



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS - UFAL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM ASSOCIAÇÃO COM A UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA



JOSÉ ANDERSON DE LIMA E SILVA

*Larguras Min-max baixas do Espaço
Projetivo Real \mathbb{RP}^3*

Maceió-AL

2019

JOSÉ ANDERSON DE LIMA E SILVA

*Larguras Min-max baixas do Espaço
Projetivo Real \mathbb{RP}^3*

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em Associação com a Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Márcio Henrique Batista da Silva.

Maceió-AL

Abril de 2019

Catlogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário: Marcelino de Carvalho

S5861 Silva, José Anderson de Lima e.
Larguras min-max baixas do espaço projetivo real RP^3 / José Anderson de Lima e
Silva. – 2019.
46 f.

Orientador: Márcio Henrique Batista da Silva.
Tese (doutorado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas.
Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação de Doutorado em Matemática
Interinstitucional UFBA/UFAL. Maceió, 2019.

Bibliografia: f. 42-43.
Apêndice: f. 44-46.

1. Espaço projetivo real. 2. Sweepouts. 3. Widths. I. Título.

CDU: 514.764.27

JOSÉ ANDERSON DE LIMA E SILVA

Larguras Min-max baixas do Espaço Projetivo Real $\mathbb{R}P^3$

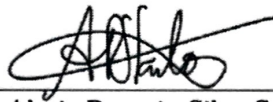
Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em Associação com a Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Trabalho aprovado, Maceió, 04 de abril de 2019.



Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva
(Orientador)

Banca Examinadora:



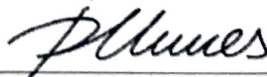
Prof. Dr. Almir Rogerio Silva Santos - UFS
(Examinador Externo)



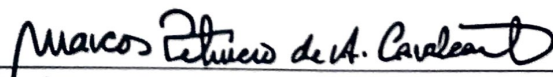
Prof. Dr. Feliciano Marçílio Aguiar Vitório - UFAL



Prof. Dr. Fernando Codá Marques - Princeton University
(Examinador Externo)



Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes - UFMA
(Examinador Externo)



Prof. Dr. Marcos Petrúcio Cavalcante - UFAL

À minha família

Agradecimentos

Ao nosso bom **Deus**, "obrigado por tudo meu senhor", sem ti nada seria possível.

À minha amada mãe, Regina Lima por todo seu amor e cuidado, ao meu pai, José Moreira (*In Memoriam*), aos meus avós, Maria Edith (*In Memoriam*) e Perciliano Lima (*In Memoriam*).

Aos meus irmãos que tanto amo e admiro, Aleide Lima, Alexandre Lima e Adriano Lima, aos meus sobrinhos, Guilherme, Lucas e Matheus, pela alegria que proporcionam, à minha namorada Monica Cibele, por todo afeto, cuidado e motivação oferecidos.

A toda minha família por tudo, em especial a minha amada tia Maria Jose, meu tio Cícero Moreira e minha tia Sanidayse.

Ao meu orientador Márcio Batista, por seus conselhos tão úteis academicamente e na minha vida pessoal, pelo apoio e dedicação em todas as fases do meu Doutorado e desenvolvimento dos resultados dessa tese, e por sua amizade. O profissionalismo que ele possui, foi imprescindível na minha formação.

Ao Prof. Fernando C. Marques, pela pergunta que motivou os resultados dessa tese, seu incentivo, suas valiosas sugestões e pelo exemplo de inspiração profissional que é.

A Todos os Professores do IM-UFAL, em especial aos Professores Feliciano Vitório e Marcos Petrúcio, pelo bom humor, conselhos, incentivos e contribuições para com a Pós-Graduação. Ao Professor Hilário Alencar, pelo bom humor e contribuições para com a Pós-Graduação.

Ao Prof. Harold Rosenberg, por discussões úteis sobre teoria min-max e ao IMPA pela calorosa hospitalidade, ao Prof. Celso Viana, por discussões sobre um de seus artigos, ao Prof. Rafael Montezuma, pela palestra ministrada no IM-UFAL, a qual me motivou a estudar teoria min-max, aos Professores Abraão Mendes e José Ivan Santos, pelo incentivo e amizade.

Agradeço aos membros da banca examinadora pela disponibilidade e atenção que

prestaram ao meu trabalho.

A todos os amigos de turma e sala de estudo, com destaque para os amigos Diego Alves, Eduardo Santana, Iury Oliveira, Manuel Ceaca, Robson Santos e Sidney Donato, Vitor Alves, por todas nossas discussões sobre temas variados. Em especial ao amigo Moreno Bonutti, por sua amizade, incentivo e discussões.

A todos os funcionários da UFAL, em especial aos do IM e CPMAT.

À CAPES agradeço pelo suporte financeiro durante estes quatro anos.

Resumo

As hipersuperfícies mínimas aparecem como pontos críticos do funcional massa, e portanto, podem ser produzidas por técnicas min-max aplicadas a certas famílias de correntes. Um conjunto particular de tais famílias são os p -sweepouts, em que as p -widths são os invariantes min-max associados.

Nesta tese, lidamos com o invariante min-max conhecido como a 1-width. Para essa proposta, usamos a ideia de Marques e Neves para calcular a 1-width do espaço projetivo real $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$, mais especificamente, usando as ideias em [12] podemos calcular a 1-width usando um 1-sweepout abstrato. Além disso, apresentamos um 1-sweepout ótimo e explícito. Em seguida, calculamos a segunda width do espaço projetivo real tridimensional usando um sweepout explícito para obter uma cota superior ótima, e também estimamos a 9-width.

Palavras-chave: Espaço projetivo real, sweepouts, widths.

Abstract

Minimal hypersurfaces appear as critical points of the mass functional, and therefore can be produced by min-max techniques applied to certain families of currents. A particular set of such families are p-sweepouts, where p-widths are the min-max invariant associate.

In this thesis, we deal with the min-max invariant known as 1-width. For this proposal, we have used the Marques' and Neves' idea to compute the 1-width of the real projective space \mathbb{RP}^3 , more specifically, using the ideas in [12] we are able to compute the 1-width using a abstract 1-sweepout. Moreover, we present an explicite sharp 1-sweepout. Next, we compute the second width of the 3-dimensional projective space using an explicite sweepout to get a sharp upper bound, and finally we also estimate the 9-width.

Keywords: Real projective space, sweepouts, widths.

Sumário

Agradecimentos	6
Resumo	8
Abstract	9
INTRODUÇÃO	12
1 PRELIMINARES	14
1.1 Noções de teoria geométrica da medida	14
1.1.1 Medida de Hausdorff	14
1.1.2 Conjuntos Retificáveis	15
1.1.3 Varifolds	15
1.1.4 Correntes	17
1.2 Sequências de mapas discretos	19
1.3 p-sweepouts e p-widths	22
1.3.1 Cenário Contínuo	22
1.3.2 Cenário Discreto	23
1.4 Resultado chave	25
2 WIDTHS DO ESPAÇO PROJETIVO REAL \mathbb{RP}^3	26
2.1 $w_1(\mathbb{RP}^3) \geq \pi^2$	26
2.2 $w_1(\mathbb{RP}^3) \leq \pi^2$	26
2.2.1 Construção explícita de um sweepout ótimo	29
2.3 Construção de um 2-sweepout ótimo do \mathbb{RP}^3	33

2.4 Sweepout Algébrico	36
3 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	39
Bibliografia	42
Apêndice	44

INTRODUÇÃO

Em 1752, Lagrange desenvolveu um método de minimizar e maximizar funcionais. Poincaré aplicou este método para geodésicas em um esferóide, ver §3 de [17], e motivado por seus estudos, ele perguntou em [17] se todas as superfícies de Riemann fechadas admitem uma geodésica fechada. Assumindo que a superfície não é simplesmente conexa e usando o método de Lagrange, Cartan provou a existência de geodésicas fechadas, mas este método falha para uma superfície simplesmente conexa. Por isso, a questão de Poincaré se torna mais interessante em uma 2-esfera e, assim, torna-se necessária uma nova abordagem. O avanço veio com Birkhoff [3], que usou técnicas min-max no espaço de curvas contínuas por partes para produzir uma geodésica fechada para qualquer métrica em uma 2-esfera.

Tais resultados motivaram o trabalho em direção à hipersuperfícies mínimas fechadas em variedades Riemannianas, impulsionando o desenvolvimento da teoria de medida geométrica. O primeiro avanço veio na Tese de Almgren que mostrou uma ligação entre o espaço de hipersuperfícies e o grupo de homologia superior de uma variedade, garantindo a existência de um caminho não trivial de hipersuperfícies. Usando este caminho e o método min-max introduzido por Almgren em [2], Pitts [16] foi capaz de provar a existência de uma hipersuperfície mínima fechada suave mergulhada em uma $(n + 1)$ -variedade Riemanniana compacta com $n \leq 5$. Mais tarde Schoen e Simon estenderam este resultado para qualquer dimensão, provando a existência de uma hipersuperfície mínima fechada mergulhada com um conjunto singular de codimensão de Hausdorff pelo menos 7.

Com o objetivo de fornecer uma resposta a uma conjectura de Yau, que diz respeito à existência de infinitas hipersuperfícies mínimas, Marque e Neves [14] consideraram as famílias de ciclos de parâmetros mais altos, definidas similarmente a Guth [5]. Eles também surpreenderam a comunidade matemática ao apresentarem a solução da conjectura de Willmore, essa conjectura atraiu a atenção de muitos matemáticos e influenciou a produção científica em matemática nos últimos 50 anos. Portanto, é interessante calcular a width associada a essas famílias para algumas variedades específicas. Além disso, acredito que pela natureza do espaço projetivo, Fernando C. Marques perguntou se é possível apresentar uma família explícita de ciclos que forneça o valor exato da 1-width do espaço projetivo real \mathbb{RP}^3 . Assim, inspirados por essas questões, trataremos nesta tese sobre o

cálculo de algumas widths estudadas por Guth [5] e Gromov [18], e nos concentraremos na construção de sweepouts explícitos por ciclos que nos fornecem cotas superiores ótimas para a massa. Nesta linha de pesquisa, Aiex [1], estudou as k -widths da 2-esfera redonda para $k = 1, \dots, 8$ e Nurser [15], calculou as k -widths da 3-esfera redonda para $k = 1, \dots, 7$ e fez estimativas para $k = 9, 13$.

(Definições precisas serão apresentadas no próximo capítulo).

Os resultados obtidos neste trabalho foram inicialmente motivados pela seguinte questão:

Pergunta (Fernando C. Marques). Qual é a 1-width do espaço projetivo real \mathbb{RP}^3 ?

Agora enunciaremos o primeiro resultado obtido nesta tese, o qual, responde a pergunta acima calculando o invariante min-max 1-width do espaço projetivo real \mathbb{RP}^3 .

Teorema 0.0.1 *Para o espaço projetivo real, temos que $w_1(\mathbb{RP}^3) = \pi^2$, e a superfície que realiza esse número é o toro de Clifford mínimo $T^2/\{-x, x\}$ em \mathbb{RP}^3 .*

A prova consiste em usar resultados de Almgren-Pitts [16], Zhou [23], Marques-Neves [13] e Ketover-Marques-Neves [7] para obter uma cota inferior da $w_1(\mathbb{RP}^3)$, e usando as ideias de Marques e Neves em [12] para considerar a existência do 1-sweepout abstrato adequado, obtemos uma cota superior da $w_1(\mathbb{RP}^3)$, e assim concluímos a igualdade. Além disso, conseguimos apresentar um 1-sweepout explícito.

