

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

MATHEUS BARBOSA MOREIRA CEDRIM

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS BIELAS PARA O DIMENSIONAMENTO DE
CONSOLOS CURTOS COM SUPORTE DA OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA**

Maceió
2019

MATHEUS BARBOSA MOREIRA CEDRIM

**APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS BIELAS PARA O DIMENSIONAMENTO DE
CONSOLOS CURTOS COM SUPORTE DA OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Aline da Silva Ramos Barboza

Coorientador: Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages

Maceió

2019

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central

Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale – CRB4 - 661

C389a Cedrim, Matheus Barbosa Moreira.

Aplicação do método das bielas para o dimensionamento de consolos curtos com suporte da otimização topológica / Matheus Barbosa Moreira Cedrim. – 2019.
144 f. : il.

Orientadora: Aline da Silva Ramos Barboza.

Co-orientador: Eduardo Nobre Lages.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Alagoas.
Centro de Tecnologia. Maceió, 2019.

Bibliografia: f. 139-144.

1. Otimização topológica. 2. Consolos. 3. Bielas e tirantes. 4. Concreto armado. I. Título.

CDU: 624.012.45



**APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS BIELAS PARA O DIMENSIONAMENTO
DE CONSOLOS CURTOS COM SUPORTE DA OTIMIZAÇÃO
TOPOLÓGICA**

MATHEUS BARBOSA MOREIRA CEDRIM

Dissertação submetida à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas e aprovada no dia 30 do mês de maio do ano de 2019.

Banca Examinadora:

Prof.ª Dr.ª Aline da Silva Ramos Barboza
(Orientadora – PPGEC/UFAL)

Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages
(Coorientador - PPGEC/UFAL)

Prof. Dr. Adeldo Soares Ramos Júnior
(Avaliador Interno – PPGEC/UFAL)

Prof. Dr. Daniel de Lima Araújo
(Avaliador Externo – UFG)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pela força para conquistar meus objetivos.

Aos meus familiares, em especial aos meus pais Tania e João, pelo apoio e incentivo durante mais uma etapa da minha educação.

À professora Aline da Silva Ramos Barboza, pela disponibilidade e paciência para o desenvolvimento deste trabalho, auxiliando meu crescimento pessoal e profissional.

Ao professor Eduardo Nobre Lages, por todo o conhecimento transmitido e por suas imensuráveis colaborações para minha vida pessoal e acadêmica.

A todos os professores que fizeram parte da minha formação, do ensino infantil ao ensino superior, cada um tem sua parcela de contribuição.

Aos amigos que conheci no mestrado, em especial, Felipe Pedrosa, Jeremias Christian e Ricardo Vital, por ótimos momentos de convivência e compartilhamento de conhecimento.

A todos meus amigos de longa data e companheiros de vida.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro por meio da concessão da bolsa de mestrado.

Por fim, agradeço a todos ajudaram neste trabalho, direta ou indiretamente.

RESUMO

Os consolos curtos de concreto armado são componentes de ligações entre elementos pré-moldados, caracterizados por representarem situações típicas de descontinuidade geométrica e estática. Para o seu dimensionamento, em geral, não é apropriada a teoria clássica da flexão, em virtude de que não são válidas as hipóteses das seções planas após a deformação. Com o método das bielas, um modelo de treliça autoequilibrada, composta por escoras, regiões nodais e tirantes, surge como uma estratégia de representação das trajetórias de tensões principais em regime elástico linear nesses componentes. Na literatura, diversos modelos são propostos pelas referências normativas e pesquisadores como representação adequada do mecanismo resistente dos consolos. Motivado pelo fato de não haver uma solução única para obtenção dos modelos de escoras e tirantes, a otimização topológica é uma técnica indicada para a definição de uma metodologia de concepção destes modelos. Por meio de uma análise numérica em elementos finitos, a formulação do método SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) de otimização topológica é definida com o critério da mínima energia de deformação com restrição de volume. No dimensionamento dos consolos curtos, analisam-se diferentes geometrias e condições de contorno, e realiza-se uma análise comparativa dos modelos de treliça, na qual se verifica que os modelos obtidos por meio da otimização topológica podem ser consistentes com as referências normativas, desde que requisitos de execução e limites de tensões sejam respeitados. Desta forma, constata-se que a otimização topológica é uma ferramenta válida para a concepção de modelos preliminares, devendo-se sempre garantir os fundamentos do método das bielas.

Palavras-chave: Consolos. Método das bielas. Escoras e tirantes. Otimização topológica.

ABSTRACT

Reinforced concrete short corbels are components of connections between precast elements, characterized to represent typical conditions of geometrical and static discontinuity. For its design, in general, it is not assumed the classical theory of flexure, because the assumptions of the plane sections remain plane after the deformation are not valid. With the strut and tie method, a model of a self-balanced truss, composed by struts, nodal zones and ties, it comes a strategy of representation of the principal stresses flow in a linear elastic behavior in these components. In the literature, several models are proposed by the design codes and researchers as the proper representation of corbels' strength model. Motivated by the fact that there is no unique solution to obtain the strut and tie model, topology optimization is an indicated technique to the definition of a methodology of conception of these models. Using a numerical analysis in finite elements, the formulation of SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) method of topology optimization is defined with the criterion of minimum strain energy restricted by the volumetric fraction. In the design of short corbels, analyzing different geometries and boundary conditions, a comparative analysis of the trusses models was carried out, checking that models obtained using topology optimization can be consistent with the design codes, as long as performance requirements and stresses limits are respected. Thus, it is shown that topology optimization is an effectual tool to the conception of preliminary models, it should always be ensured the fundamentals of strut and tie method.

Keywords: Corbels. Strut-and-tie model. Topology optimization.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Transferência de esforços entre os componentes de uma ligação.....	19
Figura 2 – Representação de um consolo	20
Figura 3 – Trajetória de linhas isostáticas de tensões principais em consolos com $a/h = 0,5$	21
Figura 4 – Classificação de um consolo	22
Figura 5 – Idealização do comportamento e esquema das armaduras principais.....	23
Figura 6 – Carregamento indireto (a) e carregamento direto (b) no consolo	23
Figura 7 – Esquema estático de um modelo de bielas para consolo curto	24
Figura 8 – Princípio de Saint-Venant	26
Figura 9 – Situações típicas de regiões D.....	27
Figura 10 – Regiões de descontinuidade em consolos	27
Figura 11 – Modelo de escoras e tirantes para bloco sobre duas estacas	28
Figura 12 – Armadura em malha cruzando uma escora	31
Figura 13 – Proposta de um modelo de escoras e tirantes para um consolo	31
Figura 14 – Demonstração dos limites de solução	34
Figura 15 – Fluxograma de dimensionamento	35
Figura 16 – Configuração das escoras	37
Figura 17 – Tipos de escoras em regiões D.....	38
Figura 18 – Escora garrafa sem armadura (a) e com armadura (b).....	40
Figura 19 – Escora de concreto sem tração transversal.....	41
Figura 20 – Escora de concreto com tração transversal	41
Figura 21 – Exemplo de nós contínuos e singulares em uma região D.....	42
Figura 22 – Classificação dos nós	43
Figura 23 – Fatores de eficiência do concreto	43
Figura 24 – Representação de detalhamento das armaduras	47
Figura 25 – Armadura típica de um consolo curto	49
Figura 26 – Modelo biela-tirante para consolo curto	50
Figura 27 – Parâmetros para cálculo da tensão na escora	52
Figura 28 – Geometria do modelo de treliça	54
Figura 29 – Modelo de bielas para consolo curto.....	56
Figura 30 – Estratégia de solução em duas treliças	57
Figura 31 – Detalhamento das armaduras do consolo.....	57
Figura 32 – Modelo simplificado do EUROCODE 2 (CEN, 2004).....	58
Figura 33 – Modelo de treliça de Hagberg	60
Figura 34 – Relação geométrica e capacidade máxima.....	61
Figura 35 – Modelo proposto por Leonhardt e Mönnig	62
Figura 36 – Deslocamento da resultante da reação vertical no consolo devido à rotação do elemento	63
Figura 37 – Modelo de Fernandes e El Debs.....	64
Figura 38 – Problema de otimização estrutural	68
Figura 39 – Classes de otimização estrutural	69
Figura 40 – Exemplo de aplicação do método SIMP	72
Figura 41 – Domínio bidimensional para otimização (a) e domínio final otimizado (b).....	72
Figura 42 – Demonstração do módulo de elasticidade “efetivo” em função de ρ	75
Figura 43 – Dependência de malha em uma estrutura simétrica.....	77
Figura 44 – Método <i>ground structure</i> de otimização	79
Figura 45 – Topologias ótimas para viga biapoiada com variação na relação vão/altura	80

Figura 46 – Topologia ótima e padrão preliminar de modelo de treliça	81
Figura 47 – Remoção de elementos com a metodologia SESO	83
Figura 48 – Topologia ótima de uma ponte com tabuleiro central.....	84
Figura 49 – Topologias ótimas considerando (a) material elástico linear (b) material não linear	84
Figura 50 – Topologia ótima da viga de Michell	85
Figura 51 – Exemplo de domínio de referência para otimização	86
Figura 52 – Fluxograma do processo de otimização	92
Figura 53 – Consolo retangular	95
Figura 54 – Modelo de escoras e tirantes considerando a solução ótima.....	96
Figura 55 – Modelo de escoras e tirantes para $f = 20\%$ a) mesmas propriedades, b) diferentes propriedades.....	97
Figura 56 – Topologias ótimas considerando (a) comportamento linear do material e (b) comportamento não linear do material	98
Figura 57 – Modelos de bielas propostos por Guerra (2017).....	98
Figura 58 – Malha adotada	99
Figura 59 – Distribuição ótima de material	100
Figura 60 – Trajetórias de tensões principais para $f = 50\%$	101
Figura 61 – Trajetórias de tensões principais para $f = 40\%$	101
Figura 62 – Modelos de treliças para o consolo retangular.....	102
Figura 63 – Esforços solicitantes para a treliça baseada em $f = 50\%$	104
Figura 64 – Esforços solicitantes para a treliça baseada em $f = 40\%$	104
Figura 65 – Modelos normativos para o consolo retangular	105
Figura 66 – Detalhe dos esforços no consolo retangular.....	107
Figura 67 – Modelo de bielas para o consolo retangular.....	108
Figura 68 – Esforços solicitantes para o modelo proposto.....	109
Figura 69 – Consolo trapezoidal.....	110
Figura 70 – Representação das malhas 2D (a) e (b) adotadas	111
Figura 71 – Condições de contorno.....	111
Figura 72 – Distribuição ótima de material para a malha (a)	112
Figura 73 – Distribuição ótima de material para a malha (b).....	112
Figura 74 – Condições de contorno para consolo modelado sem pilar	113
Figura 75 – Representação das malhas 2D (c) e (d) adotadas	113
Figura 76 – Distribuição ótima de material para a malha (c)	114
Figura 77 – Distribuição ótima de material para a malha (d).....	114
Figura 78 – Malha 3D adotada e condições de contorno	115
Figura 79 – Distribuição ótima de material do modelo 3D	115
Figura 80 – Trajetórias de tensões principais para $f = 50\%$	116
Figura 81 – Trajetórias de tensões principais para $f = 40\%$	117
Figura 82 – Modelos de treliças sugeridos para o consolo trapezoidal	117
Figura 83 – Esforços solicitantes para a treliça baseada em $f = 50\%$	119
Figura 84 – Esforços solicitantes para a treliça baseada em $f = 40\%$	119
Figura 85 – Modelos normativos para o consolo trapezoidal.....	120
Figura 86 – Detalhe dos esforços no consolo trapezoidal	122
Figura 87 – Modelo de bielas proposto para o consolo trapezoidal	123
Figura 88 – Esforços solicitantes para o modelo proposto.....	124
Figura 89 – Consolo trapezoidal duplo	125
Figura 90 – Malha adotada	126
Figura 91 – Distribuição ótima de material	126
Figura 92 – Trajetórias de tensões principais para $f = 50\%$	127

Figura 93 – Trajetórias de tensões principais para $f = 40\%$	127
Figura 94 – Modelos de treliças sugeridos para o consolo trapezoidal duplo.....	128
Figura 95 – Esforços solicitantes para a treliça baseada em $f = 50\%$	129
Figura 96 – Esforços solicitantes para a treliça baseada em $f = 40\%$	130
Figura 97 – Modelos normativos para o consolo trapezoidal duplo.....	131
Figura 98 – Modelo de bielas proposto para o consolo trapezoidal duplo	133
Figura 99 – Esforços solicitantes para o modelo proposto.....	133

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resumo dos parâmetros de resistência das escoras	42
Tabela 2 – Resumo dos parâmetros de resistência das zonas nodais	46
Tabela 3 – Características dos modelos.....	66
Tabela 4 – Resumo das instabilidades numéricas	78
Tabela 5 – Parâmetros da otimização topológica	99
Tabela 6 – Coordenadas do modelo de treliça para $f = 50\%$	102
Tabela 7 – Coordenadas do modelo de treliça para $f = 40\%$	103
Tabela 8 – Dados geométricos do consolo retangular	105
Tabela 9 – Resistências das escoras ($fck = 32 MPa$)	106
Tabela 10 – Tensões máximas atuantes nas escoras do consolo retangular	106
Tabela 11 – Áreas de aço para consolo retangular	106
Tabela 12 – Coordenadas do modelo de treliça para $f = 50\%$	118
Tabela 13 – Coordenadas do modelo de treliça para $f = 40\%$	118
Tabela 14 – Dados geométricos do consolo trapezoidal	120
Tabela 15 – Resistência das escoras ($fck = 20 MPa$)	121
Tabela 16 – Tensões máximas atuantes nas escoras do consolo trapezoidal	121
Tabela 17 – Áreas de aço do consolo trapezoidal	121
Tabela 18 – Coordenadas do modelo de treliça para $f = 50\%$	128
Tabela 19 – Coordenadas do modelo de treliça para $f = 40\%$	129
Tabela 20 – Dados geométricos do consolo trapezoidal duplo	130
Tabela 21 – Tensões máximas atuantes nas escoras do consolo trapezoidal duplo	132
Tabela 22 – Áreas de aço do consolo trapezoidal duplo	132

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
1.1 Objetivos.....	15
1.1.1 Objetivo geral	15
1.1.2 Objetivos específicos	15
1.2 Justificativa.....	15
1.3 Delimitações do trabalho	16
1.4 Organização do texto	17
2 REFERENCIAL TEÓRICO	18
2.1 Ligações entre elementos pré-moldados	18
2.2 Consolos de concreto armado.....	20
2.3 Histórico do método das bielas.....	24
2.4 Fundamentos do método.....	31
2.5 Escoras, zonas nodais e tirantes.....	36
2.5.1 Parâmetros de resistência das escoras	37
2.5.1.1 NBR 6118 (2014)	39
2.5.1.2 ACI 318 (2014).....	39
2.5.1.3 Eurocode 2 (2004)	40
2.5.1.4 Resumo dos parâmetros de resistência das escoras	42
2.5.2 Parâmetros de resistência das zonas nodais.....	42
2.5.2.2 ACI 318 (2014).....	44
2.5.2.3 Eurocode 2 (2004)	45
2.5.2.4 Resumo dos parâmetros de resistência das zonas nodais	45
2.5.3 Parâmetros de resistência dos tirantes	46
2.5.3.1 NBR 6118 (2014)	46
2.5.3.2 ACI 318 (2014).....	46
2.5.3.3 Eurocode 2 (2004)	46
2.6 Modelos de cálculo para consolos curtos	47
2.6.1 Modelo adotado pela NBR 9062 (2017).....	49
2.6.1.1 Dimensionamento do tirante.....	50
2.6.1.2 Verificação da escora.....	51
2.6.1.3 Disposições construtivas.....	52
2.6.2 Modelo adotado pelo PCI (2010)	53
2.6.2.1 Dimensionamento dos tirantes.....	55
2.6.2.2 Verificação das escoras	55
2.6.2.3 Disposições construtivas.....	55

2.6.3 Modelo adotado pelo Eurocode 2 (2004)	56
2.6.3.1 Dimensionamento do tirante.....	57
2.6.3.2 Verificação da escora.....	58
2.6.3.3. Disposições construtivas	59
2.6.4 Modelo proposto por Hagberg (1983)	59
2.6.5 Modelo proposto por Fernandes e El Debs (2005).....	62
2.6.6 Resumo dos modelos apresentados	65
2.7 Otimização estrutural.....	67
2.7.1 Definições.....	67
2.7.2 Métodos de otimização topológica	70
2.7.3 Método SIMP	71
2.7.4 Aplicações para o método das bielas	78
3 MODELAGEM NUMÉRICA	86
3.1 Algoritmo de otimização topológica	86
3.2 Utilização do <i>software</i> ABAQUS®	89
3.3 Definição dos modelos de treliça.....	93
4 ESTUDOS DE CASO.....	95
4.1 Consolo retangular.....	95
4.1.1 Resultados da literatura	96
4.1.2 Resultados do Modelo 2D com o método SIMP	99
4.1.3 Dimensionamento do consolo retangular	101
4.2 Consolo trapezoidal	110
4.2.1 Resultados do Modelo 2D com o método SIMP	110
4.2.1.1 Modelo 2D com a consideração do pilar	111
4.2.1.2 Modelo 2D sem a consideração do pilar	113
4.2.2 Resultados do Modelo 3D com o método SIMP	115
4.2.3 Dimensionamento do consolo trapezoidal.....	116
4.3 Consolo trapezoidal duplo	125
4.3.1 Resultados do Modelo 2D com o método SIMP	126
4.3.2 Dimensionamento do consolo trapezoidal duplo.....	127
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	135
REFERÊNCIAS	139

1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento tecnológico vem proporcionando avanços cada vez maiores em todos os setores produtivos do país. A necessidade por rapidez e qualidade nos processos construtivos se reflete na busca por edificações cada vez mais eficientes e duráveis. Atualmente, as alternativas de concepção estrutural são bem diversificadas, visto que diversos sistemas construtivos – concreto armado, concreto protendido, alvenaria estrutural, aço – estão disponíveis e são consagrados no mercado.

O sistema construtivo em estruturas de concreto pré-moldado vem ganhando destaque pela versatilidade e racionalização do processo construtivo. El Debs (2017) ressalta as vantagens do emprego do concreto pré-moldado em relação ao projeto, construção, uso e características sociais, fornecendo características que favorecem a disseminação do sistema no âmbito da industrialização da construção.

Dentre as características positivas do sistema, conceituadas no meio técnico, cita-se a vantagem da produção em fábrica, facilitando os processos de manufatura, que ocorrem de maneira mais eficaz e racional. Destaca-se ainda o uso otimizado dos materiais, proporcionando melhor desempenho e vida útil do concreto utilizado. Observa-se também um menor tempo de execução da estrutura, ajudando a reduzir o prazo total de construção, e um ganho relativo à durabilidade, dado que há um maior controle de produção dos elementos pré-fabricados.

El Debs (2017) relaciona que a concepção dos sistemas estruturais deve levar em conta os aspectos construtivos e aspectos estruturais. Nos sistemas estruturais de concreto pré-moldado, geralmente se procura privilegiar as facilidades de manuseio e transporte dos elementos, bem como as facilidades de montagem e execução das ligações responsáveis por formar a estrutura.

Ferreira (1999) retrata as ligações como regiões particulares na estrutura pré-moldada, onde ocorrem concentrações das tensões, fazendo com que se torne uma região de descontinuidade estática, na qual não são válidas as hipóteses da teoria de flexão. As formas e modelos de transferência de esforços localizados são objetos de intensa pesquisa para o projeto de ligações. A adoção de modelos de cálculo baseado em teorias de biela-tirante e atrito-cisalhamento, em geral, são abordadas para estes elementos.

Na maioria dos elementos fletidos em concreto estrutural, o dimensionamento é fundamentado na hipótese de Euler-Bernoulli, assumindo que as deformações ao longo da altura do elemento fletido são mantidas lineares e, conseqüentemente, a seção transversal que inicialmente é plana, permanece plana. Para os casos de elementos especiais, que contêm

regiões de descontinuidades, a distribuição das deformações na seção transversal não é linear, tornando o problema estrutural mais complexo.

Dentre os elementos empregados em estruturas pré-moldados, os consolos curtos, dentes tipo Gerber e cálices são citados na norma brasileira NBR 9062 (ABNT, 2017) como elementos que são analisados com modelo de biela-tirante. Com essa metodologia, é possível avaliar o comportamento estrutural por meio de uma treliça idealizada.

Souza (2004) explica que a palavra biela, de origem francesa “*bielle*”, é um termo genérico que se refere a um certo volume de material que pode sofrer tração ou compressão. Se a biela estiver sendo tracionada, ela é denominada de tirante, e se ela estiver sendo comprimida, ela é denominada de escora.

Para a obtenção do modelo de bielas, é usual recorrer aos métodos numéricos para o entendimento do comportamento estrutural de elementos especiais. Com o avanço das ferramentas tecnológicas disponíveis, torna-se necessária a utilização destes métodos para projetos mais ousados e arrojados. Atualmente, as normas que tratam de projetos de estruturas de concreto já sugerem a utilização do Método dos Elementos Finitos (MEF) para a visualização do caminho de cargas via trajetória das tensões principais, a exemplo da NBR 6118 (ABNT, 2014).

Buscando a compreensão dos caminhos de cargas em diversos elementos estruturais, associar um método numérico com técnicas de otimização é uma tendência para automatizar e garantir melhores estratégias de concepção das estruturas. Sendo assim, com o desenvolvimento da metodologia de otimização topológica, que visa uma distribuição ótima de material em um domínio previamente definido, é possível usufruir de uma ferramenta de apoio que auxilie o projetista nas tomadas de decisões.

Não há uma única solução para a obtenção dos modelos de bielas. Apesar de existirem diversas formas para sua definição, as referências normativas para estruturas de concreto armado NBR 6118 (ABNT, 2014), ACI 318 (2014) e Eurocode 2 (CEN, 2004) não abordam a utilização da otimização topológica como forma de obtenção destes modelos.

Com isto, este trabalho caracteriza alguns dos modelos existentes na literatura para o dimensionamento de consolos curtos e fornece indicativos para a utilização de modelos provenientes do processo de otimização topológica, de forma a subsidiar os projetistas com uma ferramenta de apoio que utiliza como fundamento a maximização da rigidez.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

Este trabalho tem como objetivo geral o desenvolvimento de modelos de escoras e tirantes para consolos curtos de concreto armado com a utilização da otimização topológica como ferramenta de apoio.

1.1.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- a) Apresentar os procedimentos de projeto para o dimensionamento de consolos curtos de acordo com o método das bielas.
- b) Analisar consolos curtos com a utilização do Método dos Elementos Finitos (MEF) para a definição de uma topologia ótima do modelo de bielas.
- c) Avaliar a influência das variáveis do procedimento de otimização topológica para o desenvolvimento de modelos ótimos de bielas.

1.2 Justificativa

O trabalho segue a linha de pesquisa de Mecânica de Materiais e de Estruturas do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, fornecendo embasamento teórico para a continuidade das dissertações relacionadas aos elementos de concreto pré-moldado e ligações entre elementos de concreto armado.

No primeiro trabalho de análise de componentes das ligações entre elementos pré-moldados, Araújo (2005) realizou o estudo numérico e experimental de juntas de argamassa reforçadas com fibras de propileno, fornecendo parâmetros para a avaliação de desempenho do comportamento deste componente.

Seguindo a linha de estruturas pré-moldadas, os demais trabalhos contribuíram no contexto do comportamento global, não se preocupando em analisar isoladamente apenas um componente da ligação. Queirós (2007) e Almeida (2014) trabalharam com a análise de rigidez das ligações em elementos pré-moldados, sendo que o último incluiu análises não lineares física e geométrica.

Araújo (2013) realizou um estudo numérico das ligações viga-pilar em sistemas de concreto de modo geral, considerando variações de parâmetros geométricos para a definição do grau de rigidez destas ligações. Posteriormente, Guillou (2014) propôs uma definição de um modelo de escoras e tirantes para um bloco de transição entre pilares rotacionados, assumindo também o comportamento não linear físico do concreto para a verificação da carga última.

De modo a analisar especificamente um componente da ligação entre elementos pré-moldados, os consolos curtos, ressalta-se a importância desse trabalho, uma vez que são elementos com descontinuidade geométrica e estática, nos quais não são válidas as hipóteses da teoria da flexão. Estes podem ser analisados com diferentes modelos de cálculo propostos por diversas referências normativas e pesquisadores, os quais há divergência sobre qual modelo de treliça é o mais adequado para cada caso de projeto.

Com o intuito de automatizar o processo e auxiliar na escolha do modelo de treliça que melhor represente o comportamento estrutural, utiliza-se a técnica de otimização topológica, que consiste na distribuição ótima de material dentro de um domínio de projeto previamente estabelecido. Estas análises auxiliam no desenvolvimento do modelo de escoras e tirantes de forma mais criteriosa, posto que se utiliza o fundamento matemático para a maximização da rigidez.

Em virtude de fatores como a agilidade nas concepções estruturais e assertividade nas tomadas de decisões, o desenvolvimento de novas ferramentas se torna necessário para aliar procedimentos de cálculo mais elaborados com uma execução das atividades em menor tempo, conciliando segurança e economia. Neste sentido, a otimização topológica pode vir a proporcionar soluções eficientes para o dimensionamento de componentes estruturais.

1.3 Delimitações do trabalho

O trabalho se limita ao estudo de consolos curtos de concreto armado com forma retangular ou trapezoidal. As análises estáticas via MEF foram delimitadas para as considerações de um material homogêneo, isotrópico e elástico linear.

1.4 Organização do texto

Esta seção apresenta a organização dos capítulos do presente trabalho. Sendo este o primeiro capítulo, apresentou-se uma breve contextualização do problema, descrevendo objetivos, justificativa e delimitações do trabalho. Os conteúdos do segundo ao quinto capítulos são descritos a seguir.

O Capítulo 2 apresenta um referencial teórico sobre os consolos curtos e o método das bielas, abrangendo a fundamentação teórica, aspectos normativos e modelos de cálculo para consolos curtos. Neste mesmo capítulo, há uma abordagem conceitual dos métodos de otimização estrutural, com enfoque na otimização topológica, citando aplicações para obtenção de modelos de bielas.

O Capítulo 3 descreve a metodologia da modelagem numérica em elementos finitos para obtenção de topologias ótimas, utilizando o método SIMP, disponível no *software* ABAQUS®.

O Capítulo 4 exemplifica o desenvolvimento das simulações numéricas, por meio de estudos de caso, realizadas para um consolo retangular, um consolo trapezoidal simples e um consolo trapezoidal duplo.

O Capítulo 5 trata das considerações finais e sugestões para a continuidade de pesquisas e trabalhos futuros.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Os consolos são elementos estruturais que necessitam de estratégias diferenciadas de dimensionamento, em virtude da descontinuidade do problema apresentado. O método das bielas é um procedimento utilizado para o projeto destes elementos, porém, há uma diversidade de modelos para o dimensionamento. Nesse contexto, os conceitos de otimização estrutural auxiliam na definição matemática do modelo de cálculo.

2.1 Ligações entre elementos pré-moldados

As diferenças básicas entre estruturas de concreto pré-moldado e estruturas de concreto moldado *in loco* são a presença de ligações e a consideração das situações transitórias (desmoldagem, transporte, armazenamento e montagem). De acordo com a NBR 9062 (ABNT, 2017), a finalidade das ligações, é de transmitir os esforços solicitantes, em todas as fases de utilização, dentro das condições de projeto e com o objetivo de manter a durabilidade ao longo da vida útil da estrutura.

De um modo geral, as estruturas pré-moldadas seguem os procedimentos de cálculo relativos às estruturas moldadas *in loco*. Do ponto de vista de projeto, estas devem ser verificadas em relação aos graus de liberdade adicionais, completos ou parciais, introduzidos pelos elementos pré-moldados e por suas ligações. Há ainda que se considerar, especialmente, as incertezas que podem afetar as reações mútuas dos elementos e de suas ligações, conforme preconiza a NBR 9062 (ABNT, 2017).

El Debs (2017) descreve as ligações entre os elementos como um dos principais problemas a serem enfrentados no emprego da pré-moldagem. Em geral, ligações mais simples normalmente acarretam estruturas mais solicitadas aos momentos fletores. Em contrapartida, as ligações que possuem tendência de transmitir momentos fletores entre os elementos, requerem mais trabalho, reduzindo parcialmente as vantagens da pré-moldagem.

O grau de entendimento das ligações é fator determinante na análise estrutural de uma edificação quando se trata de redistribuição de esforços, pois em estruturas hiperestáticas as ligações têm influência nos deslocamentos de forma geral, como flechas e deslocamentos laterais. Desta forma, devem ser observados cuidados especiais na organização geral da estrutura e em seus detalhes construtivos.

Ferreira (1999) comenta que as estruturas de concreto pré-moldado são concebidas e projetadas a partir da hipótese de que as suas ligações viga-pilar se comportam como

articulações perfeitas, em geral, para edificações com poucos pavimentos. Porém, a necessidade do desenvolvimento de ligações resistentes à flexão viabiliza sistemas estruturais em concreto pré-moldado para edificações de múltiplos pavimentos.

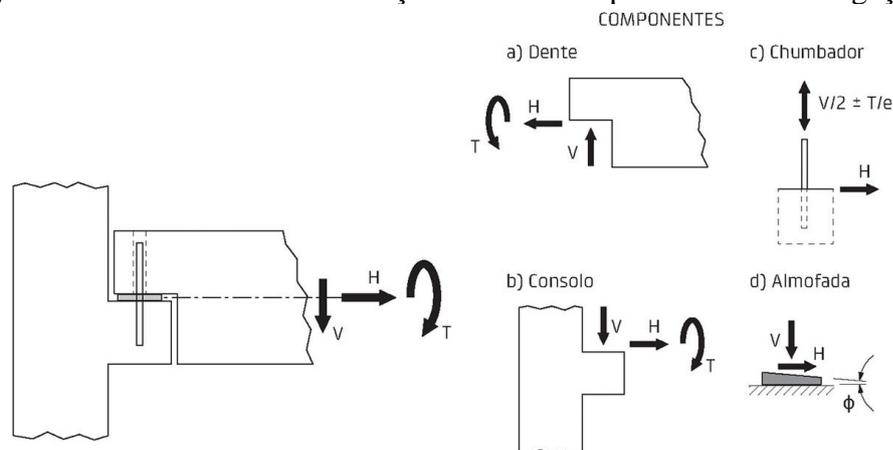
Para o projeto dos componentes das ligações aplicam-se, em geral, os mesmos princípios e hipóteses adotados no dimensionamento de elementos em concreto armado, como por exemplo, a resistência à tração do concreto é desprezada nos estados limites últimos (EL DEBS, 2017). Para o detalhamento dos elementos pré-moldados, não há distinção nos princípios de ancoragem e emenda das barras de aço, prevalecendo o que é prescrito em recomendações normativas para elementos de concreto armado.

Dois aspectos são destacados por El Debs (2017): a ductilidade e a durabilidade das ligações. A ductilidade é caracterizada como a capacidade da ligação sustentar grandes deformações inelásticas sem perda significativa de resistência antes de atingir a ruína. A durabilidade merece particular atenção nas ligações quando são empregados conectores metálicos e outros materiais diferentes do concreto armado.

A caracterização de todos os componentes da ligação é um fator importante para a definição do tipo da ligação a ser empregada entre os elementos pré-moldados, visto que a influência da ligação no comportamento global da estrutura é objeto de intenso estudo para a prática de diversos projetistas, de forma a otimizar a utilização das estruturas pré-moldadas.

Conforme El Debs (2017), as ligações viga-pilar podem ser analisadas por meio das decomposições dos seus respectivos componentes, que são: juntas de argamassa, aparelhos de apoio de elastômero, chumbadores sujeitos à força transversal, consolos de concreto, dentes de concreto, consolos metálicos e dentes metálicos. A Figura 1 apresenta alguns componentes.

Figura 1 – Transferência de esforços entre os componentes de uma ligação



Fonte: EL DEBS, 2017.

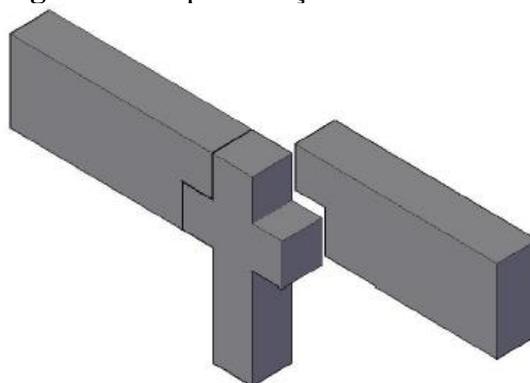
O dimensionamento da ligação pode ser realizado por meio dos componentes básicos envolvidos na transferência dos esforços, de acordo com ensinamento de El Debs (2017). As forças vertical e horizontal, bem como o momento de torção, são transferidas da viga para o dente e, em seguida, para o consolo, por meio da almofada de apoio e do chumbador.

Por meio da análise estrutural de cada componente da ligação, os procedimentos de projeto devem ser empregados para um dimensionamento seguro. Neste trabalho, são analisados os consolos de concreto armado.

2.2 Consolos de concreto armado

El Debs (2017) conceitua que os consolos de concreto se caracterizam como elementos estruturais que se projetam de pilares ou paredes para servir de apoio para outras partes da estrutura ou para cargas de utilização, conforme Figura 2.

Figura 2 – Representação de um consolo



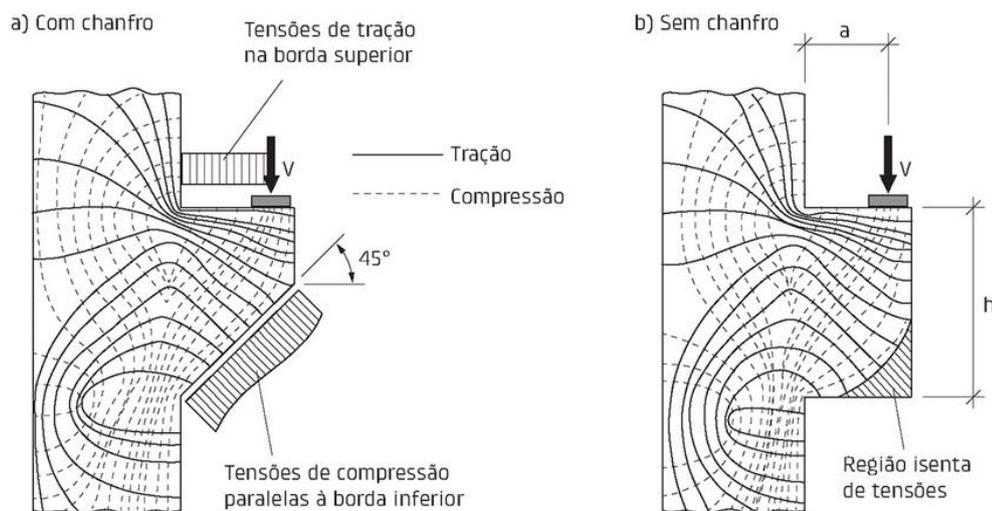
Fonte: OLIVEIRA, 2012.

Os consolos são os componentes mais utilizados nos diversos tipos de ligações: viga-pilar, viga-viga, laje-viga, laje-pilar e laje-parede. De uma forma geral, eles tendem a tornar a produção de peças (vigas, pilares ou paredes) que o possuem mais complicadas, devido tanto às altas taxas de armadura existentes quanto à problemática da moldagem conjunta da peça com o consolo.

Predominantemente, estes componentes estão ligados a pilares, mas podem ser também ligados a vigas. Sua utilização principal é servir como apoios para equipamentos, tais como pontes rolantes, ou então, como apoio para outros elementos estruturais, principalmente em edifícios que necessitam de juntas de dilatação.

Por ser um elemento estrutural que, em geral, não vale a teoria clássica da flexão, Leonhardt e Mönning (1978a) trazem uma primeira noção do comportamento dos consolos. No trabalho desenvolvido por Franz e Niedenhoff (1963) *apud* Leonhardt e Mönning (1978a), para os consolos com relação $a/h = 0,5$, foram analisadas as trajetórias de tensões principais, conforme demonstrado na Figura 3.

Figura 3 – Trajetória de linhas isostáticas de tensões principais em consolos com $a/h = 0,5$



Fonte: LEONHARDT e MÖNNIG, 1978a *apud* EL DEBS, 2017.

Ao analisar os resultados, Leonhardt e Mönning (1978a) chegaram às seguintes conclusões:

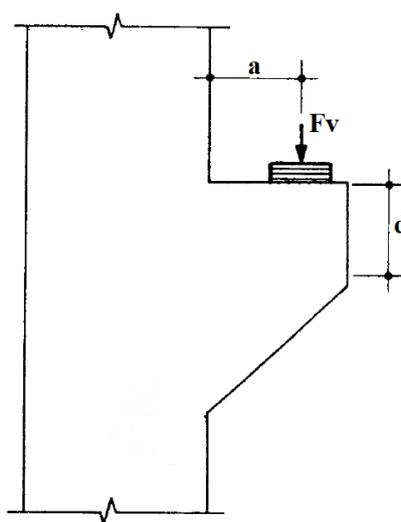
- A parte inferior do consolo retangular não é praticamente solicitada, de forma que o chanfro nesta parte do consolo não influi na resistência;
- As isostáticas de tração na parte superior são aproximadamente horizontais com tensão constante desde o ponto de aplicação da força até a seção na face do pilar, sugerindo assim o emprego de armadura junto à face superior, que seria a armadura principal do consolo, chamada de armadura do tirante;
- As tensões de compressão partem do ponto de aplicação da força e vão até a base do consolo, sugerindo a formação de biela entre o ponto de aplicação da força e base do consolo;
- Os estribos verticais, como normalmente utilizados nas vigas, não funcionam e as resultantes das demais tensões de tração podem ser absorvidas por estribos horizontais.

Na configuração fissurada, Silva (1991) relata que, com um determinado carregamento, surge uma fissura vertical na ligação entre o pilar e o consolo, e a abertura desta aumenta com o acréscimo das ações. Proporcionalmente com o aumento das ações, surgem fissuras inclinadas que evidenciam a necessidade da armadura de costura, constituída por estribos horizontais.

De acordo com a NBR 9062 (ABNT, 2017), nos consolos sujeitos a cargas diretas com $a/d < 1,0$, os estribos verticais são construtivamente necessários e escolhidos por uma taxa mínima de armadura.

A classificação entre curto, muito curto e longo está relacionada com a distância “ a ”, medida da linha de ação da carga aplicada no aparelho de apoio à face externa do pilar, e a altura útil “ d ”, conforme Figura 4. Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014), o consolo é curto se $0,5 d \leq a \leq d$ e muito curto se $a < 0,5 d$. Para o caso em que $a > d$, deve-se analisar o elemento como uma viga em balanço.

Figura 4 – Classificação de um consolo



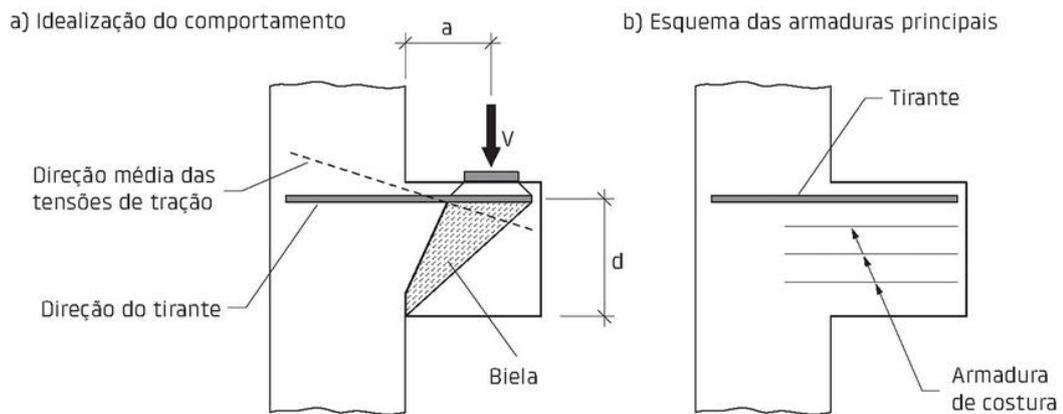
Fonte: adaptado de SILVA, 1991.

Por meio da análise do modelo de bielas, o comportamento de um consolo curto é idealizado com um tirante reto na face superior, que por questões construtivas e facilidade de execução, não necessariamente acompanha a direção média das tensões de tração, visto que são ligeiramente inclinadas. Para garantir a ductilidade do elemento, também é disposta uma armadura secundária, constituída de estribos horizontais, denominada armadura de costura.

A Figura 5 retrata a esquematização das armaduras de um consolo curto, de acordo com El Debs (2017). Neste esquema, ilustra-se a formação de uma biela comprimida, do ponto de

aplicação da carga até a face inferior do consolo e, também, demonstra o esquema usual de disposição de armaduras, constituída pelo tirante e pela armadura de costura.

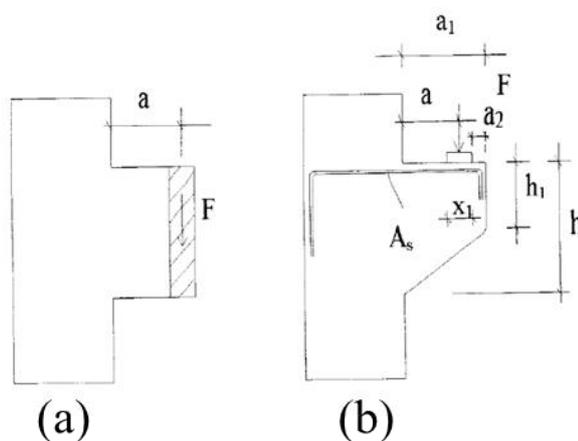
Figura 5 – Idealização do comportamento e esquema das armaduras principais



Fonte: EL DEBS, 2017.

