódicas e por esse motivo, a cada intervalo  $2\pi rad$  ( $360^\circ$ ), esse período se repete, o que já nos fornece uma aplicação de translação simétrica ou simetria translacional. Fazemos aqui uma breve análise das funções seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente. Às três últimas, somente uma interpretação geométrica a título de

curiosidade, por se tratarem de funções inversas multiplicativas das funções cosseno, seno e tangente, nesta ordem. Contudo, no caso das funções seno, cosseno e tangente, convém analisar também as suas simétricas axiais em relação aos eixos das abcissas e ordenadas, simétrica rotacional em relação à origem do plano cartesiano ortogonal, e, por fim a simétrica axial em relação à reta  $r : x - y = 0$ .

Antes de iniciarmos nossa análise com relação as simetrias das funções trigonométricas, vamos observar o ciclo trigonométrico e suas propriedades simétricas, mais especificamente seus arcos simétricos (ver figura 65). O ciclo trigonométrico é uma circunferência unitária de centro  $(0,0)$ , ou seja, a circunferência de raio 1 e origem na origem do plano cartesiano ortogonal. Devemos compreender que o ângulo de  $0^\circ$  corresponde ao segmento que vai da origem até o ponto  $(1,0)$ . Esse segmento é rotacionado de  $\theta^\circ$  em torno da origem no sentido anti-horário, ou seja, contrário ao sentido do movimento dos ponteiros de um relógio analógico. Esse é o sentido positivo do movimento de rotação. Em outras palavras, se queremos assinalar um arco de  $30^\circ$ , devemos girar o segmento unitário em torno da origem de trinta graus partindo do ângulo nulo. O sentido contrário, o horário, é tido como negativo. Por isso, se queremos assinalar um arco de  $-30^\circ$  devemos rotacioná-lo no sentido horário, partindo do ângulo nulo. Observemos que os valores dos seno, cosseno e tangente de um arco de  $-30^\circ$  corresponde aos valores de um arco de  $330^\circ$ .

Figura 65: O ciclo trigonométrico e seus arcos simétricos.



Fonte: Autor, 2014.

Observando o ciclo trigonométrico (figura 65), temos que o eixo das abcissas corresponde aos valores dos cossenos; o eixo das ordenadas corresponde aos valores dos senos e a reta tangente no ponto  $(1,0)$ , que é perpendicular ao eixo dos cossenos e paralela ao eixo dos senos, corresponde aos valores das tangentes. À direita da origem, no eixo dos cossenos, temos valores positivos para os cossenos; à esquerda, temos os negativos. Acima da origem, temos os valores positivos para os senos; abaixo, temos os negativos. Os valores

das tangentes são positivos, se os arcos se encontram entre o primeiro ou o terceiro quadrante; e, positivos, se se encontram no segundo ou quarto quadrante; sempre que se quiser determinar a tangente de um arco dos segundo ou terceiro quadrantes, deve-se procurar o seu arco simétrico por uma rotação de  $180^\circ$  em relação à origem que se encontram nos quarto ou primeiro quadrantes, respectivamente. Os quadrante são divididos pelos arcos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 0rad &\equiv 0^\circ < 1^\circ\text{quadrante} < 90^\circ \equiv \frac{\pi}{2}rad \\ 90^\circ &\equiv \frac{\pi}{2}rad < 2^\circ\text{quadrante} < 180^\circ \equiv \pi rad \\ \pi rad &\equiv 180^\circ < 3^\circ\text{quadrante} < 270^\circ \equiv \frac{3}{2}\pi rad \\ \frac{3}{2}\pi rad &\equiv 270^\circ < 4^\circ\text{quadrante} < 360^\circ \equiv 2\pi rad \end{aligned}$$

Vamos aos arcos simétricos. Observemos, ainda no ciclo trigonométrico, que o arco de  $\frac{\pi}{6}rad$  tem como simétrico em relação ao eixo dos senos o arco de  $\frac{5}{6}\pi rad$ , ou seja,  $\pi - \frac{\pi}{6}rad$ ; o mesmo arco tem como simétrico em relação à origem o arco de  $\frac{7}{6}\pi rad$ , ou seja,  $\pi + \frac{\pi}{6}rad$ ; o mesmo arco, tem como simétrico em relação ao eixo dos cossenos o arco de  $\frac{11}{6}\pi rad$ , ou seja,  $2\pi - \frac{\pi}{6}rad$ . É justamente essa simetria dos arcos que nos dá as seguintes razões trigonométricas:

(i)

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) &= \cos(150^\circ) = -\cos(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) &= \cos(210^\circ) = -\cos(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) &= \cos(330^\circ) = \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \sin(30^\circ) = \frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) &= \sin(150^\circ) = \sin(30^\circ) = \frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{7}{6}\pi\right) &= \sin(210^\circ) = -\sin(30^\circ) = -\frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{11}{6}\pi\right) &= \sin(330^\circ) = -\sin(30^\circ) = -\frac{1}{2}; \end{aligned}$$

(iii)

$$tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = tg(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{5}{6}\pi\right) &= \operatorname{tg}(150^\circ) = -\operatorname{tg}(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \operatorname{tg}\left(\frac{7}{6}\pi\right) &= \operatorname{tg}(210^\circ) = \operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \operatorname{tg}\left(\frac{11}{6}\pi\right) &= \operatorname{tg}(330^\circ) = -\operatorname{tg}(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

**De um modo geral:** se temos um arco que mede  $\theta$ , tal que,

$$180^\circ > \theta > 90^\circ$$

no segundo quadrante, então esse arco é simétrico de um arco do primeiro quadrante e seu simétrico correspondente é  $(180^\circ - \theta)$ ;  
se temos um arco que mede  $\theta$ , tal que,

$$270^\circ > \theta > 180^\circ$$

no terceiro quadrante, então esse arco é simétrico de um arco do primeiro quadrante e seu simétrico correspondente é  $(\theta - 180^\circ)$ ;  
e, se temos um arco  $\theta$ , tal que,

$$360^\circ > \theta > 270^\circ$$

no quarto quadrante, então esse arco tem um simétrico correspondente no primeiro quadrante, e esse simétrico é dado por  $(360^\circ - \theta)$ .

Deve-se sempre levar em consideração o sinal quando se quer um seno, um cosseno ou uma tangente desse ângulo  $\theta$ . Já que conhecemos os arcos simétricos, vamos às funções trigonométricas.

#### 4.5.7.1. Função seno

É a função  $f(x) = \operatorname{sen}(x); \forall x \in R$ . É possível observar que essa função está limitada ao intervalo  $[-1, 1]$  de acordo com o ciclo trigonométrico, pois temos:

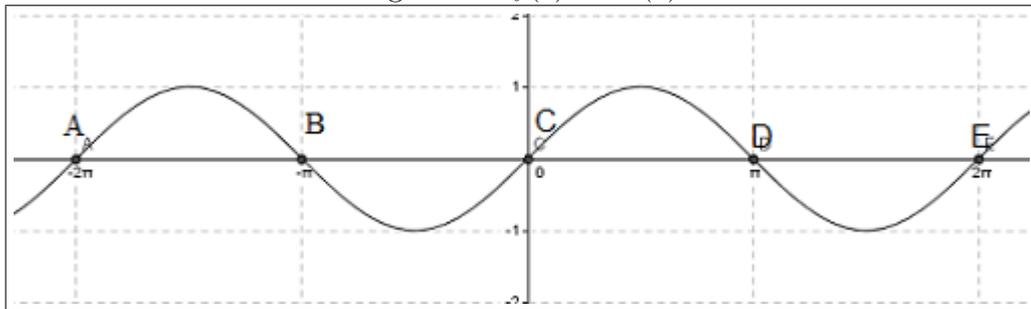
$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(0) &= 0, \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1, \\ \operatorname{sen}(\pi) &= 0, \\ \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi\right) &= -1, \\ \operatorname{sen}(2\pi) &= 0; \end{aligned}$$

a partir daí a função vai se repetindo à medida que  $x$  aumenta. Em outras palavras:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}2k\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1; \forall k \in \mathbb{Z}, \\ \operatorname{sen}2k(\pi) &= 0; \forall k \in \mathbb{Z}, \\ \operatorname{sen}2k\left(\frac{3}{2}\pi\right) &= -1; \forall k \in \mathbb{Z}, \\ \operatorname{sen}2k(2\pi) &= 0; \forall k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Consideramos os números inteiros, pois podemos ter arcos negativos. É possível observar também que a função seno é crescente no intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$ , decrescente no intervalo  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$  e crescente novamente no intervalo  $(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ , ou seja, temos sempre translações dessa função a cada intervalo  $2\pi$ . Tendo conhecido essas propriedades é possível finalmente construir o gráfico de  $f(x) = \operatorname{sen}(x)$  (ver figura 66).

Figura 66:  $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ .



Fonte: Autor, 2014.

Notemos que o gráfico da função seno não é simétrico em relação ao eixo das ordenadas, nem ao eixo das abscissas, o que nos permite determinar esses dois tipos de simetria, mas a função seno é simétrica em relação à origem do plano cartesiano ortogonal; logo, se  $f(x) = \operatorname{sen}(x)$  temos  $S[f(x)]_O = \operatorname{sen}(x)$ , ou seja, a simétrica de  $f(x)$  em relação à origem é a própria  $f(x)$ . Contudo, predomina a simetria translacional. Observemos que a parte do gráfico que vai de  $A$  até  $C$  é exatamente igual a parte do gráfico que vai de  $C$  até  $E$ . Além disso, temos infinitas translações desse tipo por todo o eixo das abscissas, o que nos dá um período  $2k\pi$  para todo  $k$  inteiro.

Com relação ao domínio e a imagem da função, podemos observar o seguinte:

$$D_f = \mathbb{R}$$

e

$$Im_f = [-1, 1]$$

Vamos analisar como se comporta a função simétrica de  $f(x) = \operatorname{sen}(x)$  com relação ao eixo das abscissas e ao eixo das ordenadas.

Observemos que  $S[f(x)]_x$  passa, pela simetria dos pontos no plano cartesiano, pelo ponto  $S[(\frac{\pi}{2}, 1)]_x = (\frac{\pi}{2}, -1)$  e sabendo que  $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$ .

Assim, teremos que:

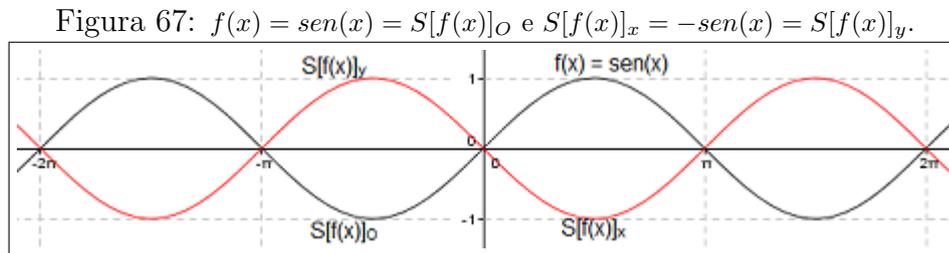
$$S[f(\frac{\pi}{2})]_x = -1 = -\text{sen}(\frac{\pi}{2}).$$

A função  $S[f(x)]_y$  passa, pela simetria dos pontos no plano cartesiano ortogonal, pelo ponto  $S[(\frac{\pi}{2}, 1)]_y = (-\frac{\pi}{2}, 1)$ . Agora notemos, do ciclo trigonométrico, que  $\text{sen}(-\frac{\pi}{2}) = \text{sen}(-90^\circ) = -\text{sen}(90^\circ) = -\text{sen}(\frac{\pi}{2})$ .