Inspirados no sweepout explícito apresentado para calcular $w_1(\mathbb{RP}^3) = \pi^2$ fomos capazes de construir um 2-sweepout que nos permitiu melhorar o Teorema acima, obtendo o seguinte resultado:

Teorema 0.0.2 *As duas primeiras widths do espaço projetivo real de dimensão 3 são iguais a π^2 , e a superfície que realiza esse número é o toro de Clifford mínimo $T^2/\{-x, x\}$ em \mathbb{RP}^3 .*

Além disso, obtemos uma estimativa para a nona width do espaço projetivo real \mathbb{RP}^3 :

Teorema 0.0.3 *Para o espaço projetivo real de dimensão 3, temos $w_9(\mathbb{RP}^3) \leq 4\pi$.*

Capítulo 1

PRELIMINARES

1.1 Noções de teoria geométrica da medida

A teoria geométrica da medida consiste principalmente na teoria dos varifolds e na teoria das correntes. Apresentamos aqui alguns conceitos e notações que usaremos ao longo desse trabalho. Nossas principais referências são os livros [20, Simon] e [16, Pitts]. Pelo Teorema de Nash dada uma variedade Riemanniana (M^{n+1}, g) sempre podemos supor que M^{n+1} é isometricamente mergulhada em um espaço euclidiano \mathbb{R}^L .

1.1.1 Medida de Hausdorff

Definição 1.1.1 Para $A \subset M^{n+1}$ a medida de Hausdorff m -dimensional de A é:

$$\mathcal{H}^m(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^m(A),$$

onde para cada $\delta > 0$, temos a chamada medida δ de Hausdorff

$$\mathcal{H}_\delta^m(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \omega_m \left(\frac{\text{diam } C_j}{2} \right)^m \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j, \text{diam } C_j \leq \delta \right\},$$

ω_m é o volume da m -bola euclidiana, e $\{C_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura de A formada por conjuntos abertos de M^{n+1} .

1.1.2 Conjuntos Retificáveis

Definição 1.1.2 Um conjunto $N \subset M^{n+1}$ é dito m -retificável se

$$N \subset N_0 \cup \left(\bigcup_j N_j \right),$$

onde $\mathcal{H}^m(N_0) = 0$ e N_j , $j \geq 1$ é uma subvariedade mergulhada C^1 m -dimensional de M^{n+1} .

Observação 1.1.1 (1) Na definição acima é equivalente dizer que N_j é a imagem de alguma função Lipschitz F_j .

(2) Podemos escrever

$$N = \bigcup_j M_j, \text{ com } M_j \subset N_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

(3) Uma propriedade importante dos conjuntos k -retificáveis é que eles têm uma noção de espaço tangente \mathcal{H}^k -q.t.p.

1.1.3 Varifolds

Aqui, faremos uma breve introdução aos varifolds em variedades Riemannianas, que são objetos que generalizam a noção de subvariedades. Uma vantagem de trabalhar com varifolds é o não cancelamento de massa. Dado $k \in \mathbb{N}$ com $k \leq n + 1$, usaremos $G_k(\mathbb{R}^L)$ para denotar a Grassmanniana dos k -planos não orientados de \mathbb{R}^L , a qual podemos identificar com $\mathbb{R}^L \times G(L, k)$, onde $G(L, k)$ é a coleção dos k -subespaços de \mathbb{R}^L .

Definição 1.1.3 Um varifold de dimensão k em \mathbb{R}^L é uma medida de Radon em $G_k(\mathbb{R}^L)$. Denotamos por $\mathcal{V}(\mathbb{R}^L)$ o conjunto de todos os k -varifolds em \mathbb{R}^L .

Pelo Teorema da Representação de Riesz [20, Teorema 4.14] podemos pensar no varifold como um funcional linear não negativo definido em $C_c(G_k(\mathbb{R}^L))$, onde $C_c(G_k(\mathbb{R}^L))$ denota o conjunto das funções contínuas de suporte compacto em $G_k(\mathbb{R}^L)$ tomando valores reais.

Exemplo 1.1.1 Dado um conjunto k -retificável $R \subset \mathbb{R}^L$, e uma função $h : R \rightarrow \mathbb{R}^+$, definimos um varifold por:

$$V(\varphi) = \int_R h(x) \phi(x, T_x R) d\mathcal{H}^k(x) \quad \forall \varphi \in C_c(G(\mathbb{R}^L))$$

chamado varifold retificável. A função h pode ser pensada como a multiplicidade dos pontos do varifold. Se h assume valores inteiros, isto é, $h : R \rightarrow \mathbb{Z}^+$ dizemos que V é um varifold inteiro.

Observação 1.1.2 *Pelo exemplo acima qualquer subvariedade de dimensão k em M pode ser considerada como um k -varifold.*

Dotamos $\mathcal{V}_k(\mathbb{R}^L)$ com a topologia fraca, então dizemos que uma seqüência de varifolds V^i converge para o varifold V , se para cada função $\varphi \in C_c(G(\mathbb{R}^L))$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int \varphi(x, \pi) dV^i(x, \pi) = \int \varphi(x, \pi) dV(x, \pi).$$

Aqui π denota um k -plano de $T_x \mathbb{R}^L$.

Dado um varifold qualquer V associado a ele podemos definir uma medida de Radon $\|V\|$ em \mathbb{R}^L por

$$\|V\|(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^L} \varphi(x) d\|V\|(x) = \int_{\mathbb{R}^L \times G(L, k)} \varphi(x) dV(x, \pi).$$

O *suporte* de um varifold V é igual ao *suporte* de $\|V\|$ que é o menor conjunto fechado fora do qual $\|V\|$ é zero.

Definição 1.1.4 (**F**-*métrica Pitts*) *Definimos*

$$\mathbf{F} : \mathcal{V}_k(\mathbb{R}^L) \times \mathcal{V}_k(\mathbb{R}^L) \rightarrow [0, \infty],$$

$$\mathbf{F}(V, W) = \sup\{V(\varphi) - W(\varphi) : \varphi \in C_c(G_k(\mathbb{R}^L)), |\varphi| \leq 1, \text{Lip}(\varphi) \leq 1\},$$

para todo par V, W de varifolds de dimensão k em \mathbb{R}^L .

Denotamos por $\mathcal{V}_k(M)$ o fecho, na topologia fraca, do espaço dos varifolds retificáveis de dimensão k em \mathbb{R}^L com suporte contido na variedade M .

Dadas uma aplicação $\psi : M \rightarrow M$ de classe C^1 e um varifold $V \in \mathcal{V}_k(M)$ podemos definir a imagem (o push-forward) de V por ψ , denotada por $\psi_{\#}(V)$, e assim podemos definir a "primeira variação" de um varifold.

Para um varifold V decorrente de uma subvariedade Σ , temos que $\psi_{\#}(V)$ é simplesmente o varifold decorrente de $\psi(\Sigma)$. Mais geralmente temos que:

Definição 1.1.5 *Definimos $\psi_{\#}(V)$ por*

$$\psi_{\#}(V)(\phi) = \int_{G(M)} \phi(y, \sigma) d(\psi_{\#}(V))(y, \sigma) = \int_{G(M)} J\psi(x, \pi) \phi(\psi(x), d\psi_x(\pi)) dV(x, \pi),$$

onde $J\psi(x, \pi)$ é o Jacobiano de $d\psi_x$ quando restrita ao k -plano π , para cada elemento $(x, \pi) \in G(M)$ da Grassmanniana dos k -planos não-orientados em M .

Dado um campo de vetores em M considere a variação ψ_t tal que $\psi_0(x) = x$ e $\frac{d}{dt}\psi_t(x) = X(\psi_t(x))$. Dada um varifold V temos a seguinte função real

$$t \longmapsto \|(\psi_t)_\#(V)\|(M).$$

Assim podemos definir:

Definição 1.1.6 (*Primeira variação do varifold V*)

$$\delta V(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \|(\psi_t)_\#(V)\|(M).$$

Definição 1.1.7 Dizemos que um varifold V é estacionário em M se $\delta V(X) = 0$ para todo campo X em M .

Observação 1.1.3 Varifolds decorrentes de superfícies mínimas são estacionários. Desse modo, varifolds estacionários estendem a ideia de superfícies mínimas.

1.1.4 Correntes

Seja $\Omega_c^k(\mathbb{R}^L) = \{k\text{-formas diferenciais de suporte compacto em } \mathbb{R}^L\}$, o qual é dotado com a topologia usual, caracterizada pelo fato de que

$$\omega^k = \sum_{\alpha} a_{\alpha}^{(k)} dx^{\alpha} \rightarrow \omega = \sum_{\alpha} a_{\alpha} dx^{\alpha}$$

se existe um compacto $K \subset \mathbb{R}^L$ tal que $\text{spt}(a_{\alpha}^{(k)}), \text{spt}(a_{\alpha}) \subset K$, e $\lim_{k \rightarrow \infty} D^{\beta} a_{\alpha}^{(k)} = D^{\beta} a_{\alpha}$, para todo α e todo multi-índices β .

Definição 1.1.8 Uma k -corrente T é um funcional linear contínuo no espaço $\Omega_c^k(\mathbb{R}^L)$. Denotamos por $\Omega_k(\mathbb{R}^L)$ o conjunto formado por todas as k -correntes.

Exemplo 1.1.2 Seja $\Sigma^k \subset \mathbb{R}^L$ uma subvariedade orientada, com dimensão k , então podemos considerar o funcional linear dado por

$$[\Sigma](\omega) = \int_{\Sigma} \omega, \text{ para toda } \omega \in \Omega_c^k(\mathbb{R}^L).$$

Assim $[\Sigma]$ é uma k -corrente.

O *suporte* de uma corrente T , que denotamos por $\text{spt}(T)$, é o menor conjunto fechado $S \subset \mathbb{R}^L$ para o qual $T(\omega) = 0$, para toda $\omega \in \Omega_c^k(\mathbb{R}^L)$ suportada fora de S , isto é, se $(\text{spt}(\omega)) \cap S = \emptyset$, então $T(\omega) = 0$.

Podemos definir o *bordo* ∂T de uma k -corrente $T \in \Omega_k(\mathbb{R}^L)$ como sendo a $(k-1)$ -corrente dada por

$$\partial T(\omega) = T(d\omega), \quad \omega \in \Omega_c^{k-1}(\mathbb{R}^L),$$

onde d denota a derivada exterior usual de formas diferenciais.

A *massa* de uma corrente T , denotada por $\mathbf{M}(T)$, é definida como

$$\mathbf{M}(T) = \sup\{T(\phi) : \phi \in \Omega_c^k(\mathbb{R}^L), |\phi| \leq 1\},$$

onde $|\phi| = \sup \sqrt{\langle \phi(x), \phi(x) \rangle}$, para todo $x \in \mathbb{R}^L$. Note que superfícies que são intuitivamente próximas não precisam estar próximas na norma da massa \mathbf{M} . Considere as duas

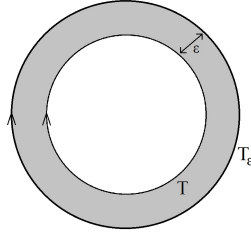


Figura 1.1: Correntes distantes na norma da massa

circunferências T e T_ϵ de raios r e $r+\epsilon$ respectivamente, e com mesma orientação como na Figura 1.1. Se ϵ convirja para 0, esperamos intuitivamente que T_ϵ converja para T . Porém note que para qualquer $\epsilon > 0$, temos que $\mathbf{M}(T_\epsilon - T) = \mathbf{M}(T_\epsilon) + \mathbf{M}(T) = 2\pi(r+\epsilon) + 2\pi r$. Assim não temos convergência na norma da massa.