Torres (1998) classifica os consolos de acordo com a forma de aplicação do carregamento externo (Figura 6). Em casos de carregamentos indiretos (a), a ação vertical está aplicada ao longo de toda a altura do consolo ou está concentrada apenas na face inferior deste elemento, o que impossibilita a execução de chanfros. Para os carregamentos diretos (b), a ação está aplicada somente na parte superior do elemento, havendo a possibilidade de chanfros.

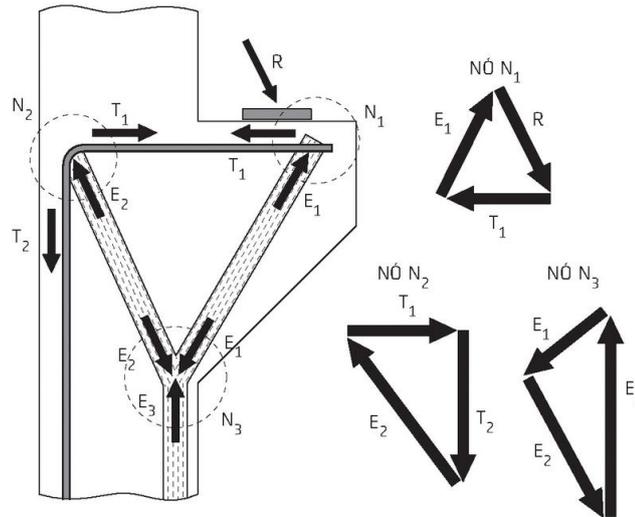
Figura 6 – Carregamento indireto (a) e carregamento direto (b) no consolo



Fonte: adaptado de TORRES, 1998.

A representação de um modelo de escora e tirante ou modelo de treliça para um consolo consiste em idealizar o comportamento da estrutura por meio das trajetórias de tensões principais de compressão e tensões principais de tração. Pode-se realizar a análise estática do consolo por meio do esquema apresentado na Figura 7. Os componentes da treliça são classificados como tirantes (barras tracionadas), escoras (barras comprimidas) e zonas nodais.

Figura 7 – Esquema estático de um modelo de bielas para consolo curto



Fonte: EL DEBS, 2017.

Silva (1991) menciona que de forma a evidenciar a verificação da segurança dos consolos, supõe-se que a ruína destes elementos ocorre basicamente de duas maneiras: escoamento da armadura do tirante ou esmagamento da escora de concreto.

Para que não ocorra o esmagamento da escora, pois o concreto não é dúctil e desta forma, a ruptura da peça é brusca, no dimensionamento destes elementos para a situação de ruína, deve sempre prevalecer o escoamento das armaduras.

Do ponto de vista de projeto, este mecanismo de ruína, oriundo das solicitações normais, é o mais desejável em aspectos de segurança, pois a ruptura ocorre com grandes deformações e há um aviso prévio do possível colapso da estrutura.

2.3 Histórico do método das bielas

O método das bielas surgiu no início do século XX, quando Ritter e Morsch propuseram a analogia de treliça para uma viga fissurada (SOUZA, 2004). Várias modificações foram feitas ao modelo original, visando aperfeiçoá-lo e adequá-lo aos resultados experimentais.

Após a publicação do trabalho de Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987), o método das bielas passou a ter mais notoriedade, surgindo como uma metodologia de resolução de problemas estruturais em concreto, com qualquer formato de geometria. É considerado um método racional e apropriado para o dimensionamento de elementos de concreto armado submetidos à flexão, cisalhamento e torção.

Liang, Xie e Steven (2000) consideram que o modelo de bielas oferece uma estrutura de projeto unificada, inteligível, racional e segura para as estruturas de concreto submetidas às combinações de carregamentos, fornecendo um claro entendimento do comportamento de elementos de concreto armado.

El-Metwally e Chen (2018) conceituam que o modelo de escoras e tirantes é uma extensão lógica da modelo de treliça proposto por Ritter e Morsch. A maior diferença entre os dois métodos é que o modelo de bielas é um conjunto de forças em equilíbrio, mas que não necessariamente forma um sistema treliçado estável. Portanto, é um modelo que pode ser considerado uma generalização da analogia de treliça.

O princípio de aplicação do método consiste em subdividir a estrutura em regiões contínuas (regiões B), onde são válidas as teorias da flexão de Euler-Bernoulli, e regiões descontínuas (regiões D), nas quais não é válida a hipótese de seção plana após a deformação.

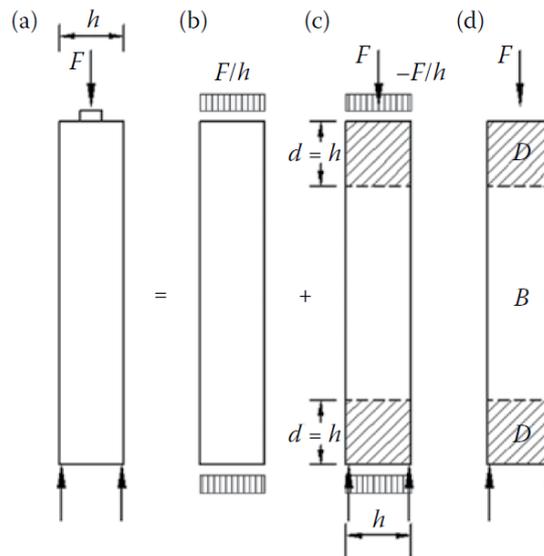
Souza (2004) conceitua que de maneira geral, os elementos estruturais mais comuns de concreto armado ou protendido são atualmente dimensionados com boa precisão e segurança, visto que a formulação existente é bem difundida e dominada pelo meio profissional. No entanto, os elementos mais complexos de uma estrutura, como as regiões D, são geralmente dimensionados levando-se em consideração as experiências práticas sem maiores problemas no passado. De maneira geral, costuma-se recorrer aos métodos baseados na análise plástica e aos métodos numéricos de análise linear e não linear.

O princípio de Saint-Venant pode ser considerado como um princípio conceitual e não tão preciso, que serve como um guia quantitativo para o dimensionamento de regiões descontínuas, onde não há a linearidade das deformações. Este sugere que um efeito localizado de uma perturbação, seja ela geométrica ou estática, é regularizado em uma região suficientemente afastada desse efeito.

A distância para que os efeitos da perturbação consigam se dispersar é de aproximadamente a altura do elemento analisado, medida a partir do ponto de perturbação. A validade deste princípio está relacionada como uma maneira de dimensionar as regiões descontínuas.

A Figura 8 apresenta um elemento submetido a uma força concentrada F com uma altura da seção transversal h . A distância d , neste caso, define a divisão da estrutura em duas regiões D, de comprimento h e uma região B, fora da zona de perturbação.

Figura 8 – Princípio de Saint-Venant

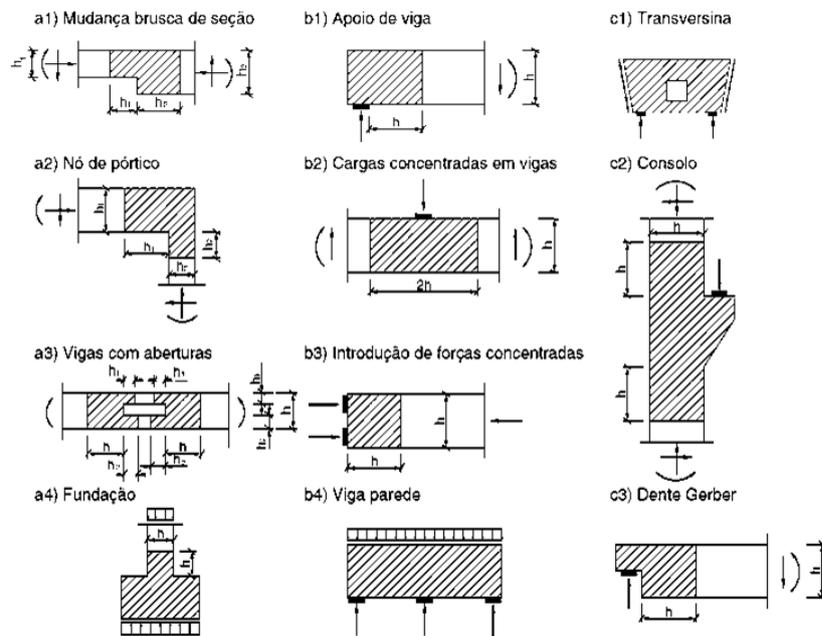


Fonte: EL-METWALLY e CHEN, 2018.

Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014), os elementos especiais são aqueles definidos segundo os critérios de descontinuidade generalizada e descontinuidades geométricas ou de cargas que afetem o comportamento estrutural como um todo. Para a norma brasileira, em geral, o limite entre as regiões B e D pode ser considerado localizado a uma distância h (altura da seção transversal do elemento estrutural considerado) da seção efetiva da descontinuidade.

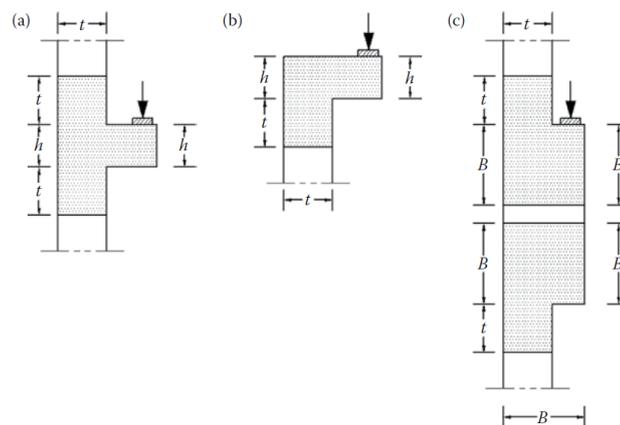
A Figura 9 ilustra situações típicas de regiões D, nas áreas hachuradas, com distribuição de deformações não linear devido à: descontinuidade geométrica; descontinuidade estática; descontinuidade geométrica e estática.

Dentre os elementos especiais citados na norma brasileira, têm-se as vigas-parede, os consolos e dentes Gerber, as sapatas e os blocos sobre estacas. Para estes elementos, é permitida a análise no estado limite último, ou de uma região D contida nesse elemento, por meio de uma treliça idealizada, composta por escoras e tirantes interligados por nós.

Figura 9 – Situações típicas de regiões D

Fonte: adaptado de NBR 6118 (ABNT, 2014).

A Figura 10 ilustra as regiões de descontinuidade encontradas em diferentes consolos. De forma a atingir um dimensionamento seguro para esses elementos, as condições de contorno de cada problema devem ser consideradas individualmente. Desta maneira, cada caso levará a uma concepção diferente de um modelo de bielas.

Figura 10 – Regiões de descontinuidade em consolos

Fonte: EL-METWALLY e CHEN, 2018.

Proposto por Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987), o modelo de escoras e tirantes pode ser adotado considerando a trajetória de tensões na estrutura, usando o processo do caminho de

carga. Dispondo-se das tensões e suas direções principais, provenientes da análise elástica linear, o desenvolvimento do modelo deve representar o máximo possível dessas tensões em uma região.

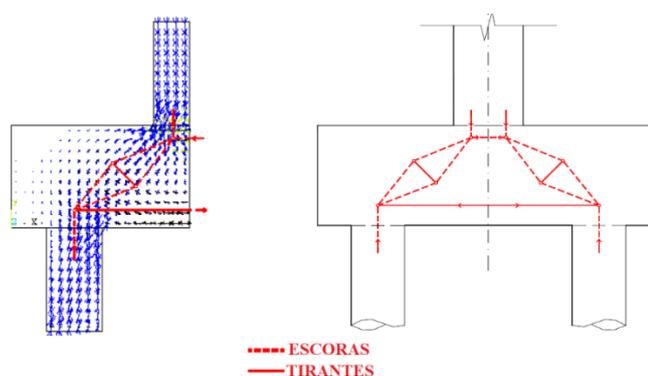
Para a representação dos elementos estruturais em regiões descontínuas, a modelagem deve contemplar as diferentes condições de carregamento e vinculações. Em cada caso específico de projeto, deve-se analisar a geometria representante do elemento.

É idealizado o fluxo de forças internas nas regiões sob a consideração de elementos de treliça, que levam as ações impostas no contorno para seus apoios. Esta treliça é composta por uma estrutura de barras comprimidas e tracionadas interconectadas por nós, formando um sistema autoequilibrado.

As escoras são idealizações dos campos das tensões de compressão atuantes no elemento estrutural. Os tirantes são as idealizações dos campos das tensões de tração, que normalmente são absorvidas pelas armaduras; em alguns casos, podem ser absorvidas pelo próprio concreto, que são os denominados tirantes de concreto.

Na Figura 11, demonstra-se a trajetória de tensões principais em regime elástico linear e a proposta de um modelo de escoras e tirantes para um bloco sobre duas estacas. Este modelo pode ser comparado com os ensaios clássicos disponíveis na literatura.

Figura 11 – Modelo de escoras e tirantes para bloco sobre duas estacas



Fonte: adaptado de MUNHOZ, 2004.

Para os critérios de dimensionamento de elementos em concreto armado, as tensões principais de tração devem ser resistidas por uma armadura que atravesse as fissuras. As tensões principais de compressão são resistidas pelo concreto comprimido localizado entre as fissuras, ou seja, as escoras de concreto.

Souza (2004) relaciona que o modelo de escoras e tirantes adotado geralmente é função da geometria da estrutura e das ações atuantes no contorno. A geometria do modelo pode ser normalmente obtida analisando-se os seguintes aspectos: tipos de ações atuantes; ângulos entre escoras e tirantes; área de aplicação das ações e reações; número de camadas de armadura; cobertura das armaduras.

Desta forma, a partir da definição da geometria do elemento estrutural, o dimensionamento e detalhamento do modelo deve seguir as prescrições adotadas em relação à segurança, de acordo com a referência normativa ser adotada.

Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987) propõem que a geometria do modelo seja baseada nos campos de tensões elásticas e que o dimensionamento siga a teoria da plasticidade. Com isso, de um ponto de vista prático, é possível tratar o estado limite último e o estado limite de serviço na situação fissurada em um único modelo para ambos.

Ressalta-se que a verificação do estado limite de serviço é um tema bastante polêmico, já que sua consideração é implícita no modelo de bielas. Desta forma, a avaliação de deslocamentos para as cargas de serviço requer que o modelo adotado estime a rigidez dos elementos de maneira a dar uma resposta equivalente para o deslocamento real da estrutura.

Segundo Tjhin e Kuchma (2002) *apud* Munhoz (2004), existem diversas dificuldades e desafios na elaboração do modelo de escoras e tirantes. Embora haja uma definição conceitual simples, há complicações diversas, tais como: seleção do modelo apropriado, ajuste da geometria da treliça, modelos indeterminados estaticamente, casos de combinações de ações.

Para Schlaich e Schäfer (1991), em casos de modelos indeterminados estaticamente, os autores sugerem decompor a treliça, inicialmente hiperestática, em várias treliças isostáticas. Isso requer, como resultado, as exigências de compatibilidade de tensões e deformações. Utilizando esta estratégia, é necessária uma estimativa razoável da rigidez e a imposição da distribuição de carregamento de cada treliça determinada estaticamente.

Munhoz (2004) relaciona as incertezas que existem para a determinação do modelo, indicando possibilidades de pesquisas futuras. Estas são listadas como: capacidade das escoras; resposta de carga-deformação de escoras e tirantes; ancoragem e distribuição de armadura do tirante; tamanho, forma e força de zonas nodais complexas; estado limite de serviço.

Com relação à capacidade das escoras, Munhoz (2004) cita que há muita discussão sobre a força de compressão efetiva de uma escora. Foram identificados os seguintes fatores como influências à capacidade última de tensão de compressão das escoras:

- a) Forma da escora: em um caso hipotético, se as trajetórias de tensões fossem perfeitamente paralelas, a força da escora estaria próxima ao valor da força de

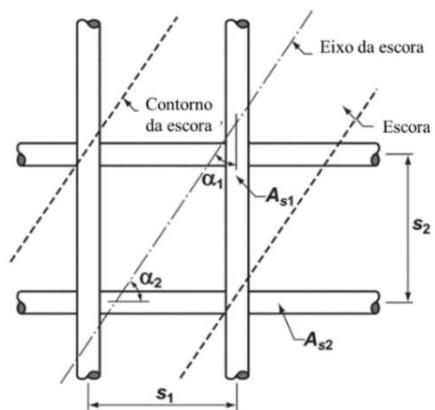
compressão do corpo de prova cilíndrico. A forma de distribuição de tensões em linhas curvilíneas, com afunilamento da seção, pode conduzir ao fendilhamento de uma escora para uma tensão que é consideravelmente menor que a resistência do concreto.

- b) Perturbações nas escoras: fissuras iniciais paralelas ou inclinadas ao eixo da escora, tensão transversal elástica ou deformações induzidas por um tirante cruzando a escora influenciam a força de fendilhamento.
- c) Armadura distribuída: o uso de armadura distribuída, usualmente em malha, pode controlar o fendilhamento da escora por causa de propagações ou perturbações de tensões. Também auxilia para aumentar a ductilidade e melhorar o desempenho de uma região projetada com uma treliça que não seja ideal.
- d) Confinamento: o desempenho pode ser melhorado quando há uma armadura ou por meio de um volume de concreto envolvendo a escora.
- e) Ângulo da escora: quando o ângulo entre uma escora e um tirante decresce, é esperado que a força de compressão na escora decresça. Então, a tendência é que uma escora mais inclinada seja mais resistente que uma escora horizontal.

As justificativas para as demais incertezas podem ser encontradas em Munhoz (2004). Nas referências normativas, é estabelecido um critério de armadura mínima destinada para combate à fissuração e para melhorar as condições de utilização em serviço. Em algumas vezes, conforme cita Souza (2004), esta armadura pode ser maior do que as armaduras dos tirantes e, portanto, a disponibilização da armadura em malha pode alterar profundamente o modelo de escoras e tirantes concebido.

O ACI 318 (2014) (Figura 12) recomenda o cálculo de armadura em malha, que auxilia a controlar a fissuração em escoras do tipo garrafa e resulta em uma melhor capacidade de carga da escora, em comparação com o caso em que esta malha não fosse disposta.

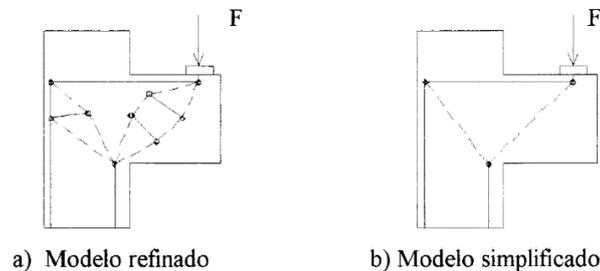
Figura 12 – Armadura em malha cruzando uma escora



Fonte: adaptado de ACI 318, 2014.

Torres (1998) ressalta que existem várias formas de modelar a distribuição do campo de tensão atuantes nos consolos. Esta modelagem depende do grau de refinamento que se deseja na análise estrutural, que é o principal objetivo para a determinação dos esforços de dimensionamento. A Figura 13 aborda dois modelos distintos para um mesmo consolo.

Figura 13 – Proposta de um modelo de escoras e tirantes para um consolo



Fonte: TORRES, 1998.

2.4 Fundamentos do método

O modelo de escoras e tirantes para o dimensionamento de determinado elemento estrutural pode ser feito com base nos seguintes critérios relacionados por Souza (2004):

- Modelos padronizados disponíveis em códigos normativos
- Caminho das cargas (*Load Path Approach*)
- Análises elásticas que utilizam o MEF
- Análises não lineares que considerem a fissuração do concreto
- Ensaios experimentais
- Otimização topológica

Algumas das referências normativas disponíveis contemplam a utilização do método das bielas para alguns elementos estruturais, inclusive propondo modelos específicos. Porém, a utilização prática dos modelos considerados depende principalmente da geometria e tipo de carregamento definidos previamente pelas normas. Desta forma, muitas vezes inviabiliza a aplicação desses modelos em projetos mais complexos.

O método do caminho de cargas corresponde à substituição de cargas distribuídas por cargas concentradas equivalentes, considerando o equilíbrio entre forças externas aplicadas e as reações de apoio. Sob esta ótica, o caminho de cargas no interior da estrutura corresponde às trajetórias de tensões elásticas de tração e compressão que são, posteriormente, substituídas por linhas de um polígono, representando de maneira simplificada as escoras e os tirantes.

A utilização das tensões principais, resultantes da análise elástica linear via MEF, foi abordada por Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987), determinando a direção das escoras a partir da direção média das tensões principais de compressão e a localização dos tirantes a partir da direção média das tensões principais de tração.

Souza (2004) cita que nas análises não lineares, é possível aproximar-se com maior exatidão da carga de ruína. A resistência da estrutura real é maior do que aquela medida em análises elásticas, gerando assim uma capacidade maior de redistribuição de tensões que ocorre quando o concreto fissura. Utilizando modelos baseados nestas análises, é possível verificar com mais consistência as propostas de armações efetuadas.

Com o objetivo de determinar a carga última, deve-se considerar o comportamento do concreto fissurado, desta forma, é recomendável utilizar modelos constitutivos que relacionem o dano do concreto e a contribuição das barras de aço nas deformações do elemento.

Para a concepção de modelos de bielas por meio da visualização de panoramas de fissuração obtidos de análises experimentais, conforme explica Souza (2004), deve-se ter em mente que as direções de fissuração obtidas normalmente remetem às direções perpendiculares às tensões de tração e às direções paralelas das tensões principais de compressão.

A utilização de um processo integrado para a obtenção dos modelos de escoras e tirantes por meio da otimização topológica ainda é um assunto bastante debatido. Liang (2005) considera que a maioria dos algoritmos de otimização estrutural ainda não são desenvolvidos para aplicações práticas, focando principalmente em aspectos matemáticos. Entretanto, esta realidade está mudando, visto que o desenvolvimento computacional proporciona maior agilidade para a definição de projetos estruturais, auxiliando ao desenvolvimento de novas ferramentas.

Para a análise da determinação da capacidade última, Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987) explicam que os métodos plásticos são os mais indicados. Porém, afirmam que os métodos elásticos são melhores para a análise em condições de serviço. O consenso é que uma análise linear ou não linear elástica é aceitável e segura para os dois casos, o que torna uma vantagem para a utilização de um mesmo modelo tanto para estado limite último quanto para o de utilização.

Em um consenso para estabelecer um limite nos níveis de tensão para o concreto, Souza (2004) relaciona que é preciso avaliar vários fatores, tais como: perturbações causadas por fissuras e armaduras, estados de confinamento e estados multiaxiais de tensão.

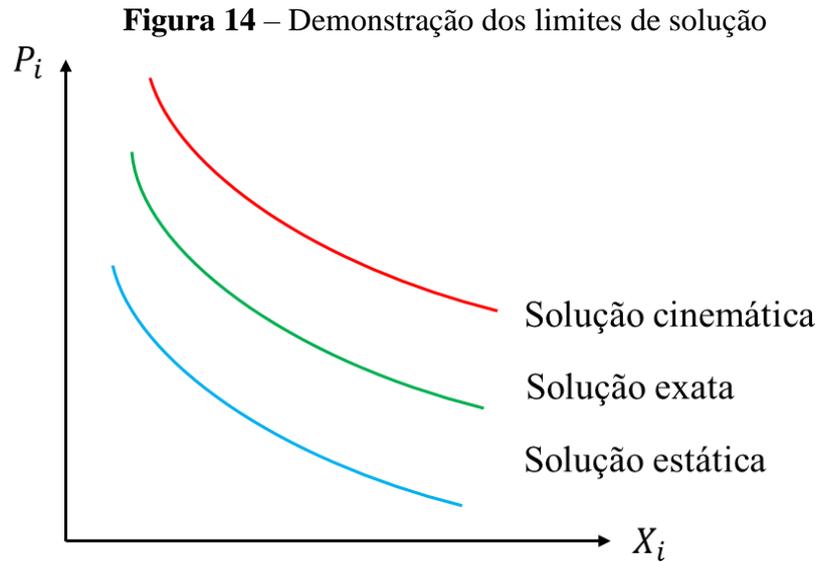
Como princípio de utilização do modelo, deve-se, após as análises dos modelos de treliça, impor um limite de nível de tensão das escoras de concreto e das zonas nodais, para cada uma das situações comentadas anteriormente.

Para a determinação da capacidade de carga para materiais rígido-plásticos, a denominada análise limite, os princípios extremos da teoria da plasticidade são muito úteis. Nielsen e Hoang (2011) citam que os teoremas foram primeiro formulados por Gvozdev em 1936 e Drucker *et al.* em 1952.

Estes teoremas assumem obter soluções válidas para os problemas mecânicos. Em geral, três condições devem ser satisfeitas: equilíbrio, compatibilidade e relações constitutivas. De acordo com El-Metwally e Chen (2018), como forma de contornar as dificuldades do problema, a análise limite assume que ao invés de três, apenas duas condições são necessárias para a solução do problema. Para o limite inferior, apenas equilíbrio e critério de escoamento são satisfeitos. Para o limite superior, apenas condições de compatibilidade e critério de escoamento são satisfeitos.

Considerando primeiramente a prova do teorema do limite inferior, mostra-se que se um carregamento possui tal magnitude, de forma que a distribuição de tensões se encontra dentro ou na superfície de escoamento, então, esse carregamento possui um valor menor ou igual do que a carga de colapso. Satisfazendo as condições de equilíbrio e as condições de contorno estáticas para a carga real, então, esta carga não será capaz de causar o colapso da estrutura. Uma distribuição de tensões para um limite inferior, tal como essa, é garantida como segura e estaticamente admissível.

Esquemáticamente, a Figura 14 representa o valor P_i da carga última em relação a uma variável genérica X_i . Verifica-se que a solução pelo limite inferior da teoria da plasticidade é de menor valor que a solução exata.



Fonte: Autor, 2019.

A concepção dos modelos de escoras e tirantes é baseada no teorema do limite inferior da teoria da plasticidade, pois é considerado que os tirantes irão escoar antes do esmagamento do concreto e, com isso, o campo de tensões é considerado seguro. Com isto, garante-se que o método das bielas é um processo que fornece sempre um limite inferior para a carga de ruína, ou seja, a carga atuante sempre será menor ou no máximo igual à carga de ruptura real da estrutura.

O teorema do limite superior estabelece que se vários campos de deformações geometricamente possíveis são considerados, existe uma carga, de valor igual ou maior à carga de colapso, que realizará um trabalho igual ou superior ao trabalho realizado pelo campo de deformação interna do sólido.

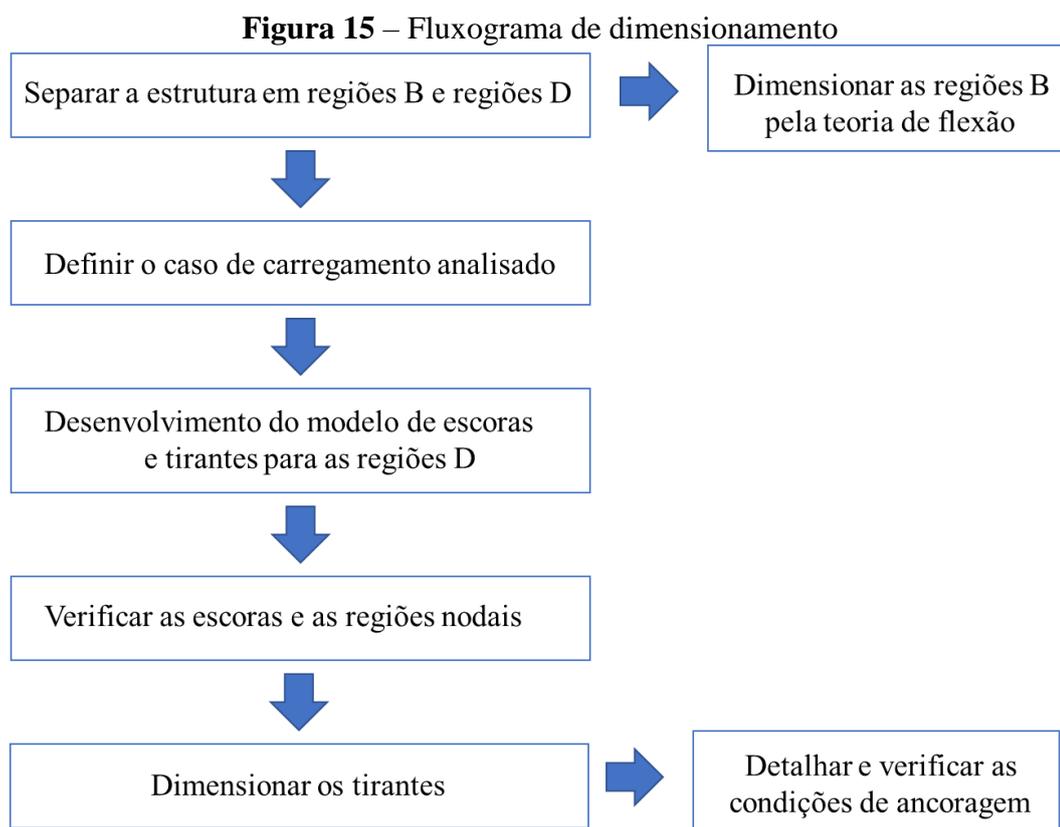
Nielsen e Hoang (2011) estabelecem o teorema de singularidade, que, para um único carregamento, podem ser estabelecidas as seguintes condições:

- 1) Há somente um campo de tensões estaticamente admissível correspondente ao campo de tensões dentro ou na superfície de escoamento;
- 2) As deformações correspondentes às tensões de acordo com a regra de escoamento podem ser derivadas de um campo de deslocamentos geometricamente possível.

Isto é verdadeiro porque um carregamento que satisfaça a condição 1 é menor ou igual à carga de colapso (limite inferior). Por outro lado, o carregamento satisfizer a condição 2 é maior ou igual à carga de colapso (limite superior). Então, quando as condições 1 e 2 são

satisfeitas, isso significa que a carregamento é equivalente à carga de colapso e então o teorema da singularidade é comprovado.

A Figura 15 apresenta um fluxograma para o dimensionamento de estruturas em regiões descontínuas, definindo uma sequência de passos para a aplicação do método das bielas e suas verificações.



Fonte: Autor, 2019.

Williams, Deschenes e Bayrak (2012) definem o modelo de escoras e tirantes como um método versátil e conservativo para o projeto de componentes estruturais de concreto armado. A versatilidade do método é fonte de clareza e confusão. Da mesma forma que o processo possibilita resultados seguros para projetos, quando os métodos tradicionais são complicados ou até mesmo questionáveis, vários engenheiros têm provado que a aplicabilidade desta ferramenta ainda é fonte de estudo contínuo para a prática.

A flexibilidade do modelo de escoras e tirantes frequentemente provoca incertezas para os projetistas: não há um modelo “correto” para qualquer estrutura em particular. Se os princípios requeridos para alcançar uma solução estática baseada no limite inferior da teoria de plasticidade são atingidos, o engenheiro pode assegurar que o modelo adotado é seguro. (WILLIAMS; DESCHENES; BAYRAK, 2012).

Com o intuito de auxiliar o posicionamento correto das escoras e tirantes no interior da estrutura, Liang, Xie e Steven (2000) propuseram utilizar técnicas de otimização estrutural, possibilitando posicionar os elementos de barra sobre o fluxo de tensões principais encontrados na análise elástica linear. Pantoja (2012) também utilizou técnicas de otimização estrutural com o objetivo de automatizar os modelos topológicos, e, além disso, considerar aspectos relacionados à obtenção da probabilidade de falha, via análise de confiabilidade.

2.5 Escoras, zonas nodais e tirantes

Para Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987), ao selecionar um modelo de escoras e tirantes, o mais adequado será aquele que tiver o menor número de tirantes e com os menores comprimentos, uma vez que as armaduras dos tirantes são muito mais deformáveis do que as escoras de concreto. Para satisfazer esse critério, os autores relacionam a seguinte expressão:

$$\sum F_i L_i \varepsilon_{mi} = \text{mínimo} \quad (1)$$

em que F_i é a força na escora ou tirante i , L_i é o comprimento do elemento i e ε_{mi} é a deformação média do elemento i .

Este critério fornece uma solução ótima para o modelo, visto que o concreto permite deformações plásticas limitadas. Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987) reforçam que a equação é derivada do princípio da mínima energia de deformação para o comportamento elástico linear das escoras e dos tirantes depois da fissuração. A contribuição das escoras geralmente pode ser omitida, uma vez que suas deformações são muito menores quando comparadas às dos tirantes. Este critério também ajuda a eliminar os modelos menos desejáveis.

Deve-se notar que não há solução ótima única ou absoluta. Conforme Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987), a elaboração do modelo é uma aproximação que depende de decisões subjetivas. Além do mais, a determinação individual das regiões descontínuas e arranjo de armaduras sempre irão variar de acordo com a experiência do projetista.

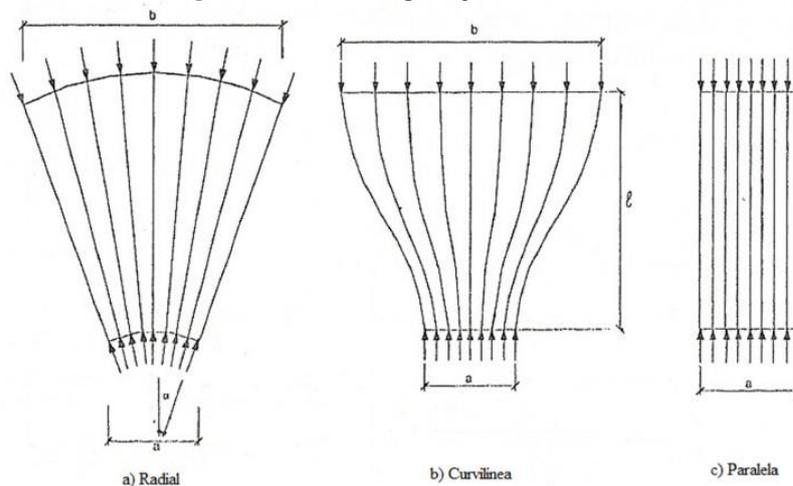
Independente dos critérios utilizados para a definição do modelo, este deve sempre contemplar os critérios de segurança relativos às referências normativas adotadas. Desta forma, as verificações das escoras, zonas nodais e tirantes são efetuadas a partir das forças obtidas na treliça previamente estabelecida. Deve-se ter atenção especial para o cálculo da ancoragem dos tirantes, visando um comportamento dúctil do elemento estrutural, os tirantes sempre deverão chegar à ruína antes das escoras e regiões nodais (SOUZA, 2004).

2.5.1 Parâmetros de resistência das escoras

Silva e Giongo (2000) elencam três configurações típicas de distribuições de tensões de compressão nas escoras (Figura 16):

- Radial (“Leque”): idealização de um campo de tensão com curvatura desprezível, e consequentemente não se desenvolvem tensões de tração transversais.
- Linhas curvilíneas com afunilamento da seção (“Garrafa”): propagação de tensões por meio de curvaturas acentuadas, provocando tensões transversais consideráveis.
- Paralela (“Prisma”): as tensões se distribuem uniformemente, sem perturbação, e não produz tensões transversais na seção.

Figura 16 – Configuração das escoras



Fonte: SILVA e GIONGO, 2000.

Os campos de tensão em forma de leque e garrafa são frequentemente encontrados nas regiões de descontinuidade abaixo dos pontos de aplicação de cargas concentradas e são usualmente resultado de um encaminhamento direto das cargas para as regiões de apoio, enquanto o campo de tensão paralelo é típico de regiões B (SOUZA, 2004).

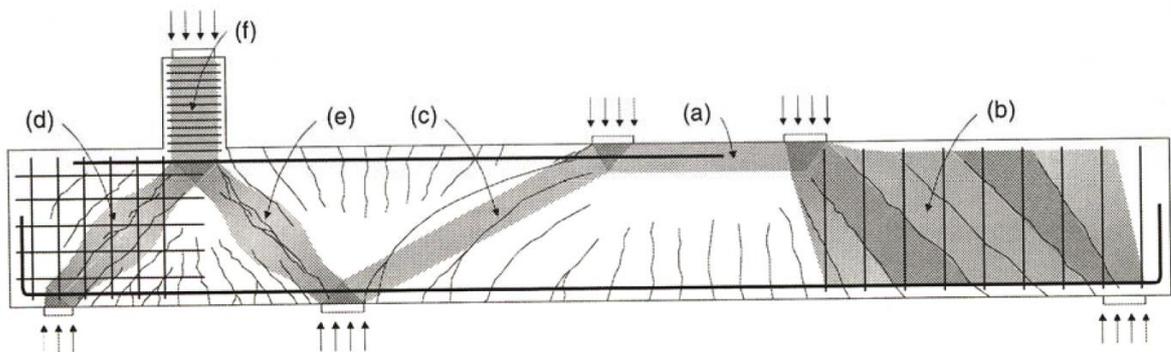
Como afirmam Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987), a resistência do concreto à compressão depende de seu estado multiaxial de tensões. As tensões transversais de compressão que surgem são favoráveis, principalmente se acontecer nas duas direções, enquanto as de tração são desfavoráveis. Como já dito, a configuração curvilínea é caracterizada por apresentar tensões transversais devido a sua acentuada curvatura. É necessário então considerar estas tensões transversais, principalmente as de tração, para evitar o aparecimento de fissuras indesejáveis ou o esmagamento prematuro da seção.

Essa tensão transversal pode levar a uma ruptura prematura do concreto. Para evitar essa situação, armaduras de controle de fissuração devem ser disponibilizadas na seção transversal, uma vez que o concreto rompe à tração.

A resistência da escora é calculada com base na sua resistência efetiva e forma geométrica. Diversas normas propõem um equacionamento do valor da resistência efetiva baseando-se na situação na qual a escora se encontra. Normalmente, a resistência à compressão das escoras é menor do que a resistência característica do concreto. Tal fato se deve principalmente aos efeitos resultantes da tração exercida pelas armaduras que as atravessam.

A Figura 17 apresenta diferentes situações de escoras que podem ser encontradas nas regiões D, sendo: a) escora prismática em região não fissurada, b) escora prismática em região fissurada em que as escoras são paralelas às fissuras, c) escora prismática em região fissurada em que as escoras não são paralelas às fissuras, d) escoras garrafa com armadura em malha para controle de fissuração, e) escora garrafa sem armadura de controle de fissuração e f) escora confinada.

Figura 17 – Tipos de escoras em regiões D



Fonte: TJHIN, 2004.

2.5.1.1 NBR 6118 (2014)

A NBR 6118 (ABNT, 2014) determina os seguintes valores para verificação das tensões de compressão máximas nas escoras:

- Para escoras prismáticas

$$f_{cd1} = 0,85 \alpha_{v2} f_{cd} \quad (2)$$

- Para escoras atravessadas por mais de um tirante

$$f_{cd2} = 0,60 \alpha_{v2} f_{cd} \quad (3)$$

- Para escoras atravessadas por tirante único

$$f_{cd3} = 0,72 \alpha_{v2} f_{cd} \quad (4)$$

em que $\alpha_{v2} = 1 - \frac{f_{ck}}{250}$, com f_{ck} em MPa e $f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$.

2.5.1.2 ACI 318 (2014)

Para o ACI 318 (2014), a resistência à compressão das escoras sem armadura longitudinal é dada por

$$F_{ns} = f_{ce} A_{cs} \quad (5)$$

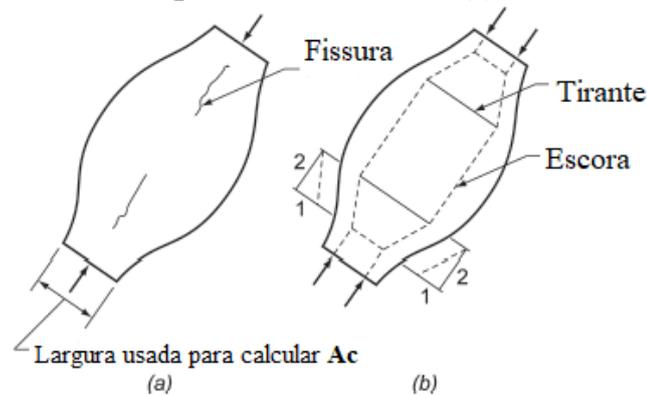
em que F_{ns} deve ser calculado para cada escora e tomado o menor valor. A_{cs} é a área da seção transversal da escora em consideração. f_{ce} é a resistência efetiva à compressão, dada por

$$f_{ce} = 0,85 \beta_s f'_c \quad (6)$$

em que o valor de β_s é dado de acordo com os efeitos da fissuração e da armadura de controle de fissuração para a resistência efetiva à compressão do concreto. f'_c é a resistência especificada do concreto.

A Figura 18 ilustra duas situações para o parâmetro β_s . Na primeira, demonstra-se a situação de uma escora garrafa na qual não há armadura resistindo à tração transversal ($\beta_s = 0,60 \lambda$). Na segunda, o valor de $\beta_s = 0,75$ é adotado, visto que há armadura resistindo a tração transversal. Em ambas as situações, a largura utilizada para o cálculo da área da escora é a localizada na extremidade do elemento.

Figura 18 – Escora garrafa sem armadura (a) e com armadura (b)



Fonte: adaptado de ACI 318, 2014.

De acordo com a situação analisada, os valores de β_s são:

$\beta_s = 1,0$ para escoras com seção transversal uniforme ao longo do comprimento

$\beta_s = 0,75$ para escoras do tipo garrafa e com armadura transversal atendendo ao item 23.5 do ACI 318.

$\beta_s = 0,60 \lambda$ para escoras do tipo garrafa e sem armadura transversal.

$\beta_s = 0,40 \lambda$ para escoras localizadas em membros tracionados ou zonas tracionadas dos membros.

$\beta_s = 0,40 \lambda$ para todos os outros casos.

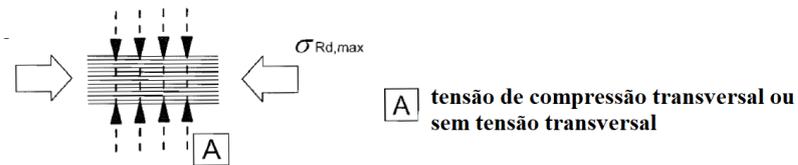
Os valores de λ , fator modificador que considera a composição do agregado leve na mistura do concreto, são encontrados no item 19.2.4.2 do ACI.