Logo,

$$S[f(-\frac{\pi}{2})]_y = -\text{sen}(\frac{\pi}{2})$$

Observemos o gráfico da figura 67.



Fonte: Autor, 2014.

Mas será que sempre que tivermos  $f(x) = \text{sen}(x)$ , teremos sempre  $S[f(x)]_x = -\text{sen}(x)$ ,  $S[f(x)]_y = -\text{sen}(x)$  e  $S[f(x)]_O = \text{sen}(x)$ ? Uma simples demonstração afirma que sim. Suponhamos que o gráfico de  $f(x) = \text{sen}(x)$  passa pelo ponto  $P = (x_P, y_P)$ , assim  $f(x_P) = y_P$ .

A função  $S[f(x)]_x$  deve passar pelo ponto  $S[P]_x = (x_P, -y_P)$ . Segue daí que  $S[f(x_P)]_x = -y_P$ , como  $y_P = \text{sen}(x_P)$  então  $S[f(x_P)]_x = -\text{sen}(x_P)$ .

Logo,

$$S[f(x)]_x = -\text{sen}(x).$$

A função  $S[f(x)]_y$  deve passar pelo ponto  $S[P]_y = (-x_P, y_P)$ . Segue daí que  $S[f(-x_P)]_y = y_P$ , como  $y_P = \text{sen}(x_P) = -\text{sen}(-x_P)$  pelo ciclo trigonométrico, então  $S[f(-x_P)]_y = -\text{sen}(-x_P)$ .

Logo,

$$S[f(x)]_y = -\text{sen}(x).$$

A função  $S[f(x)]_O$  deve passar pelo ponto  $S[P]_O = (-x_P, -y_P)$ . Segue daí que  $S[f(-x_P)]_O = -y_P$ , como  $-y_P = \text{sen}(-x_P) = -\text{sen}(x_P) \implies y_P = \text{sen}(x_P)$  então  $S[f(-x_P)]_O = \text{sen}(x_P)$ .

Logo,

$$S[f(x)]_O = \text{sen}(x).$$

Portanto, chegamos a uma **relação de simetrias da função seno**:

se  $f(x) = \text{sen}(x)$ , então

$$S[f(x)]_x = -\text{sen}(x)$$

$$S[f(x)]_y = -\text{sen}(x)$$

$$S[f(x)]_O = \text{sen}(x)$$

*quod erat demonstrandum.*

Antes de prosseguirmos, vamos fazer uma observação importante: quando escrevemos  $\text{sen}(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ , queremos dizer que  $\frac{\pi}{6} \text{rad}$  é a medida do arco cujo o seno vale  $\frac{1}{2}$ .

Matematicamente, escrevemos:

$$\text{sen}(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \iff \frac{\pi}{6} \text{rad} = \text{arcsen}(\frac{1}{2}).$$

De um modo geral, estamos dizendo,

$$y = \text{sen}(x) \iff x = \text{arcsen}(y),$$

tal que,  $y$  é igual ao seno de um arco  $x$  se, e somente se,  $x$  é igual ao arco cujo seno vale  $y$ .

Entra aqui, mais uma vez, a questão da função inversa. Se,  $f(x) = \text{sen}(x)$  então,  $f^{-1}(x) = \text{arcsen}(x)$ . Os domínio e imagem, agora serão:

$$D_{f^{-1}} = [-1, 1]$$

e

$$Im_{f^{-1}} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Vejamos agora, como se comporta a função seno com relação à reta  $r : x - y = 0$  (bissetriz dos quadrantes ímpares). Inicialmente, observemos que, das relações de simetria axial com à reta  $r$ , dado um ponto  $P = (x, y)$ , temos  $S[P]_r = (y, x)$ . Dessa forma, dado  $f(x) = \text{sen}(x)$  e, fazendo  $f(x) = y$ , devemos ter  $S[f(x)]_r = f^{-1}(x) = \text{arcsen}(x)$ .

**Demonstração:** Dadas a função  $f(x) = \text{sen}(x)$  e a reta  $r : x - y = 0$ , e dado o ponto  $P = (x, y)$  pertencente à  $f(x)$ , temos pela simetria axial dos pontos com relação à bissetriz dos quadrantes ímpares que, a função  $S[f(x)]_r$  passa pelo ponto  $S[P]_r = (y, x)$ . Daí,

$$f(x) = \text{sen}(x) \implies y = \text{sen}(x)$$

e

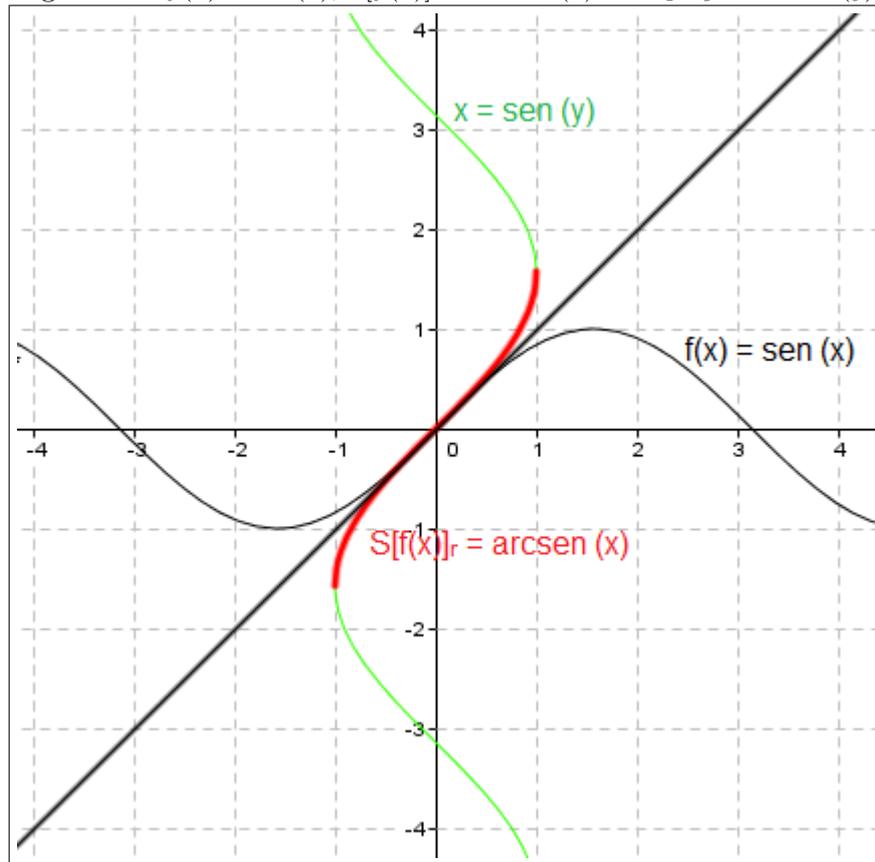
$$S[f(x)]_r = \text{sen}(y)$$

$$x = \text{sen}(y)$$

$$y = \text{arcsen}(x)$$

$$S[f(x)]_r = \text{arcsen}(x).$$

Figura 68:  $f(x) = \text{sen}(x)$ ,  $S[f(x)]_r = \text{arcsen}(x)$  e a equação  $x = \text{sen}(y)$ .



Fonte: Autor, 2014.

Determinemos agora, a função inversa de  $f$ .

$$f(x) = \text{sen}(x) \implies y = \text{sen}(x)$$

permutando as incógnitas  $x$  por  $y$  e vice-versa, temos:

$$x = \text{sen}(y)$$

$$y = \text{arcsen}(x)$$

$$f^{-1}(x) = \text{arcsen}(x).$$

Finalmente, temos uma **relação de simetria axial com relação à reta  $r$**  :  
 $x - y = 0$ :

Dada a função  $f(x) = \text{sen}(x)$  e a reta  $r : x - y = 0$ , temos

$$S[f(x)]_r = \text{arcsen}(x) = f^{-1}(x).$$

Cabe agora, mostrarmos aos discentes que, na função arco seno (inversa da função seno), temos uma função  $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , que associa cada número real  $x$ , pertencente ao intervalo  $[-1, 1]$ ,  $(-1 \leq x \leq 1)$ , a um número real  $y$ , pertencente ao intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2})$ . Portanto, temos domínio e imagem dados por:

$$D_{f^{-1}} = [-1, 1]$$

e

$$Im_{f^{-1}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Fora dos intervalos acima, a curva simétrica axial é representada pela equação  $x = \arcsen(y)$ , esta curva existe, mas não é uma função em  $x$  (ver figura 68).

#### 4.5.7.2. Função cosseno

É a função  $f(x) = \cos(x); \forall x \in R$ . É possível observar que essa função está limitada ao intervalo  $[-1, 1]$  de acordo com o ciclo trigonométrico, pois temos:

$$\cos(0) = 1,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\cos(\pi) = -1,$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0,$$

$$\cos(2\pi) = 1;$$

a partir daí a função vai se repetindo à medida que  $x$  aumenta. Em outras palavras:

$$\cos 2k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \forall k \in Z,$$

$$\cos 2k(\pi) = -1; \forall k \in Z,$$

$$\cos 2k\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0; \forall k \in Z,$$

$$\cos 2k(2\pi) = 1; \forall k \in Z.$$

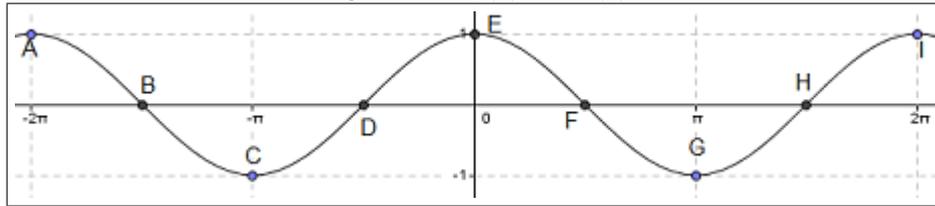
Consideramos os números inteiros, pois podemos ter arcos negativos. É possível observar também que a função cosseno é decrescente no intervalo  $(0, \pi)$  e crescente no intervalo  $(\pi, 2\pi)$ , ou seja, temos sempre translações dessa função a cada intervalo  $2\pi$ . Tendo conhecido essas propriedades é possível finalmente construir o gráfico de  $f(x) = \cos(x)$  (ver figura 69).

Observamos que a função cosseno tem seus domínio e imagem, dados por:

$$D_f = R$$

e

Figura 69:  $f(x) = \cos(x)$ .



Fonte: Autor, 2014.

$$Im_f = [-1, 1]$$

Notemos que o gráfico da função cosseno é simétrico em relação ao eixo das ordenadas; logo, se  $f(x) = \cos(x)$  temos  $S[f(x)]_y = \cos(x)$ , ou seja, a simétrica de  $f(x)$  em relação ao eixo das ordenadas é a própria  $f(x)$ , mas a função cosseno não é simétrica em relação ao eixo das abcissas e à origem do plano cartesiano ortogonal. Contudo, predomina a simetria translacional. Observemos que a parte do gráfico que vai de  $A$  até  $E$  é exatamente igual a parte do gráfico que vai de  $E$  até  $I$ . Além disso, temos infinitas translações desse tipo por todo o eixo das abcissas o que nos dá um período  $2k\pi$  para todo  $k$  inteiro.