Definição 1.1.9 Uma k -corrente T é chamada *retificável* se pode ser expressa por

$$T(\omega) = \int_R \langle \omega(x), \xi \rangle d\mathcal{H}^k, \quad \omega \in \Omega_c^k(\mathbb{R}^L),$$

onde $R \subset \mathbb{R}^L$ é compacto, \mathcal{H}^k -mensurável e k -retificável, e ξ é $\mathcal{H}^k \llcorner R$ -mensurável no espaço dos k -vetores, e para \mathcal{H}^k -q.t.p $x \in \Sigma$, temos $\xi(x) = \tau_1 \wedge \dots \wedge \tau_k$ é simples, $|\xi(x)|$ é um inteiro e $\{\tau_1, \dots, \tau_k\}$ é uma base ortonormal do espaço tangente (aproximado) $T_x R$. Denotamos o conjunto das k -correntes retificáveis por \mathbf{R}_k .

Dada uma corrente retificável T , sempre podemos associar um varifold retificável de multiplicidade inteira, basta esquecer a orientação.

Definição 1.1.10 *Definimos o conjunto das correntes integrais por*

$$\mathbf{I}_k = \{T \in \mathbf{R}_k : \partial T \in \mathbf{R}_{k-1}\}.$$

Definição 1.1.11 *A métrica flat é definida por*

$$\mathcal{F}(T_1, T_2) = \inf\{\mathbf{M}(P) + \mathbf{M}(Q) : T_1 - T_2 = P + \partial Q, P \in \mathbf{I}_k(M), Q \in \mathbf{I}_{k+1}(M)\}$$

e

$$\mathcal{F}(T) = \inf\{\mathbf{M}(P) + \mathbf{M}(Q) : T = P + \partial Q, P \in \mathbf{I}_k(M), Q \in \mathbf{I}_{k+1}(M)\}$$

Aqui, trabalhamos com os seguintes espaços:

- O espaço $\mathbf{I}_k(M; \mathbb{Z}_2)$ das *correntes flat* módulo 2 de dimensão k em \mathbb{R}^L com suporte contido em M ;
- O espaço $\mathcal{Z}_k(M; \mathbb{Z}_2)$ dos elementos $T \in \mathbf{I}_k(M; \mathbb{Z}_2)$ com $\partial T = 0$;
- $\mathcal{V}_k(M)$ como foi dito anteriormente, é o fecho na topologia fraca, do espaço dos varifolds retificáveis de dimensão k em \mathbb{R}^L com suporte contido na variedade M ;
- O espaço $\mathbf{I}_k(M; \mathbb{Z}_2)$ e $\mathcal{Z}_k(M; \mathbb{Z}_2)$ são dotados com a topologia da norma flat. Além disso, $\mathbf{I}_k(M; \mathbf{M}; \mathbb{Z}_2)$ e $\mathcal{Z}_k(M; \mathbf{M}; \mathbb{Z}_2)$ são os mesmos espaços dotados da topologia da norma da massa.

Para uma k -corrente integral $T \in \mathbf{I}_k(M; \mathbb{Z}_2)$, denotamos por $|T|$ e $\|T\|$ o varifold integral e a medida de Radon em M associados com T , respectivamente. Dado $V \in \mathcal{V}_k(M)$, denotamos por $\|V\|$ a medida de Radon em M associada com V . Dado um conjunto k -retificável Σ de \mathbb{R}^L , denotamos por $[\Sigma]$ o varifold k -dimensional induzido por Σ .

1.2 Sequências de mapas discretos

Aqui, seguimos [14], [15] e [23].

Seja $I^m = [0, 1]^m \subset \mathbb{R}^m$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, $I(1, j)$ é o *complexo celular* em I^1 cujas 1-células são os intervalos $[0, 3^{-j}]$, $[3^{-j}, 2 \cdot 3^{-j}]$, \dots , $[1 - 3^{-j}, 1]$, e as 0-células são os pontos $[0]$, $[3^{-j}]$, $[2 \cdot 3^{-j}]$, \dots , $[1 - 3^{-j}]$, $[1]$.

Usamos $I(m, j)$ para denotar o *complexo celular* em I^m :

$$I(m, j) = I(1, j) \otimes \dots \otimes I(1, j) \quad (m\text{-vezes}).$$

Para $q \in \mathbb{N}$, $q < m$, $\alpha = \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_m$ é uma q -célula de $I(m, j)$ se, e somente se, para cada i , α_i é uma célula de $I(1, j)$, e $\sum_{i=1}^m \dim(\alpha_i) = q$. Às vezes é útil identificar $\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_m$ com o seu suporte $\alpha_1 \times \dots \times \alpha_m \subset I^m$. Denotamos por $I(m, j)_q$ o conjunto de todas as q -células em $I(m, j)$.

Para $X \subset I^m$, o *complexo cubo* $X(j)$ é a união de todas as células de $I(m, j)$ cujo suporte está contido em alguma célula de X . Denotamos por $X(j)_q$ o conjunto das q -células em $X(j)$. Dizemos que dois vértices $x, y \in X(j)_0$ são *adjacentes* se pertencem a uma célula comum em $X(j)_1$.

Para $i, j \in \mathbb{N}$ definimos $\mathbf{n}(i, j) : X(i)_0 \rightarrow X(j)_0$ como o elemento $\mathbf{n}(i, j)(x) \in X(j)_0$, tal que

$$\mathbf{d}(x, \mathbf{n}(i, j)(x)) = \inf\{\mathbf{d}(x, y); y \in X(j)_0\},$$

onde a função distância $\mathbf{d} : X(i)_0 \rightarrow X(j)_0$ é definida por

$$\mathbf{d}(x, y) = 3^j \sum_{i=1}^m |x_i - y_j|.$$

Considere uma aplicação $\phi : X(j)_0 \rightarrow \mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$. A *finura* de ϕ é definida por:

$$\mathbf{f}(\phi) = \sup\{\mathbf{M}(\phi(x) - \phi(y)) : x, y \text{ vértices adjacentes em } X(j)_0\}.$$

Noções de homotopia

Definição 1.2.1 *Sejam $\phi_1 : X(k_1)_0 \rightarrow \mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$ e $\phi_2 : X(k_2)_0 \rightarrow \mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$, dizemos que ϕ_1 é X -homotópica a ϕ_2 em $\mathcal{Z}_n(M; \mathbf{M}; \mathbb{Z}_2)$ com finura δ se existem $k \in \mathbb{N}$ e uma aplicação*

$$\psi : I(1, k)_0 \times X(k)_0 \rightarrow \mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2),$$

tal que

(i) $\mathbf{f}(\psi) < \delta$;

(ii) se $x \in X(k)_0$, então

$$\psi([0], x) = \phi_1(\mathbf{n}(k, k_1)(x)) \text{ e } \psi([1], x) = \phi_2(\mathbf{n}(k, k_2)(x)).$$

A teoria min-max de Almgren-Pitts lida com sequência de mapas discretos (é precisamente o análogo de aplicações contínuas) em $\mathcal{Z}_n(M; \mathbf{M}; \mathbb{Z}_2)$ com finuras tendendo para zero.

Definição 1.2.2 Uma sequência de aplicações (X, \mathbf{M}) -homotópica em $\mathcal{Z}_n(M; \mathbf{M}; \mathbb{Z}_2)$ é uma sequência de aplicações $S = \{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$,

$$\phi_i : X(k_i)_0 \rightarrow \mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2),$$

tal que ϕ_i é X -homotópica a ϕ_{i+1} em $\mathcal{Z}_n(M; \mathbf{M}; \mathbb{Z}_2)$ com finura δ_i e

$$(i) \lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i = 0;$$

$$(ii) \sup\{\mathbf{M}(\phi_i) : x \in X(k_i)_0, i \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Definição 1.2.3 Dadas duas sequências de aplicações (X, \mathbf{M}) -homotópicas $S^1 = \{\phi_i^1\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $S^2 = \{\phi_i^2\}_{i \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{Z}_n(M; \mathbf{M}; \mathbb{Z}_2)$, dizemos que S^1 é homotópica a S^2 se existe uma sequência $\{\delta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que

$$(i) \phi_i^1 \text{ é } X\text{-homotópica a } \phi_i^2 \text{ em } \mathcal{Z}_n(M; \mathbf{M}; \mathbb{Z}_2) \text{ com finura } \delta_i;$$

$$(ii) \lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i = 0.$$

Observação 1.2.1 A definição anterior explica o que significa duas sequências (X, \mathbf{M}) -homotópicas distintas de aplicações em $\mathcal{Z}_n(M; \mathbf{M}; \mathbb{Z}_2)$ serem homotópicas. A relação “é homotópica a” é uma relação de equivalência no espaço das sequências (X, \mathbf{M}) -homotópicas em $\mathcal{Z}_n(M; \mathbf{M}; \mathbb{Z}_2)$ (ver Apêndice).

Como “é homotópica a” é uma relação de equivalência, chamamos a classe de equivalência de qualquer sequência de classe (X, \mathbf{M}) -homotópica de aplicações em $\mathcal{Z}_n(M; \mathbf{M}; \mathbb{Z}_2)$, e denotamos o conjunto de todas as classes de equivalência por $[X, \mathcal{Z}_n(M; \mathbf{M}; \mathbb{Z}_2)]^\#$.

Seja S uma sequência de aplicações (X, \mathbf{M}) -homotópica em $\mathcal{Z}_n(M; \mathbf{M}; \mathbb{Z}_2)$, e definimos:

$$\mathbf{L}(S) = \limsup_{i \rightarrow \infty} \max\{\mathbf{M}(\phi_i(x)) : x \in X(k_i)_0\}.$$

Essa nos permite fazer a seguinte definição importante:

Definição 1.2.4 A width de $\Pi \in [X, \mathcal{Z}_n(M; \mathbf{M}; \mathbb{Z}_2)]^\#$ é definida por:

$$\mathbf{L}(\Pi) = \inf_{S \in \Pi} \mathbf{L}(S).$$

1.3 p-sweepouts e p-widths

Aqui, seguimos [14] e [15].

1.3.1 Cenário Contínuo

p-sweepouts and p-widths

Neste seção, relembramos o que significa uma aplicação ser um p -sweepout de \mathbb{RP}^3 e também recordamos uma p -width de \mathbb{RP}^3 , que denotamos por $w_p(\mathbb{RP}^3)$.

Seja X um subcomplexo cúbico de $I^m = [0, 1]^m$, para algum m . Seja $F_{\mathbb{RP}^3}$ o isomorfismo de Almgren para \mathbb{RP}^3 , isto é, a aplicação

$$F_{\mathbb{RP}^3} : \pi_1(\mathcal{Z}_2(\mathbb{RP}^3; \mathbb{Z}_2)) \rightarrow H_3(\mathbb{RP}^3; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2.$$

Uma vez que $H^1(\mathcal{Z}_2(\mathbb{RP}^3; \mathbb{Z}_2); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ denotamos seu gerador por $\bar{\lambda}$ e $\bar{\lambda}^p$ denota o produto cup [6] de $\bar{\lambda}$ com ele mesmo p vezes.

