UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

HUGO SILVA LEÃO

O USO DO GEOGEBRA NA APRENDIZAGEM DE PROPORCIONALIDADE

Maceió
2016

HUGO SILVA LEÃO

O USO DO GEOGEBRA NA APRENDIZAGEM DE PROPORCIONALIDADE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM) da Universidade Federal de Alagoas (UFAL), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Amauri da Silva Barros

Coorientador: Prof. Dr. Carloney Alves de Oliveira

Maceió
2016

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Bibliotecária: Janaina Xisto de Barros Lima

L433u Leão, Hugo Silva.
O uso do geogebra na aprendizagem de proporcinalidade / Hugo Silva Leão – 2016.
114 f. : il.

Orientador: Amauri da Silva Barros.
Coorientador: Carloney Alves de Oliveira.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Educação. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Maceió, 2016.

Bibliografia: f. 90-92.
Anexos: f. 93-95.
Apêndices: f. 96-114.

1. Proporcionalidade. 2. Geogebra (Software). 3. Representação semiótica. 4. Geometria – Ensino auxiliado por computador. I. Título.

CDU: 514:371.315

HUGO SILVA LEÃO

O USO DO *GEOGEBRA* NA APRENDIZAGEM DE PROPORCIONALIDADE

Dissertação apresentada à banca examinadora como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática – Área de Concentração "Ensino de Matemática", pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Centro de Educação da Universidade Federal de Alagoas, aprovada em 15 de dezembro de 2016.

BANCA EXAMINADORA

Amauri Barros

Prof. Dr. Amauri da Silva Barros
Orientador e presidente
(PPGECIM/UFAL)

Carloney Alves de Oliveira

Prof. Dr. Carloney Alves de Oliveira
Coorientador
(PPGECIM/UFAL)

Viviane Oliveira

Prof.ª Dr.ª Viviane de Oliveira Santos
(PROFMAT/IM/UFAL)

Ediel Azevêdo Guerra

Prof. Dr. Ediel Azevêdo Guerra
(PPGECIM/UFAL)

Dedico este trabalho aos meus filhos Gabriel Joaquim e Sophia Maria.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela sua imensa sabedoria e está sempre presente comigo e por ter concedido esta grande bênção que foi a realização deste trabalho;

Aos meus pais José Ferreira Leão (in memoriam) e Genoveva Póvoas da Silva (in memoriam) pelos ensinamentos, dedicação e amor com seus filhos;

A minha esposa Verônica, por me incentivar a fazer as leituras e a escrita da dissertação na biblioteca da Universidade Federal de Alagoas (UFAL) e ao mesmo tempo dar conta dos nossos filhos enquanto estive fora;

Aos meus filhos Gabriel Joaquim e Sophia Maria, fontes de inspiração, ânimo e alegria em nossa família.

Ao meu orientador, professor Dr. Amauri da Silva Barros pela indicação do tema desta dissertação e pelos ensinamentos durante a graduação e pós-graduação;

Ao meu Co-orientador, professor Dr. Carloney Alves de Oliveira por aceitar fazer parte da construção deste trabalho junto com o professor Amauri e pelas valiosas dicas de leituras e correções dessa pesquisa;

Aos professores Ediel Guerra e Viviane Santos pelas ricas orientações demonstradas durante e depois da qualificação;

Aos professores e técnicos do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM);

Aos colegas da turma de 2014 do PPGECIM em especial aos colegas da Matemática, Enaldo, Wellington, Andrew e Diogo pelos momentos de aprendizados;

Enfim, a todos aqueles que acreditaram na realização desse sonho.

“O conteúdo de uma representação depende mais do registro de representação do que o objeto representado”.

Raymond Duval – Filósofo e Psicólogo

“A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original”.

Albert Einstein (1879 – 1955)

RESUMO

Esta pesquisa investiga como o software Geogebra pode contribuir na interpretação e resolução dos problemas de proporcionalidade numa turma de ensino médio do Instituto Federal de Alagoas - IFAL no campus Satuba. Investigou-se quais as estratégias usadas para resolução dos problemas de proporcionalidade sem o recurso do software Geogebra e posteriormente com o auxílio do Geogebra. O objetivo geral da pesquisa foi investigar as contribuições do uso do Geogebra para a aprendizagem de proporcionalidade; os objetivos específicos foram analisar os conhecimentos prévios dos alunos acerca dos conceitos de proporcionalidade; verificar se os alunos fazem uso dos registros de representações semióticas na resolução dos problemas de proporcionalidade; verificar se o software Geogebra facilita na compreensão das várias representações existentes nos problemas de proporcionalidade. Utilizou-se como fundamentação teórica a teoria dos registros de representações semióticas de Duval (2003) e a Aprendizagem Significativa de Ausubel a partir dos estudos de Moreira (2006). Caracterizou-se como estudo de caso numa abordagem qualitativa. Os dados foram coletados por meio de questionários e pelos registros das gravações em vídeos durante as aulas. Os sujeitos foram 14 alunos do curso técnico em Agroindústria do IFAL – Satuba. Como resultado, constatou-se que: os sujeitos apresentaram dificuldades nas estratégias de resolução quanto ao tratamento e mais ainda nas conversões (conceitual para gráfica por exemplo) segundo a teoria de Duval; apresentaram dificuldades na intepretação/resolução/representação dos problemas de proporcionalidade inversa (conceitual e gráfica); no entanto, com o uso do Geogebra os mesmos apresentaram avanços na compreensão dos problemas de proporcionalidade (representação gráfica e tabular). Como produto educacional, criamos um blog cujo link é http://professorhugoleao.blogspot.com.br/ onde encontramos atividades interativas criadas no Geogebra e também a oficina realizada durante a pesquisa. Sugerimos que os professores e alunos acessem o blog e deixem sugestões para futuros trabalhos e até criação de novas atividades.

Palavras-chave: Proporcionalidade; Geogebra; Representação Semiótica.

ABSTRACT

This research investigates how Geogebra software can contribute to the interpretation and resolution of proportionality problems in a high school class of the Federal Institute of Alagoas - IFAL in the Satuba campus. It was investigated the strategies used to solve the problems of proportionality without the use of Geogebra software and later with the help of Geogebra. The general objective of the research was to investigate the contributions of the use of Geogebra to the learning of proportionality; The specific objectives were to analyze the students' previous knowledge about the concepts of proportionality; To verify if the students make use of the registers of semiotic representations in the resolution of the problems of proportionality; To verify if the software Geogebra facilitates in the understanding of the diverse representations existing in the problems of proportionality. The theory of the registers of semiotic representations of Duval (2003) and the Meaningful Learning of Ausubel from the studies of Moreira (2006) were used as theoretical foundation. It was characterized as a case study in a qualitative approach. Data were collected through questionnaires and recordings of video recordings during class. The subjects were 14 students of the technical course in Agroindustry of IFAL - Satuba. As a result, it was verified that: the subjects presented difficulties in the resolution strategies regarding the treatment and even more in the conversions (conceptual for graph for example) according to Duval's theory; Presented problems in the interpretation / resolution / representation of the problems of inverse proportionality (conceptual and graphical); However, with the use of Geogebra, they presented advances in understanding the problems of proportionality (graphical and tabular representation). As an educational product, we created a blog whose link is http://professorhugoleao.blogspot.com.br/ where we found interactive activities created in Geogebra and also the workshop realized during the research. We suggest that teachers and students access the blog and leave suggestions for future work and even creating new activities.

Keywords: Proportionality; Geogebra; Semiotics Representation.

LISTA DE SIGLAS

IFAL – Instituto Federal de Alagoas

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PPGECIM – Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática

TCC – Trabalho de Conclusão de Curso

UFAL – Universidade Federal de Alagoas

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

No ano de 2003 ingressei no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Alagoas (UFAL). No segundo ano de curso comecei a lecionar matemática numa escola particular em Maceió. Essa escola oferecia ensino fundamental do 1º ao 9º ano. Na época fui professor de matemática do 6º ao 9º ano. No ano de 2006, devido as greves frequentes nas universidades públicas do país, ainda faltava concluir algumas disciplinas do curso e o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC). Ainda em 2006, comecei a lecionar como professor-monitor de matemática da rede estadual de ensino do estado de Alagoas. Conclui o curso de licenciatura em matemática da UFAL no ano de 2008 e no ano de 2010 conclui um curso de pós-graduação lato-sensu também em matemática na Faculdade Maurício de Nassau. Entre os anos de 2009 e 2011 fui professor de matemática da rede municipal (concursado) de Jequiá da Praia (2009 a 2010), prefeitura de Messias (2010 a 2011), prefeitura de Capela (2010 a 2011), prefeitura de Rio Largo (2011) e ainda ministrava 9 horas-aulas numa escola particular em Maceió. Cheguei a ministrar 48 horas-aulas por semana nesse período de 2009 a 2011. Foi corrido e cansativo mas valeu muito a experiência. Em outubro de 2011 fui aprovado no concurso do Instituto Federal de Alagoas (IFAL) (um sonho que se tornou realidade).

Desde fevereiro do ano de 2012, quando tomei posse e nos primeiros dias de aula como professor de Matemática do IFAL no Câmpus Penedo, percebi as várias dificuldades dos alunos dos primeiros anos com a disciplina de matemática. Em novembro do mesmo ano, fui removido para o Câmpus Murici e em novembro do ano de 2014 fui novamente removido para o campus Satuba onde lá, para minha inquietude, percebi as mesmas dificuldades outrora percebidas.

A primeira resposta que eu esperava encontrar era a de qual (is) conteúdo (s) esses alunos encontravam mais dificuldades. Como resposta e em uma análise mais atenta, percebi que as dificuldades estavam desde a resolução de cálculos matemáticos “simples” até a resolução de conteúdos que exigiam dos alunos uma base mais sólida para que pudessem chegar aos resultados. Dentre os vários problemas encontrados, um em específico, desafiou-me nesta análise investigativa o estudo da proporcionalidade auxiliado pelo software matemático Geogebra. Diante dessa problemática surge o problema investigativo de nossa pesquisa: **De que forma o software Geogebra pode contribuir para aprendizagem dos problemas de proporcionalidade?** Para isso, dentre as várias teorias investigativas, ancorarei minhas investigações nos estudos teóricos de registros de representação de Duval (2003), na aprendizagem significativa de Ausubel (MOREIRA, 2006) e no uso das tecnologias na educação.

Os alunos ingressantes do IFAL, Câmpus Satuba, são em sua maioria, da capital alagoana Maceió e das cidades circunvizinhas como Rio Largo, Pilar, Capela, Coqueiro Seco entre outras.

A maioria desses alunos advém de escolas públicas onde, muitos, alegam que o motivo dessa falta de base identificada na investigação originava-se em problemas que iam desde a falta de estrutura das escolas ao não preparo dos professores que os ensinaram. Muitas vezes, esses professores não têm licenciatura na área de Matemática, o que consequentemente tem causado um prejuízo nos aspectos que envolvem o processo de ensino/aprendizagem. Infelizmente, esta ainda é uma realidade em muitas cidades do Estado de Alagoas, sobretudo aquelas pertencentes a regiões menos provida economicamente e que não possuem a Educação como processo administrativo prioritário.

As notas dos últimos exames de seleção do nosso Câmpus têm comprovado as baixas notas obtidas pelos alunos na disciplina de Matemática (http://exame3.ifal.edu.br/exames/listarExamesAnteriores acesso em 28/09/2016). Diante desse prognóstico e de seu ingresso no Instituto, cabe a nós professores do Câmpus, trabalharmos de maneira estratégica revisando os conteúdos do ensino fundamental para atenuarmos as dificuldades que, inevitavelmente, eles iriam enfrentar quando do contato com os conteúdos ministrados na primeira série do ensino médio técnico.

As razões que justificam o interesse nessa investigação se dão pelo fato de que os alunos apresentam muitas dificuldades na resolução de problemas de proporcionalidade, no entendimento do raciocínio proporcional (ou seja, ler um problema e verificar se as grandezas se relacionam direta ou inversamente proporcional), na resolução de problemas geométricos que necessitam proporção direta (semelhança de triângulos por exemplo), entre outros. Problemas de Física, como por exemplo, velocidade média, força sobre uma mola (Lei de Hooke), também faz parte do conjunto de dificuldades da maioria dos discentes de nossa escola.

Com isso, para tentar sanar essas ou a maioria dessas dificuldades, essa pesquisa tem como objetivo geral investigar as contribuições do uso do software Geogebra para a aprendizagem de proporcionalidade.

Os objetivos específicos foram assim tratados: a) identificar os conhecimentos prévios dos alunos acerca dos conceitos de proporcionalidade; b) verificar se os alunos fazem uso dos registros de representação semiótica na resolução dos problemas de proporcionalidade; c) averiguar se o software Geogebra facilita na compreensão das várias representações que existem em problemas de proporcionalidade. Essas representações de Duval (2011, p. 9) lembram que

> Para que os alunos possam realmente compreender matemática, ou para que a matemática contribua para a formação intelectual e geral deles, que vá além de uma aprendizagem tecnológica de procedimentos executados à mão ou com máquinas, é preciso desenvolver outro tipo de funcionamento cognitivo que o praticado nas outras disciplinas.

O presente estudo foi desenvolvido no âmbito de um mestrado profissional e um produto deve resultar dele para uma possível utilização tanto de professores quanto de alunos. O produto desse trabalho é um blog (http://professorhugoleao.blogspot.com.br/) que contém atividades interativas feitas no software Geogebra e também uma oficina que pode ser realizada apenas num laboratório de informática.

Este estudo está organizado nas seguintes etapas:

O primeiro capítulo aborda o percurso acadêmico e profissional do autor bem como as inquietações e motivações que nortearam a pesquisa, o interesse em estudar o tema e a problemática em questão, descrevendo os objetivos geral e específicos pretendidos na análise da pesquisa.

No segundo capítulo (O ensino de proporcionalidade e aplicações), mostramos o conceito de proporcionalidade e suas principais aplicações, ou seja, proporcionalidade e escala, proporcionalidade e função linear, proporcionalidade e semelhança de triângulos, proporcionalidade e trigonometria e proporcionalidade em Geometria Espacial.

No terceiro capítulo apresentamos o software Geogebra e suas principais ferramentas, ou seja, a interface, as janelas de visualização e de álgebra, a barra de ferramentas e suas funcionalidades, a planilha do Geogebra, a janela 3D entre outras.

No quarto capítulo, apresentamos os procedimentos metodológicos da pesquisa, ou seja, o tipo de pesquisa, isto é, uma pesquisa de natureza qualitativa na forma de estudo de caso. Apresentamos também os sujeitos envolvidos na pesquisa e como se deu início na escolha desses alunos. A coleta de dados ocorreu no laboratório de informática da escola com aplicação de questionários e uma oficina com o Geogebra.

No quinto capítulo foi realizada as análises dos dados, onde destacamos as estratégias dos alunos na resolução dos problemas dos questionários pré-teste (sem o Geogebra) e pós-teste (com o Geogebra), bem como ressaltamos também a importância dos tratamentos e conversões feitas pelos sujeitos da pesquisa.

No sexto capítulo apresentamos as considerações finais sobre a pesquisa onde se apresenta um resumo do que se evidenciou na investigação e destacamos o link do blog criado pelo autor como produto educacional para acesso de alunos e professores interessados no tema.

Diante do exposto, acreditamos que o conteúdo de proporcionalidade e suas aplicações, apoiados nos registros e representações semióticas, na aprendizagem significativa de Ausubel e suportado nas tecnologias da educação e ainda auxiliado pelo software Geogebra como mediador visual de problemas, nos deu um bom resultado quanto ao ensino e a aprendizagem desses conceitos.

2. O ENSINO DE PROPORCIONALIDADE E APLICAÇÕES

Nesse capítulo apresentaremos algumas definições de proporcionalidade encontradas em livros didáticos e também mostraremos algumas aplicações da proporcionalidade no dia-dia, como por exemplo, na escala, em trigonometria, na semelhança de triângulos, etc.

2.1. Sobre os conceitos de proporcionalidade

Historicamente, a teoria das proporções foi desenvolvida por Euclides em seu sexto livro. Ele demonstrou teoremas sobre razões e proporções que aparecem em figuras planas como o triângulo, paralelogramo e outros polígonos que não são semelhantes (BOYER, 1991).

O conceito de razão e proporção (que geralmente é estudado no 7º ano do ensino fundamental) pode ser aplicado em várias situações. Por exemplo, o consumo de combustível ao percorrer certa distância, quando vemos no jornal dados sobre a criminalidade no estado de Alagoas ou no Brasil e também quando algum jornalista informa a quantidade de carros por hora que passa numa avenida qualquer (OLIVEIRA e FERNANDES, 2008, p.78). Esses exemplos citados mostram que é necessária a compreensão dos conceitos de proporcionalidade, pois o ouvinte ou telespectador que não compreende essas ideias, certamente não entenderá muitas informações que passam nos jornais, sites etc.

Antes de iniciar o conceito de razão, o professor deve apresentar de forma clara a noção de *grandeza*,[1] mostrando aos alunos vários exemplos. Durante a aula, solicitar para o aluno mostrar outros exemplos de grandeza faz com que os próximos conceitos não fiquem tão abstratos ou então sem sentido, mais ainda sem aplicação prática. Após trabalhar com grandezas, o professor poderá definir e exemplificar as razões especiais que na maioria dos livros didáticos são: velocidade média, porcentagem, densidade de um corpo, escala, densidade demográfica etc.

É possível uma relação interdisciplinar ou multidisciplinar (desses conteúdos) do professor de Matemática com professores de outras áreas como Física, Química, Geografia, Desenho, entre outras. Trabalhando esses conteúdos, o professor pode fazer uso de objetos de fácil acesso, como a comparação entre um tijolo e uma barra de isopor sendo que, ambos com

[1] Grandeza é tudo aquilo que pode ser medido ou contado. Exemplo: A massa da Terra é de aproximadamente $5{,}972 \times 10^{24} kg$. Fonte: http://astro.if.ufrgs.br/dados.htm. Acesso em 06/02/2016.

as mesmas dimensões e mesmo volume, porém com densidades e massas diferentes. Outro instrumento seria um globo terrestre ou o software Google Maps ou Google Earth para se trabalhar com os conceitos de escala.

Em Lima (2006 A, p. 93) encontramos a definição de grandezas proporcionais da seguinte forma:

GRANDEZAS PROPORCIONAIS. “Diz-se que duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada pelo mesmo número”.

Lima (ibid.) ainda faz uma crítica quando diz que os professores atuais fazem confusão ao definirem grandezas proporcionais, deixando até de mostrar que uma grandeza depende de várias outras podendo ser diretamente e inversamente proporcionais. Na definição dada por Trajano apud Lima (2006 A), o “número multiplicado” é certamente positivo qualquer, ou seja, um inteiro positivo, um racional positivo ou um irracional positivo. Porém, na prática, a verificação de tal fato é simples se for um número inteiro positivo.

Nos parágrafos seguintes, mostraremos mais conceitos e aplicações de proporcionalidade. Em Lima *at al* (2006) temos a seguinte definição de proporcionalidade:

Sejam x e y dois tipos de grandezas. Diz-se que y é proporcional a x quando:

> 1. As grandezas x e y acham-se de tal modo relacionadas que a cada valor de x corresponde um valor bem determinado de y. Diz-se então que existe uma correspondência $x \mapsto y$ e que y é função de x. Quando escrevermos $x \mapsto y$ estaremos querendo dizer que y é o valor que corresponde a x.
> 2. Quanto maior for x, maior será y. Em símbolos: se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x < x' \Rightarrow y < y'$.
> 3. Se a um valor x_0 corresponde y_0 e c é um número qualquer então o valor de y que corresponde a cx_0 é cy_0. Simbolicamente: se $x_0 \longmapsto y_0$ então $cx_0 \longmapsto cy_0$. (p. 2).

Outra definição para grandezas diretamente proporcionais, encontramos em Iezzi, Hazzan e Degenszajn (2005), isto é, duas grandezas são ditas diretamente proporcionais quando a razão entre elementos correspondentes for constante e diferente de zero, isto é, $\frac{y}{x} = k$, onde k é constante e diferente de zero. Da igualdade $\frac{y}{x} = k$ podemos escrever que $\frac{x}{y} = \frac{1}{k}$.

A definição dada em Iezzi at al (2005) é a mais comum, ou seja, é mais usada entre os professores de Matemática do ensino fundamental e médio. Porém, no ensino médio, a definição dada por Lima não é tão abordada entre os professores de Matemática, pois, muitos conceitos vistos apenas no ensino médio tem como base uma definição mais formal de proporcionalidade.

De acordo com os Programas Curriculares Nacionais - PCN (1997), o conceito de proporcionalidade é uma ferramenta essencial quando se trata de compreensão dos fenômenos que ocorrem no meio ambiente – poluição, desmatamento, limites para o uso de recursos naturais, desperdício, etc.

Segundo Galvão et al (2015, p. 2),

> O conceito de proporcionalidade é relevante por sua aplicabilidade no contexto matemático e em problemas práticos, por todas as ideias que lhe são subjacentes e por dar sustentação para muitos tópicos da Matemática, da Física e de outras áreas. Podemos considerá-lo como um possível fio condutor que passa pelos vários níveis de escolaridade, nos estudos de fração, semelhança, regra de três, porcentagem, grandezas direta e inversamente proporcionais, no Ensino Fundamental (6 a 14 anos de idade), atravessa o Ensino Médio (15 a 17 anos de idade), em problemas que envolvem razão e proporção, semelhança, representação gráfica de funções que relacionam grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais e tem aplicações no Ensino Superior, no estudo de objetos matemáticos como função e derivada, tanto em Matemática como em outros componentes curriculares.

Dessa forma, concluímos que o conceito de proporcionalidade é importante na formação do indivíduo e que o professor ao tratar esse conteúdo deve definir de forma clara e concisa e com exemplos e aplicações do cotidiano.

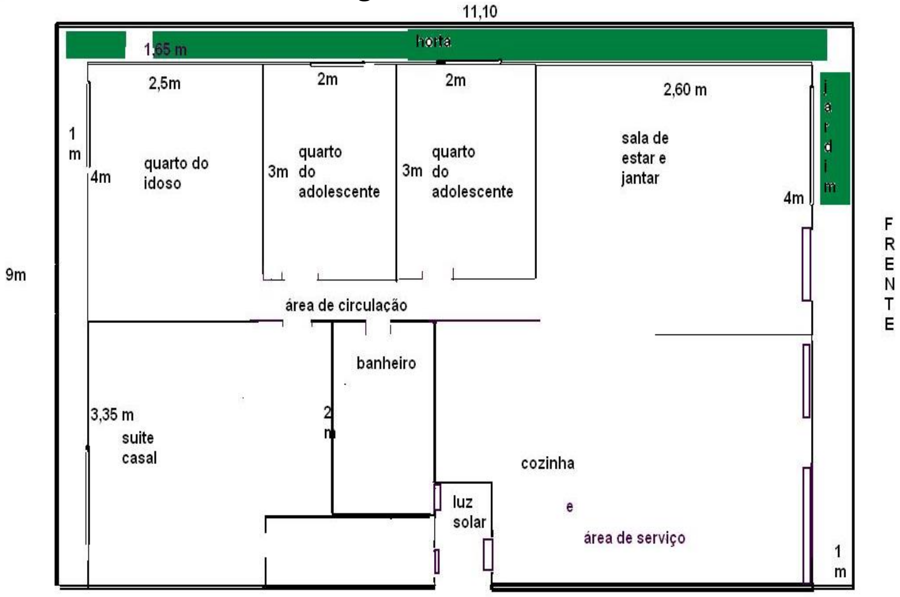
2.2 Proporcionalidade e Escala

A razão entre o comprimento no desenho e o comprimento real é o que chamamos de escala. Um conceito bem conhecido entre engenheiros, arquitetos, técnicos agrimensores, enfim, todos aqueles que precisam representar um objeto real (de dimensões reais) em um desenho com pequenas dimensões.

Para Melo e Bellemain (2006, p. 3) “o conceito de escala pode ser considerado como componente de vários campos conceituais, tanto da Matemática como fora dela”. E, em se tratando da Matemática, a concepção de escala favorece no entendimento da Geometria, ampliação e redução de figuras ou objetos, semelhança, proporcionalidade, representação gráfica, etc. (MELO e BELLEMAIN, 2006).

O conteúdo de escala é abordado como razão especial, e os exemplos e exercícios apresenta-se em alguns casos, na forma de planta baixa como mostra na figura 1 ou na forma de problemas de distâncias em mapas como mostra na figura 2.

Figura 1: Planta Baixa



Fonte: proa14b.pbworks.com
Acesso em: 02 de Outubro de 2015

Figura 2: Mapa de Alagoas

Fonte: http://www.guiageo.com/alagoas.htm
Acesso em: 03 de Outubro de 2015

A maioria dos problemas que envolvem o conceito de escala é quando se pede a distância ou o comprimento real de um objeto, sendo que foi dada a representação figural em um desenho ou mapa. Por exemplo, na figura 2 acima, pode-se ter um problema em que se pede a distância real entre a cidade de Maceió e a cidade de Arapiraca em linha reta, onde a escala é de $1:3.000.000$. Nesse caso, o aluno ao utilizar a régua encontra um valor acima de 3 cm, então, fazendo os cálculos encontramos

$$\frac{1}{3000000} = \frac{3{,}34}{x}, isto\ \text{é}, x = 10.020.000\ cm, ou\ ainda, x = 100{,}2\ km$$

Outra atividade sobre escala seria levar uma turma ou um grupo de alunos num ginásio de esportes ou numa praça ou mesmo no pátio da escola e, com auxílio de trenas[2], pedir para os alunos registrar as dimensões desses locais e através desses registros elaborarem alguns problemas como:

1. Desenhar no caderno a quadra ou a praça ou o pátio da escola na escala de 1:10;

2. Calcular áreas e perímetros dessas figuras dependendo do conteúdo que esteja abordando.

Obviamente que nem sempre é possível representar na folha de um caderno comum ou mesmo numa folha de desenho as dimensões verdadeiras de um objeto. A escolha de uma escala é feita em função de:

a) O tamanho do objeto a desenhar;

b) As dimensões do papel;

c) A clareza do desenho.

Os objetos podem ser representados nas dimensões reais, reduzidos ou ampliados. Quando vamos representar as peças de um relógio ou mesmo figuras microscópicas, recorremos às escalas de ampliação.

Quando vamos representar figuras ou objetos de dimensões grandes, uma cidade, uma casa, uma escola, um monumento, necessitamos empregar uma escala de redução, ou seja, a representação do objeto seja de forma reduzida, em quantas vezes forem necessárias para sua compreensão, levando-se em conta também as dimensões do papel.

Dessa forma, vimos que a articulação entre proporcionalidade e o conceito de escala gera atividades extremamente didáticas e problemas ricos que auxiliam na aprendizagem dos alunos.

[2] Trena é uma fita métrica usada para medir distâncias em geral. É produzida em metal, plástico ou fibra de vidro, sendo retrátil e acondiciona num invólucro. As unidades de medidas das trenas são: centímetros, milímetros, polegadas e pés. Fonte: http://www.ecivilnet.com/dicionario/o-que-e-trena.html. Acesso em: 07/10/2015.

2.3 Proporcionalidade e Função Linear

Há dois tipos de proporção: direta e inversa. As funções lineares apresentam proporcionalidade direta entre os valores de x e y. Outras funções apresentam proporcionalidade inversa e algumas não apresentam proporcionalidade direta nem inversa entre os valores de x e y (GAY, 2014).

Segundo Gay (2014), as grandezas x e y são diretamente proporcionais quando existe k tal que $\frac{y}{x} = k, ou\ ainda\ y = kx$. Por exemplo, suponhamos que ao comprar dois quilos de ração pagamos o valor de R$5,00, nesse caso, temos uma situação de proporcionalidade direta, ou seja, se comprarmos 4kg de ração pagaremos R$10,00, se comprarmos 8kg pagaremos R$20,00, e assim sucessivamente. A tabela abaixo mostra a relação entre as grandezas massa (em kg) e o custo (em R$).

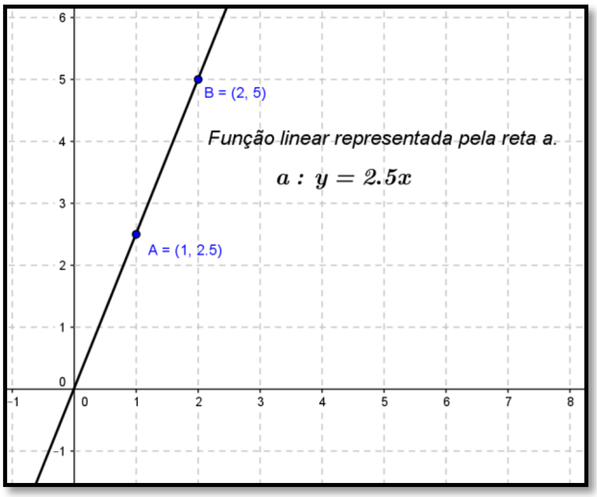
Quadro 1: Kg de ração X Preço por kg

Kg de ração (x)	Preço por kg (y)
1	2,5
2	5
4	10
6	15
8	20

Fonte: Autor (2016).

Cada par de número na tabela acima representa um ponto no plano cartesiano. Ao marcar esses pontos no plano, vemos que eles estão alinhados, ou seja, crescendo (ou decrescendo) de forma linear. A relação entre as grandezas x e y é dada pela lei ou função $y = 2{,}5 \cdot x$ ou $f(x) = 2{,}5 \cdot x$. Isso significa que para cada kg de ração o custo será de R$2,50, ou seja, para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $y = 2{,}5 \cdot x$. Veja abaixo a representação gráfica desse problema.

Figura 3: Gráfico da Função y = 2,5x



Fonte: Autor (2016).

Os valores de y são diretamente proporcionais aos valores de x, pois, dobrando o valor de x o valor de y também dobra, triplicando o valor de x o valor de o também triplica, e assim por diante.

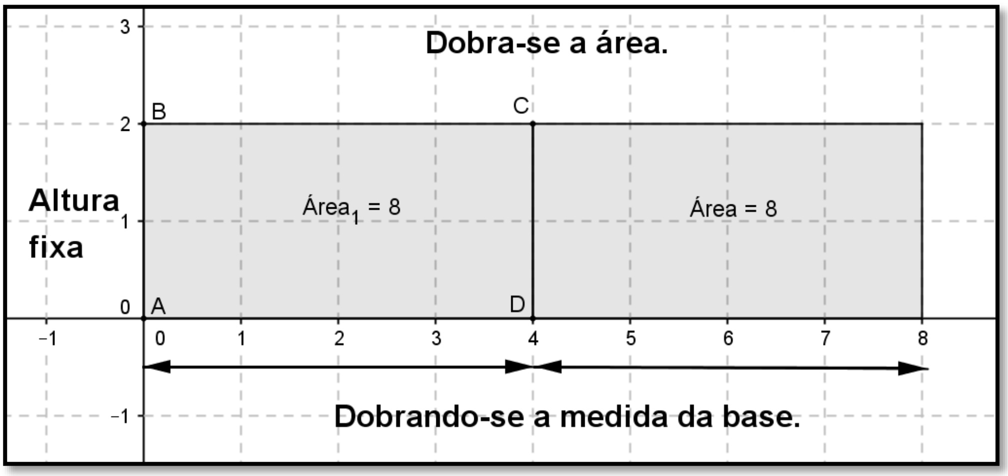
A razão entre os valores correspondentes é sempre a mesma (constante) e igual a 2,5, isto é,

$$\frac{y}{x} = \frac{2{,}5}{1} = \frac{5}{2} = \frac{10}{4} = \frac{15}{6} = \frac{20}{8} = 2{,}5 = k$$

Assim $\frac{y}{x} = 2{,}5\ ou\ y = 2{,}5x.$

Lima at al (2006) diz que a área de um retângulo de altura a e base x é uma função linear de x. Isto quer dizer que, se a altura de um retângulo é fixada, a área desse retângulo é proporcional a base. No livro de Euclides encontramos “dois retângulos de mesma altura estão entre si como suas bases”.