Vamos analisar como se comporta a função simétrica de  $f(x) = \cos(x)$  com relação ao eixo das abcissas e à origem do plano cartesiano ortogonal.

Observemos que  $S[f(x)]_x$  passa, pela simetria dos pontos no plano cartesiano, pelo ponto  $S[(\pi, -1)]_x = (\pi, 1)$  e sabendo que  $\cos(\pi) = -1$ , teremos que

$$S[f(\pi)]_x = 1 = -\cos(\pi).$$

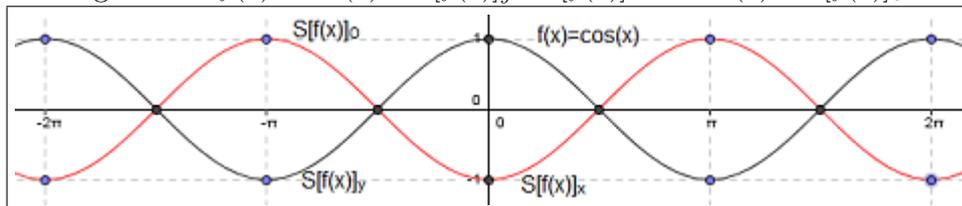
A função  $S[f(x)]_O$  passa, pela simetria dos pontos no plano cartesiano ortogonal, pelo ponto  $S[(\pi, -1)]_O = (-\pi, 1)$ . Agora notemos, do ciclo trigonométrico, que  $\cos(-\pi) = \cos(-180^\circ) = -\cos(180^\circ) = -\cos(\pi)$ .

Logo,

$$S[f(\pi)]_O = -\cos(\pi).$$

Ver gráfico da figura 70.

Figura 70:  $f(x) = \cos(x) = S[f(x)]_y$  e  $S[f(x)]_x = -\cos(x) = S[f(x)]_O$ .



Fonte: Autor, 2014.

Mas será que sempre que tivermos  $f(x) = \cos(x)$ , teremos sempre  $S[f(x)]_x = -\cos(x)$ ,  $S[f(x)]_y = \cos(x)$  e  $S[f(x)]_O = -\cos(x)$ ? Uma simples demonstração afirma que sim. Suponhamos que o gráfico de  $f(x) = \cos(x)$  passa pelo ponto  $P = (x_P, y_P)$ , assim  $f(x_P) = y_P$ .

A função  $S[f(x)]_x$  deve passar pelo ponto  $S[P]_x = (x_P, -y_P)$ . Segue daí que  $S[f(x_P)]_x = -y_P$ , como  $y_P = \cos(x_P)$  então  $S[f(x_P)]_x = -\cos(x_P)$ .

Logo,

$$S[f(x)]_x = -\cos(x).$$

A função  $S[f(x)]_y$  deve passar pelo ponto  $S[P]_y = (-x_P, y_P)$ . Segue daí que  $S[f(-x_P)]_y = y_P$ , como  $y_P = \cos(-x_P) = \cos(x_P)$  pelo ciclo trigonométrico, então  $S[f(-x_P)]_y = \cos(x_P)$ .

Logo,

$$S[f(x)]_y = \cos(x).$$

A função  $S[f(x)]_O$  deve passar pelo ponto  $S[P]_O = (-x_P, -y_P)$ . Segue daí que  $S[f(-x_P)]_O = -y_P$ , como  $-y_P = \cos(-x_P) = -\cos(x_P) \implies y_P = \cos(x_P)$  então  $S[f(-x_P)]_O = \cos(x_P)$ .

Logo,

$$S[f(x)]_O = \cos(x).$$

Portanto, chegamos a uma **relação de simetrias da função seno**:

se  $f(x) = \cos(x)$ , então

$$S[f(x)]_x = -\cos(x)$$

$$S[f(x)]_y = \cos(x)$$

$$S[f(x)]_O = -\cos(x)$$

*quod erat demonstrandum.*

Analisemos como se comporta a função cosseno quando refletida em torno da reta  $r : x - y = 0$ . Já sabemos que se  $f(x) = \cos(x)$  passa pelo ponto  $P = (x, y)$ , então a função simétrica  $S[f(x)]_r$  passa pelo ponto  $S[P]_r = (y, x)$ . Com essas informações, dada  $f(x) = \cos(x)$  e, fazendo  $f(x) = y$ , devemos ter que:  $S[f(x)]_r = \arccos(x) = f^{-1}(x)$ .

**Demonstração:** Dadas a função  $f(x) = \cos(x)$  e a reta  $r : x - y = 0$ , e dado o ponto  $P = (x, y)$  pertencente à  $f(x)$ , temos pela simetria dos pontos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares que  $S[f(x)]_r$  passa pelo ponto  $S[P]_r = (y, x)$ . Segue assim que:

$$f(x) = \cos(x) \implies y = \cos(x)$$

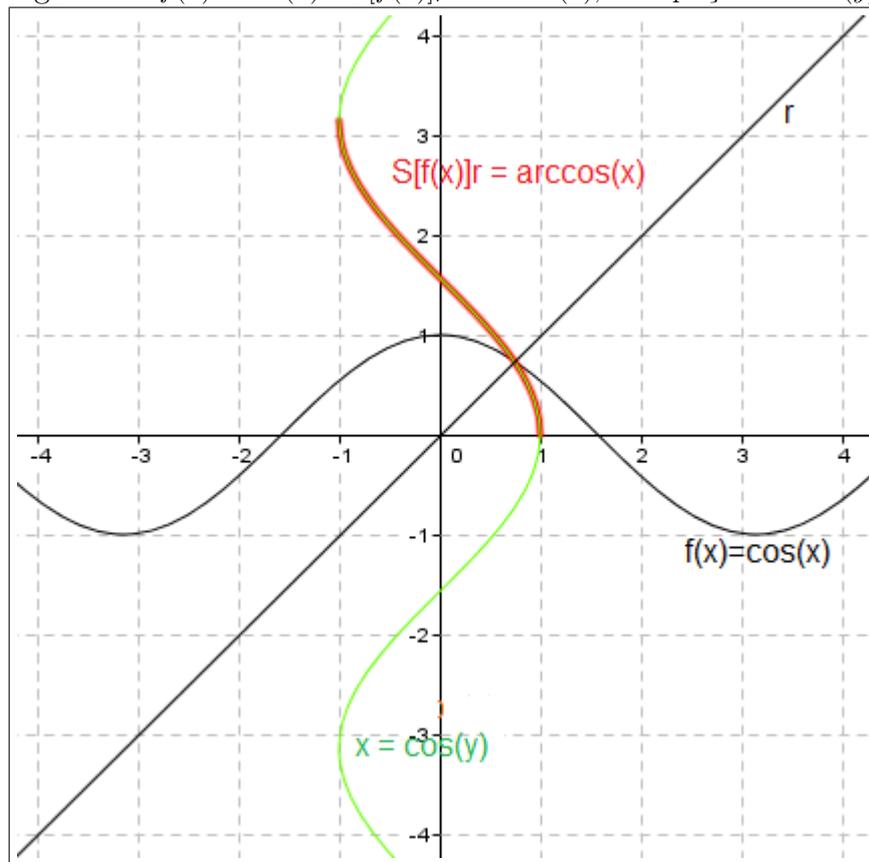
daí,

$$S[f(x)]_r = \cos(y)$$

$$x = \cos(y)$$

$$y = \arccos(x)$$

Figura 71:  $f(x) = \cos(x)$  e  $S[f(x)]_r = \arccos(x)$ , e a equação  $x = \cos(y)$ .



Fonte: Autor, 2014.

$$S[f(x)]_r = \arccos(x)$$

Determinemos agora a função inversa da função cosseno. Temos,

$$f(x) = \cos(x) \implies y = \cos(x)$$

permutando as incógnitas  $x$  por  $y$  e vice-versa, teremos:

$$x = \cos(y)$$

$$y = \arccos(x)$$

$$f^{-1}(x) = \arccos(x).$$

Portanto, dada a função  $f(x) = \cos(x)$  e a reta  $r : x - y = 0$ , temos:

$$S[f(x)]_r = \arccos(x).$$

Observemos na figura 71, o gráfico da função cosseno e sua simétrica axial em relação à reta  $r$ . A função arco cosseno, inversa da função cosseno, é uma função definida por  $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  que associa cada número real  $x$ ;  $-1 \leq x \leq 1$ , ao número real  $y$ ;  $0 \leq y \leq \pi$ . Logo, a função arco cosseno tem seus domínio e imagem dados por:

$$D_{f^{-1}} = [-1, 1]$$

e

$$Im_{f^{-1}} = [0, \pi]$$

Observemos ainda que, a curva simétrica axial, em relação à reta  $r$ , da função  $f(x) = \cos(x)$  é dada pela equação  $x = \cos(y)$ ; essa curva existe, mas não é uma função em  $x$ ; a função simétrica axial da função cosseno é limitada ao intervalo  $[0, \pi]$  (ver figura 71).

### 4.5.7.3. Função tangente

É a função  $f(x) = tg(x); \forall x \in R - \{n\frac{\pi}{2}\}$  tal que  $n$  é número inteiro ímpar. É possível observar que essa função não está limitada a um intervalo de acordo com o ciclo trigonométrico, pois temos:  $tg(0) = 0$ ,  $tg(\frac{\pi}{2}) = ?$ ,  $tg(\pi) = 0$ ,  $tg(\frac{3}{2}\pi) = ?$ , e,  $tg(2\pi) = 0$ . Notemos que não conseguimos definir o valor da tangente em  $\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{3}{2}\pi$ .

É um tanto difícil para os discentes compreenderem a função tangente nos valores  $n\frac{\pi}{2}$ , tal que  $n$  é um número inteiro ímpar. É necessário fazer-se uma análise no ciclo trigonométrico para entender o crescimento e o decrescimento da função tangente e, para isso, os docentes são obrigados mais uma vez a usar a noção de limite e, dessa vez, faz-se necessário utilizar os limites laterais. Não vamos fazer aqui uma análise sistemática da noção de limites laterais, mas é importante entender que é possível mostrar, de um modo simples e convincente aos discentes, a tendência dos valores de  $tg(x)$  quando o arco (ou ângulo)  $x$  se aproxima de  $\frac{\pi}{2}rad$  no movimento anti-horário (positivo) do ciclo trigonométrico e no sentido horário (negativo) do ciclo trigonométrico. Em outras palavras, quando o valor  $x$  se aproxima de  $\frac{\pi}{2}rad$  pela direita e pela esquerda, reciprocamente.

Analisando o ciclo trigonométrico (ver figura 65), admitindo o sentido anti-horário (positivo), podemos observar que a função tangente é crescente no intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$ ; é impossível definir que valor ela terá quando  $x = \frac{\pi}{2}$ , em seguida cresce novamente no intervalo  $(\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2})$ , torna-se novamente impossível determinar o valor que ela terá quando  $x = 3\frac{\pi}{2}$  e, em seguida, ela continua sempre crescendo no intervalo  $(3\frac{\pi}{2}, 2\pi)$ . Mas continua ainda assim a incógnita: o que acontece com o valor da tangente nesses pontos críticos?