Definição 1.3.1 *Uma aplicação contínua na topologia flat $\Phi : X \rightarrow \mathcal{Z}_2(\mathbb{RP}^3; \mathbb{Z}_2)$ é chamada um p -sweepout se $\lambda = \Phi^*(\bar{\lambda}) \in H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ temos que $\lambda^p = \lambda \smile \dots \smile \lambda$ é não nulo em $H^p(X; \mathbb{Z}_2)$.*

Equivalentemente, Φ é um p -sweepout se existe $\lambda \in H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ tal que:

(i) $\lambda^p = \lambda \smile \dots \smile \lambda$ é não nulo em $H^p(X; \mathbb{Z}_2)$;

(ii) Para todo caminho $\gamma : S^1 \rightarrow X$, temos $\lambda(\gamma) \neq 0$ se, e somente se, $\Phi \circ \gamma : S^1 \rightarrow \mathcal{Z}_2(\mathbb{RP}^3; \mathbb{Z}_2)$ é um sweepout. Isto é,

$$\lambda(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{se } \Phi \circ \gamma \text{ é um sweepout, i.e. } (F_{\mathbb{RP}^3}(\gamma) = \mathbb{RP}^3) \\ 0 & \text{se } \Phi \circ \gamma \text{ não é um sweepout, i.e. } (F_{\mathbb{RP}^3}(\gamma) = 0) \end{cases},$$

onde $F_{\mathbb{RP}^3}$ é o isomorfismo de Almgren para \mathbb{RP}^3 .

Observação 1.3.1 (1) *Se uma aplicação Φ é um p -sweepout, então ela também é um q -sweepout para todo $q < p$.*

(2) *Uma aplicação Φ_1 contínua na topologia flat, que é homotópica a um p -sweepout Φ_2 é também um p -sweepout.*

Definimos

$$\mathcal{P}_p = \{\Phi : X \rightarrow \mathcal{Z}_2(\mathbb{RP}^3; \mathbb{Z}_2) : \Phi \text{ é um } p\text{-sweepout e } \lim_{r \rightarrow 0} \mathbf{m}(\Phi, r) = 0\},$$

onde $\mathbf{m}(\Phi, r) = \sup\{\mathbf{M}(\Phi(x) \llcorner B_r(p)) : x \in \text{dmm}(\Phi), p \in \mathbb{RP}^3\}$ (concentração de massa de Φ em bolas de raio r).

Como em Marques e Neves [14], definimos

Definição 1.3.2 *A p -width de \mathbb{RP}^3 é*

$$w_p(\mathbb{RP}^3) = \inf_{\Phi \in \mathcal{P}_p} \sup\{\mathbf{M}(\Phi(x)) : x \in \text{dmn}(\Phi)\},$$

onde $\text{dmn}(\Phi)$ é o domínio de Φ .

Observação 1.3.2 *Pela Observação 1.3.1, temos $w_p(\mathbb{RP}^3) \leq w_{p+1}(\mathbb{RP}^3)$ para cada $p \in \mathbb{N}$.*

1.3.2 Cenário Discreto

Apresentaremos agora dois importantes resultados que nos permitem ir e voltar entre as configurações contínua e discreta. O primeiro deles tem o propósito de construir uma sequência de aplicações (X, \mathbf{M}) -homotópica a partir de uma aplicação contínua na topologia flat sem concentração de massa:

Teorema 1.3.1 (Do contínuo para o discreto) *Seja $\Phi : X \rightarrow \mathcal{Z}_2(\mathbb{RP}^3; \mathbb{Z}_2)$ uma aplicação contínua na topologia flat sem concentração de massa. Então existe uma sequência de aplicações*

$$\phi_i : X(k_i)_0 \rightarrow \mathcal{Z}_2(\mathbb{RP}^3; \mathbb{Z}_2),$$

com $k_i < k_{i+1}$, e uma sequência de números positivos $\{\delta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ com $\delta_i \rightarrow 0$ tal que

- (i) $S = \{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de aplicações (X, \mathbf{M}) -homotópica em $\mathcal{Z}_2(M; \mathbf{M}; \mathbb{Z}_2)$ com finura $\mathbf{f}(\phi_i) < \delta_i$;
- (ii) $\sup\{\mathcal{F}(\phi(x) - \Phi(x)) : x \in X(k_i)_0\} \leq \delta_i$;
- (iii) $\sup\{\mathbf{M}(\phi_i(x)) : x \in X(k_i)_0\} \leq \sup\{\mathbf{M}(\Phi(x)) : x \in X\} + \delta_i$.

O objetivo do próximo resultado é construir uma aplicação contínua na norma da massa a partir de uma aplicação discreta com finura pequena.

Teorema 1.3.2 (Do discreto para o contínuo) *Existem constantes positivas $C_0 = C_0(\mathbb{R}\mathbb{P}^3, m)$ e $\delta_0 = \delta_0(\mathbb{R}\mathbb{P}^3)$ tal que, se Y é um subcomplexo cúbico de $I(m, k)$ e $\phi : Y_0 \rightarrow \mathcal{Z}_2(M^3; \mathbb{Z}_2)$ tem finura $\mathbf{f}(\phi) < \delta_0$, então existe uma aplicação*

$$\Phi : Y \rightarrow \mathcal{Z}_2(M^3; \mathbf{M}; \mathbb{Z}_2),$$

que é contínua na norma da massa e satisfaz:

- (i) $\Phi(x) = \phi(x)$ para todo $x \in Y_0$;
- (ii) se α é alguma j -célula em Y_j , então Φ restrita a α depende apenas dos valores de ϕ assumidos nos vértices de α ;
- (iii) $\sup\{\mathbf{M}(\Phi(x) - \Phi(y)) : x, y \text{ em uma célula comum de } Y\} \leq C_0 \mathbf{f}(\phi)$.

A aplicação Φ dada pelo Teorema 1.3.2 é conhecida na literatura como *extensão de Almgren* de ϕ .

Observação 1.3.3 *Apontamos algumas consequências:*

- (1) *O resultado anterior nos permite obter uma aplicação contínua na norma de massa a partir de uma aplicação discreta com finura pequena;*
- (2) *Sejam $S^1 = \{\phi_i^1\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $S^2 = \{\phi_i^2\}_{i \in \mathbb{N}}$ em Π , então as extensões de Almgren Φ_i^1, Φ_i^2 de ϕ_i^1, ϕ_i^2 , respectivamente, são homotópicas entre si na topologia flat para i suficientemente grande, ver [14, Proposição 3.11], e assim a extensão de Almgren preserva as classes de homotopia.*

Definição 1.3.3 *Seja $\Pi \in [X, \mathcal{Z}_2(M^3; \mathbf{M}; \mathbb{Z}_2)]^\#$. Π é dita uma classe de p -sweepouts (discreto) se para qualquer $S = \{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \Pi$, a extensão de Almgren $\Phi_i : X \rightarrow \mathcal{Z}_2(M^3; \mathbf{M}; \mathbb{Z}_2)$ de ϕ_i é um p -sweepout para i suficientemente grande.*

Lema 1.3.1 *Seja \mathcal{D}_p o conjunto de todas as classes de p -sweepouts $\Pi \in [X, \mathcal{Z}_2(M^3; \mathbf{M}; \mathbb{Z}_2)]^\#$, onde X é um subcomplexo cúbico qualquer p -admissível. Então*

$$w_p(M^3) = \inf_{\Pi \in \mathcal{D}_p} \mathbf{L}(\Pi).$$

Demonstração Ver [[14], Lema 4.7].

1.4 Resultado chave

Proferimos agora, o célebre resultado devido a [Almgren-Pitts] sobre a existência de superfície mínimas e suas características analíticas e topológicas [Marque-Neves, Zhou, Ketover-Marques-Nenes].

Teorema 1.4.1 ([16], [23], [12], [7]) *Seja $\Pi \in [X, \mathcal{Z}_2(M^3; \mathbf{M}; \mathbb{Z}_2)]^\#$. Então existe uma superfície mínima suave fechada Σ satisfazendo:*

(i) Σ é orientável e mergulhada;

(ii) $L(\Pi) = |\Sigma|$.

Além disso, se a curvatura de Ricci é positiva, então Σ tem apenas uma componente conexa, tem multiplicidade 1 e seu índice de estabilidade é 1.

Capítulo 2

WIDTHS DO ESPAÇO PROJETIVO REAL \mathbb{RP}^3

2.1 $w_1(\mathbb{RP}^3) \geq \pi^2$

Usando o Teorema 1.4.1, se $\Pi \in \left[[0, 1], \mathcal{Z}_2(\mathbb{RP}^3; \mathbf{M}; \mathbb{Z}_2) \right]^\#$, então existe uma superfície Σ , mínima, fechada, orientável e mergulhada tal que

$$|\Sigma| = \mathbf{L}(\Pi),$$

assim, pelo Teorema 3 [19]

$$\mathbf{L}(\Pi) = |\Sigma| = \int_{\Sigma} 1 dA \geq \pi^2.$$

Portanto, temos que $\mathbf{L}(\Pi) \geq \pi^2$ para cada $\Pi \in \mathcal{D}_1$, e assim

$$w_1(\mathbb{RP}^3) = \inf_{\Pi \in \mathcal{D}_1} \mathbf{L}(\Pi) \geq \pi^2.$$

2.2 $w_1(\mathbb{RP}^3) \leq \pi^2$

Primeiro, usando argumentos devido a Marques e Neves [12], (ver também Zhou [23]) que passamos a descrever agora, vamos garantir a existência de um sweepout adequado para nosso propósito.

Seja $\Sigma \subset \mathbb{RP}^3$ o toro de Clifford mínimo mergulhado. Primeiramente, se $A : S^3 \rightarrow S^3$

é dada por $A(x) = -x$, então

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta, \sin \theta, \cos \varphi, \sin \varphi)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos \theta, -\sin \theta, -\cos \varphi, -\sin \varphi),$$

e

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos \theta\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin \theta\right)^2 = \frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos \varphi\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin \varphi\right)^2,$$

onde $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Assim, Σ é induzida em \mathbb{RP}^3 por uma superfície antipodalmente simétrica $\tilde{\Sigma}$ (o toro de Clifford) de gênero ímpar em S^3 , então Σ é orientável (ver Ros [19]).

Portanto, por [[22], Proposição 4.3.5] Σ divide \mathbb{RP}^3 em dois pedaços de mesmo volume, ou seja, $\mathbb{RP}^3 \setminus \Sigma = M_1 \cup M_2$ é a união disjunta de duas componentes conexas M_1 e M_2 de mesmo volume, onde $\Sigma = \partial M_1 = \partial M_2$. Sejam N o normal unitário apontando para dentro de M_1 , λ o primeiro autovalor do operador de Jacobi L e $u \in C^\infty(\Sigma)$ sua autofunção correspondente. λ tem multiplicidade um e assim podemos escolher $u > 0$ em Σ . Visto que $\text{Ric} > 0$, observamos que Σ não pode ser estável. De fato, escolhendo $f = 1$ na desigualdade de estabilidade obtemos que

$$0 = \int_{\Sigma} |\nabla f|^2 d\Sigma \geq \int_{\Sigma} (\text{Ric}(N, N) + |A|^2) f^2 d\Sigma > 0,$$

o que é uma contradição. Portanto Σ é instável, e assim $\lambda < 0$.