2.5.1.3 Eurocode 2 (2004)

Para o Eurocode 2 (CEN, 2004), as tensões de compressão máximas para uma região sem tração transversal (Figura 19) são dadas por

$$\sigma_{Rd,max} = f_{cd} \quad (7)$$

em que $f_{cd} = f_{ck}/\gamma_c$. É apropriado assumir uma maior resistência de projeto em regiões onde tensões de compressão multiaxiais existam.

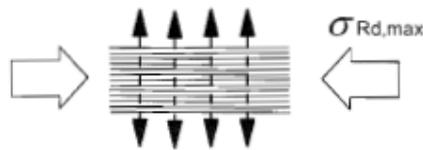
Figura 19 – Escora de concreto sem tração transversal

Fonte: adaptado de EUROCODE 2 (CEN, 2004).

Em regiões de zonas comprimidas e fissuradas (Figura 20), a tensão de compressão máxima deve ser reduzida, ao menos que uma aproximação mais rigorosa seja utilizada, por meio da expressão

$$\sigma_{Rd,max} = 0,6 v' f_{cd} \quad (8)$$

em que v' é $1 - \frac{f_{ck}}{250}$, com f_{ck} em MPa.

Figura 20 – Escora de concreto com tração transversal

Fonte: EUROCODE 2 (CEN, 2004).

Para cargas próximas ao apoio, o Eurocode 2 (CEN, 2004) permite as verificações por meio da força cortante resistente para elementos que não requerem armadura transversal, nos itens 6.2.2 e 6.2.3.

2.5.1.4 Resumo dos parâmetros de resistência das escoras

De forma resumida, a Tabela 1 apresenta os parâmetros de resistência das escoras de acordo com a região em que se encontra e a referência normativa.

Tabela 1 – Resumo dos parâmetros de resistência das escoras

Região	NBR 6118 (2014)	ACI 318 (2014)	Eurocode 2 (2004)
CCC	$0,85 \alpha_{v2} f_{cd}$	$0,85 f'_c$	f_{cd}
CTT ou TTT	$0,60 \alpha_{v2} f_{cd}$	$0,34\lambda f'_c$	$0,6 v' f_{cd}$
CCT	$0,72 \alpha_{v2} f_{cd}$	$0,51\lambda f'_c$	$0,6 v' f_{cd}$

Fonte: Autor, 2019.

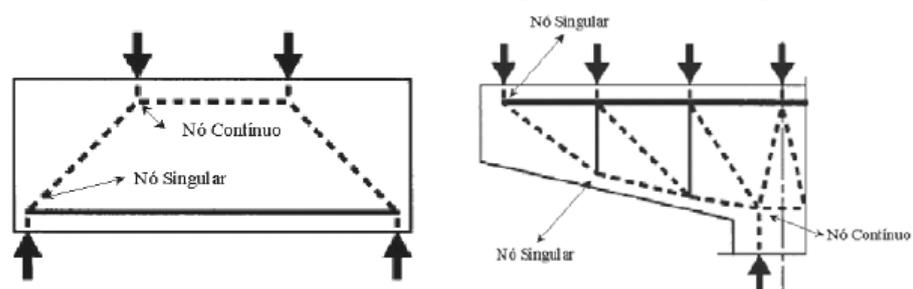
2.5.2 Parâmetros de resistência das zonas nodais

Souza (2004) define as zonas nodais como um volume de concreto que envolve as interseções das escoras, em combinação com forças de ancoragem ou forças de compressão externas (ações concentradas ou reações de apoio).

Para a NBR 6118 (ABNT, 2014), em torno dos nós existirá um volume de concreto, designado como zona nodal, onde é verificada a resistência necessária para a transmissão das forças entre as bielas e os tirantes.

Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987) classificam os nós em dois tipos: contínuos e singulares (Figura 21). Os nós contínuos são aqueles que ligam campos de compressão amplos no concreto ou tração em tirantes que representam barras de aço bem distribuídas. Nesses, o desvio das forças acontece em certo comprimento, o que torna a mudança de direção mais suave. Já os nós singulares, são aqueles onde as escoras ou tirantes representam campos de tensão concentrados. Nesses, o desvio das forças acontece de forma localizada e concentrada.

Figura 21 – Exemplo de nós contínuos e singulares em uma região D

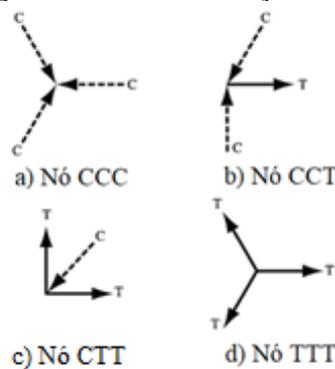


Fonte: SOUZA, 2004.

Souza (2004) então relata que os nós contínuos, de maneira geral, não apresentam problemas de resistência, desde que a ancoragem das armaduras esteja garantida. Nestes nós, a transferência de forças ocorre em uma região relativamente grande e de forma gradual, o que não provoca grandes concentrações de tensões. Já para os nós singulares, é necessária uma análise criteriosa da resistência e do detalhamento das armaduras concorrentes naqueles nós.

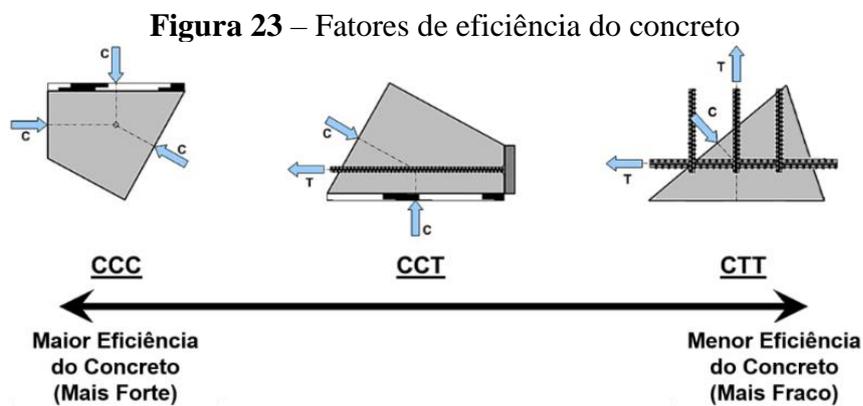
De maneira similar às escoras, diversas normas e pesquisadores recomendam parâmetros para a resistência nodal. A classificação do ACI (2014) sugere quatro tipos de zonas nodais (Figura 22), baseados nos campos de tensão que nelas atuam.

Figura 22 – Classificação dos nós



Fonte: adaptado de ACI 318, 2014.

O fator de eficiência do concreto nas zonas nodais depende dos tipos de solicitações atuantes e da face que está sendo considerada. A Figura 23 ilustra a relação de eficiência do concreto de acordo com a zona nodal analisada.



Fonte: adaptado de WILLIAMS; DESCHENES; BAYRAK, 2012.

A análise das zonas nodais, então, destina-se a verificar as tensões de compressão e permitir o dimensionamento das condições de ancoragem, garantindo o detalhamento adequado do elemento de acordo com as prescrições normativas. Deve-se considerar que todas as linhas de ação das forças nas escoras e nos tirantes, assim como a força externa atuante, devem coincidir. De acordo com a geometria do nó, deve-se atender à tensão máxima efetiva, consoante com a referência normativa adotada.

2.5.2.1 NBR 6118 (2014)

A NBR 6118 (ABNT, 2014) determina os seguintes valores para verificação das tensões de compressão máximas nas zonas nodais:

- Para zonas com tensões de compressão transversal ou sem tensões de tração transversal e em nós onde confluem somente bielas de compressão (nós CCC)

$$f_{cd1} = 0,85 \alpha_{v2} f_{cd} \quad (9)$$

- Para zonas com tensões de tração transversal e em nós onde confluem dois ou mais tirantes (nós CTT ou TTT)

$$f_{cd2} = 0,60 \alpha_{v2} f_{cd} \quad (10)$$

- Para zonas onde conflui um tirante (nós CCT)

$$f_{cd3} = 0,72 \alpha_{v2} f_{cd} \quad (11)$$

2.5.2.2 ACI 318 (2014)

Para o ACI 318 (2014), a resistência à compressão das zonas nodais é dada por

$$F_{nn} = f_{ce} A_{nz} \quad (12)$$

em que F_{nn} deve ser calculada para cada face da zona nodal, A_{nz} é a área de cada face da zona nodal e deve ser tomado como o menor valor dentre: a) área da face da zona nodal perpendicular à linha de ação de F_{ns} e, b) área da seção por meio da zona nodal perpendicular à linha de ação da força resultante na seção em consideração.

A resistência efetiva à compressão f_{ce} é dada por

$$f_{ce} = 0,85 \beta_n f'_c \quad (13)$$

em que o valor de β_n é dado de acordo com a configuração da zona nodal, ou seja,

$\beta_n = 1,0$ para zona nodal limitada por escoras, áreas de apoio ou ambos.

$\beta_n = 0,8$ para zona nodal ancorando um único tirante.

$\beta_n = 0,6$ para zona nodal ancorando dois ou mais tirantes.

2.5.2.3 Eurocode 2 (2004)

Para o Eurocode 2 (2004), as tensões máximas para as zonas nodais são determinadas por:

- Para zona nodal limitada por escoras

$$\sigma_{Rd,max} = k_1 v' f_{Ecd} \quad (14)$$

em que o valor recomendado de k_1 é 1,0.

- Para zona nodal ancorando um único tirante

$$\sigma_{Rd,max} = k_2 v' f_{Ecd} \quad (15)$$

em que o valor recomendado de k_2 é 0,85.

- Para zona nodal ancorando dois ou mais tirantes

$$\sigma_{Rd,max} = k_3 v' f_{Ecd} \quad (16)$$

em que o valor recomendado de k_3 é 0,75.

2.5.2.4 Resumo dos parâmetros de resistência das zonas nodais

De forma resumida, a Tabela 2 apresenta os parâmetros de resistência das zonas nodais de acordo com a região em que se encontra e a referência normativa.

Tabela 2 – Resumo dos parâmetros de resistência das zonas nodais

Zona nodal	NBR 6118 (2014)	ACI 318 (2014)	Eurocode 2 (2004)
CCC	$0,85 \alpha_{v2} f_{cd}$	$0,85 f'_c$	$v' f_{Ecd}$
CTT ou TTT	$0,60 \alpha_{v2} f_{cd}$	$0,51 f'_c$	$0,75 v' f_{Ecd}$
CCT	$0,72 \alpha_{v2} f_{cd}$	$0,68 f'_c$	$0,85 v' f_{Ecd}$

Fonte: Autor, 2019.

2.5.3 Parâmetros de resistência dos tirantes

Os esforços nos tirantes geralmente são absorvidos diretamente pela armadura. Para Silva e Giongo (2000), o eixo da armadura deve coincidir com o tirante do modelo.

2.5.3.1 NBR 6118 (2014)

A área de aço a ser aplicada em cada tirante é dada por

$$A_s = \frac{F_{st}}{f_{yd}} \quad (17)$$

em que F_{st} é o valor de cálculo da força de tração determinada no tirante e $f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$.

2.5.3.2 ACI 318 (2014)

De acordo com o ACI 318 (2014), a armadura pode ser passiva ou ativa. A tensão normal resistente de um tirante, F_{nt} deve ser calculada por

$$F_{nt} = A_{ts} f_y + A_{tp} (f_{se} + \Delta f_p) \quad (18)$$

em que $(f_{se} + \Delta f_p)$ não deve exceder f_{py} , e A_{tp} é zero para elementos não protendidos.

2.5.3.3 Eurocode 2 (2004)

Para o Eurocode 2 (2004), a resistência de cálculo dos tirantes transversais e armaduras devem ser limitadas por

$$F_{st} = A_s f_{yk} \quad (19)$$

em que f_{yk} assume um valor de 400 a 600 MPa.

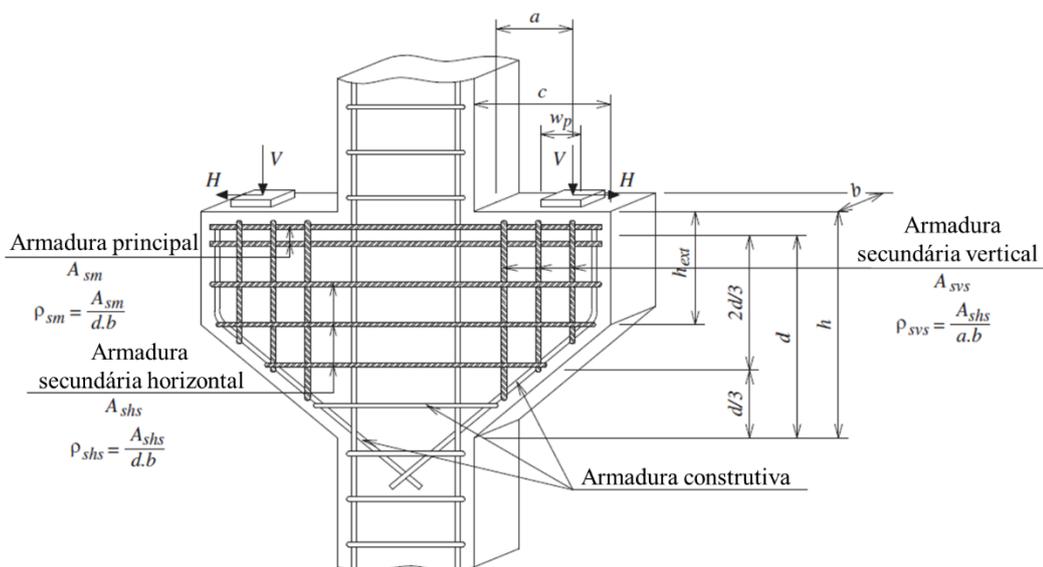
A norma europeia ainda cita que a armadura deve ser adequadamente ancorada nos nós.

2.6 Modelos de cálculo para consolos curtos

O presente trabalho faz uma abordagem de diferentes modelos de cálculos para consolos curtos. São listados os modelos normativos propostos pela NBR 9062 (ABNT, 2017), pelo manual de projeto norte-americano do *Precast/Prestressed Concrete Institute* (PCI) de 2010, pela norma europeia Eurocode 2 (2004) e os modelos analíticos propostos por Hagberg (1983) e Fernandes e El Debs (2005).

Para o correto dimensionamento e detalhamento dos consolos, alguns parâmetros devem ser conhecidos, como ilustrados na Figura 24. Com a geometria e as ações atuantes no elemento conhecidas, os requisitos de resistência, utilização e durabilidade devem ser atendidos.

Figura 24 – Representação de detalhamento das armaduras



Fonte: adaptado de CANHA *et al.*, 2014.

Campos (2010) comparou os modelos normativos para um projeto existente e efetuou as verificações para consolos curtos monolíticos e consolos muito curtos monolíticos, averiguando as recomendações e disposições construtivas de cada norma.

Araújo *et al.* (2016) realizaram uma análise estatística, definindo coeficientes de ajustes a serem aplicados aos modelos para uso em projeto, levando em conta a dispersão de resultados observados a partir da comparação com o banco de dados montado com base em trabalhos experimentais encontrados na literatura. No estudo desenvolvido pelos autores, foram analisados 62 consolos curtos com resistência à compressão do concreto variando de 25 MPa a 105 MPa.

Em uma outra análise, Wilson *et al.* (2018) avaliaram que a previsão de capacidade de carga dos consolos por meio do método das bielas é precisa e não é excessivamente conservadora. Apesar de alguns modelos não levarem em consideração a armadura de costura, os autores recomendam o uso da mesma para evitar possíveis modos de ruptura frágeis e repentinos.

Os modelos normativos analisados são baseados em uma geometria fixa para a treliça representativa do modelo de escoras e tirantes e, em geral, não consideram a presença da armadura de costura na formulação do mecanismo resistente. Para os consolos com armadura de costura, todos os modelos normativos subestimaram a força de ruína dos consolos pelo escoamento do tirante devido a não consideração da contribuição da armadura de costura. Neste caso, o modelo analítico proposto por Hagberg (1983) foi o mais preciso na avaliação da resistência dos consolos do banco de dados (ARAÚJO *et al.*, 2016).

Fernandes e El Debs (2005) realizaram um estudo considerando a contribuição da armadura de costura na capacidade resistente dos consolos. Pela comparação com 245 modelos experimentais ensaiados na literatura, verificou-se que existe grande influência da armadura de costura, proporcionando um crescimento significativo da resistência dos consolos.

Nos ensaios realizados por Kriz e Rath (1965) *apud* Fernandes e El Debs (2005), mostra-se que a armadura de costura praticamente não contribui para a capacidade resistente do consolo quando também atuam forças horizontais. A principal finalidade desta armadura é “costurar” as fissuras que venham a ocorrer na interface consolo-pilar e promover, por meio de uma ancoragem adequada, um maior confinamento da escora, garantindo, conseqüentemente, uma ductilidade à peça.

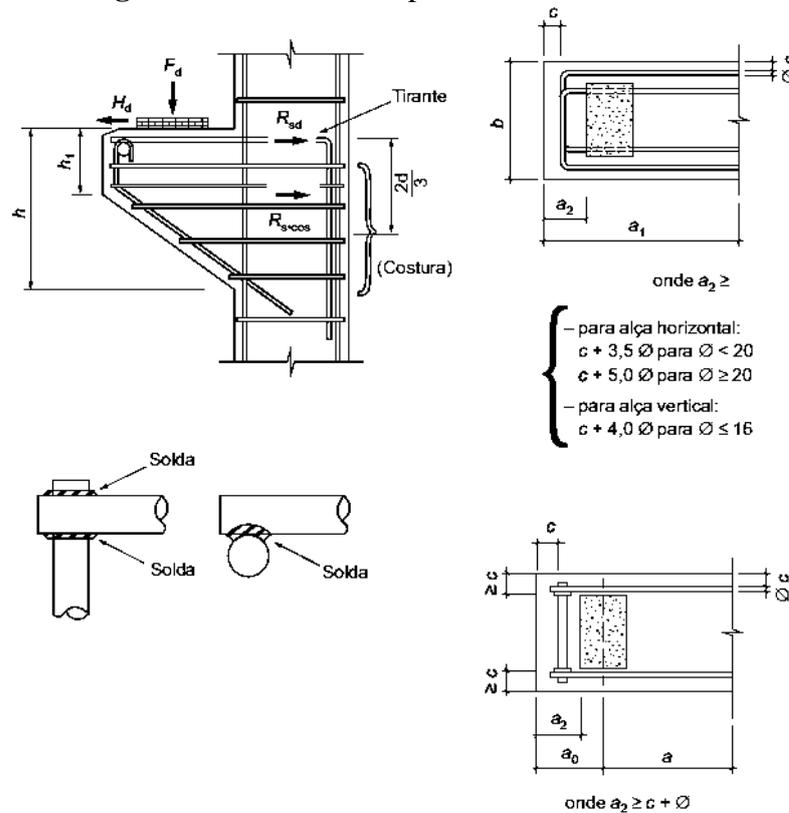
Canha *et al.* (2014) ressaltam que as análises numéricas validadas com resultados experimentais podem auxiliar na aplicação correta dos modelos de escoras e tirantes para consolos. A utilização das técnicas numéricas pode auxiliar a solucionar algumas questões referentes a parâmetros controversos utilizados nestes modelos, tais como: tensão efetiva na escora e no aparelho de apoio, o efeito da relação do comprimento do consolo e altura com o modo de ruptura e a efetiva contribuição da armadura secundária.

2.6.1 Modelo adotado pela NBR 9062 (2017)

A NBR 9062 (ABNT, 2017) considera os consolos como os elementos em balanço nos quais a distância a da carga aplicada à face do apoio é menor ou igual à altura útil d do consolo.

O consolo é curto se $0,5d \leq a \leq d$ e muito curto se $a < 0,5d$. Em casos que $a > d$, deve ser tratado como viga em balanço e não mais como consolo. A NBR 9062 (ABNT, 2017) retrata o detalhamento de um consolo curto na Figura 25.

Figura 25 – Armadura típica de um consolo curto



Fonte: adaptado de NBR 9062 (ABNT, 2017).

Para $1,0 < a/d \leq 2,0$: o dimensionamento é feito como viga em balanço, e aplica-se o disposto na NBR 6118 (2014) para flexão e força cortante.

Para a relação $0,5 < a/d \leq 1,0$ (consolos curtos): o dimensionamento é feito segundo o modelo matemático de uma treliça de duas barras, uma tracionada ou tirante e outra comprimida ou biela (Figura 26), e são estabelecidas limitações para as solicitações dos materiais constitutivos das barras (aço no tirante e concreto na biela).

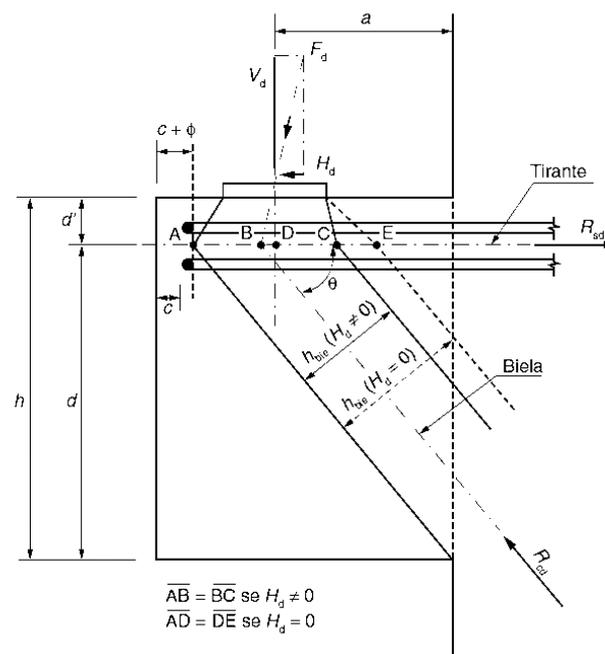
Para $a/d \leq 0,5$ (consolos muito curtos): o dimensionamento é feito supondo a ruptura ao longo do plano de ligação do consolo com seu suporte, podendo-se considerar o efeito

favorável de engrenamento dos agregados, desde que a interface seja atravessada por barras de aço perpendiculares a ela.

De acordo com a NBR 6118 (ABNT, 2014), para o cálculo e dimensionamento dos consolos, podem ser usados modelos plano lineares ou não (como no caso da torção), modelos de bielas e tirantes ou modelos atrito-cisalhamento, respeitando, em casa caso, o seu campo de aplicação. Os modelos de bielas e tirantes são normalmente aplicados aos consolos curtos, enquanto os modelos atrito-cisalhamento são aplicados com frequência aos consolos muito curtos.

Os consolos curtos têm um comportamento típico que pode ser descrito por um modelo biela-tirante, que deve contemplar o equilíbrio global, inclusive no nó de ligação com o pilar. O tirante, no topo do consolo, se ancora na biela sob a carga externa vertical F_d de um lado e no pilar ou apoio do outro, conforme Figura 26.

Figura 26 – Modelo biela-tirante para consolo curto



Fonte: adaptado de NBR 6118, 2014.

2.6.1.1 Dimensionamento do tirante

Para consolos curtos com $0,5 \leq a/d \leq 1,0$, admite-se para a armadura total do tirante

$$A_{s,tir} = A_{sv} + \frac{H_d}{f_{yd}} \quad (20)$$

em que H_d é a força horizontal de cálculo e A_{sv} é a área de aço necessária para combater a força vertical, dada por

$$A_{sv} = \frac{\left(0,1 + \frac{a}{d}\right) F_d}{f_{yd}} \quad (21)$$

Na ausência de impedimento ao movimento horizontal, permite-se estimar a força horizontal H_d pela vertical F_d como a seguir:

- a) $H_d = 0,8 F_d$ para juntas a seco;
- b) $H_d = 0,5 F_d$ para elemento assentado com argamassa;
- c) $H_d = 0,16 F_d$ para aparelhos de apoio de elastômero;
- d) $H_d = 0,08 F_d$ para aparelhos de apoio revestidos de plástico politetrafluoretileno (PTFE);
- e) $H_d = 0,25 F_d$ para apoios realizados entre chapas metálicas não soldadas;
- f) $H_d = 0,4 F_d$ para apoios realizados entre concreto e chapas metálicas;
- g) para a concretagem no local, ligação por meio de solda ou apoio com graute, é obrigatório o estudo detalhado do valor da força horizontal aplicada na ligação;
- h) podem ser utilizados valores diferentes dos apresentados, desde que justificados por modelo de cálculo.

2.6.1.2 Verificação da escora

Araújo (2010) indica, para o modelo de uma treliça de duas barras (Figura 27), que a tensão na escora é função da geometria e é dada por

$$\sigma_{2d} = \frac{F_c}{b \cdot c_2} \quad (22)$$

em que F_c é a força de compressão na escora, b é a largura do consolo e c_2 é a dimensão dada por

$$c_2 = (c + u \cdot \cot\theta) \cdot \text{sen}\theta \quad (23)$$

em que c é a largura do aparelho de apoio, u é igual a $2 d'$ (duas vezes a distância da face superior ao centro de gravidade do tirante) e θ é o ângulo da escora com a horizontal.

- d) é fundamental a consideração de forças horizontais no dimensionamento dos consolos e o seu consequente efeito desfavorável na inclinação da resultante F_d . A NBR 9062 (ABNT, 2017) estabelece valores mínimos desses esforços.

Em relação ao detalhamento do tirante, a NBR 6118 (ABNT, 2014) prescreve as seguintes observações: como o tirante é muito curto, da face externa do consolo até a face oposta do pilar (ou apoio), é essencial cuidar da ancoragem da armadura prevista para esse tirante, nas duas extremidades, especialmente naquela junto à extremidade do consolo.

Em todos os casos, deve-se detalhar as armaduras de forma que as rupturas prematuras localizadas sejam evitadas. Na extremidade do consolo, o gancho no plano vertical é proibido para diâmetros de barras maiores que 16 mm, para evitar ruínas por ruptura de canto ou do cobrimento lateral do gancho. Esses ganchos verticais só podem ser aceitos em consolos contínuos, sendo a largura b do consolo superior a quatro vezes o comprimento $(a + a_0)$ e na presença de pequenas cargas horizontais e verticais.

Nessa região, sob carga concentrada, deve ser usada uma ancoragem mais eficiente, como alças no plano horizontal ou barras transversais soldadas à armadura do tirante, ou chapas metálicas soldadas nas extremidades das barras dessa armadura.

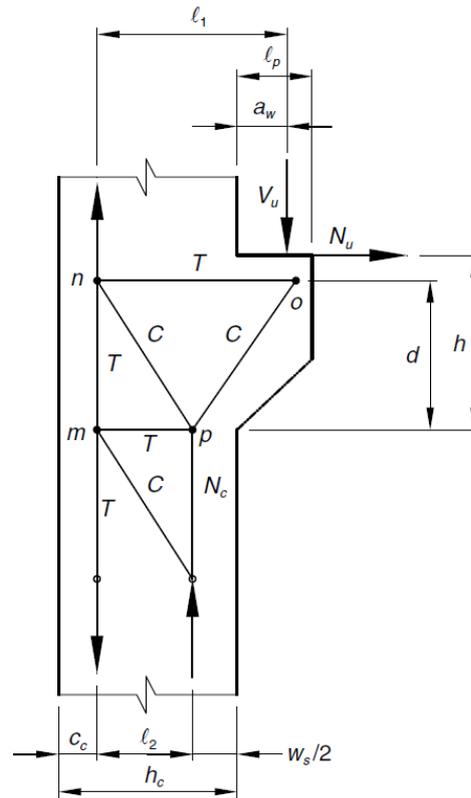
A armadura mínima do tirante deve ser avaliada considerando-se o mesmo critério dado em para vigas, considerando base e altura respectivamente iguais a b e h .

2.6.2 Modelo adotado pelo PCI (2010)

O manual do PCI (2010) apresenta no item 5.9.4.2 um modelo de treliça que contempla os tirantes considerando a armadura do consolo e a armadura do pilar. De acordo com o fluxo de tensões, o consolo possui 4 nós (m, n, o, p) e a treliça é definida como na Figura 28.

O nó m é localizado na interseção da armadura do pilar com a armadura na parte inferior do consolo. O nó n é localizado na interseção da armadura do pilar com a armadura da parte superior do consolo. O nó o é localizado na interseção da resultante das ações aplicadas (V_u e N_u) com a armadura da parte superior do consolo. O nó p é localizado na interseção das escoras inclinadas com a armadura na parte inferior do consolo.

Figura 28 – Geometria do modelo de treliça



Fonte: PCI, 2010.

Para o PCI (2010), as oito etapas básicas para a análise do modelo são:

- 1) determinação das dimensões da placa de apoio e proteção do canto contra esmagamento;
- 2) determinação da geometria da treliça;
- 3) determinação das forças nos componentes da treliça;
- 4) cálculo dos tirantes;
- 5) detalhamento das zonas nodais;
- 6) checagem das escoras;
- 7) determinação da área de armadura;
- 8) consideração do detalhamento para assegurar a técnica de cálculo;

2.6.2.1 Dimensionamento dos tirantes

Segundo o PCI (2010), a área de aço dos tirantes *no* e *mp* são dadas por

$$A_s = \frac{F_t}{\phi f_y} \quad (24)$$

em que F_t é a força no tirante, $\phi = 0,75$ e f_y é a tensão de escoamento do aço.

2.6.2.2 Verificação das escoras

Para o PCI (2010), como a largura do nó *p* (w_s) é escolhida para satisfazer a tensão limite neste nó, a tensão no nó *o* deve ser checada para a força de compressão na escora *op* e na força aplicada V_u . Da análise estática no modelo de treliça, conclui-se que o nó *p* está sob a máxima tensão de compressão devido a força N_c . Quando este nó está com o limite aceitável, todos os outros estão aceitáveis.

Considerando a geometria do modelo, e visto que l_1 é sempre maior que l_2 , a escora *np* é a mais crítica no nó *p*, portanto, basta verificar a tensão máxima nesta escora e todas as outras estarão aceitáveis. Para escora do tipo garrafa e sem armadura satisfazendo tração transversal, e adotando o menor valor de β_s , não há necessidade de adicionar armadura complementar em forma de estribos para o consolo.

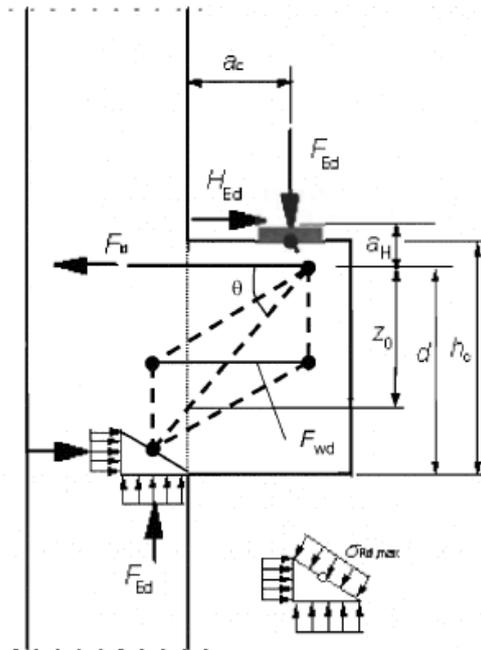
2.6.2.3 Disposições construtivas

O comprimento de ancoragem de cada barra é baseado no ACI 318 (2014). As tensões de aderência são calculadas assumindo um plano de falha. Tipicamente, consolos de concreto são uma parte dos componentes (pilares ou paredes) que não têm espaço suficiente para o desenvolvimento da ancoragem da barra por aderência, requerendo o uso de barras com gancho. A solução usual é o prolongamento da barra até a borda exterior do consolo com a utilização de uma barra soldada.

2.6.3 Modelo adotado pelo Eurocode 2 (2004)

Na norma europeia Eurocode 2 (CEN, 2004), o modelo de cálculo para consolos é apresentado no anexo J. Este é válido desde que a distância do ponto de aplicação do carregamento no consolo até a face do pilar (a_c) seja menor que a distância entre a resultante do tirante e a interseção da escora com a face do pilar (z_0). Conforme a recomendação, a inclinação deve estar no seguinte intervalo: $1,0 \leq \tan \theta \leq 2,5$. A Figura 29 apresenta o modelo de treliça desta norma.

Figura 29 – Modelo de bielas para consolo curto



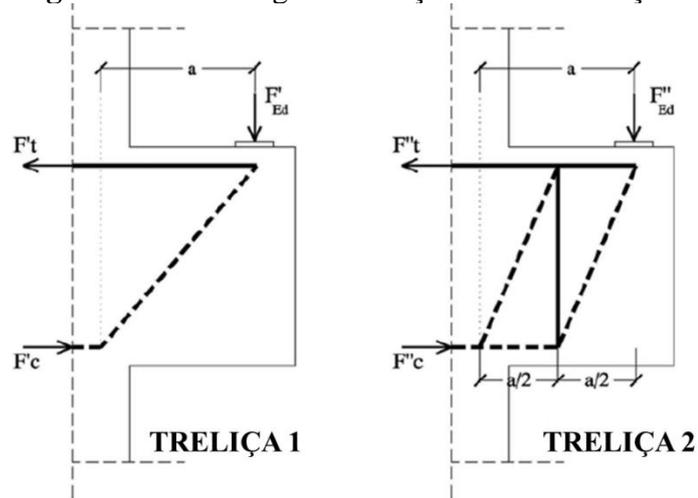
Fonte: EUROCODE 2 (CEN, 2004).

Este modelo é indeterminado estaticamente, então, uma estratégia de solução sugerida por Jacobs (2008) é de assumir uma relação linear entre F_{wd} e a distância a , considerando que $F_{wd} = 0$ quando $a = z/2$ e $F_{wd} = F_{Ed}$ quando $a = 2z$. Então, determina-se o valor de F_{wd} com a expressão

$$F_{wd} = F_{Ed} \frac{2a/z - 1}{3} \quad (25)$$

de acordo com a geometria da Figura 30.

Figura 30 – Estratégia de solução em duas treliças

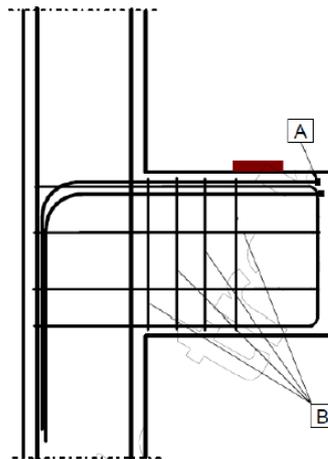


Fonte: adaptado de JACOBS, 2008.

2.6.3.1 Dimensionamento do tirante

Se a distância do ponto de aplicação do carregamento no consolo (a_c) for maior que a metade de sua altura (h_c), a recomendação é de que sejam adicionados estribos verticais, com área mínima de $A_{s,lnk} \geq k_2 F_{Ed}/f_{yd}$, em que $A_{s,lnk}$ é a área dos estribos verticais, F_{Ed} é a força vertical de cálculo. Para o coeficiente k_2 , a prescrição é de que o valor adotado seja 0,5. Como exposto na Figura 31, A são os dispositivos de ancoragem e B são os estribos.

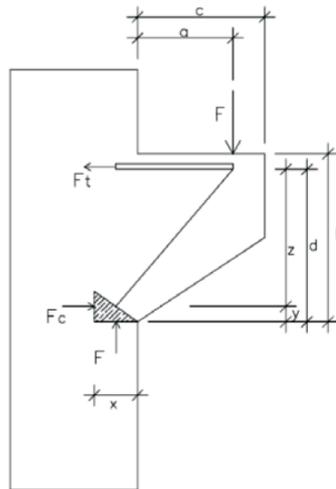
Figura 31 – Detalhamento das armaduras do consolo



Fonte: EUROCODE 2 (CEN, 2004).

Araújo *et al.* (2016) sugerem a adoção de um modelo simplificado, mostrado na Figura 32, que é similar ao modelo da NBR 9062 (ABNT, 2017), com a verificação adicional do nó localizado na região inferior do consolo. A definição da geometria é baseada na resistência da zona nodal, e desta forma, o dimensionamento do tirante principal é realizado com o cálculo da força F_t .

Figura 32 – Modelo simplificado do EUROCODE 2 (CEN, 2004)



Fonte: ARAÚJO *et al.*, 2016.

2.6.3.2 Verificação da escora

Para o caso em que a distância do ponto de aplicação do carregamento no consolo (a_c) for maior que sua altura (h_c), e a força de compressão na escora que se forma no pilar (F_{Ed}) for maior que a resistência do concreto ao cisalhamento ($V_{rd,c}$), devem ser adicionados ao consolo estribos verticais com área mínima $A_{s,lnk} \geq k_2 F_{Ed} / f_{yd}$, em que $A_{s,lnk}$ é a área total de estribos verticais. Para o coeficiente k_2 , a prescrição é de que o valor adotado seja 0,5. O valor de $V_{rd,c}$ pode ser obtido como

$$V_{rd,c} = [C_{Rd,c} k (100 \rho_1 f_{ck})^{1/3} + k_1 \sigma_{cp}] b_w d \quad (26)$$

em que $C_{Rd,c}$ possui um valor recomendado de $0,18/\gamma_c$, $k = 1 + \sqrt{200/d} \leq 2,0$ com d em mm, $\rho_1 = \frac{A_{sl}}{b_w d} \leq 0,02$, A_{sl} é a área de armadura, k_1 possui o valor recomendado de 0,15; $\sigma_{cp} = N_{Ed}/A_c < 0,2 f_{cd}$ em MPa, e quando não houver protensão, $\sigma_{cp} = 0$, e b_w é a menor dimensão da seção transversal.

2.6.3.3. Disposições construtivas

A recomendação para o detalhamento da armadura do consolo é de que o tirante principal seja ancorado em ambas as extremidades. Na extremidade junto ao pilar, o tirante deve ser ancorado na face externa do pilar, onde o comprimento de ancoragem deve ser medido a partir da armadura vertical do pilar nessa face. Na outra extremidade, o comprimento de ancoragem deve ser garantido a partir da face interna do aparelho de apoio.

2.6.4 Modelo proposto por Hagberg (1983)

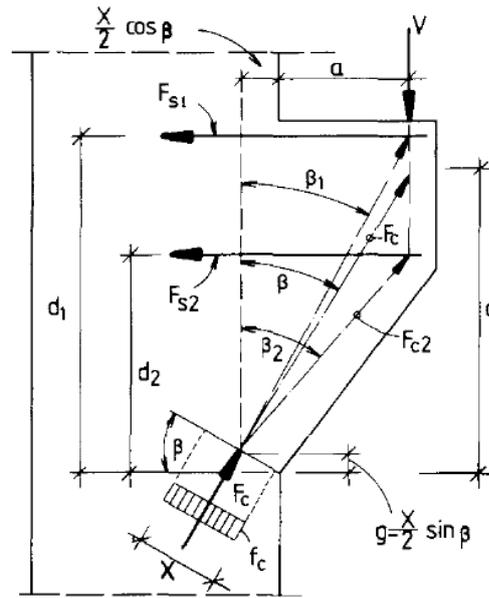
O modelo analítico proposto por Hagberg (1983) foi baseado no critério da mínima energia de deformação. Com isto, o modelo de treliça, estaticamente determinado, tem a menor energia de deformação e, conseqüentemente, este satisfaz melhor as condições de compatibilidade. Assumiu-se que o concreto atua em lamelas inclinadas entre as fissuras, transmitindo apenas forças de compressão, e as armaduras atuam como elementos lineares, considerando que o efeito pino seja insignificante.

A analogia de treliça proposta assume algumas hipóteses para a previsão da capacidade última do elemento:

- As condições de equilíbrio devem ser satisfeitas;
- A deformação elástica dos materiais é desprezada quando comparada à deformação de escoamento. É assumido que o concreto é esmagado ou o aço escoou na falha;
- As resistências dos materiais são determinadas em testes uniaxiais. A resistência do concreto é assumida igual à resistência do corpo de prova cilíndrico;
- A resistência à tração do concreto é desprezada;
- O escoamento do tirante é considerado um critério de falha;
- A geometria do elemento deve ser compatível com o modelo matemático. Isto é aplicável ao tirante e sua ancoragem.

A Figura 33 apresenta duas camadas de armadura horizontal, uma com o tirante principal e a outra a armadura de costura. A camada inferior representa o centro de gravidade dos estribos representativos da armadura de costura. Os estribos localizados próximos à zona de compressão não contribuem para a capacidade resistente do elemento.

Figura 33 – Modelo de treliça de Hagberg



Fonte: HAGBERG, 1983.

Das relações de equilíbrio da treliça ilustrada, têm-se

$$F_c = V / \cos \beta \quad (27)$$

$$F_s = V \cdot \tan \beta \quad (28)$$

$$F_s = F_{s1} + F_{s2} \quad (29)$$

Neste modelo, a altura d relaciona-se com as alturas d_1 e d_2 e as respectivas forças nos centros de gravidades dos tirantes, F_{s1} e F_{s2} , na forma

$$d = \frac{d_1 F_{s1}}{F_s} + \frac{d_2 F_{s2}}{F_s} \quad (30)$$

A armadura de costura deve ser considerada na distância $2d_1/3$, pois segundo Araújo *et al.* (2016), quando localizada fora dessa faixa, esta possui uma deformação muito pequena, não contribuindo efetivamente para a resistência do consolo.