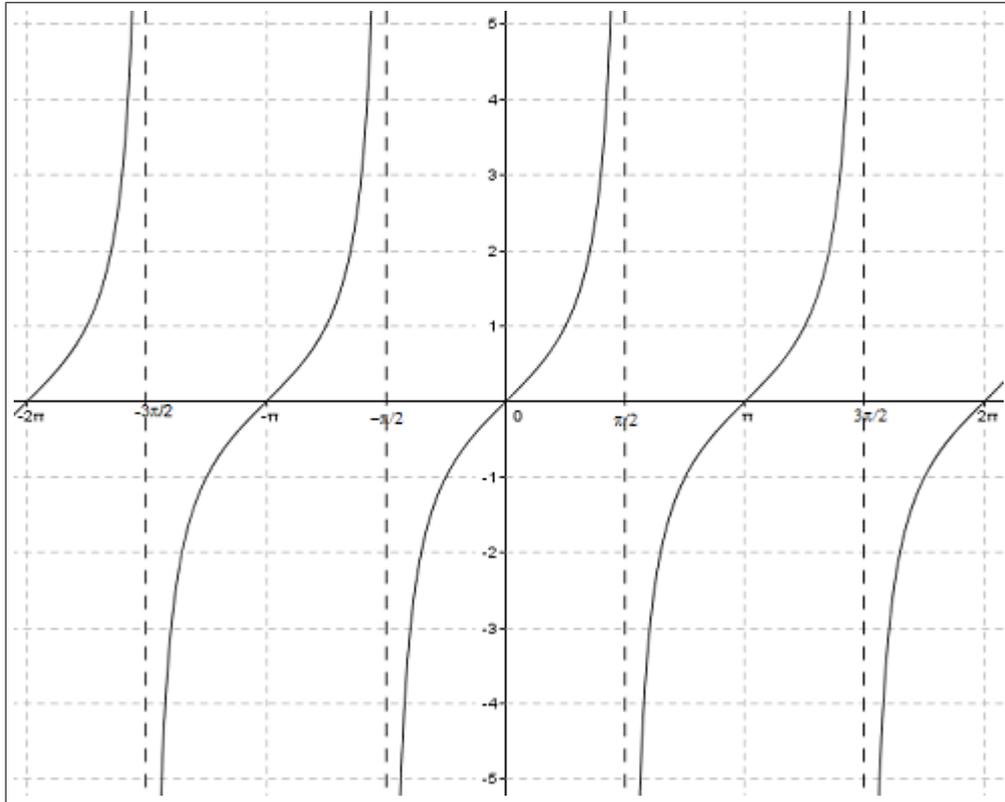
Façamos uma análise mais natural agora, que complementa a primeira. Se adotarmos o sentido horário (negativo), teremos que a função é sempre decrescente, exceto nos mesmos pontos críticos. Instiguemos então a imaginação dos discentes, a fim de usarmos uma noção intuitiva de limites laterais e mostrar a eles que há uma tendência da função tangente aos infinitos nesses pontos críticos.

Observemos, inicialmente, que, à medida que  $x$  vai se aproximando de  $\frac{\pi}{2}rad$  no sentido anti-horário, o valor da tangente vai se tornando muito grande e, quanto mais próximo de  $\frac{\pi}{2}rad$ , esse valor fica ainda maior, ou seja, a tangente cresce infinitamente quanto mais se aproxima de  $\frac{\pi}{2}rad$ . Dizemos então que  $tg(x)$  vai para  $+\infty$  quando  $x$  tende a  $\frac{\pi}{2}rad$  no sentido positivo (pela direita). Esse mesmo procedimento repete-se quando  $x$  se aproxima de  $3\frac{\pi}{2}$  no sentido positivo (pela direita).

Agora, façamos o contrário. Vamos fazer  $x$  se aproximar de  $\frac{\pi}{2}rad$  no sentido horário (negativo). Notemos agora que, à medida que  $x$  se aproxima de  $\frac{\pi}{2}rad$ , o valor da tangente vai ficando cada vez menor e, quanto mais  $x$  vai se aproximando de  $\frac{\pi}{2}rad$ , menor ainda o valor da tangente vai se tornando. Dizemos então que  $tg(x)$  vai para  $-\infty$  quando  $x$  tende a  $\frac{\pi}{2}rad$  no sentido negativo (pela esquerda). Esse mesmo procedimento repete-se quando  $x$  tende a  $3\frac{\pi}{2}rad$  no sentido negativo (pela esquerda).

Com isso, temos que a função tangente é simétrica e predomina a simetria translacional, pois ela se repete a cada um dos intervalos  $(\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}), (3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}), \dots, (n\frac{\pi}{2}, (n+2)\frac{\pi}{2})$  para todo  $n$  ímpar. Com todas essas informações, é possível construir o gráfico da função tangente (ver figura 72).

Figura 72:  $f(x) = tg(x)$ .



Fonte: Autor, 2014.

Notemos que o gráfico da função tangente é simétrico em relação à origem; logo, se  $f(x) = tg(x)$ , temos  $S[f(x)]_O = tg(x)$ , ou seja, a simétrica de  $f(x)$  em relação à origem do plano cartesiano ortogonal é a própria  $f(x)$ , mas a função tangente não é simétrica em relação ao eixo das abscissas e ao eixo das ordenadas. Contudo, predomina a simetria translacional. Observemos que a parte do gráfico que vai de  $-\frac{\pi}{2}$  até  $\frac{\pi}{2}$  é exatamente igual a parte do gráfico que vai de  $\frac{\pi}{2}$  até  $3\frac{\pi}{2}$ . Além disso, temos infinitas translações desse tipo por todo o plano cartesiano, o que nos dá um período  $k\pi$  para todo  $k$  inteiro.

Quanto aos domínio e imagem da função tangente, temos:

$$D_f = (-1, 1)$$

e

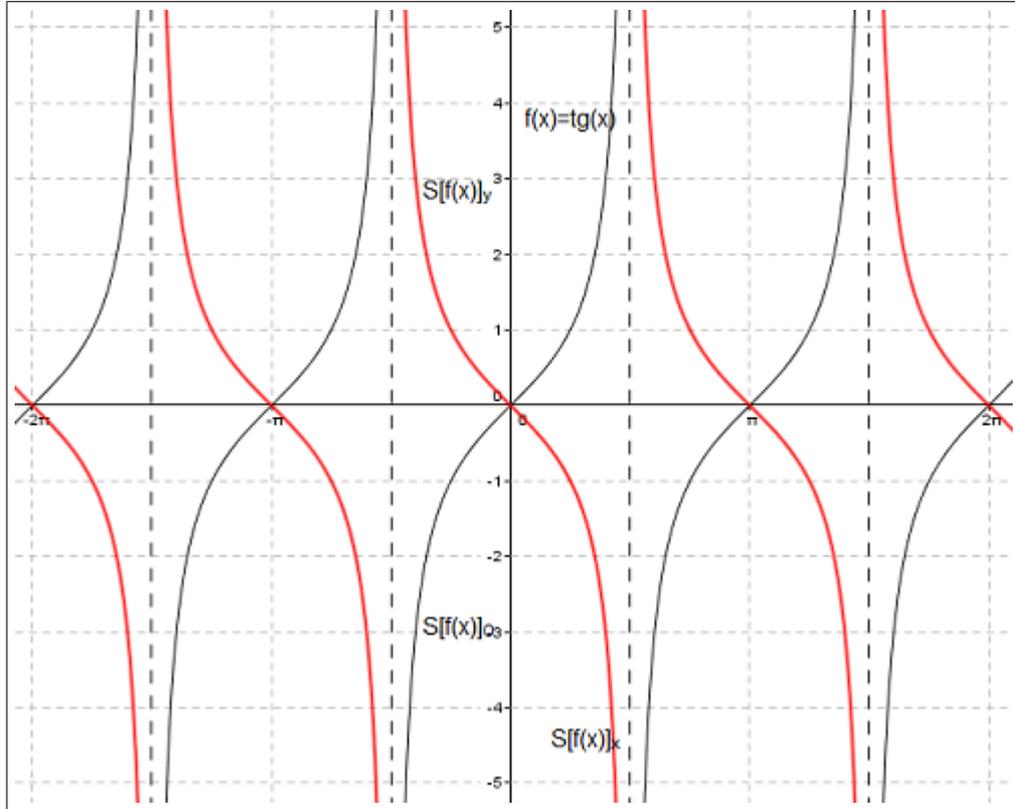
$$Im_f = R$$

Vamos analisar como se comporta a função simétrica de  $f(x) = tg(x)$  com relação ao eixo das abscissas e ao eixo das ordenadas.

Observemos que  $S[f(x)]_x$  passa, pela simetria dos pontos no plano cartesiano, pelo ponto  $S[(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3})]_x = (\frac{\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$  e sabendo que  $tg(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , teremos que  $S[f(\frac{\pi}{6})]_x = -\frac{\sqrt{3}}{3} =$

$-tg(\frac{\pi}{6})$ . A função  $S[f(x)]_y$  passa, pela simetria dos pontos no plano cartesiano ortogonal, pelo ponto  $S[(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3})]_y = (-\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ . Teremos que  $tg(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ , mas notemos, do ciclo trigonométrico, que  $tg(-\frac{\pi}{6}) = -tg(\frac{\pi}{6})$ . Logo,  $S[f(x)]_y = -tg(\frac{\pi}{6})$ . Ver gráfico da figura 73.

Figura 73:  $f(x) = tg(x) = S[f(x)]_O$  e  $S[f(x)]_x = -tg(x) = S[f(x)]_y$ .



Fonte: Autor, 2014.

Mas a questão agora é: será que sempre que tivermos  $f(x) = tg(x)$ , teremos sempre  $S[f(x)]_x = -tg(x)$ ,  $S[f(x)]_y = -tg(x)$  e  $S[f(x)]_O = tg(x)$ ? Uma simples demonstração afirma que sim. Suponhamos que o gráfico de  $f(x) = tg(x)$  passa pelo ponto  $P = (x_P, y_P)$ , assim  $f(x_P) = y_P$ .

A função  $S[f(x)]_x$  deve passar pelo ponto  $S[P]_x = (x_P, -y_P)$ . Segue daí que  $S[f(x_P)]_x = -y_P$ , como  $y_P = tg(x_P)$  então  $S[f(x_P)]_x = -tg(x_P)$ .

Logo,

$$S[f(x)]_x = -tg(x).$$

A função  $S[f(x)]_y$  deve passar pelo ponto  $S[P]_y = (-x_P, y_P)$ . Segue daí que  $S[f(-x_P)]_y = y_P$ , como  $y_P = tg(-x_P) = -tg(x_P)$  pelo ciclo trigonométrico, então  $S[f(-x_P)]_y = -tg(x_P)$ .

Logo,

$$S[f(x)]_y = tg(x).$$

A função  $S[f(x)]_O$  deve passar pelo ponto  $S[P]_O = (-x_P, -y_P)$ . Segue daí que  $S[f(-x_P)]_O = -y_P$ , como  $-y_P = tg(-x_P) = -tg(x_P) \implies y_P = tg(x_P)$  então

$$S[f(-x_P)]_O = tg(x_P).$$

Logo,

$$S[f(x)]_O = tg(x).$$

Portanto, chegamos a uma **relação de simetrias da função tangente**:

se  $f(x) = tg(x)$ , então

$$S[f(x)]_x = -tg(x)$$

$$S[f(x)]_y = -tg(x)$$

$$S[f(x)]_O = tg(x)$$

*quod erat demonstrandum.*

Observemos agora como se comporta a função tangente com relação à reta  $r : x - y = 0$ . Já sabemos, da simetria axial dos pontos no plano, que, se  $f(x) = tg(x)$  passa pelo ponto  $P = (x, y)$ , então, a função  $S[f(x)]_r$  deve passar pelo ponto  $S[P]_r = (y, x)$ . Consequentemente, deveremos ter  $S[f(x)]_r = arctg(x) = f_{-1}(x)$ .