Considere a folheação local,

$$\Sigma_t = \{\exp_x(tu(x)N(x)); x \in \Sigma\}, \text{ para } t \in [-\epsilon, \epsilon].$$

Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno temos:

- Uma vez que $u > 0$, Σ_t está contida em M_1 (em M_2) para todo $0 < t < \epsilon$ (para todo $-\epsilon < t < 0$),
- Pela fórmula da primeira variação, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} |\Sigma_t| &= - \int_{\Sigma} \langle uN, \vec{H} \rangle d\mu = - \int_{\Sigma} u \langle N, \vec{H} \rangle d\mu \\ &= - \int_{\Sigma} uH d\mu = 0, \end{aligned}$$

onde $H \equiv 0$ é a curvatura média de Σ , e pela fórmula da segunda variação temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} |\Sigma_t| &= - \int_{\Sigma} uLud\mu = - \int_{\Sigma} u(-\lambda u)d\mu \\ &= \lambda \int_{\Sigma} u^2 d\mu < 0. \end{aligned}$$

Donde, $|\Sigma_t| < |\Sigma|$ para todo $0 < |t| < \epsilon$.

- Uma vez que $u > 0$, e pelo [[4], Teorema 3.2], temos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \langle \vec{H}(\Sigma_t), N \rangle = Lu = -\lambda u > 0,$$

onde $\vec{H}(\Sigma_t)$ denota o vetor curvatura média de Σ_t . Portanto $H(\Sigma_t) > 0$ para $0 < t < \epsilon$ com respeito ao normal N para ϵ suficientemente pequeno.

Seja $N_1 = M_1 \setminus \{\Sigma_t\}_{0 \leq t \leq \epsilon}$ para um $\epsilon > 0$ pequeno, que é a região cujo bordo é Σ_ϵ . Analogamente, temos N_2 tal que $\partial N_2 = \Sigma_{-\epsilon}$ para um ϵ pequeno. Assim veremos que podemos estender a folheação $\{\Sigma_t\}$ para N_1 e N_2 . De fato, por [[22], Afirmação 1] podemos considerar um sweepout $\{\tilde{\Sigma}_t\}_{t \in [-1,1]}$ tal que $\tilde{\Sigma}_t = \Sigma_t$ para t pequeno. Assim $\{\tilde{\Sigma}_t\}_{t \in [\epsilon,1]}$ é um sweepout de $(N_1, \partial N_1)$. Considere a menor família de sweepouts $\tilde{\Lambda}$ homotopicamente fechada que contém $\{\tilde{\Sigma}_t\}_{t \in [\epsilon,1]}$. Se a width verifica $W(N_1, \partial N_1, \tilde{\Lambda}) > |\partial N_1|$, podemos aplicar [[22], Teorema 4.2.7], porque $H(\partial N_1) = H(\Sigma_\epsilon) > 0$, e assim concluímos que existe uma superfície não trivial $\tilde{\Sigma}$ mínima e mergulhada no interior de N_1 , e assim disjunta de Σ , o que contradiz a propriedade de Frankel. Portanto, $W(N_1, \partial N_1, \tilde{\Lambda}) \leq |\partial N_1|$, dessa forma podemos encontrar $\{\tilde{\Sigma}_t\} \in \tilde{\Lambda}$, de modo que $\max_{\epsilon \leq t \leq 1} |\tilde{\Sigma}_t|$ seja muito perto de $|\partial N_1|$. Como $\partial N_1 = \Sigma_\epsilon$, e $|\Sigma_\epsilon| < |\Sigma|$ podemos tomar um sweepout $\{\tilde{\Sigma}'_t\}_{t \in [\epsilon,1]}$ com

$$\max_{\epsilon \leq t \leq 1} |\tilde{\Sigma}'_t| < |\Sigma|.$$

Da mesma forma, podemos obter um sweepout $\{\tilde{\Sigma}''_t\}$ de N_2 com a mesma propriedade. Juntando $\{\tilde{\Sigma}'_t\}$, $\{\tilde{\Sigma}''_t\}$ e $\{\tilde{\Sigma}_t\}_{t \in [-\epsilon, \epsilon]}$ de maneira adequada, ver [22], temos a extensão desejada. Assim, construímos um 1-sweepout Φ tal que

$$\sup\{\mathbf{M}(\Phi(x)) : x \in \text{dmn}(\Phi)\} \leq |\Sigma|$$

e, por [[19], Teorema 3]

$$\sup\{\mathbf{M}(\Phi(x)) : x \in \text{dmn}(\Phi)\} \leq |\Sigma| = \pi^2.$$

Daí segue que

$$w_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^3) \leq \sup\{\mathbf{M}(\Phi(x)) : x \in \text{dmn}(\Phi)\} \leq |\Sigma| = \pi^2,$$

e temos o resultado desejado.

2.2.1 Construção explícita de um sweepout ótimo

Nesta seção apresentaremos um sweepout ótimo explícito para obter uma cota superior da 1-width e para tanto usamos fortemente que o ambiente em que trabalhamos é o espaço projetivo real 3-dimensional.

Seja $\Sigma_t = S^1(t) \times S^1(\sqrt{1-t^2})$, $t \in [0, 1]$, a superfície de Clifford da esfera S^3 . Note que

$$\begin{aligned}\Sigma_t &= S^1(t) \times S^1(\sqrt{1-t^2}) \\ &= \{(t \cos \theta, t \sin \theta, \sqrt{1-t^2} \cos \phi, \sqrt{1-t^2} \sin \phi) : \theta, \phi \in [0, 2\pi)\}.\end{aligned}$$

Assim, dado $t \in [0, 1]$, se $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Sigma_t$, então existem $\theta, \phi \in [0, 2\pi)$ tais que $x_1 = t \cos \theta$, $x_2 = t \sin \theta$, $x_3 = \sqrt{1-t^2} \cos \phi$ e $x_4 = \sqrt{1-t^2} \sin \phi$. E assim, $-x_1 = -t \cos \theta$, $-x_2 = -t \sin \theta$, $-x_3 = -\sqrt{1-t^2} \cos \phi$ e $-x_4 = -\sqrt{1-t^2} \sin \phi$. Note que

$$(-x_1)^2 + (-x_2)^2 = t^2 \quad \text{e} \quad (-x_3)^2 + (-x_4)^2 = (\sqrt{1-t^2})^2,$$

donde $-x \in \Sigma_t$. Portanto, Σ_t é invariante sob a aplicação antípoda.

Uma vez que Σ_t é invariante sob aplicação antípoda, temos que a mesma induz uma superfície mergulhada $\Sigma_t/\{\pm\}$ no espaço projetivo real $\mathbb{RP}^3 = S^3/\{\pm\}$, e além disso

$$\text{área}(\Sigma_t/\{\pm\}) = \frac{1}{2} \text{área}(\Sigma_t). \quad (2.1)$$

Agora vamos calcular a área de $\Sigma_t/\{\pm\}$. A aplicação

$$x_t(\theta, \phi) = (t \cos \theta, t \sin \theta, \sqrt{1-t^2} \cos \phi, \sqrt{1-t^2} \sin \phi) \quad (2.2)$$

onde $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$ é uma parametrização de Σ_t .

De (2.2), temos

$$\frac{\partial x_t}{\partial \theta}(\theta, \phi) = (-t \sin \theta, t \cos \theta, 0, 0)$$

e

$$\frac{\partial x_t}{\partial \phi}(\theta, \phi) = (0, 0, -\sqrt{1-t^2} \sin \phi, \sqrt{1-t^2} \cos \phi),$$

e obtemos que

$$(g_{ij}) = \begin{vmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & 1-t^2 \end{vmatrix},$$

cujos determinante é $t^2(1 - t^2)$. Consequentemente

$$\begin{aligned} \text{área}(\Sigma_t) &= \int_{x_t^{-1}(\Sigma_t)} \sqrt{t^2(1 - t^2)} d\theta d\phi \\ &= t\sqrt{1 - t^2} \int_{x_t^{-1}(\Sigma_t)} 1 d\theta d\phi \\ &= 4\pi^2 t \sqrt{1 - t^2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Considere a função $h : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(t) = \text{área}(\Sigma_t)$. Assim sendo, por (2.3) temos

$$\begin{aligned} h'(t) &= 4\pi^2 \sqrt{1 - t^2} - 4\pi^2 \frac{t^2}{\sqrt{1 - t^2}} \\ &= \frac{4\pi^2(1 - t^2) - 4\pi^2 t^2}{\sqrt{1 - t^2}} \\ &= \frac{4\pi^2 - 8\pi^2 t^2}{\sqrt{1 - t^2}}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

e

$$\begin{aligned} h''(t) &= \left(-16\pi^2 t \sqrt{1 - t^2} + (4\pi^2 - 8\pi^2 t^2) \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \right) \frac{1}{(1 - t^2)} \\ &= \frac{-12\pi^2 t + 8\pi^2 t^3}{(1 - t^2)\sqrt{1 - t^2}} \\ &\leq \frac{-12\pi^2 t + 8\pi^2 t}{(1 - t^2)\sqrt{1 - t^2}}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$t^3 \leq t$ se $t \in [0, 1]$. Por (2.4), concluímos que $\frac{1}{\sqrt{2}}$ é ponto crítico de h , e de (2.5), temos $h''(t) < 0$ para todo $t \in (0, 1]$ que diz que h é côncava para baixo.

Deste modo, como a área de $\Sigma_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ é $2\pi^2$, temos que

$$\text{área}(\Sigma_t) \leq 2\pi^2, \quad (2.6)$$

e por (2.1), temos

$$\text{área}(\Sigma_t / \{\pm\}) \leq \pi^2. \quad (2.7)$$

Seja $\Sigma \subset S^3$ o toro de Clifford. Definimos a *família canônica* $\{\Sigma_t\}_{t \in [0, 1]}$ de Σ por:

$$\Sigma_t = S^1(t) \times S^1(\sqrt{1 - t^2}). \quad (2.8)$$

Afirmção 2.2.1 A família $\{\Sigma_t / \{\pm\}\}_{t \in [0, 1]}$ definida usando (2.8) é um sweepout de $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$.

Seja $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3$, então $x_1^2 + x_2^2 \in [0, 1]$ e

$$x_3^2 + x_4^2 = 1 - (x_1^2 + x_2^2). \quad (2.9)$$

Note que existe $\bar{\theta} \in [0, \pi/2]$ tal que

$$|x_1| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cos \bar{\theta}, \quad |x_2| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sin \bar{\theta},$$

e escolhendo $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cos \theta$ e $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sin \theta$ tenham os mesmos sinais de x_1 e x_2 respectivamente, podemos escrever

$$x_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cos \theta, \quad x_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sin \theta.$$

Também existe $\bar{\phi}$ tal que

$$|x_3| = \sqrt{x_3^2 + x_4^2} \cos \bar{\phi}, \quad |x_4| = \sqrt{x_3^2 + x_4^2} \sin \bar{\phi},$$

e assim, por (2.9), temos

$$|x_3| = \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)} \cos \bar{\phi}, \quad |x_4| = \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)} \sin \bar{\phi},$$

e escolhendo $\phi \in [0, 2\pi)$ tal que $\sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)} \cos \phi$ e $\sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)} \sin \phi$ tenham os mesmos sinais de x_3 e x_4 respectivamente, podemos escrever

$$x_3 = \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)} \cos \phi, \quad x_4 = \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)} \sin \phi.$$

Portanto,

$$x = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cos \theta, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sin \theta, \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)} \cos \phi, \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)} \sin \phi \right),$$

e assim $x \in \Sigma(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$, e isso garante a afirmação.