Figura 4: Área do retângulo com altura fixa



Fonte: Autor (2016)

Na figura 4 acima temos uma aplicação de função linear ou função de proporcionalidade direta, ou seja, mantendo fixa a altura de um retângulo qualquer e variando a medida de sua base, a medida de sua área é diretamente proporcional a medida da base. De fato, se dobrarmos ou triplicarmos a medida da base, a medida da área será dobrada ou triplicada respectivamente.

Como podemos notar, os conceitos de proporcionalidade bem trabalhados no ensino fundamental influem diretamente no ensino médio no caso dos conceitos de funções e em particular no conceito de função linear e suas aplicações.

2.4 Proporcionalidade e Semelhança de Triângulos

Segundo Lima (2006, p.37) “a noção de semelhança corresponde à ideia natural de mudança de escala, isto é, ampliação ou redução de uma figura alternando seu tamanho sem modificar suas proporções”.

Dois triângulos são semelhantes se seus ângulos são iguais e os lados homólogos são proporcionais. No entanto, esse conceito trata apenas de figuras formadas por segmentos de reta. Porém, não podemos esquecer que uma bola de bilhar é uma ampliação de uma bola de gude e nesses objetos não existem lados e ângulos como citados na definição anterior de Lima.

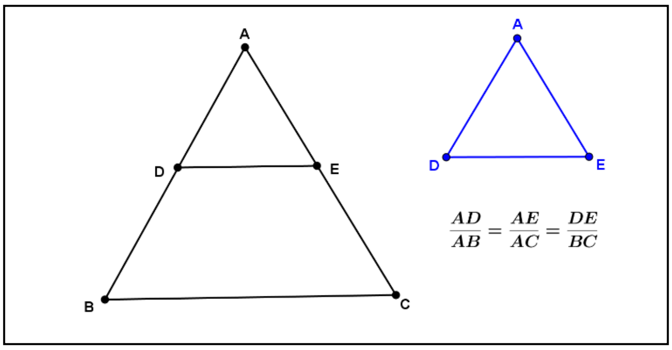
No livro VI de Euclides citado por Lima (2006), figuras semelhantes são aquelas cujos ângulos são iguais e os lados que compreendem ângulos iguais são proporcionais. Já no livro XI, definição é dada no espaço tridimensional e no livro III Euclides dedica-se ao estudo do círculo, onde ele mostra que dois segmentos de círculos são semelhantes quando os ângulos centrais neles inscritos são iguais.

No trabalho de Gazzoni et al (2006) podemos observar o uso do objeto de aprendizagem proporcionalidade e semelhança. A proposta do trabalho foi dispor uma imagem retangular (foto 3 x 4) e que os alunos diante de ferramentas digitais fariam modificações, ou seja, redução ou ampliação dessa imagem e com isso abordar conteúdos relacionados aos conceitos de proporcionalidade e semelhança.

Em Fioreze (2010), utilizaram-se também os objetos de aprendizagem proporcionalidade e semelhança a fim de relacionar situações-problemas como, por exemplo, a Matemática das plantas de casa e mapas.

Não poderíamos deixar de mencionar um dos grandes matemáticos da história, **Tales de Mileto**. Quem começou com a Geometria demonstrativa, segundo a tradição foi o Matemático, filósofo, Engenheiro Tales de Mileto, também considerado um dos “sete sábios” da antiguidade. Não se sabe muito sobre sua vida, porém, atribui-se a ele a demonstração de vários teoremas da Geometria. Desses teoremas, um leva o seu nome e geralmente é estudado nos anos finais do ensino fundamental. Uma aplicação do teorema de Tales é visto em semelhança de triângulos, ou seja, “dado um triângulo ABC e um segmento DE paralelo a BC e cujos extremos estejam em AC e AB, tal segmento determina dois triângulos que são semelhantes, ou seja, $\Delta ADE \sim \Delta ABC$, ver figura abaixo”.

Figura 5: Triângulos semelhantes e o Teorema de Tales



Fonte: Autor (2016)

Credita-se a Tales a demonstração de que os ângulos da base do triângulo isósceles são congruentes e a congruência ente os ângulos opostos pelo vértice gerados pela interseção de duas retas. Também a altura das pirâmides no Egito, país onde ele passou um tempo para estudar Matemática e Astronomia (EVES, 2004).

2.5 Proporcionalidade e Trigonometria

Ainda não se sabe sobre a origem da trigonometria, porém, foi o geógrafo e astrônomo Ptolomeu de Alexandria quem contribuiu mais significativamente para esse ramo da matemática na antiguidade (EVES, 2004).

Na seção anterior vimos as relações de proporcionalidade nos triângulos. No ensino de trigonometria, mais especificamente na parte introdutória, o professor define as razões trigonométricas no triângulo retângulo geralmente da seguinte forma:

- ✓ Seno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo dado pela medida da hipotenusa;
- ✓ Cosseno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo dado e a medida da hipotenusa;
- ✓ Tangente de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente. (IEZZI, 1977)

É provável que os alunos não compreendam bem inicialmente essas ideias mais abstratas dadas em trigonometria.

Nada impede a demonstração de como surge essas razões trigonométricas num triângulo retângulo.

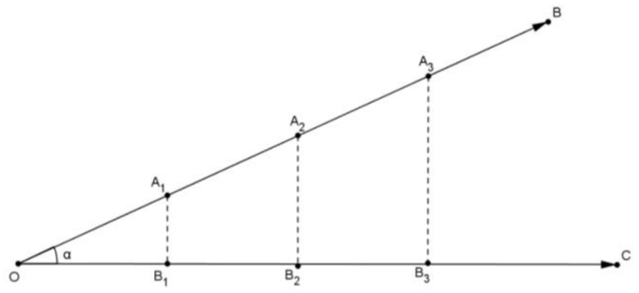
Essas demonstrações são essenciais no que diz respeito a representação analítica e geométrica e posteriormente o aluno não terá tantos obstáculos na compreensão desses conceitos.

Essa demonstração pode ser feita da seguinte maneira:

- ✓ Dado um ângulo agudo $A\hat{O}B$;
- ✓ Na semirreta $\overrightarrow{OA}$ marcamos os pontos A_1, A_2, A_3 etc.
- ✓ Na semirreta $\overrightarrow{OB}$ marcamos as projeções ortogonais de A_1, A_2, A_3 etc.
- ✓ Com isso, formamos vários triângulos retângulos que são semelhantes entre si. (IEZZI, 1977). Donde tiramos as igualdades entre as razões dos lados homólogos desses triângulos.

  Veja figura abaixo:

Figura 6: Triângulos semelhantes e a definição das razões trigonométricas



Fonte: Autor (2016

Os pontos $B_1, B_2\ e\ B_3$ são respectivamente as projeções de A_1, A_2, A_3.

Da semelhança de triângulos temos:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = sen\,\alpha\ ,$$

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OB_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{OB_3}}{\overline{OA_3}} = \cos\alpha\ ,$$

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OB_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OB_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OB_3}} = tg\,\alpha\ ,$$

Onde sen α é o seno do ângulo α, cos α é o cosseno do ângulo α e tg α é a tangente do ângulo α. (IEZZI, 1977)

A construção acima nos mostra que as noções de proporcionalidade direta e o raciocínio proporcional têm relação direta na introdução dos conceitos e bases de trigonometria.

2.6 Proporcionalidade em Geometria Espacial

Em Geometria Espacial, o conceito de proporcionalidade está associado ao cálculo de distâncias, área e volumes. Segundo Brasil (1997),

> As habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas podem ser resolvidos com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca.

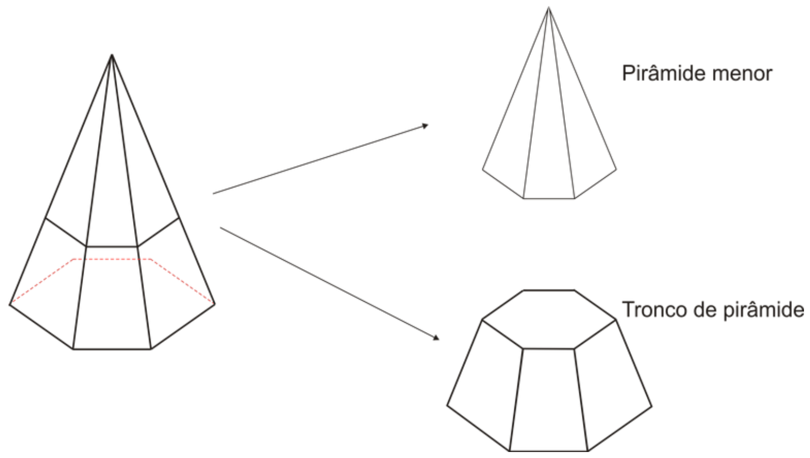
Quando ensinamos ou estudamos Geometria Espacial, muito provavelmente pensamos em cálculo de áreas, volumes etc. Lima (1991) diz que o cálculo de áreas e volumes é um assunto milenar, cuja importância se revelou muito cedo, mesmo em civilizações organizadas de modo simples em relação aos padrões atuais.

Vejamos agora como exemplo de aplicação dos conceitos de proporcionalidade em geometria espacial, as pirâmides semelhantes.

Quando seccionamos uma pirâmide por um plano paralelo à base (vamos sempre admitir que o plano não contém o vértice da pirâmide), ela fica dividida em dois sólidos:

- O que contém o vértice, que é uma nova pirâmide; e
- O que contém a base da pirâmide dada, que é um tronco de pirâmide de bases paralelas.

Figura 7: Secção de uma pirâmide e um tronco de pirâmide.



Fonte: http://www.matematicamais.com/#!piramides/c1fdr
Acesso em: 16/01/16

A pirâmide menor e a pirâmide original são ditas sólidos semelhantes. Além disso podemos tirar as seguintes conclusões:

- Os polígonos das bases têm o mesmo número de lados (veja, nesse exemplo, que ambas são pirâmides hexagonais);
- Os ângulos de duas faces homólogas são dois a dois congruentes;
- Os elementos lineares homólogos (como arestas das bases, arestas laterais, alturas etc) são proporcionais.

A nova pirâmide é uma "cópia reduzida" da pirâmide primitiva. As duas pirâmides são semelhantes.

A razão k entre dois elementos lineares homólogos – aresta/alturas – é chamada ***razão de semelhança*** entre pirâmides. Escolhendo, por exemplo, escrever a razão de semelhança entre a pirâmide nova e a "primitiva", nessa ordem, temos:

$$\boxed{\frac{a_i}{A_i} = \frac{l_i}{L_i} = \frac{h}{H} = k},$$

Onde a_i = medida da aresta da pirâmide menor, A_i = medida da aresta da pirâmide maior, l_i = medida do lado da base da pirâmide menor, L_i = medida do lado da base da pirâmide maior, h = medida da altura da pirâmide menor, H = medida da altura da pirâmide maior, k = constante de proporcionalidade.

Considerando duas pirâmides semelhantes, temos as seguintes propriedades:

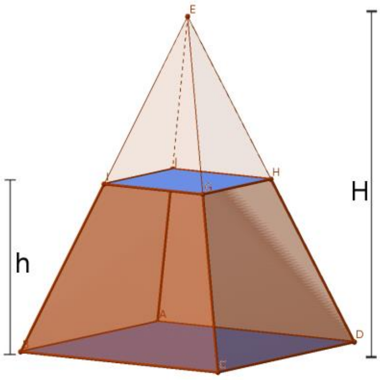
- A razão entre as áreas das bases é igual ao quadrado da razão de semelhança.

$$\boxed{\frac{A_b}{A_B} = k^2},$$

onde A_b é a área da base menor e A_B é a área da base maior.

- A razão entre os volumes é igual ao cubo da razão de semelhança.

Figura 8: Pirâmide seccionada



Fonte: https://aulaemvideo1.wordpress.com/2011/10/18/geometria-espacial-volume-do-tronco-de-piramide-prova/
Acesso em 16/01/2016

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{k^3}}$$

A razão entre os lados/altura da pirâmide menor e os lados/altura da pirâmide maior é uma proporcionalidade direta, pois, dobrando ou triplicando os lados/altura de uma das pirâmides, os lados/altura da outra também dobrará ou triplicará. Já no caso da razão entre áreas e volumes não temos proporcionalidade, pois, se dobrarmos a área ou o volume da pirâmide menor por exemplo, a área ou o volume da pirâmide maior será multiplicado ou dividido por k^2 ou k^3 respectivamente**.**

2.7 Os registros de representações e o ensino de proporcionalidade

Problemas de proporcionalidade possui vários registros de representação semiótica, no entanto, esses registros muitas vezes não são trabalhados por muitos professores no ensino fundamental e, mais ainda no ensino médio que é onde o ensino de funções aparece com grande ênfase.

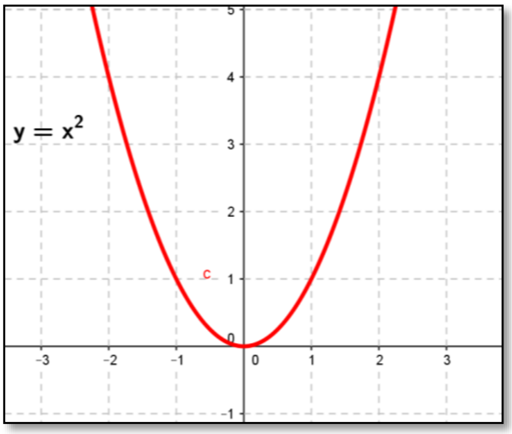
Para Duval (apud MACHADO, 2013), a diferença entre a aprendizagem da Matemática e a aprendizagem de outros domínios caracteriza-se de duas formas:

1. *A importância primordial das representações semióticas* está fundamentada por duas razões, a primeira diz respeito ao tratamento matemático, ou seja, operações de cálculo no sistema de numeração decimal, por exemplo. A segunda diz respeito a representação e designação de objetos matemáticos que não são perceptíveis ou observáveis, como por exemplo, os números.
2. *A grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática* – quer dizer que existem também figuras geométricas, representações algébricas, representações gráficas, linguagem natural, etc.

Existem dois tipos de transformações de representações semióticas que são radicalmente diferentes: os *tratamentos* e as *conversões.*

- Os tratamentos são transformações de representação dentro de um mesmo registro: por exemplo, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ (soma de dois números na forma fracionária).
- As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados:
  por exemplo, a função $f(x) = x^2$ é representada graficamente pela curva no plano cartesiano abaixo.

Figura 9: Representação gráfica da função f(x) = x^2



Fonte: Autor (2016).

O quadro abaixo mostra a diferença entre tratamento e conversão.

Quadro 2: Diferença entre tratamento e conversão.

Transformação
de uma representação semiótica em
uma outra representação semiótica.

Permanecendo no mesmo sistema: **Tratamento**	Mudando de sistema, mas conservando a referência aos mesmos objetos: **Conversão**
Quase sempre, é somente este tipo de transformação que chama atenção porque ele corresponde a procedimentos de justificação. De um ponto de vista “pedagógico”, tenta-se algumas vezes procurar o melhor registro de representação a ser utilizado para que os alunos possam compreender.	Este tipo de transformação enfrente os fenômenos de não congruência. Isso se traduz pelo fato de os alunos não reconhecerem o mesmo objeto através de duas representações diferentes. A capacidade de converter implica a coordenação de registros mobilizados. Os fatores de não congruência mudam conforme os tipos de registro entre os quais a conversão é, ou deve ser, efetuada.

A atividade de conversão é de fundamental importância do ponto de vista cognitivo, no entanto, essa atividade parece ser menos praticada entre os professores. A conversão não pode ser confundida com o tratamento, pois, o tratamento se estabelece “dentro” do registro e a conversão se dá entre registros diferentes. (DAMM, 2010).

A apreensão de um objeto matemático é possível com a utilização de diferentes registros de representação semiótica e além disso, é durante a passagem de um registro de representação a outro que podemos observar a importância da forma das representações.

A teoria de Duval é uma maneira didática/metodológica na qual, busca-se objetivamente a aquisição do conhecimento. Em Matemática, fazer uso dessa teoria didaticamente e metodologicamente, faz com que os alunos reconheçam as possíveis transformações entre os vários objetos matemáticos. No entanto, diversas pesquisas foram realizadas e constatou-se que os alunos conseguem fazer tratamentos em diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático, porém, é incapaz de fazer as conversões necessárias para a apreensão desse objeto. (DAMM, 2010).

Na aprendizagem da matemática é comum a confusão entre o objeto matemático e sua representação, assim sendo, para a compreensão da matemática é muito importante que esta distinção seja estabelecida. Neste sentido, a teoria dos registros de representações semióticas auxilia de maneira decisiva nesta distinção. O tratamento e principalmente as conversões de um registro para outro são importantes elementos da teoria de Duval e que auxiliam na aprendizagem de objetos matemáticos.

Em Pantoja et al (2013), encontramos a teoria dos registros de representações semióticas de Duval. Nesse estudo, os autores argumentam sobre os sistemas de equações algébricas lineares abordando a referida teoria. Nesse estudo, destaca-se as explicações de Duval a respeito da representação de um objeto matemático, ou seja, são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações as quais tem suas dificuldades próprias de significados e funcionamento. Além do objeto matemático, devemos destacar também o sistema semiótico e o seu registro de representação.

Por exemplo, no sistema de duas equações e duas incógnitas abaixo temos:

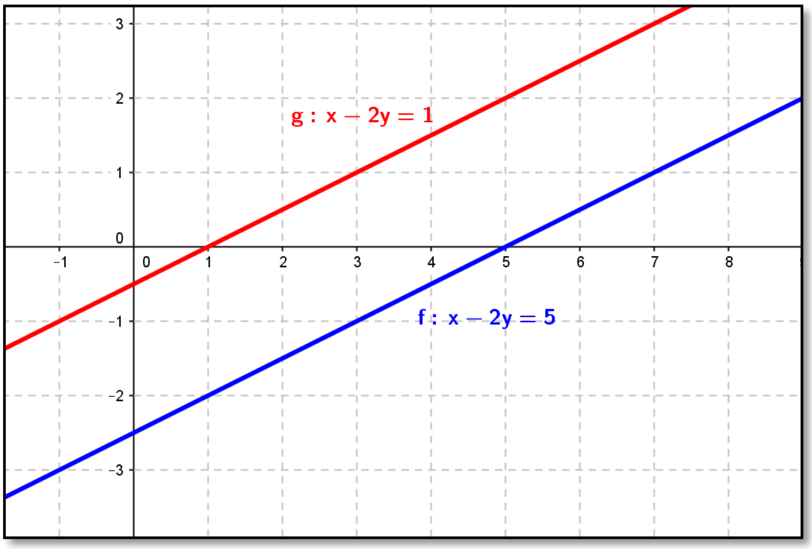
Objeto matemático: sistemas lineares

Sistema semiótico: simbólico

Registro de representação: algébrico

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = 5 \end{cases}. \quad \text{Outra solução seria:}$$

Figura 10 Representação Geométrica de duas equações lineares



Fonte: Autor (2016).

Temos:

Objeto matemático: sistemas lineares

Sistema semiótico: figural

Representação: geométrica

Há ainda outras aplicações da proporcionalidade direta e inversa tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio. As aplicações citadas acima, mostra a importância dos conceitos de proporcionalidade ilustrado de várias formas e representações.

No capítulo seguinte apresentamos o software Geogebra e suas principais ferramentas. Dentre essas apresentaremos a planilha do Geogebra que foi um dos recursos utilizados em nossa pesquisa e o uso de suas ferramentas para tornar-se uma aprendizagem matemática mais significativa.

3. O GEOGEBRA

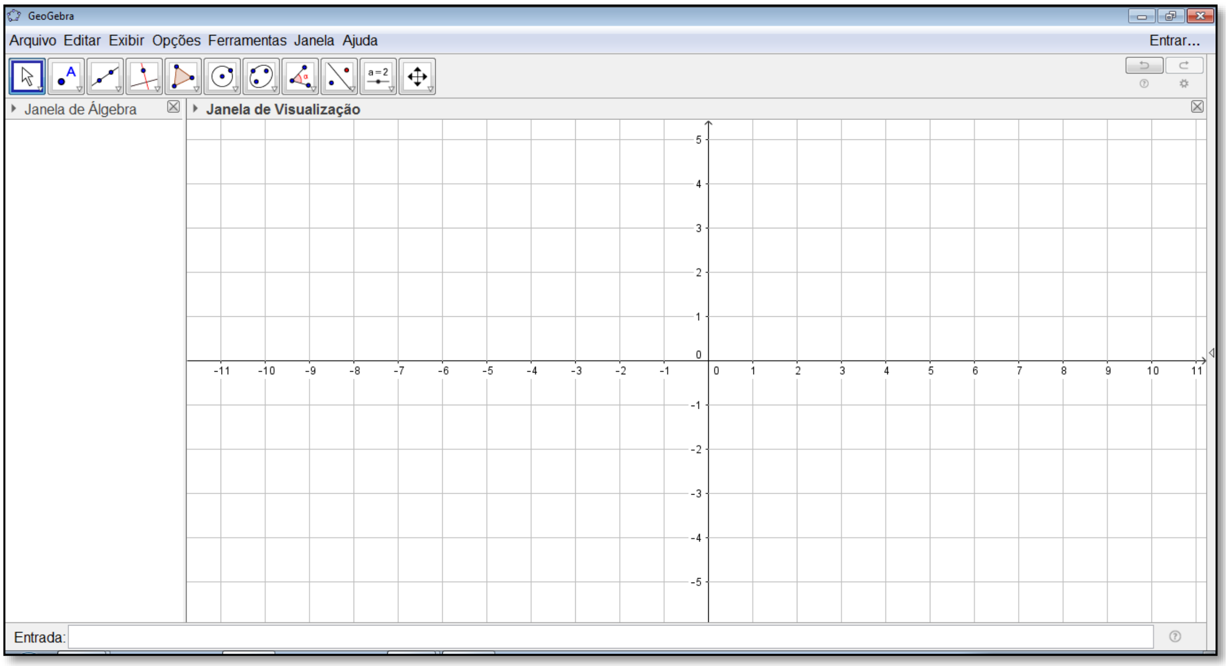
O presente capítulo apresenta o software Geogebra e suas principais ferramentas, ou seja, a interface, as janelas de visualização e de álgebra, a barra de ferramentas e suas funcionalidades, a planilha do Geogebra, entre outras.

3.1 Apresentação e Interface

O Geogebra é um software com finalidades didáticas para ser utilizado em situações de ensino e aprendizagem de matemática. Com ele é possível realizar cálculos aritméticos, algébricos e utilizar múltiplas representações gráficas de objetos matemáticos. Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburgo foi quem idealizou o projeto do software GeoGebra e é um de seus principais desenvolvedores em conjunto com Yves Kreis da Universidade de Luxemburgo. Os desenvolvedores do Geogebra permitem que ele seja baixado do site oficial (www.geogebra.org) e instalado em computadores com sistemas operacionais diversos. (CURSO DE GEOGEBRA, 2016).

A figura 9 mostra a interface do Geogebra com a janela de visualização e a janela de álgebra.

Figura 11: Interface do Geogebra.

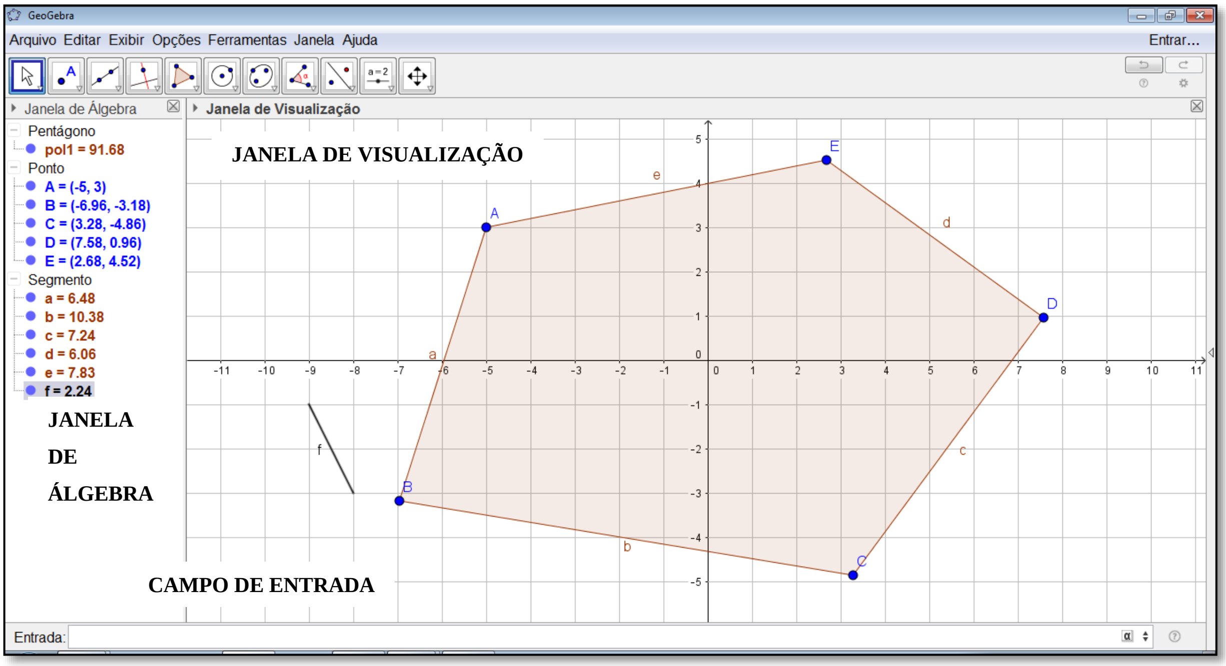


Fonte: Autor (2016)

3.2 Janela de Visualização, Janela de Álgebra e Campo de Entrada

A janela de visualização é a área da interface do Geogebra onde apresentamos os objetos matemáticos em sua forma geométrica. A janela de álgebra é o campo de representação algébrica como o próprio nome já diz. O campo de entrada é o campo onde digitamos sintaticamente os objetos matemáticos, caso haja erro na sintaxe o Geogebra não exibirá, porém dará dica para fazer o correto. Veja na figura 10 essas três janelas.

Figura 12: Janela de Visualização, janela de álgebra e campo de entrada.



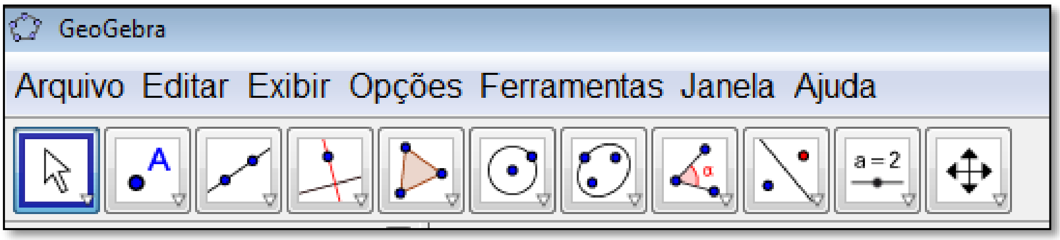
Fonte: Autor (2016)

No campo de entrada quando começamos a digitar alguma construção de um objeto, o Geogebra mostra previamente algumas opções que talvez seja a sua. Caso seja o que o usuário está precisando basta selecionar e finalizar a sintaxe corretamente.

3.3 Barra de Ferramentas

A Barra de Ferramentas localizada na parte superior do GeoGebra é composta de doze conjuntos de ícones com as ferramentas necessárias para o usuário construir, movimentar, obter medidas e modificar atributos de objetos construídos (CURSO DE GEOGEBRA, 2016).

Figura 13: Barra de ferramentas do Geogebra.



Fonte: Autor (2016)

Na figura 11 acima, os ícones da esquerda para a direta representam:

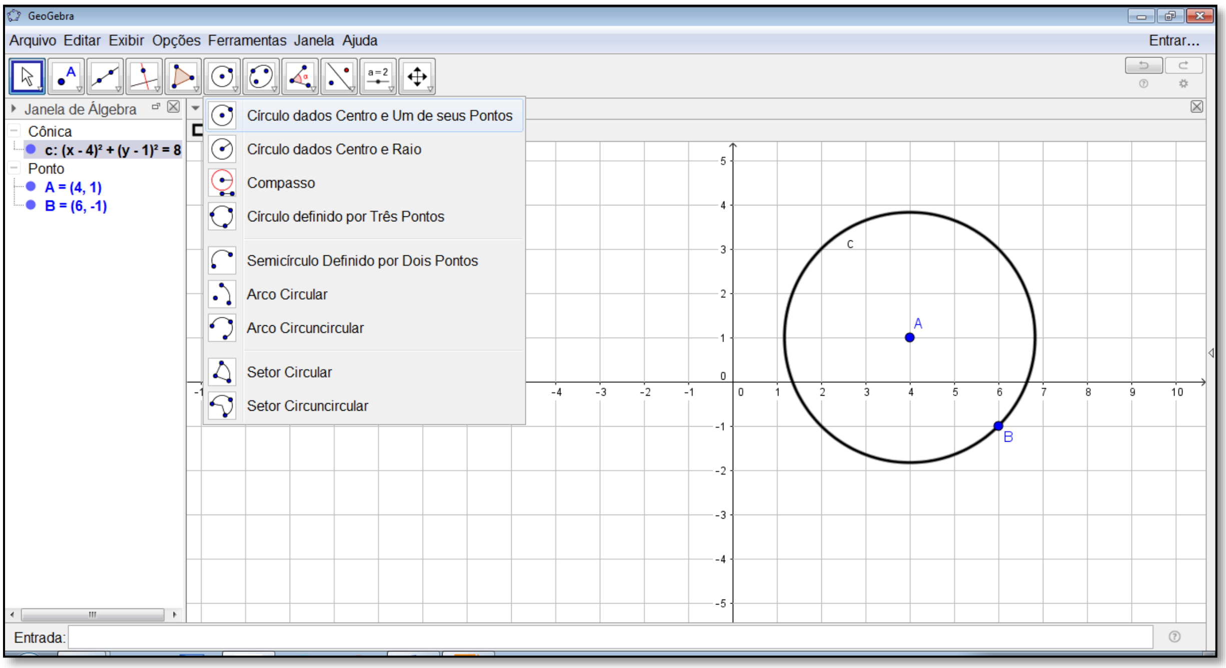
a. Manipulação
b. Pontos
c. Linhas retas
d. Posições relativas
e. Polígonos
f. Formas circulares
g. Cônicas
h. Ângulos e medidas
i. Transformações
j. Especiais
k. Controles
l. Exibição

Cada um desses ícones contém mais ferramentas para construir objetos matemáticos, basta para isso clicar na setinha do canto inferior direto desse ícone e ele mostrará as opções disponíveis.

3.4 Construções no Geogebra por meio da barra de ferramentas

Para construir um objeto matemático utilizando as ferramentas contidas na barra de ferramentas mostradas na seção anterior clicamos na setinha do canto inferior direito e escolhemos a ferramenta desejada. Vejamos na figura 14 a construção do círculo dado o centro e um dos seus pontos.

Figura 14: Construção do círculo dado centro e um de seus pontos.

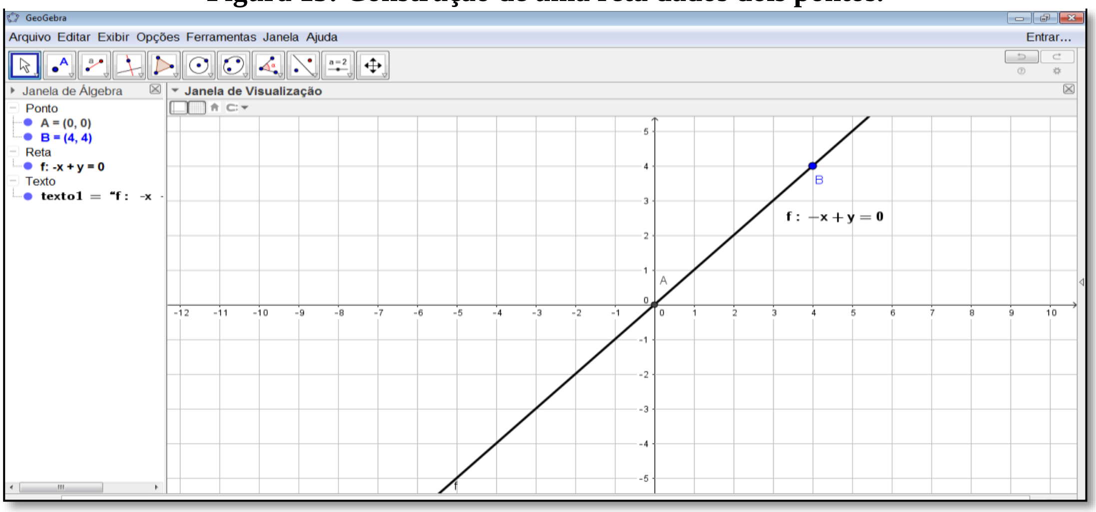


Fonte: Autor (2016)

Na figura 14 acima vemos a construção de um círculo. Para essa construção ativamos o ícone formas circulares e clicamos na primeira opção “círculo dados centro e um de seus pontos”. Depois escolhemos na janela de visualização um ponto no plano cartesiano para ser o centro do círculo e a medida que distanciamos o ponto da circunferência do centro o programa mostra a circunferência até a opção desejada da medida do raio.