Das relações geométricas, têm-se

$$\tan \beta_1 = \frac{a + \frac{x}{2} \cos \beta}{d_1 - \frac{x}{2} \sin \beta} \quad (31)$$

$$\tan \beta_2 = \frac{a + \frac{x}{2} \cos \beta}{d_2 - \frac{x}{2} \sin \beta} \quad (32)$$

Das relações constitutivas, obtém-se

$$x = \frac{F_s}{f_c b \sin \beta} \quad (33)$$

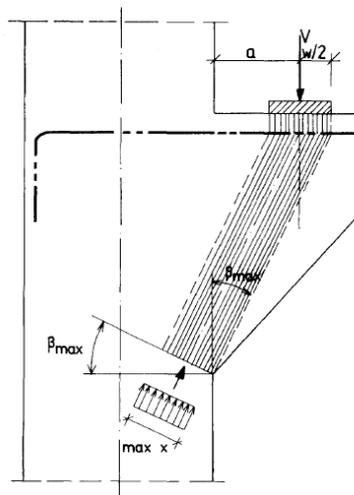
Considerando o limite superior de capacidade do consolo, é assumido que a armadura irá atingir a tensão de escoamento. Contudo, a geometria do consolo e a resistência do concreto podem assumir um limite superior para a capacidade do elemento. Este valor máximo é relacionado com o critério de falha por esmagamento. As limitações geométricas são mostradas na Figura 34, onde, de acordo com Hagberg (1983), as seguintes equações podem ser deduzidas:

$$\tan(\beta_{max}) = \frac{a + \frac{w}{2}}{d} \quad (34)$$

$$\max x = w \cos(\beta_{max}) \quad (35)$$

Para a relação explicitada na Eq. (35), segundo Hagberg (1983), toda a armadura é considerada em uma única camada.

Figura 34 – Relação geométrica e capacidade máxima

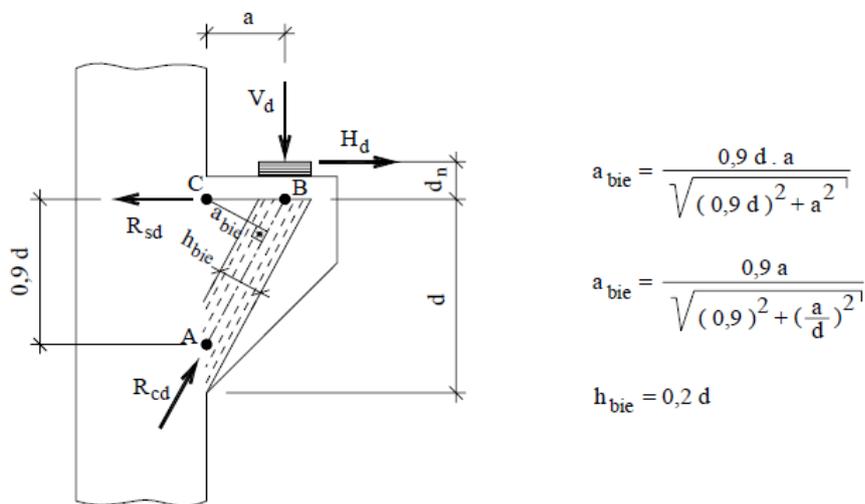


Fonte: HAGBERG, 1983.

2.6.5 Modelo proposto por Fernandes e El Debs (2005)

O modelo é baseado na proposta original de Leonhardt e Mönning (1978b), que consiste basicamente no equilíbrio de forças e momentos na treliça apresentada na Figura 35. El Debs (2017) cita que a região crítica para as tensões de compressão é a base do consolo, portanto, o esmagamento do concreto pouco depende da área de aplicação da força. No modelo considerado, é fixada uma largura da escora para a verificação do esmagamento.

Figura 35 – Modelo proposto por Leonhardt e Mönning



Fonte: FERNANDES e EL DEBS, 2005.

O equilíbrio de momentos em relação ao ponto A, em termos da área de armadura do tirante, leva a

$$A_{s,tir} f_{yd} = \frac{V_d a + H_d(0,9d + d_n)}{0,9d} \quad (36)$$

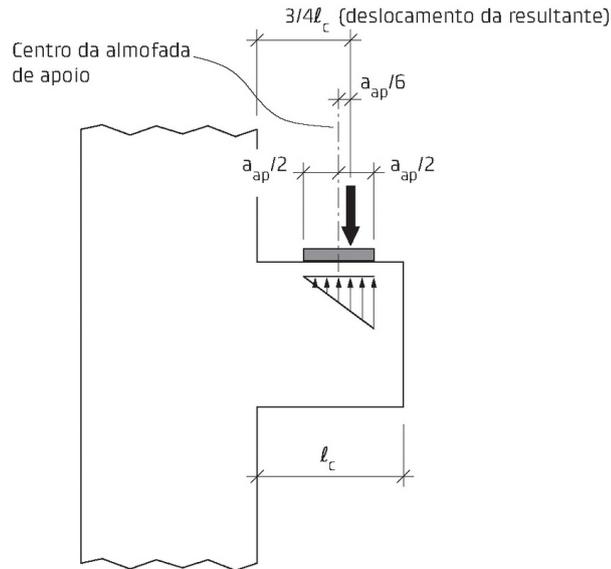
Considerando uma relação d_n/d aproximadamente igual a 0,2, tem-se a área de aço do tirante dada por

$$A_{s,tir} = \frac{V_d}{0,9 f_{yd}} \frac{a}{d} + \frac{1,2H_d}{f_{yd}} \quad (37)$$

Por ser uma região em que há concentração de tensões, deve-se considerar toda a transferência de forças, levando-se em consideração também as incertezas e tolerâncias envolvidas nos elementos pré-moldados, assim como possíveis esforços induzidos pelas

restrições dos apoios. El Debs (2017) recomenda considerar que a rotação de elementos fletidos nos apoios provoca um deslocamento da posição da reação de apoio. No caso particular dos consolos, a posição da força vertical tende a se deslocar para a extremidade, em consonância com a Figura 36.

Figura 36 – Deslocamento da resultante da reação vertical no consolo devido à rotação do elemento



Fonte: EL DEBS, 2017.

A verificação da resistência do concreto nos consolos curtos resulta em diferenças significativas de acordo com o procedimento utilizado, conforme enfatiza El Debs (2017). O ACI 318 (2014), no método de viga em balanço, indica de forma indireta a tensão de referência $0,2f_{cd}$ como um valor limite. Este valor já considera o ajuste dos coeficientes de segurança, de forma que a minoração da resistência do concreto estabelecida no ACI seja aproximadamente à norma brasileira neste caso específico.

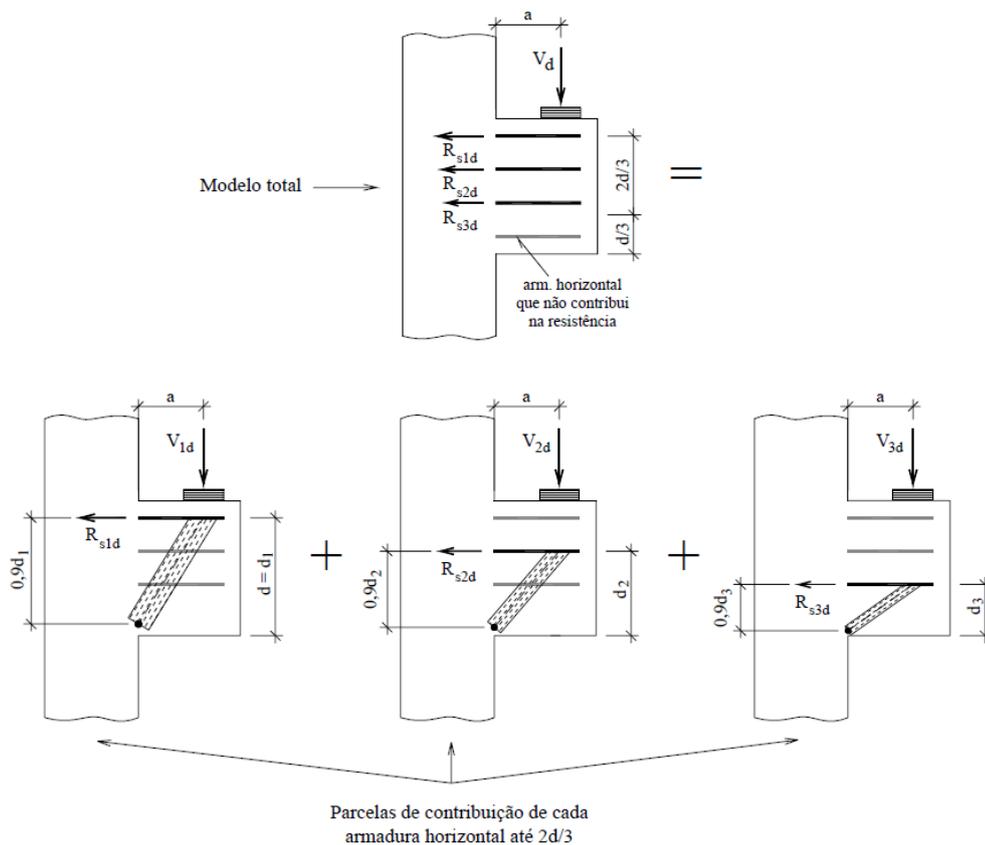
O procedimento de verificação da tensão na escora, de acordo com o modelo apresentado e com o valor limite dado pela NBR 9062 (ABNT, 2017), Fernandes e El Debs (2005) apresentam a equação

$$\sigma_{cd} = \frac{V_d}{0,18 b d} \sqrt{(0,9)^2 + \left(\frac{a}{d}\right)^2} \leq \beta \cdot f_{cd} \quad (38)$$

em que σ_{cd} é a tensão máxima na escora, b é a largura do consolo, β é considerado 1 para forças diretas e 0,85 para forças indiretas.

O diferencial proposto por Fernandes e El Debs (2005) é a adição da armadura de costura. Essa formulação modificada consiste na somatória das parcelas de contribuição das armaduras horizontais do tirante e de costura até $2d_1/3$, conforme é ilustrado na Figura 37.

Figura 37 – Modelo de Fernandes e El Debs



Fonte: FERNANDES e EL DEBS, 2005.

Seguindo a consideração do escoamento das armaduras horizontais no estado limite último, a resistência dos consolos curtos é, então, função do número n de barras situadas no trecho de altura $2d_1/3$, conforme

$$V_d = \sum_{i=1}^n A_{si} f_{yid} \frac{z_i}{d} \quad (39)$$

em que $R_{sid} = A_{si} f_{yid}$ é a força resistente na armadura considerada, $z_i = 0,9 d_i$ é o braço de alavanca referente à armadura i de área A_{si} , d_i é a altura útil efetiva da armadura i considerada.

Fernandes e El Debs (2005) ressaltam que devido à armadura de costura praticamente não contribuir para o aumento da força horizontal, esta foi eliminada da expressão modificada.

Considerando o estado limite último por esmagamento da escora, dado pela Eq. (38), substitui-se βf_{cd} por f_{cd}^* , e a altura útil d por d^* , que leva em conta a contribuição da armadura de costura até $2d_1/3$, chegando-se à expressão

$$V_d = \frac{0,18 f_{cd}^* b d^*}{\sqrt{(0,9)^2 + \left(\frac{a}{d}\right)^2}} \quad (40)$$

em que $f_{cd}^* = 0,85 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) f_{cd}$, $d^* = \sum_{i=1}^n \frac{d_i R_{sid}}{R_{sd}}$ e $R_{sd} = \sum_{i=1}^n A_{si} f_{yid}$, R_{sd} é a força resistente total.

2.6.6 Resumo dos modelos apresentados

Em todos os modelos apresentados, sugere-se o dimensionamento com atuação simultânea de carregamento horizontal e vertical. No caso de não atuar cargas horizontais, é conveniente considerá-las, para efeito de cálculo, como uma parcela da carga vertical.

A validação dos modelos pode acontecer tanto em um modelo numérico, quanto em um modelo experimental. Em ambos os casos, é importante observar a metodologia do modelo, e de acordo com Torres (1998), analisar a força de ruína, os mecanismos de ruína e força de início de ruína. Em função da geometria e do tipo de armadura adotada, as respostas variam e devem ser avaliadas. Como não há convergência em diversos parâmetros de cálculo, cada modelo sugerido é comentado.

Iniciando pelas referências normativas, os modelos da NBR 9062 (ABNT, 2017) e Eurocode 2 (CEN, 2004) apesar de não considerarem na formulação, exigem a colocação da armadura de costura. Já o modelo do PCI (2010), representa simultaneamente, o tirante principal e a armadura do pilar, e considera também uma única camada de armadura na extremidade inferior do consolo, que deve ser devidamente ancorada.

Apenas no procedimento da NBR 9062 (ABNT, 2017) há a necessidade da colocação de armadura secundária em forma de estribos verticais e horizontais ao mesmo tempo. Nos demais procedimentos, sugere-se a colocação de uma ou outra.

Com um número maior de variáveis, os modelos propostos por Hagberg (1983) e Fernandes e El Debs (2005) tornam-se indicados para a verificação dos tirantes. É necessário estimar uma área de aço e utilizar as formulações sugeridas para a consideração da contribuição da armadura de costura no mecanismo resistente dos consolos curtos. Desta forma, esses modelos não são efetivamente utilizados para dimensionar os elementos, mas sim para calcular

a efetiva contribuição da armadura de costura, já que é considerada apenas como uma fração volumétrica nos modelos normativos.

Araújo *et al.* (2016) ressaltam a importância da verificação da eficiência dos modelos matemáticos na representação dos fenômenos físicos, já que isto é um fator importante para a segurança dos projetos estruturais. Entretanto, deve-se possuir um extenso banco de dados com resultados para que seja avaliada a variabilidade dos materiais e o método de ensaio.

A Tabela 3 apresenta uma síntese dos modelos listados neste capítulo. São apresentados o número de elementos do modelo de treliça, contribuição da armadura de costura no esquema resistente, necessidade de verificação dos nós e determinação da largura da escora.

Tabela 3 – Características dos modelos

Modelo	Componentes da treliça	Armadura de costura	Verificação dos nós	Largura da escora
NBR 9062 (2017)	Dois (um tirante e uma escora)	Não	Não	Função da geometria
PCI (2010)	Cinco (três tirantes e duas escoras)	Não	Sim	Função da geometria
Eurocode 2 simplificado (2004)	Dois (um tirante e uma escora)	Não	Sim	Função da geometria
Hagberg (1983)	Duas treliças simples ligadas por uma barra vertical	Sim	Não	Função da geometria
Fernandes e El Debs (2005)	Função do número n de barras	Sim	Não	$0,2d$

Fonte: Autor, 2019.

2.7 Otimização estrutural

De forma a conceber um modelo de cálculo para consolos por meio de uma formulação matemática, a otimização topológica por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF) é conceitualmente indicada para a concepção de projetos de elementos estruturais, minimizando o processo clássico baseado em tentativas e erros.

2.7.1 Definições

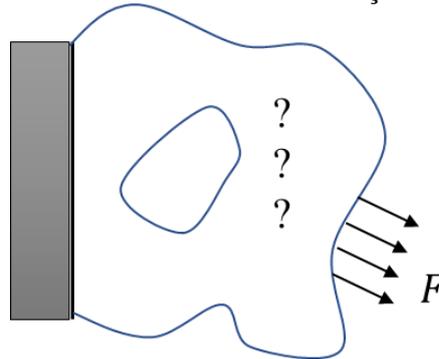
Usualmente, a obtenção de um modelo de escoras e tirantes compreende um processo iterativo que é avaliado por meio da experiência do engenheiro projetista. Com o surgimento de técnicas mais avançadas, objetiva-se minimizar esse processo baseado em tentativas e erros. Neste cenário, a aplicação de programas computacionais que usam a técnica da otimização topológica tem impulsionado a obtenção de modelos mais refinados e confiáveis.

Diversos pesquisadores têm trabalhado com o objetivo de automatizar a localização dos elementos, baseando-se frequentemente em recursos da programação matemática linear e não-linear e em critérios de evolução. Os trabalhos de Liang, Xie e Steven (2000), Pantoja (2012), Almeida, Simonetti e Oliveira Neto (2013), Sato (2015), Guerra (2017) fornecem embasamento teórico e resultados suficientes para comprovar a eficiência da otimização topológica como meio de obtenção de modelos de bielas.

O método de projeto pela otimização matemática é conceitualmente diferente do método iterativo/intuitivo. De acordo com Christensen e Klarbring (2009), neste método, o problema é formulado, onde os requisitos da função atuam como restrições e o conceito de “o melhor modelo possível” é dado precisamente na forma matemática.

As medidas de performance devem ser escolhidas, como por exemplo, peso, rigidez, carga crítica, tensão, deslocamentos. O problema de otimização estrutural é formulado escolhendo uma dessas medidas e a tornando uma função objetivo que deve ser maximizada ou minimizada e utilizando outras medidas como restrições. Ilustra-se, na Figura 38, o problema clássico de achar a forma da estrutura que melhor transmita a carga F ao apoio.

Figura 38 – Problema de otimização estrutural



Fonte: Autor, 2019.

Para os problemas mecânicos, Christensen e Klarbring (2009) definem a otimização como um procedimento iterativo-intuitivo, que é, atualmente, quase exclusivamente realizado por métodos numéricos com utilização de computador, tais como o Método dos Elementos Finitos (MEF).

Pantoja (2012) define que o campo de aplicações dos métodos de otimização ampliou-se à medida que a tecnologia computacional foi aprimorada, permitindo que os mesmos sejam empregados em sistemas estruturais complexos, tais como projeto de pontes, viadutos, componentes automotivos e aeroespaciais, entre outros.

O processo de otimização estrutural consiste em obter o projeto de melhor desempenho, sendo este avaliado por meio de uma função objetivo definida a partir de um conjunto de variáveis que descrevem o sistema, denominadas variáveis de projeto.

As técnicas de otimização buscam determinar os extremos desta função (máximo ou mínimo, dependendo do problema) dentro de uma região de projeto denominada região viável. Esta região reúne os pontos de projeto que atendem às restrições do problema, frequentemente classificada em regiões de igualdade e desigualdade.

A formulação padrão do problema de otimização é encontrada em Arora (2012). Esta (Eq. (41)) pode representar diferentes tipos de problema, sejam eles sem restrições, com restrições, programação linear e programação não linear.

$$\begin{aligned} \min_x f(x) \\ \text{s. t. } h_j(x) = 0 \quad j = 1, \dots, p \\ g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (41)$$

em que $f(x)$ é a função objetivo, x é o vetor das variáveis de projeto, $h_j(x)$ são as restrições de igualdade, $g_i(x)$ são as restrições de desigualdade.

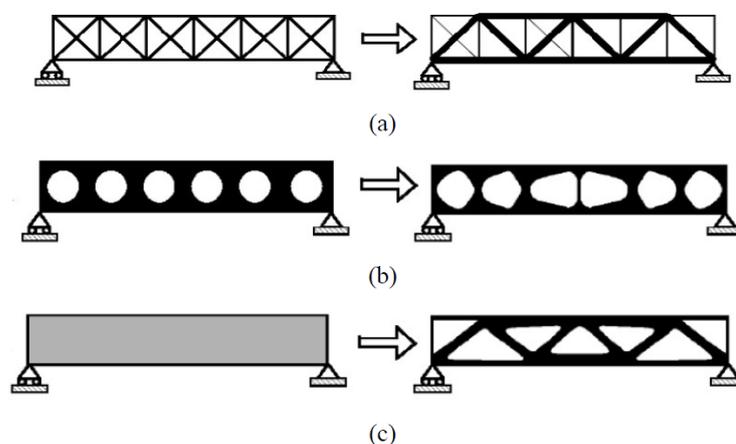
Arora (2012) relata a importância de uma formulação apropriada para que a solução ótima esteja compatível com o problema. Deve-se definir uma função objetivo e suas restrições (igualdade e/ou desigualdade), limites para as variáveis de projeto e os critérios de minimização. É importante que todos os parâmetros sejam consistentes, pois, se forem inconsistentes, talvez não seja possível encontrar uma solução.

Para a maioria dos problemas de otimização, são utilizados cinco passos para o procedimento de formulação: descrição do problema/projeto; definição dos dados e informações; definição das variáveis de projeto; critérios de otimização; formulação das restrições.

Dependendo das características geométricas, o problema de otimização estrutural pode ser dividido em três classes (Figura 39):

- a) Tamanho (paramétrica): quando as variáveis de projeto são algum tipo de espessura estrutural, como por exemplo: área da seção transversal dos elementos, distribuição de espessura de uma placa;
- b) Forma: quando as variáveis de projeto representam a forma ou limites de alguma parte do contorno do domínio estrutural. A otimização consiste em escolher o domínio de integração para as equações diferenciais de uma maneira ótima;
- c) Topológica: quando as variáveis de projeto representam a distribuição de material em um domínio previamente definido. Em estruturas discretas, corresponde a determinação de barras e suas respectivas conectividades nodais e geometria. Em estruturas contínuas, busca-se determinar a existência ou não existência de material no domínio, suas respectivas formas e conectividade entre os domínios (PANTOJA, 2012).

Figura 39 – Classes de otimização estrutural



Fonte: BENDSØE e SIGMUND, 2003.

2.7.2 Métodos de otimização topológica

O critério mais utilizado em problemas de otimização topológica de estruturas é a minimização da energia interna de deformação com restrição sobre o volume que, em problemas lineares, é equivalente ao problema de minimização do trabalho externo. Supondo constantes os carregamentos aos quais a estrutura está submetida, ao minimizar o trabalho das forças externas há uma respectiva minimização de deslocamentos, ou seja, a estrutura se torna mais rígida (PANTOJA, 2012).

Liang (2005) esclarece que a otimização topológica de estruturas contínuas alcançou um progresso significativo nas últimas três décadas. Embora existam muitos métodos de otimização topológica, o foco principal está nos aspectos matemáticos e não em aplicações práticas. Em seu trabalho, é apresentada uma metodologia na qual o desenvolvimento de modelos de escoras e tirantes em estruturas de concreto é transformado em um problema de topologia ótima para estruturas contínuas.

Querin *et al.* (2017) enquadram os métodos de otimização topológica em duas categorias distintas: métodos de critério de otimalidade (*Optimality Criteria*) e métodos heurísticos ou intuitivos. Os métodos de critério de otimalidade são métodos indiretos de otimização, que satisfazem um conjunto de critérios relacionados com o comportamento da estrutura.

Segundo Arora (2012), os métodos indiretos são baseados nas condições de ótimo de *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT), que devem ser satisfeitas para um ponto de mínimo. Querin *et al.* (2017) relatam que esses métodos são adequados para problemas com muitas variáveis de projeto e poucas restrições, a saber: Método da homogeneização, SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), *Level Set Method* e *Growth Method for Truss Structures*.

Os métodos heurísticos são derivados da intuição, observações de processos de engenharia e de observação de sistemas biológicos. Esses métodos não garantem sempre a condição de ótimo, mas podem fornecer soluções eficientes. Alguns métodos heurísticos de otimização topológica são: ESO (*Evolutionary Structural Optimization*), BESO (*Bidirectional Evolutionary Structural Optimization*) e SERA (*Sequential Element Rejection and Admission*) (ROZVANY, 2009).

Sigmund (2001) argumenta que as aproximações evolucionárias se tornam mais complicadas, uma vez que objetivos mais complexos que a minimização da flexibilidade são considerados e que como é demonstrado no trabalho publicado por este autor, a minimização da flexibilidade, na sua forma matemática, é simples de ser implementada e computacionalmente eficiente.

Pantoja (2012) classifica os métodos de otimização topológica, no que diz respeito a estruturas contínuas, em dois grupos:

- Aproximação por microestrutura (material): o processo de otimização topológica é baseado no estabelecimento de uma relação entre a rigidez e a densidade associada ao domínio, assumindo qualquer valor na região, entre 0 (vazio) e 1 (material sólido), sendo os valores intermediários correspondentes a um material poroso. Os algoritmos baseados em microestruturas propõem encontrar a melhor disposição do material, de maneira a minimizar ou maximizar a função objetivo. São exemplos: método SIMP, material poroso homogeneizado, entre outros.
- Aproximação por macroestrutura (geométrica): a topologia da estrutura é modificada pela inserção de furos no domínio. Dentre os métodos existentes, pode-se citar os métodos baseados na inserção de furos em sistemas contínuos, tais como: TSA (*Topology Sensitive Analysis*) e *Bubble Method*, e os métodos baseados na inserção de furos em sistemas discretos, tais como ESO, BESO e SERA.

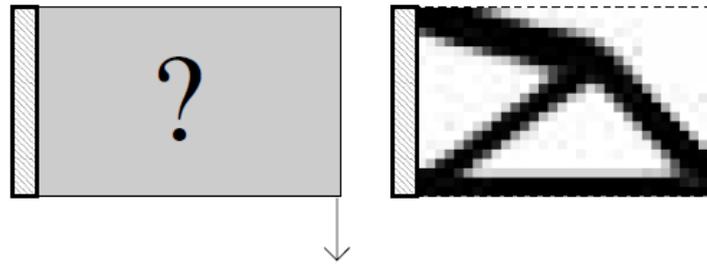
2.7.3 Método SIMP

O método numérico de otimização topológica baseado em elementos finitos mais conhecido é o método SIMP, que foi desenvolvido na década de 80 por Bendsøe e Kikuchi (1988). O termo **SIMP** significa *Solid Isotropic Material with Penalization*. Algumas vezes o método também é chamado de interpolação material, material artificial, lei de potência ou método da densidade, mas SIMP é a nomenclatura mais utilizada mundialmente (ROZVANY, 2009).

Neste método, a formulação do problema é desenvolvida tendo como principal objetivo a mínima flexibilidade do domínio de projeto, e, conseqüentemente, maximizar a rigidez, satisfazendo as restrições impostas. O trabalho pioneiro de aplicação do método surgiu com a publicação de Sigmund (2001), que apresenta a implementação computacional de um código em MATLAB® de 99 linhas utilizando este método, demonstrando sua eficiência para aplicações educacionais de problemas de otimização topológica.

A ideia básica do método SIMP (Figura 40) é de considerar apenas uma variável de projeto por elemento finito. A variável de projeto é a densidade artificial do elemento (ρ_e), que assume qualquer valor na faixa de $0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1$. Isto significa que o volume de um elemento é multiplicado por uma densidade artificial para produzir o volume real (QUERIN *et al.*, 2017).

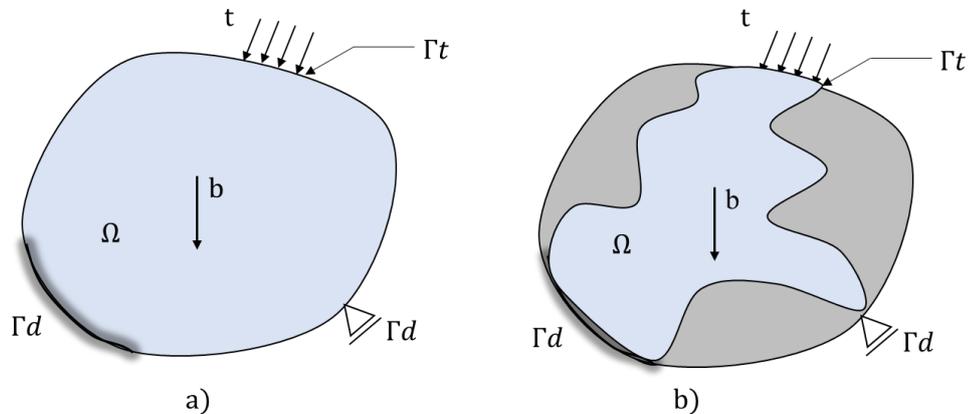
Figura 40 – Exemplo de aplicação do método SIMP



Fonte: SIGMUND, 2001.

Considerando um elemento, em análise mecânica, como um corpo ocupando um domínio Ω^{mat} (Figura 41), o qual é parte de um domínio maior Ω de referência no \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . O domínio de referência Ω também é escolhido para permitir a definição das cargas aplicadas e as condições de contorno. Por meio deste, pode-se definir o problema de otimização como a escolha ótima do tensor constitutivo $E_{ijkl}(x)$, o qual é uma variável dentro de todo domínio (BENDSØE e SIGMUND, 2003).

Figura 41 – Domínio bidimensional para otimização (a) e domínio final otimizado (b)



Fonte: Autor, 2019.

Na formulação contínua, o problema da maximização da rigidez pode ser descrito da seguinte forma, com o objetivo de minimizar o trabalho das forças externas com as restrições de volume para atender a um tensor constitutivo dentro de um campo de deslocamentos cinematicamente admissíveis:

$$\begin{aligned} \min W_{ext}(u) &= \int_{\Omega} bu \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} tu \, d\Gamma_t \\ s. t. E_{ijkl} &\in U_{adm} \end{aligned} \quad (42)$$

em que $W_{ext}(u)$ é o trabalho das forças externas, u é o campo de deslocamentos na condição de equilíbrio, b são as forças de volume, t são as forças no contorno, U_{adm} é o conjunto de tensores elástico admissíveis.

Na formulação discreta do problema, minimizando a energia de deformação, tem-se:

$$\begin{aligned} \min c(x) &= \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \sum_{e=1}^N (x_e)^p u_e^T k_0 u_e \\ s. t. \frac{V(x)}{V_0} &= f \\ \mathbf{K} \mathbf{U} &= \mathbf{F} \\ 0 &< x_{min} \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (43)$$

em que \mathbf{U} e \mathbf{F} são os vetores de deslocamento e força globais, respectivamente, \mathbf{K} é a matriz de rigidez global, u_e e k_e são o vetor de deslocamento do elemento e a matriz de rigidez do elemento, respectivamente, x é o vetor das variáveis de projeto, x_{min} é o vetor das mínimas densidades relativas (diferentes de zero para evitar singularidades), N é o número de elementos utilizados para discretizar o domínio, p é o fator de penalidade, $V(x)$ e V_0 são o volume de material e o volume do domínio de projeto, respectivamente e f é a fração volumétrica prescrita.

Com a formulação do método, as variáveis de projeto definidas no problema são as densidades relativas relacionadas com os elementos finitos ou nós da malha. O objetivo do problema de minimização da flexibilidade ou maximização da rigidez pode ser entendido então como um processo iterativo que busca uma melhor distribuição das variáveis de projeto pela malha definida.

Posto que a fração volumétrica prescrita é uma restrição do problema, sua definição é essencial para a solução do mesmo, podendo afetar a definição das topologias obtidas. Da mesma forma que o refinamento da malha, deve-se realizar uma análise comparativa com os resultados obtidos de forma a entender o comportamento do modelo.

O método aplica uma restrição às densidades artificiais intermediárias por meio de um fator de penalidade p , exposto por Sigmund (2001), como forma de obter as soluções ótimas, para um material isotrópico, na forma 0-1. Para valores de p superiores a 1, as densidades

intermediárias tornam-se desfavoráveis durante a otimização do problema. Isso significa que as mesmas conduzem a um alto gasto de volume de material com correspondentes pequenos ganhos de rigidez (PANTOJA, 2012).

Sigmund (2001) cita que as propriedades do material são modeladas como densidades materiais relativas elevadas a algum expoente vezes a propriedade material do sólido. Isso foi criticado por um tempo, visto que foi argumentado que não existe material com propriedades descritas por uma interpolação com lei de potência. Porém, foi comprovado que a aproximação baseada em uma lei de potência é fisicamente possível desde que condições simples sejam satisfeitas (ex.: $p \geq 3$ para coeficiente de Poisson igual a $1/3$).

Para garantir a existência de soluções, Sigmund (2001) recomenda a combinação da lei de potência com uma restrição de perímetro, restrição de gradiente ou técnicas de filtragem. Esta aproximação tem sido aplicada para problemas com múltiplas restrições, multifísica e múltiplos materiais.

Pantoja (2012) apresenta que dessa forma, as densidades intermediárias tendem a ser eliminadas do problema, durante a otimização, por meio da redução da ocorrência da escala de cinza. Como principal vantagem do método, pode-se considerar que a topologia obtida para o material é possível de ser aplicada em problemas práticos, sendo o problema genericamente tratado pela expressão

$$E(x) = \rho(x)^p E_s \quad (44)$$

em que $E(x)$ é o módulo de elasticidade em um ponto estendido com coordenadas x ; $\rho(x)$ é a densidade artificial relativa no ponto estendido; p é o fator de penalidade das densidades artificiais relativas; E_s é o módulo de elasticidade do material sólido.

A cada elemento finito da malha é associado um valor de densidade artificial relativa. A equação (45) pode ser aplicada como expressão do método SIMP. É necessário estabelecer uma restrição de volume para o problema, o que implica que o fator de penalidade tem que ser suficientemente grande. Em termos práticos, de acordo com Bendsøe e Sigmund (2003), adota-se $p \geq 3$. A expressão anterior, em termos dos elementos, torna-se

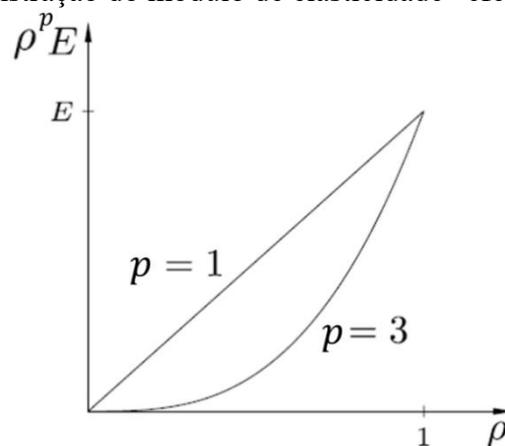
$$E_e = \rho_e^p E_s \quad (45)$$

em que E_e é o módulo de elasticidade associado ao elemento finito e ρ_e é a densidade do elemento e .

A adoção de um limite mínimo para o módulo de elasticidade de um elemento é feita de modo a evitar o problema de singularidade da matriz de rigidez da estrutura durante o processo de resolução das equações de equilíbrio. Um valor de ρ_{min} na ordem de 0,001 é suficiente para evitar este problema (PANTOJA, 2012).

A Figura 42 apresenta graficamente o módulo de elasticidade “efetivo” em função de ρ . Da análise desta, nota-se que se $p > 1$, então para ρ entre 0 e 1, a rigidez obtida é desproporcionalmente baixa e então, tais valores devem ser evitados na solução ótima, pois não representam um uso econômico do material (CHRISTENSEN e KLARBRING, 2009).

Figura 42 – Demonstração do módulo de elasticidade “efetivo” em função de ρ



Fonte: adaptado de CHRISTENSEN e KLARBRING, 2009.

O procedimento padrão é considerar o projeto de um elemento estrutural como um problema de otimização somente em termos das variáveis de projeto, e o campo de deslocamentos é considerado como uma função destas. Estes campos são dados implicitamente em termos das variáveis de projeto por meio da equação de equilíbrio. A análise de encontrar as derivadas dos deslocamentos em relação às variáveis de projeto é denominada análise de sensibilidade (BENDSØE e SIGMUND, 2003).

A restrição da equação de equilíbrio do problema é atendida de forma indireta pela análise via MEF, enquanto as duas outras restrições têm gradiente igual à unidade. Assim, a análise do problema se resume à sensibilidade da função objetivo à luz da condição de equilíbrio, a qual é avaliada pelo método adjunto, chegando-se à equação

$$\frac{\partial c}{\partial \rho_e} = -p \rho_e^{p-1} u_e^T k_e u_e \quad (46)$$

conforme apresentado em Bendsøe e Sigmund (2003). (SANTOS, ALMEIDA, PANTOJA, 2013).

Com isto, conforme observa Pantoja (2012), consegue-se obter as derivadas para o problema de minimização de trabalho de deformação. Vale notar que as derivadas envolvem informações apenas no nível do elemento, entretanto, sua repercussão se dará pelo efeito da variável de projeto na forma de deslocamentos. A análise física para a sensibilidade está relacionada com a adição de material, no caso específico para o problema com decréscimo de flexibilidade, a consequência é que a estrutura se torna mais rígida.

A aplicação do método de interpolação material para obtenção de soluções ótimas 0-1 é extremamente útil e permite o uso de métodos de programação matemática para problemas contínuos (suaves) como citam Bendsøe e Sigmund (2003). É importante ressaltar que a solução depende da escolha da geometria, carregamento e condições de contorno, podendo resultar em mudanças drásticas no projeto ótimo que o algoritmo produz.

Bendsøe e Sigmund (2003) relatam que a análise via MEF oferece a possibilidade de instabilidades numéricas ao modelo. Basicamente, estas podem ser divididas em três categorias: as irregularidades do tabuleiro de xadrez, a dependência de malha e o problema de ótimos locais.

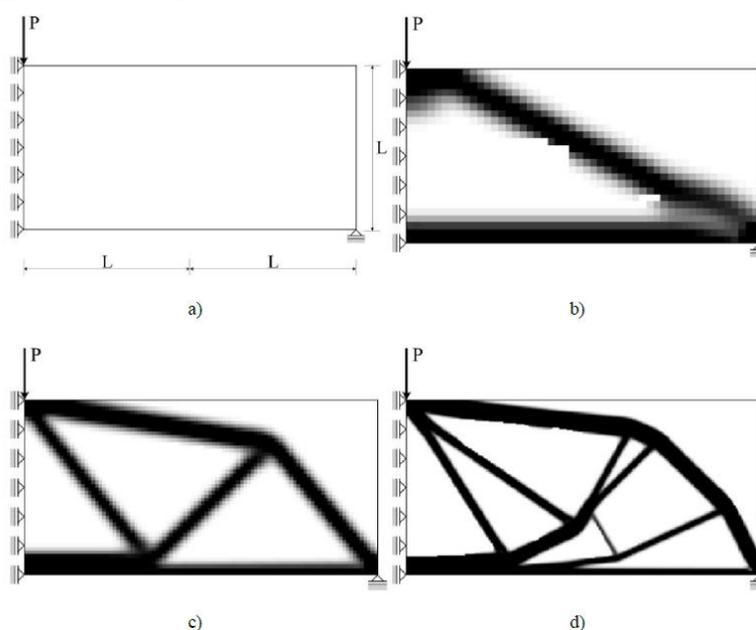
Sigmund (2001) conceitua a adoção do filtro de sensibilidade como um procedimento heurístico no combate às instabilidades numéricas. Pantoja (2012) cita que a sua principal diferença na aplicação entre as técnicas com abordagem no elemento e com abordagem em variáveis nodais é que na primeira ele atua alterando as sensibilidades da função objetivo, de maneira com que ela dependa das sensibilidades e das densidades dos elementos de uma determinada vizinhança, e não apenas de um elemento. Sua outra alteração se dará em relação às variáveis de projeto localizadas nos nós da malha adotada.

Bendsøe e Sigmund (2003) tratam duas questões importantes que influenciam o custo computacional para o procedimento de otimização topológica: a aparência de tabuleiro de xadrez e os resultados dependentes da malha.

O refinamento da malha está diretamente ligado com a distribuição de material. Neste processo, é possível obter variações na forma de microestruturas que melhoram o uso do material. Bendsøe e Sigmund (2003) indicam que quanto mais refinada a malha do domínio de referência, mais similar a estrutura será ao layout previsto na teoria de microestruturas. A dependência de soluções para a discretização escolhida leva a um melhor ou pior detalhamento e descrição dos contornos.

Na Figura 43 estão ilustradas diferentes soluções finais para três discretizações de uma mesma estrutura simétrica. Pantoja (2012) cita que a cada nova discretização, uma nova solução mais refinada pode ser encontrada. As topologias encontradas na Figura 43a, Figura 43b e Figura 43c foram para malhas com 1250, 5000 e 45000 elementos, respectivamente.

Figura 43 – Dependência de malha em uma estrutura simétrica



Fonte: PANTOJA, 2012.

Uma situação particular citada por Bendsøe e Sigmund (2003) é a de pequenas frações volumétricas adotadas como restrição do problema, tendo como consequência a necessidade de malhas extremamente refinadas para a solução ótima de distribuição de material, visto que as grosseiras, em geral, não serão representativas. Em contrapartida, para grandes frações volumétricas, com malhas menos refinadas, há um bom indicativo para a topologia estimada.

Para evitar o problema de tabuleiro de xadrez, Bendsøe e Sigmund (2003) sugerem a utilização de elementos finitos de ordem superior para a representação dos deslocamentos. Usualmente, elementos quadriláteros de 8 ou 9 nós podem prevenir esta instabilidade, devido ao enriquecimento do campo de deslocamentos, porém, aumentam substancialmente o custo computacional. Embora isto não seja um sério problema para casos 2D, ainda é produtivo empregar soluções alternativas e mais econômicas do ponto de vista computacional.

Lanes (2013) relaciona o problema de ótimos locais com a natureza não convexa dos projetos de otimização topológica, que estão propícios a inúmeros resultados com soluções localizadas. Dependendo dos parâmetros iniciais escolhidos para um mesmo problema, muitos

ótimos podem ser encontrados, tornando a otimização estrutural topológica extremamente sensível a essas modificações. No entanto, quando as demais instabilidades numéricas são controladas, o problema original não convexo tende a tornar-se convexo, fazendo com que a topologia final possa ser reproduzida.

Christensen e Klarbring (2009) apresentam de forma resumida na Tabela 4 as instabilidades numéricas e as suas possíveis soluções, em que ρ^* é a densidade obtida na solução ótima e ρ_h^* é a densidade na discretização da malha, sendo h a dimensão da malha.

Tabela 4 – Resumo das instabilidades numéricas

Instabilidades numéricas	Razão matemática	Possível solução
Algoritmo termina em um mínimo não global	Problema não convexo	Aumentar p gradualmente. Tentar diferentes inícios de projeto.
Tabuleiro de xadrez	Não convergência de ρ_h^* para ρ^* quando $h \rightarrow 0$.	Aumentar o número de nós para representar o campo de deslocamentos. Usar restrição.
Dependência da malha	Não existência de ρ^* .	Usar restrição.

Fonte: adaptado de CHRISTENSEN e KLARBRING, 2009.

2.7.4 Aplicações para o método das bielas

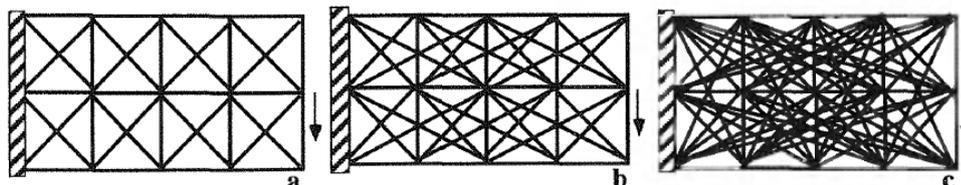
Com a tendência do avanço da tecnologia, o desenvolvimento e a utilização de ferramentas mais confiáveis, aliados com a automatização no procedimento de obtenção de modelos de escoras e tirantes, a otimização topológica surge como uma técnica que fornece subsídios para projetos de estruturas mais complexas, auxiliando na configuração estrutural mais adequada para as rotinas de dimensionamento e detalhamento.