Considere a função $f : \mathbb{RP}^3 \rightarrow [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ dada por

$$f([x]) = x_1^2 + x_2^2 - (x_3^2 + x_4^2).$$

Esta função é bem definida independentemente do representante que escolhermos x ou $-x$ de $[x]$.

Notamos que o conjunto aberto $\{[x] \in \mathbb{RP}^3; f([x]) < 2t^2 - 1\}$ tem perímetro finito

para todo t , pois sua fronteira é o conjunto $\Sigma_t/\{\pm\}$ o qual é uma superfície suave.

Desta forma temos um elemento bem definido no conjunto das correntes

$$\begin{aligned} f^{-1}(2t^2 - 1) &= \{[x] \in \mathbb{RP}^3 : f([x]) = 2t^2 - 1\} \\ &= \partial\{[x] \in \mathbb{RP}^3 : f([x]) < 2t^2 - 1\} \in \mathcal{Z}_2(\mathbb{RP}^3; \mathbb{Z}_2). \end{aligned}$$

Considere a aplicação $\Phi_1 : [0, 1] \rightarrow \mathcal{Z}_2(\mathbb{RP}^3; \mathbb{Z}_2)$ dada por

$$\Phi_1(t) = \Sigma_t/\{\pm\}. \quad (2.10)$$

Por (2.7), temos

$$\mathbf{M}(\Phi_1(t)) \leq \pi^2.$$

Agora veremos que Φ_1 é um 1-sweepout. Primeiramente, devemos verificar a continuidade na topologia flat. Para verificar isso seja $\{t_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $[0, 1]$ que converge para $t \in [0, 1]$. Afirmamos, que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\Phi_1(t) - \Phi_1(t_j)) = 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Phi_1(t) - \Phi_1(t_j)) \\ \leq \mathbf{M}(\{[x] \in \mathbb{RP}^3 : f([x]) < 2t^2 - 1\} \Delta \{[x] \in \mathbb{RP}^3 : f([x]) < 2t_j^2 - 1\}), \end{aligned}$$

onde $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ denota a diferença simétrica entre os conjuntos X e Y . Uma vez que t_j converge para t , então para qualquer $\alpha > 0$ fixo e j suficientemente grande, temos que

$$\{[x] \in \mathbb{RP}^3 : f([x]) < 2t^2 - 1\} \Delta \{[x] \in \mathbb{RP}^3 : f([x]) < 2t_j^2 - 1\} \subset (\Sigma_t)_\epsilon,$$

onde $(A)_\epsilon$ denota a vizinha tubular de A com raio ϵ . Visto que $\text{Vol}(A)_\epsilon$ tende a zero quanto ϵ vai a zero, concluímos que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathbf{M}(\{[x] \in \mathbb{RP}^3 : f([x]) < 2t^2 - 1\} \Delta \{[x] \in \mathbb{RP}^3 : f([x]) < 2t_j^2 - 1\}) = 0,$$

e segue a continuidade.

Observamos que Φ_1 não possui concentração de massa, pois

$$\lim_{r \rightarrow 0} \mathbf{M}(\Phi_1(t) \llcorner B_r([x])) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\mathcal{H}^2(\Sigma_t/\{\pm\} \cap B_r([x]))}{w_2 r^2} \right) \cdot w_2 r^2 = 0,$$

pois a superfície em questão é suave com densidade limitada independente do ponto.

Por fim, para satisfazer a definição de 1-sweepout, observamos que Φ_1 pode ser definido em \mathbb{RP}^1 . Com efeito, uma vez que

$$\Phi_1(0) = 0 \text{ and } \Phi_1(1) = 0,$$

podemos identificar os extremos do intervalo $[0, 1]$ e assim obtemos uma identificação de $[0, 1]$ com \mathbb{RP}^1 como desejado. O gerador $\lambda \in H^1(\mathbb{RP}^1; \mathbb{Z}_2)$ satisfaz $\lambda \neq 0$ para todo caminho não trivial $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1$, o que é único a menos de reparametrização. Assim, pela Afirmação 2.2.1, temos que

$$F_{\mathbb{RP}^3}([\Phi_1 \circ \gamma]) = F_{\mathbb{RP}^3}([\Phi_1]) = \mathbb{RP}^3,$$

onde $F_{\mathbb{RP}^3}$ denota o isomorfismo de Almgren para \mathbb{RP}^3 e daí concluimos que Φ_1 é 1-sweepout e logo obtemos a estimativa para a 1-width desejada.

2.3 Construção de um 2-sweepout ótimo do \mathbb{RP}^3

Aqui, construímos um 2-sweepout que fornece uma cota superior para a 2-width do espaço projetivo real \mathbb{RP}^3 .

Teorema 2.3.1 *A 2-width do espaço projetivo real \mathbb{RP}^3 é π^2 e a superfície que realiza esse número é o Toro de Clifford mínimo $T^2/\{-x, x\}$ em \mathbb{RP}^3 .*

Primeiro, vamos introduzir algumas notações e resultados. Seja $\Sigma = T^2$ o toro de Clifford em S^3 . Considere $R_\theta^{14} : S^3 \rightarrow S^3$ a rotação ao redor do yz -plano em \mathbb{R}^4 dada por:

$$R_\theta^{14}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Seja A e A^* as componentes conexas de $S^3 \setminus \Sigma = A \cup A^*$.

Defina

$$A_\theta = R_\theta^{14}(A) \quad \text{e} \quad \Sigma_\theta = R_\theta^{14}(\Sigma) = \partial A_\theta.$$

Note que,

$$\Sigma_\theta = R_\theta^{14}(\Sigma) = S_{ue_2}^1(1/\sqrt{2}) \times S_{e_3v}^1(1/\sqrt{2}),$$

também é um 2-toro, onde $u = (\cos \theta, 0, 0, \sin \theta)$, $v = (-\sin \theta, 0, 0, \cos \theta)$ e denotamos por $S_{ab}^1(t)$ a circunferência de raio t e centro na origem do 2-plano gerado por a e b . Associado a esse conjunto, considere a família para (θ, r) que é dada por:

$$\Sigma_{(\theta,r)} = S_{ue_2}^1(\cos r) \times S_{e_3v}^1(|\sin r|) = R_\theta^{14}(\Sigma_r),$$

onde Σ_r foi dada em (2.8) para $t = \cos r$. Uma vez que, para cada r , Σ_r é antipodalmente simétrica e R_θ^{14} é um operador linear, então $\Sigma_{(\theta,r)}$ é antipodalmente simétrica.

Assim, somos levados a considerar 2-família canônica em \mathbb{RP}^3 por

$$\Sigma_{(\theta,r)}/\{\pm\}.$$

Note que, para cada (θ, r) o conjunto $\Sigma_{(\theta,r)}/\{\pm\}$ é retificável e sem bordo, e assim induz um ciclo em $\mathcal{Z}_2(\mathbb{RP}^3; \mathbb{Z}_2)$ por $(\pi \circ R_\theta)_\#[\Sigma_r]$, onde π é o recobrimento de S^3 para \mathbb{RP}^3 . Por simplicidade vamos identificar o ciclo com o seu conjunto associado. Dessa forma, temos a aplicação $\Phi_2 : [0, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathcal{Z}_2(\mathbb{RP}^3; \mathbb{Z}_2)$ definida por:

$$\Phi_2(\theta, r) = \Sigma_{(\theta,r)}/\{\pm\}. \quad (2.11)$$

Além disso, denotamos por $A_{(\theta,r)}$ e $A_{(\theta,r)}^*$ as componentes conexas disjuntas de $S^3 \setminus \Sigma_{(\theta,r)} = A_{(\theta,r)} \cup A_{(\theta,r)}^*$.

Agora, vamos trabalhar para provar que Φ_2 é um 2-sweepout.

Lema 2.3.1 *A função Φ_2 é contínua na topologia flat.*

Demonstração Nesta demonstração seguiremos os argumentos em [13, Proposição 5.3]. Seja $\{(\theta_j, r_j)\}_{t \in \mathbb{N}}$ uma sequência convergindo para (θ, r) em $[0, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$. Vamos verificar que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \text{vol}(A_{(\theta_j, r_j)} \Delta A_{(\theta, r)}) = 0.$$

De fato, se $y \in \Sigma_\theta$, então $y = R_\theta^{14}(x)$ para algum $x \in \Sigma$. Defina

$$x_r = (x_1 \cos r, x_2 \cos r, x_3 |\sin r|, x_4 |\sin r|),$$

onde $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $r \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Seja $F_\theta : \Sigma_\theta \times \mathbb{R} \rightarrow S^3$ a aplicação definida por

$$F_\theta(y, r) = R_\theta^{14}(x_r).$$

Uma vez que R_θ^{14} é uma bijeção e qualquer ponto em S^3 é igual a x_r para algum $x \in \Sigma$ e $r \in \mathbb{R}$, concluímos que F_θ é sobrejetiva. Em particular,

$$\left(A_{(\theta,r)} \setminus (A_{(\theta,s)}) \right) \subset F_\theta(\Sigma_\theta \times [s, r]) \quad \text{para } s \leq r. \quad (2.12)$$

Seja $\delta > 0$ e considere $\eta > 0$ tal que

$$\text{vol}\left(F_\theta(\Sigma_\theta, [r - \eta, r + \eta])\right) \leq \delta.$$

A sequência de superfícies Σ_{θ_j} converge suavemente para Σ_θ , se θ_j tende para θ . Isso, junto com a desigualdade triangular e o fato de que r_j tende para $r \in [-\pi/2, \pi/2]$, podemos escolher j_0 tal que

$$A_{(\theta,r-\eta)} \subset A_{(\theta_j,r_j)} \subset A_{(\theta,r+\eta)} \quad \text{para todo } j \geq j_0.$$

Assim, para $j \geq j_0$, temos

$$A_{(\theta_j,r_j)} \Delta A_{(\theta,r)} = (A_{(\theta_j,r_j)} \setminus A_{(\theta,r)}) \cup (A_{(\theta,r)} \setminus A_{(\theta_j,r_j)}) \subset (A_{(\theta,r+\eta)} \setminus A_{(\theta,r-\eta)}).$$

De (2.12) temos

$$(A_{(\theta,r+\eta)} \setminus A_{(\theta,r-\eta)}) \subset F_\theta(\Sigma_\theta \times [r - \eta, r + \eta])$$

e assim

$$\text{vol}(A_{(\theta_j,r_j)} \Delta A_{(\theta,t)}) \leq \delta \quad \text{para cada } j \geq j_0.$$

Donde,

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\Phi_2(\theta_j, r_j) - \Phi_2(\theta, r)) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{F}((R_{\theta_j}^{14})_\#[\Sigma_{r_j}] - (R_\theta^{14})_\#[\Sigma_r]) \\ &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{M}(A_{(\theta_j,r_j)} \Delta A_{(\theta,r)}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \text{vol}(A_{(\theta_j,r_j)} \Delta A_{(\theta,r)}) = 0, \end{aligned}$$

e o resultado segue.

O próximo resultado trata da concentração de massa.