Para construir uma reta ativamos o ícone linhas retas e clicamos na ferramenta reta. Escolhemos dois pontos distintos no plano cartesiano. Na figura 15 vemos a reta f que passa pelos pontos A e B cuja equação é: $-x + y = 0$.

Figura 15: Construção de uma reta dados dois pontos.



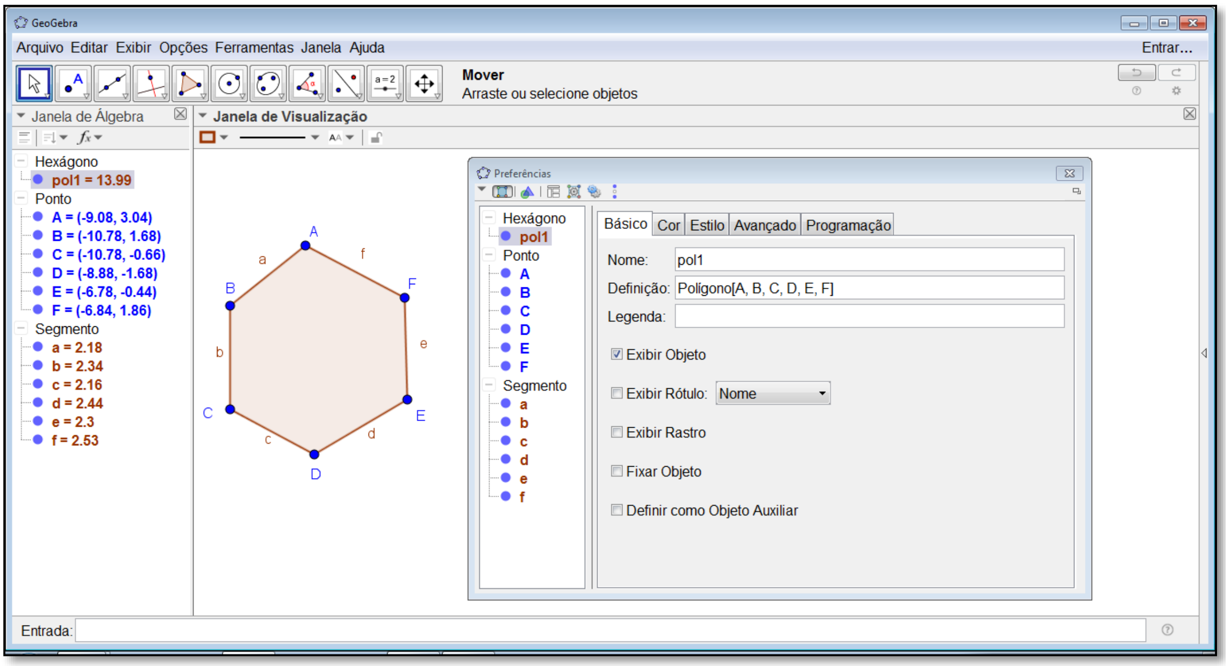
Fonte: Autor (2016)

Na figura 15 acima a janela de álgebra mostra a equação da reta, ou seja, a representação algébrica e na janela de visualização a representação geométrica que nesse caso é o gráfico.

3.5 Objetos e suas propriedades

Quando criamos um objeto matemático no Geogebra, por exemplo uma reta, ou um polígono ou uma cônica, esses objetos são visualizados na janela de visualização e também na janela de álgebra na representação algébrica. Quando clicamos com o botão direito do mouse sobre o objeto na janela de visualização aparece a opção propriedades. O Geogebra abre uma nova janela mostrando as propriedades desses objetos. A partir dessa janela é possível alterar cor, estilo e outras configurações. Na figura 16 criamos um hexágono e clicamos com o botão direito para mostrar a janela de preferências.

Figura 16: Hexágono e a janela de preferências



Fonte: Autor (2016)

Na janela de preferências é possível ainda na aba básico renomear o objeto construído. Também é possível exibir rótulo, exibir rastro do objeto, entre outras opções. Na janela de preferências, no canto esquerdo há outra janelinha com as denominações do objeto construído, ou seja, o hexágono. No entanto, há também os pontos que são os vértices e os lados que são os segmentos.

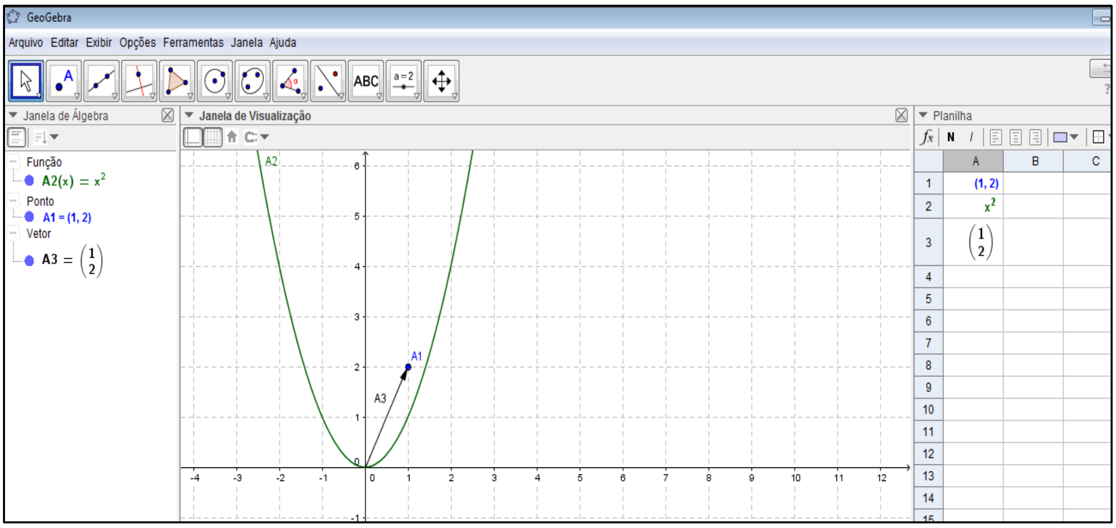
3.6 A Planilha do Geogebra

Daremos agora um destaque especial a planilha do Geogebra que não é tão usada pelos professores de matemática e que, no entanto, é uma ferramenta que traz várias opções de conteúdos matemáticos para se trabalhar tanto no ensino fundamental, médio e também no superior.

Ao clicar no menu exibir e depois planilha o Geogebra mostrará uma nova janela. Essa janela é a planilha do Geogebra. Várias construções podem ser feitas na planilha, porém, o objetivo de nossa oficina é também fazer uso dessa ferramenta para resolução de problemas de proporcionalidade. A título de construção simples na planilha, façamos as construções abaixo:

- Parábola ($y = x^2$)
- Ponto (1,2)
- Vetor v = (1,2)

Figura 17: Parábola, vetor e ponto.



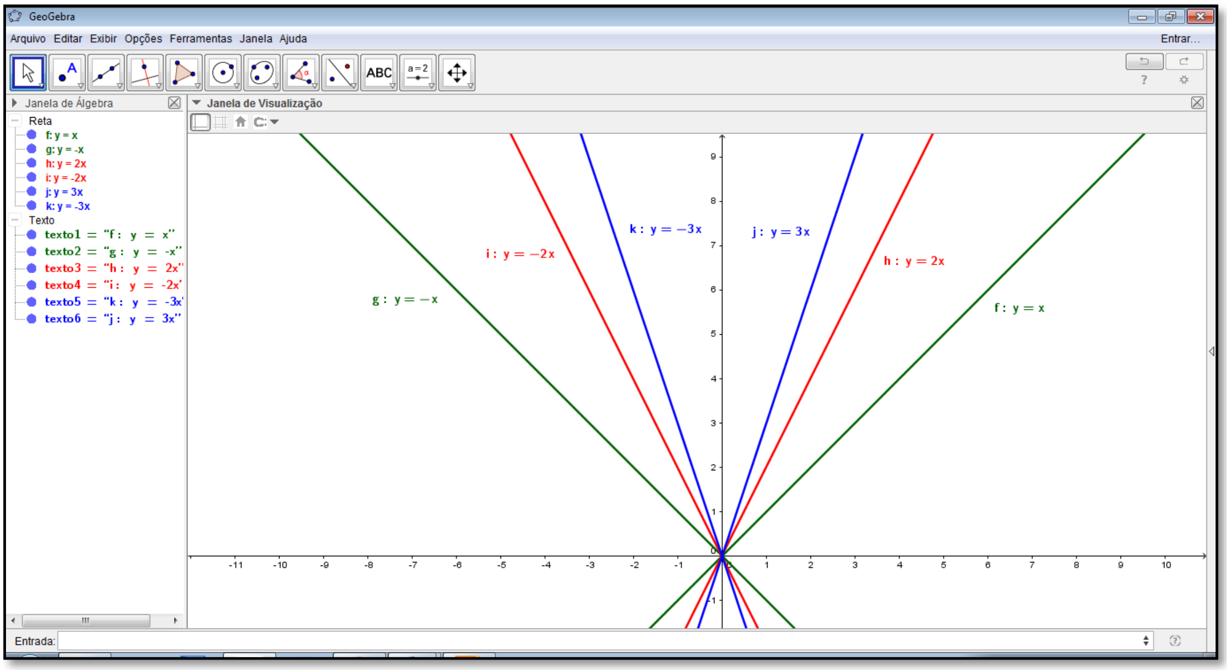
Fonte: Autor (2016).

No campo de entrada digitamos a função $y = 2x$ e apertamos enter, com isso aparecerá o gráfico da função digitada, que é uma reta. No campo de entrada de funções digitamos qualquer função matemática e o Geogebra esboçará seu gráfico. No entanto, o Geogebra exige a digitação correta da função ou da equação, é o que o software chama de sintaxe da equação.

Exemplo 1

Esboce no Geogebra os gráficos das funções $y = x$; $y = -x$; $y = 2x$; $y = -2x$; $y = 3x$ e $y = -3x$. Utilize o campo de entrada e deixe cada gráfico com uma cor diferente. Ver figura abaixo criado no geogebra.

Figura 18: Gráfico de funções Lineares



Fonte: Autor (2016).

O **seletor ou controle deslizante** (penúltimo botão da esquerda pra direita do Geogebra) é um botão que serve para criar movimento numa função qualquer ou também para variar os valores dos parâmetros de um objeto matemático. Por exemplo, criando os controles **a, b** e **c** variando de -10 até 10 e no campo de entrada digitamos a função $y = ax^2 + bx + c$, notaremos o que cada coeficiente faz de diferente no gráfico após essa variação. Façamos essa atividade no Geogebra.

1. Crie três controles deslizantes **a, b** e **c.**
2. Digite a função $y = ax^2 + bx + c$ no campo de entrada e aperte enter.
3. Varie os controles.
4. O que aconteceu com o gráfico quando você variou o parâmetro **a**?

Resposta: *variando o parâmetro **a** vemos que a concavidade da parábola também varia.*

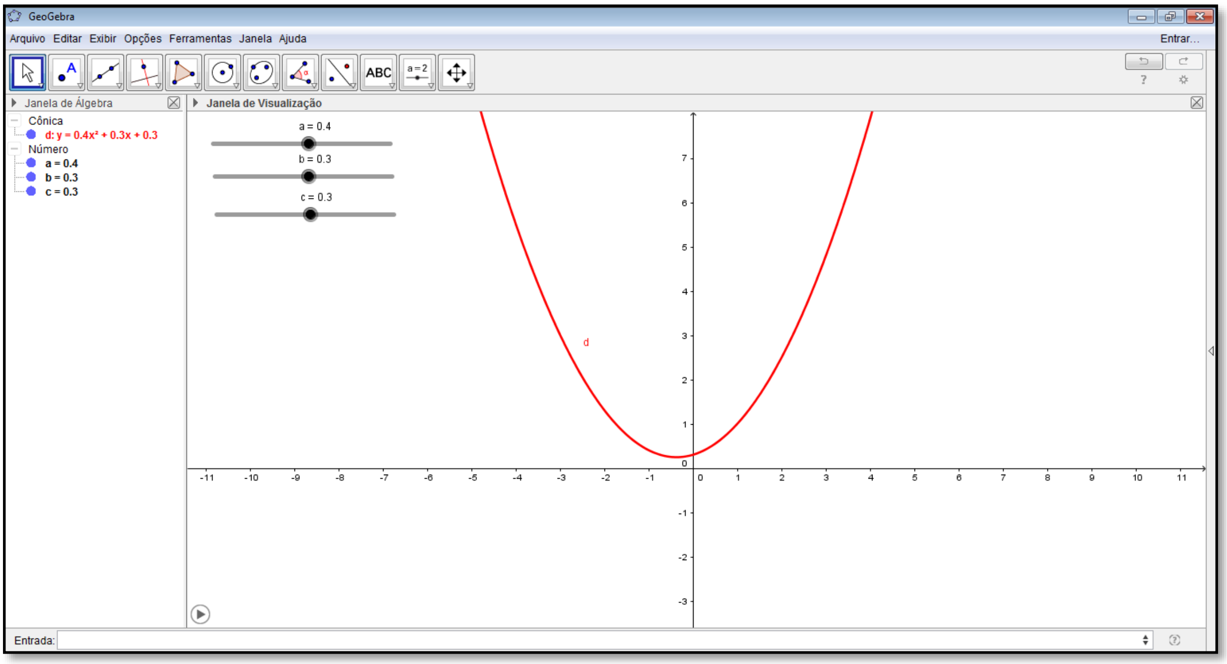
5. O que aconteceu com o gráfico quando você variou o parâmetro **b**?

Resposta: *variando o parâmetro **b** vemos que a parábola se desloca para direita ou para a esquerda.*

6. O que aconteceu com o gráfico quando você variou o parâmetro **c**?

Resposta: *variando o parâmetro **c** vemos que a parábola se desloca para cima ou para baixo.*

Figura 19: Gráfico de uma função quadrática



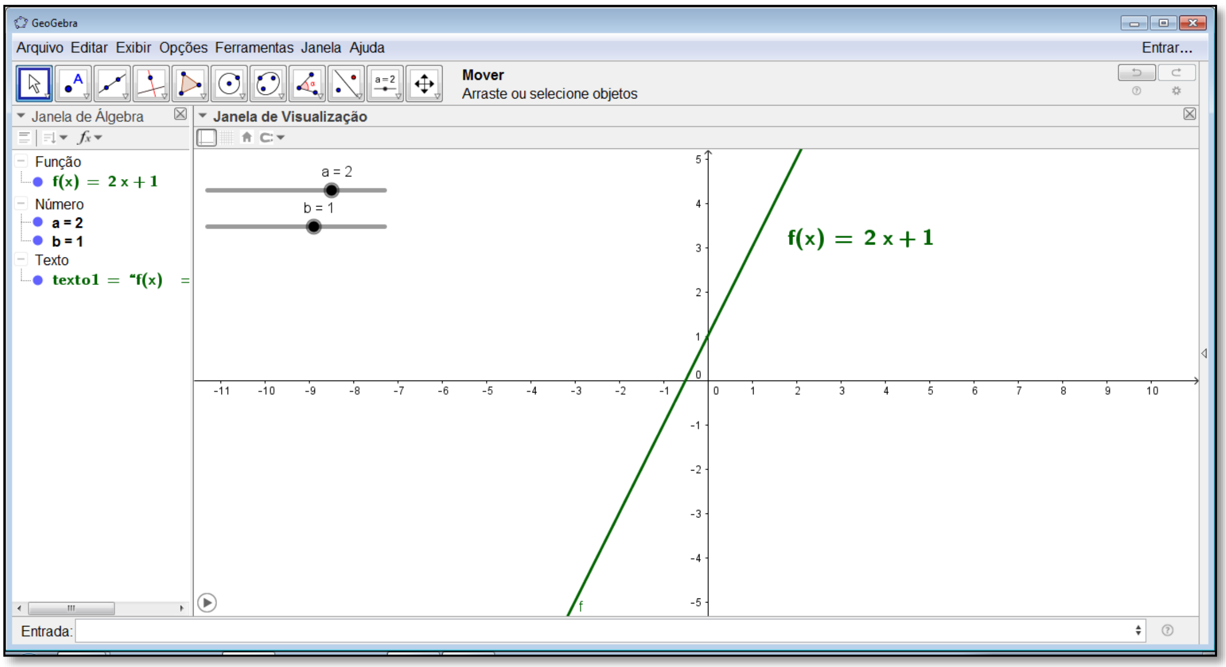
Fonte: Autor (2016).

Da atividade acima podemos perceber que o Geogebra oferece várias formas de registros de representação ao se trabalhar função de primeiro ou segundo grau. Como proporcionalidade direta e inversa podem também ser representados na forma gráfica, o geogebra é com certeza a ferramenta ideal para o ensino e aprendizagem de matemática.

3.7 As ferramentas do Geogebra e a aprendizagem significativa em Matemática

Com o Geogebra é possível mostrar e demonstrar equações na forma algébrica e geométrica e que ao mesmo tempo mudando um parâmetro na equação mudará de forma significativa o formato geométrico dessa equação. Numa função afim do tipo $f(x) = ax + b$ por exemplo, quando variamos o parâmetro a e fixamos o parâmetro b nota-se que o gráfico rotaciona sobre o ponto (0, b). Na figura 20 vemos que o parâmetro a é igual a 2 e o parâmetro b é igual a 1, com isso a inclinação da reta é para a direita. Caso a fosse negativo a inclinação seria para a esquerda.

Figura 20: Função afim por meio de parâmetros a e b.



Fonte: Autor (2016)

Dessa forma, ao fazer uso dessas ferramentas nas aulas de matemática, o professor tornará mais significativo o aprendizado dos alunos. Essa aprendizagem acontece se os alunos possuem subsunçores relativos aos conceitos de função, plano cartesiano e outros.

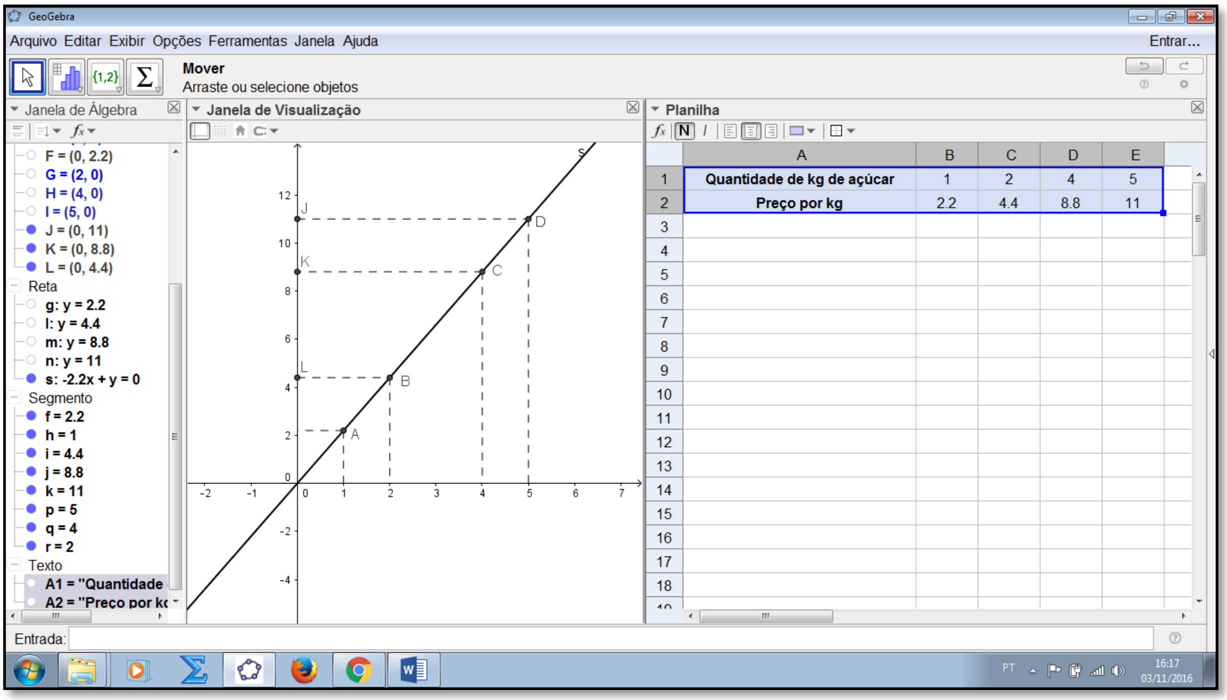
A teoria da aprendizagem significativa de Ausubel pode ser resumida na seguinte afirmação:

> Se tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um só princípio, diria o seguinte: o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe. Averigue isso e ensine-o de acordo. (AUSUBEL 1978 apud MOREIRA 2006, p. 13)

Para que um conteúdo seja aprendido de forma significativa, é necessária interação com a estrutura cognitiva de um indivíduo sem arbitrariedade e de forma não literal. O subsunçor é uma ideia já existente na estrutura cognitiva e serve como âncora para aprender novas informações ou conceitos. (MOREIRA, 2006).

Em matemática, por exemplo, quando iniciamos o conceito de função no ensino médio, falamos das funções constantes, lineares, etc. Diante desses primeiros exemplos de funções, o conceito de proporcionalidade direta servirá de subsunçor para as novas informações referentes ao estudo de funções afins, função crescente, decrescente, etc. Podemos mostrar no Geogebra por exemplo, que a relação entre o preço de um kg de açúcar e a quantidade serve para mostrar que gera uma função linear e também que ela é crescente. Ver figura 21 abaixo.

Figura 21: Função crescente. Relação entre preço do kg e a quantidade.



Fonte: Autor (2016)

Segundo Moreira (2006) a principal característica da aprendizagem significativa é a ***interação*** entre o que o indivíduo já sabe e o que ele quer aprender, ou seja, os conhecimentos prévios servirão de ancoradouro para acessar novas proposições, sendo essas *assimiladas* de forma significativa.

Para Ausubel (apud Moreira, 2006) quando um indivíduo aprende algo de forma literal e arbitrária, sem interação com a estrutura cognitiva e ainda não faz ligação entre subsunçores específicos, essa aprendizagem é definida como mecânica ou automática.

Ausubel apud Moreira (2006, p. 19)

> A essência do processo de aprendizagem significativa é que ideias simbolicamente expressas sejam relacionadas, de maneira substantiva (não literal) e não arbitrária, ao que o aprendiz já sabe, ou seja, algum aspecto de sua estrutura cognitiva especificamente relevante (isto é, um subsunçor) que pode ser, por exemplo, um símbolo, um conceito ou uma proposição já significativa.

Um material é dito potencialmente significativo se for relacionável (ou incorporável) à estrutura cognitiva do aprendiz, de maneira não arbitrária e não literal. No entanto, para que esse material seja potencialmente significativo, têm-se dois fatores principais a considerar:

1. Ter *significado lógico*, ou seja, ser suficientemente não arbitrário e não aleatório e que se situe no domínio da capacidade humana de aprender;
2. No que diz a *estrutura cognitiva do aprendiz,* isto é, nos conceitos subsunçores específicos. (MOREIRA, 2006)

Ao contrário da aprendizagem significativa, a *aprendizagem mecânica* parece está presente em quase todas (ou todas) as turmas da escola, pois a principal característica da aprendizagem mecânica está na memorização de maneira arbitrária, literal e não significativa. Esse tipo de aprendizagem serve para os alunos "decorar" os assuntos das provas e posteriormente aplicar como se fosse algoritmo. No entanto, haverá pouca ou nenhuma retenção dos conteúdos e os subsunçores mal aparecerão para ancorar-se com outras novas informações. (MOREIRA, 2006).

Três tipos de aprendizagem significativa são assim definidas por Ausubel:

- **Aprendizagem representacional:** é a mais básica e envolve a atribuição de significados a determinados símbolos, isto é, a identificação, em significados, de símbolos com seus referentes (objetos, eventos, conceitos). Esse tipo de aprendizagem assemelha-se por parte com a teoria dos registros de representações semióticas de Duval.
- **Aprendizagem de conceitos:** também representacional, pois os conceitos são definidos segundo Ausubel como objetos, eventos, situação ou propriedades que possuem atributos criteriais comuns.
- **Aprendizagem proposicional:** as palavras combinadas formam uma sentença para constituir uma proposição. Dessa forma, torna-se significativa a aprendizagem ao invés de utilizar palavras isoladamente.

A assimilação é o resultado da interação que ocorre entre o material potencialmente significativo a ser aprendido e a estrutura cognitiva existente. No esquema abaixo, podemos observar que ao introduzir uma nova informação ou conceito o aprendiz possui subsunçores específicos, o resultado é um produto modificado, ou seja, dá uma nova cara no subsunçor e na nova informação.

Nova informação potencialmente significativa	→	Relacionado e assimilado por	→	Conceito subsunçor existente na estrutura cognitiva	→	Produto interacional
a				**A**		**a’A’**

Segundo Moreira (2006, p. 40)

> O desenvolvimento cognitivo é segundo Ausubel, um processo dinâmico no qual novos e antigos significados estão, constantemente, interagindo e resultando em uma estrutura cognitiva mais diferenciada, a qual tende a uma organização hierárquica, na qual conceitos e proposições mais gerais ocupam o ápice da estrutura e abrangem, progressivamente, proposições e conceitos menos inclusivos, assim como dados factuais e exemplos específicos.

Vale ressaltar que, nos dias atuais a aprendizagem significativa é uma expressão muito usada e, portanto, excelente referencial teórico para pesquisas em ensino e aprendizagem de matemática.

3.8 A janela 3D

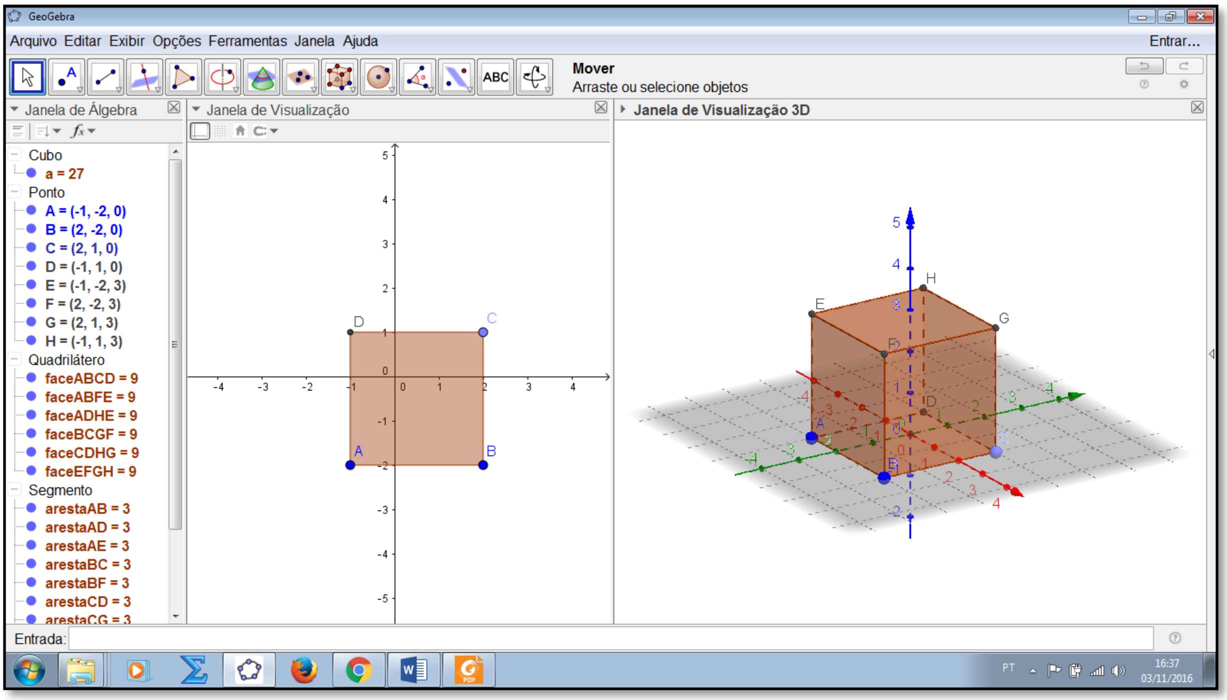
A janela de visualização 3D do Geogebra serve para explorar e exibir objetos no espaço tridimensional.

Para acessar a janela de visualização 3D do Geogebra clica-se no menu exibir, depois em janela de visualização 3D ou pelos comandos Ctrl + Shift + 3.

A vantagem desta nova janela na suíte de trabalho do Geogebra não está apenas em novas possibilidades de construção de objetos tridimensionais, mas em sua integração às Janelas de Visualização 1 e 2 e a Planilha.

Para construir um cubo por exemplo, ativamos a janela de visualização 3D depois clica-se na ferramenta cubo e marcamos dois pontos no plano cartesiano. Automaticamente o Geogebra criará um cubo. Ver figura 22 abaixo.

Figura 22: Construção do cubo na janela 3D do Geogebra.



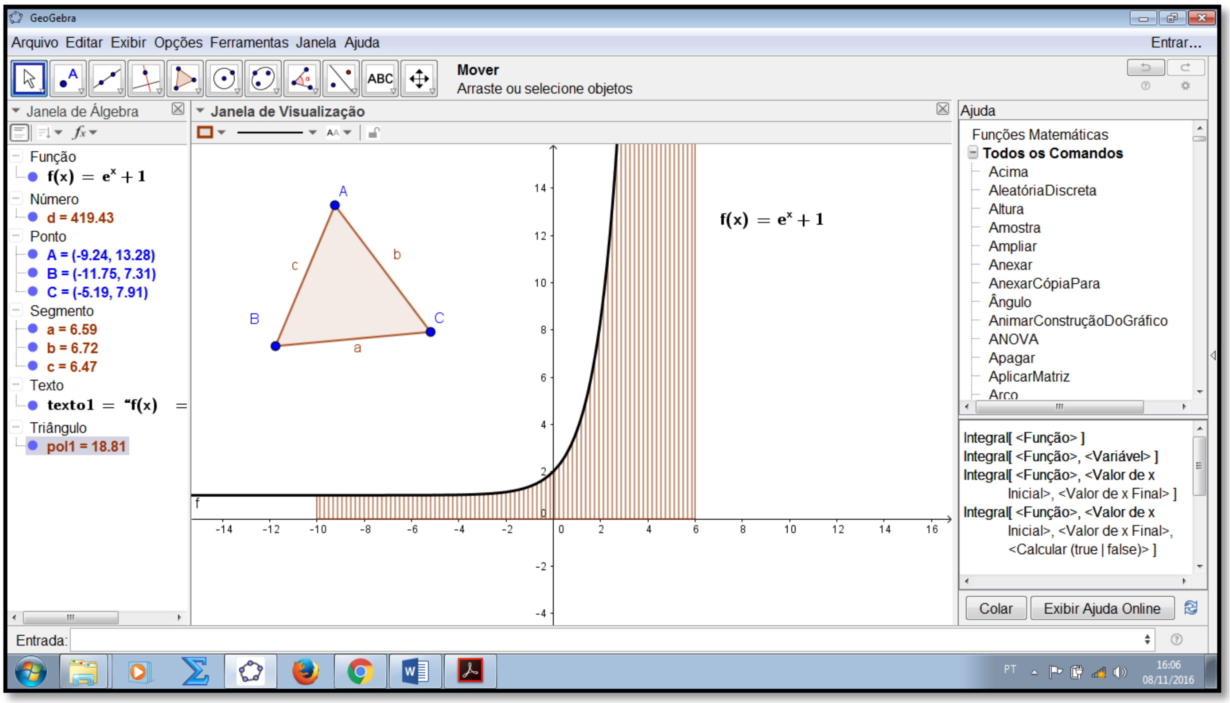
Fonte: Autor (2016)

Na janela de visualização mostra-se o polígono do plano da base do cubo que nesse caso é um quadrado. Também nessa janela podemos construir pirâmides, cilindros, cones, etc.