As classes de otimização topológica podem ser divididas de acordo com o objetivo da análise estrutural. Para os casos em que as variáveis de projeto são as densidades de cada elemento, trabalha-se com otimização de estruturas contínuas. Em contrapartida, quando as variáveis são as áreas da seção transversal, estuda-se a otimização de estruturas discretas.

Para as estruturas discretas, a otimização da geometria e topologia de treliças pode ser formulada com o método *ground structure*, de acordo com Bendsøe e Sigmund (2003). Nesta formulação, define-se uma malha de treliças com uma determinada conectividade em um

conjunto de pontos nodais como uma estrutura preliminar, a exemplo da Figura 44. De certa forma, o problema pode ser visto como uma otimização paramétrica, em que o objetivo é encontrar as áreas de seção transversal que possibilitem a estrutura mais rígida possível.

Figura 44 – Método *ground structure* de otimização



Fonte: BENDSØE e SIGMUND, 2003.

Para as estruturas contínuas, dois grandes grupos de métodos podem ser encontrados: os métodos por aproximação de microestrutura e os métodos por aproximação de macroestrutura. Neste trabalho é apresentado o desenvolvimento destes dois métodos para a aplicação do método das bielas.

Liang, Xie e Steven (2000) apresentam como indicadores do processo de otimização o índice de performance (PI) e a taxa de remoção de elemento (ERR). O PI é utilizado como um indicador de eficiência do material e como um critério de término do processo iterativo de otimização. Durante o processo, a energia virtual de deformação é calculada negligenciando o termo de alta ordem na análise de sensibilidade, então apenas um pequeno número de elementos é removido da estrutura em cada iteração para obter uma solução.

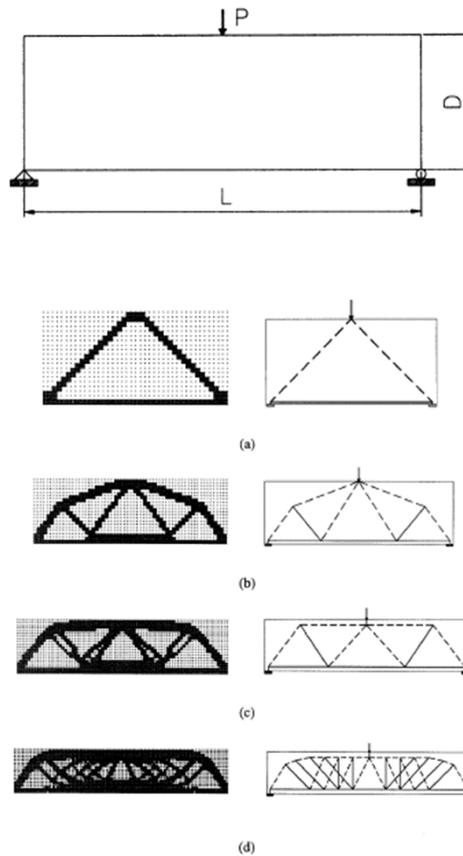
A taxa de remoção de elementos (ERR) é definida por Liang, Xie e Steven (2000) como uma proporção do número de elementos a serem removidos e o número total de elementos no domínio inicial de projeto. Esta taxa é mantida constante durante o processo de otimização, e é indicado que valores entre 1 ou 2% fornecem resultados razoáveis para o uso corrente no método ESO.

Na Figura 45, são apresentados exemplos de obtenção de modelos de escoras e tirantes com o auxílio da otimização topológica. Nestes casos, Liang, Xie e Steven (2000) tiveram como objetivo a investigação da relação vão/altura em uma viga biapoiada, de altura $D = 1000 \text{ mm}$ e largura $b = 250 \text{ mm}$, submetida a uma carga concentrada $P = 1200 \text{ kN}$. Em todos os casos apresentados, considerou-se $E = 28567 \text{ MPa}$ e $\nu = 0,2$.

As relações L/D iguais a 2, 3, 4 e 5 são apresentadas, respectivamente, na Figura 45a, Figura 45b, Figura 45c e Figura 45d. Pode-se observar que a topologia ótima, para a

consideração de material elástico linear e análise em estado plano de tensão, não depende da magnitude da carga aplicada e nem da largura da viga.

Figura 45 – Topologias ótimas para viga biapoada com variação na relação vão/altura



Fonte: LIANG, XIE e STEVEN, 2000.

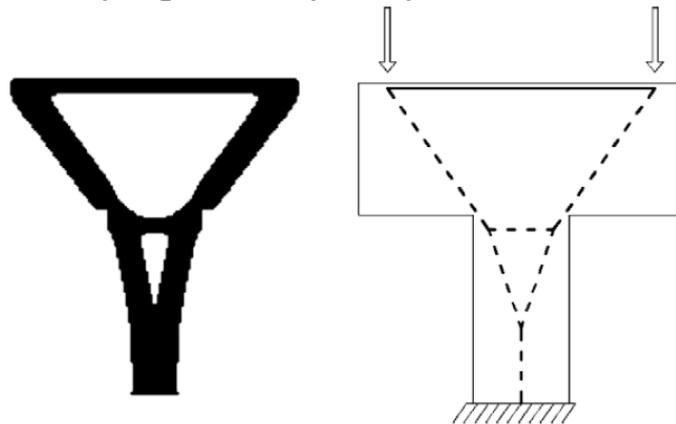
A consideração de um comportamento elástico para o concreto, mesmo em situações de fissuração, para Liang, Xie e Steven (2000) fornece um entendimento claro do mecanismo de transferência de esforços em elementos de concreto armado. Como indicativo para a construção dos modelos de escoras e tirantes, os resultados obtidos por meio da otimização topológica de estruturas elásticas lineares não podem ser considerados absolutos, porém há confirmações de que estes resultados são válidos e suportados por análises experimentais.

Para a obtenção de modelos de escoras e tirantes, Liang (2005) propõe que o modelo de bielas ótimo em um elemento de concreto fissurado é gerado pela remoção gradual de regiões que são ineficientes em transmitir esforços para outros elementos, baseado em um critério geral de performance da rigidez ou performance de deslocamento, denominado PBO (*Performance-Based Optimization*).

Liang (2005) apresenta a formulação do método PBO com base no critério da performance de deslocamento, na qual o objetivo é maximizar a performance de uma estrutura contínua inicial em termos da eficiência do uso de material para resistir às deformações. O critério de remoção dos elementos é baseado nas densidades de energia de deformação virtual (*virtual strain energy densities*) dos elementos, abreviadas como VSEDs. Para as estruturas de concreto, um modelo de bielas ótimo pode ser gerado pela eliminação gradual de um pequeno número de elementos com as menores VSEDs de um elemento de concreto discretizado.

De acordo com Bruggi (2009), a definição padrão do problema de minimização da flexibilidade pode ser utilizada para gerar um padrão preliminar dos modelos de treliça, cabendo ao usuário definir corretamente seus componentes. Como exemplo, na Figura 46, em um consolo duplo, pode-se analisar diferentes casos de carregamento e obter um indicativo de um possível modelo para o dimensionamento dos elementos.

Figura 46 – Topologia ótima e padrão preliminar de modelo de treliça



Fonte: BRUGGI, 2009.

Bruggi (2009) relaciona que o modelo de bielas mais adequado deve satisfazer as equações de equilíbrio e as condições de escoamento dos elementos. Devido à relaxação do problema de elasticidade, a unicidade da solução é perdida e mais um modelo pode ser derivado de uma mesma estrutura inicial. Porém, a ductilidade limitada do concreto determina padrões de bielas com pequena deformação, então, os modelos ótimos são os mais rígidos.

Deve-se ressaltar que as topologias ótimas são sistemas equilibrados, porém nenhum controle de resistência é realizado nos nós e nos demais elementos com o algoritmo de minimização. Este procedimento produz apenas padrões preliminares, ficando a cargo do projetista o dimensionamento das escoras, tirantes e regiões nodais.

Santos, Almeida e Pantoja (2013) conceituam que a abordagem clássica, que considera a distribuição apenas de um material, apresenta uma incompatibilidade natural com os modelos de escoras e tirantes, pois esse é composto por elementos de concreto e aço. Desta forma, em seu trabalho, os autores propõem a utilização de uma abordagem que considere a variação o material durante o processo de otimização.

A consideração de dois materiais no processo de otimização topológica, para Santos, Almeida e Pantoja (2013), é feita automaticamente por meio da avaliação das tensões principais em cada elemento. Com uma distribuição inicial de uma malha considerando unicamente o concreto, a cada iteração são verificadas as tensões principais de cada elemento. Para os casos em que os elementos apresentam valor negativo para o produto das tensões principais, o valor do módulo de elasticidade associado a ele é modificado para o do aço.

Lanes (2013) propôs um *script* desenvolvido na linguagem de programação *Python* para a análise de problemas estáticos e dinâmicos utilizando o método de otimização estrutural evolucionária (ESO). Foram propostos e solucionados casos envolvendo restrição de volume e demais condições de restrição, tais como deslocamento e velocidade de um ponto específico do domínio. O autor adotou este método por considerar uma excelente alternativa na obtenção de resultados aproximados para a identificação de estruturas ótimas a partir do conceito de eliminação de regiões menos solicitadas do espaço de busca a partir de uma análise via MEF.

Lanes (2013) cita como vantagem do algoritmo ESO a utilização para análise de problemas envolvendo não linearidade física e geométrica, com grande potencial de aplicação para problemas complexos e com uma grande facilidade de implementação computacional. Por meio deste algoritmo, ocorre uma remoção de elementos ineficientes a cada análise durante o processo evolutivo, até que os critérios de projetos sejam atingidos.

Em termos de tensões equivalentes de von Mises, Lanes (2013) demonstra a utilização destas como critério de penalidade, conforme

$$\frac{\sigma_e^{vm}}{\sigma_{MAX}^{vm}} < RR_i \quad (47)$$

De acordo com Lanes (2013), a razão de rejeição (RR) é utilizada para retardar o processo de remoção do elemento e está vinculada a $0 < RR < 1$. O ciclo da remoção dos elementos ocorre até o ponto que não possam ser mais removidos elementos para um dado valor de RR . Satisfeito um nível de equilíbrio, mas não obtida a configuração ótima, o processo evolutivo é redefinido, adicionando-se a RR uma razão de evolução (ER).

Desta forma, dado início a um novo ciclo de evolução, o objetivo se traduz em que não existam mais elementos a serem eliminados com essa nova razão de rejeição. Reequilibrado o processo RR é novamente atualizada, tal como segue:

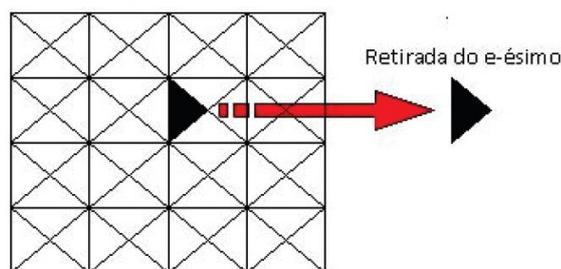
$$RR_{i+1} = RR_i + ER \quad i = 0,1,2 \dots \quad (48)$$

Querin (1997) sugere que para os parâmetros RR e ER sejam adotados valores pequenos, aproximadamente 1%, de modo a garantir uma melhor convergência. Adicionalmente, um controle sobre a razão de remoção pode ser realizado, para impedir que esta atinja valores muito elevados, tendo como consequência uma remoção de uma região muito grande do domínio.

Almeida, Simonetti e Oliveira Neto (2013) propuseram a utilização dos métodos ESO e seu variante, SESO (*Smoothing ESO*), com base na observação de que se o elemento não for necessário à estrutura, sua contribuição de rigidez vai diminuindo progressivamente. Isso se reflete na atenuação de valores da matriz constitutiva, como se esta estivesse em processo de danificação.

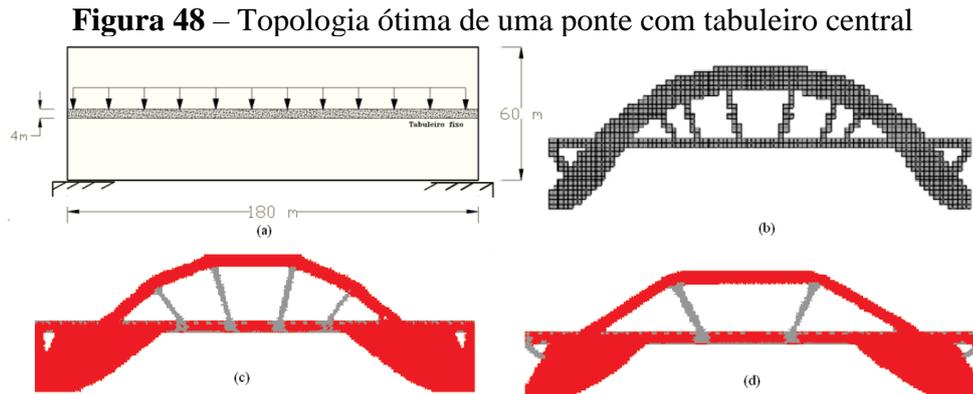
Com a metodologia SESO de remoção dos elementos (Figura 47), Almeida, Simonetti e Oliveira Neto (2013) definem a otimização topológica como um auxílio para a definição dos elementos componentes do modelo de escoras e tirantes, quantificando seus valores para dimensionamento.

Figura 47 – Remoção de elementos com a metodologia SESO



Fonte: ALMEIDA, SIMONETTI e OLIVEIRA NETO, 2013.

Por meio da metodologia SESO, Almeida, Simonetti e Oliveira Neto (2013) apresentam resultados numéricos para a comparação e avaliação dos modelos clássicos de escoras e tirantes. Na Figura 48, utiliza-se a técnica SESO para encontrar a topologia ótima de uma estrutura de ponte com tabuleiro central e sujeita a um carregamento uniformemente distribuído. Os resultados obtidos na Figura 48c e Figura 48d foram válidos para a consideração de $RR = 1\%$ e $ER = 1,05\%$, $RR = 1,1\%$ e $ER = 0,9\%$, respectivamente.



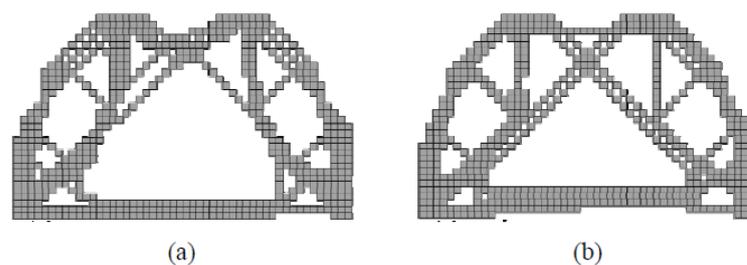
Fonte: ALMEIDA, SIMONETTI e OLIVEIRA NETO, 2013.

Guerra (2017) utilizou o *script* desenvolvido por Lanes (2013) para a obtenção de modelos de escoras e tirantes considerando tanto o comportamento linear quanto o comportamento não linear dos elementos de concreto armado.

Para análise não linear física, Guerra (2017) utilizou o modelo constitutivo de dano plástico CDP – *Concrete Damage Plasticity* – que se baseia na suposição escalar de danos (isotrópico) e é indicado para aplicações nas quais o elemento em concreto é submetido a condições de carga arbitrária, incluindo cargas cíclicas. Este modelo leva em consideração a degradação da rigidez elástica induzida por deformação plástica, tanto para tensões de tração quanto para tensões de compressão. Além disso, descreve o comportamento do concreto em relação aos efeitos de rigidez após a recuperação sob carregamento cíclico.

A Figura 49 apresenta um exemplo de obtenção de topologias ótimas para uma viga parede com dois furos. A consideração da não linearidade do material, para Guerra (2017), corresponde a uma melhor opção para descrever o real comportamento do mesmo. Em termos de cálculo de área de aço, os dois modelos apresentarão diferenças, tanto em relação a quantidade, quanto em relação a posicionamento.

Figura 49 – Topologias ótimas considerando (a) material elástico linear (b) material não linear



Fonte: GUERRA, 2017.

Querin *et al.* (2017) apresentam o método ITD (*Isolines Topology Design*) como um procedimento integrado, que é capaz de projetar a forma e a topologia de estruturas contínuas bidimensionais e tridimensionais, por meio de isolinhas ou isosuperfícies, representando o comportamento estrutural de determinada estrutura.

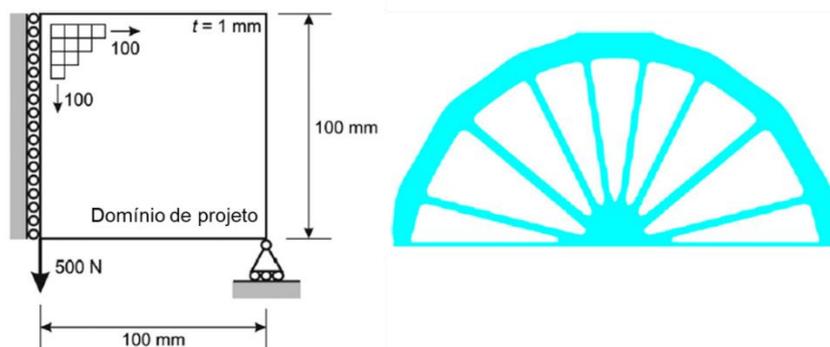
Para critérios de otimização com dois materiais, Querin *et al.* (2017) propõem a análise baseada no campo de tensões e a utilização do fator k_1 para multiplicar as tensões principais negativas durante o procedimento de otimização.

$$k_1 = \frac{\sigma_T^*}{\sigma_C^*} = \left(\frac{\rho_T E_T}{\rho_C E_C} \right)^{1/2} \quad (49)$$

em que σ_T^* e σ_C^* são as tensões máximas de tensão e compressão na estrutura otimizada, respectivamente; ρ_T e ρ_C são as densidades dos elementos tracionados e comprimidos, respectivamente; E_T e E_C são os módulos de elasticidade dos elementos submetidos à tração e submetidos à compressão, respectivamente.

O algoritmo do método ITD funciona de maneira iterativa, com a redistribuição de material (adição e remoção) dentro de um domínio de projeto, até atingir a fração volumétrica requerida. Na Figura 50, é apresentado um exemplo da viga de Michell, o domínio de projeto é simétrico e a topologia obtida para uma fração volumétrica de 29,66 % é demonstrada para todo o domínio da viga, considerada apoiada nos extremos.

Figura 50 – Topologia ótima da viga de Michell



Fonte: adaptado de QUERIN *et al.*, 2017.

Nesta seção, foram apresentados os diferentes métodos de otimização topológica e suas aplicações para modelos de bielas. Diversos trabalhos foram desenvolvidos e ainda há uma vasta área de pesquisa para o desenvolvimento e aprimoramento das ferramentas de otimização.

3 MODELAGEM NUMÉRICA

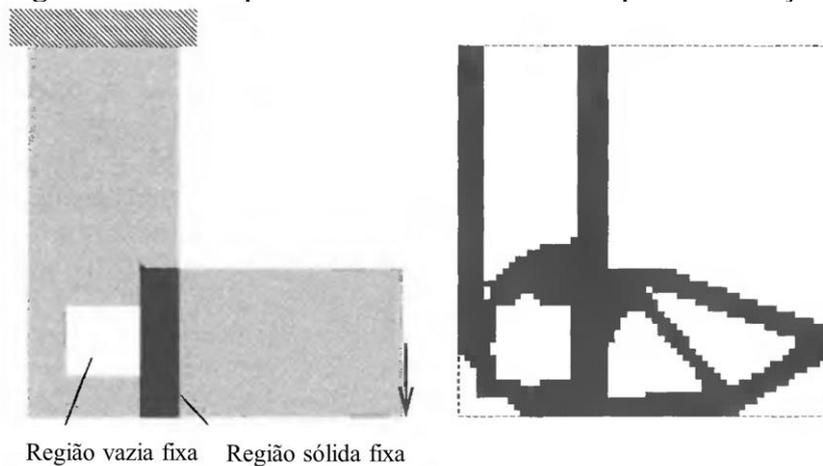
A otimização estrutural com o auxílio do MEF necessita de um algoritmo para a definição e solução do problema. Nesse contexto necessário para a análise computacional, apresenta-se o procedimento fundamental de otimização e as potencialidades da utilização do *software* ABAQUS®.

3.1 Algoritmo de otimização topológica

A otimização topológica considera um domínio inicial (a área original de projeto), que também contém condições prescritas (tais como condições de contorno e carregamentos). O processo de otimização determina uma nova distribuição de material pela mudança da densidade e da rigidez dos elementos do domínio inicial, enquanto satisfaz as restrições de projeto, tais como: mínimo volume ou máximo deslocamento de uma região.

Para o caso em que partes da estrutura são consideradas fixas (sólidos ou vazios), o esquema de atualização das variáveis de projeto deve ser invocado apenas para as áreas da estrutura base que devem ser reprojatadas, de acordo com a Figura 51.

Figura 51 – Exemplo de domínio de referência para otimização



Fonte: adaptado de BENDSØE e SIGMUND, 2003.

Arora (2012) cita que um bom algoritmo de otimização para aplicações práticas deve seguir os seguintes requisitos:

- **Confiabilidade:** o algoritmo deve ser confiável para aplicações práticas, convergindo para um ponto de mínimo a partir de qualquer estimativa inicial;

- Generalidade: o algoritmo deve ser geral, ou seja, deve tratar restrições de igualdade assim como restrições de desigualdade. Não se deve impor nenhuma restrição na forma das funções do problema
- Facilidade de uso: Deve ser fácil de uso tanto para os usuários experientes quanto para os usuários sem experiência. De um ponto de vista prático, quando há a exigência de muitos parâmetros, torna-se inviável a prática para aplicações em projetos.
- Eficiência: Para as aplicações mais gerais de engenharia, o algoritmo deve possuir tal eficiência que atinja a convergência de um ponto de mínimo em uma maior velocidade. Ainda é desejável que seja realizado um menor número de cálculos em uma única iteração.

Para Bendsøe e Sigmund (2003), o projeto ótimo utilizando o método de distribuição material é baseado no cálculo numérico da distribuição ótima global da densidade do material ρ , a qual é variável de projeto. O método de critério de otimalidade para achar a topologia ótima de uma estrutura constituída de um único material isotrópico consiste nos seguintes passos:

Pré-processamento da geometria e carregamento

- Escolher um domínio de referência adequado (estrutura base) que permita a definição das condições de contorno;
- Escolher as partes do domínio de referência que devem ser otimizadas e quais partes devem ser definidas como domínios sólidos ou vazios;
- Construir uma malha de elementos finitos para a estrutura base. Esta malha deve ser refinada o suficiente para representar a estrutura em uma resolução razoável de representação. A malha também deve tornar possível a definição de áreas que possam atribuir às variáveis de projeto fixas para tais áreas. Durante todo o processo de otimização, não há variação dimensional da malha.
- Construir espaços de elementos finitos para campos de deslocamentos independentes e variáveis de projeto.

Otimização matemática

Para calcular a distribuição ótima de material no domínio de referência, a otimização utiliza uma análise em elementos finitos baseada em deslocamentos e o critério de atualização para a densidade. A estrutura do algoritmo é a seguinte:

- Definir o domínio inicial de projeto para distribuição homogênea de material. A parte iterativa do algoritmo então é definida:
- Para a distribuição da densidade, calcular via MEF os deslocamentos e deformações.
- Calcular a flexibilidade do projeto. Se houver pouca melhora no domínio (da flexibilidade) em relação à iteração anterior, parar as iterações. Caso contrário, continuar. Para estudos detalhados, parar quando as condições necessárias de otimalidade são satisfeitas.
- Calcular a atualização da densidade, baseado nas condições de otimalidade. Este passo também consiste em uma repetição de iteração interna para achar o valor do multiplicador de Lagrange para uma restrição de volume.
- Repetir o loop de iteração.

Pós-processamento

- Interpretar a distribuição ótima de material como definição de forma, por exemplo em uma representação CAD.

Para realizar as etapas descritas acima, na simulação computacional dos exemplos deste trabalho, utiliza-se o *software* ABAQUS® v. 6.14.1 para uma análise integrada em elementos finitos e realização dos processos de otimização.

O pós-processamento consiste em identificar os modelos de bielas compatíveis com a distribuição de material obtida. Utiliza-se o software AutoCAD para o traçado da conectividade do modelo otimizado, possibilitando a representação em barras, indicando localização de escoras e tirantes. A etapa de conectividade do modelo otimizado possibilita a identificação de modelos de bielas preliminares, portanto, deve-se realizar análises de estabilidade e estaticidade das treliças, de modo a garantir que os princípios que embasam o método das bielas sejam atendidos para um dimensionamento seguro.

Para a análise estrutural dos modelos de treliça, pode-se utilizar *softwares* comerciais ou códigos livres para o cálculo dos esforços internos solicitantes. Neste trabalho desenvolve-se um código computacional na linguagem MATLAB®, que calcula os esforços normais e as reações de apoio, exclusivamente a partir das equações de equilíbrio nodais. Para tal, são definidas as posições dos nós, as conectividades das barras, as forças prescritas nodais e os apoios nodais.

Para se ter sucesso na resolução do sistema de equações lineares, cuja matriz dos coeficientes é a matriz de equilíbrio da estrutura, o vetor das incógnitas envolve os esforços normais das barras e as reações de apoio, assim como o vetor das constantes é o vetor das forças prescritas nodais, faz-se uso do comando *pinv* para calcular a pseudoinversa da matriz de equilíbrio.

A pseudoinversa de Moore-Penrose, de acordo com a documentação do MATLAB® (2015), é um recurso utilizado para que a matriz possa agir como uma reposição parcial da matriz inversa para os casos em que esta não exista. Esta matriz pseudoinversa é frequentemente utilizada para resolver sistemas de equações lineares quando o sistema não possui uma solução única ou possui várias soluções.

Quando a treliça é isostática, a matriz de equilíbrio é invertível e o sistema apresenta solução única e garante o equilíbrio entre o vetor de forças externas e internas. Quando a treliça é hipostática autoequilibrada, apesar da matriz de equilíbrio não ser invertível, a solução do sistema via *pinv* é única e que satisfaz ao equilíbrio, ou seja, não há resíduo entre os vetores de forças externas e internas. No caso da treliça hipostática que não seja autoequilibrada, o uso da pseudoinversa leva a uma solução, porém que não atende ao equilíbrio, ou seja, há resíduo entre os vetores de forças externas e internas.

3.2 Utilização do software ABAQUS®

Neste trabalho é utilizado o *software* ABAQUS® v. 6.14.1 como ferramenta de obtenção das topologias ótimas, que é reconhecido e conceituado no meio acadêmico devido a sua capacidade de customização e modelagem, podendo ser aplicado para análise de diversos problemas de engenharia.

Com o ABAQUS®/CAE, o usuário pode rapidamente e eficientemente criar, editar, monitorar, verificar e visualizar análises avançadas em elementos finitos. A interface intuitiva integra modelagem, análise, processamento e visualização de resultados em uma plataforma simples para novos usuários e extremamente produtiva para usuários avançados.

Simulia (2014) define a otimização como uma ferramenta para encurtamento do desenvolvimento de projetos agregando a experiência do projetista, aliada com a intuição, em um procedimento automatizado. Para otimizar seu modelo, é necessário saber o que otimizar, englobando a definição da função objetivo e suas restrições.

A plataforma de otimização disponível no ABAQUS® é o TOSCA, que proporciona poderosas e rápidas soluções de otimização estrutural baseadas em elementos finitos. O TOSCA

Structure fornece estratégias para novos conceitos de projetos, possibilitando estruturas mais leves, rígidas e duráveis. O ciclo de desenvolvimento do projeto pode ser direcionado para maximizar ou minimizar alguma medida de performance, sendo possível auxiliar o projetista a descobrir novas possibilidades. São oferecidas as funcionalidades para otimização de topologia, forma e tamanho.

A utilização do TOSCA integrado ao ABAQUS® possibilita um rápido desenvolvimento de produtos, devido a facilidade de criação de projetos evitando modificações intermediárias em um ambiente CAD, e ainda possui uma grande capacidade de processamento para otimização de problemas não lineares, dinâmicos e termomecânicos.

O ABAQUS® disponibiliza no módulo de otimização uma série de respostas de projetos, para as funções objetivo e restrições, dentre elas: energia de deformação, volume, peso, deslocamento, rotação, autofrequências da análise modal, entre outras.

Para a otimização topológica, o *software* utiliza as densidades dos elementos na área de projeto como as variáveis de projeto. Durante cada iteração realizada pelo módulo de otimização, as densidades são modificadas em cada elemento. De maneira prática, a otimização remove elementos do modelo, fornecendo-os uma massa e uma rigidez que é menor o suficiente para garantir que eles não irão participar da resposta global da estrutura.

São disponibilizados dois algoritmos para a otimização topológica. O algoritmo geral, que é mais flexível e que pode ser aplicado para a maioria dos problemas, e o algoritmo *condition-based*, que é mais eficiente, mas possui capacidades limitadas. Por padrão, o ABAQUS® utiliza o algoritmo geral.

O algoritmo geral de otimização topológica ajusta a densidade e a rigidez das variáveis de projeto enquanto tenta satisfazer a função objetivo e as restrições. É descrito no trabalho de Bendsøe e Sigmund (2003).

Em contraste, o algoritmo *condition-based* torna-se mais eficiente pois utiliza a energia de deformação e as tensões nos nós como dados de entrada e não precisa calcular a rigidez local das variáveis de projeto. Este foi desenvolvido na Universidade de Karlsruhe na Alemanha e é descrito em Bakhtiary *et al.* (1996).

Em razão das limitações de configurações dos parâmetros do procedimento, o algoritmo *condition-based* não foi utilizado neste trabalho. Como o algoritmo geral permite ao usuário determinar os parâmetros de otimização necessários para o método SIMP, utiliza-se este, pois possui os requisitos descritos na obra de Bendsøe e Sigmund (2003).

O processo de otimização gera elementos rígidos com densidades próximas a um ou elementos vazios com densidades próximas a zero. Como a otimização topológica introduz

elementos com densidades entre zero e um, é necessário utilizar modelos de interpolação material para estes elementos intermediários.

As técnicas de interpolação material calculam as relações entre a densidade e a rigidez dos elementos intermediários. Estão disponíveis as opções no módulo de otimização: *default*, SIMP e RAMP (*Rational Approximation of Material Properties*). Sendo a última adequada para problemas dinâmicos e não adotada neste trabalho.

O fator de penalidade deve ser maior que zero para produzir bons resultados. Na opção *default*, o módulo de otimização do ABAQUS® adota o método SIMP para problemas estáticos e o método RAMP se ao menos um caso de carregamento dinâmico for adotado no modelo.

O modelo de interpolação material RAMP, proposto por Stolpe e Svanberg (2001), baseia-se em uma função racional, parametrizada por um escalar q , de tal forma que a flexibilidade seja uma função convexa quando q é zero e uma função côncava para um valor finito e conhecido de q . Por meio deste método, a probabilidade de se obter uma solução 0-1 para o problema é aumentada.

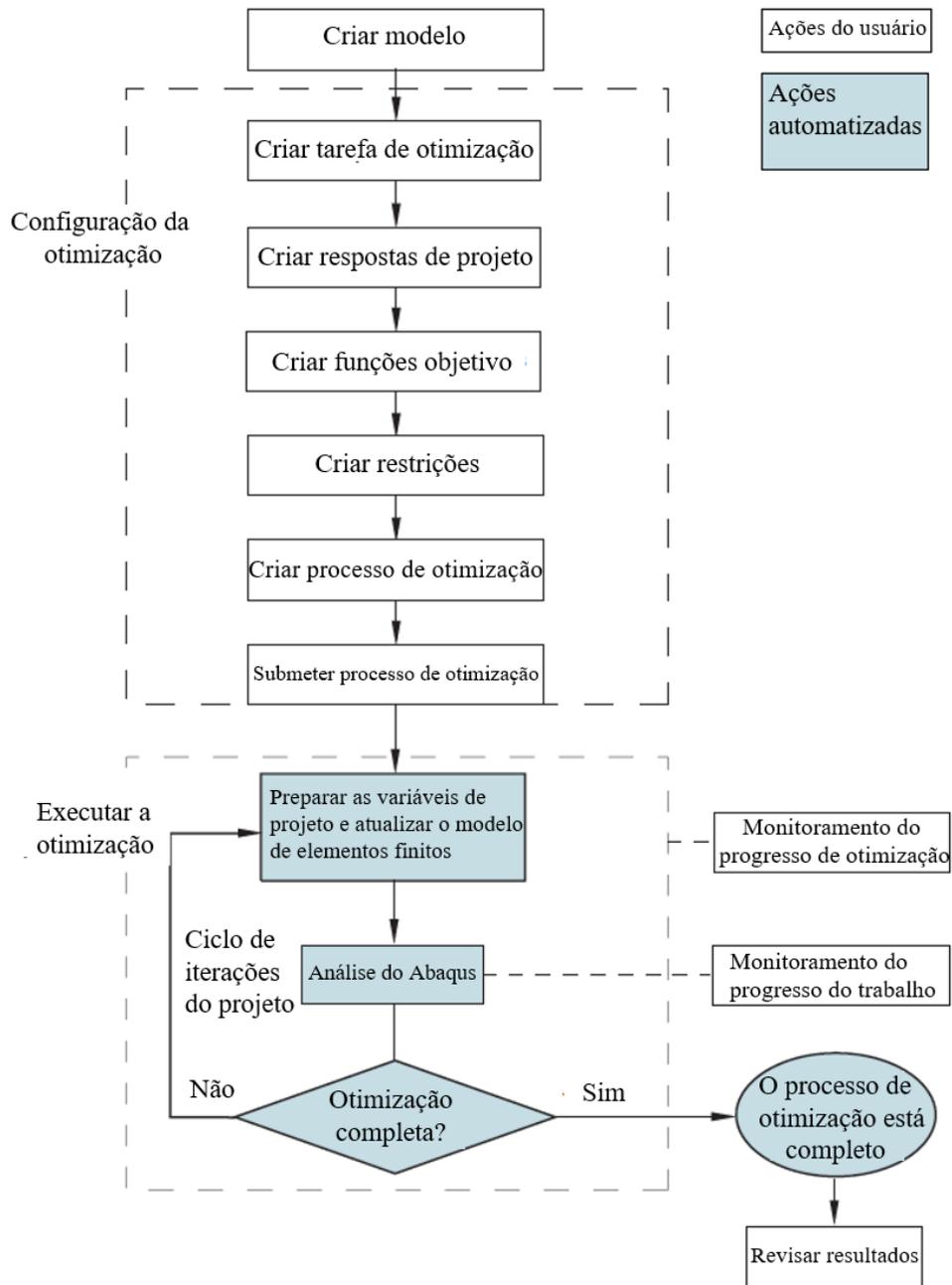
Rodríguez (2015) relaciona que a aproximação dada para o módulo de elasticidade do material de um projeto baseado em soluções 0-1 é dada por

$$E_i = \phi(x_i)E^1 \quad (50)$$

em que E_i é o módulo de elasticidade do elemento finito, $\phi(x_i) = \frac{x_i}{1+q(1-x_i)}$ é a função interpoladora, E^1 é o módulo de elasticidade do material sólido.

Um fluxograma do procedimento para obtenção da topologia ótima é apresentado na Figura 52. Nele, são destacadas as ações do usuário e ações realizadas pela rotina do *software*.

Figura 52 – Fluxograma do processo de otimização



Fonte: adaptado de SIMULIA, 2014.

Atendendo aos critérios deste fluxograma, a interpretação dos resultados fica a cargo do usuário, de forma que a saída de dados sempre será função do que foi escolhido durante a configuração do processo de otimização.

3.3 Definição dos modelos de treliça

O critério de otimização estrutural mais comum para a definição da topologia é o de minimizar a energia de deformação, o que implica em tornar a estrutura mais rígida. Por meio deste, a distribuição de material em um domínio bidimensional ou tridimensional estabelece, com base na discretização da malha, as regiões onde haverá material e onde haverá vazios.

Para o dimensionamento de estruturas de concreto armado, a tarefa de interpretação desta disposição de material como um esquema resistente, tal como ocorre em um modelo de bielas, decorre de uma série de regras e procedimentos que tornem viável a utilização do modelo otimizado como referência para a construção de uma estrutura treliçada.

A definição do modelo de treliça, a partir da composição bidimensional de material para um modelo de barras, depende dos critérios adotados por cada usuário para realizar a filtragem específica para cada caso. A construção de uma conectividade que represente o modelo otimizado fica a cargo do esclarecimento de cada projetista nos quesitos de equilíbrio e redistribuição de esforços.

Como ressaltado anteriormente, os parâmetros de otimização topológica influenciam na definição do resultado final. A designação de parâmetros adequados propicia um melhor entendimento da análise numérica. De certa forma, o surgimento de instabilidades numéricas ainda é uma preocupação no procedimento de otimização, mas, estes problemas podem ser contornados com a adoção de algumas medidas, tais como um estudo adequado do refinamento da malha e utilização correta de critérios de convergência.

Como não há um consenso da fração volumétrica ideal para a obtenção de modelos de escoras e tirantes, deve-se estabelecer uma análise crítica da transição para valores baixos desta fração. A conexão das barras para cada análise de fração volumétrica deve seguir o mais próximo do que foi estabelecido ao final do processo de otimização.

Consoante com Bruggi (2009), o procedimento pela otimização topológica produz padrões preliminares de modelos de treliça, porém, cabe ao projetista a tarefa de dimensionar os elementos constituintes. Pode-se considerar a minimização da flexibilidade apenas como uma aproximação elástica do real comportamento mecânico da estrutura.

Neste sentido, a utilização do modelo otimizado como base para a representação de um modelo de escoras e tirantes está relacionada com o princípio de que se obtém a estrutura mais rígida possível para as dadas condições de contorno. Com isto, o esquema representativo, teoricamente, é o mais adequado para o método das bielas.

Em decorrência de não haver uma única solução para o modelo de bielas, diferentes disposições de barras podem representar uma mesma configuração para um dado arranjo estrutural. Neste trabalho foram interpretadas as distribuições ótimas de material como um padrão preliminar das barras de treliça.

Conforme as referências normativas, os modelos devem ser estáveis, ou seja, estaticamente determinados. Para contornar este problema, deve-se analisar as condições de vinculação e a lei de formação das treliças, de modo que o equilíbrio seja garantido. Em um modelo hipostático que não seja autoequilibrado, algumas estratégias devem ser utilizadas para assegurar a estabilidade da estrutura, podendo, de certa forma, até ignorar os espaços vazios indicados pela otimização topológica.

Souza (2004) relaciona que as estruturas hipostáticas também são designadas na literatura por modelos cinemáticos, em que o equilíbrio é apenas garantido para uma determinada configuração geométrica do modelo. Do ponto de vista de projeto, nunca se deseja a hipoestaticidade, pois a ausência de vínculos para garantir o equilíbrio da estrutura é um fator agravante, de forma que pequenas perturbações podem provocar o colapso da mesma.

Com relação ao método das bielas, a utilização de um modelo de treliça para representar os elementos de concreto armado exige uma determinada estaticidade para garantir as condições nos estados limites, visto que o fundamento do método está relacionado com o teorema do limite inferior da teoria da plasticidade, que é uma solução estática.

Inicialmente, as barras do padrão treliçado podem sugerir tirantes que não sejam viáveis para execução e escoras com inclinações que não são recomendadas pelas referências normativas. Entretanto, para cada aspecto apresentado, devem ser avaliadas as condições de exequibilidade em uma etapa posterior, devendo ser seguido primeiramente o modelo garantido pela topologia ótima apresentada.

Usualmente, não é verificado o estado limite de serviço nos elementos especiais, mas, com um modelo estaticamente determinado ou estaticamente indeterminado com excesso de vínculos, garante-se um dimensionamento seguro ao adotar a premissa de que os elementos representam as trajetórias de tensões em regime elástico linear, e que haverá o escoamento dos tirantes. Isso significa que há uma configuração de equilíbrio satisfatória quando há a retirada das ações impostas nestes elementos.

4 ESTUDOS DE CASO

Neste capítulo são apresentadas as simulações numéricas de consolos curtos utilizando a otimização topológica. O *software* ABAQUS® é utilizado como uma ferramenta para encurtar o processo de desenvolvimento de modelos de treliça, agregando uma nova opção para o projetista. De forma a obter os modelos de escoras e tirantes e utilizar a metodologia disposta nas referências normativas, inicialmente é apresentado um exemplo de otimização da literatura e, em seguida, apresentam-se exemplos comuns das rotinas de projeto.

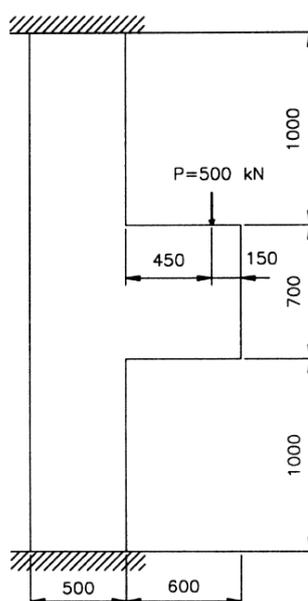
Para a obtenção dos resultados, utiliza-se um notebook com processador Intel i7-3632 QM com 8 GB de memória RAM e sistema operacional Windows 10 Pro-64 bit.

4.1 Consolo retangular

Liang, Xie e Steven (2000) propuseram o consolo retangular ilustrado na Figura 53, com as medidas em milímetros. A razão a/h é de 0,64. A carga V_d , considerada pontual, é de 500 kN. Entretanto, para fins de projeto, é conveniente considerar uma carga horizontal $H_d = 0,16 V_d$.

Para as considerações das condições de contorno, o pilar possui deslocamento restrito nas duas extremidades. A resistência à compressão do concreto é de $f'_c = 32$ MPa, o módulo de elasticidade longitudinal do concreto é $E = 28567$ MPa e o coeficiente de Poisson $\nu = 0,15$. A largura do pilar e do consolo são assumidas como $b = 300$ mm.