Lema 2.3.2 *A função Φ_2 não tem concentração de massa.*

Demonstração Uma vez que $\Sigma_{(\theta,r)}/\{\pm\}$ é $(\pi \circ R_\theta^{14})_\#[\Sigma_r]$, a aplicação π não aumenta a massa e R_θ^{14} é uma isometria em S^3 , obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\Sigma_{(\theta,r)} \llcorner B(p, \epsilon)) &\leq \mathbf{M}((R_\theta^{14})_\#[\Sigma_r] \llcorner (B(p, \epsilon) \cup B(-p, \epsilon))) \\ &\leq \mathbf{M}(\Sigma_r \llcorner B((R_\theta^{14})^{-1}p, \epsilon)) + \mathbf{M}(\Sigma_r \llcorner B((R_\theta^{14})^{-1}(-p), \epsilon)). \end{aligned}$$

Sabemos que $\{\Sigma_r\}_{r \in [-\pi/2, \pi/2]}$ não tem concentração de massa e então Φ_2 também não tem concentração de massa, e portanto concluímos a prova do lema.

Para concluir que Φ_2 é um 2-sweepout, resta mostrar que é possível identificar o domínio de Φ_2 com \mathbb{RP}^2 e que o gerador de $H^1(\mathbb{RP}^2, \mathbb{Z}_2)$ detecta caminhos γ em \mathbb{RP}^2 se, e somente se, $\Phi_2 \circ \gamma$ é um sweepout de \mathbb{RP}^3 .

Para identificar os conjuntos, primeiro note que $\Phi_2(\theta, \pi/2)$ e $\Phi_2(\theta, -\pi/2)$ são ciclos nulos em $\mathcal{Z}_2(\mathbb{RP}^3; \mathbb{Z}_2)$ para todo $\theta \in [0, \pi]$, assim podemos imaginar o domínio de Φ_2 como uma aplicação de \overline{B}^2 . Além disso, $\Phi_2(0, r) = \Phi_2(\pi, -r)$ onde $r \in [-\pi/2, \pi/2]$ e isso nos assegura que $\Phi_2(P) = \Phi_2(Q)$ para todo $P, Q \in \partial([0, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2])$ tal que P e Q são antipodalmente simétricos em relação ao ponto $(\frac{\pi}{2}, 0)$, e assim obtemos uma aplicação $\Phi_2 : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathcal{Z}_2(\mathbb{RP}^3; \mathbb{Z}_2)$.

Finalmente, como $\pi_1(\mathbb{RP}^2) \simeq \mathbb{Z}_2$, os caminhos não triviais em \mathbb{RP}^2 são homotópicos, e uma aplicação homotópica a um sweepout também é um sweepout, precisamos apenas verificar para um caminho não trivial em \mathbb{RP}^2 que $\Phi_2 \circ \gamma$ é um sweepout. Para isso, considere a curva $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ que surge de $\theta_0 = 0$, então

$$\Phi_2 \circ \gamma : S^1 \rightarrow \mathcal{Z}_2(\mathbb{RP}^3; \mathbb{Z}_2), \quad r \rightarrow S^1(\cos r) \times S^1(|\sin r|)$$

é um sweepout de \mathbb{RP}^3 .

Demonstração do Teorema 2.3.1. O Teorema 0.0.1 nos dá que $w_1(\mathbb{RP}^3) = \pi^2$ e da Observação 1.3.1 temos que $w_1(\mathbb{RP}^3) \leq w_2(\mathbb{RP}^3)$ e assim usando o 2-sweepout Φ_2 construído acima, obtemos que

$$\pi^2 = w_1(\mathbb{RP}^3) \leq w_2(\mathbb{RP}^3) \leq \max_{x \in \mathbb{RP}^2} \mathbf{M}(\Phi_2(x)) \leq \pi^2.$$

Portanto,

$$w_2(\mathbb{RP}^3) = \pi^2,$$

e concluímos a prova do Teorema 2.3.1.

2.4 Sweepout Algébrico

Nesta seção vamos construir um 9-sweepout para o espaço projetivo real \mathbb{RP}^3 , e por conseguinte obter uma cota superior da $w_9(\mathbb{RP}^3)$. Os cálculos aqui são inspirados no §6 de [5].

Considere o espaço vetorial:

$$\mathcal{F} = \text{span}\{1, x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2, x_1^2 - x_3^2 + x_2^2 - x_4^2, x_1^2 - x_2^2 + x_4^2 - x_3^2, \\ x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4\},$$

que tem dimensão 10 e é formado por esféricos harmônicos de grau par. Uma vez que \mathcal{F} é um espaço vetorial real, podemos projetivizá-lo da seguinte maneira. Defina uma relação de equivalência em \mathcal{F} do seguinte modo:

$$\phi \sim \psi \Leftrightarrow \phi = \lambda\psi, \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Portanto, temos uma bijeção entre \mathcal{F}/\sim e \mathbb{RP}^9 . Por outro lado, como qualquer função ϕ em \mathcal{F} satisfaz $\phi(-x) = \phi(x)$, então induz uma função em \mathbb{RP}^3 e vamos denotar tal função com a mesma letra.

Em seguida, observe que o conjunto de nível $[\phi = 0] = \{x \in S^3 : \phi(x) = 0\}$ é antipodalmente simétrico e invariante pela relação de equivalência em \mathcal{F} , e assim podemos associar para cada $[\phi]$ em \mathcal{F}/\sim o subconjunto $\{\phi = 0\} = [\phi = 0]/\{\pm\}$ em \mathbb{RP}^3 . Além disso, notamos que cada um desses conjuntos é retificável e não tem bordo. Consequentemente, define um ciclo em $\mathcal{Z}_2(\mathbb{RP}^3; \mathbb{Z}_2)$.

Estabelecida essa notação, definimos uma aplicação $\Phi_9 : (\mathcal{F}/\sim) \simeq \mathbb{RP}^9 \rightarrow \mathcal{Z}_2(\mathbb{RP}^3; \mathbb{Z}_2)$ dada por:

$$\Phi_9([\phi]) = \partial[\{x \in \mathbb{RP}^3 : \phi < 0\}],$$

onde escrevemos $[R]$ para denotar a corrente módulo 2 associada ao conjunto retificável R . Note que $\text{spt}(\Phi_9([\phi])) \subset \{x \in \mathbb{RP}^3 : \phi = 0\}$.

Afirmção 2.4.1 *A aplicação Φ_9 satisfaz a condição de ser um 9-sweepout e $\mathbf{M}(\Phi_9) \leq 4\pi$.*

Usando o conceito de cones ao longo de um conjunto Y , notação $C(Y)$, temos $\partial[[\phi < 0]] = C(\partial[\{\phi < 0\}]) \cap S^3$. Assim, $\mathbf{M}(\partial[[\phi < 0]]) = 2\mathbf{M}(\partial[\{\phi < 0\}])$. Utilizando os resultados de Santaló [10],[9],[8] e seguindo as ideias de Nurser[15], obtemos que $\mathbf{M}(\tilde{\Phi}_9(\theta)) \leq 8\pi$, onde $\tilde{\Phi}_9(\theta) := \partial[[x \in S^3 : \phi < 0]]$. Portanto, $\mathbf{M}(\Phi_9(\phi)) \leq 4\pi$.

Observamos agora a continuidade de Φ_9 . Pela identificação $(\mathcal{F}/\sim) \simeq \mathbb{RP}^9$ podemos identificar $[\phi]$ com $\theta \in \mathbb{RP}^9$. Sejam $\theta^i, \theta \in \mathbb{RP}^9$. Como

$$\mathcal{F}(\Phi_9(\theta^i) - \Phi_9(\theta)) \leq \mathcal{F}(\tilde{\Phi}_9(\theta^i) - \tilde{\Phi}_9(\theta)),$$

e por [15], sabemos que $\tilde{\Phi}_9$ é a restrição de um 13-sweepout ao espaço gerado pelos

harmônicos esféricos de grau 2, e logo é contínuo. Assim Φ_9 é um 9-sweepout.

Usando o mesmo argumento anterior, sabemos que $\tilde{\Phi}_9$ não tem concentração de massa. Para $r > 0$ pequeno, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\Phi_9(\theta) \llcorner B_r([p])) &\leq \mathbf{M}(\tilde{\Phi}_9(\theta) \llcorner (\tilde{B}_r(p) \cup \tilde{B}_r(-p))) \\ &\leq \mathbf{M}(\tilde{\Phi}_9(\theta) \llcorner \tilde{B}_r(p)) + \mathbf{M}(\tilde{\Phi}_9(\theta) \llcorner \tilde{B}_r(-p)), \end{aligned}$$

onde $B_r([p])$ e $\tilde{B}_r(p)$ denotam as bolas em $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ e S^3 respectivamente. Logo, Φ_9 não tem concentração de massa, e a afirmação segue.

Portanto, temos que $\Phi_9 \in \mathcal{P}_9$, e conseqüentemente $w_9(\mathbb{R}\mathbb{P}^3) \leq 4\pi$.

Capítulo 3

CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Ao longo deste trabalho provamos o seguinte teorema:

Teorema 3.0.1 *Para as p -widths do espaço projetivo real \mathbb{RP}^3 temos que:*

- $w_1(\mathbb{RP}^3) = w_2(\mathbb{RP}^3) = \pi^2$;
- $w_9 \leq 4\pi$,

e a superfície que realiza o número π^2 é o Toro de Clifford mínimo $T^2/\{-x, x\}$ em \mathbb{RP}^3 .

Acreditamos que é possível obter

$$w_1(\mathbb{RP}^3) = w_2(\mathbb{RP}^3) = w_3(\mathbb{RP}^3) = \pi^2, \quad w_4(\mathbb{RP}^3) > \pi^2$$

e

$$w_9(\mathbb{RP}^3) < 4\pi.$$

Alguns resultados em andamento:

Motivados na construção do 2-sweepout deste trabalho e na aplicação apresentada por Luna [11], apresentamos o seguinte resultado:

Teorema 3.0.2 *Para as p -widths do espaço projetivo real \mathbb{RP}^n , $n = 4, 5, 6, 7$ temos:*

$$(ii) \quad w_1(\mathbb{RP}^4) = w_2(\mathbb{RP}^4) = 8\pi^2/3\sqrt{3};$$

$$(iii) \quad w_1(\mathbb{RP}^5) = w_2(\mathbb{RP}^5) = 2\pi^2;$$

$$(iv) \quad w_1(\mathbb{RP}^6) = w_2(\mathbb{RP}^6) = 24\sqrt{3}\pi^3/25\sqrt{5};$$

$$(v) \quad w_1(\mathbb{RP}^7) = w_2(\mathbb{RP}^7) = \pi^4/4,$$

e as hipersuperfícies que realizam esses números são hipersuperfícies de Clifford mínimas em \mathbb{RP}^n , $n = 4, 5, 6, 7$, respectivamente.

Além disso, considere a 3-esfera em \mathbb{C}^2 , isto é,

$$S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}. \quad (3.1)$$

Fixe p, q inteiros, tais que $1 \leq q < p$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$. Seja \mathbb{Z}_p o grupo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ agindo em S^3 por:

$$m \in \mathbb{Z}_p \mapsto m \cdot (z, w) = (e^{\frac{2\pi i q m}{p}} z, e^{\frac{2\pi i m}{p}} w). \quad (3.2)$$

Ressaltamos que o grupo \mathbb{Z}_p opera livremente e propriamente descontínuo em S^3 .