3.9 Criando Objetos Matemáticos por meio de comandos do Geogebra

Veremos agora como construir objetos matemáticos por meio dos comandos digitáveis no campo de entrada. No canto direito do campo de entrada do Geogebra temos dois botões: o primeiro mostra alguns caracteres especiais e o segundo (uma interrogação) abre a janela com todos os comandos contidos no Geogebra. Ao clicar em qualquer comando dessa segunda janela, automaticamente ele irá para o campo de entrada. A partir daí basta seguir corretamente a sintaxe dos comandos. Vejamos as construções da figura 23.

Figura 23: Construções por meio dos comandos do Geogebra.



Fonte: Autor (2016)

Na figura acima vemos um triângulo ABC criado da seguinte forma: cria-se três pontos A, B e C. Na caixa de entrada digitamos polígono e marcamos os pontos A, B e C. Dá-se um enter e o Geogebra constrói o triângulo ABC. A segunda construção é uma função exponencial $f(x) = e^x + 1$ na qual usamos o comando para mostrar a integral do ponto (-10,0) ao ponto (6,0) no Geogebra.

Com o auxílio do Geogebra é possível tornar uma aula mais dinâmica e com aprendizado mais significativo, pois a interação existente no próprio software proporciona melhor visualização entre objetos matemáticos que antes eram apenas abstratos.

No capítulo seguinte apresentamos os procedimentos metodológicos, o tipo da pesquisa, a abordagem, os sujeitos envolvidos, a coleta de dados e as análises.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nesta pesquisa foi realizada uma investigação de cunho qualitativo na modalidade de estudo de caso. Em geral, os estudos de caso representam a estratégia preferida quando se colocam questões do tipo “como” e “por que”, quando o pesquisador tem pouco controle sobre os eventos e quando o foco se encontra em fenômenos inseridos em algum contexto da vida real. (YIN, 2001 p.17)

O presente capítulo apresenta o tipo e a abordagem da pesquisa, o local da pesquisa, os sujeitos envolvidos, os instrumentos para a coleta de dados e as análises.

4.1 Tipo e abordagem da Pesquisa

Para desenvolver essa pesquisa, optou-se por uma metodologia de natureza qualitativa, na forma de estudo de caso. Segundo Gerhardt e Silveira (2009, p.31) “a *pesquisa qualitativa* não se preocupa com representatividade numérica, mas, sim, com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, etc”.

“O *estudo de caso* consiste num estudo profundo e exaustivo de um ou mais objetos, de maneira que permita seu amplo e detalhado conhecimento”. (GIL, 2002).

Após analisar outras dissertações do PPGECIM, percebemos que o estudo de caso é um tipo comum de investigação, principalmente nas pesquisas em educação matemática, uma vez que este possibilita um estudo minucioso e descritivo de uma unidade escolar, de uma proposta apresentada por um professor, do espaço de uma sala de aula, de um grupo de alunos, entre outros. (SILVA, 2014).

Os estudos de caso apresentam quatro características principais e essenciais em um estudo qualitativo:

> Particularidade significa que o estudo de caso focaliza uma situação, um programa, um fenômeno particular. O caso em si tem importância, seja pelo que representa. É pois, um tipo de estudo adequado para investigar problemas práticos, questões que emergem do dia a dia.
> Descrição significa que o produto final de um estudo de caso é uma descrição “densa“ do fenômeno em estudo. Por descrição densa entende-se uma descrição completa e literal da situação investigada. [...]. O estudo de caso engloba [...] variáveis e retrata suas interações ao longo do tempo.
> Heurística significa que os estudos de caso iluminam a compreensão do leitor sobre o fenômeno estudado. Podem revelar a descoberta de novos significados, estender a experiência do leitor ou confirmar o já conhecido.
> Indução significa que em grande parte, os estudos de caso se baseiam na lógica indutiva. “Descoberta de novas relações, conceitos, compreensão, mais do que

> verificação ou hipótese caracteriza o estudo de caso qualitativo. (ANDRÉ apud SILVA, 2014, p.55)

Para Silva (2014, p.55) os estudos de caso têm tido fundamental importância para investigação da aprendizagem dos alunos no contexto da educação matemática. Ainda, esse tipo de estudo tem estado em destaque para analisar as práticas profissionais dos professores de matemática, desde sua formação inicial, passando por sua formação continuada e chegando ao âmbito de análise de projetos propostos por professores visando inovações curriculares, novos currículos, etc.

4.2 Local da pesquisa

O estudo foi realizado no Instituto Federal de Alagoas – IFAL, Campus Satuba. Esta escola pertence a rede federal de ensino técnico, profissional e tecnológico. Também conhecida como antiga Escola Agrotécnica Federal de Satuba, a escola oferece os cursos de Técnico em Agropecuária, Técnico em Agroindústria e o curso superior em Tecnologias de Laticínios. Por ser uma escola agrícola, sua área é extensa para estudos com animais (bovinos, suínos, aves, etc) e também possui vários blocos com salas de aula e laboratórios diversos. Como a investigação envolvia o software Geogebra optou-se por utilizar o laboratório de informática do Campus.

4.3 Sujeitos envolvidos

Os sujeitos participantes desta investigação foram 14 alunos do 2º ano do curso Técnico Integrado de Agroindústria do Instituto Federal de Alagoas, Campus Satuba. O autor da pesquisa é professor efetivo dessa instituição, no entanto não era professor da referida turma no ano letivo de 2015.

Optou-se pelos alunos do 2º ano devido aos seguintes critérios:

1. Faixa etária de 14 a 17 anos;
2. Por já conhecer melhor a instituição em relação aos alunos ingressantes;
3. Conteúdo visto no 1º ano (funções, plano cartesiano, etc).

Os alunos foram identificados por códigos. Durante as atividades, os alunos não tiveram contato direto com o professor para tirar dúvidas quanto ao conteúdo. O professor poderia apenas ajudar no uso das ferramentas do Geogebra caso o aluno não lembrasse.

4.4 Instrumentos para coleta de dados

Para a coleta de dados, utilizamos o laboratório de informática do Campus, que tem cerca de 20 computadores, onde 17 estavam em total funcionamento. Foram realizados 5 encontros para fins de registros e coletas dos dados para posterior análise. Nesses encontros houve aplicação de questionários com problemas sobre proporcionalidade. Houve ainda, em todos os encontros, gravações em áudio e vídeo, aulas expositivas e uma oficina com uso do software Geogebra.

Os instrumentos utilizados para essa pesquisa foram:

1. Questionário inicial – com perguntas pessoais e sobre conhecimentos de informática. O objetivo desse questionário foi conhecer melhor os alunos do instituto.
2. Questionário pré-teste – com questões abertas e fechadas sobre proporcionalidade. O objetivo desse questionário foi de analisar os conhecimentos prévios dos alunos sobre tal assunto.
3. Aulas expositivas – duas aulas expositivas, uma sobre proporcionalidade direta e outra sobre proporcionalidade inversa. Ambas foram filmadas para posterior análise.
4. Oficina com o Geogebra – também fez parte do cenário da pesquisa, a oficina com o Geogebra foi filmada para registrar os momentos de aprendizado dos alunos quanto ao uso do software livre.
5. Questionário pós-teste – análogo ao pré-teste, o questionário pós-teste diferenciava apenas com o uso do Geogebra na resolução e interpretação dos problemas.

No capítulo seguinte apresentamos as respostas do questionário inicial (apêndice 1), as análises das estratégias de resolução dos problemas do questionário pré-teste (Apêndice 2) e as análises das estratégias de resolução dos problemas do questionário pós-teste com auxílio do software Geogebra (Apêndice 3). Apresentamos também as atividades desenvolvidas pelos alunos durante a oficina do Geogebra (Apêndice 4).

5 ANÁLISES DOS DADOS

Neste capítulo, apresentamos as respostas do questionário inicial (apêndice 1), as análises das estratégias de resolução dos problemas do questionário pré-teste (Apêndice 2) e as análises das estratégias de resolução dos problemas do questionário pós-teste com auxílio do software Geogebra (Apêndice 3). Apresentamos também as atividades desenvolvidas pelos alunos durante a oficina do Geogebra (Apêndice 4). Para manter o sigilo dos discentes envolvidos, utilizaremos códigos para representar os 14 alunos pesquisados.

5.1 Respostas dos alunos do questionário inicial

A princípio, o questionário inicial tem objetivo de conhecer um pouco os alunos que ingressam no instituto e também seu perfil quanto ao uso do computador dentro e fora da sala de aula.

QUESTÃO 1

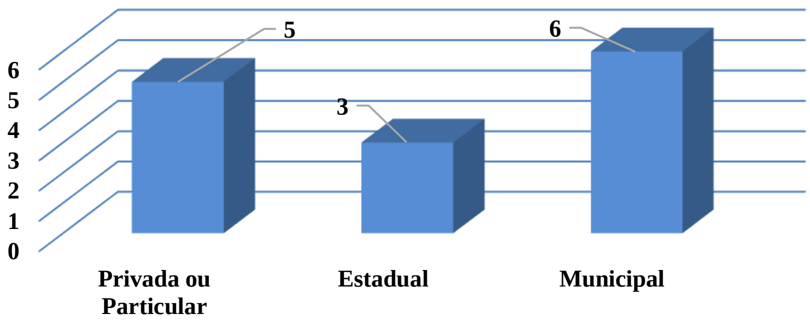
Antes de ingressar no IFAL SATUBA você era aluno de escola:

( ) Particular?

( ) Municipal?

( ) Estadual?

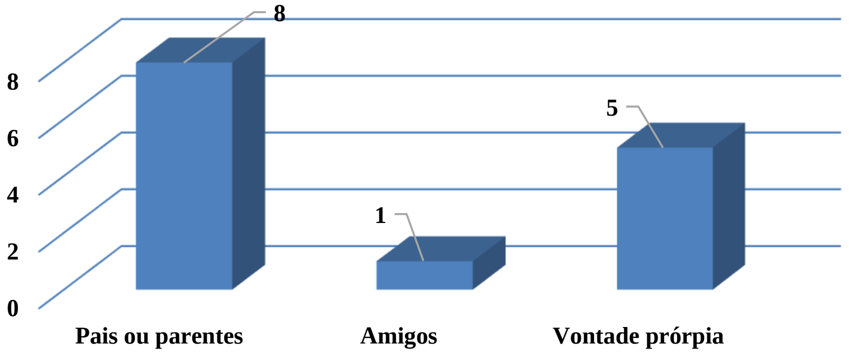
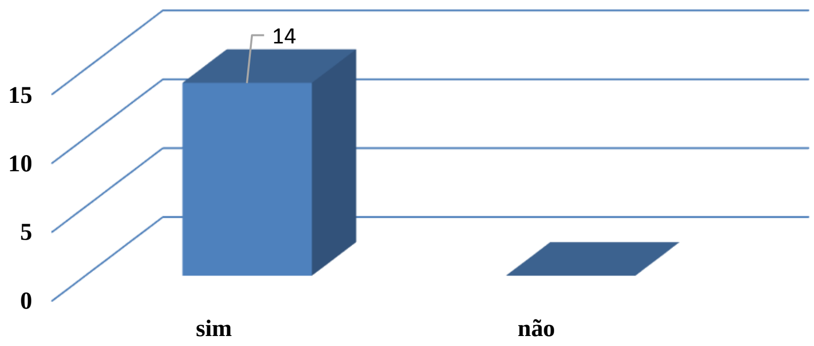
RESPOSTAS

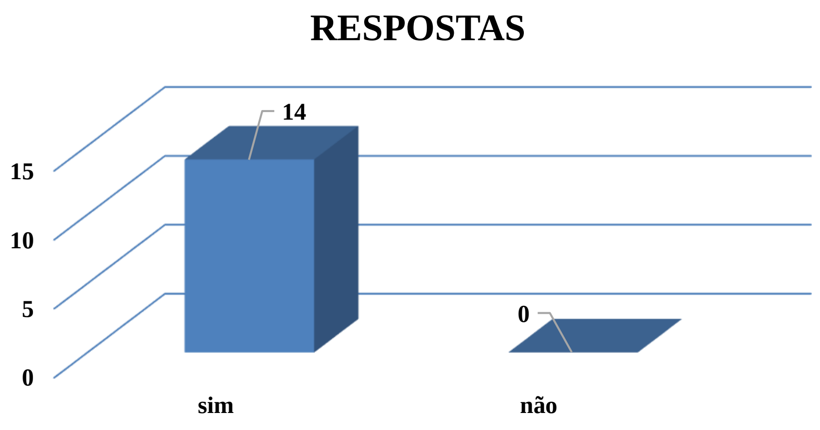


QUESTÃO 2

Quem motivou você a fazer a prova de seleção do IFAL?

( ) Seus pais ou parentes?

(   ) Seus amigos? (   ) Quis fazer por vontade própria.
RESPOSTAS 
QUESTÃO 3 Você já conhece todo espaço físico do Campus? (   ) Sim. (   ) Não.
RESPOSTAS 
QUESTÃO 4 Já utilizou o laboratório de informática do Campus? (   ) Sim. (   ) Não.



QUESTÃO 5

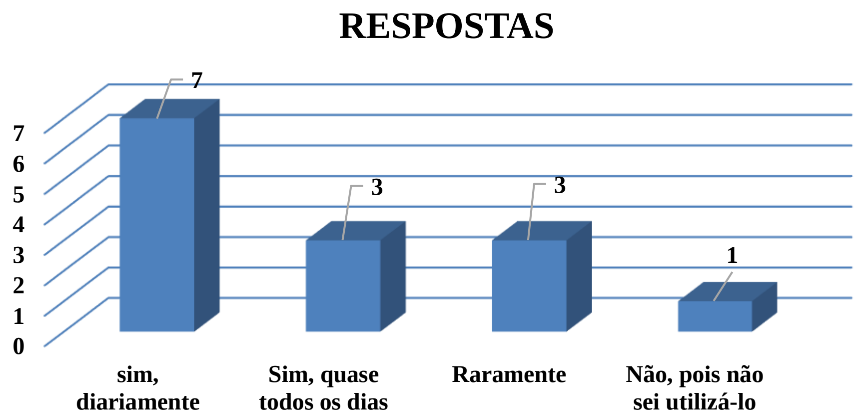
Você utiliza computador com frequência?

(   ) Sim, diariamente.

(   ) Sim, quase todos os dias.

(   ) Raramente.

(   ) Não, pois não sei utilizá-lo.



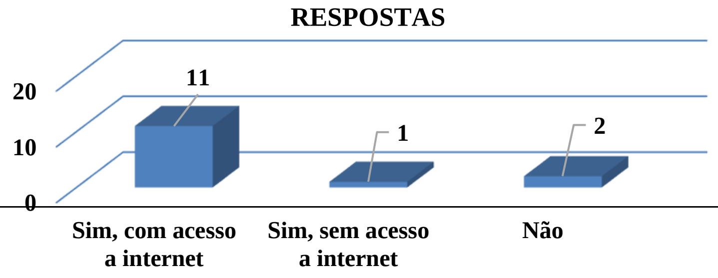
QUESTÃO 6

Tem computador ou notebook em casa?

(   ) Sim, com acesso a internet.

(   ) Sim, sem acesso a internet.

(   ) Não.



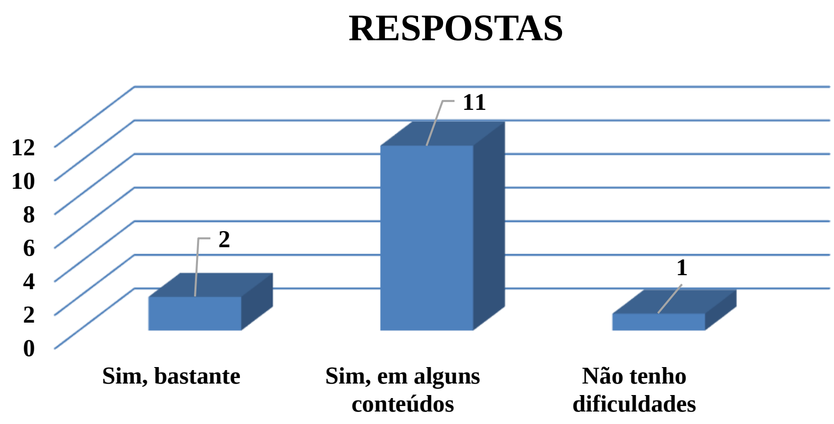
QUESTÃO 7

Você está com dificuldade em Matemática?

(   ) Sim, bastante

(   ) Sim, em alguns conteúdos.

(   ) Não tenho dificuldades em Matemática

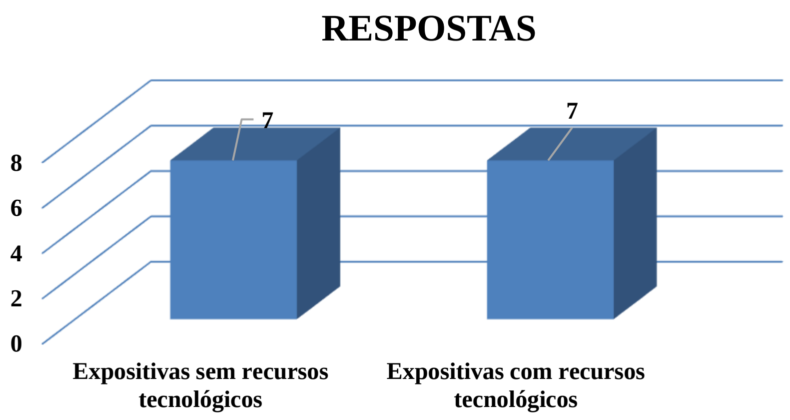


QUESTÃO 8

Como são as aulas de Matemática?

(   ) Expositivas sem recursos tecnológicos

(   ) Expositivas com recursos tecnológicos



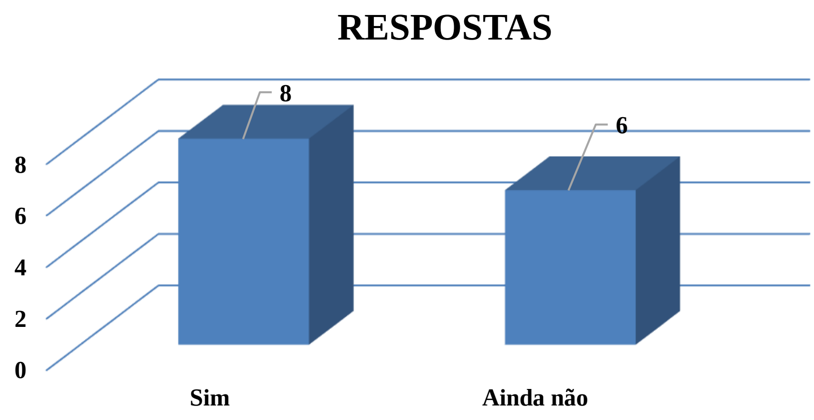
QUESTÃO 9

O professor de matemática já usou algum software matemático nas aulas?

(   ) Sim

(   ) Ainda não

Se sim, lembra qual o nome do software?___________________________



QUESTÃO 10

O que você acha da possibilidade de aprender alguns assuntos da Matemática utilizando softwares matemáticos pelo computador?

RESPOSTAS

- **(Resposta do aluno A)** “Acho importante porque irá facilitar o entendimento de assuntos complexos”.
- **(Resposta do aluno B)** “Acredito que possa ser uma boa ideia porque é um método inovador e mais interativo para o aprendizado”.
- **(Resposta do aluno D)** “Eu acho muito bom, pois é algo diferente do nosso dia-dia”.
- **(Resposta do aluno E)** “Acho muito bom, devido a mais um conhecimento que iremos adquiremos, que ira nos auxiliar no futuro”.
- **(Resposta do aluno I)** “Interessante, uma nova forma de aprender, e pode ser mais fácil, também pode ser mais prático”.
- **(Resposta do aluno J)** “Acredito que seja uma solução benéfica de aprender alguns assuntos de uma maneira mais lógica. Por fim acho uma ótima opção para os materiais didáticos”.
- **(Resposta do aluno L1)** “A tecnologia está em todo canto, por isso devemos utilizar ela mais por aí, mais dinâmica que as aulas convencionais”.
- **(Resposta do aluno L2)** “Acho muito importante pois isso irá nos beneficiar no futuro”.
- **(Resposta do aluno L3)** “Acho interessante”.

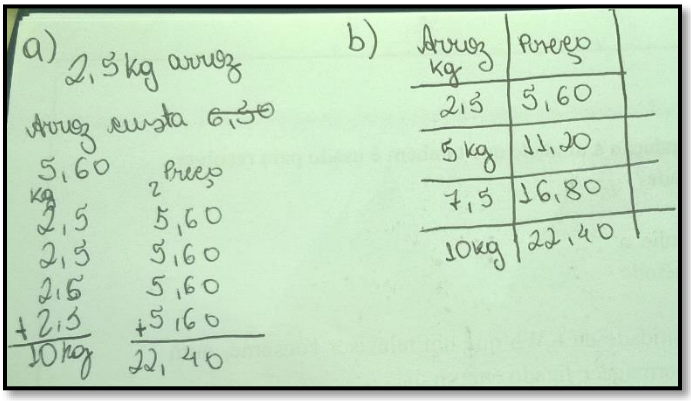
• **(Resposta do aluno L4)** “Conhecimento nunca é demais, e irá ser bom para aprender novos ou antigos assuntos de um jeito mais dinâmico”. • **(Resposta do aluno R1)** “A utilização de softwares é de grande importância para o nosso aprendizado pois possibilita um aprendizado com mais qualidade”. • **(Resposta do aluno R2)** “Tenho dificuldade em Matemática e na área de cálculos, e acho que vai ser bastante proveitoso para aprendermos e teremos mais facilidade em aprender tal assunto”. • **(Resposta do aluno R3)** “É um bom método para aprender os assuntos de forma diferente, que talvez possa nos ajudar a entender”. • **(Resposta do aluno S)** “Seria de muito proveito para adquirir-mos cada vez mais conhecimentos e sairmos da rotina de apenas aulas escrita em quadro”.

5.2 Análise das estratégias de resolução dos problemas do questionário pré-teste

O questionário de pesquisa pré-teste contém 10 questões sobre proporcionalidade direta e inversa, sendo 5 questões abertas e 5 questões fechadas de múltipla escolha. As questões envolvem problemas simples de proporcionalidade direta, representação gráfica, representação tabular e questões conceituais. No dia da aplicação desse questionário, compareceram e responderam apenas 13 dos 14 alunos envolvidos.

A questão 1 do questionário pré-teste é um problema simples de proporcionalidade direta. O item a) pedia o custo de 10 kg de arroz, o que poderia ser resolvido por regra de três simples, proporção direta, entre outras formas. Destacamos as figuras 24, 25 e 26 a fim de mostrar algumas soluções dos alunos. O item b) pedia para montar uma tabela envolvendo as grandezas e os valores correspondentes e teve por objetivo explorar a representação semiótica tabular em problemas de proporcionalidade direta e inversa.

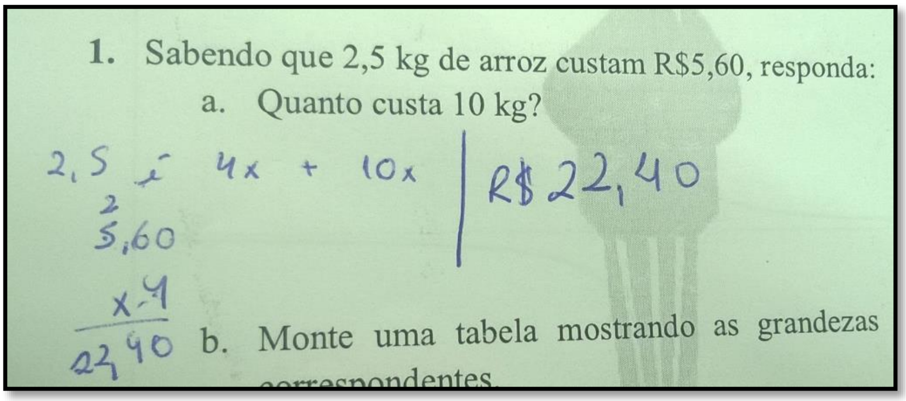
Figura 24: Solução da questão 1 item a) e b) feito pelo aluno A.



Fonte: Autor (2016)

Nota-se na figura 24 acima que a estratégia utilizada pelo o aluno A para resolver item a) do problema 1 foi usando o raciocínio aditivo em cada grandeza envolvida e quanto ao item b) montou a tabela de forma correta separando em cada coluna as grandezas kg de arroz e o preço.

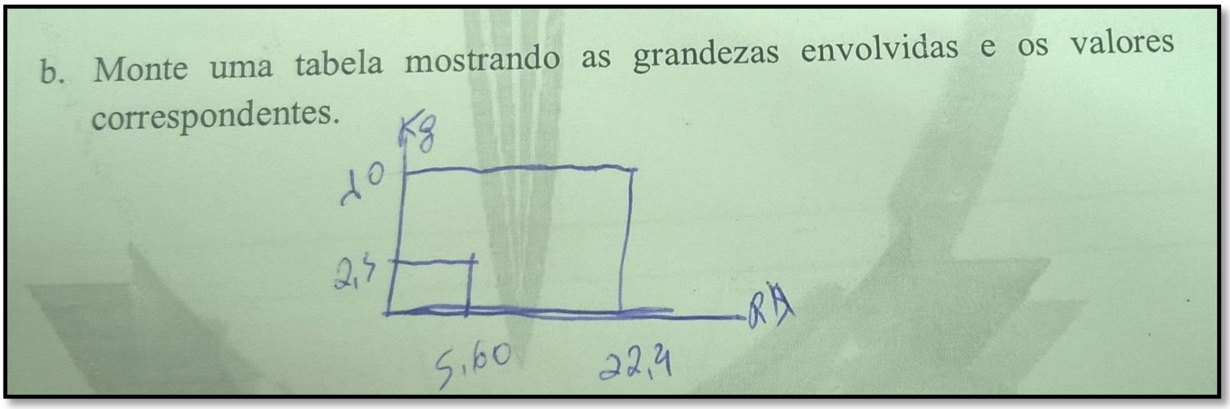
Figura 25: Solução da questão 1 item a) feito pelo aluno E



Fonte: Autor (2016)

Nota-se na figura 25 acima que a solução do item a) é uma “tentativa” de explicar um raciocínio multiplicativo, ou seja, ele quis dizer que se 10 kg é 4 vezes 2,5 kg então o valor será 4 vezes 5,60. Obviamente que está correto seu raciocínio, mas há confusão quanto a escrita e organização da solução. Ele não demonstra de forma clara que se dobrasse a quantidade de arroz, dobraria o valor a se pagar ou se quadruplicasse a quantidade de arroz o valor a ser pago seria também quadruplicado. Com isso, vemos que esse aluno apresenta pouca dificuldade na resolução de problemas de proporcionalidade, pois ele chegou na solução do problema, mas de forma desorganizada.

Figura 26: Solução da questão 1 item b) feito pelo aluno R3.

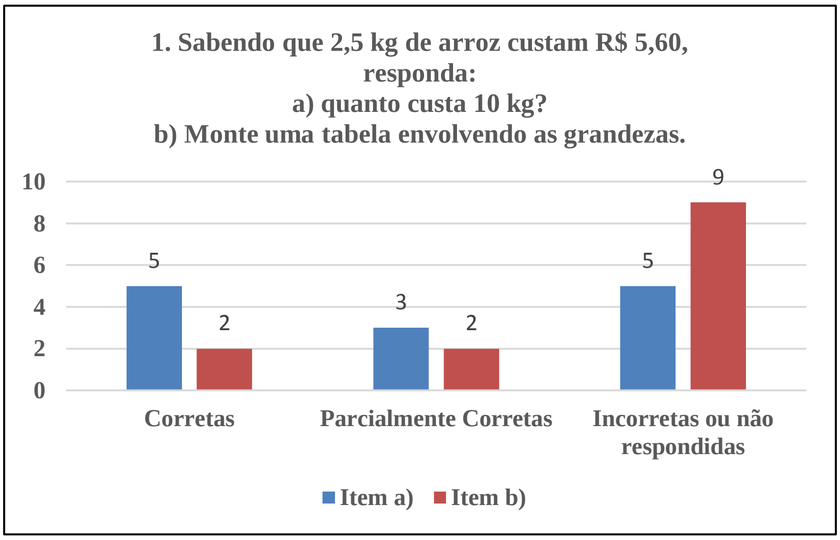


Fonte: Autor (2016)

Nota-se na figura 26 um problema de conversão segundo a teoria dos registros de representação semiótica de Duval, ou seja, o aluno ao invés de montar a tabela montou um gráfico cartesiano com os dados do problema.

Após análise dos 13 testes, verificamos que 8 responderam satisfatoriamente, ou seja, com respostas corretas e cálculos esperados e também com respostas corretas, mas com os cálculos incompletos. Os 5 restantes erraram ou não responderam à questão. No gráfico 1 apresentamos quantitativamente os dados com as questões.

Gráfico 1: Número de acertos e erros da questão 1

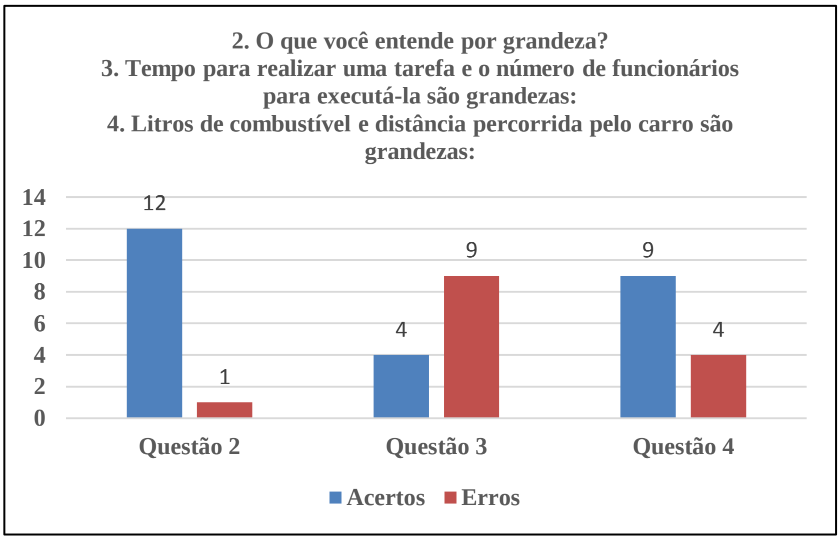


Fonte: Autor (2016)

Do gráfico 1, podemos notar que a maioria dos alunos tem dificuldades na resolução de problemas de proporcionalidade direta. Poucos resolveram pelo método tradicional que é o da regra de três simples e nenhum resolveu pelo método de redução à unidade, demonstrando assim que não conhecem ou não lembram de tal método. Quanto a mudança de um registro para outro solicitado no item b, poucos conseguiram transformar o problema em uma tabela.

O gráfico 2 apresenta quantitativamente o desempenho dos alunos a respeito das questões 2, 3 e 4 que teve como objetivo a análise dos conhecimentos prévios dos discentes quanto aos conceitos de proporcionalidade direta ou inversa e também quanto ao conhecimento do registro gráfico cartesiano de uma função de proporcionalidade direta ou função linear.

Gráfico 2: Número de acertos e erros das questões 2, 3 e 4.