Figura 53 – Consolo retangular



Fonte: LIANG, XIE E STEVEN, 2000.

4.1.1 Resultados da literatura

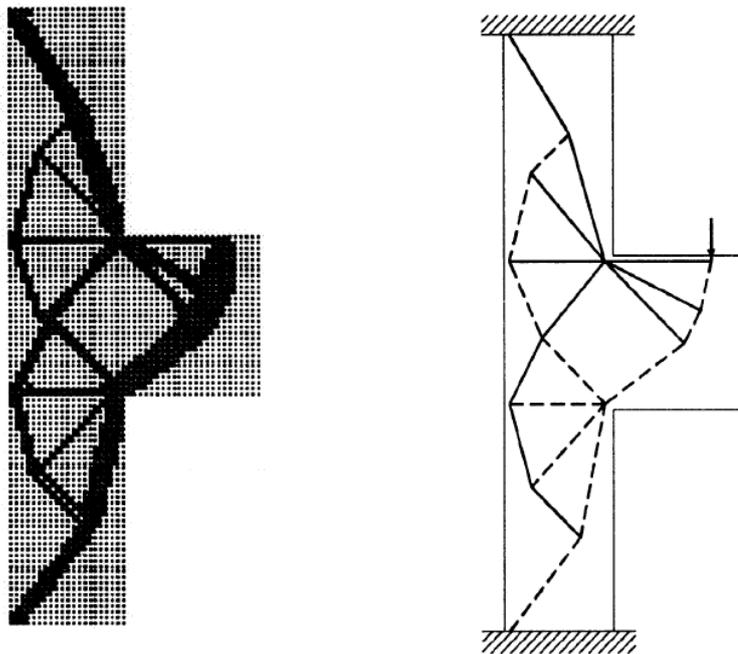
A Figura 54 apresenta o modelo de escoras e tirantes sugerido por Liang, Xie e Steven (2000). Este exemplo demonstra que o pilar e consolo devem ser modelados como uma única estrutura para o desenvolvimento do modelo de escoras e tirantes. A solução obtida é compatível quando comparada com o método do caminho das cargas.

A modelagem foi realizada com elementos quadriláteros de 4 nós com interpolação bilinear para análise em estado plano de tensão, com tamanho aproximado de 25 mm. Uma restrição de deslocamento é imposta no ponto de carregamento na direção vertical e a taxa de remoção de elemento (*ERR*) é igual a 1% para o processo de otimização.

Para os autores, é comum que os métodos de otimização topológica para estruturas contínuas tenham uma dependência do tamanho da malha, influenciando no resultado final. A geometria do elemento e o tempo computacional devem ser considerados na escolha da malha.

Uma vez que a topologia ótima obtida é uma estrutura contínua, o modelo pode ter membros redundantes, então é sugerido que a configuração da armadura deve seguir o modelo ótimo de escoras e tirantes o mais próximo possível.

Figura 54 – Modelo de escoras e tirantes considerando a solução ótima

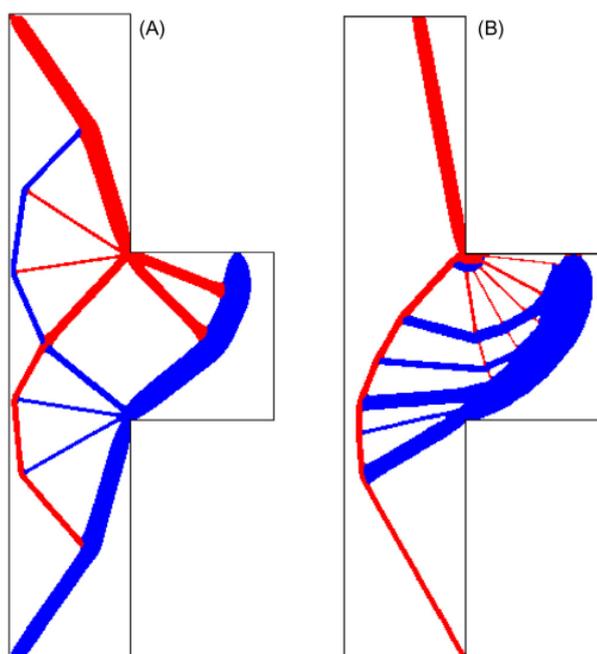


Fonte: adaptado de LIANG, XIE E STEVEN, 2000.

Querin *et al.* (2017) apresentaram o mesmo exemplo de Liang, Xie e Steven (2000) utilizando o método ITD. Neste caso, a estrutura foi dividida utilizando elementos finitos quadrilaterais com comprimento de 4,17 mm, com um total de 101.952 elementos.

O módulo de elasticidade e a densidade para os elementos comprimidos (concreto) foram, respectivamente, $E_c = 20$ GPa e $\rho_c = 2000$ kg/m³. Para os elementos tracionados (aço), as propriedades são as seguintes: módulo de elasticidade $E_t = 210$ GPa e densidade e $\rho_t = 7850$ kg/m³. Dois casos diferentes foram investigados: a) as mesmas propriedades materiais para regiões de tensão e compressão e b) diferentes propriedades materiais para as regiões tracionadas e comprimidas, com $k_1 = 6,42$, conforme Figura 55.

Figura 55 – Modelo de escoras e tirantes para $f = 20\%$ a) mesmas propriedades, b) diferentes propriedades



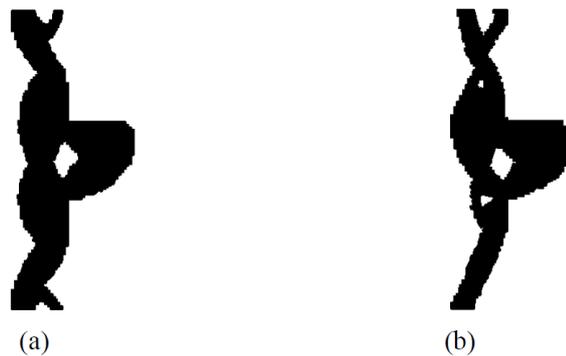
Fonte: QUERIN *et al.*, 2017.

Em azul, tem-se a região ocupada pelos elementos comprimidos, e, em vermelho, a região ocupada pelos elementos tracionados. Da análise deste modelo, percebe-se que a consideração das diferentes propriedades é um fator importante para a visualização das solicitações atuantes no elemento estrutural. Para o caso em que a região comprimida é totalmente representada pelo concreto e a região tracionada é representada pelo aço, o indicativo de onde posicionar as armaduras se baseia no critério de melhor comportamento à tração.

Utilizando o ABAQUS®, Guerra (2017) reproduziu o mesmo exemplo de Liang, Xie e Steven (2000). Considerou-se uma malha de elementos finitos quadrilaterais CPS4R (integração reduzida). A estrutura foi representada por 3317 elementos e 3470 nós.

Os parâmetros utilizados para a otimização via ESO foram: fator de remoção (RR) = 4,0% e fator de evolução (ER) = 2,0%. As topologias ilustradas na Figura 56 foram obtidas para um volume de aproximadamente 50% do volume inicial.

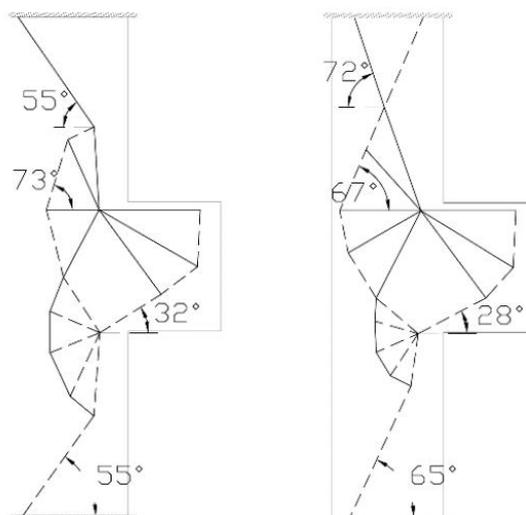
Figura 56 – Topologias ótimas considerando (a) comportamento linear do material e (b) comportamento não linear do material



Fonte: GUERRA, 2017.

Na Figura 57, apresentam-se os modelos de bielas sugeridos por Guerra (2017), considerando o comportamento linear, do lado esquerdo, e o comportamento não linear (modelo de dano plástico) do lado direito.

Figura 57 – Modelos de bielas propostos por Guerra (2017)

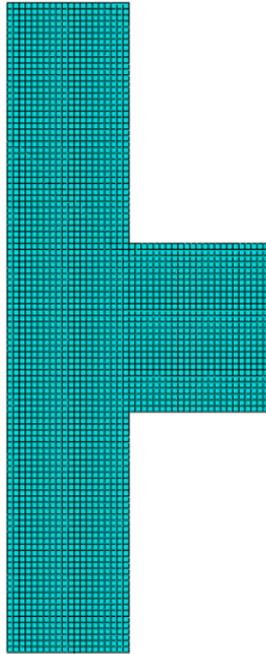


Fonte: GUERRA, 2017.

4.1.2 Resultados do Modelo 2D com o método SIMP

Para a modelagem, considera-se uma malha de elementos finitos de tamanho aproximado de 25 mm (Figura 58) para análise em estado plano de tensão do tipo CPS4 (elemento quadrilateral de 4 nós com interpolação bilinear), 2832 elementos e 2985 nós.

Figura 58 – Malha adotada



Fonte: Autor, 2019.

Para o processo de otimização, a região de aplicação de carga não é considerada. A estratégia de atualização da densidade é normal. O algoritmo de solução é o geral, o filtro de sensibilidade é definido automaticamente, a técnica de interpolação material utilizada é a SIMP, e as demais informações estão listadas na Tabela 5.

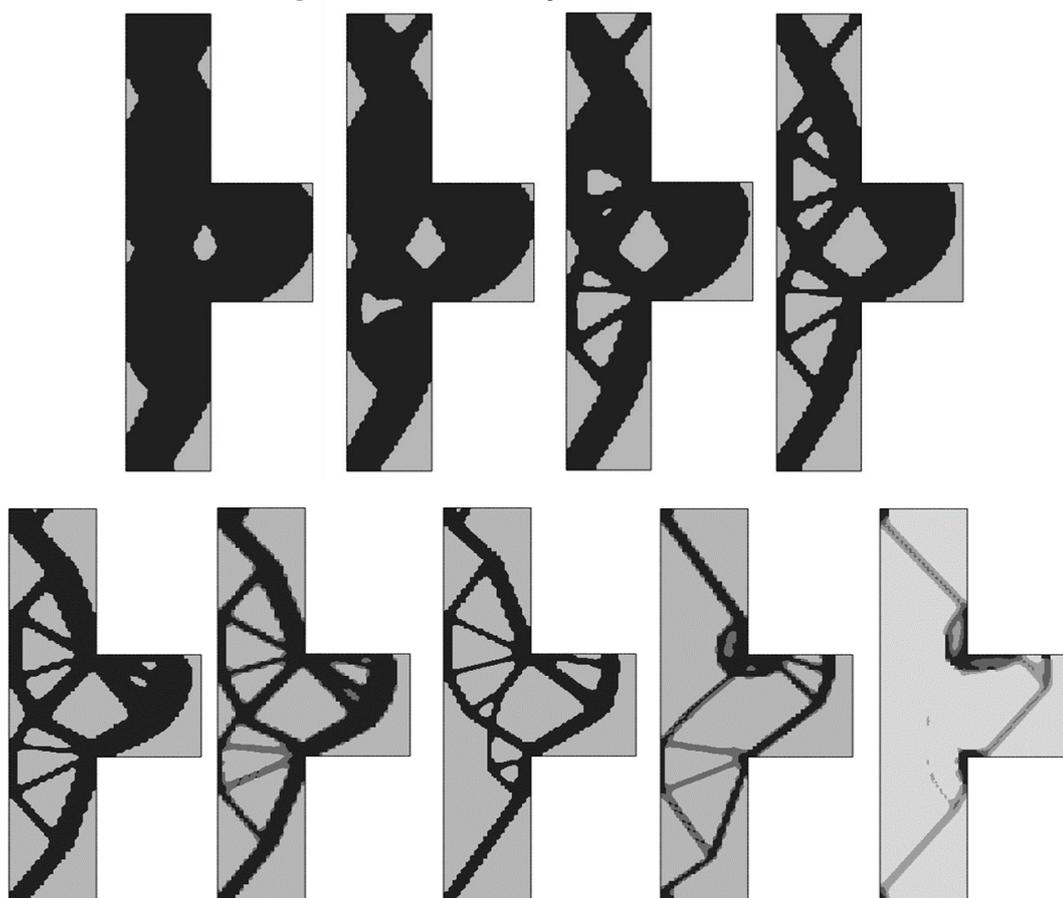
Tabela 5 – Parâmetros da otimização topológica

Parâmetros do método SIMP	
Densidade mínima (ρ_{min})	0,001
Densidade máxima (ρ_{max})	1
Máxima mudança da densidade por ciclo de projeto	0,25
Fator de penalidade (p)	3
Critérios de convergência	
Tolerância máxima para função objetivo	0,001
Tolerância máxima para a densidade do elemento	0,005

Fonte: Autor, 2019.

As topologias ótimas obtidas considerando frações volumétricas de aproximadamente 90%, 80%, 70%, 60%, 50%, 40%, 30%, 20% e 10% do volume inicial são apresentadas na Figura 59. São necessários, respectivamente, 15, 20, 34, 34, 35, 36, 37, 50 e 42 ciclos de projeto para atingir os parâmetros desejados.

Figura 59 – Distribuição ótima de material



Fonte: Autor, 2019.

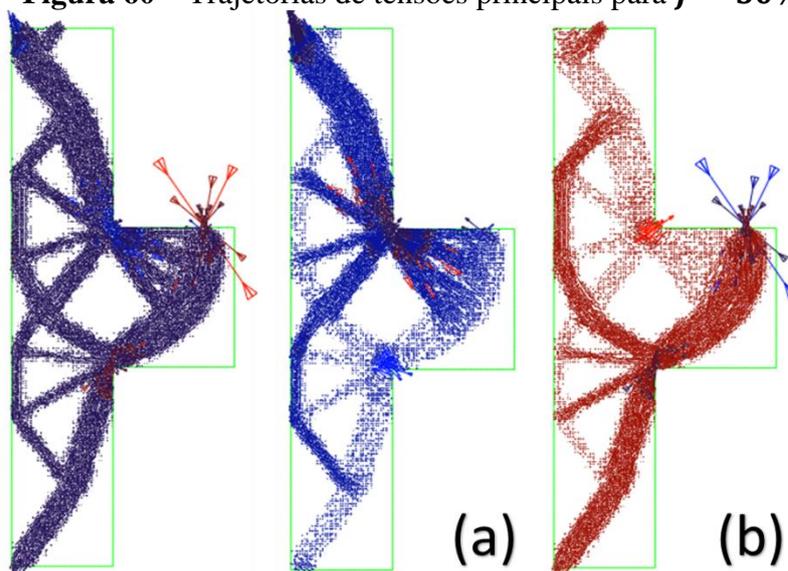
Analisando a Figura 59, percebe-se a definição de duas regiões. A região em preto é a que é considerada no processo de otimização como a de topologia ótima, atendendo a função objetivo e a restrição de volume. A região cinza é caracterizada pela densidade mínima (ρ_{min}), evitando a singularidade na matriz de rigidez.

Observa-se, então, que o resultado obtido com *software* ABAQUS® está compatível com a proposta inicial dos autores que utilizaram o método de otimização evolucionária. Isto indica que o método SIMP pode fornecer bons resultados para as propostas de modelos de escoras e tirantes baseados na topologia ótima a partir de frações volumétricas em torno de 50% a 40%.

4.1.3 Dimensionamento do consolo retangular

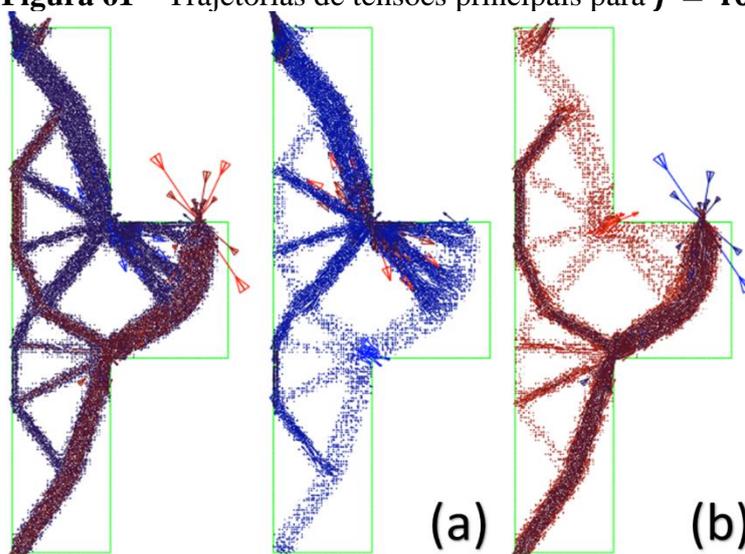
Nas Figura 60 e Figura 61 são apresentadas as trajetórias de tensões principais, com os modelos otimizados $f = 50\%$ e $f = 40\%$, respectivamente. Em azul, tensões principais de tração (a), e, em vermelho, tensões principais de compressão (b). Verifica-se, então, que há uma melhor visualização dos modelos preliminares de treliça.

Figura 60 – Trajetórias de tensões principais para $f = 50\%$



Fonte: Autor, 2019.

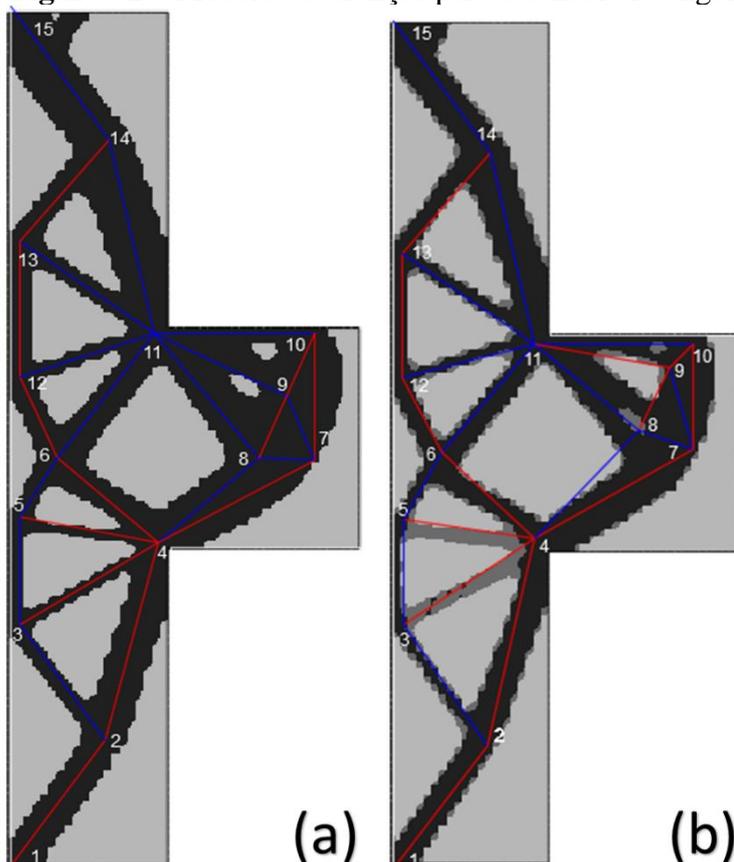
Figura 61 – Trajetórias de tensões principais para $f = 40\%$



Fonte: Autor, 2019.

Na Figura 62, são apresentados os modelos de treliça sugeridos para o dimensionamento de acordo com o método das bielas. O modelo da Figura 62a é baseado na topologia ótima encontrada com $f = 50\%$. O modelo da Figura 62b é baseado na topologia ótima encontrada com $f = 40\%$. As coordenadas dos nós são apresentadas, em cm, nas Tabela 6 e Tabela 7.

Figura 62 – Modelos de treliças para o consolo retangular



Fonte: Autor, 2019.

Tabela 6 – Coordenadas do modelo de treliça para $f = 50\%$

Coordenadas		
Nó	x	y
1	0	0
2	29,81	39,41
3	3	75,81
4	46,11	101,46
5	3	109,36
6	14,57	128,04
7	95	127,28
8	77,77	128,04
9	86,35	147,52

10	95	167
11	45	167
12	3	153,33
13	3	196,28
14	30,68	228,11
15	0	270

Fonte: Autor, 2019.

Tabela 7 – Coordenadas do modelo de treliça para $f = 40\%$

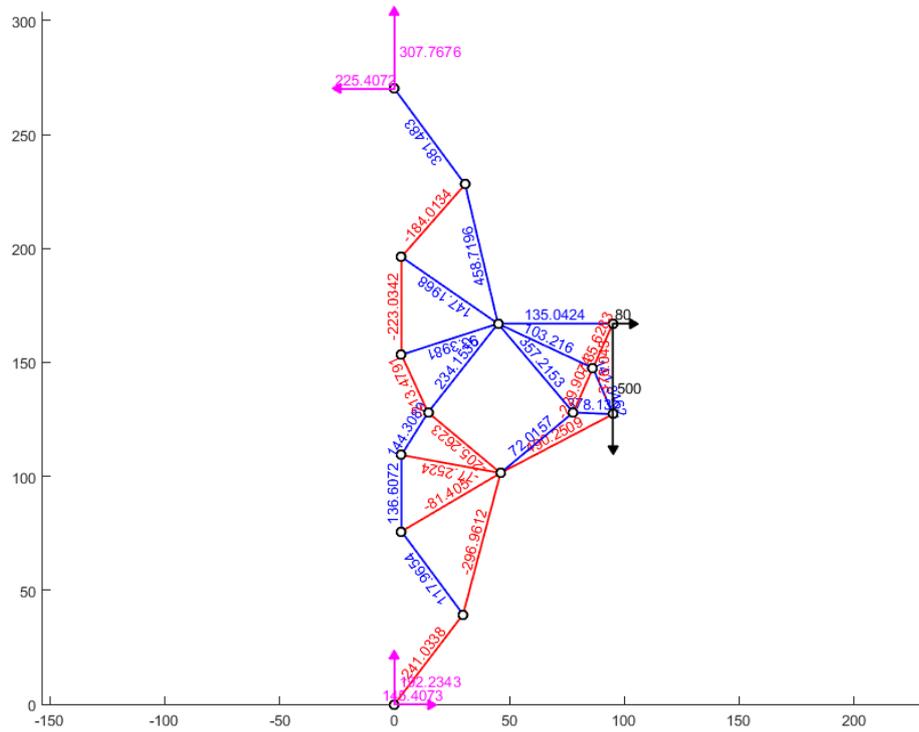
Coordenadas		
Nó	x	y
1	0	0
2	29,81	39,41
3	3,47	77,59
4	45	105
5	3,47	111,38
6	15,37	132,7
7	95	133,39
8	77,82	139,66
9	87,6	159,6
10	95	167
11	45	167
12	3,19	156,15
13	3,19	195,94
14	30,68	228,11
15	0	270

Fonte: Autor, 2019.

Por meio de um código computacional utilizando o *software* MATLAB®, é possível calcular os esforços internos solicitantes das treliças. Ressalta-se que informações sobre o módulo de elasticidade e propriedades da seção transversal não são necessárias como parâmetros de entrada, visto que o problema pode ser resolvido por equilíbrio dos nós.

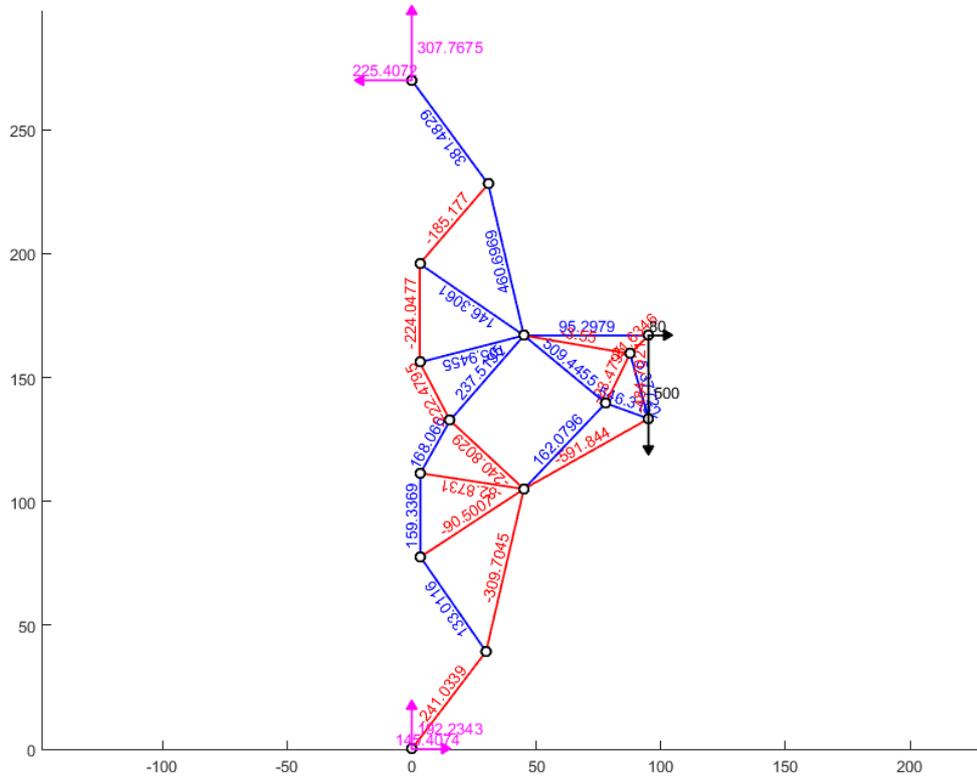
Nas Figura 63 e Figura 64 são apresentados os esforços solicitantes, em kN, para os dois casos. Aplica-se também uma carga horizontal $H_d = 0,16 V_d$. Os esforços positivos (em azul) indicam tração, enquanto os esforços negativos (em vermelho) indicam compressão.

Figura 63 – Esforços solicitantes para a treliça baseada em $f = 50\%$



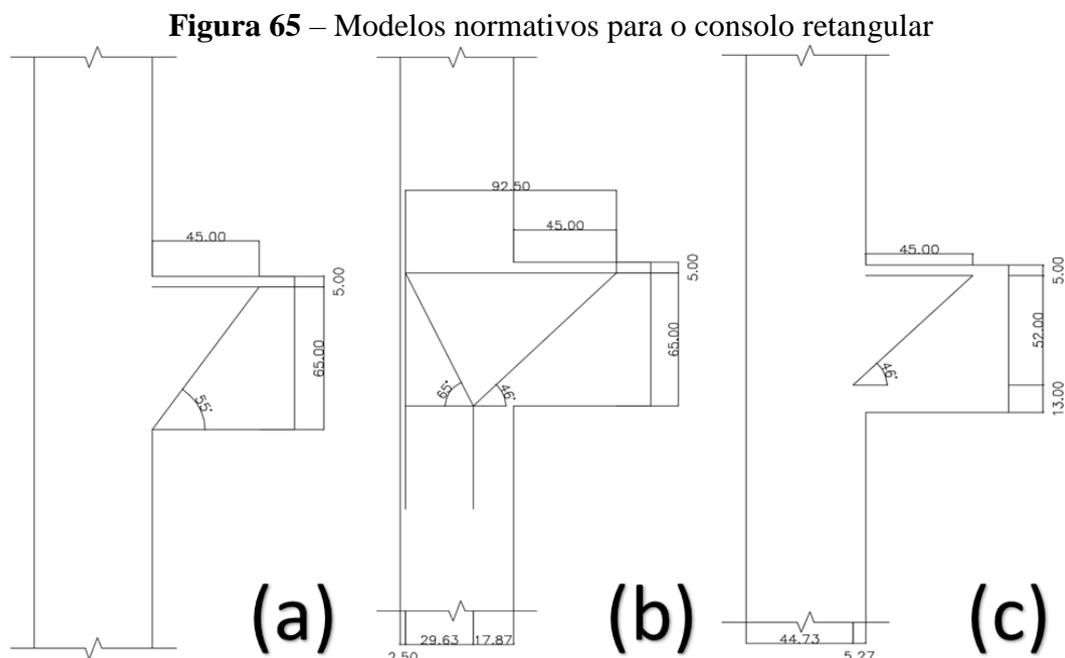
Fonte: Autor, 2019.

Figura 64 – Esforços solicitantes para a treliça baseada em $f = 40\%$



Fonte: Autor, 2019.

Na Figura 65 são apresentados os modelos normativos da NBR 9062 (ABNT, 2017) (Figura 65a), PCI (2010) (Figura 65b) e simplificado do Eurocode 2 (CEN, 2004) (Figura 65c).



Fonte: Autor, 2019.

Como no exemplo apresentado por Liang, Xie e Steven (2000), a carga é considerada pontual e não há dimensões do aparelho de apoio – estima-se sua largura (a_g) e profundidade (b_g). As demais informações geométricas são apresentadas na Tabela 8.

Tabela 8 – Dados geométricos do consolo retangular

Geometria (cm)	
Distância de aplicação da carga (a)	45
Altura total (h)	70
Altura da parte superior (h_1)	70
Altura útil (d)	65
Cobrimento do concreto (c_c)	2,5
Largura do pilar (h_c)	50
Vão do balanço (l_c)	60
Profundidade (b)	30
Largura do aparelho de apoio (a_g)	20
Profundidade do aparelho de apoio (b_g)	20

Fonte: Autor, 2019.

Para o problema em análise, as resistências das escoras de acordo com as referências normativas, com $f_{ck} = 32 \text{ MPa}$, são encontradas na Tabela 9. De forma conservadora, são adotados os valores de resistências para escoras em zonas CCT na NBR 6118 (ABNT, 2014). Para o ACI 318 (2014), considera-se que não há armadura transversal. No modelo simplificado do Eurocode 2 (CEN, 2004), utiliza-se como parâmetro de resistência o valor da tensão máxima para a zona nodal CCC.

Tabela 9 – Resistências das escoras ($f_{ck} = 32 \text{ MPa}$)

Tensão resistente (kN/m^2)	
NBR 6118 (2014)	$f_{cd3} = 14.350,63$
ACI 318 (2014)	$f_{ce} = 16.320,00$
Eurocode 2 (2004)	$\sigma_{Rd,max} = 15.812,27$

Fonte: Autor, 2019.

Ao considerar a geometria do consolo para o cálculo da largura da escora, conforme disposto nas referências, as tensões máximas são encontradas para cada um dos modelos, dividindo-se a força de compressão na escora pela área delimitada, indicadas na Tabela 10.

Tabela 10 – Tensões máximas atuantes nas escoras do consolo retangular

Referência normativa	Largura da escora (cm)	Tensões de compressão (kN/m^2)
NBR 9062 (2017)	14,74	11.309,46
PCI (2010)	39,28	11.657,21
Eurocode 2 (2004)	26,00	6.295,60

Fonte: Autor, 2019.

Com as metodologias próprias de cada referência, verifica-se que não haverá esmagamento do concreto nas escoras de acordo com as normas.

Dimensionando o consolo para uma força vertical de cálculo $V_d = 500 \text{ kN}$ e uma força horizontal de cálculo $H_d = 0,16 V_d = 80 \text{ kN}$, as seguintes áreas de aço CA-50 ($f_{yk} = 500 \text{ MPa}$) são encontradas para o tirante principal, de acordo com a Tabela 11.

Tabela 11 – Áreas de aço para consolo retangular

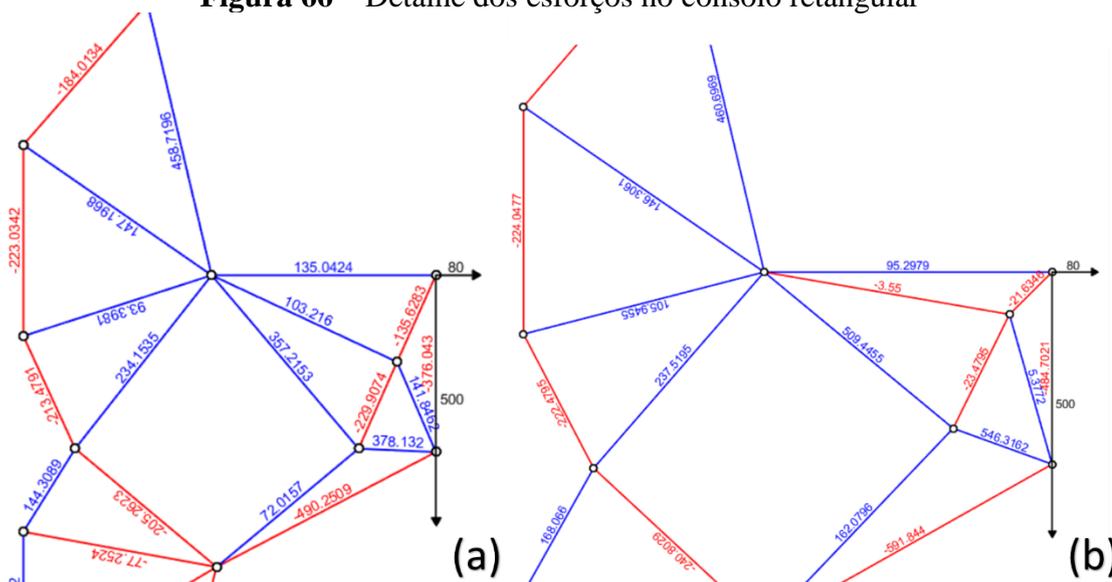
Área de aço do tirante principal (cm^2)	
NBR 9062 (2017)	10,95
PCI (2010)	15,19
Eurocode 2 (2004)	11,29

Fonte: Autor, 2019.

Com as informações da Tabela 11, deve-se verificar os critérios de armadura mínima, armadura máxima, disposições construtivas e critérios de durabilidade constantes nas referências normativas, de modo a garantir um projeto seguro e econômico.

Na Figura 66 é apresentado o detalhe dos esforços nas barras para os modelos $f = 50\%$ (a) e $f = 40\%$ (b) na região do consolo.

Figura 66 – Detalhe dos esforços no consolo retangular



Fonte: Autor, 2019.

Conforme a indicação de Araújo (2010), para os modelos de duas barras, o cálculo da largura da escora depende das dimensões do aparelho de apoio. Adaptando para o caso em análise, para escoras verticais, a largura c_2 é determinada para os modelos com topologias ótimas, com valor de 20 cm.

No modelo com $f = 50\%$, a tensão na escora é de $6267,33 \text{ kN/m}^2$, já para o modelo com $f = 40\%$, a tensão na escora é de $8078,33 \text{ kN/m}^2$. Apesar de as escoras mais solicitadas se encontrarem na base do consolo, ressalta-se a dificuldade de obtenção da largura destas.

Para os modelos com topologia ótima, mesmo com a menor tensão resistente, neste caso a da NBR 6118 (ABNT, 2014), também não haverá esmagamento do concreto, indicando que os níveis de tensões são seguros.

Apesar de contemplar uma barra horizontal na parte superior do consolo, sugerindo que o tirante principal será dimensionado por esta barra, o esforço máximo de tração nos dois modelos com topologia ótima ocorre em uma barra inclinada, sugerindo que a armadura

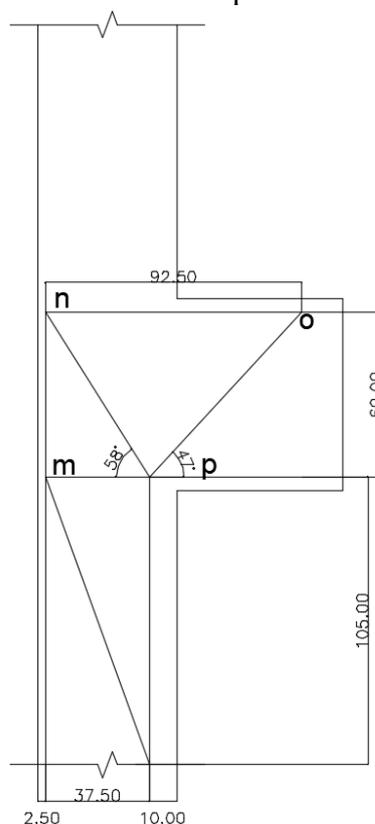
principal também deve ser inclinada, o que não é indicado para a prática construtiva, devido a facilidade de haver deslocamento dessa armadura durante o processo executivo.

Para os tirantes horizontais, as áreas de aço são de $3,10 \text{ cm}^2$ e $2,19 \text{ cm}^2$, respectivamente. Analisando os tirantes inclinados, as áreas de aço são de $10,55 \text{ cm}^2$ e $12,56 \text{ cm}^2$, respectivamente.

As áreas de aço dos tirantes inclinados obtidas pelos modelos com topologias ótimas resultaram em uma boa aproximação quando comparadas com os modelos normativos. Como cada um possui sua particularidade na definição da treliça e nos fatores de segurança, pode-se ratificar a aplicabilidade dos modelos desenvolvidos por meio da conectividade dos materiais.

Por meio das análises realizadas anteriormente, verifica-se que os modelos obtidos por meio da topologia ótima podem diferir da prática de execução, fato demonstrado pelo tirante inclinado. Com isto, pode-se desenvolver um novo modelo de treliça. O modelo da Figura 67 é proposto, considerado um tirante reto na região superior e uma escora inclinada. As medidas apresentadas são em cm.

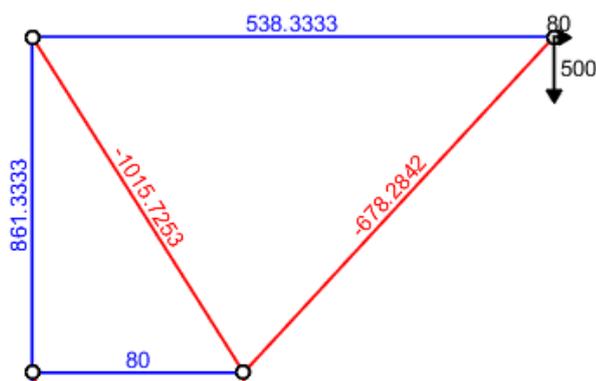
Figura 67 – Modelo de bielas para o consolo retangular



Fonte: Autor, 2019.

Na Figura 68 são apresentados os esforços solicitantes, em kN, para o novo caso. Os esforços positivos (em azul) indicam tração, enquanto os esforços negativos (em vermelho) indicam compressão.

Figura 68 – Esforços solicitantes para o modelo proposto



Fonte: Autor, 2019.

Conforme a metodologia do PCI (2010), para os modelos de cinco barras, a largura da escora n_p pode ser determinada para este novo modelo, com valor de 23,58 cm. A tensão na escora inclinada é de $14.356,32 \text{ kN/m}^2$, é aceitável de acordo com o ACI 318 (2014).

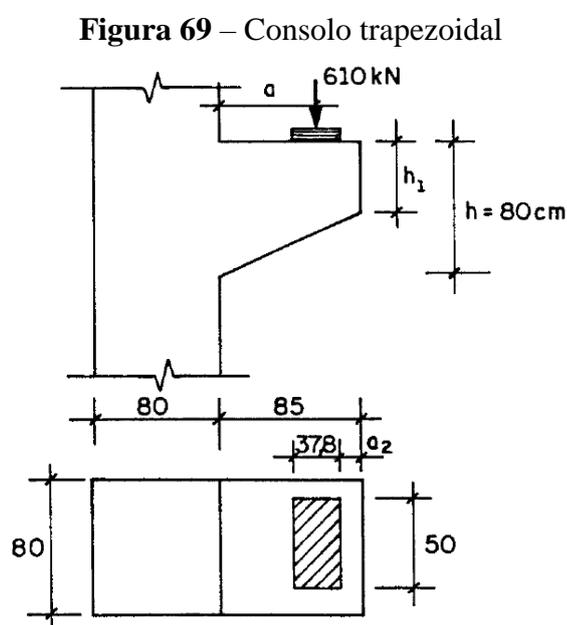
Com o modelo proposto, a área de aço obtida é de $12,15 \text{ cm}^2$. Verifica-se que a proposta é validada com os resultados encontrados pelas normas de projeto, estabelecendo que a geometria de cinco barras satisfaz o que é estabelecido pelo método das bielas.

Cabe-se ressaltar que as dimensões do aparelho de apoio são estimadas para fins práticos, não se verificando este componente da ligação, mas, apenas o consolo. Ressalta-se também que, apesar de fazer parte do modelo, não se realiza o dimensionamento do pilar pelo método das bielas, mas as barras que o representam garantem o equilíbrio global do consolo.

4.2 Consolo trapezoidal

O consolo trapezoidal analisado como exemplo foi proposto por Silva (1991), conforme Figura 69. Após o pré-dimensionamento sugerido pelo autor, as dimensões adotadas para análise são $a = 58$ cm, $d = 77$ cm, $h_1 = 40$ cm e $a_2 = 8$ cm. A relação a/d é de 0,75. A carga vertical apresentada é característica. Para a força horizontal, considera-se $H_d = 0,16 \cdot F_d$.

Para a análise computacional, adota-se a resistência à compressão do concreto de $f_{ck} = 20$ MPa, módulo de elasticidade longitudinal do concreto $E_{cs} = 21000$ MPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,20$.



Fonte: SILVA, 1991.

4.2.1 Resultados do Modelo 2D com o método SIMP

Nesta simulação numérica, são apresentadas duas geometrias bidimensionais para a obtenção da topologia ótima. Na primeira, é modelado o consolo em conjunto com o pilar. Considera-se uma distância de dispersão do efeito de perturbação devido à descontinuidade geométrica e estática, sendo este valor adotado igual a $h = 80$ cm do pilar, estabelecendo a modelagem completa da região D.

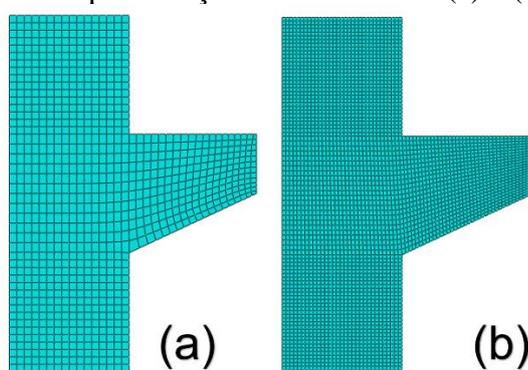
Na segunda, é modelada apenas a região que delimita a geometria do consolo, sem a consideração da influência do pilar no comportamento do elemento estrutural.