**Demonstração:** Dadas  $f(x) = tg(x)$ ,  $r : x - y = 0$  e o ponto  $P = (x, y)$ ; sabemos que a função simétrica axial da função  $f$  passa pelo ponto  $S[P]_r$ . Fazendo  $f(x) = y$ , temos:

$$f(x) = tg(x) \implies y = tg(x)$$

segue, daí, que sua simétrica axial, em relação à reta  $r$ , é dada por

$$x = tg(y)$$

$$y = arctg(x)$$

$$S[f(x)]_r = arctg(x).$$

A função inversa da função  $f(x)$  é dada pela permuta das incógnitas  $x$  por  $y$  e vice-versa. Daí,

$$x = tg(y)$$

$$y = arctg(x)$$

$$f^{-1}(x) = arctg(x)$$

Portanto, dada a função  $f(x) = tg(x)$  e a reta  $r : x - y = 0$ , temos que

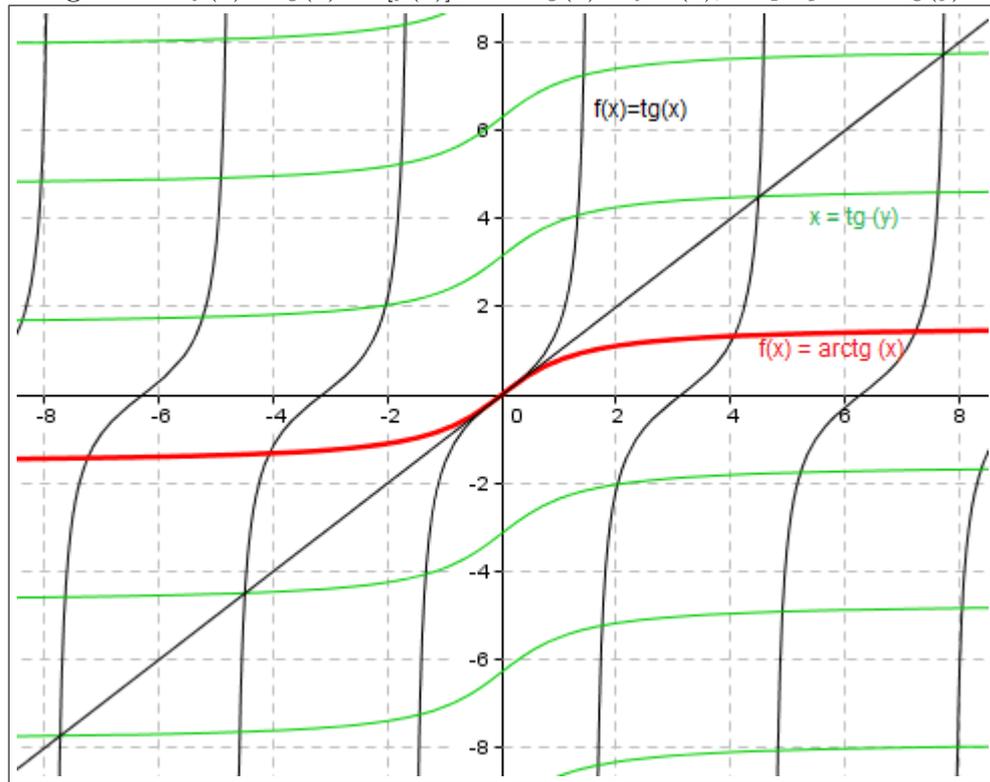
$$S[f(x)]_r = arctg(x) = f^{-1}(x).$$

Ver gráfico da figura 74.

A função arco tangente, inversa da função tangente, tem seus domínio e imagem definidos por:

$$D_{f^{-1}} = R$$

Figura 74:  $f(x) = tg(x)$  e  $S[f(x)]_r = arctg(x) = f^{-1}(x)$ , e equação  $x = tg(y)$ .



Fonte: Autor, 2014.

e

$$Im_{f^{-1}} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Observemos ainda que, a curva simétrica axial, em relação à reta  $r$ , da função  $f(x) = tg(x)$  é dada pela equação  $x = tg(y)$ ; essa curva existe, mas não é uma função em  $x$ ; a função simétrica axial da função tangente é limitada ao intervalo  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  (ver figura 74).

#### 4.5.7.4. Função secante

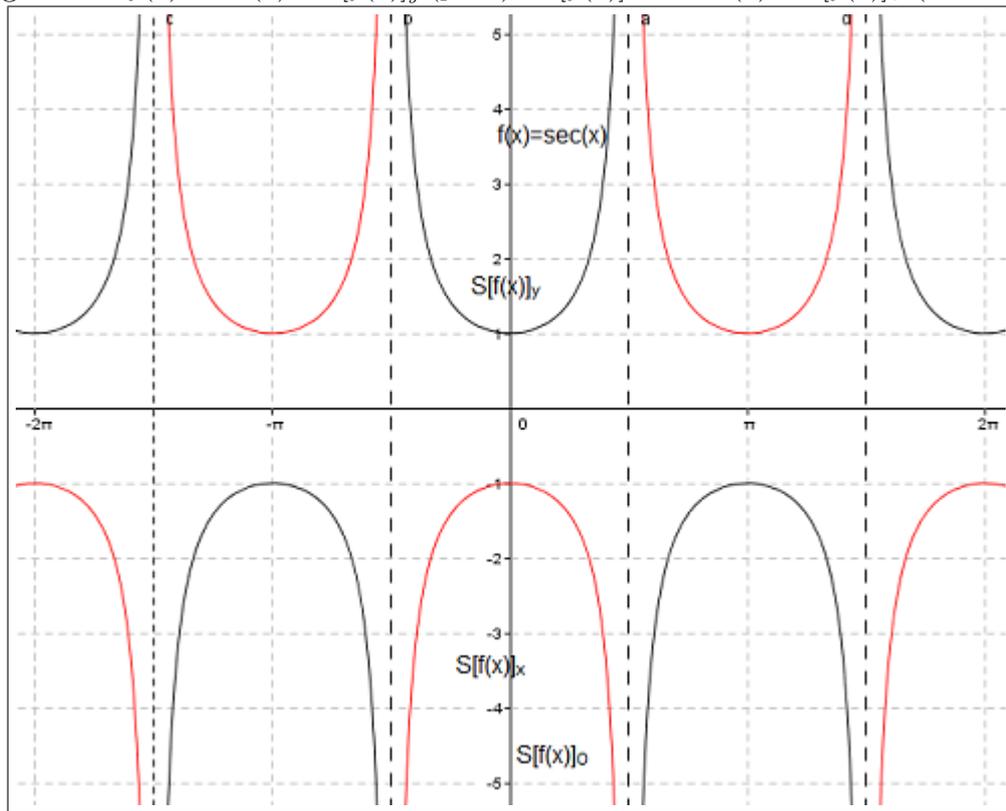
Mostraremos aqui apenas o gráfico da função secante, esclarecendo aos discentes que a função secante trata-se da função inversa multiplicativa da função cosseno. Em outras palavras, temos:

$$f(x) = sec(x) = \frac{1}{cos(x)} = cos(x)^{-1}.$$

Como a função cosseno é rica em simetrias, a sua inversa não poderia ser diferente, é também rica em simetrias (ver figura 75).

A partir do gráfico, podemos observar que na função secante predomina a simetria axial com relação ao eixo das ordenadas e a simetria translacional, pois observemos que a

Figura 75:  $f(x) = \sec(x) = S[f(x)]_y$  (preto) e  $S[f(x)]_x = -\sec(x) = S[f(x)]_O$  (vermelho).



Fonte: Autor, 2014.

curva descrita no intervalo aberto  $(-3\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$  é exatamente igual à curva descrita no intervalo aberto  $(\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2})$  (parte negativa do gráfico) e assim sucessivamente a cada intervalo que mede  $\pi rad$ . Analogamente, ocorre nos intervalos abertos  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  e  $(3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2})$  (parte positiva do gráfico), em que predominam as simetrias de translação. Além disso, notemos que quando  $x = (\dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots)$ , cada uma dessas retas é eixo de simetria da curva descritas nos seus respectivos intervalos.

Agora vamos observar o que ocorre quando refletimos o gráfico da função  $f(x) = \sec(x)$  em relação aos eixos das abcissas e ordenadas e em relação à origem. Temos que  $S[f(x)]_x = -\sec(x)$ ,  $S[f(x)]_y = \sec(x)$  e  $S[f(x)]_O = -\sec(x)$ .

Temos mais uma boa oportunidade de utilizar aqui a interpretação dos limites laterais, pois é possível observar que a função  $f(x) = \sec(x)$  varia nos intervalos  $(-\infty, -1]$  e  $[1, +\infty)$ . Tomemos, por exemplo, o valor  $x = \frac{\pi}{2}$ . É fácil ver que  $f(x) = \sec(x)$  vai para  $+\infty$  quanto mais  $x$  se aproxima do valor  $\frac{\pi}{2} rad$  pela direita, ou seja, no sentido positivo; e, a função  $f(x) = \sec(x)$  vai para  $-\infty$  à medida que  $x$  vai se aproximando de  $\frac{\pi}{2} rad$  pela esquerda, ou seja, no sentido negativo.

Não cabe aqui fazermos demonstrações mais detalhadas do comportamento simétrico da função secante, pois essa função é pouco explorada no ensino médio. Como escrito anteriormente, é apenas um acréscimo que pode e deve ser mostrado aos discentes, para que aqueles que se sintam mais interessados possam buscar mais informações e explorá-la. Nos apêndices mostramos a curva simétrica axial da função secante com relação à reta  $r : x - y = 0$ ; essa curva é representada pela equação  $x = \text{arcsec}(y)$ .