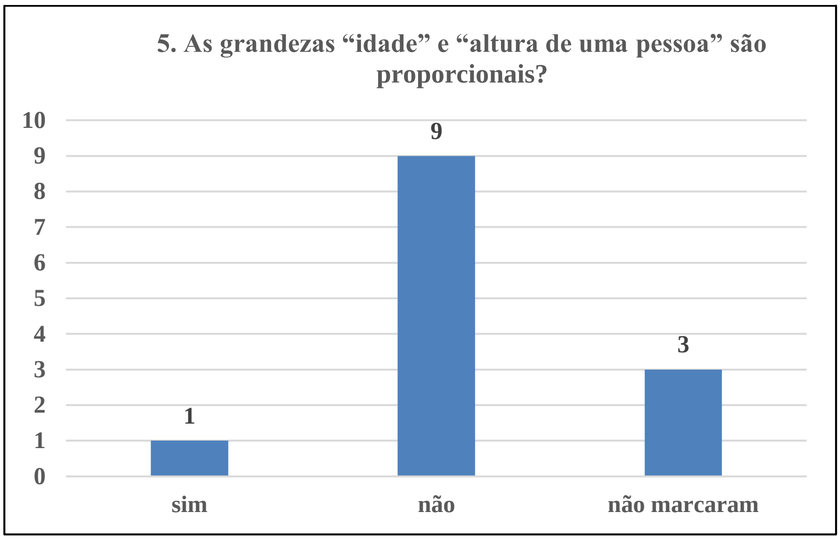


Fonte: Autor (2016)

Dois fatos são importantes destacar aqui acerca do gráfico 2. 1) A questão 3 perguntava se as grandezas "tempo para realizar uma tarefa" e "número de funcionários" são diretamente ou inversamente proporcionais e 9 dos 13 alunos erraram. 2) A questão 4 continha dois gráficos cartesianos, sendo que o gráfico do item a) é uma reta que passa pela origem dos eixos e a reta do item b) não passava pela origem, mesmo assim 4 alunos marcaram erradamente o item b).

A questão 5 perguntava se as grandezas "idade" e "altura de uma pessoa" são proporcionais e justificar a resposta. O gráfico 3 apresenta quantitativamente as respostas dadas pelos alunos e logo abaixo descrevemos algumas das justificativas dadas pelos poucos alunos que quiseram argumentar.

Gráfico 3: Número de acertos e erros da questão 5.



Fonte: Autor (2016)

Destacaremos as justificativas (registradas fielmente) dadas por alguns alunos quanto a relação entre as grandezas envolvidas na questão 5, são elas:

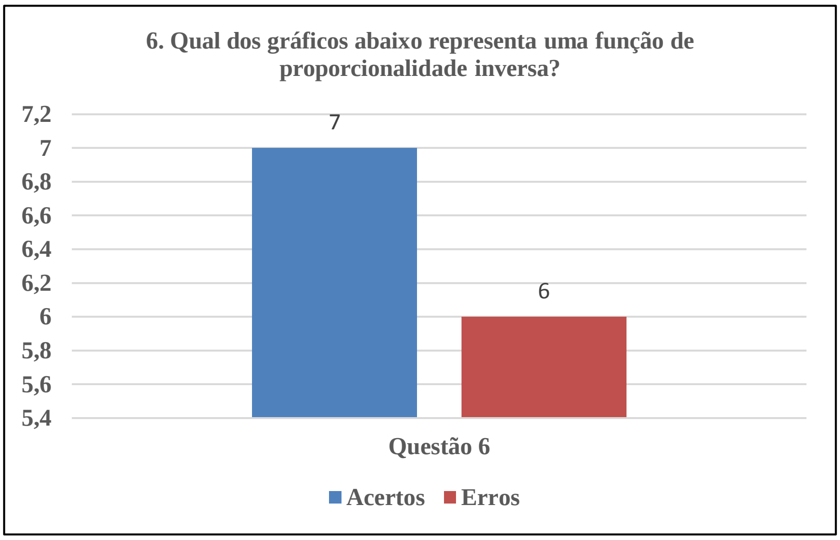
- ✓ **(Resposta do aluno A)** “Não, pois a altura varia muito do genético e não há uma base que os ligue”
- ✓ **(Resposta do aluno B)** “Não porque a altura não interfere na idade da pessoa”.
- ✓ **(Resposta do aluno D)** “Não porque a idade não corresponde à altura”.
- ✓ **(Resposta do aluno E)** “Não, pois nem sempre uma pessoa com mais idade será maior, e verse versa”.
- ✓ **(Resposta do aluno I)** “Não, idade e altura são grandezas inversamente proporcionais”.
- ✓ **(Resposta do aluno J)** “Não, pois as vezes umas pessoas crescem mais e outras menos”.
- ✓ **(Resposta do aluno L1)** “Não porque as medidas são medidas de forma diferentes”.
- ✓ **(Resposta do aluno L2)** “Não, pois não significa que você tem tal idade e vai ter certa altura”.

Das justificativas acima, podemos notar que alguns alunos têm noção de que não há relação direta nem inversa entre essas duas grandezas e outros ficaram confusos quanto as respostas.

Na questão 6 pede-se para identificar qual dos gráficos representa uma função de proporcionalidade inversa e na questão 7 quer saber se o aluno conhece o método de redução à unidade que é usado para resolver problemas de proporcionalidade direta e inversa.

No gráfico 4 apresentamos um resumo quantitativo das repostas dos alunos quanto a questão 6 e no gráfico 5 apresentamos um resumo quantitativo das respostas dos alunos quanto a questão 7.

Gráfico 4: Número de acertos e erros da questão 6.

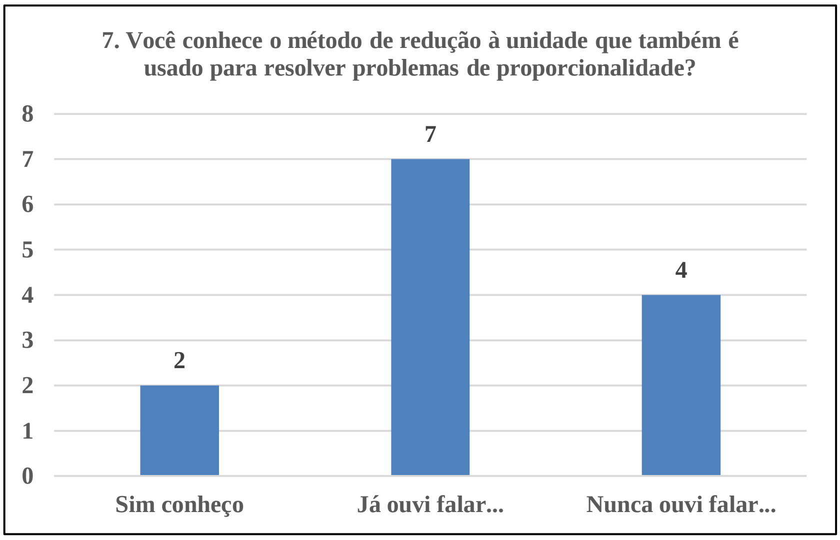


Fonte: Autor (2016)

A resposta correta é a alternativa A, pois o gráfico de uma função de proporcionalidade inversa é uma hipérbole. Vê-se que pouco mais da metade dos alunos pesquisados conseguiram acertar. Durante o segundo encontro, no momento da aula expositiva sobre proporcionalidade inversa, notamos que a maioria nunca tinha visto o gráfico dessa função, porém, esperava-se que a maioria erraria esse tipo de questão no pré-teste. O gráfico da hipérbole geralmente é estudado no primeiro ano do ensino médio no estudo das cônicas e isso faz com que os alunos não tenham noção de como seria uma representação gráfica de uma função de proporcionalidade inversa já nos anos finais do ensino fundamental ou no primeiro ano do ensino médio quando é introduzido o estudo das funções elementares.

O gráfico 5 apresenta o resultado do quesito 7 do pré-teste, o qual pergunta se o discente conhece o método de redução à unidade que é usado para resolver problemas de proporcionalidade. Como podemos observar, apenas 2 dos 13 alunos disseram que conheciam o método.

Gráfico 5: Respostas da questão 7

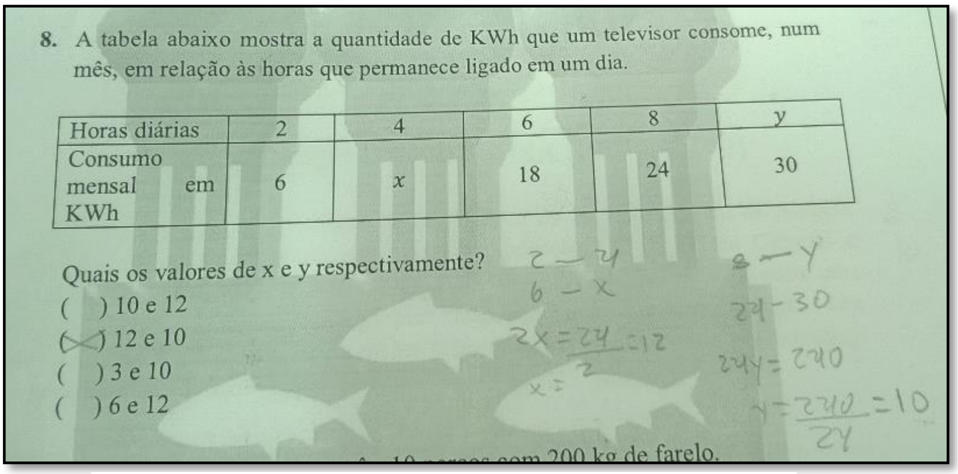


Fonte: Autor (2016)

A questão 8 trata de um problema cotidiano que ocorre em qualquer residência, ou seja, o consumo mensal em Kwh de energia elétrica. As informações estão dispostas de forma tabular e pede para o aluno descobrir ou identificar os valores de x e y. No gráfico 6 apresentamos quantitativamente os resultados das respostas desse problema.

Podemos observar que o número de acertos é até razoável para um tipo de problema de proporcionalidade direta simples. O que chama atenção nos resultados desse problema é que apenas um aluno dos 13 resolveu o problema usando o tratamento e a conversão segundo e teoria de Duval. Na figura 27, vê-se que na passagem final do cálculo do valor de x ele comete um simples erro que é comum entre os alunos, ou seja, divide por 2 ambos os lados da igualdade, mas esquece de deixar o x isolado.

Figura 27: Solução da questão 8 feita pelo aluno L3



8. A tabela abaixo mostra a quantidade de KWh que um televisor consome, num mês, em relação às horas que permanece ligado em um dia.

Horas diárias	2	4	6	8	y
Consumo mensal em KWh	6	x	18	24	30

Quais os valores de x e y respectivamente?

( ) 10 e 12
(X) 12 e 10
( ) 3 e 10
( ) 6 e 12

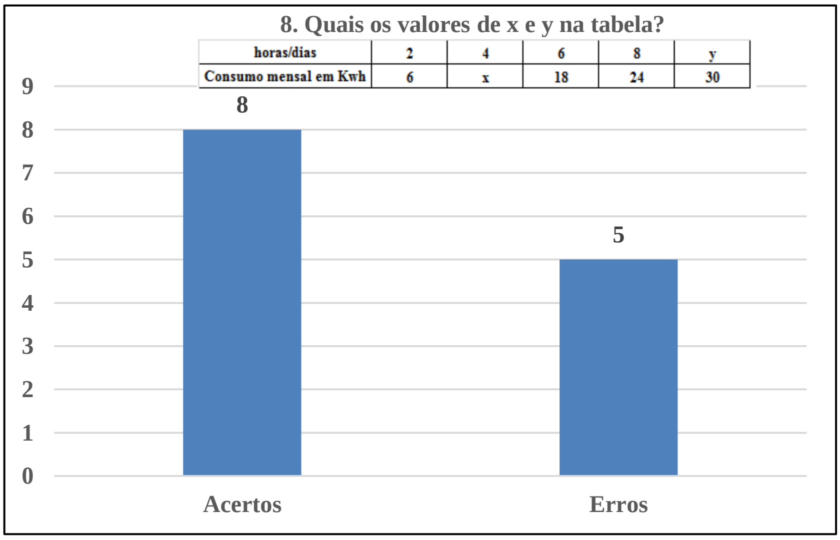
2 — 4
6 — x
$2x = \frac{24}{2} = 12$
$x =$

8 — y
24 - 30
24y = 240
$y = \frac{240}{24} = 10$

Fonte: Autor (2016)

Ainda na figura 27 notamos que o aluno fez uso da famosa regra de três para resolver o problema, ou seja, para o cálculo do valor de x e de y. O gráfico 6 mostra o número de respostas da questão 8.

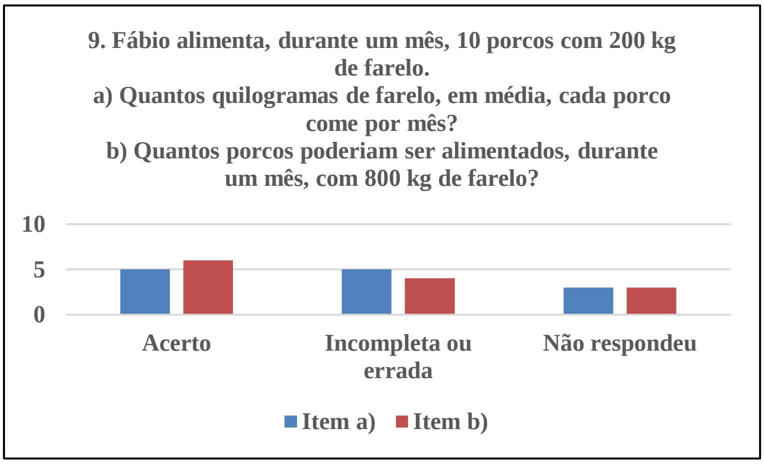
Gráfico 6. Acertos e erros da questão 8.



Fonte: Autor (2016)

A questão 9 é outro problema simples de proporcionalidade direta igualmente a questão 1. Nessa questão o autor afirma que 200 kg de farelo alimentam, em um mês, 10 porcos e pergunta no item a) quantos quilogramas de farelo, em média, cada porco come por mês. No item b) pede-se o número de porcos que poderiam ser alimentados em um mês com 800 kg de farelo. Esperava-se objetivamente no item a) e consequentemente no item b) que alguns alunos utilizassem o método de redução a unidade para resolver tal problema, mas infelizmente dos poucos que conseguiram resolver satisfatoriamente esse problema foi usando a regra de três e/ou também fazendo uma simples divisão. No gráfico 7 apresentamos um resumo quantitativo das respostas dos alunos quanto a essa questão.

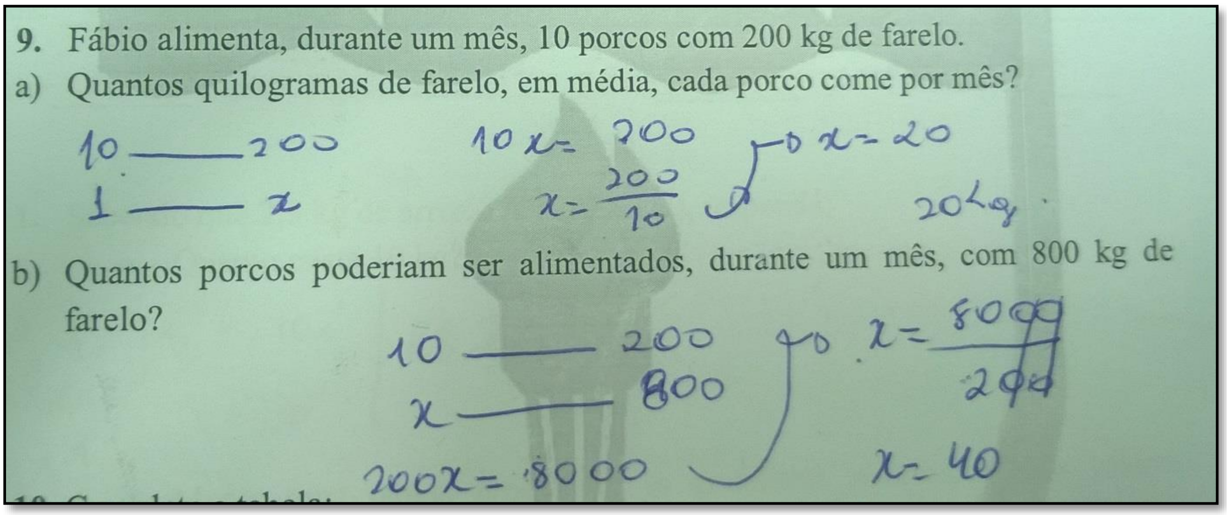
Gráfico 7. Respostas da questão 9.



Fonte: Autor (2016)

Destacamos na figura 28 abaixo a solução apresentada pelo aluno **E**, onde ele faz uso da regra de três e seguiu o tratamento correto na resolução dessa questão.

Figura 28: Solução da questão 9, item a) e b) feita pelo aluno E.



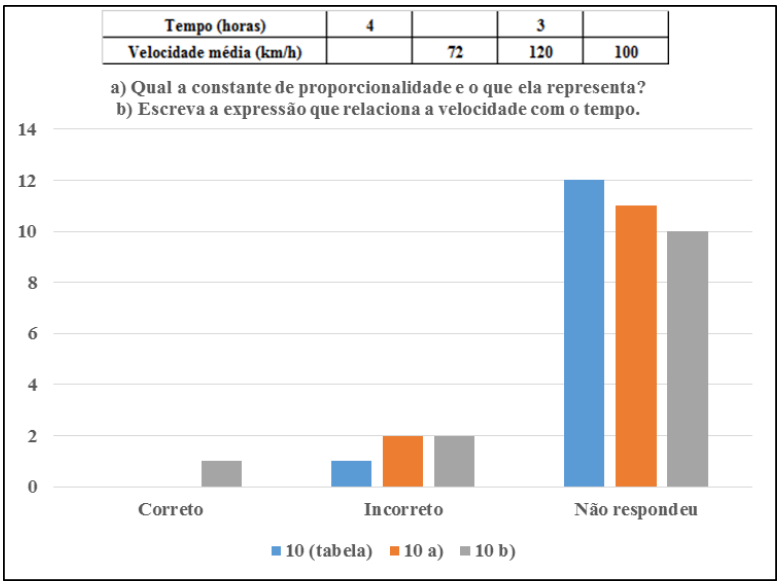
Fonte: Autor (2016)

Por fim, analisando a questão 10 que traz uma tabela com informações sobre velocidade média (em km/h) e tempo (em horas), nota-se que os alunos apresentaram dificuldades na interpretação desse problema, principalmente no item a) que pede a constante de proporcionalidade. No item b) ele pede a expressão analítica de acordo com o preenchimento correto da tabela. Essa questão foi a mais complexa no sentido amplo do conceito de proporcionalidade inversa, pois, a interpretação da constante de proporcionalidade é fundamental para a aprendizagem de novos problemas e que segundo a teoria da aprendizagem significativa seria um subsunçor para ancorar e adquirir novos conhecimentos e interpretar novas situações.

Além dos itens a) e b), a questão 10 pede para preencher corretamente a tabela, ou seja, o aluno deverá notar a relação entre os números envolvidos na tabela que é, nesse caso uma relação de proporcionalidade inversa e com isso a constante seria o número 360 logo, respondendo ao item b) a expressão analítica seria $x \cdot y = 360$ ou $y = \frac{360}{x}$.

No gráfico 8 abaixo apresentamos o número de acertos e erros da questão 10 do pré-teste.

Gráfico 8. Acertos e erros da questão 10.

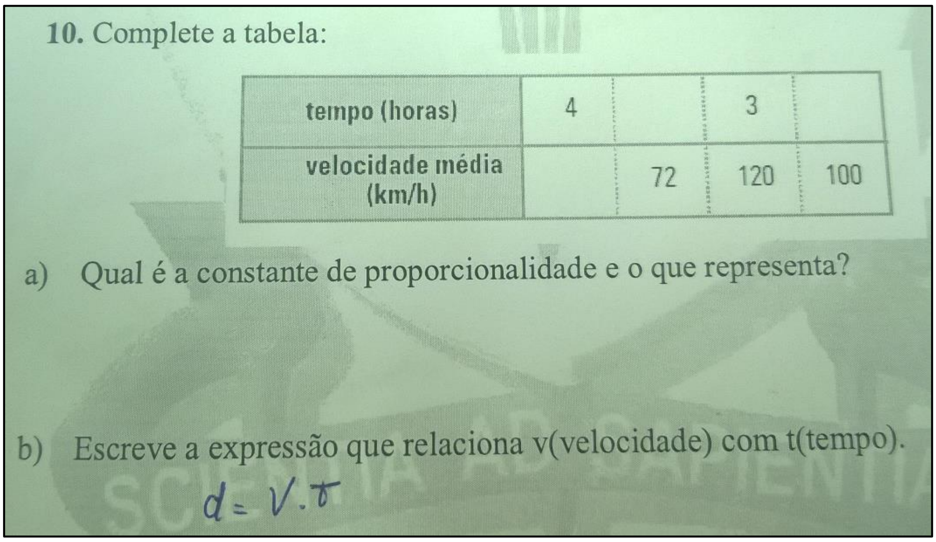


Fonte: Autor (2016)

Do gráfico 8 acima, nota-se claramente um possível cansaço por parte dos alunos, pois, todos eles têm condições de responder questões desse tipo e a grande maioria não respondeu. Mas vamos destacar aqui as respostas dos alunos **B** e **L2** do item b) da questão 10.

As figuras 29 e 30 mostram as respostas dos alunos **B** e **L2** respectivamente.

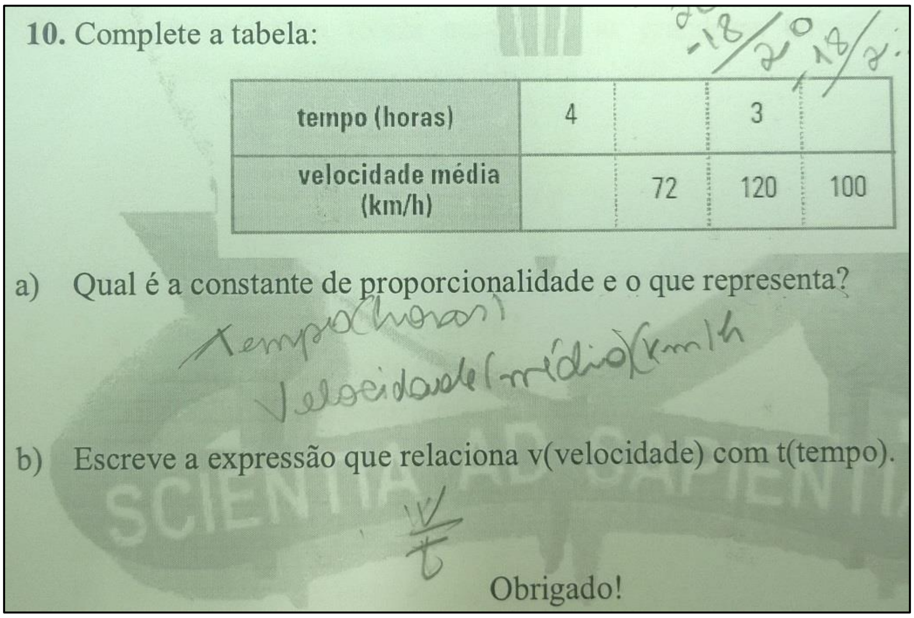
Figura 29. Resposta do aluno B da questão 10 item b).



Fonte: Autor (2016)

Os conhecimentos prévios desses alunos quanto aos conceitos de Física podem ter gerado essas respostas. O item b) da questão 10 poderia (ou deveria) ser reescrito da seguinte forma: b) “escreva a expressão analítica que relaciona v(velocidade) com t(tempo) de acordo com os números da tabela acima”. Nesse caso, o aluno **B** respondeu corretamente conforme a pergunta, pois $d = v \cdot t$, ou seja, a velocidade média é inversamente proporcional ao tempo, faltando apenas finalizar a resposta do item substituindo d por 360 que é a constante de proporcionalidade, logo, teríamos $v \cdot t = 360$. O aluno **L2** cometeu erro ao escrever $\frac{v}{t}$ numa tentativa de lembrar o que o aluno **B** respondeu.

Figura 30. Resposta do aluno L2 da questão 10, item b).



10. Complete a tabela:

tempo (horas)	4		3	
velocidade média (km/h)		72	120	100

a) Qual é a constante de proporcionalidade e o que representa?

Tempo(horas)
Velocidade(médio)(km/h

b) Escreve a expressão que relaciona v(velocidade) com t(tempo).

$\frac{v}{t}$

Obrigado!

Fonte: Autor (2016)

Segundo a teoria de Ausubel, a aprendizagem significativa caracteriza-se pela interação cognitiva entre o conhecimento prévio e o novo conhecimento. Um dos objetivos desse questionário pré-teste é analisar e averiguar os conhecimentos prévios dos alunos quanto aos conceitos de proporcionalidade direta e inversa. O próprio Ausubel já dizia que se queremos promover aprendizagem significativa é preciso averiguar esse conhecimento prévio e ensinar de acordo (MOREIRA, 2010).

Para Duval (2003), a originalidade da atividade matemática está em mobilizar simultaneamente ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação.

As questões do questionário pré-teste foram bem variadas seguindo a teoria de Duval, ou seja, questões que envolviam representações tabular, representação gráfica, língua materna, conceitual, etc. Dessa forma, esperava-se que o aluno percebesse a importância dos vários registros semióticos que existe dentro do conteúdo de proporcionalidade e além disso, que ele pudesse fazer os devidos tratamentos e as conversões quando necessários. Portanto, de modo geral, as respostas dos alunos no pré-teste demonstram as várias dificuldades quanto a variação dos registros de representação semiótica, ou seja, quanto ao uso do tratamento e quanto das conversões.

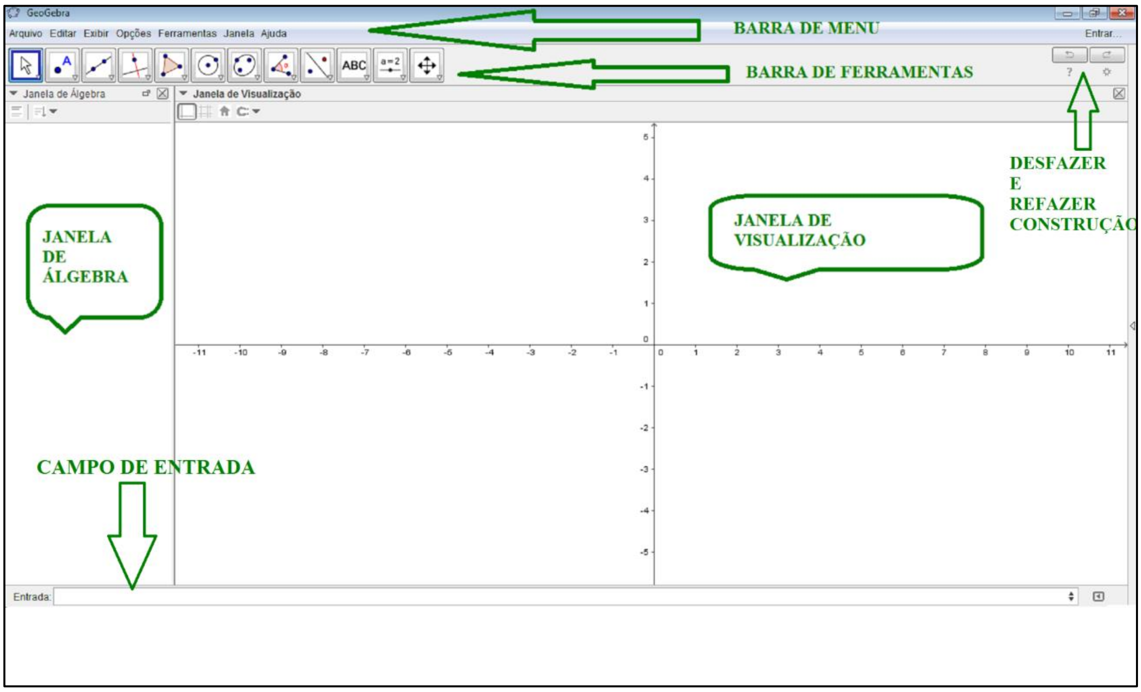
5.3 O uso do Geogebra na resolução de problemas de proporcionalidade.

Iniciamos a oficina apresentando as principais ferramentas básicas do software Geogebra para os alunos envolvidos na pesquisa. Apresentadas as ferramentas, aplicamos as mesmas na resolução de problemas de proporcionalidade.

Participaram dessa oficina 13 alunos. Como tinham 17 computadores em total funcionamento, ficou um computador por aluno. Inicialmente o pesquisador apresentou o fundador do Geogebra (Markus Hohenwarter) e comentou sobre a importância do software no ensino/aprendizagem da Matemática tanto do ensino fundamental, quanto do ensino médio, superior e também na pós-graduação.

Foram apresentadas as barras de menu, barra de ferramentas, janelas de álgebra, janela de visualização e o campo de entrada (Figura 31). Após apresentação do campo de entrada, o pesquisador mostrou e fez comentários sobre a maioria dos botões de cada guia da barra de ferramentas. Por exemplo, a primeira guia contém as ferramentas “mover” e “rotação em torno de um ponto”, a segunda guia contém as ferramentas “ponto”, “ponto em objeto”, “vincular/desvincular ponto”, “interseção de dois objetos”, “ponto médio ou centro” e assim sucessivamente até a última guia que contém as ferramentas “mover janela de visualização” etc. (figura 32)

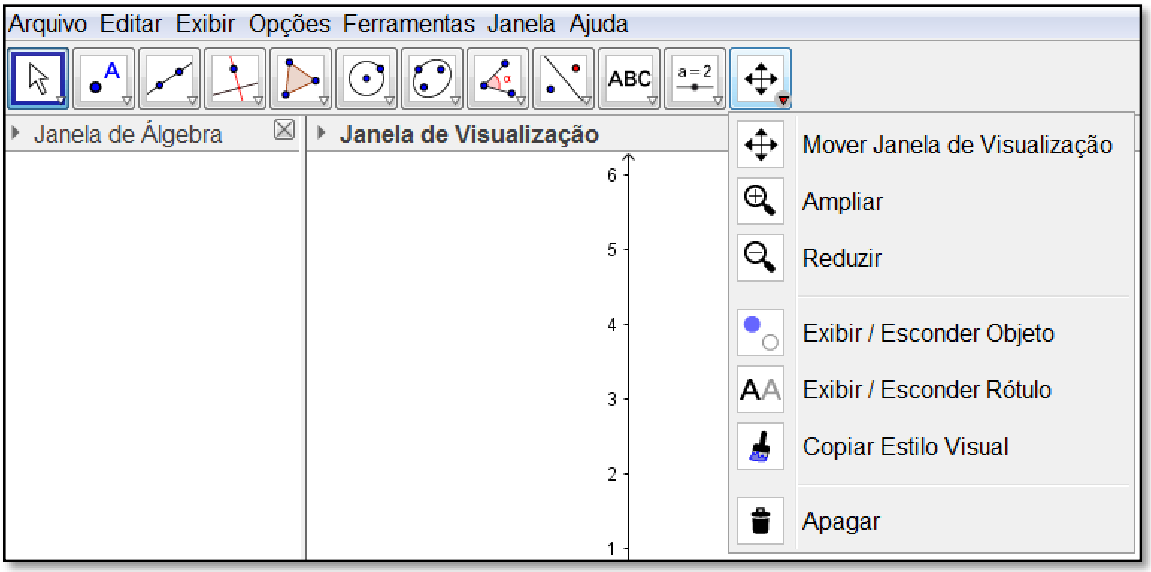
Figura 31: Interface do geogebra e suas barras.



Fonte: Autor (2016)

O campo de entrada do Geogebra é onde digitamos as equações e as funções sintaticamente. Caso o usuário escreva errado o software mostrará erro sintático. A janela de visualização é a área onde mostra as construções e os gráficos, figuras e objetos descritos no campo de entrada.