4.2.1.1 Modelo 2D com a consideração do pilar

Para este consolo, é analisada inicialmente uma modelagem com elementos finitos bidimensionais (Figura 70). De maneira preliminar, é considerada uma malha (a) de elementos finitos de tamanho aproximado de 50 mm para análise em estado plano de tensão do tipo CPS4 (elemento quadrilateral de 4 nós com interpolação bilinear) com 932 elementos e 1012 nós.

Considerando o mesmo elemento, refina-se a malha (b) para elementos de tamanho aproximado de 25 mm, constituindo-se então 3680 elementos e 3837 nós.

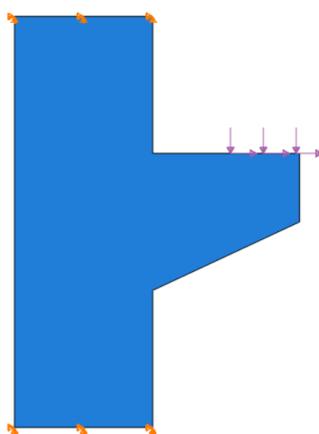
Figura 70 – Representação das malhas 2D (a) e (b) adotadas



Fonte: Autor, 2019.

As condições de contorno estão representadas na Figura 71, com aplicação das cargas verticais e horizontais distribuídas ao longo do aparelho de apoio e restrições de deslocamentos na base e no topo.

Figura 71 – Condições de contorno



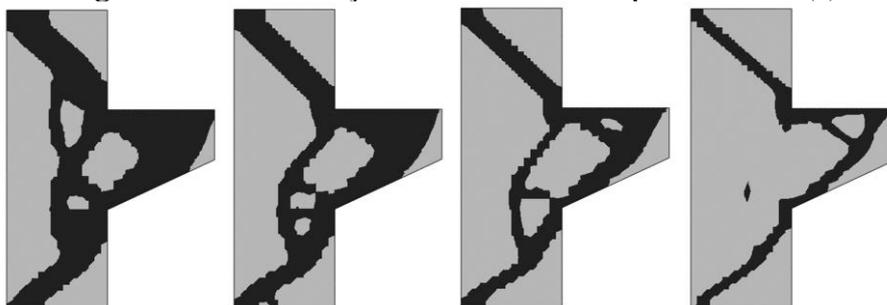
Fonte: Autor, 2019.

De modo a considerar que a rotação de elementos fletidos nos apoios provoca um deslocamento da posição da reação de apoio, considera-se na modelagem a recomendação de El Debs (2017). Desta forma, as forças resultantes são aplicadas a uma distância de $3/4$ do comprimento total do consolo (l_c), de acordo com a Figura 36. Com isto, a relação a/d é 0,83.

Da mesma forma que o exemplo do consolo retangular, a região de aplicação de carga não é considerada. A estratégia de atualização da densidade é normal. O algoritmo de solução é o geral, com técnica de interpolação material SIMP, e as demais informações estão listadas na Tabela 5.

Para a malha (a), as topologias ótimas obtidas considerando frações volumétricas de aproximadamente 50%, 40%, 30% e 20% do volume inicial são apresentadas na Figura 72. Foram necessários, respectivamente, 27, 30, 31 e 34 ciclos de projeto para atingir os parâmetros desejados.

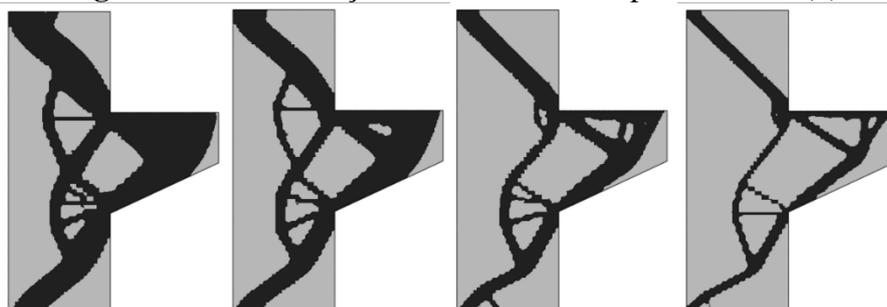
Figura 72 – Distribuição ótima de material para a malha (a)



Fonte: Autor, 2019.

Para a malha (b), as topologias ótimas obtidas considerando frações volumétricas de aproximadamente 50%, 40%, 30% e 20% do volume inicial são apresentadas na Figura 73. Foram necessários, respectivamente, 37, 36, 37 e 49 ciclos de projeto para atingir os parâmetros desejados.

Figura 73 – Distribuição ótima de material para a malha (b)

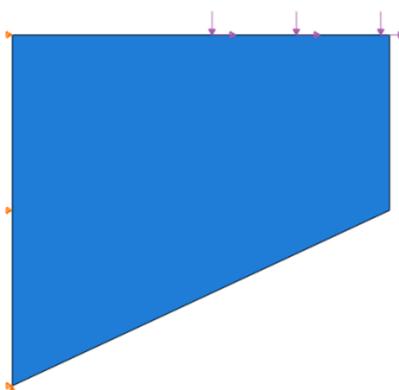


Fonte: Autor, 2019.

4.2.1.2 Modelo 2D sem a consideração do pilar

Sato (2015) sugere que para consolos curtos modelados sem a contribuição do pilar, a otimização topológica, neste caso, não seria necessária, já que o modelo de bielas é bastante claro. Para a análise somente do consolo, foi proposta a vinculação da seguinte maneira (Figura 74): apoio móvel na vertical ao longo da interface com o pilar e apoio fixo somente na parte inferior do consolo.

Figura 74 – Condições de contorno para consolo modelado sem pilar

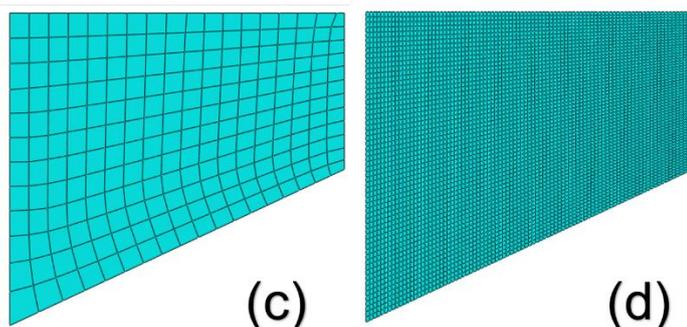


Fonte: Autor, 2019.

Para este caso, são analisadas duas malhas com elementos finitos bidimensionais (Figura 75). Inicialmente, é considerada uma malha (c) de elementos finitos de tamanho aproximado de 5 cm para análise em estado plano de tensão do tipo CPS4 (elemento quadrilateral de 4 nós com interpolação bilinear) com 216 elementos e 247 nós.

Considerando o mesmo elemento, refina-se a malha (d) para elementos de tamanho aproximado de 1 cm, constituindo-se, então, 5400 elementos e 5551 nós.

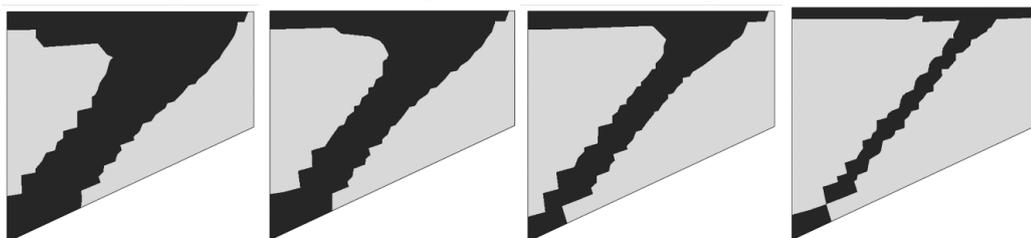
Figura 75 – Representação das malhas 2D (c) e (d) adotadas



Fonte: Autor, 2019.

Para a malha (c), as topologias ótimas obtidas considerando frações volumétricas de aproximadamente 50%, 40%, 30% e 20% do volume inicial são apresentadas na Figura 76. São necessários, respectivamente, 27, 27, 31 e 32 ciclos de projeto para atingir os parâmetros desejados.

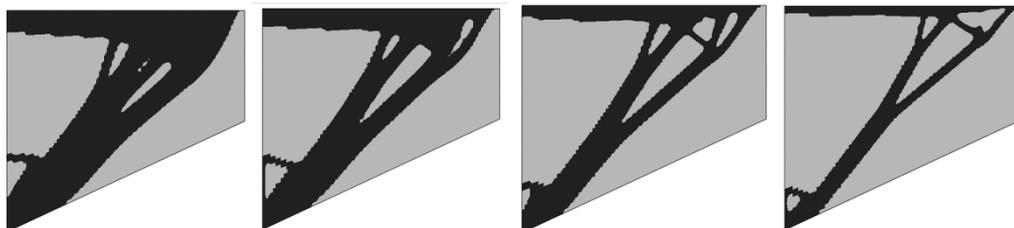
Figura 76 – Distribuição ótima de material para a malha (c)



Fonte: Autor, 2019.

Para a malha (d), as topologias ótimas obtidas considerando frações volumétricas de aproximadamente 50%, 40%, 30% e 20% do volume inicial são apresentadas na Figura 77. São necessários, respectivamente, 35, 44, 43 e 30 ciclos de projeto para atingir os parâmetros desejados.

Figura 77 – Distribuição ótima de material para a malha (d)



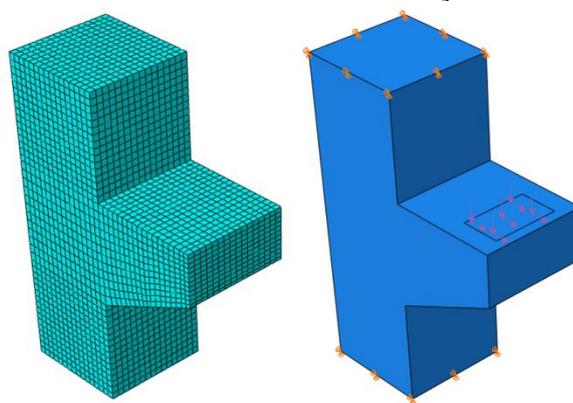
Fonte: Autor, 2019.

As topologias ótimas para a malha (c) são análogas ao modelo de treliça de duas barras sugerida pela NBR 9062 (2017), caracterizando uma região tracionada e outra região comprimida. Na malha (d), apesar da dependência da malha observada, de maneira intuitiva, também se deve considerar um modelo análogo de duas barras.

4.2.2 Resultados do Modelo 3D com o método SIMP

De modo a comparar com o modelo bidimensional, é realizada a modelagem tridimensional do consolo proposto na Figura 69. É considerada uma malha de elementos finitos de tamanho aproximado de 50 mm do tipo C3D8R (elemento hexaédrico de 8 nós, interpolação linear com integração reduzida), 14720 elementos e 16983 nós. As condições de contorno também estão ilustradas na Figura 78, com aplicação das cargas distribuídas e restrições de deslocamentos na base e no topo.

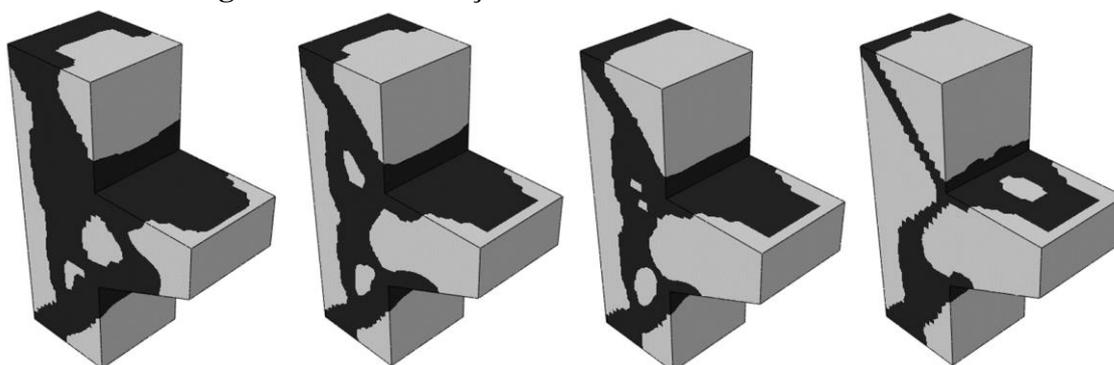
Figura 78 – Malha 3D adotada e condições de contorno



Fonte: Autor, 2019.

As topologias ótimas obtidas considerando frações volumétricas de aproximadamente 50%, 40%, 30% e 20% do volume inicial são apresentadas na Figura 79. São necessários, respectivamente, 35, 36, 35 e 49 ciclos de projeto para atingir os parâmetros desejados.

Figura 79 – Distribuição ótima de material do modelo 3D



Fonte: Autor, 2019.

Com a distribuição de material obtida pelo modelo 3D, pode-se perceber que há semelhanças com as topologias obtidas com o modelo 2D. Opta-se por não determinar os modelos de bielas por meio do modelo 3D, uma vez que a representação bidimensional é suficiente para o caso específico em análise.

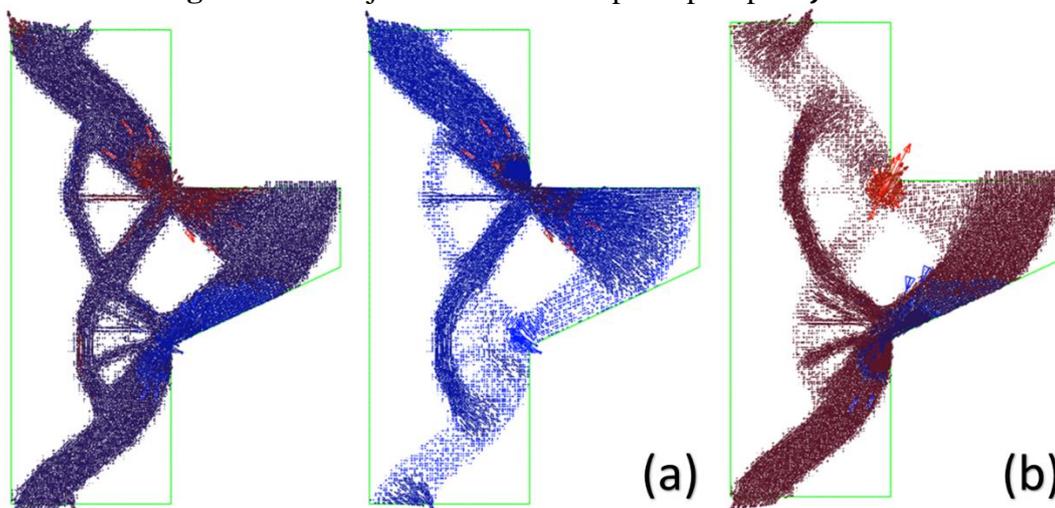
Em termos de processamento, devido ao alto custo computacional, o modelo 3D requer mais tempo, principalmente devido à quantidade de elementos, o que pode inviabilizar a agilidade para determinar os padrões preliminares de modelos de bielas. Contudo, o ABAQUS® fornece uma maior quantidade de respostas de projeto para os elementos 3D, o que pode ser interessante para investigação de novos modelos otimizados, utilizando, por exemplo, restrições de tensões de von Mises.

Para casos mais complexos, como por exemplo, representação tridimensional de reforços com fibras e/ou armaduras de aço e em se tratando de análise não linear física, considerando a fissuração, o modelo tridimensional torna-se mais indicado para uma representação próxima do comportamento real da estrutura.

4.2.3 Dimensionamento do consolo trapezoidal

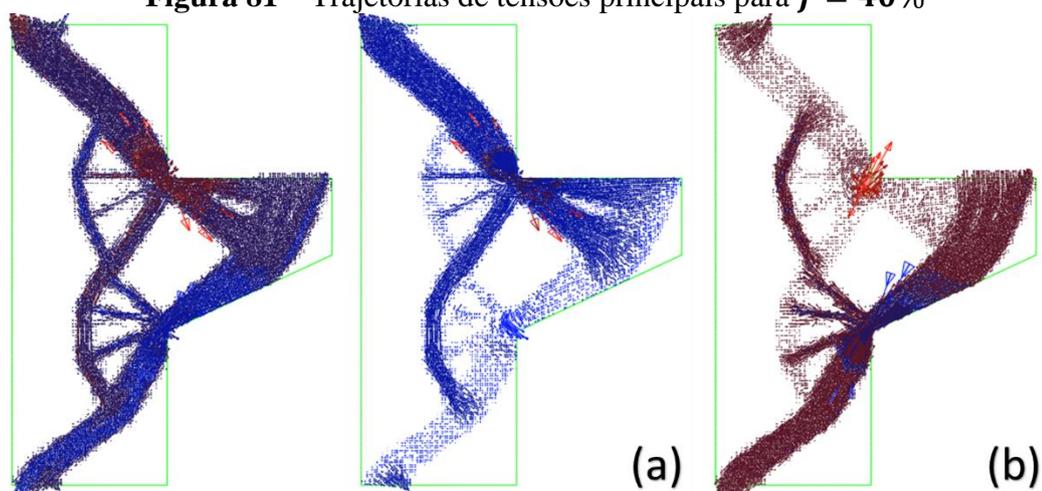
De maneira representativa, nas Figura 80 e Figura 81 são apresentadas as trajetórias de tensões principais de tração (a) e compressão (b), para o modelos otimizados com a malha da Figura 73, para as frações $f = 50\%$ e $f = 40\%$, respectivamente. Com esta visualização, é possível conceber um modelo preliminar de bielas a ser adotado.

Figura 80 – Trajetórias de tensões principais para $f = 50\%$



Fonte: Autor, 2019.

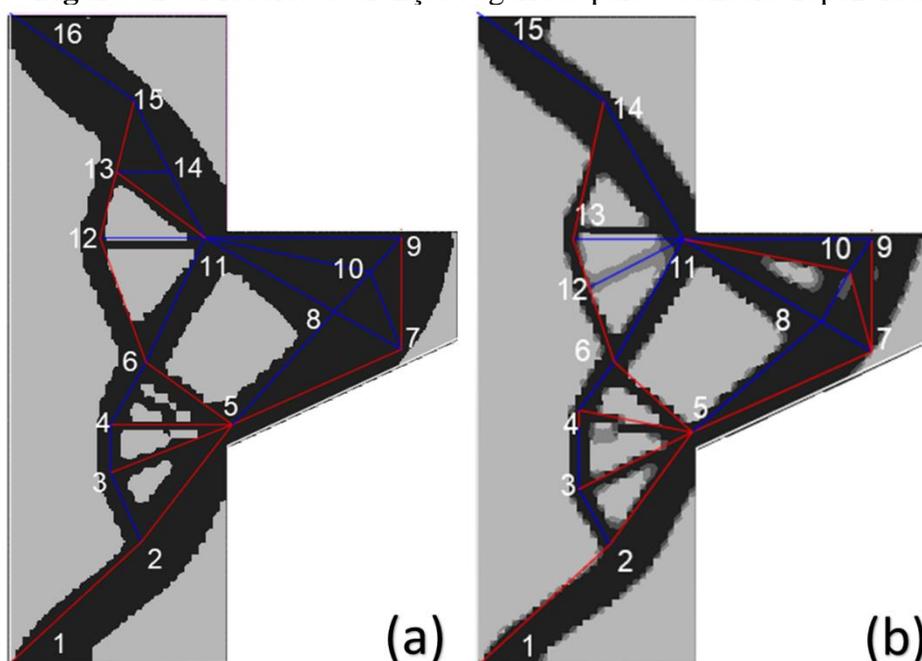
Figura 81 – Trajetórias de tensões principais para $f = 40\%$



Fonte: Autor, 2019.

Com base nas topologias ótimas obtidas para a malha (b) no modelo 2D com a consideração do pilar, para as diferentes frações volumétricas $f = 50\%$ (Figura 82a) e $f = 40\%$ (Figura 82b), são apresentadas as conectividades dos elementos resultantes dos modelos otimizados, fornecendo indicativos de modelos de treliça. As coordenadas dos nós são apresentadas, em cm, nas Tabela 12 e Tabela 13.

Figura 82 – Modelos de treliças sugeridos para o consolo trapezoidal



Fonte: Autor, 2019.

Tabela 12 – Coordenadas do modelo de treliça para $f = 50\%$

Coordenadas		
Nó	x	y
1	0	0
2	48,3	44,74
3	36,97	70
4	36,97	88
5	81,65	88
6	49,91	111
7	144	115,64
8	118	129,86
9	144	157
10	132,68	144,43
11	71,77	157
12	32,97	157
13	39,14	181,43
14	58,88	181,43
15	45,84	207,77
16	0	240

Fonte: Autor, 2019.

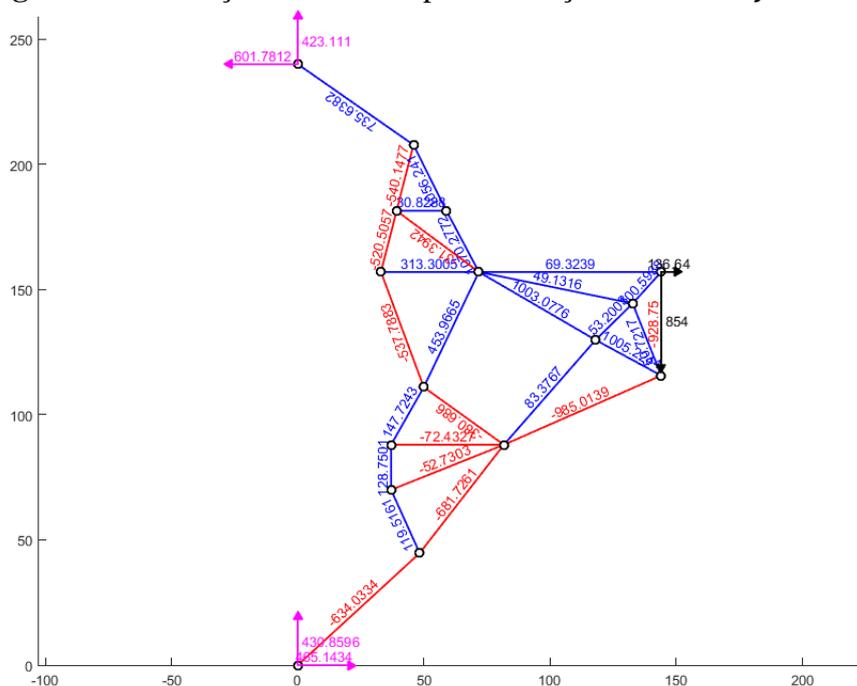
Tabela 13 – Coordenadas do modelo de treliça para $f = 40\%$

Coordenadas		
Nó	x	y
1	0	0
2	48,3	44,74
3	36,97	65
4	36,97	94
5	78	86
6	49,91	111,5
7	144	115,64
8	126,34	127
9	144	157
10	135,9	145,07
11	75	157
12	40,64	138,5
13	34,5	157
14	45,84	207,77
15	0	240

Fonte: Autor, 2019.

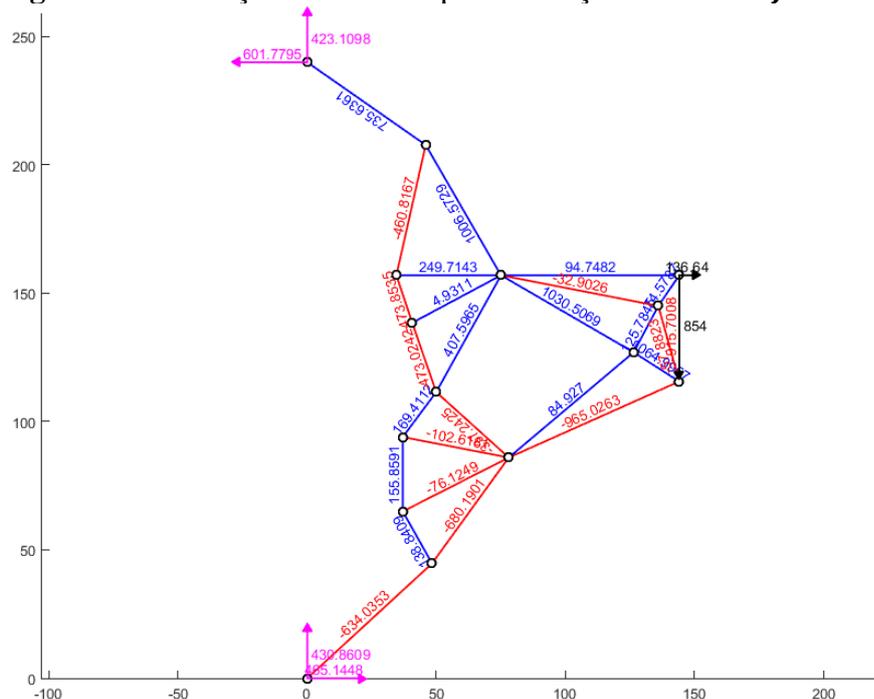
Nas Figura 83 e Figura 84 são apresentados os esforços solicitantes, em kN , para os dois casos. Aplica-se também uma carga horizontal $H_d = 0,16V_d$. Os esforços positivos (em azul) indicam tração, enquanto os esforços negativos (em vermelho) indicam compressão.

Figura 83 – Esforços solicitantes para a treliça baseada em $f = 50\%$



Fonte: Autor, 2019.

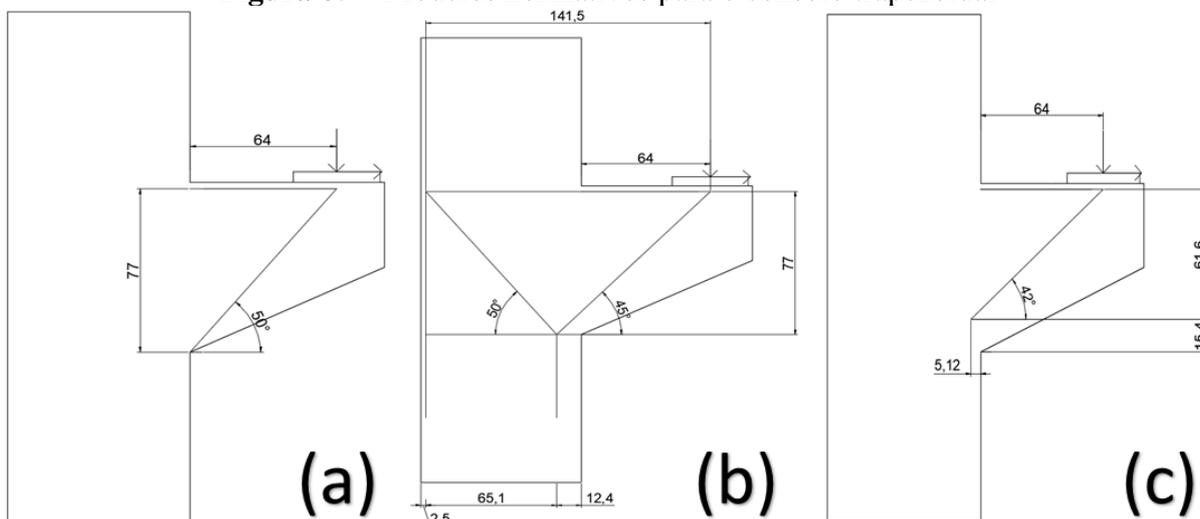
Figura 84 – Esforços solicitantes para a treliça baseada em $f = 40\%$



Fonte: Autor, 2019.

Para o exemplo do consolo trapezoidal são apresentados os modelos de treliça na Figura 85, com medidas em cm, sugeridos pela NBR 9062 (ABNT, 2017) (Figura 85a), manual do PCI (2010) (Figura 85b) e simplificado do Eurocode 2 (CEN, 2004) (Figura 85c).

Figura 85 – Modelos normativos para o consolo trapezoidal



Fonte: Autor, 2019.

As informações geométricas, necessárias para o dimensionamento do consolo trapezoidal, são apresentadas na Tabela 14.

Tabela 14 – Dados geométricos do consolo trapezoidal

Geometria (cm)	
Distância de aplicação da carga (a)	64
Altura total (h)	80
Altura da parte superior (h_1)	40
Altura útil (d)	77
Cobrimento do concreto (c_c)	2,5
Largura do pilar (h_c)	80
Vão do balanço (l_c)	85
Profundidade (b)	80
Largura do aparelho de apoio (a_g)	38
Profundidade do aparelho de apoio (b_g)	50

Fonte: Autor, 2019.

Para o problema em análise, as resistências das escoras de acordo com as referências normativas, com $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$, são encontradas na Tabela 15. Similar ao exemplo 4.1.3, são

adotados os valores de resistências para escoras em zonas CCT na NBR 6118 (ABNT, 2014). Para o ACI 318 (2014), considera-se que não há armadura transversal. No modelo simplificado do Eurocode 2 (CEN, 2004), utiliza-se como parâmetro de resistência o valor da tensão máxima para a zona nodal CCC.

Tabela 15 – Resistência das escoras ($f_{ck} = 20 \text{ MPa}$)

Tensão resistente (kN/m^2)	
NBR 6118 (2014)	$f_{cd3} = 9.462,38$
ACI 318 (2014)	$f_{ce} = 10.200,00$
Eurocode 2 (2004)	$\sigma_{Rd,max} = 10.426,66$

Fonte: Autor, 2019.

Ao considerar a geometria do consolo para o cálculo da largura da escora, conforme disposto nas referências, as tensões máximas são encontradas para cada um dos modelos, dividindo-se a força de compressão na escora pela área delimitada, indicadas na Tabela 16.

Tabela 16 – Tensões máximas atuantes nas escoras do consolo trapezoidal

Referência normativa	Largura da escora (cm)	Tensões de compressão (kN/m^2)
NBR 9062 (2017)	20,00	5.340,16
PCI (2010)	32,48	5.896,80
Eurocode 2 (2004)	30,80	3.915,97

Fonte: Autor, 2019.

Conforme as referências normativas, não haverá esmagamento do concreto nas escoras nos modelos com topologias ótimas, pois todas as tensões máximas são menores que as tensões resistentes. Com isto, garante-se a segurança do nível de tensões pelo método das bielas.

Dimensionando o consolo para uma força vertical de cálculo $V_d = 854 \text{ kN}$ e uma força horizontal de cálculo $H_d = 0,16 \cdot V_d = 136,64 \text{ kN}$, as áreas de aço CA-50 ($f_{yk} = 500 \text{ MPa}$) são encontradas para o tirante principal, de acordo com a Tabela 17.

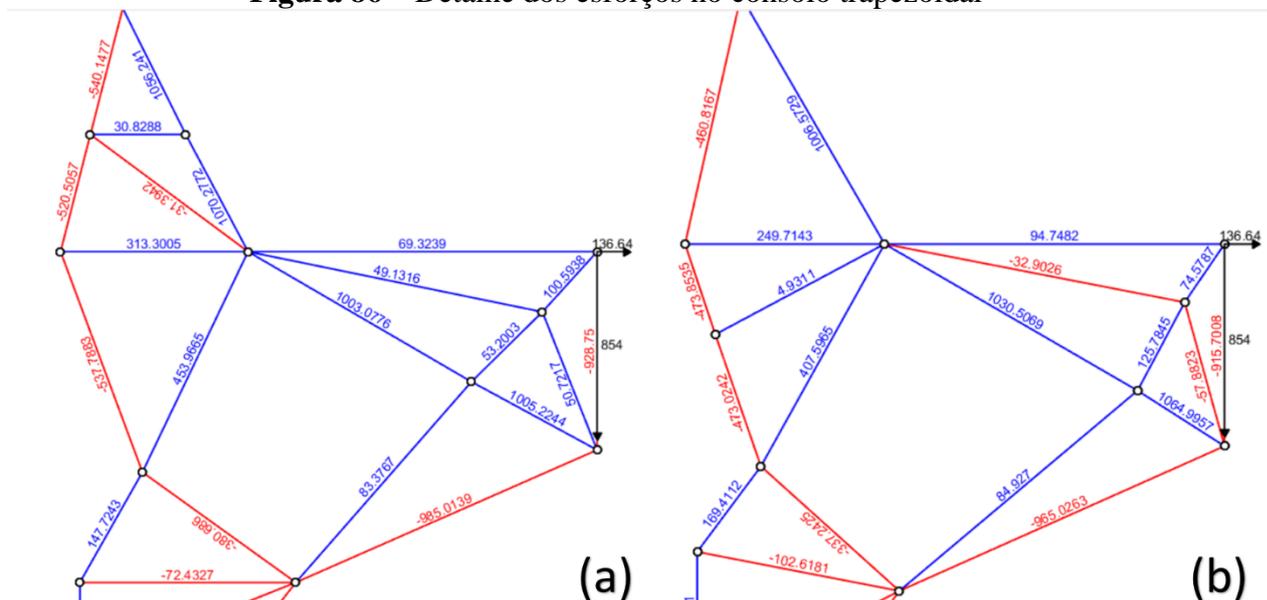
Tabela 17 – Áreas de aço do consolo trapezoidal

Área de aço do tirante principal (cm^2)	
NBR 9062 (2017)	21,43
PCI (2010)	26,38
Eurocode 2 (2004)	22,19

Fonte: Autor, 2019.

Na Figura 86 é apresentado o detalhe dos esforços nas barras para os modelos $f = 50\%$ (a) e $f = 40\%$ (b) na região do consolo.

Figura 86 – Detalhe dos esforços no consolo trapezoidal



Fonte: Autor, 2019.

De acordo com a indicação de Araújo (2010), para os modelos de duas barras, a largura da escora depende das dimensões do aparelho de apoio. Adaptando para este caso e analisando as escoras verticais, a largura c_2 foi determinada para os modelos com topologias ótimas. O valor encontrado foi de 38 cm para ambos, igual à largura do aparelho de apoio.

No modelo com $f = 50\%$, a tensão na escora é de $3.055,09 \text{ kN/m}^2$, já para o modelo com $f = 40\%$, a tensão na escora é de $3.012,17 \text{ kN/m}^2$. Apesar de as escoras mais solicitadas se encontrarem na base do consolo, ressalta-se a dificuldade de obtenção da largura destas.

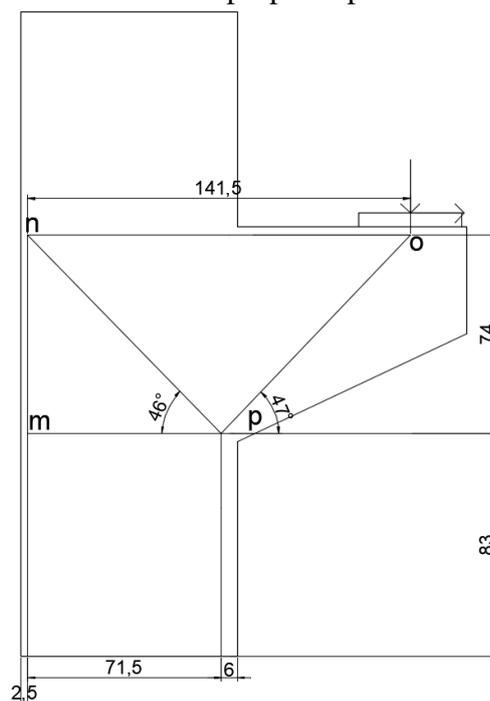
Para ambos os modelos, o esforço de tração máximo na região do consolo ocorre em uma barra inclinada, sugerindo que a armadura principal também deve ser inclinada, o que pode ocasionar problemas para a execução. Para os tirantes horizontais, as áreas de aço são de $1,59 \text{ cm}^2$ e $2,18 \text{ cm}^2$, respectivamente. Analisando os tirantes inclinados, as áreas de aço são de $24,61 \text{ cm}^2$ e $24,50 \text{ cm}^2$, respectivamente.

Comparativamente, as áreas de aço obtidas com os modelos com topologias ótimas estão coerentes com as referências normativas. Da mesma forma que o exemplo anterior, os critérios de armadura mínima, armadura máxima, disposições construtivas e critérios de durabilidade

constantes nas referências normativas devem ser verificados para a garantia de um projeto seguro e econômico.

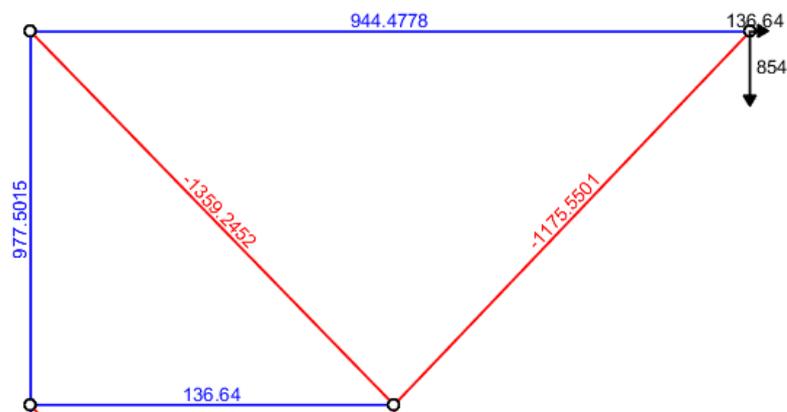
Para este caso, pode-se, com base nas análises realizadas para os modelos identificados anteriormente, desenvolver um novo modelo que contemple um tirante reto na região superior e uma escora inclinada. O novo modelo é proposto na Figura 87, as medidas são em cm.

Figura 87 – Modelo de bielas proposto para o consolo trapezoidal



Fonte: Autor, 2019.

Na Figura 88 são apresentados os esforços solicitantes, em kN, para o novo modelo. Os esforços positivos (em azul) indicam tração, enquanto os esforços negativos (em vermelho) indicam compressão.

Figura 88 – Esforços solicitantes para o modelo proposto

Fonte: Autor, 2019.

De acordo com o procedimento do PCI (2010), para os modelos de cinco barras, a largura da escora n_p pode ser determinada para o modelo proposto, com valor de 16,68 cm. A tensão máxima na escora inclinada é de $10.184,95 \text{ kN/m}^2$, o que ratifica que este nível de tensão é aceitável pelo ACI 318 (2014).

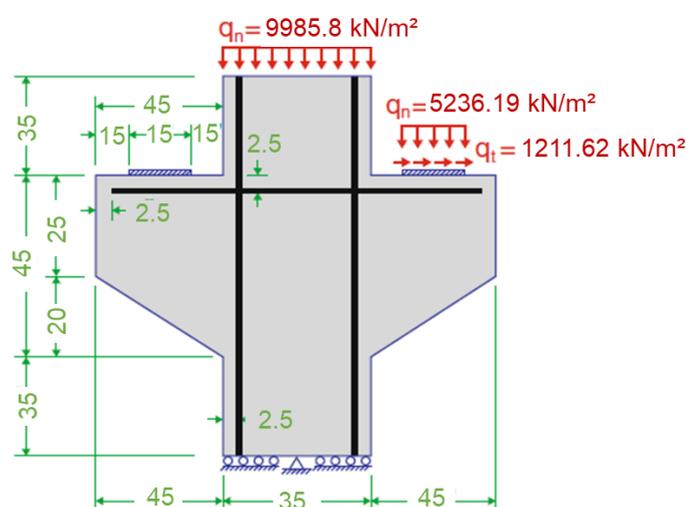
Como este novo modelo, a área de aço do tirante principal do consolo é de $21,72 \text{ cm}^2$, quando comparada com as áreas encontradas pelas referências de projeto, corrobora-se a coerência da proposta apresentada do modelo de escoras e tirantes.

Neste estudo de caso, utilizando o exemplo clássico de Silva (1991), realiza-se o dimensionamento de um consolo trapezoidal. Enfatiza-se que não é realizado o dimensionamento do pilar, mas suas barras garantem o equilíbrio global do modelo. Escolhe-se este exemplo para demonstrar um desenvolvimento prático de uma rotina de projeto, uma vez que a geometria deste elemento é comum em edificações de concreto pré-moldado.

4.3 Consolo trapezoidal duplo

O consolo trapezoidal duplo apresentado é adaptado do trabalho de Zegard e Paulino (2013), que é baseado no exemplo do ACI SP-208 (Figura 89). Todas as dimensões apresentadas estão em cm. O pilar que recebe os dois consolos é quadrado, com lados de 35 cm. Os carregamentos, provenientes das reações de apoio das vigas e da carga axial do pilar são distribuídos nos aparelhos de apoio e na seção superior do pilar, respectivamente. Com a geometria apresentada e considerando $d = 40$ cm, a relação a/d é aproximadamente 0,56.

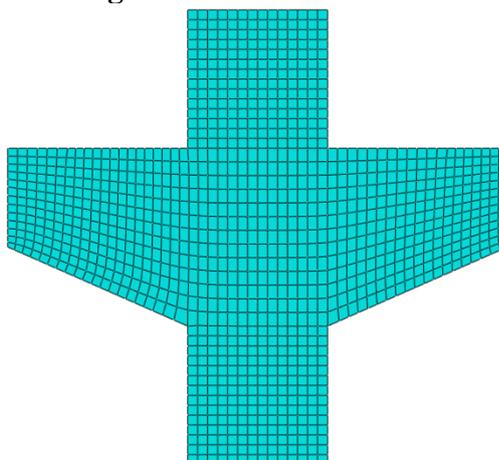
Figura 89 – Consolo trapezoidal duplo



Fonte: adaptado de ZEGARD e PAULINO, 2013.

Para a análise computacional, adotam-se a resistência à compressão do concreto de $f_{ck} = 20$ MPa, módulo de elasticidade longitudinal do concreto $E_{cs} = 21000$ MPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,20$. É considerada uma malha de elementos finitos de tamanho aproximado de 25 mm para análise em estado plano de tensão do tipo CPS4 (elemento quadrilateral de 4 nós com interpolação bilinear) com 1081 elementos e 1176 nós (Figura 90).