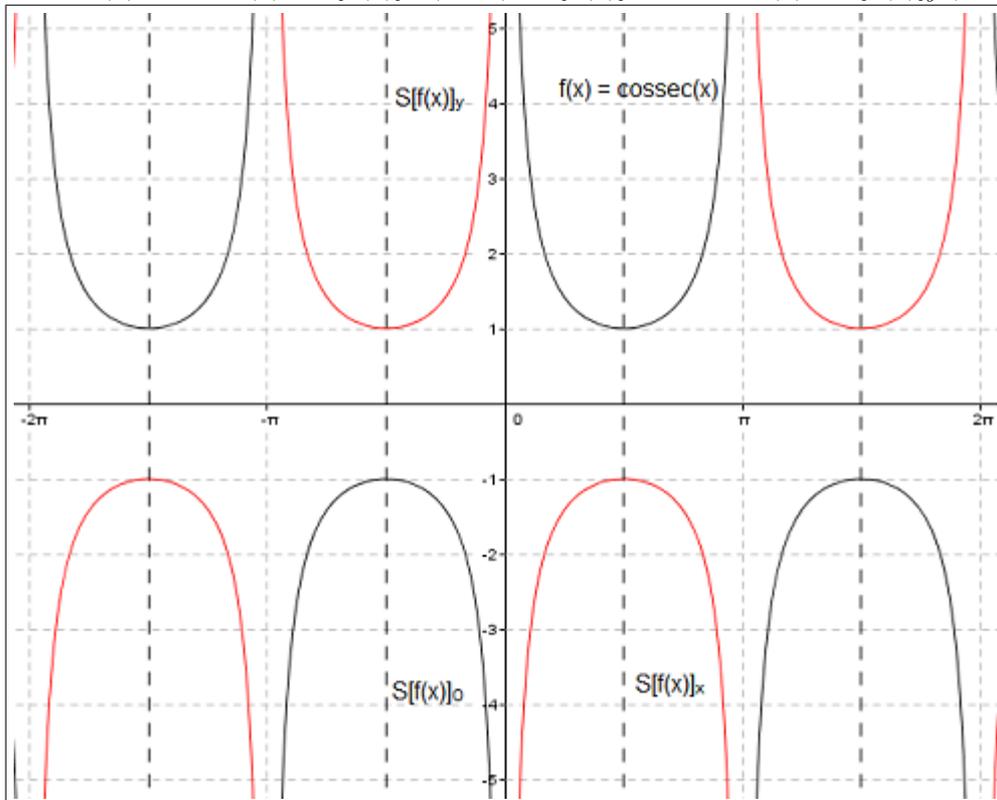
#### 4.5.7.5. Função cossecante

Analogamente ao que foi feito com a função secante, mostraremos aqui apenas o gráfico da função cossecante, esclarecendo aos discentes que a função cossecante trata-se da função inversa multiplicativa da função seno; em outras palavras, temos:

$$f(x) = \operatorname{cossec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} = \operatorname{sen}(x)^{-1}.$$

Como a função seno é rica em simetrias, a sua inversa não poderia ser diferente, é também rica em simetrias (ver figura 76).

Figura 76:  $f(x) = \operatorname{cossec}(x) = S[f(x)]_O$  (preto) e  $S[f(x)]_x = -\operatorname{cossec}(x) = S[f(x)]_y$  (vermelho).



Fonte: Autor, 2014.

A partir do gráfico, podemos observar que na função cossecante predomina a simetria translacional, pois observemos que a curva descrita no intervalo aberto  $(-2\pi, -\pi)$  é exatamente igual à curva descrita no intervalo aberto  $(0, \pi)$  (parte positiva do gráfico) e assim sucessivamente a cada intervalo que mede  $\pi \text{ rad}$ . Analogamente, ocorre nos intervalos abertos  $(-\pi, 0)$  e  $(\pi, 2\pi)$  (parte negativa do gráfico), em que predominam as simetrias de translação. Além disso, notemos que quando  $x = (\dots, -5\frac{\pi}{2}, -3\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}, \dots)$ , cada uma dessas retas é eixo de simetria da curva descritas nos seus respectivos intervalos.

Agora vamos observar o que ocorre quando refletimos o gráfico da função  $f(x) = \operatorname{cossec}(x)$  em relação aos eixos das abscissas e ordenadas e em relação à origem. Temos que  $S[f(x)]_x = -\operatorname{cossec}(x)$ ,  $S[f(x)]_y = -\operatorname{cossec}(x)$  e  $S[f(x)]_O = \operatorname{cossec}(x)$ .

Temos mais uma boa oportunidade de utilizar aqui a interpretação dos limites

laterais, pois é possível observar que a função  $f(x) = \sec(x)$  varia nos intervalos  $(-\infty, -1]$  e  $[1, +\infty)$ . Tomemos, por exemplo, o valor  $x = \pi rad$ . É fácil ver que  $f(x) = \operatorname{cosec}(x)$  vai para  $+\infty$  quanto mais  $x$  se aproxima do valor  $\pi rad$  pela direita, ou seja, no sentido positivo; e a função  $f(x) = \operatorname{cosec}(x)$  vai para  $-\infty$ , à medida que  $x$  vai se aproximando de  $\pi rad$  pela esquerda, ou seja, no sentido negativo.

Do mesmo modo que a função secante, não cabe aqui fazermos demonstrações mais detalhadas do comportamento simétrico da função cossecante, pois esta função é pouco explorada no ensino médio. Como escrito anteriormente, é apenas um acréscimo que pode e deve ser mostrado aos discentes, para que aqueles que se sintam mais interessados possam buscar mais informações e explorá-la. Nos apêndices mostramos a curva simétrica axial função cossecante com relação à reta  $r : x - y = 0$ ; essa curva é dada pela equação  $x = \operatorname{cosec}(y)$ .

#### 4.5.7.6. Função cotangente

De um modo análogo ao que foi feito com as funções secante e cossecante, mostraremos aqui apenas o gráfico da função cotangente, esclarecendo aos discentes que a função cotangente trata-se da função inversa multiplicativa da função tangente; em outras palavras, temos:

$$f(x) = \operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)} = \operatorname{tg}(x)^{-1}.$$

Como a função tangente é rica em simetrias, a sua inversa não poderia ser diferente, é também rica em simetrias (ver figura 77).

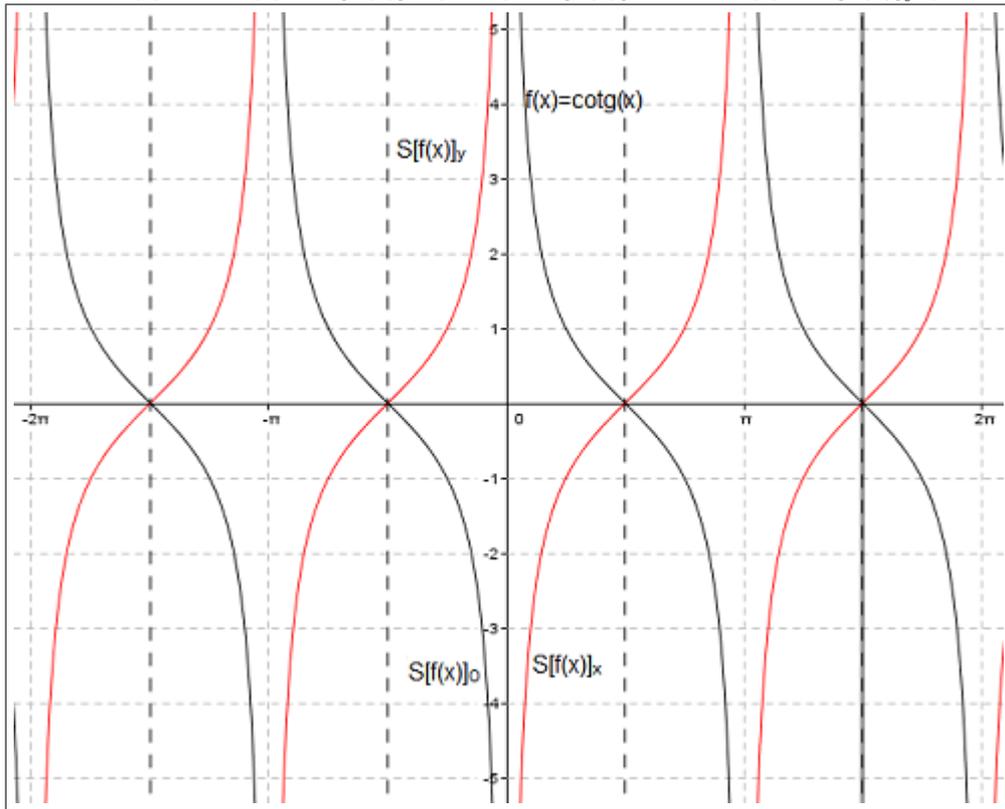
A partir do gráfico, podemos observar que na função cossecante predomina a simetria translacional, pois observemos que a curva descrita no intervalo aberto  $(-2\pi, -\pi)$  é exatamente igual à curva descrita no intervalo aberto  $(0, \pi)$ , predominando assim as simetrias de translação.

Agora vamos observar o que ocorre quando refletimos o gráfico da função  $f(x) = \operatorname{cotg}(x)$  em relação aos eixos das abscissas e ordenadas e em relação à origem. Temos que  $S[f(x)]_x = -\operatorname{cotg}(x)$ ,  $S[f(x)]_y = -\operatorname{cotg}(x)$  e  $S[f(x)]_O = \operatorname{cotg}(x)$ .

Temos mais uma boa oportunidade de utilizar aqui a interpretação dos limites laterais. É possível observar que a função  $f(x) = \operatorname{tg}(x)$  varia nos intervalos abertos  $(n\pi, (n+1)\pi)$  para todo  $n$  inteiro. Tomemos, por exemplo, o valor  $x = \pi rad$ . É fácil ver que  $f(x) = \operatorname{cotg}(x)$  vai para  $-\infty$  quanto mais  $x$  se aproxima do valor  $\pi rad$  pela direita, ou seja, no sentido positivo; e a função  $f(x) = \operatorname{cotg}(x)$  vai para  $+\infty$ , à medida que  $x$  vai se aproximando de  $\pi rad$  pela esquerda, ou seja, no sentido negativo.

Do mesmo modo que as funções cossecante e secante, não cabe aqui fazer demonstrações mais detalhadas do comportamento simétrico da função cotangente, pois esta função também é pouco explorada no ensino médio. Como informado anteriormente, é apenas um acréscimo que pode e deve ser mostrado aos discentes, para que aqueles que se sintam mais interessados possam buscar mais informações e explorá-la. Nos apêndices mostramos a curva simétrica axial da função cotangente com relação à reta  $r : x - y = 0$ ; essa curva é dada pela equação  $x = \operatorname{cotg}(y)$ .

Figura 77:  $f(x) = \cotg(x) = S[f(x)]_O$  (preto) e  $S[f(x)]_x = -\cotg(x) = S[f(x)]_y$  (vermelho).



Fonte: Autor, 2014.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir dos resultados sintetizados neste trabalho, verificamos que os discentes interessaram-se mais pelas aulas de Matemática, pois eles sempre estavam na expectativa de algo novo, diferente do que estava escrito nos livros didáticos adotados pelas escolas. De certo modo, eles aprenderam, ou pelo menos assim o afirmaram, com maior facilidade, quando relacionamos o conhecimento matemático com o seu próprio meio, isto é, com um meio tão natural como a simetria. Pôde-se observar também que os discentes tiveram uma facilidade maior na interpretação e resolução de situações-problemas envolvidas nos exercícios, após ter conhecido as simetrias e suas aplicações.

A abordagem feita sobre as aplicações das simetrias nas artes plásticas e na arquitetura surtiu efeito, pois os discentes, num primeiro contato, ficaram incrédulos, ao verem que uma obra de arte está repleta de conhecimentos matemáticos e de equações aplicadas. Entretanto, logo que se depararam com os gráficos das funções simétricas, eles descobriram a riqueza matemática por trás das obras de Escher.

É importante observarmos como os discentes desenvolveram uma maior capacidade de percepção geométrica visual e habilidades de cálculo, principalmente quando começaram a se deparar com o exercício constante de resolver sistemas do primeiro e segundo graus com duas ou três incógnitas, a fim de determinarem as expressões algébricas que descrevem as curvas simétricas de uma função. Foram aplicados muitos exercícios para que os discentes treinassem suas habilidades. O interesse na resolução dos problemas que envolviam funções também foi maior, haja vista que eles sempre tinham um gráfico que lhes revelava uma obra de arte matemática.