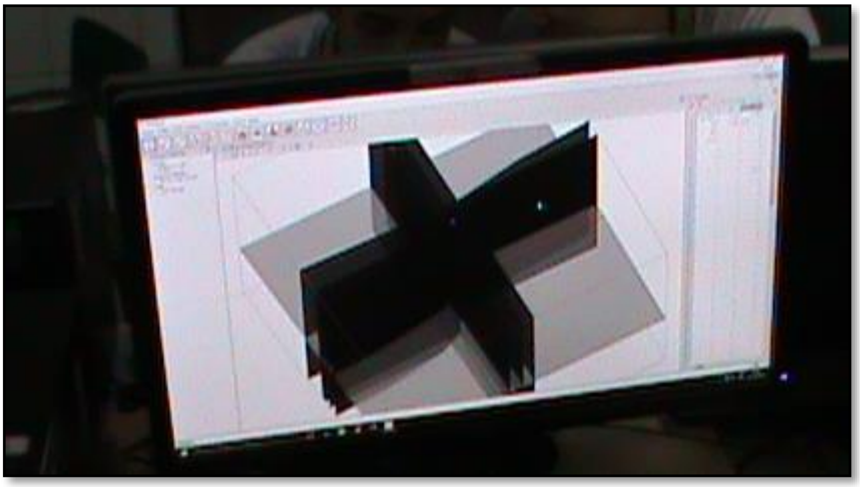
Figura 32: Última guia da barra de ferramentas.



Fonte: Autor (2016)

Finalizada as apresentações das ferramentas, os alunos ficaram à vontade para construir objetos/figuras utilizando as ferramentas apresentadas. Nesse momento, foram muitas dúvidas quanto ao uso das ferramentas, mas aos poucos eles demonstravam suas construções e ao mesmo tempo muita empolgação e entusiasmo com o software, pois ele oferecia muito mais do que eles imaginavam. Os objetos construídos foram: triângulos, retângulos, polígonos em geral, círculos e circunferências, retas e segmentos de retas, preenchimentos e mudança de cores nos objetos construídos na janela de visualização e teve até aluno que percebeu por si só a janela de visualização 3D e começou a construir planos no espaço tridimensional. (Figura 33).

Figura 33: Construções na janela 3D do Geogebra.



Fonte: Autor (2016)

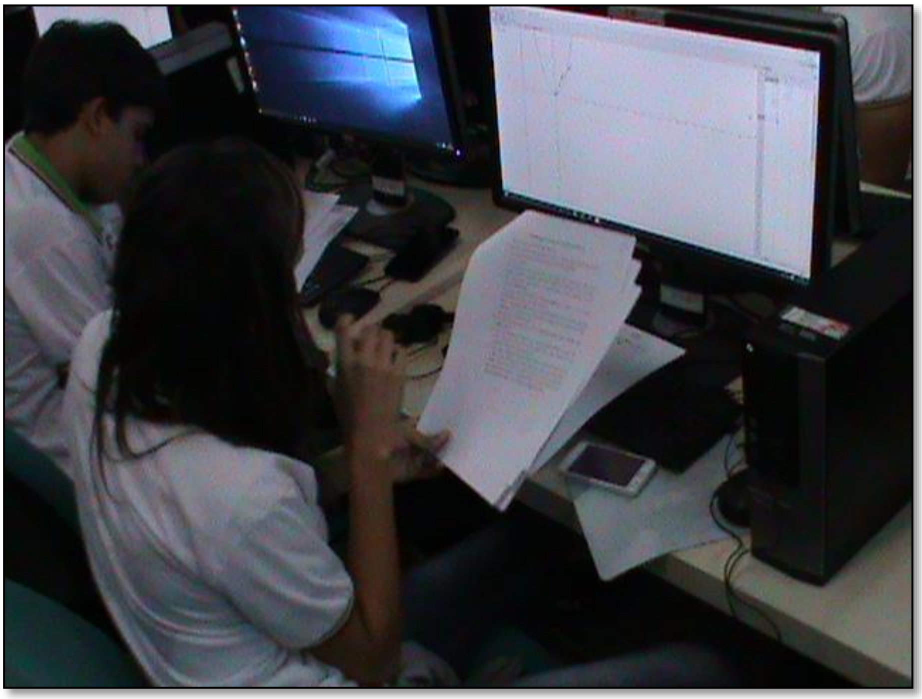
O objetivo de apresentar a planilha para os alunos foi de mostrar as relações existentes entre os objetos da janela de visualização e o que foi digitado em uma ou mais células da planilha.

Apresentamos também sobre o controle deslizante e sobre as atividades interativas criadas por ele no Geogebra. O controle deslizante é uma ferramenta que serve para criar movimentos numa função ou também para variar os valores dos parâmetros de um objeto matemático.

As atividades interativas encontram-se no blog http://professorhugoleao.blogspot.com.br/ e podem ser acessadas tanto pelo navegador ou, podem ser baixadas caso o usuário tenha o Geogebra instalado em sua máquina. O objetivo do blog foi de compartilhar atividades com professores, alunos e demais interessados na aprendizagem de proporcionalidade direta e inversa.

Por fim, o professor pesquisador solicitou que os alunos resolvessem pelo menos dois problemas da lista contida no material da oficina.

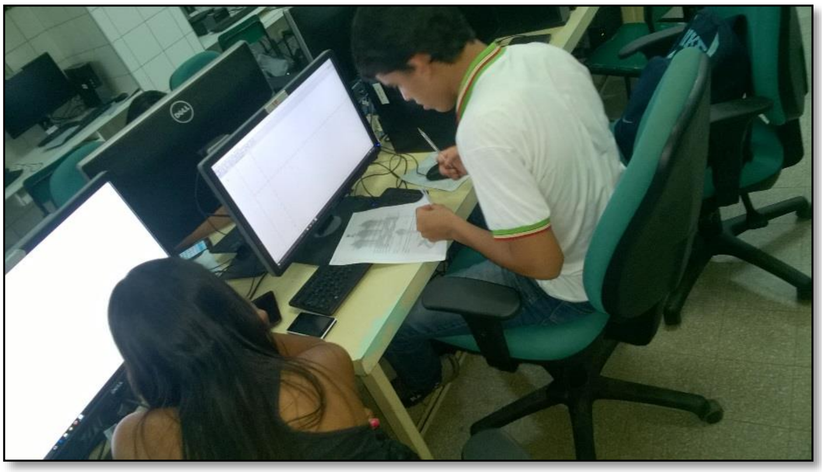
Figura 34: Dois alunos resolvendo problemas de proporcionalidade



Fonte: Autor (2016)

A figura 34 mostra dois alunos resolvendo problemas de proporcionalidade utilizando o software Geogebra. Alguns alunos sentaram em duplas para ajudar com o Geogebra ou com as questões. Outros conseguiram resolver individualmente utilizando a ferramenta apresentada. É o caso da figura 35 abaixo.

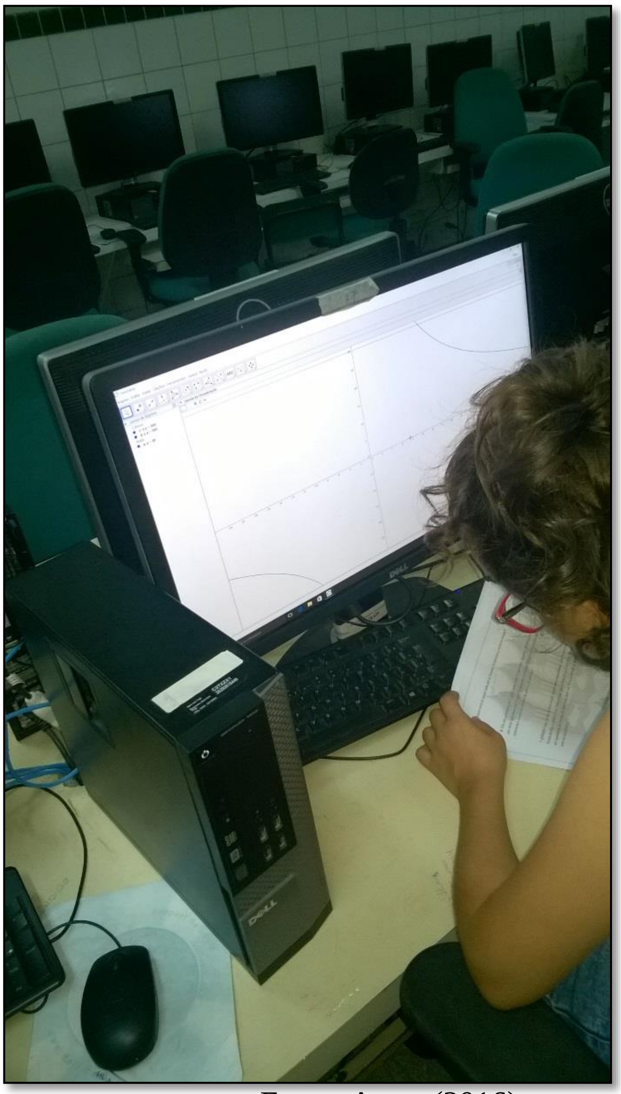
Figura 35: Alunos respondendo individualmente os problemas da oficina.



Fonte: Autor (2016)

A proposta de criar atividades matemáticas utilizando o Geogebra visa na qualificação do uso de recursos tecnológicos dentro e fora de sala de aula, bem como na melhoria do processo de ensino e aprendizagem. O ensino e aprendizagem de proporcionalidade aliado ao uso do Geogebra mostrou que certas propriedades específicas foram absolvidas devido ao formato do software ao mostrar ao mesmo tempo as equações, tabelas e gráficos.

Figura 36: Aluno criando gráfico no Geogebra.



Fonte: Autor (2016)

A figura 36 acima mostra uma aluna que tinha criado uma função de proporcionalidade inversa, que nesse caso é uma hipérbole. Os alunos afirmaram que sem o Geogebra a interpretação gráfica seria mais difícil de entender e até desenhar os mesmos. Por mais simples que seja a função $x.y = 1$ por exemplo, sua interpretação gráfica para alunos de ensino médio, que está acostumado a ver funções lineares e quadráticas apenas, é algo novo e muitas vezes difícil de compreender.

5.4 Análise das estratégias de resolução dos problemas do questionário pós-teste por meio do Geogebra.

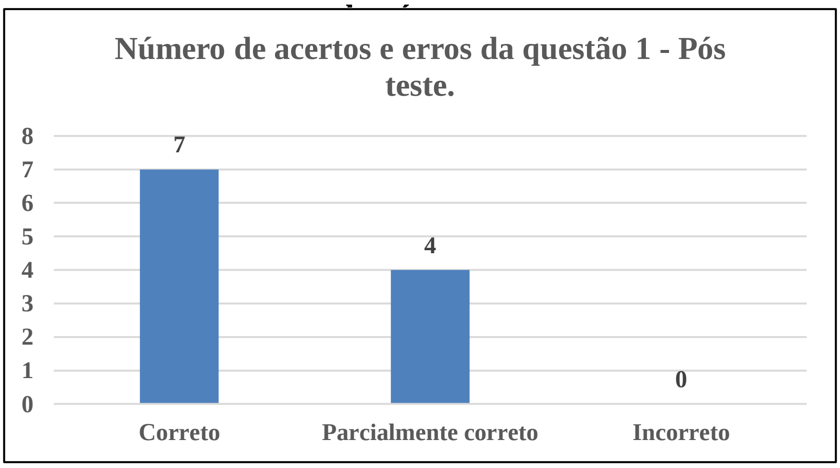
O questionário de pós-teste contém 8 questões sobre proporcionalidade direta e inversa. Naturalmente, algumas questões selecionadas para esse questionário são análogas as questões do pré-teste. A diferença estava nos problemas em que necessariamente o aluno poderia fazer uso do software Geogebra no momento da resolução. O objetivo de aplicar o pós-teste está na verificação da aprendizagem sobre proporcionalidade direta e inversa após as aulas expositivas feitas pelo pesquisador e também após a realização da oficina sobre o Geogebra aplicado aos problemas de proporcionalidade.

Vimos nas análises do pré-teste (seção 5.1) que os alunos apresentaram várias dificuldades na resolução de problemas envolvendo conceitos de proporcionalidade direta e inversa e além disso, notamos que a maioria dos discentes não faz as devidas conversões e os tratamentos segundo a teoria dos registros de representação semiótica de Duval.

Acreditamos que o questionário pós-teste seja potencialmente significativo, pois os problemas nele contido faz o aluno buscar tanto o tratamento quanto a adequada conversão e com isso, adquirir maior conhecimento acerca daquele conteúdo. No dia da aplicação do pós-teste, compareceram apenas 11 dos 14 alunos envolvidos.

A questão 1 contém duas tabelas com seus respectivos valores e grandezas. Nesse problema, os alunos deveriam verificar se há proporcionalidade e em caso afirmativo indicar a constante de proporcionalidade. O gráfico abaixo apresenta o quantitativo das respostas dos alunos da questão 1 do pós-teste.

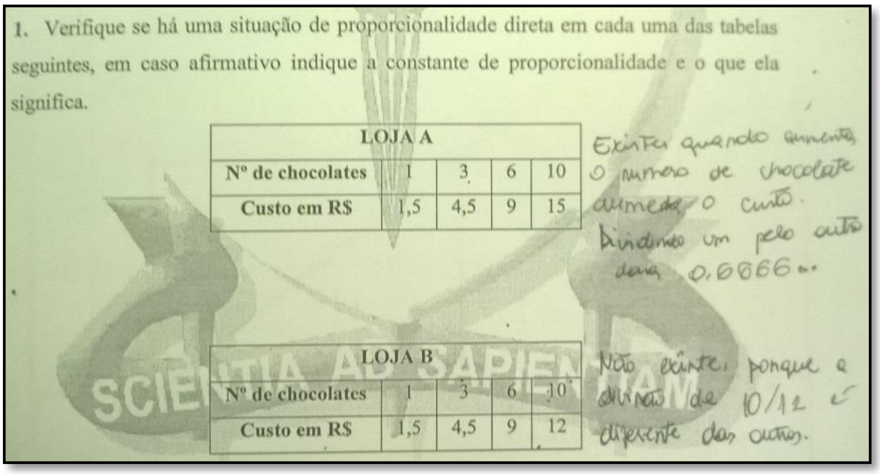
Gráfico 9: Gráfico do número de acertos e erros da questão



Fonte: Autor (2016)

Destacamos na figura 37 a resposta da questão 1 de um aluno que explicou corretamente as situações das duas tabelas sobre as relações de proporcionalidade direta.

Figura 37: Resposta do aluno L1 da questão 1 do pós-teste.



1. Verifique se há uma situação de proporcionalidade direta em cada uma das tabelas seguintes, em caso afirmativo indique a constante de proporcionalidade e o que ela significa.

LOJA A				
Nº de chocolates	1	3	6	10
Custo em R$	1,5	4,5	9	15

Existe quando aumenta o número de chocolate aumenta o custo. Dividindo um pelo outro dará 0,6666...

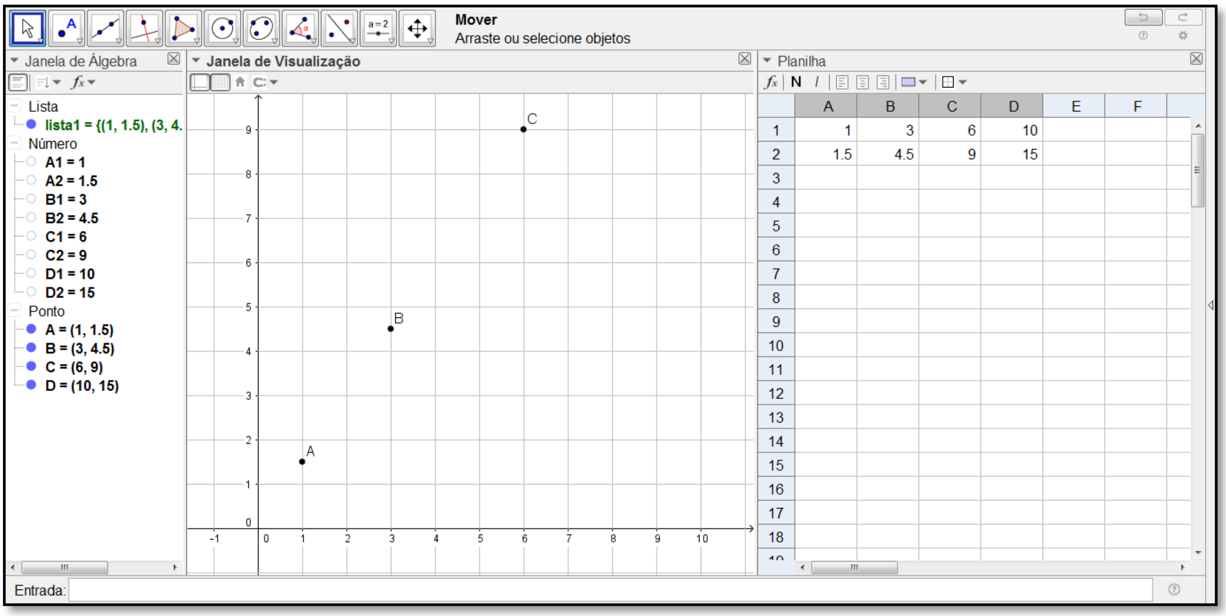
LOJA B				
Nº de chocolates	1	3	6	10
Custo em R$	1,5	4,5	9	12

Não existe, porque a divisão de 10/12 é diferente dos outros.

Fonte: Autor (2016)

Podemos ver no gráfico 9 a evolução dos alunos quanto a aprendizagem dos conceitos de proporcionalidade e também no preenchimento correto de tabelas envolvendo grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.

Figura 38: Criando pontos com a planilha do Geogebra.

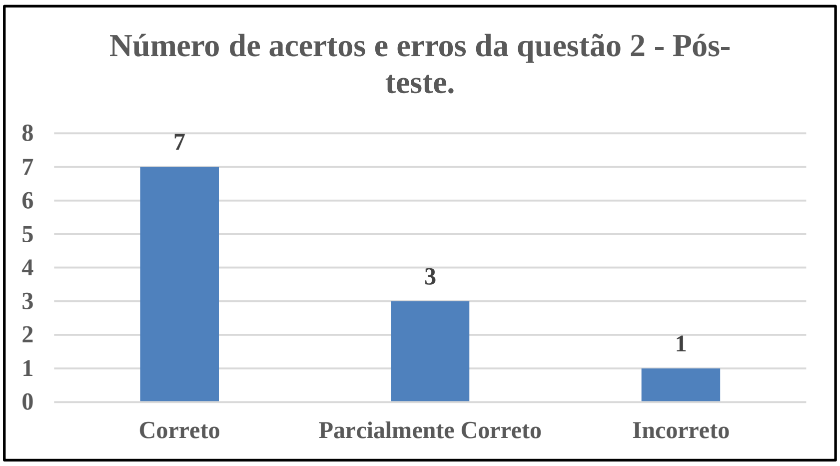


Fonte: Autor (2016)

Na figura 38, o aluno dispôs os números da tabela contida no problema na planilha do Geogebra e depois clicou em criar lista de pontos. Com isso, o software cria automaticamente os pontos de acordo como foi posto na planilha. No caso do problema 1 loja A os pontos estão alinhados e, portanto, definindo uma função linear ou função de proporcionalidade direta, ou seja, pode-se ainda dizer que o número de chocolate é diretamente proporcional ao custo.

A questão 2 trata de um problema simples de proporcionalidade direta e destacava a conversão das informações tanto na representação tabular quanto na representação gráfica. As respostas estão apresentadas no gráfico abaixo.

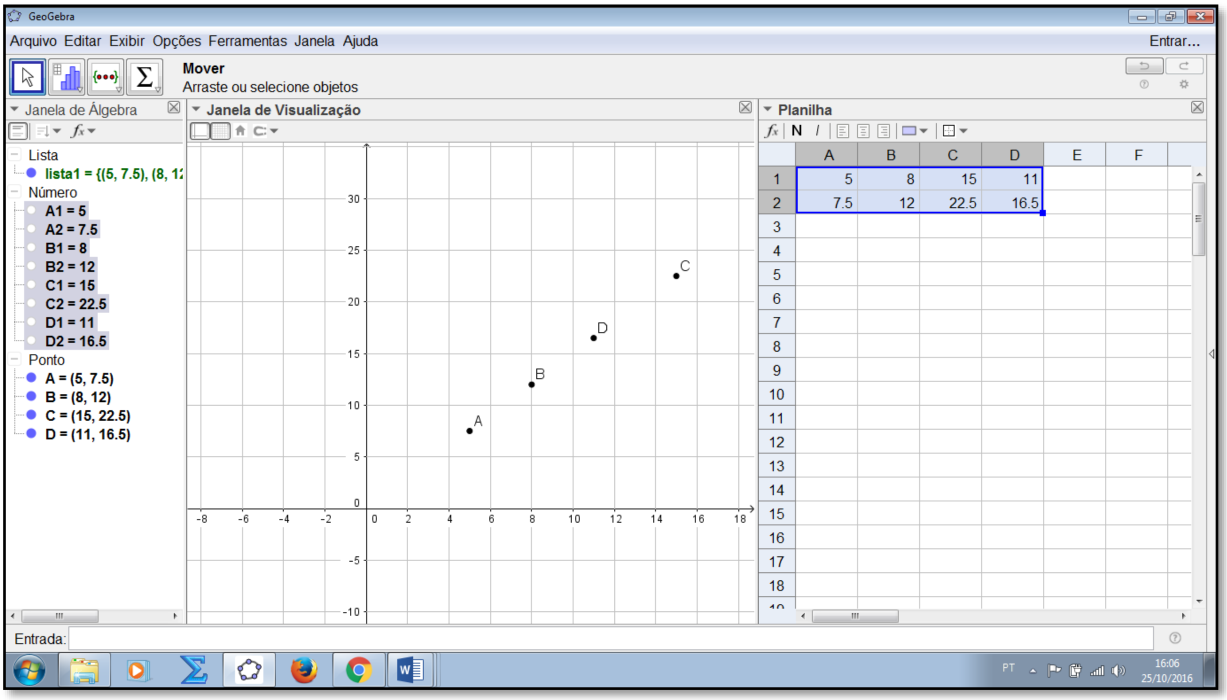
Gráfico 10: Número de acertos e erros da questão 2 - Pós-teste.



Fonte: Autor (2016)

Notamos no gráfico acima que após as aulas sobre proporcionalidade direta e inversa exposta pelo pesquisador houve melhora no desempenho na resolução e interpretação dos problemas do pós-teste. Um dos itens da questão 2 era uma parte do plano cartesiano (1º quadrante) no qual era solicitado ao aluno a marcação do ponto (8,12) no plano e o traçado da reta passando pela origem dos eixos. Apenas 2 dos 11 alunos lembraram de traçar a reta passando pelos pontos marcados no plano cartesiano.

Figura 39: Resolução da questão 2 do pós-teste por meio do Geogebra.

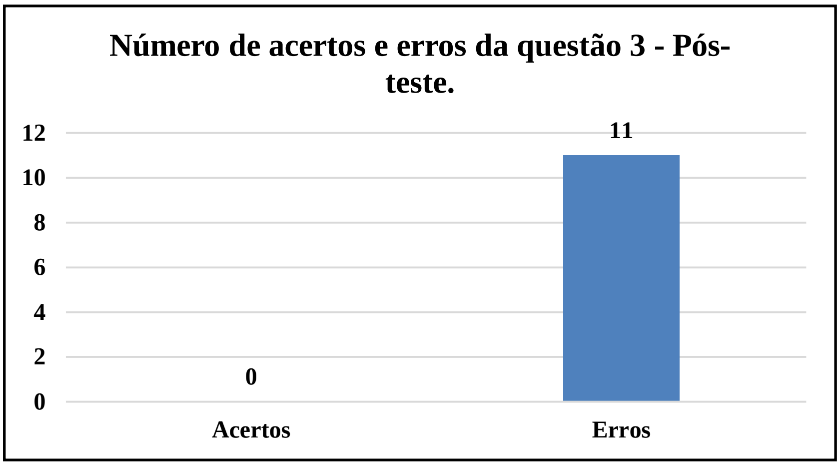


Fonte: Autor (2016)

De forma análoga a questão 1, um aluno resolveu o problema 2 calculando cada espaço vazio da tabela e depois colocou na planilha do Geogebra como mostra a figura 39. Confirmando o alinhamento dos pontos, o aluno entendeu que tratava de uma relação direta entre o número de jornais e o custo. Ainda fazendo uso do Geogebra o aluno calculou a constante de proporcionalidade utilizando o campo de entrada, ou seja, digitou o valor dos 5 jornais que no caso foi R$7,5 e dividiu por 5 obtendo 1,5.

A questão 3 é um problema de proporcionalidade inversa. Mas após as análises vimos a falta de interpretação por parte dos alunos, pois todos os 11 erraram achando que era uma questão de proporcionalidade direta. De fato, é um problema de proporcionalidade inversa, pois, dobrando ou triplicando o número de canteiros, o tempo em dias diminuirá pela metade ou pela terça parte respectivamente. Nesse caso, como adicionou 12 canteiros então passam a ser 36. Como aumentou em 3/2 o número de canteiros, então o tempo reduzirá a 2/3, ou seja, 20 dias. O gráfico 11 mostra o número de acertos e erros da questão 3.

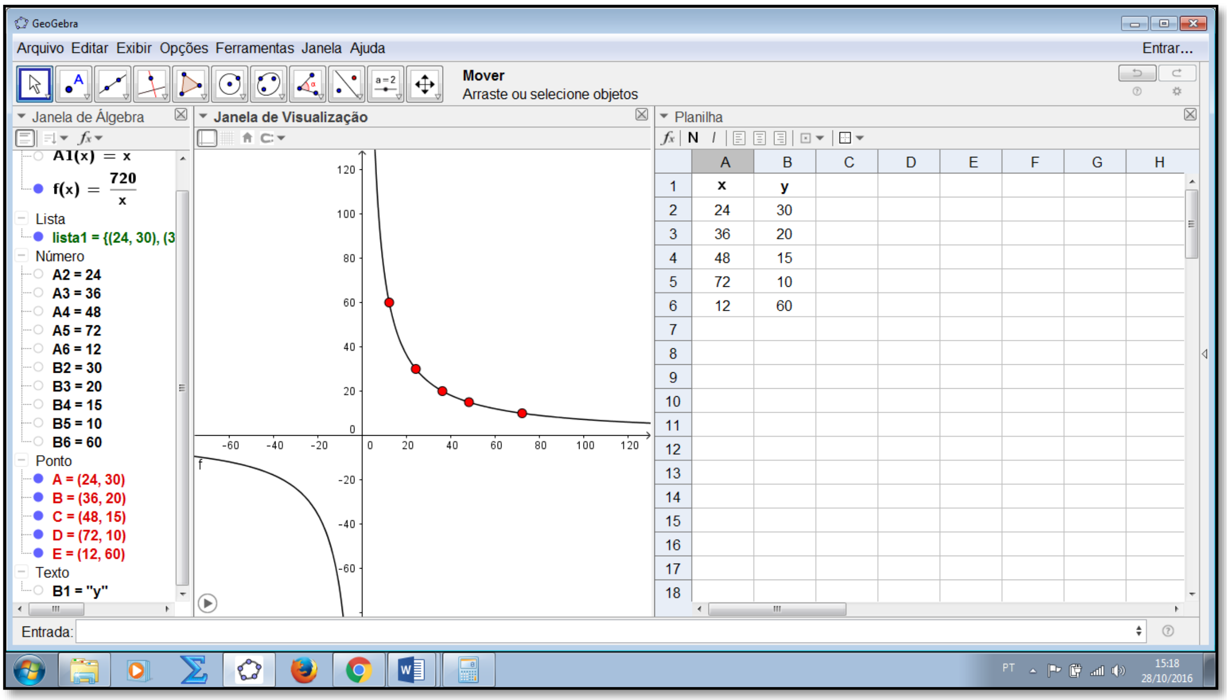
Gráfico 11: Número de acertos e erros da questão 3 - Pós-teste.



Fonte: Autor (2016)

À medida que os alunos iam resolvendo os problemas do pós-teste o professor/pesquisador lembrava que podia fazer uso do software Geogebra na resolução dos mesmos.

Figura 40: Estratégia de resolução da questão 3 do pós-teste por meio do Geogebra.



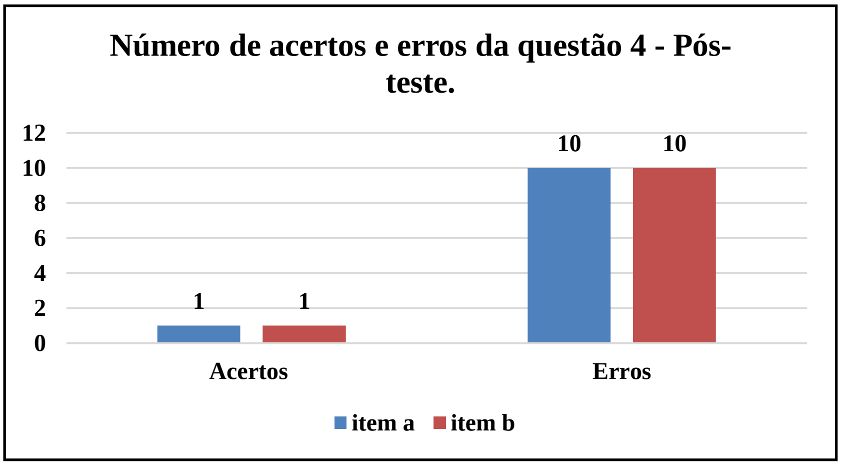
Fonte: Autor (2016)

Ao finalizar a questão 3, um aluno disse ter dúvida quanto a relação entre as grandezas, ou seja, se era direta ou inversa. Pediu ajudar ao professor para fazer como seria usando o Geogebra. Observando a figura 40 acima, dizemos que a coluna x da planilha do

Geogebra corresponde ao número de canteiros e a coluna y corresponde ao tempo em dias. A planilha do Geogebra é excelente quando se trata de demonstrar relação entre duas representações, ou seja, o que está sendo digitado na célula da planilha, automaticamente será mostrado na janela de visualização de forma gráfica, seja pontual ou linear ou curvilínea. Como o produto de cada par de números na planilha é constante e igual a 720, o aluno de imediato afirmou que era proporcionalidade inversa e com isso a interpretação do problema ficou clara. Por ser uma função de proporcionalidade inversa, no plano teremos uma curva chamada hipérbole finalizando, portanto, a questão 3.

A questão 4 é um problema de proporcionalidade direta e a intenção dessa questão era resgatar a ideia da redução a unidade vista durante as aulas expositivas. No entanto, o uso da regra de três prevalece sobre todos na resolução desse tipo de problema e apenas um dos onze alunos acertou os dois itens da questão. O gráfico 12 apresenta o número acertos e erros dos itens a) e b) da questão 4.

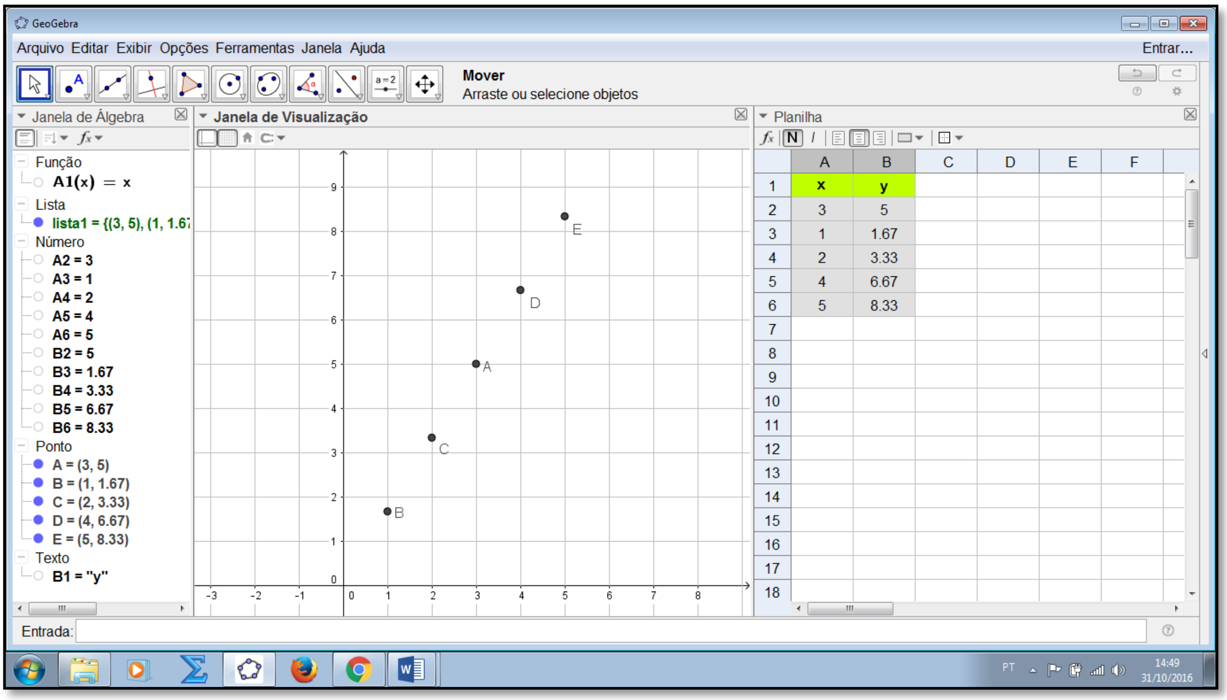
Gráfico 12: Número de acertos e erros da questão 4 - Pós-teste.