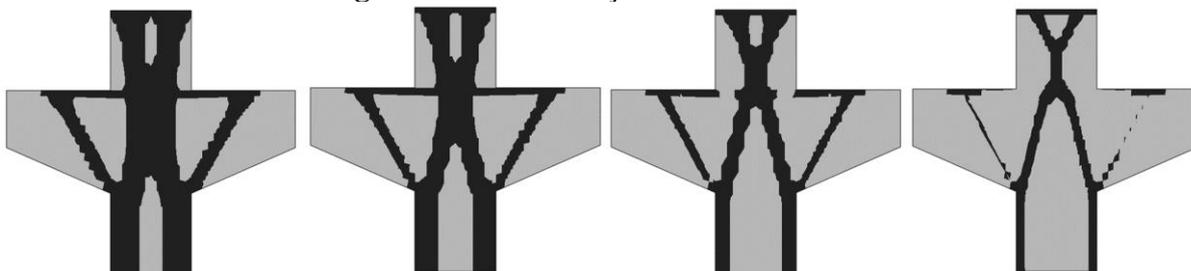
Da mesma forma que os exemplos anteriores, a região de aplicação de carga não é considerada. A estratégia de atualização da densidade é normal. O algoritmo de solução é o geral, com técnica de interpolação material SIMP, e as demais informações estão listadas na Tabela 5.

Figura 90 – Malha adotada

Fonte: Autor, 2019.

4.3.1 Resultados do Modelo 2D com o método SIMP

As topologias ótimas obtidas considerando frações volumétricas de aproximadamente 50%, 40%, 30% e 20% do volume inicial são apresentadas na Figura 91. São necessários, respectivamente, 35, 41, 24 e 30 ciclos de projeto para atingir os parâmetros desejados.

Figura 91 – Distribuição ótima de material

Fonte: Autor, 2019.

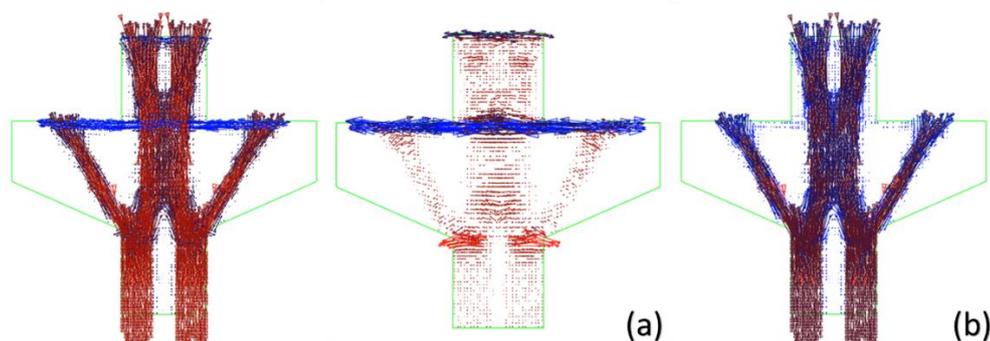
Para o exemplo apresentado, com as frações volumétricas $f = 30\%$ e $f = 20\%$, a região onde se localizaria o tirante e a escora do consolo apresenta pontos com vazios, indicando que há uma tendência de concentração de armadura do pilar, responsável por absorver as cargas que são aplicadas nos aparelhos de apoio.

Entretanto, para fins de projeto, na interpretação desta distribuição de material, é necessário considerar que haverá um tirante na região superior do consolo e, também, uma escora inclinada, de modo a esquematizar o mecanismo resistente do consolo.

4.3.2 Dimensionamento do consolo trapezoidal duplo

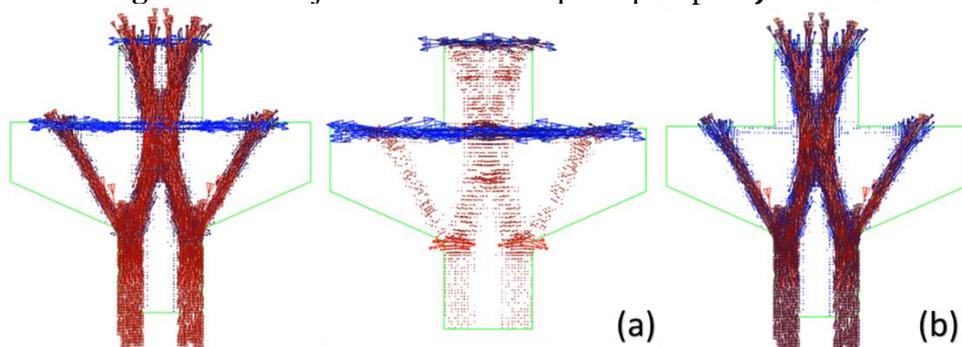
Para os modelos otimizados com as frações $f = 50\%$ e $f = 40\%$ são apresentadas, nas Figura 92 e Figura 93, respectivamente, as trajetórias de tensões principais de tração (a) e compressão (b). Verifica-se que, em azul, a região mais tracionada é da parte superior do consolo. Com esta visualização, é possível estabelecer uma geometria preliminar de um modelo de bielas a ser analisado.

Figura 92 – Trajetórias de tensões principais para $f = 50\%$



Fonte: Autor, 2019.

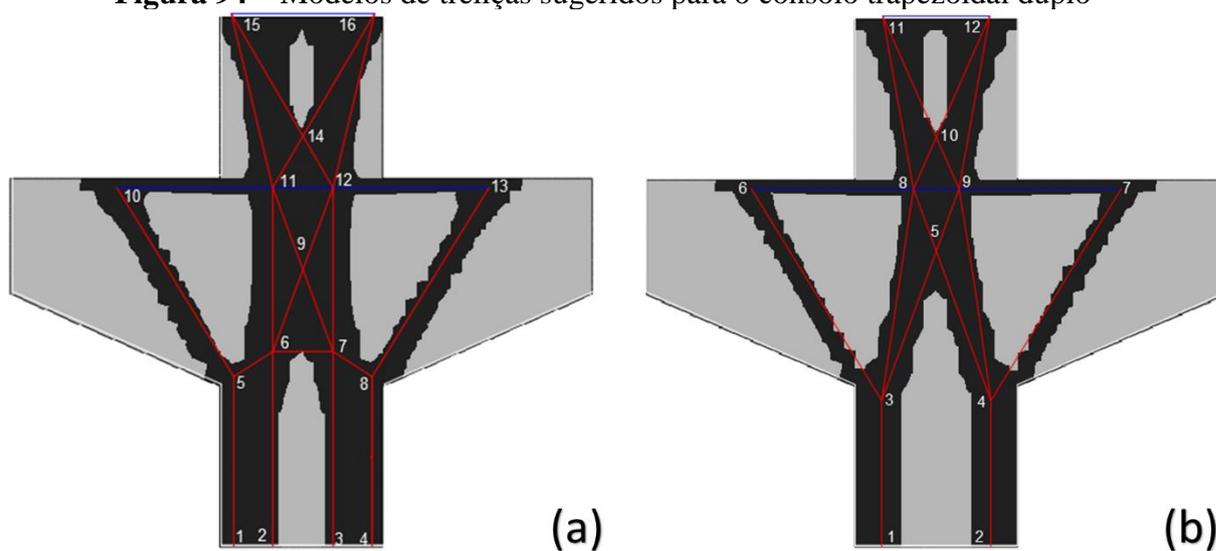
Figura 93 – Trajetórias de tensões principais para $f = 40\%$



Fonte: Autor, 2019.

Com base nas topologias ótimas obtidas para as diferentes frações volumétricas $f = 50\%$ (Figura 94a) e $f = 40\%$ (Figura 94b), são apresentados os modelos preliminares. As coordenadas dos nós são apresentadas, em cm, nas Tabela 18 e Tabela 19.

Figura 94 – Modelos de treliças sugeridos para o consolo trapezoidal duplo



Fonte: Autor, 2019.

Tabela 18 – Coordenadas do modelo de treliça para $f = 50\%$

Coordenadas		
Nó	x	y
1	47,55	0
2	56,02	0
3	68,98	0
4	77,45	0
5	47,55	36,62
6	56,02	42
7	68,98	42
8	77,45	36,62
9	62,5	59,75
10	22,5	77,5
11	56,02	77,5
12	68,98	77,5
13	102,5	77,5
14	62,5	88,55
15	47	115
16	78	115

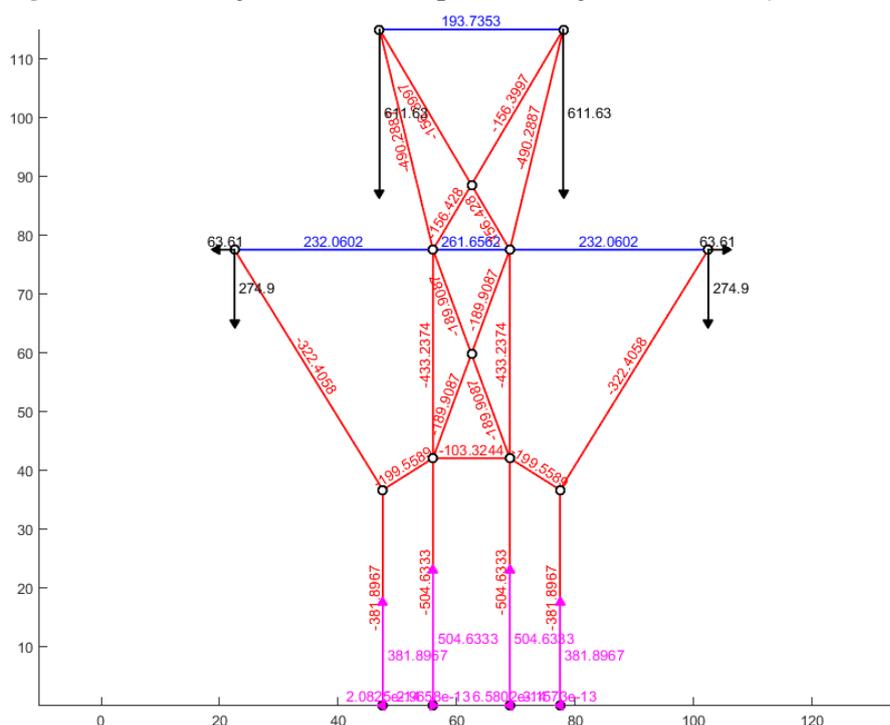
Fonte: Autor, 2019.

Tabela 19 – Coordenadas do modelo de treliça para $f = 40\%$

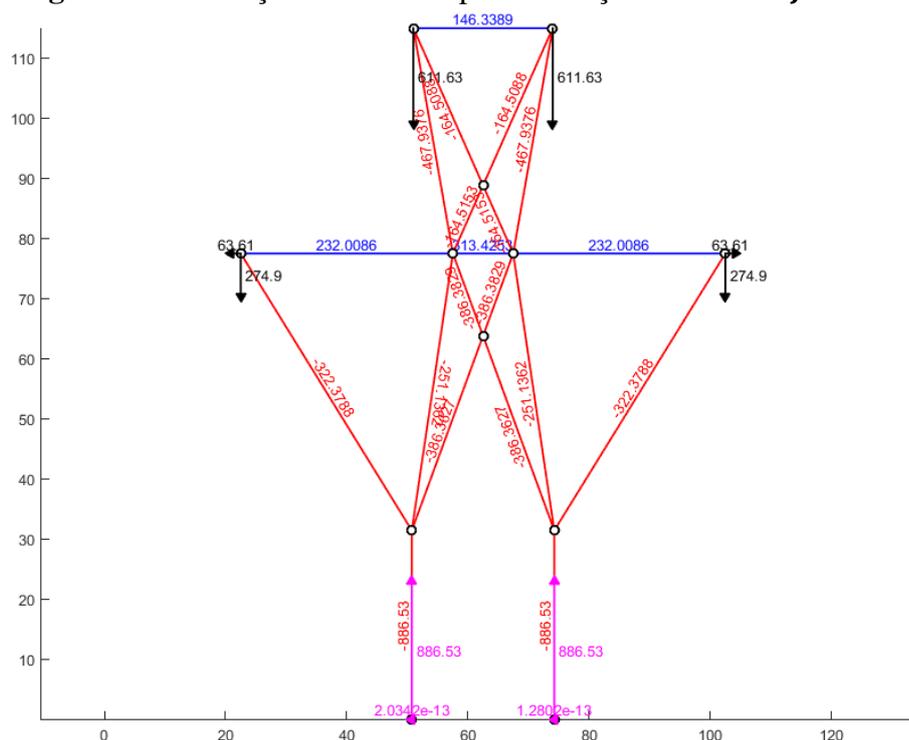
Coordenadas		
Nó	x	y
1	50,74	0
2	74,26	0
3	50,74	31,4
4	74,26	31,4
5	62,5	63,79
6	22,5	77,5
7	102,5	77,5
8	57,52	77,5
9	67,48	77,5
10	62,5	88,83
11	51	115
12	74	115

Fonte: Autor, 2019.

Nas Figura 95 e Figura 96 são apresentados os esforços solicitantes, em kN, para os dois casos. As cargas distribuídas foram substituídas por cargas pontuais equivalentes. Os esforços positivos (em azul) indicam tração, enquanto os esforços negativos (em vermelho) indicam compressão.

Figura 95 – Esforços solicitantes para a treliça baseada em $f = 50\%$ 

Fonte: Autor, 2019.

Figura 96 – Esforços solicitantes para a treliça baseada em $f = 40\%$ 

Fonte: Autor, 2019.

As informações geométricas referentes a apenas um consolo, aproveitando-se da simetria da análise, são apresentadas na Tabela 20.

Tabela 20 – Dados geométricos do consolo trapezoidal duplo

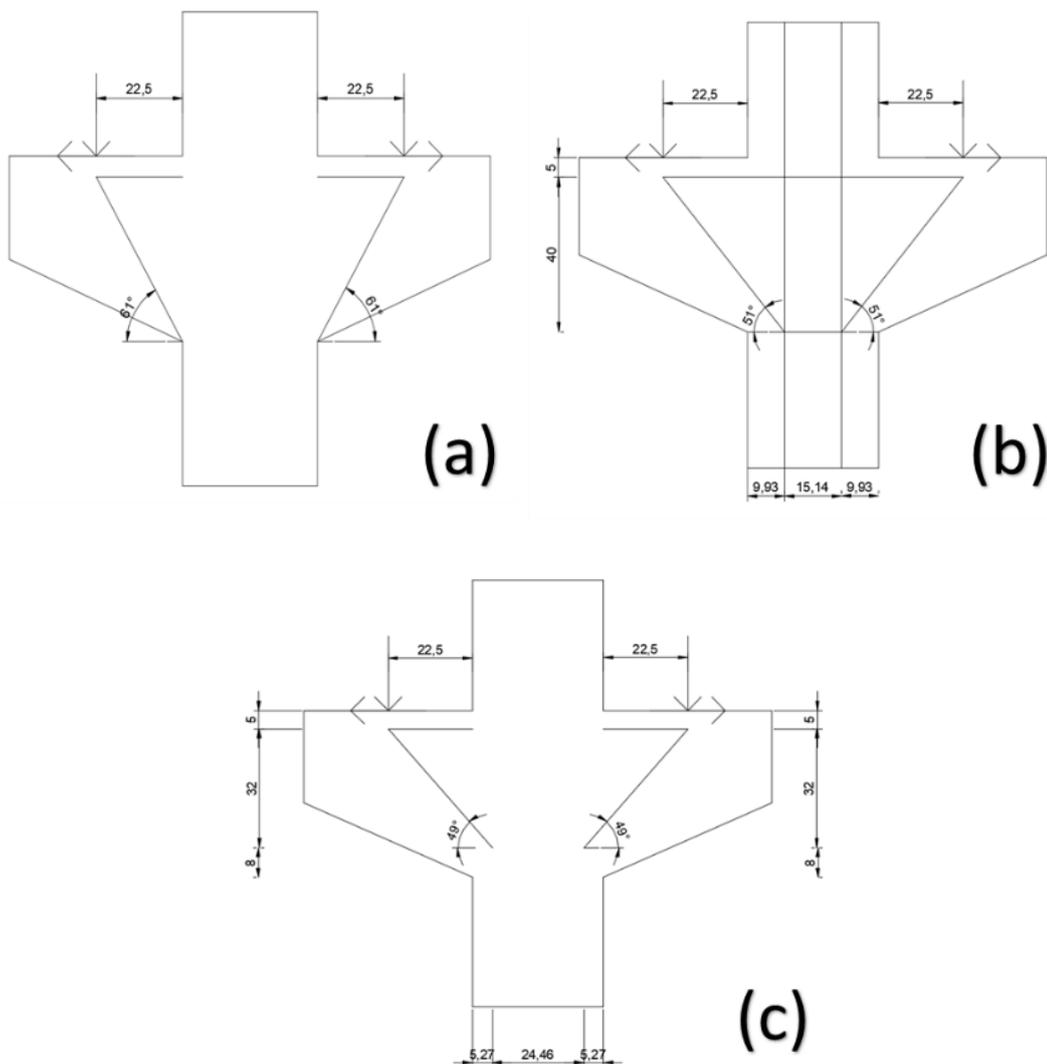
Geometria (cm)	
Distância de aplicação da carga (a)	22,5
Altura total (h)	45
Altura da parte superior (h_1)	25
Altura útil (d)	40
Cobrimento do concreto (c_c)	2,5
Largura do pilar (h_c)	35
Vão do balanço (l_c)	45
Profundidade (b)	35
Largura do aparelho de apoio (a_g)	15
Profundidade do aparelho de apoio (b_g)	30

Fonte: Autor, 2019.

Para o exemplo do consolo trapezoidal duplo são apresentados os modelos de treliça com medidas em cm, sugeridos pela NBR 9062 (ABNT, 2017) (Figura 97a), manual do PCI (2010) (Figura 97b) e Eurocode 2 (CEN, 2004) (Figura 97c). Excetuando-se o modelo do

manual do PCI (2010), que utiliza uma adaptação do modelo de consolo simples, considerando o pilar no mecanismo resistente da treliça, os demais modelos são os usuais para consolos simples.

Figura 97 – Modelos normativos para o consolo trapezoidal duplo



Fonte: Autor, 2019.

As resistências das escoras, para o problema em análise, são dadas pela Tabela 15, já que a resistência à compressão do concreto é a mesma do exemplo 4.2.3. Com a análise dos modelos de treliça e de acordo com o critério geométrico para verificação da largura da escora, as tensões máximas nas escoras são encontradas na Tabela 21.

Tabela 21 – Tensões máximas atuantes nas escoras do consolo trapezoidal duplo

Referência normativa	Largura da escora (cm)	Tensões de compressão (kN/m^2)
NBR 9062 (2017)	27,95	2.809,67
PCI (2010)	17,95	5.632,82
Eurocode 2 (2004)	16,00	6.142,17

Fonte: Autor, 2019.

Seguindo a indicação de Araújo (2010), para os modelos de duas barras, a largura da escora depende das dimensões do aparelho de apoio. Adaptando, a largura c_2 é determinada para os modelos com topologias ótimas, com o valor de 18 cm, uma vez que ambos possuem a mesma inclinação das escoras. As tensões máximas são de aproximadamente $5.115,21 kN/m^2$, visto que os esforços de compressão e as inclinações das escoras são similares em ambos os modelos.

De acordo com o critério das tensões máximas estabelecido nas referências normativas, não haverá esmagamento do concreto nas escoras em todos os modelos. Com isto, garante-se a segurança do nível de tensões pelo método das bielas.

Dimensionando os consolos para uma força vertical de cálculo $V_d = 274,9 kN$ e uma força horizontal de cálculo $H_d = 63,61 kN$, as seguintes áreas de aço CA-50 ($f_{yk} = 500 MPa$) são encontradas para o tirante principal, de acordo com a Tabela 22.

Tabela 22 – Áreas de aço do consolo trapezoidal duplo

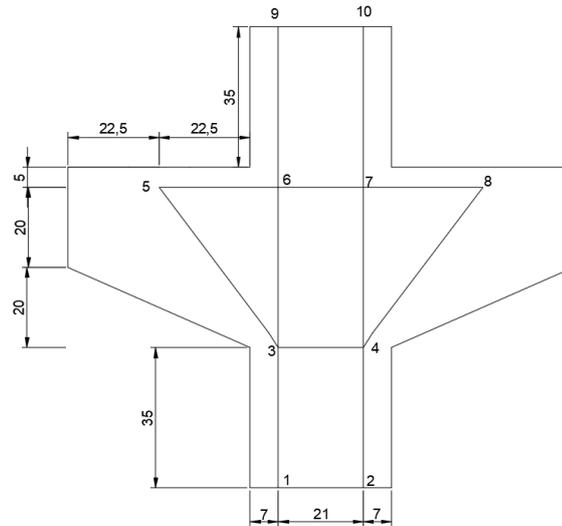
Área de aço do tirante principal (cm^2)	
NBR 9062 (2017)	5,65
PCI (2010)	7,64
Eurocode 2 (2004)	5,41

Fonte: Autor, 2019.

Com a análise dos esforços nos tirantes localizados na parte superior do consolo, verifica-se que os modelos com topologias ótimas resultaram em uma boa aproximação com os modelos normativos. Para os tirantes horizontais, as áreas de aço são de $6,02 cm^2$ e $7,21 cm^2$, respectivamente. Mesmo um diferente refinamento nas treliças, pode-se comprovar que os modelos preliminares desenvolvidos por meio da conectividade dos materiais estão coerentes.

Observando as investigações feitas, pode-se, com base nos modelos identificados anteriormente, desenvolver um novo modelo baseado na topologia ótima, que seja autoequilibrado e que contemple menos barras. O modelo proposto na Figura 98, com as medidas em cm, é similar ao modelo do PCI (2010).

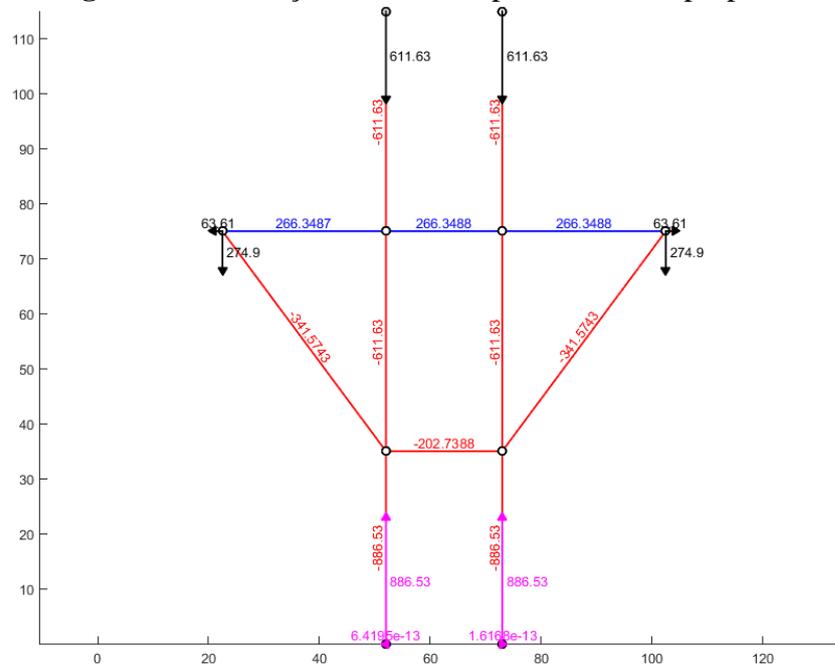
Figura 98 – Modelo de bielas proposto para o consolo trapezoidal duplo



Fonte: Autor, 2019.

Na Figura 99 são apresentados os esforços solicitantes, em kN, para o novo modelo. Os esforços positivos (em azul) indicam tração, enquanto os esforços negativos (em vermelho) indicam compressão.

Figura 99 – Esforços solicitantes para o modelo proposto



Fonte: Autor, 2019.

Efetuada a análise prevista por Araújo (2010), para os modelos de duas barras, a largura da escora depende das dimensões do aparelho de apoio. Adaptando, a largura c_2 é determinada para o modelo proposto, com o valor aproximado de 18 cm.

No novo modelo, a área de aço é de $6,13 \text{ cm}^2$, aproximando mais da área do PCI (2010), que é 24,63% maior que o valor encontrado, certificando a nova proposta do modelo de escoras e tirantes. Já para a verificação das escoras, verifica-se que a tensão máxima na escora inclinada é de $5.422,44 \text{ kN/m}^2$, indicando que este nível de tensão está dentro do limite aceitável pelas resistências normativas.

Neste exemplo, adaptado de Zegard e Paulino (2013), observa-se que é possível usufruir da simetria dos consolos, sendo o desenvolvimento dos modelos de escoras e tirantes totalmente simétrico. Este tipo de modelagem de consolos duplos se assemelha à disposição destes elementos nas análises experimentais, em que a carga aplicada no aparelho de apoio é uma reação do equipamento de ensaio.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os fundamentos dos métodos das bielas estão diretamente ligados com o problema de otimização topológica de estruturas contínuas. De forma a maximizar a rigidez e buscar um modelo otimizado, baseado no critério da mínima energia de deformação, as topologias ótimas servem de auxílio na definição dos modelos de treliças representativos dos elementos com descontinuidade geométrica e/ou estática.

Para o dimensionamento de consolos curtos, motivado pela escolha de um modelo de cálculo, a otimização topológica é uma técnica indicada para minimizar a imprecisão da metodologia clássica que utiliza o caminho das cargas, que é baseada em um processo de tentativas e erros, já que não existe uma única solução correta para a modelagem.

Com a revisão bibliográfica realizada neste trabalho, buscou-se elencar os fundamentos dos métodos das bielas e os parâmetros constantes em três das principais referências normativas de projetos de estruturas de concreto. Como ainda há intenso estudo sobre o método das bielas, percebe-se que não há um consenso relativo às resistências das escoras e zonas nodais, cabendo em cada caso específico utilizar a indicação recomendada. Não existe um único modelo correto, no entanto, ensaios experimentais apontam uma boa correlação para o modelo do PCI (2010).

Nos últimos anos, os procedimentos normativos e diversos pesquisadores desenvolveram suas próprias metodologias de verificação, as quais possuem restrições quanto à geometria e casos específicos de análise. Sendo assim, a definição matemática de um modelo otimizado, que auxilie o projetista a encontrar a melhor solução, foi um ponto relevante.

Apesar de haver um vasto desenvolvimento no meio técnico, diversos pesquisadores que trabalham na área de otimização topológica não focam no dimensionamento dos elementos estruturais em regiões descontínuas, preocupando-se apenas em aspectos computacionais. A tarefa de interpretação dos resultados por meio da distribuição de material, como um mecanismo resistente por meio de barras de treliças, ainda é um desafio, dado que diversos parâmetros estão envolvidos no processo.

O desenvolvimento dos modelos de escoras e tirantes via otimização topológica não se torna imediato apenas com a definição da geometria do elemento, uma vez que o usuário precisa definir um refinamento adequado da malha e adotar uma fração volumétrica compatível com o problema analisado. A experiência com o *software* também é importante, pois a interpretação dos resultados deve ser realizada de forma cautelosa. Outro problema a ser contornado é o surgimento de instabilidades numéricas.

A quantidade de variáveis do procedimento de otimização topológica foi uma dificuldade encontrada. Cada fração volumétrica escolhida como restrição do problema resultou em uma diferente topologia. Na literatura, não há um consenso em qual fração resulta em um modelo adequado para representar as escoras e tirantes, ficando esta atividade a cargo do projetista. Desta forma, os resultados obtidos foram comparados para fins de análise e adequação das conectividades dos membros da treliça.

Como representação dos modelos preliminares de treliça, a restrição no problema de otimização em que a fração volumétrica está em torno de 40% a 50% se mostrou adequada como indicativo de uma análise inicial. Em relação ao refinamento da malha, que depende de cada geometria analisada, nos casos apresentados, os resultados foram satisfatórios para a análise em estado plano de tensão com elementos finitos quadrilaterais de arestas de tamanho aproximado de 25 mm.

A modelagem numérica por elementos finitos auxiliou na eliminação de regiões indesejáveis, maximizando a rigidez da estrutura. Para cada situação, foram analisadas as condições de contornos representantes do problema, de modo a estabelecer os parâmetros indicativos para o modelo de treliça de cada elemento estrutural.

O objetivo de utilizar este método é garantir que seja proporcionada a identificação de possíveis conectividades de elementos de treliça, dado que a distribuição ótima de material auxilia na visualização do caminho de tensões para a criação de um mecanismo resistente e que contemple o comportamento mecânico do domínio original.

Os resultados obtidos por meio da otimização topológica podem ser considerados, em todos os casos, como modelos preliminares de treliças. Deve-se levar em conta que o procedimento não é concebido para o dimensionamento completo. Para atender critérios de ductilidade, é necessário verificar se armaduras adicionais serão necessárias, de modo a garantir que o modelo esteja de acordo com o teorema do limite inferior da teoria da plasticidade.

Dentre os métodos de otimização topológica disponíveis na literatura, as análises baseadas em aproximação de microestrutura foram utilizadas neste trabalho por utilizar critérios de otimalidade, que se baseiam em condições de ótimo para o problema em questão. Os métodos evolucionários se fundamentam em aproximações geométricas, que utilizam critérios heurísticos, ou seja, derivados da intuição. Em contrapartida, apesar de tratarem o problema de otimização de forma distinta, ambos podem convergir em boas aproximações para a topologia.

Dos estudos de caso apresentados, foi possível analisar três geometrias diferentes e com diferentes relações a/d . Com base nos exemplos disponíveis na literatura, utilizou-se como

referência o procedimento de conectividade da distribuição de material para definir o modelo de treliça. Para isto, foi imprescindível verificar a estabilidade e estaticidade de cada conjunto.

Por meio da análise da conectividade dos materiais apresentada pelo processo de otimização topológica, buscou-se garantir o equilíbrio dos modelos. Desta forma, para o desenvolvimento de modelos de escoras e tirantes de cada um dos consolos, visando atender os fundamentos do método das bielas, foram traçadas estratégias em que o caminho de forças sugerido foi atendido por meio de modelos autoequilibrados, em que apenas as equações de equilíbrio foram necessárias e suficientes para a determinação dos esforços solicitantes.

Para efetuar as comparações com os modelos normativos, realizou-se o dimensionamento dos elementos para cada situação, considerando as condições de contorno e ações externas impostas no problema. A investigação das áreas de aço e tensões nas escoras foi possível por meio da análise estrutural das treliças e dos critérios geométricos, demonstrando uma metodologia estruturada para o projeto de consolos curtos.

Em uma etapa posterior, verificou-se que os modelos deveriam ser coerentes com a prática executiva, sendo necessário estabelecer modificações nos modelos com topologia ótima, de modo a garantir que, apesar de não haver uma solução única, esta solução deve também contemplar a base teórica do método das bielas e os critérios de montagem de armaduras consagrados pelo uso do concreto estrutural.

Apesar de ainda haver críticas com relação à verificação de estado limite de serviço no método das bielas, deve-se ressaltar que a energia de deformação calculada no processo de otimização deve ser considerada apenas uma aproximação do real comportamento mecânico da estrutura. As investigações mais confiáveis em termos de respostas carga-deformação devem ser realizadas com análises não lineares depois do dimensionamento dos modelos de bielas considerados ótimos, visando consolidar o que foi escolhido como esquema resistente.

A aplicação da análise não linear para a otimização topológica deve ser utilizada com cautela, visto que a fissuração do elemento estrutural acarreta uma redistribuição dos esforços. Do ponto de vista do método das bielas, a otimização com critérios de não linearidade se torna vantajosa para determinação da largura da escora.

Para o desenvolvimento de modelos otimizados, deve-se verificar vários aspectos relacionados ao projeto, como por exemplo, os fatores restritivos de execução, disponibilidade financeira e de mão de obra especializada. Com um estudo aprofundado e com uma maior sensibilidade estrutural, utilizar as ferramentas de otimização possibilita ao engenheiro desenvolver projetos mais arrojados e econômicos.

Sugestões de trabalhos futuros

As seguintes propostas são apresentadas para a continuidade de pesquisas:

- Adicionar a análise de confiabilidade estrutural para os modelos obtidos por meio da otimização topológica.
- Modelar as malhas de elementos finitos considerando o comportamento de dois materiais distintos, empregando modelos hiperelásticos ou modelos bimodulares.
- Analisar comparativamente os modelos de treliças obtidos com o método *ground structure* de otimização topológica discreta.
- Analisar outros elementos especiais de concreto armado, com descontinuidades geométrica e/ou estática, tais como vigas-parede, dentes Gerber e blocos sobre estacas.
- Aplicar outros métodos numéricos para a obtenção de topologias ótimas, visando um melhor desempenho computacional, a exemplo da teoria de volumes finitos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, H. D. **Comportamento estrutural de pórticos planos formados por elementos pré-moldados levando-se em consideração a semi-rigidez das ligações e as não-linearidades física e geométrica.** Dissertação de mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas. Alagoas, Brasil. 2014.

ALMEIDA, V. S.; SIMONETTI, H. L.; OLIVEIRA NETO, L. Análise de modelos de bielas e tirantes para estruturas de concreto armado via uma técnica numérica. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais.** v. 6, n.1, p. 139-157, 2013.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 318-14:** Building code requirements for structural concrete. Farmington Hills, 2014.

ARAÚJO, D. L.; SILVA NETO, A. P.; LOBO, F. A.; EL DEBS, M. K. Análise comparativa de modelos de cálculo para consolos de concreto. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais.** v. 9, n. 3, p. 435-470, 2016.

ARAÚJO, C. T. F. **Estudo do comportamento de juntas de argamassa reforçadas com fibras de polipropileno.** Dissertação de mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas. Alagoas, Brasil. 2005.

ARAÚJO, J. M. **Curso de concreto armado:** volume 4. 3. ed. Rio Grande: Dunas, 2010.

ARAÚJO, T. J. F. **Estudo da ligação viga-pilar em sistema estrutural de concreto considerando a variação da semi-rigidez por meio de parâmetros geométricos da ligação.** Dissertação de mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas. Alagoas, Brasil. 2013.

ARORA, J. S. **Introduction to optimum design.** 3. ed. Elsevier, 2012.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118:** Projeto de estruturas de concreto: procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 9062**: Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado. Rio de Janeiro, 2017.

BAKHTIARY, N.; ALLINGER, P.; FRIEDRICH, M.; MULTFINGER, F.; SAUTER, J. A new approach for size, shape and topology optimization. In: SAE International Congress and Exposition, 1996, Detroit. **Proceedings...** Michigan, USA, 1996.

BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. v. 71, n. 2, p. 197-224, 1988.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization: Theory, Methods and Applications**. Springer, 2003.

BRUGGI, M. Generating strut-and-tie patterns for reinforced concrete structures using topology optimization. **Computer and Structures**. v. 87, p. 1483-1495, 2009.

CAMPOS, M. A. **Comparação entre diferentes modelos de cálculo para consolos de concreto pré-moldado**. Monografia. Escola de Engenharia, Universidade Federal de Goiás. Goiás, Brasil. 2010.

CANHA, R. M. F.; KUCHMA, D. A.; EL DEBS, M. K.; SOUZA, R. A. Numerical analysis of reinforced high strength concrete corbels. **Engineering Structures**. v. 74, p. 130-144, 2014.

CEB – COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. CEB-FIP model code 1990 (MC-CEB/90). **Bulletin d'Information**, n, 203-205, 1991.

CEN – EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 1992-1-1 – Eurocode 2: Design of concrete structures: General rules and rules for buildings**. Brussels, 2004.

CHRISTENSEN, P. W.; KLARBRING, A. **An introduction to structural optimization**. Springer, 2009.

EL DEBS, M. K. **Concreto pré-moldado: fundamentos e aplicações**. 2. ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2017.

EL-METWALLY, S. E. E.; CHEN, W. F. **Structural concrete: strut-and-tie models for unified design**. CRC Press, 2018.

FERNANDES, R. J.; EL DEBS, M. K.; Análise da capacidade resistente de consolos de concreto armado considerando a contribuição da armadura de costura. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**. São Carlos, v. 7, n. 25, p. 103-128, 2005.

FERREIRA, M. A. **Deformabilidade de ligações viga-pilar de concreto pré-moldado**. Tese de doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Paulo, Brasil. 1999.

GUERRA, M. B. B. F. **Modelos de concepção para estruturas em concreto armado com comportamento não linear obtidos pelo método de bielas e tirantes e otimização topológica**. Tese de doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais. Minas Gerais, Brasil. 2017.

GUILLOU, R. A. **Desenvolvimento de um modelo de escoras e tirantes no dimensionamento de blocos de transição entre pilares rotacionados**. Dissertação de mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas. Alagoas, Brasil. 2014.

HAGBERG, T. Design of concrete brackets: on the application of the truss analogy. **ACI Journal**. v. 80, n. 1, p. 3-12, 1983.

JACOBS, J. P. **EUROCODE 2 Worked examples**. European Concrete Platform ASBL, 2008.

LANES, R. M. **Investigação de um método de otimização topológica evolucionária desenvolvido em script**. Dissertação de mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais. Minas Gerais, Brasil. 2013.

LEONHARDT, F.; MÖNNIG, E. **Construções de concreto – volume 2: casos especiais do dimensionamento de estruturas de concreto armado**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

LEONHARDT, F.; MÖNNIG, E. **Construções de concreto – volume 3: princípios básicos sobre a armação de estruturas de concreto armado**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

LIANG, Q. Q. **Performance-based Optimization of Structures: Theory and applications**. Spon Press, 2005.

LIANG, Q. Q.; XIE, Y. M.; STEVEN, G. P Topology optimization of strut-and-tie models in reinforced concrete structures using an evolutionary procedure. **ACI Structural Journal**, v. 97, n. 2, p. 322-330, 2000.

MathWorks Inc. **MATLAB Documentation**. 2015.

MUNHOZ, F. S. **Análise do comportamento de blocos de concreto armado sobre estacas submetidos à ação de força centrada**. Dissertação de mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Paulo, Brasil. 2004.

NIELSEN, M. P.; HOANG, L. C. **Limit analysis and concrete plasticity**. CRC Press, 2011.

OLIVEIRA, E. M. **Consolos de concreto moldados em duas etapas: influência do tratamento da interface e da adição de fibras de aço**. Dissertação de mestrado. Programa de pós-graduação em geotecnia, estruturas e construção civil; Universidade Federal de Goiás. Goiás, Brasil. 2012.

PANTOJA, J. C. **Geração automática via otimização topológica e avaliação de segurança de modelos de bielas e tirantes**. Tese de doutorado. Programa de pós-graduação em engenharia civil. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, Brasil. 2012.

PCI – PRECAST/PRESTRESSED CONCRETE INSTITUTE. **PCI Design Handbook: Precast and prestressed concrete**. 7 ed. Chicago, 2010.

QUEIRÓS, L. O. A. **Análise estrutural de galpões pré-moldados em concreto considerando a influência da rigidez nas ligações viga-pilar**. Dissertação de mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas. Alagoas, Brasil. 2007.

QUERIN, O. M.; VICTORIA, M.; ALONSO, C.; ANSOLA, R.; MARTÍ, P. **Topology design methods for structural optimization**. Elsevier, 2017.

QUERIN, O. M. *Evolutionary structural optimization stress based formulation and implementation*. Tese de doutorado. University of Sydney. Sidney, Australia. 1997.

RODRÍGUEZ, S. M. **Otimização topológica multiobjectivo de estruturas submetidas a carregamentos termo-mecânicos**. Dissertação de mestrado. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas. São Paulo, Brasil. 2015.

ROZVANY, G. I. N. A critical review of established methods of structural topology optimization. **Structural and multidisciplinary optimization**, v. 37, n. 3, p. 217-237, 2009.

SANTOS, V. M. P.; ALMEIDA, S. R. M.; PANTOJA, J. C. Um estudo sobre geração de modelos de bielas e tirantes usando técnicas de otimização de topologia. In: XXIV IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 2013, Pirenópolis. **Proceedings...** Pirenópolis, GO, 2013.

SATO, H. T. **Dimensionamento de regiões D através do método dos elementos finitos e do método de bielas e tirantes aliado à otimização topológica**. Dissertação de mestrado. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Universidade de São Paulo. São Paulo, Brasil. 2015.

SCHLAICH, J.; SCHÄFER, K.; JENNEWEIN, M. Toward a consistent design of structural concrete. **PCI Journal**, Chicago, v. 32, n. 3, p. 74-150, 1987.

SCHLAICH, J.; SCHÄFER, K. Design and detailing of structural concrete using strut-and-tie models. **The Structural Engineer**, v. 69, n. 6, p. 113-125, 1991.

SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in MatLab. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. v. 21, n. 2, p. 120-127, 2001.

SILVA, R. C. **Concreto armado: aplicações de modelos de bielas e tirantes**. Dissertação de mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Paulo, Brasil. 1991.

SILVA, R. C.; GIONGO, J. S. **Modelos de bielas e tirantes aplicados a estruturas de concreto armado**. São Carlos: EESC-USP, 2000.

SIMULIA. **Abaqus User's Manual volume 2**. 2014.

SOUZA, R. A. **Concreto estrutural: análise e dimensionamento de elementos com descontinuidades**. Doutorado em Engenharia Civil. Escola Politécnica – Universidade de São Paulo. 2004.

STOLPE, M.; SVANBERG, K. An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 22, p. 116–124, 2001.

TJHIN, T. N. **Analysis and design tools for structural concrete using strut-and-tie models**. Tese de doutorado. University of Illinois at Urbana-Champaign, Estados Unidos, 2004.

TORRES, F. M. **Análise teórico-experimental de consolos de concreto armado**. Dissertação de mestrado. Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Paulo, Brasil. 1998.

WILLIAMS, C.; DESCHENES, D.; BAYRAK, O. **Strut-and-tie model design examples for bridges: final report**. Texas Department of Transportation, 2012.

WILSON, H. R.; YOUSEFPOUR, H.; BROWN, M. D.; BAYRAK, O. Investigation of corbels designed according to strut-and-tie and empirical methods. **ACI Structural Journal**. v. 115, n. 3, p. 813-824, 2018.

ZEGARD, T.; PAULINO, G. H. Truss layout optimization within a continuum. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. v. 48, n. 1, p. 1-16, 2013.