A maioria dos discentes sentiu maior entusiasmo pelos estudos e desenvolveu também maior capacidade de compreensão de determinados conteúdos, tanto na área de Matemática, quanto em outras disciplinas, principalmente em Física e em Química. Segundo relatos dos docentes dessas áreas, que vez ou outra comentavam entre si, os discentes falavam em suas aulas: *“o professor de Matemática já mostrou isso ou aquilo”* - conteúdos que eles estavam lecionando naquele momento.

Pôde-se constatar que o trabalho interdisciplinar, realizado ao longo dos anos, e a sequência lógico-didática que foi seguida neste trabalho, contribuíram, substancialmente, para aumentar a capacidade de compreensão dos discentes tanto dos conteúdos trabalhados na disciplina de Matemática, quanto nas disciplinas que com ela se inter-relacionam, a partir da compreensão e das aplicações das simetrias. Vez por outra, alguns discentes traziam materiais que eles próprios pesquisavam em livros ou na internet.

As experiências fortaleceram as convicções, quanto à importância de se pesquisar ainda mais os efeitos do pensamento abstrato no decurso do uso de materiais concretos para visualização e desenvolvimento de conceitos matemáticos.

A grande frequência com que os discentes resolviam problemas que envolviam sistemas de equações, ajudou-os a aprenderem melhor o conteúdo de sistemas lineares, facilitando assim o trabalho docente na segunda série do ensino médio. O método de resolução de equações do segundo grau sem o uso da fórmula de Bháskara, auxiliou os discentes com relação à geometria analítica, pois, sabemos que, é necessária uma grande habilidade na técnica de completar quadrados quando nos deparamos com problemas que envolvem elipses, parábolas e hipérbolas, conteúdos que são lecionados na terceira série do ensino médio. A análise gráfica também auxiliou os discentes na compreensão de funções, pois com os gráficos simétricos, eles conseguiram identificar, com maior precisão, gráficos que represen-

tam funções e gráficos que representam curvas, que não são funções e sim equações.

As simetrias ainda podem contribuir muito no ensino de Matemática, pois pudemos observar no desenvolver deste trabalho que ela está presente sempre que existe uma invariância. Assim, podemos ver meios de explorar as simetrias no ensino de sequências e progressões, matrizes e determinantes, análise combinatória e probabilidade, geometria analítica, equações polinomiais e números complexos, etc. Mais, também é possível explorar as simetrias em outras disciplinas como Física, Química e Biologia; também na Geografia, História, Língua Portuguesa e Literatura, Música, Dança, Línguas Estrangeiras, dentre outras disciplinas e interdisciplinas.

Por fim, as simetrias contribuíram significativamente para o interesse dos discentes com relação às disciplinas das ciências exatas e da natureza, o que os impulsionou a pesquisarem sobre os conteúdos afins. Em outras palavras, eles deixaram de ser meros expectadores de aulas e passaram a ser sujeitos colaboradores da construção de conhecimentos.

## REFERÊNCIAS

- [1] ASHCROFT, Neil W. & MERMIN, N. David. **Solid States Physics**. Cornell University. United States of America: Brooks/Cole Thomson Learning, 1976.
- [2] BARBOSA. Prof. Antônio Carlos. **Dicionário Dinâmico Ilustrado**. DDI polivalente. Vol. 3. N-Z. 10.ed. São Paulo: Editora Egéria LTDA, 1979.
- [3] BASÍLICA DE SÃO PEDRO. **Basílica de São Pedro**. Vaticano. Disponível em: <[http://www.vatican.va/various/basiliche/san\\_pietro/it/basilica/esterno.htm](http://www.vatican.va/various/basiliche/san_pietro/it/basilica/esterno.htm)>. Acesso em 29 jan. 2014.
- [4] BELLORIN, Maria Jose Gonzales. **Algebra y transformación del plano**. Atp&mat emáticas actual 2012: [www.atp.matematica.actual2012.com](http://www.atp.matematica.actual2012.com). UENIC, 2012. Disponível em: <<http://uenic.blogspot.com.br/>>. Acesso em 26 jan. 2014.
- [5] BRENNAN. Richard P. **Gigantes da Física**. Uma história da Física Moderna através de oito biografias. Trad. Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2003.
- [6] CASSIDY, David Charles. **Uncertainty: The Life and Science of Werner Heisenberg**. New York: Freeman, 1992.
- [7] CAVALCANTE, Luiz G. et al. **Mais Matemática**. 6ª série. São Paulo: Saraiva, 2001a.
- [8] CAVALCANTE, Luiz G. et al. **Mais Matemática**. 8ª série. São Paulo: Saraiva, 2001b.
- [9] COLE, K. C. **O Universo e a Chícara de Chá**. A matemática da verdade e da beleza. Tradução de Elizabeth Leal. Revisão técnica de Michelle Dysman. Rio de Janeiro: Record, 2006.
- [10] DEVLIN, Keith J. **Os problemas do milênio**. Sete grandes enigmas matemáticos de nosso tempo. Tradução de Michelle Dysman. Rio de Janeiro: Record, 2004.
- [11] ESCHER, Maurits Cornelis. **Circle Limit IV**. 1960, woodcut in black end ocre, printed from two blocks. Disponível em: <<http://mcescher.com/gallery/mathematical/circle-limit-iv/>>. Acesso em 29 jan. 2014.
- [12] ESCHER, Maurits Cornelis. **Clowns (nº 21)**. 1938, ink, watercolor. Disponível em: <<http://mcescher.com/gallery/symmetry/no-21-imp/>>. Acesso em 27 jan. 2014.
- [13] ESCHER, Maurits Cornelis. **M. C. Escher**. Biography. The M. C. Escher Company B. V. Disponível em: <<http://mcescher.com/about/biography/>>. Acesso em 27 jan. 2014.
- [14] ESCHER, Maurits Cornelis. **Shells and Starfish**. 1941, India ink, colored pencil, watercolor. Disponível em: <<http://mcescher.com/gallery/symmetry/no-42-shells-and>>

starfish/>. Acesso em 29 jan. 2014.

[15] GOLDSTEIN, Herbert. **Classical Mechanics**. Second edition. United States of America: Addison-Wesley Publishing Company, 1980.

[16] GRIBBIN, John. **In Search of Schrödinger's Cat, Quantum Physics and Reality**. New York: Bantam Books, 1984.

[17] HADDOW, Mairi. **A nova definição de cristais - ou como ganhar um Prêmio Nobel**. Traduzido por Ana Luísa Carvalho. **Science in School**. Disponível em: <<http://www.scienceinschool.org/print/3611>>. Acesso em 26 jan. 2014.

[18] HASSANI, Sadri. **Mathematical Physics**. A Modern Introduction to Its Foundations. New York: Springer, 1999.

[19] IEZZI, Gelson et al. **Matemática: 3ª série. 2º grau; 135 exemplos, 184 exercícios resolvidos, 434 exercícios propostos**. 3.ed. revisada. São Paulo: Atual Editora LTDA, 1974.

[20] LANGDON, Nigel; SNAPE, Charles. **Viva a Matemática**. Lisboa: Gradiva júnior, 1993.

[21] LEVI, Beppo. **Lendo Euclides**. A Matemática e a Geometria sob um olhar renovador. Tradução de Júlian Fuks. Revisão técnica de Michelle Dymann. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2008.

[22] LIBBRECHT, Kenneth. **A diversidade dos cristais de neve sob o microscópio**. Disponível em: <[www.bbc.co.uk/portuguese/especial/411\\_flocos\\_neve/page8.shtml](http://www.bbc.co.uk/portuguese/especial/411_flocos_neve/page8.shtml)>. Acesso em 11 jun. 2014.

[23] LIVIO, Mario. **A equação que ninguém conseguia resolver**. Como um gênio da Matemática descobriu a linguagem da Simetria. 2.ed. revisada. Tradução de Jesus de Paula Assis. Rio de Janeiro: Record, 2011.

[24] MACGILLAVRY, C. H. **Fantasy & Symmetry**. The Periodic Drawings of M. C. Escher. New York: Harry N. Habrams, 1976.

[25] MACHADO, Nilson José. **Matemática e língua materna**. Análise de uma impregnação mútua. 4.ed. São Paulo: Cortez, 1998.

[26] MACHADO, Nilson José. **Matemática e realidade**. 4.ed. São Paulo: Cortez, 1997.

[27] MARANHÃO, Maria Cristina S. de A. **Matemática**. Coleção magistério 2º grau. Série formação geral. São Paulo: Cortez, 1994.

[28] MICHAELIS. **Dicionário de Português Online**. Editora Melhoramentos. Disponível em: <<http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php?lingua=portugues-portugues&palavra=simetria>>. Acesso em 26 jan. 2014.

[29] NOETHER, Emmy. **Teorema de Noether**. Disponível em: <[www.ifi.unicamp.br/~](http://www.ifi.unicamp.br/~)

guzzo/particulas/cap04.pdf>. Acesso em 07 jun. 2014.

[30] OLIVEIRA, Antônio Marmo de; SILVA, Agostinho. **Biblioteca da Matemática Moderna**. Tomo 1. São Paulo: LISA, 1968.

[31] O'CONNOR, J. J. e ROBERTSON, E. F. Artigo. **Ahmes**. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Ahmes.html>>. Acesso em 23 jan. 2014.

[32] PARIS, Notre Dame de. **La Face Occidentale**. Disponível em: <<http://www.notredamedeparis.fr/spip.php?article31>>. Acesso em 29 jan. 2014.

[33] ROBLE. **Esquemas compositivos**. Disponível em: <<http://roble.pntic.mec.es/~mbedmar/iesao/dibujo/simteria.htm>>. Acesso em 26 jan. 2014.

[34] ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**. Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

[35] ROQUE, Tatiana e CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos de História da Matemática**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[36] ROSAMÍGLIA, Márcia Esther et al. **Dicionário Internacional de Idiomas**. Belo Horizonte - MG: E.G.M., 1998.

[37] SILVA, Alberto Heleno Rocha da. **Compreensão do conceito de simetria: Uma visão inter-trans-disciplinar**. Monografia. Garanhuns-PE: UPE, 2006.

[38] SINGH, Simon. **O último teorema de Fermat**. A história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. 10.ed. Tradução de Jorge Luiz Calife. Rio de Janeiro: Record, 2004.

[39] SOUZA, Joamir Roberto de; PATARO, Patricia Rosana Moreno. **Vontade de saber matemática**, 6º ano, 2.ed. São Paulo: FTD, 2012a.

[40] SOUZA, Joamir Roberto de; PATARO, Patricia Rosana Moreno. **Vontade de saber matemática**, 7º ano, 2.ed. São Paulo: FTD, 2012b.

[41] SOUZA, Joamir Roberto de; PATARO, Patricia Rosana Moreno. **Vontade de saber matemática**, 9º ano, 2.ed. São Paulo: FTD, 2012c.

[42] TAHAN, Malba. **Antologia da Matemática**. Vol.1, 2.ed. São Paulo: Edição Saraiva, 1964.

[43] TAHAN, Malba. **Matemática Recreativa: fatos e fantasias**. Vol.1. São Paulo, Edição Saraiva, 1965.