Fonte: Autor (2016)

O aluno que fez o problema fez uso do Geogebra com ajuda do professor e já tinha notado a relação direta entre as grandezas e com isso conseguiu mostrar que o valor do item a é 1,67 horas e do item b é 8,33 horas, ou seja, para 5 litros na roçadeira o tempo gasto será de 8,33 horas. Veja na figura 41 abaixo a relação entre as grandezas x (nº de litros) e y (tempo em horas).

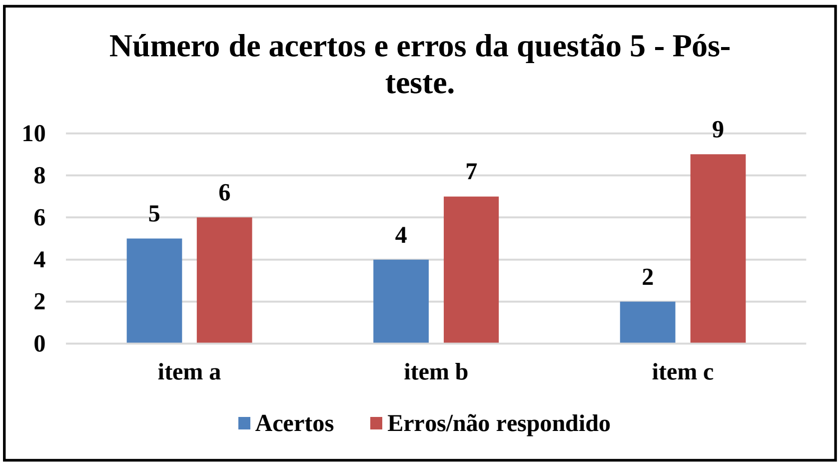
Figura 41: Estratégia de resolução da questão 3 do pós-teste por meio do Geogebra.



Fonte: Autor (2016)

Outro problema de proporcionalidade inversa está na questão 5 e esse tipo de questão foi comentado nas aulas expositivas. Há representação tabular do problema e no item a) ele pede para verificar se existe proporcionalidade inversa e o que representa a constante de proporcionalidade. O item b) fez com que o aluno manipulasse de alguma forma o software Geogebra para representar graficamente a função pedida no item a). A função de proporcionalidade inversa é uma curva chamada hipérbole e como já foi dito antes, eles não imaginavam que o gráfico tinha essa característica. O gráfico 13 apresenta o número de acertos e erros da questão 5.

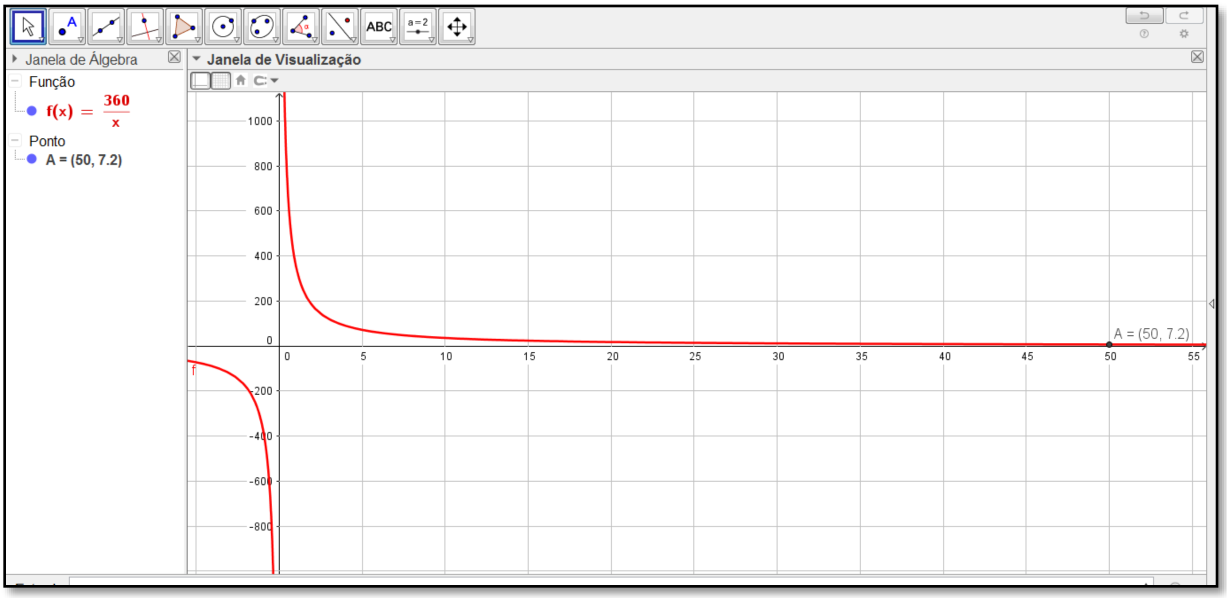
Gráfico 13: Número de acertos e erros da questão 5 - Pós-teste.



Fonte: Autor (2016)

Com ajuda do pesquisador, todos os alunos conseguiram construir o gráfico da questão 5. Um recurso bem interessante que eles comentaram foi o “exibir todos os objetos” pois o gráfico da questão 5 não mostrava inicialmente na área de trabalho do Geogebra, ou seja, não estava visível na janela de visualização. No item c, o aluno podia utilizar o Geogebra para calcular a imagem do número 50 na função $f(x) = \frac{360}{x}$, ou poderia fazer manualmente, que foi o caso de alguns alunos. Novamente o ponto (50, 7.2) não estava visível na janela de visualização e foi preciso utilizar mais uma vez a ferramenta “exibir todos os objetos”. A figura 42 mostra a função $f(x) = \frac{360}{x}$ feita no Geogebra e após a utilização da ferramenta exibir todos os objetos.

Figura 42: Gráfico da função f(x) = 360/x

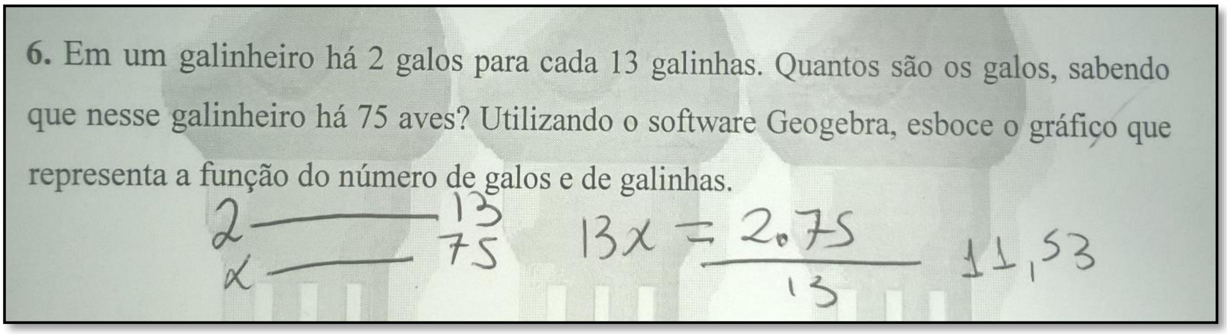


Fonte: Autor (2016)

Podemos notar que automaticamente o Geogebra faz a mudança de escala nos eixos, ou seja, perceba que no eixo x o Geogebra mostra os múltiplos de 5 e no eixo y mostra os múltiplos de 200. É importante mostrar para os alunos que o gráfico não está tocando no eixo x, pois quanto maior for o valor de x na função o valor correspondente de y será ainda menor caracterizando assim a **Hipérbole**. Outro detalhe que foi comentado durante a resolução dessa questão foi a constante de proporcionalidade, ou seja, para cada dois números correspondente no gráfico, o produto é sempre o mesmo que nesse caso é 360.

A questão 6 era um problema de proporcionalidade direta que pedia o número de galos, sendo que a razão entre o número de galos e galinhas é de 2 para 13 e o total de aves é em número de 13. Nessa questão, todos os alunos pediram ajuda ao professor quanto ao recurso do Geogebra para auxiliar no esboço do gráfico número de galos em relação ao número de galinhas. A própria questão diz que eram 2 galos para cada 13 galinhas, logo a função seria $y = 6,5 \cdot x$ onde y é o número de galinhas e x é o número de galos. Todos os 11 erraram (dentre eles, ou não fez ou fez de forma incorreta) essa questão achando que resolve por uma simples regra de três direta dispondo os valores das grandezas como mostra a figura 43 abaixo.

Figura 43: Solução da questão 6 feita pelo aluno A do pós-teste.


6. Em um galinheiro há 2 galos para cada 13 galinhas. Quantos são os galos, sabendo que nesse galinheiro há 75 aves? Utilizando o software Geogebra, esboce o gráfico que representa a função do número de galos e de galinhas.

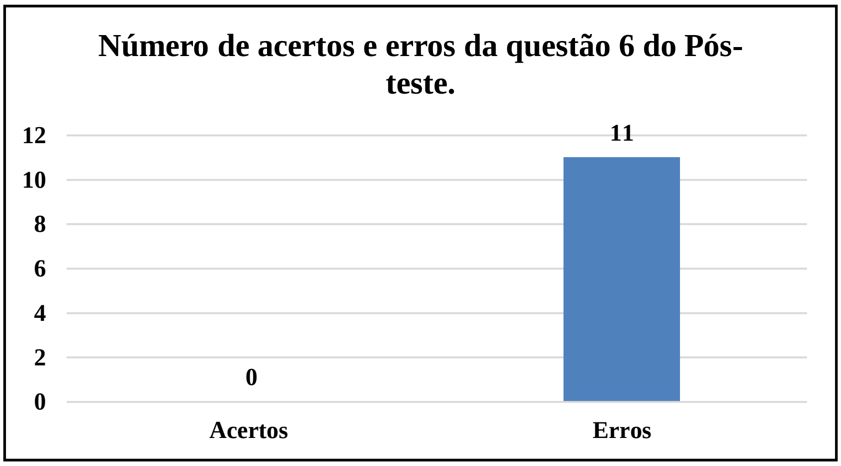
$2 \text{ — } 13$
$x \text{ — } 75$

$13x = \dfrac{2 \cdot 75}{13}$ 11,53

Fonte: Autor (2016)

O gráfico apresenta o número de acertos e erros da questão 6 do pós-teste.

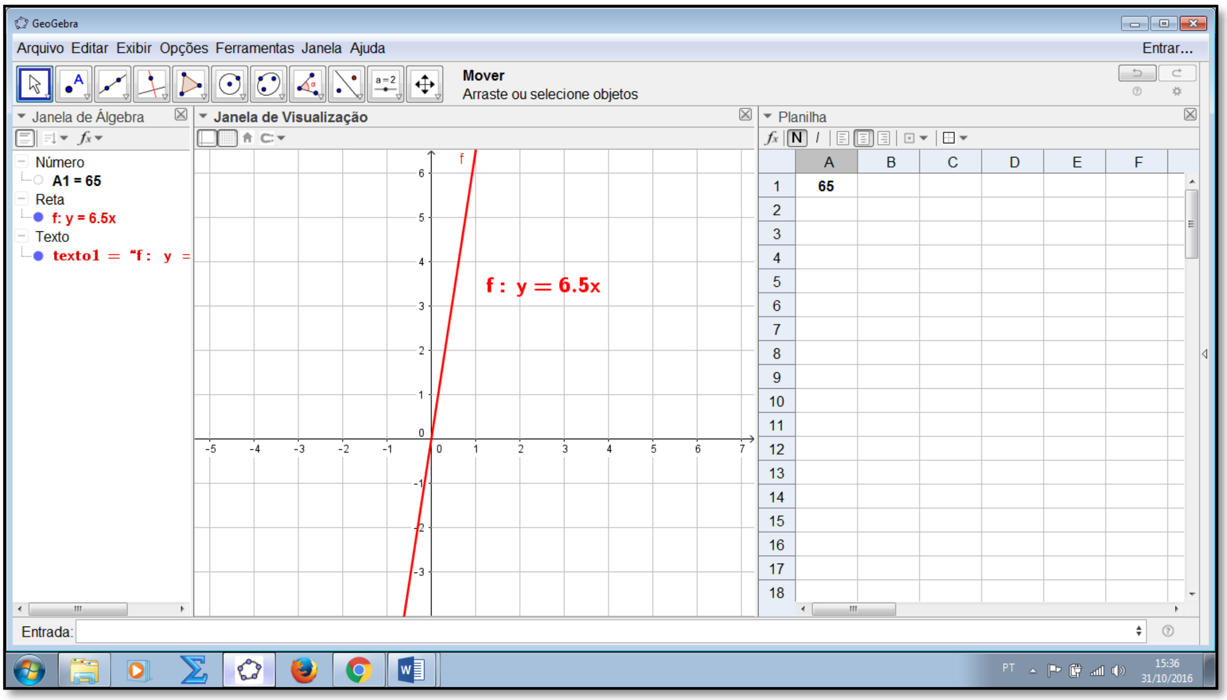
Gráfico 14: Número de acertos e erros da questão 6 - Pós-teste.



Fonte: Autor (2016)

Com o Geogebra, bastava digitar a função $y = 6,5 \cdot x$ no campo de entrada e depois com a planilha aberta digitar na célula o comando “=f(10)” e depois enter. Imediatamente aparecerá o valor de f(10) na célula.

Figura 44: Cálculo da imagem de uma função por meio da planilha do geogebra.

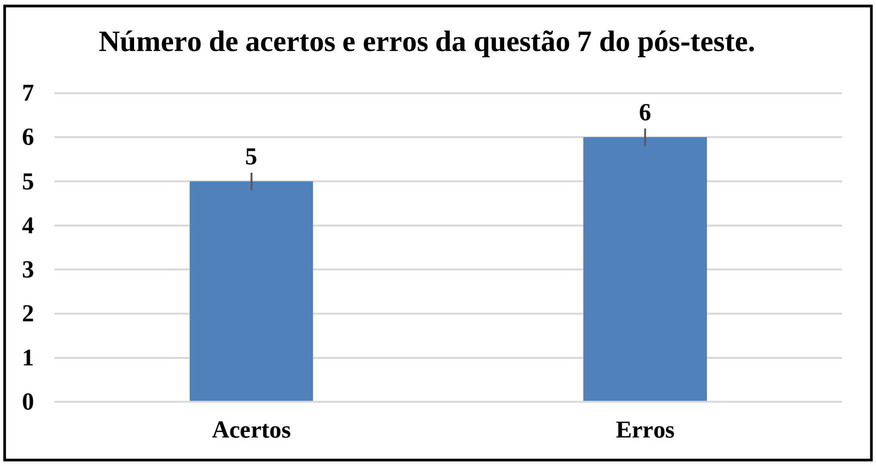


Fonte: Autor (2016)

Para ver a fórmula na célula aperta F2 na planilha. Dessa forma, podemos calcular a imagem de qualquer valor em qualquer função plotada na janela de visualização do Geogebra.

A questão 7 é um problema simples de regra de três onde pede a quantidade de farinha de trigo para fazer um bolo sendo que a pessoa tem apenas 3 ovos e nesse caso, mantendo a mesma proporção dos ingredientes restantes. Sabe-se que para esse bolo precisa-se de 1,5 xícara de farinha de trigo para 4 ovos. Novamente a regra de três foi o único método na resolução desse problema, no entanto, apenas 5 dos 11 resolveram corretamente e dentre os 6 que erraram 3 “armaram” a proporção, mas não deu prosseguimento no cálculo. O gráfico 15 apresenta os acertos e erros da questão 7 do pós-teste.

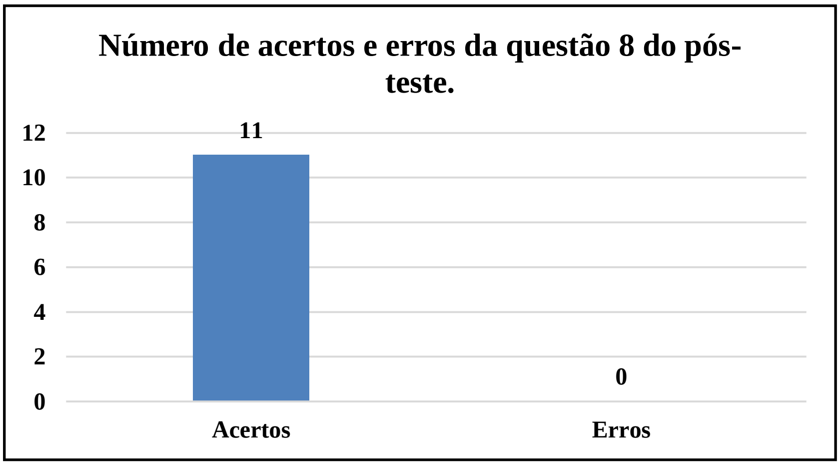
Gráfico 15: Número de acertos e erros da questão 7 do pós-teste.



Fonte: Autor (2016)

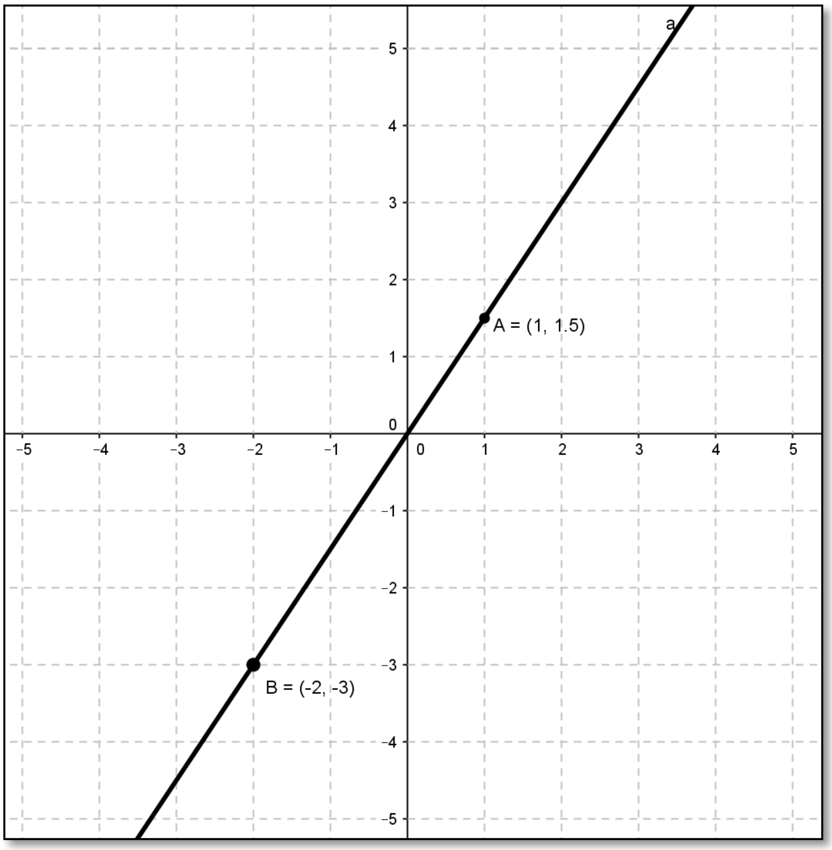
Por fim, a questão 8 apresentava um gráfico de uma função linear no plano cartesiano e pedia para o aluno escrever qual a expressão analítica daquele gráfico no item a) e qual o valor de *f*(200) no item b). Dessa vez todos os 11 alunos ficaram curiosos em saber como achar a expressão analítica de uma função no Geogebra e mais ainda, como calcular o valor ou a imagem de um dado x no domínio através dessa função. Com a ajuda do professor, todos responderam corretamente. Para o cálculo de *f*(200) no Geogebra, o ponto (200,300) não aparece de imediato na janela de visualização (figura 45), no entanto, basta clicar com o botão direito do mouse na área de trabalho do Geogebra e depois escolher a opção exibir todos os objetos (figura 46). Todos os alunos ficaram impressionados com os resultados da oitava questão auxiliado com o Geogebra, pois essa dúvida deles perdurava desde o ensino fundamental e mais ainda no 1º ano do ensino médio quando já eram alunos do instituto. O gráfico 16 apresenta o número de acertos e erros da questão 8 do pós-teste.

Gráfico 16: Número de acertos e erros da questão 8 do pós-teste.



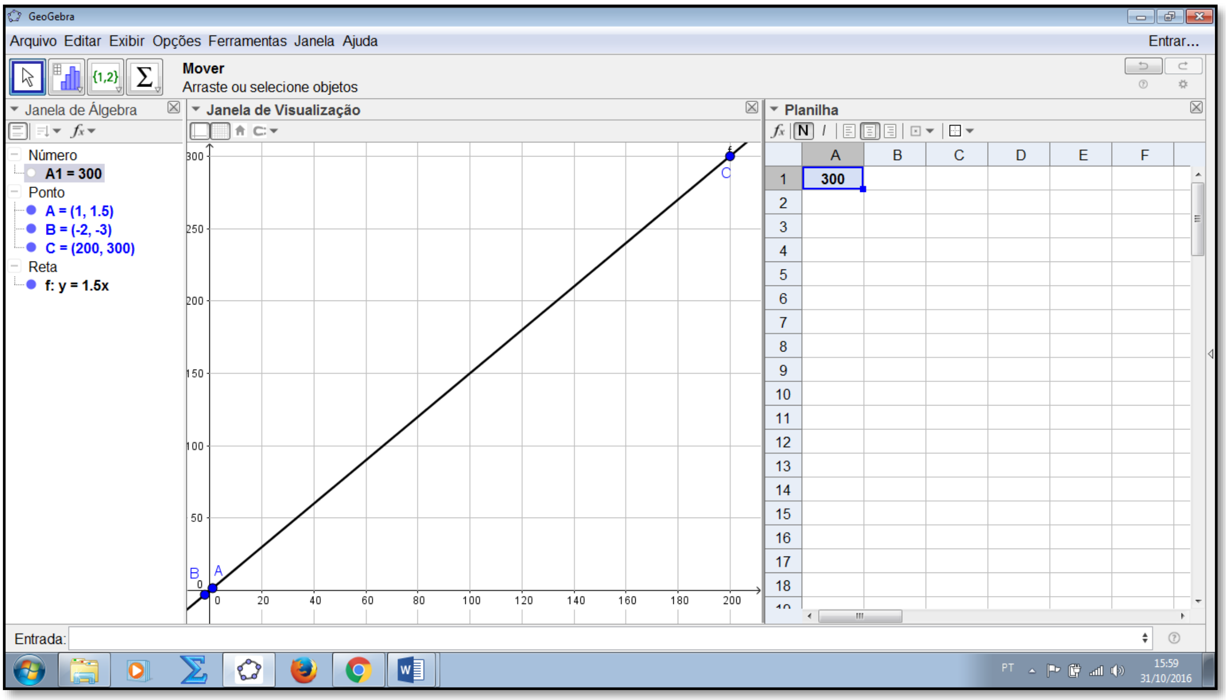
Fonte: Autor (2016)

Figura 45: Gráfico da questão 8 do pós-teste.



Fonte: Autor (2016)

Figura 46: Exibindo o ponto (200,300)



Fonte: Autor(2016)

É fato que os alunos ficaram entusiasmados com a resolução da questão 8 feita no Geogebra, pois, eles aprenderiam para futuras questões análogas. E isso de fato é relevante para o aprendizado porque eles aprendem a manipular o software Geogebra e absolve ainda mais conceitos relacionados as funções afim e quadráticas por exemplo. No caso da questão 8, vimos que um ponto no plano cartesiano pode estar localizado distante da origem do sistema e no entanto o software mostra esse ponto assim como qualquer outro objeto mediante mudança de escala nos eixos x e y (ver figura 46).

Das respostas dos alunos nos questionários de pré-teste notamos que os mesmos apresentaram várias dificuldades quanto aos conceitos de proporcionalidade. Dentre essas dificuldades elencamos a conceitual, gráfica, tabular, analítica, entre outras. Dessa forma, segundo Duval (2003), os alunos cometeram erros no tratamento e na conversão ao tentar resolver um problema de proporcionalidade. No entanto, após as aulas expositivas e a oficina com o software Geogebra percebemos que houve melhora no aprendizado dos conceitos de proporcionalidade. Nos questionários de pós-teste notamos que os alunos foram melhores na questão conceitual, porém, as mesmas dificuldades apresentadas anteriormente continuavam, ou seja, os alunos insistiam em responder as questões usando apenas como ferramenta a “regra de três”, o que de alguma forma é positivo, contudo parecia que era a única disponível. O Geogebra de alguma forma despertou curiosidade para com os alunos e contribuiu nas várias representações semióticas existentes nos diversos problemas de proporcionalidade direta e inversa.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A escolha do tema proporcionalidade surge devido as dificuldades tanto dos alunos em aprender quanto dos professores em transmitir de forma mais significativa, contextual e com variadas formas representacionais.

Esse estudo analisou os conhecimentos e as estratégias dos alunos, no sentido de investigar como estes interpretavam e resolviam os problemas de proporcionalidade.

Nesse estudo de caso, revelou-se que os sujeitos (na análise do questionário pré-teste) persistem na resolução de problemas de proporcionalidade apenas usando o método da “regra de três” como estratégia de resolução. Segundo Duval (2003), a aprendizagem matemática consiste em mobilizar ao menos dois tipos de registros de representação semiótica.

Constatou-se (no questionário pós-teste) que os sujeitos ainda apresentavam as mesmas dificuldades nas estratégias de resolução dos problemas de proporcionalidade, mais ainda nos problemas que envolviam proporcionalidade inversa. No entanto, com o auxílio do software geogebra, a maioria dessas dificuldades foram sanadas. Com isso, acreditamos que o Geogebra é um forte aliado para o ensino/aprendizagem de proporcionalidade e suas aplicações.

De modo geral, o ensino de proporcionalidade ainda persiste, em sua maioria, no método da regra de três e com aulas expositivas, listas imensas de exercícios respondidos de forma mecânica e com pouca ou quase nenhuma aplicação prática do cotidiano. Dessa forma, constatamos nessa pesquisa que o uso do software Geogebra na resolução e interpretação de problemas de proporcionalidade tornaram as aulas mais dinâmicas, significativas e o aprendizado seria alcançado em sua maioria.

É possível no Geogebra lidar ao mesmo tempo com três tipos de representações segundo o próprio Duval: a algébrica, a tabular e a gráfica. Esse fato é importante pois o aluno compreende com mais facilidade um conceito quando ele tramita com pelo menos duas dessas representações.

Ao fazer uso do Geogebra, o aluno constrói ativamente seu conhecimento por meio das várias representações contidas no mesmo. O professor auxilia no uso das ferramentas e nas propriedades e nos objetos matemáticos a ser construídos.

O uso do Geogebra no ensino/aprendizagem matemática torna as apresentações mais atrativas e agradáveis quando introduzimos um conceito matemático, pois muitas vezes a abstração desses objetos desmotivam e distanciam o interesse pelo conhecimento.

Com base nas análises realizadas, acreditamos que este estudo poderá contribuir com outras pesquisas e também na prática docente. Principalmente na prática docente onde o

Geogebra e suas ferramentas contribuem sempre no ensino/aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

Portanto, acreditamos também que o software Geogebra e suas variadas ferramentas aliado a teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval contribui tanto no ensino quanto na aprendizagem de problemas de proporcionalidade direta e inversa.

Por fim, esperamos que os professores possam inovar no ensino de proporcionalidade seguindo a teoria de Duval e aliando o Geogebra como recurso tecnológico para aprendizagem de seus alunos.

Durante esse trabalho, criamos um blog como produto educacional. Nele encontraremos atividades interativas criadas no Geogebra para manipulação tanto para o professor quanto para os alunos. Também está disponível no blog a oficina sobre o Geogebra que foi executada durante a pesquisa. O endereço do blog é http://professorhugoleao.blogspot.com.br/ e esperamos de alguma forma contribuir para o ensino-aprendizagem de proporcionalidade.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B. **História da Matemática**; 2ª edição. São Paulo: Edgard Blucher, 1991.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio**: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Guia de Livros Didáticos** PNLD 2008 – Matemática. Brasília, 2008. Disponível em: ftp://ftp.fnde.gov.br/web/livro_didatico/guias_pnld_2008_matematica.pdf. Acesso em: 11 abr. 2008.

CARNEIRO, R. F.; PASSOS, C. L. B. **A utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação nas aulas de Matemática: Limites e possibilidades**. Revista Eletrônica de Educação, v. 8, n. 2, p. 101-119, 2014.

CONTRI, Rozelaine de Fatima Franzin; RETZLAFF, Eliani; KLEE, Luiz Alberto Klee. **USO DE SOFTWARES MATEMÁTICOS COMO FACILITADOR DA APRENDIZAGEM.** Congresso Nacional de Educação Matemática, 2011. Disponível em http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/cc/PDF/CC45.pdf. Acesso em 15/01/16.

CURSO DE GEOGEBRA. Disponível em: <www.ogeogebra.com.br>. Acesso em 11de out. 2016.

DAMM, R. F. Registro de Representação. In: Machado, S.D.A. (Org). **Educação Matemática** – Um (nova) Introdução. 3ª Ed. Revisada. São Paulo: EDUC, 2010.

DIA DE MATEMÁTICA. Registros de Representações Semióticas. Disponível em: http://www.diadematematica.com/Ubiratan_Arrais/ARTIGO_REGISTROS_DE_REPRESENTACAO_SEMIOTICA.htm Acesso em: 24/05/16

DUVAL, R. **Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée**. Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, Paris, v. 5, p. 37-65,1993.

______. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas, SP: Papirus, 2003. p.11-33.

______**Ver e ensinar a Matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representação semióticas**. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

FRANCHI, ANNA et al. **Educação Matemática: Uma (nova) introdução,** 3ª edição Revisada – São Paulo, EDUC, 2010.

FIOREZE, Leandra Anversa. "**Atividades digitais e a construção dos conceitos de proporcionalidade: uma análise a partir da teoria dos campos conceituais.**" (2010).

GALVÃO, MARIA ELISA ESTEVES, et al. **Características dos Três Mundos da Matemática que emergem na resolução de um problema de proporcionalidade direta**. Conferência Interamericana de Educação Matemática. México, maio de 2015.

GAZZONI, Alcibíades et al. **Proporcionalidade e Semelhança: aprendizagem via objetos de aprendizagem**. Revista Novas Tecnologias na Educação - CINTED - Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação - Vol. 4.Nº 2. Dezembro de 2006. (ISSN 1679-1916). UFRGS, 2006.Disponível em: http://www.cinted.ufrgs.br/renote/dez2006/artigosrenote/25179.pdf. Acesso em 17 de Novembro de 2015.

GAY, Mara Regina Garcia. Araribá Plus Matemática. Editora Moderna, 4ª edição. 2014.

GIL, A. C. Como **elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**, trad. Higyno H. Domingues, Editora Unicamp, 2004.

FRANCHI, ANNA et al. **Educação Matemática: Uma (nova) introdução,** 3ª edição Revisada – São Paulo, EDUC, 2010.

GERHARDT, TATIANA ENGEL E SILVEIRA, DENISE TOLFO. **Métodos de pesquisa**; coordenado pela Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GIL, ANTONIO CARLOS. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

IEZZI, G; HAZZAN, S.; DEGENSZAJN, D. **Fundamentos da Matemática Elementar.** Atual Editora.

______ IEZZI at al. Fundamentos da Matemática Elementar. Volume 3. Trigonometria. São Paulo. Atual Editora. 1977.

LIMA, ELON LAGES at al. **A Matemática do Ensino Médio, Volume 1.** Rio de Janeiro: SBM, 2006 A.

LIMA, ELON LAGES. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. Quinta Edição. Coleção do professor de matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. 2006 B.