Definição 3.0.1 *O espaço órbita S^3/\mathbb{Z}_p é uma 3-variedade fechada chamada espaço de Lenticulares, e é denotado por $L(p, q)$.*

Observação 3.0.1 *Fixe os inteiros $p = 3$ e $q = 1, 2$. Do Teorema 1.4.1, se $\Pi \in [[0, 1], \mathcal{Z}_2(L(p, q); \mathbf{M}; \mathbb{Z}_2)]^\#$ existe uma superfície mínima fechada mergulhada orientada Σ de índice 1 tal que*

$$|\Sigma| = \mathbf{L}(\Pi),$$

e assim, pelo Teorema 1.2 [21]

$$\mathbf{L}(\Pi) = |\Sigma| = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Pela definição discreta da 1-width, temos que

$$w_1(L(p, q)) = \inf_{\Pi \in \mathcal{D}_1} \mathbf{L}(\Pi).$$

Portanto,

$$w_1(L(p, q)) \geq \frac{2\pi^2}{3},$$

onde $p = 3$ e $q = 1, 2$.

Motivados pelo cálculo no caso projetivo e na Observação 3.0.1, somos levados a calcular a 1-width dos espaços de Lenticulares. O resultado é o seguinte:

Teorema 3.0.3 *A 1-width dos espaços de Lenticulares é igual a $\frac{2\pi^2}{p}$ e a superfície que realiza esse número é o toro de Clifford mínimo T^2/\mathbb{Z}_p .*

Demonstração Um pequeno resumo da prova é o seguinte: usaremos a notação discreta de 1-sweepout junto com as ferramentas poderosas da teoria Min-max de Almgren-Pitts, para fornecer uma cota inferior para a 1-width, além disso, apresentaremos um 1-sweepout ótimo para obter a cota superior desejada, portanto concluímos o cálculo.

Referências Bibliográficas

- [1] Nicolau Sarquis Aiex, *The width of ellipsoids*, arXiv preprint arXiv:1601.01032 (2016).
- [2] FJ Almgren, *The theory of varifolds. Mimeographed Notes*, Princeton University (1965).
- [3] George D Birkhoff, *Dynamical systems with two degrees of freedom*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **3** (1917), no. 4, 314.
- [4] Huisken Gerhard and Polden Alexander, *Geometric evolution equations for hypersurfaces*, Calculus of variations and geometric evolution problems, Springer, 1999, pp. 45–84.
- [5] Larry Guth, *Minimax problems related to cup powers and Steenrod squares*, Geometric And Functional Analysis **18** (2009), no. 6, 1917–1987.
- [6] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2005.
- [7] Daniel Ketover, Fernando C Marques, and André Neves, *The catenoid estimate and its geometric applications*, arXiv preprint arXiv:1601.04514, to appear in Journal of Differential Geometry.
- [8] Luis A. Santaló, *Integral geometry in general spaces*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians **I**.
- [9] ———, *Cauchy and Kubota's formula for convex bodies in elliptic n -space*, Università e Politecnico, 1980.
- [10] ———, *Integral geometry and geometric probability*, Cambridge university press, 2004.
- [11] Alejandra Ramírez Luna, *Compact minimal hypersurfaces with index one in the complex projective space*, arXiv preprint arXiv:1902.08221 (2019).

- [12] Fernando C. Marques and André Neves, *Rigidity of min-max minimal spheres in three-manifolds*, Duke Math. J. **161** (2012), no. 14, 2725–2752. MR 2993139
- [13] Fernando C Marques and André Neves, *Min-max theory and the Willmore conjecture*, Annals of mathematics (2014), 683–782.
- [14] Marques, Fernando C and Neves, André, *Existence of infinitely many minimal hypersurfaces in positive Ricci curvature*, Inventiones mathematicae **209** (2017), no. 2, 577–616.
- [15] Charles Arthur George Nurser, *Low min-max widths of the round three-sphere*, Ph.D. thesis, Imperial College London, 2016.
- [16] Jon T Pitts, *Regularity of Minimal Surfaces on Riemannian Manifolds.(mn-27)*, Princeton University Press, 2014.
- [17] Henri Poincaré, *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes*, Transactions of the American Mathematical Society **6** (1905), no. 3, 237–274.
- [18] P Rayón and M Gromov, *Isoperimetry of waists and concentration of maps*, Geometric and functional analysis **13** (2003), no. 1, 178–215.
- [19] Antonio Ros, *The Willmore conjecture in the real projective space*, Mathematical Research Letters **6** (1999), no. 5/6, 487–494.
- [20] Leon Simon, *Lectures on geometric measure theory, volume 3 of Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University*, Australian National University Centre for Mathematical Analysis, Canberra **6** (1983).
- [21] Celso Viana, *The isoperimetric problem for Lens spaces*, Mathematische Annalen (2018), 1–23.
- [22] Xin Zhou, *On the Variational Methods for Minimal Submanifolds*, Ph.D. thesis, Stanford University, 2013.
- [23] ———, *Min-max hypersurface in manifold of positive Ricci curvature*, Journal of Differential Geometry **105** (2017), no. 2, 291–343.

Apêndice

Homotopia é uma relação de equivalência

Seja $S^1 = \{\phi_i^1\}_{i \in \mathbb{N}}$, $S^2 = \{\phi_i^2\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $S^3 = \{\phi_i^3\}_{i \in \mathbb{N}}$ seqüências (X, \mathbf{M}) -homotópicas de aplicações em $\mathcal{Z}_n(M; \mathbf{M}; \mathbb{Z}_2)$

- (i) Primeiro vamos ver que $\phi_i^1 : X(k_i^1)_0 \rightarrow \mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$ é X -homotópica a si mesma com finura δ_i tendendo para zero. De fato, note que $\mathbf{n}(k_i^1, k_i^1) = id$, e seja δ_i a finura da X -homotopia entre ϕ_i^1 e ϕ_{i+1}^1 , assim $\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i = 0$. Tomamos $\psi : I(1, k_i^1)_0 \times X(k_i^1)_0 \rightarrow \mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$ definida por

$$\psi([j], x) = \phi_i^1(id(x)),$$

e assim, temos

- $\mathbf{f}(\psi) < \delta_i$;
- $\psi([0], x) = \phi_i^1(Id(x))$ e $\psi([1], x) = \phi_i^1(Id(x))$.
Portanto, S^1 é homotópica a S^1 .

- (ii) Assumimos que S^1 é homotópica a S^2 , e mostraremos que S^2 é homotópica a S^1 . Sabemos que existe $k \in \mathbb{N}$ e uma aplicação

$$\psi : I(1, k)_0 \times X(k)_0 \rightarrow \mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2), ([j], x) \mapsto \psi([j], x),$$

tal que

- $\mathbf{f}(\psi) < \delta_i$;
- se $x \in X(k)_0$.

Então,

$$\psi([0], x) = \phi_i^1(\mathbf{n}(k, k_i^1)(x)) \text{ and } \psi([1], x) = \phi_i^2(\mathbf{n}(k, k_i^2)(x)).$$

Fazendo

$$\bar{\psi} : I(1, k)_0 \times X(k)_0 \rightarrow \mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2), ([j], x) \mapsto \psi([1 - j], x),$$

obtemos

$$\bar{\psi}([0], x) = \psi([1], x) = \phi_i^2(\mathbf{n}(k, k_i^2)(x))$$

e

$$\bar{\psi}([1], x) = \psi([0], x) = \phi_i^1(\mathbf{n}(k, k_i^1)(x)).$$

Também temos $\mathbf{f}(\bar{\psi}) < \delta_i$ (definição de $\bar{\psi}$). Consequentemente ϕ_i^2 é X -homotópica a ϕ_i^1 em $\mathcal{Z}_n(M; \mathbf{M}; \mathbb{Z}_2)$ com finura δ_i . Portanto, S^2 é homotópica a S^1 .

(iii) Para concluir, vamos verificar a transitividade. Suponha que S^1 é homotópica a S^2 e S^2 é homotópica a S^3 , então vamos mostrar que S^1 é homotópica a S^3 . Temos que

- ϕ_i^1 é X -homotópica a ϕ_i^2 em $\mathcal{Z}_n(M; \mathbf{M}; \mathbb{Z}_2)$ com finura δ_i ;
- $\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i = 0$;
- ϕ_i^2 é X -homotópica a ϕ_i^3 em $\mathcal{Z}_n(M; \mathbf{M}; \mathbb{Z}_2)$ com finura $\tilde{\delta}_i$;
- $\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\delta}_i = 0$.

Assim, existem $k \in \mathbb{N}$ e uma aplicação

$$\psi : I(1, k)_0 \times X(k)_0 \rightarrow \mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$$

tal que

- $\mathbf{f}(\psi) < \delta_i$;
 - $\psi([0], x) = \phi_i^1(\mathbf{n}(k, k_i^1))$ e $\psi([1], x) = \phi_i^2(\mathbf{n}(k, k_i^2))$.
- Também existem $\tilde{k} \in \mathbb{N}$ e uma aplicação

$$\tilde{\psi} : I(1, \tilde{k})_0 \times X(\tilde{k})_0 \rightarrow \mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$$

tal que

- $\mathbf{f}(\tilde{\psi}) < \tilde{\delta}_i$;
- $\tilde{\psi}([0], x) = \phi_i^2(\mathbf{n}(k, k_i^2))$ e $\tilde{\psi}([1], x) = \phi_i^3(\mathbf{n}(k, k_i^3))$.

Tomando $\bar{\delta}_i = \max\{\delta_i, \tilde{\delta}_i\}$, então $\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\delta}_i = 0$. Também tomamos $\bar{k} = \tilde{k} + 1$ e considere a aplicação

$$\bar{\psi} : I(1, \bar{k})_0 \times X(\bar{k})_0 \rightarrow \mathcal{Z}_n(M; \mathbb{Z}_2)$$

dada por

$$\bar{\psi}([j], x) = \begin{cases} \psi([3 \cdot j], x) & \text{if } j \in I(1, \bar{k})_0 \cap [0, 1/3], \\ \phi_i^2(x) & \text{if } j \in I(1, \bar{k})_0 \cap [1/3, 2/3], \\ \tilde{\psi}([3j - 2], x) & \text{if } j \in I(1, \bar{k})_0 \cap [2/3, 1]. \end{cases}$$

Note que

- $\bar{\psi}([0], x) = \psi([3 \cdot 0], x) = \psi([0], x) = \phi_i^1(x)$;
- $\bar{\psi}([1/3], x) = \psi([3 \cdot 1/3], x) = \psi([1], x) = \phi_i^2(x)$;
- $\bar{\psi}([2/3], x) = \tilde{\psi}([3 \cdot 2/3 - 2], x) = \tilde{\psi}([0], x) = \phi_i^2(x)$;
- $\bar{\psi}([1], x) = \tilde{\psi}([3 \cdot 1 - 2], x) = \tilde{\psi}([1], x) = \phi_i^3(x)$.

Portanto ϕ_i^1 é X -homotópica a ϕ_i^3 em $\mathcal{Z}_n(M; \mathbf{M}; \mathbb{Z}_2)$ com finura $\bar{\delta}_i$, e como $\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\delta}_i = 0$ segue que S^1 é homotópica a S^3 .

Por (i), (ii) e (iii) “é homotópica a” é uma relação de equivalência.