[44] TOFFOLI, Leopoldo. **Dilatação anômala da água**. InfoEscola. Disponível em: <[www.infoescola.com/termodinamica/dilatacao-anomala-da-agua/](http://www.infoescola.com/termodinamica/dilatacao-anomala-da-agua/)>. Acesso em 11 jun. 2014.

- [45] TOFFOLI, Sônia F. L.; SODRÉ, Ulysses. **Matemática Essencial**. Ensino: Fundamental, médio e superior. Ensino Fundamental: Mini Dicionário de Matemática Elementar. 2005. Disponível em: <<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/diciomat/diciomat.htm>>. Acesso em 21 mar. 2014.
- [46] VITRUVIUS, c. 27 a.C. **De Architectura, III, I**. Traduzido em 1914 por M. H. Morgan; reimpresso em 1960 pela Dove Publications (Nova York). Edição brasileira de 1999. POLIÃO, Marco Vitríviu. **Da Arquitetura**. Tradução e notas de Marco Aurélio Lagonegro (São Paulo: HUCITEC/FUPAM) do latim *Vitruvii De Architectura Libri Decem*.
- [47] XAVIER JUNIOR, Milton Morais et all. **Geofísica** – Tópicos de Aula de Propriedades Físicas das Rochas. Natal: UFRN, setembro de 2012. Disponível em: <<http://www.ebah.com.br/content/ABAAAfXOUAA/geofisica-relatorio-topicos-aula-propriedades-fisicas-das-rochas>>. Acesso em 11 jun. 2014.

## APÊNDICES

## RESOLUÇÕES DE ALGUNS PROBLEMAS NA GRAFIA DOS DISCENTES

## Solução 2 do exemplo 4.2.4.

Figura 78: Solução 2 do discente relativa ao problema do exemplo 4.2.4.

$g = \text{galinha}$   
 $c = \text{coelho}$   
 $g \cdot 2 = 2g \rightarrow \text{pés das galinhas}$   
 $c \cdot 4 = 4c \rightarrow \text{pés de coelhos}$   
 vai ficar  
 $\begin{cases} g + c = 30 \text{ (i)} \\ 2g + 4c = 58 \text{ (ii)} \end{cases}$   
 Depois faz  
 $g + c = 30$   
 $g + c - c = 30 - c$   
 $g = 30 - c \text{ (I)}$

$2g + 4c = 58$   
 $2g + 4c - 4c = 58 - 4c$   
 $2g = 58 - 4c$   
 $2g = 58 - 4c$   
 $\frac{2}{2} \quad \frac{2}{2}$   
 $g = 29 - 2c \text{ (II)}$

Agora:  
 $30 - c = 29 - 2c$   
 $30 - c + 2c = 29 - 2c + 2c$   
 $30 + c = 29$   
 $30 + c - 30 = 29 - 30$   
 $c = -1 \text{ coelho}$

tem  
 $g = 30 - c$   
 $g = 30 - (-1)$   
 $g = 30 + 1$   
 $g = 31 \text{ galinha}$

Então tem 31 galinhas e (-1) coelho!

Fonte: Autor, 2014.

## Solução 3 do exemplo 4.2.4.

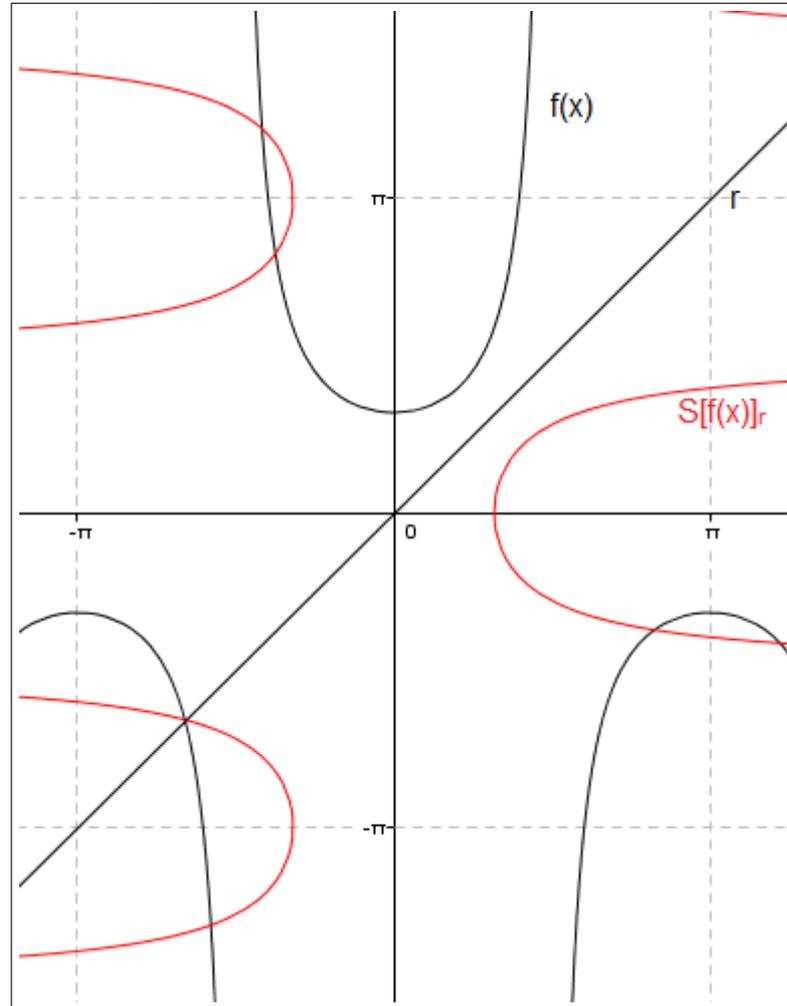
Figura 79: Solução 3 do discente relativa ao problema do exemplo 4.2.4.

$58 : 2 = 29 \text{ galinhas}$   
 $58 : 4 = 14 \text{ coelhos e sobeira 2 pés que é}$   
 $1 \text{ galinha}$   
 Tem 29 galinhas ou tem 14 coelhos e 1 galinha.

Fonte: Autor, 2014.

Simétria axial da função secante com relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

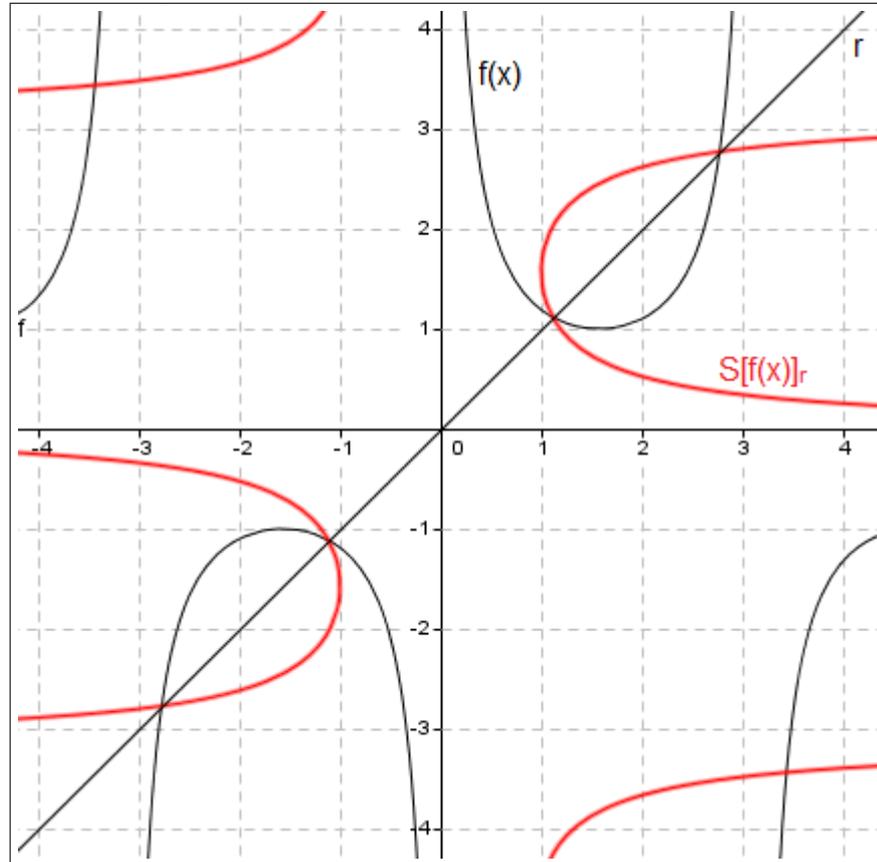
Figura 80:  $f(x) = \sec(x)$  e a curva  $x = \sec(y)$ .



Fonte: Autor, 2014.

Simétria axial da função cossecante com relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

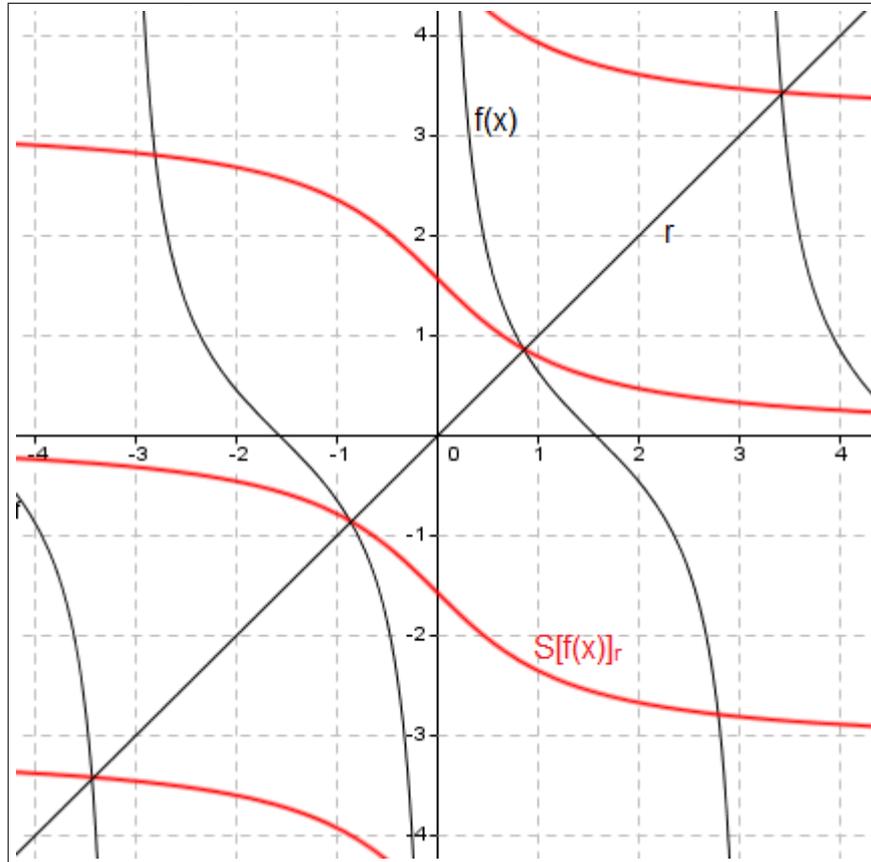
Figura 81:  $f(x) = \operatorname{cosec}(x)$  e a curva  $x = \operatorname{cosec}(y)$ .



Fonte: Autor, 2014.

Simétria axial da função cotangente com relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Figura 82:  $f(x) = \cotg(x)$  e a curva  $x = \cotg(y)$ .



Fonte: Autor, 2014.