LIMA, Elon Lages. **Medida e forma em geometria.** IMPA/VITAE, 1991.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara et al. **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. São Paulo: EDUC, 2013.

MELO, M.S. L. & BELLEMAIN, P.M.B. **A Abordagem do Conceito de Escala em Livros Didáticos para o Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental: uma análise à luz da Teoria dos Campos Conceituais.** In Anais do SIPEMAT. Recife, Programa de Pós-Graduação em Educação-Centro de Educação – Universidade Federal de Pernambuco, 2006, 11p.

MOREIRA, Marco Antônio. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006. 186 p.

__________ **Aprendizagem Significativa Crítica.** 2010. Disponível em http://www.if.ufrgs.br/~moreira/ Acesso em 14/06/2016.

OLIVEIRA, I. A. F. G. & SANTOS, M. C. **Problemas de proporção: uma análise da apropriação de seu significado**. Anais do IV EPEM – Encontro Pernambucano de Educação Matemática. Recife : Universidade Federal de Pernambuco, 1999.

OLIVEIRA, C. N. C. e FERNANDES, M. A. M. **Para viver juntos – matemática 7º ano**. São Paulo. Edições SM, 2008.

PAIS, LUIS CARLOS. **Didática da Matemática; uma análise da influência francesa.** 3ª edição – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

PANTOJA, Lígia Francoise Lemos et al. **A teoria dos registros de representação semióticas e o estudo de sistemas algébricas lineares.** VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática. Comunicação Científica, Canoas, Rio Grande do Sul, Brasil, outubro de 2013.
REVISTA ESCOLA PUBLICA. **Educação para o futuro.** Disponível em: http://revistaescolapublica.com.br/textos/36/educacao-para-o-futuro-302282-1.asp Acesso em 28/01/16.

SILVA, MARIA BETÂNIA EVANGELISTA DA. **Aprendendo a representar escalas em gráficos: um estudo de intervenção.** Dissertação – Mestrado em Educação Matemática. Universidade federal de Pernambuco. Recife, 2014.

SILVA, MICHELSCH JOÃO DA. **Registros de Representações Semióticas no Estudo de Sistemas de Equações de 1º Grau com Duas variáveis Usando o Software Geogebra**. Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Instituto de Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre (RS), 2014.

USANDO O WINPLOT. Disponível em: http://www.mat.ufpb.br/sergio/winplot/winplot.html acesso em 15/01/16. Acesso em 15/01/16.

YIN, ROBERT K. ***Estudo de caso:*** planejamento e métodos. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

ANEXOS

ANEXO 1 – Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Antes de enunciar e demonstrar o teorema fundamental da proporcionalidade, provaremos o seguinte lema:

Lema. Seja $f(n.x) = n.f(x)$, para todo $x > 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Então $f(r.x) = r.f(x)$ para todo número racional $r = \frac{p}{q}$, onde $p, q \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Temos:

Note que

$$q \cdot f(r \cdot x) = f(q \cdot r \cdot x) = f\left(q \cdot \frac{p}{q} \cdot x\right) = f(p \cdot x) = p \cdot f(x)$$

Logo $f(r \cdot x) = \frac{p}{q} \cdot f(x) = r \cdot f(x)$, como queríamos demonstrar.

Teorema Fundamental da Proporcionalidade. As seguintes afirmações a respeito de $y = f(x)$ são equivalentes:

1) y é diretamente proporcional a x;
2) para todo número real $c > 0$, tem-se $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$;
3) existe um número k, chamando "constante de proporcionalidade" entre x e y, tal que $f(x) = k \cdot x$ para todo x.

Demonstração:

Provaremos que 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1). Para mostrar que 1) $\Rightarrow$ 2), suponhamos, por absurdo, que $y = f(x)$ seja diretamente proporcional a x mas que se consiga achar um número real $\boldsymbol{c}$ tal que $f(c \cdot x) \neq c \cdot f(x)$. Para fixar ideias, seja $f(c \cdot x) < c \cdot f(x)$, isto é, $f(cx)/f(x) < c$. Como entre dois números reais quaisquer existe sempre um número racional, podemos achar r racional tal que $f(cx)/f(x) < r < c$, o que significa $f(cx) < f(x).r < f(x).c$. O lema que provamos acima nos permite reescrever estas desigualdades como $f(cx) < f(rx) < c \cdot f(x)$. Mas a desigualdade $f(cx) < f(rx)$, juntamente com o fato de ser $r < c$, está em contradição com a hipótese de y ser diretamente proporcional a x, e ser, portanto, uma função crescente de x. Analogamente se prova que não pode ser $f(cx) > c \cdot f(x)$. Logo temos $f(cx) = c \cdot f(x)$, o que mostra que 1) $\Rightarrow$ 2). Para provar que 2) $\Rightarrow$ 3), tomemos $k = f(1)$. Então, em virtude da hipótese 2), usada com x em lugar de c, temos $f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = x \cdot k$, logo $f(x) = k \cdot x$.

Finalmente, completamos o ciclo da demonstração provando que $3) \Longrightarrow 1)$. Primeiro relembremos o acordo feito anteriormente: só lidamos com grandezas cujas medidas são números positivos. Logo $k = f(1) > 0$. Então $x < x'$ implica $k \cdot x < k \cdot x'$, ou seja, $f(x) < f(x')$, portanto $y = f(x)$ é uma função crescente de x. Além disso, $f(n \cdot x) = k \cdot nx = n \cdot kx = n \cdot f(x)$. Conclusão: y é diretamente proporcional a x.

Observação: A demonstração desse teorema encontra-se no livro "Meu professor de Matemática e outras histórias" com autoria do professor Elon Lages Lima.

APÊNDICES

APÊNDICE 1: QUESTIONÁRIO INICIAL

1. Antes de ingressar no IFAL SATUBA você era aluno de escola:

( ) Particular?

( ) Municipal

( ) Estadual

2. Quem motivou você a fazer a prova de seleção do IFAL?

( ) Seus pais ou parentes

( ) Seus amigos

( ) Quis fazer por vontade própria

3. Você já conhece todo espaço físico do Campus?

( ) Sim

( ) Não

4. Já utilizou o laboratório de informática do Campus?

( ) Sim

( ) Não

5. Você utiliza computador com frequência?

( ) Sim, diariamente

( ) Sim, quase todos os dias

( ) Raramente

( ) Não, pois não sei utilizá-lo

6. Tem computador ou notebook em casa?

( ) Sim, com acesso a internet

( ) Sim, sem acesso a internet

( ) Não

7. Você está com dificuldade em Matemática?

( ) Sim, bastante

( ) Sim, em alguns conteúdos

( ) Não tenho dificuldades em Matemática

8. Como são as aulas de Matemática?

( ) Expositivas sem recursos tecnológicos

( ) Expositivas com recursos tecnológicos

9. O professor de matemática já usou algum software matemático nas aulas?

( ) Sim

( ) Ainda não

Se sim, lembra qual o nome do software?__________________________

10. O que você acha da possibilidade de aprender alguns assuntos da Matemática utilizando softwares matemáticos pelo computador?

____

____

____

____

APÊNDICE 2: QUESTIONÁRIO PRÉ-TESTE

1. Sabendo que 2,5 kg de arroz custam R$5,60, responda:

a) Quanto custa 10 kg?

b) Monte uma tabela mostrando as grandezas envolvidas e os valores correspondentes.

2. O que você entende por grandeza?

a) Tudo aquilo que pode ser medido ou contado ou

b) Tudo aquilo que possui grandes dimensões.

3. Tempo para realizar uma tarefa e o número de funcionários para executá-la são grandezas:

a) Diretamente proporcionais ou

b) Inversamente proporcionais.

4. Litros de combustível e distância percorrida pelo carro são grandezas:

a) Diretamente proporcionais ou

b) Inversamente proporcionais.

5. As grandezas "idade" e "altura de uma pessoa" são proporcionais?

(   ) Sim

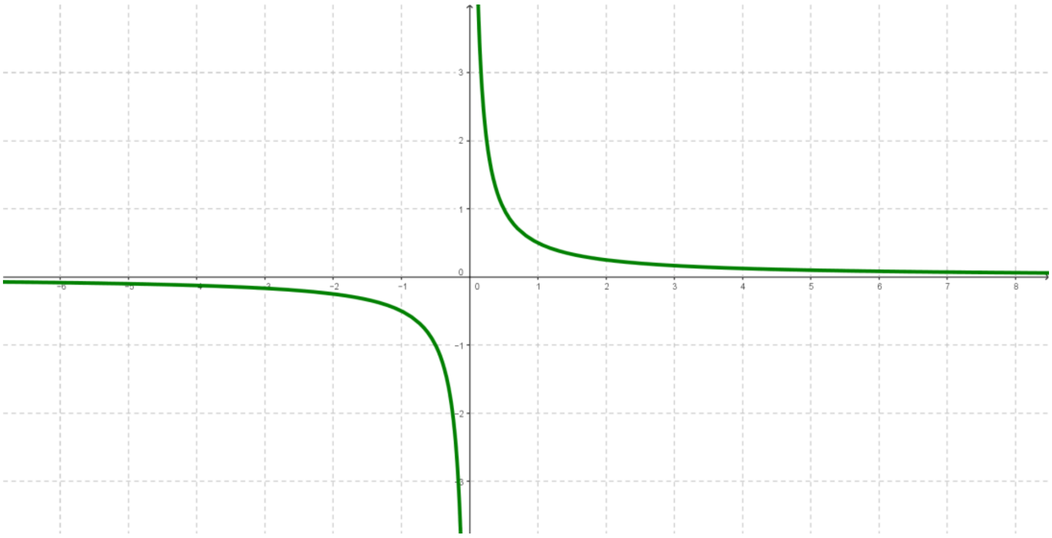
(   ) Não

Justifique:____

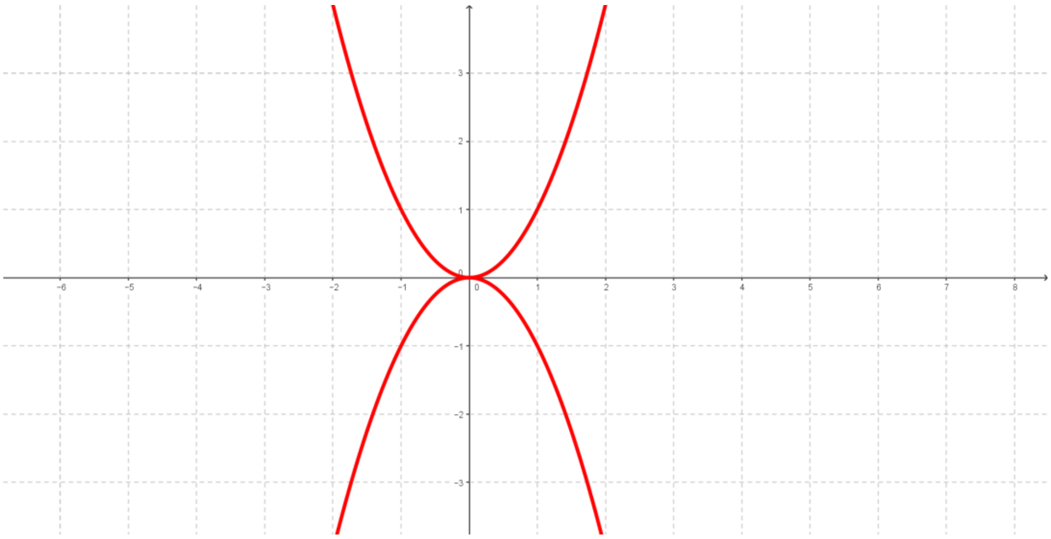
____

6. Qual dos gráficos abaixo representa uma função de proporcionalidade inversa?

a)



b)



7. Você conhece o método de redução à unidade que também é usado para resolver problemas de proporcionalidade?

( ) Sim, conheço

( ) Já ouvi falar, mas não conheço

( ) Nunca ouvi falar nesse método

8. A tabela abaixo mostra a quantidade de KWh que um televisor consome, num mês, em relação às horas que permanece ligado em um dia.

Horas diárias	2	4	6	8	y
Consumo mensal em KWh	6	x	18	24	30

Quais os valores de x e y respectivamente?

(   ) 10 e 12

(   ) 12 e 10

(   ) 3 e 10

(   ) 6 e 12

9. Fábio alimenta, durante um mês, 10 porcos com 200 kg de farelo.

a) Quantos quilogramas de farelo, em média, cada porco come por mês?

b) Quantos porcos poderiam ser alimentados, durante um mês, com 800 kg de farelo?

10. Completa a tabela:

tempo (horas)	4		3	
velocidade média (km/h)		72	120	100

a) Qual é a constante de proporcionalidade e o que representa?

b) Escreve a expressão que relaciona v(velocidade) com t(tempo).

APÊNDICE 3: QUESTIONÁRIO PÓS-TESTE

1. Verifique se há uma situação de proporcionalidade direta em cada uma das tabelas seguintes, em caso afirmativo indique a constante de proporcionalidade e o que ela significa.

LOJA A				
Nº de chocolates	1	3	6	10
Custo em R$	1,5	4,5	9	15

LOJA B				
Nº de chocolates	1	3	6	10
Custo em R$	1,5	4,5	9	12

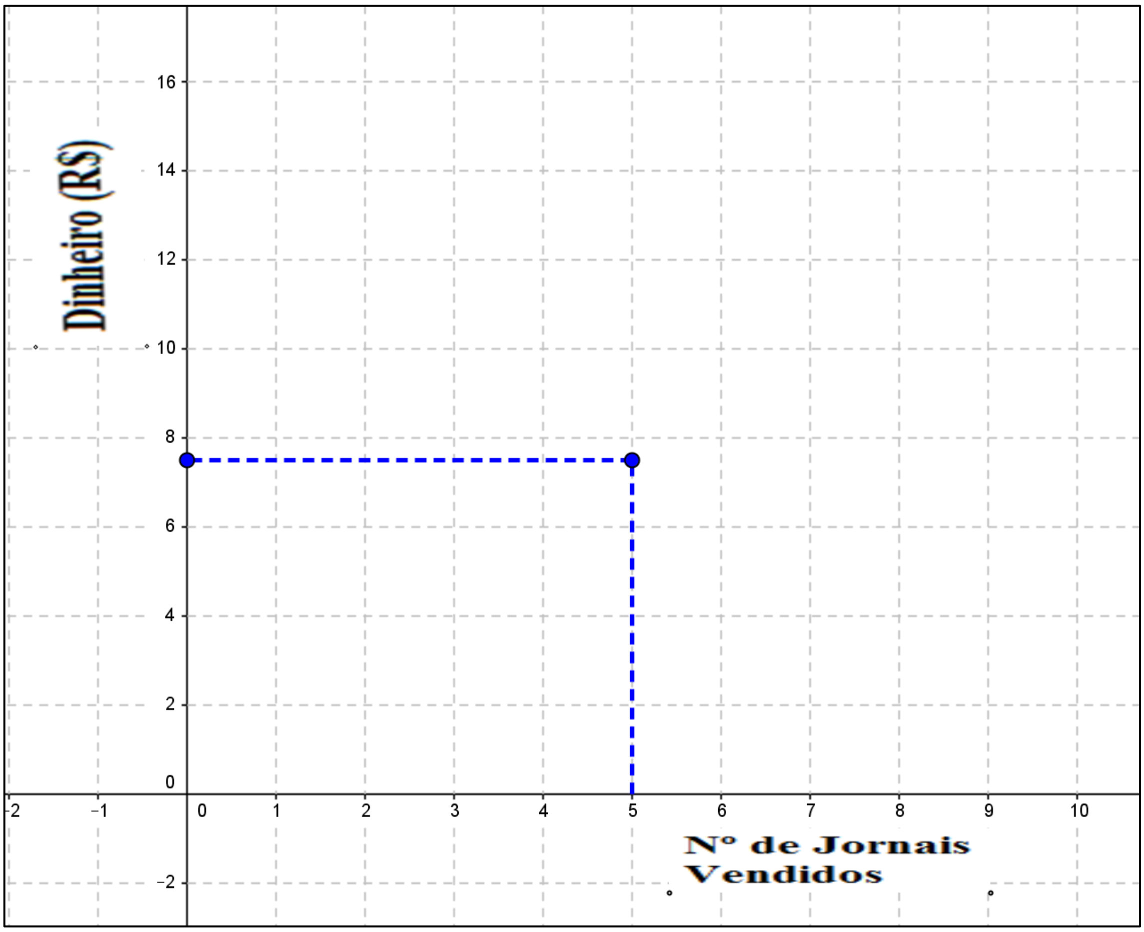
2. Quatro alunos do 1º ano distribuíram entre si alguns exemplares do jornal da escola, que tinham feito na disciplina de Língua Portuguesa, para vender a amigos, pais e outros familiares. Uma semana depois se juntaram para fazer as contas. A Sara tinha vendido 5 jornais e apurado 7,5 reais.

	Sara	João	Afonso	Nunes
Jornais vendidos	5		15	
Dinheiro (R$)	7,5	12		16,5

a) O dinheiro obtido é diretamente proporcional ao número de jornais vendidos. Complete a tabela.

b) Indique a constante de proporcionalidade e o que ela significa.

c) Complete o gráfico com os valores da tabela que obteve na 3.1.



3. André tem fertilizante suficiente para colocar nos seus 24 canteiros durante 30 dias. Entretanto, fez mais 12 canteiros. Para quantos dias é que o André terá fertilizante?

4. No seu trabalho, Pedro utiliza uma roçadeira que gasta 3 litros de gasolina por cada 5 horas de utilização. O depósito dá para colocar até 5 litros de gasolina.

a) Qual o consumo da referida roçadeira por hora?

b) Se o Pedro encheu o depósito da roçadeira totalmente, durante quantas horas pode utilizá-la?

5. Os alunos de uma escola alugaram um carro para fazer uma visita técnica. O preço do aluguel é o mesmo, qualquer que seja o número de pessoas transportadas. A tabela seguinte relaciona o número de pessoas transportadas (n) com o preço que cada uma terá de pagar (p).

nº de pessoas transportadas - n	30	36	40	60
preço por pessoa – p	12	10	9	6

a) Verifique que existe proporcionalidade inversa entre n e p. O que representa a constante de proporcionalidade?

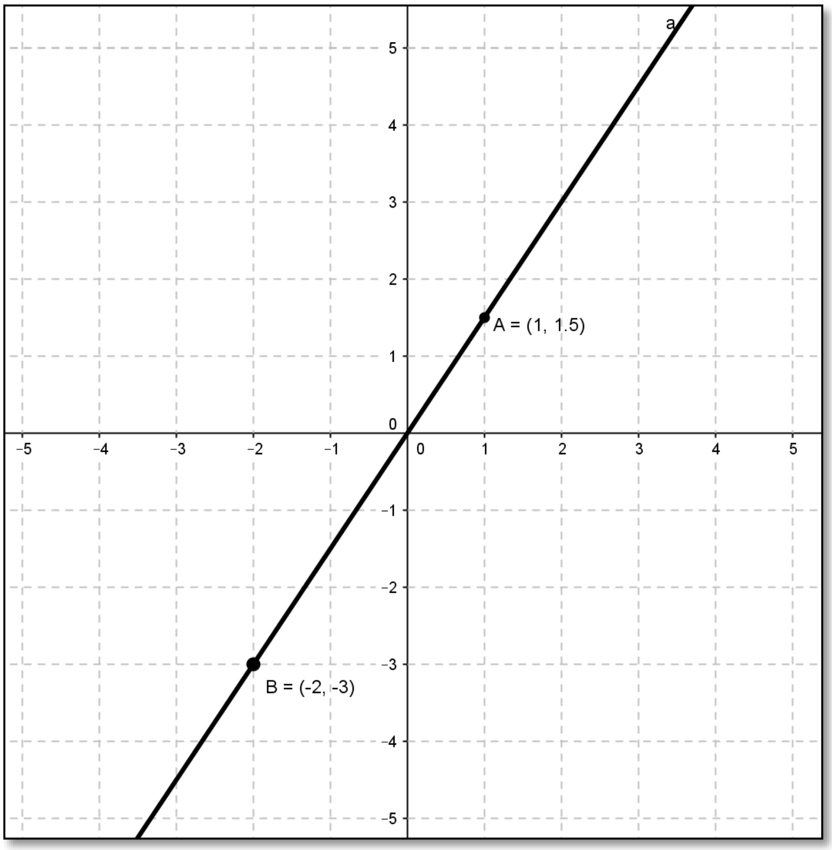
b) Escreva uma expressão que permita obter p em função de n. Represente essa função no Geogebra.

c) Quanto teria de pagar cada um se fossem 50 pessoas à visita de estudo?

6. Em um galinheiro há 2 galos para cada 13 galinhas. Quantos são os galos, sabendo que nesse galinheiro há 75 aves? Utilizando o software Geogebra, esboce o gráfico que representa a função do número de galos e de galinhas.

7. (UFG) Uma receita de bolo inclui, entre outros ingredientes, uma xícara e meia de farinha de trigo e quatro ovos. Uma pessoa, que possua em casa três ovos, deve colocar que quantidade de farinha de trigo para fazer um bolo, mantendo a mesma proporção entre os ingredientes?

8. Observe o gráfico abaixo e responda:



a) Qual a expressão analítica que representa essa função?

b) Qual o valor de f(200)?

APÊNDICE 4: OFICINA COM O GEOGEBRA

Oficina: O uso do Geogebra na resolução de problemas de proporcionalidade direta e inversa

O Geogebra

O Geogebra é um software de Matemática dinâmica que junta Geometria e Álgebra. Foi criado por Markus Hohenwarter na Universidade da Flórida nos Estados Unidos e tem por um dos objetivos principais o ensino e aprendizagem da Matemática nas escolas de educação básica, superior e também na pós-graduação (HOHENWARTER, 2007).

No Geogebra podemos construir vários objetos matemáticos: pontos, retas, vetores, planos, segmentos de reta, seções cônicas, gráficos de diversas funções, curvas parametrizadas e, além disso, a interface é de fácil manuseio e pode ser proveitoso para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, cálculo, tabelas, estatística numa única aplicação (HOHENWARTER, 2007).

Interface, Barras e Janelas.

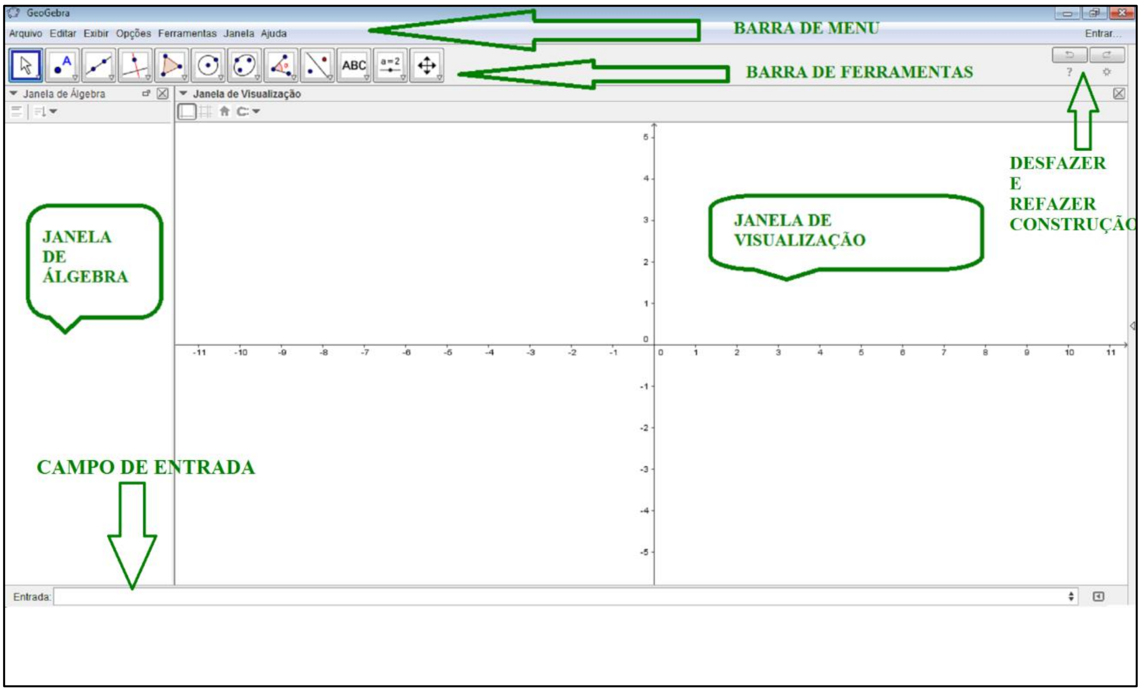
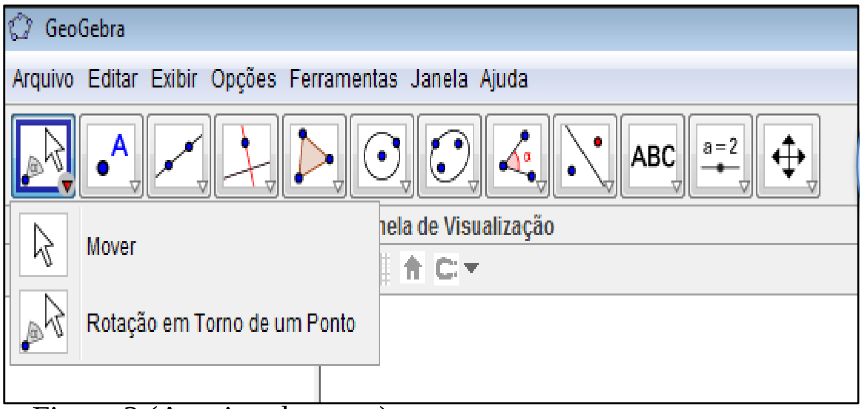


Figura 1 (Arquivo do autor)

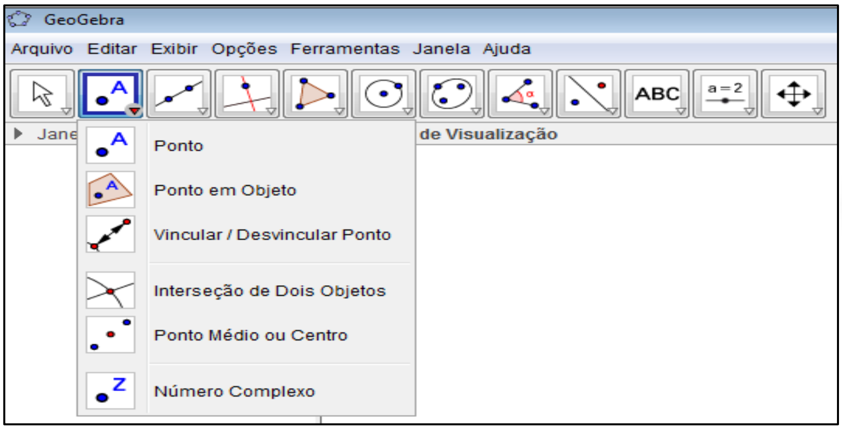
Ao abrir o programa, as janelas ativas do Geogebra mostram a interação em álgebra (na janela de álgebra) e em Geometria (na janela de visualização) à medida que você vai construindo/criando objetos matemáticos.

Elementos da Barra de Ferramentas



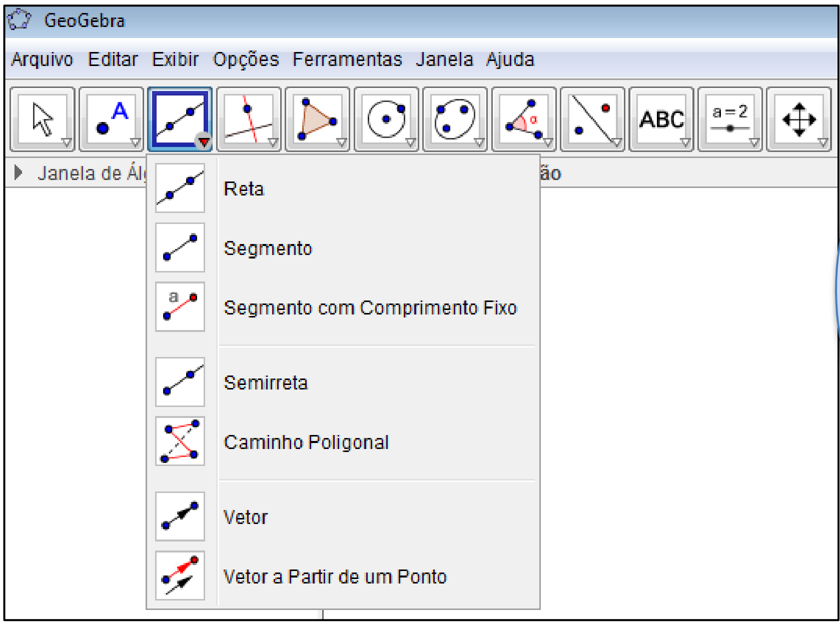
Na ferramenta mover: podemos arrastar e selecionar

Figura 2 (Arquivo do autor)

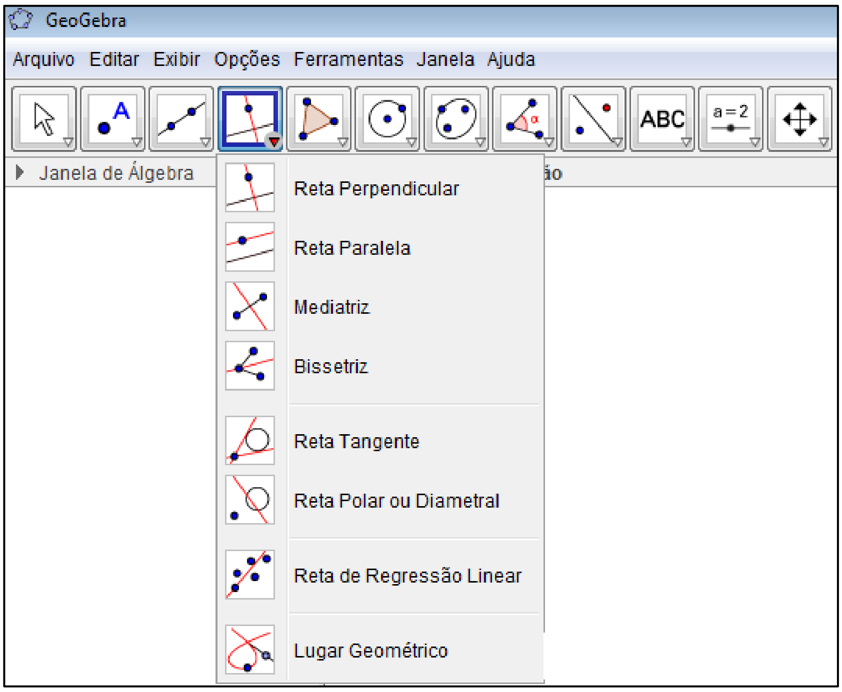


Guia com as ferramentas sobre ponto.

Figura 3 (Arquivo do autor)

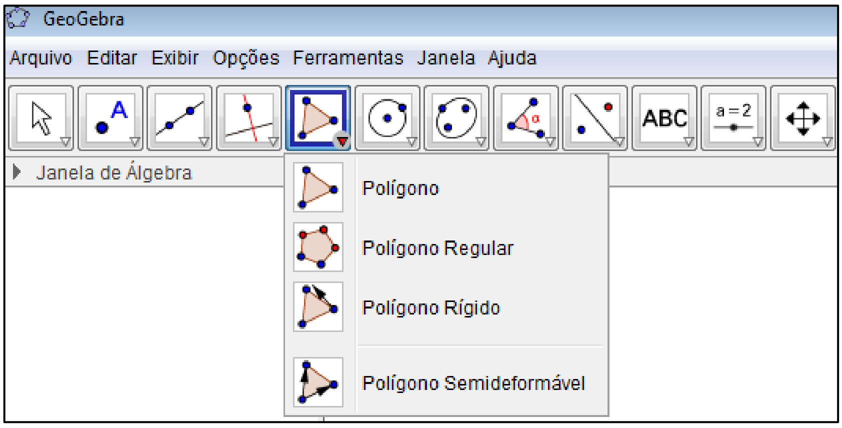


Guia com as ferramentas de retas, segmentos de reta, vetor, etc.



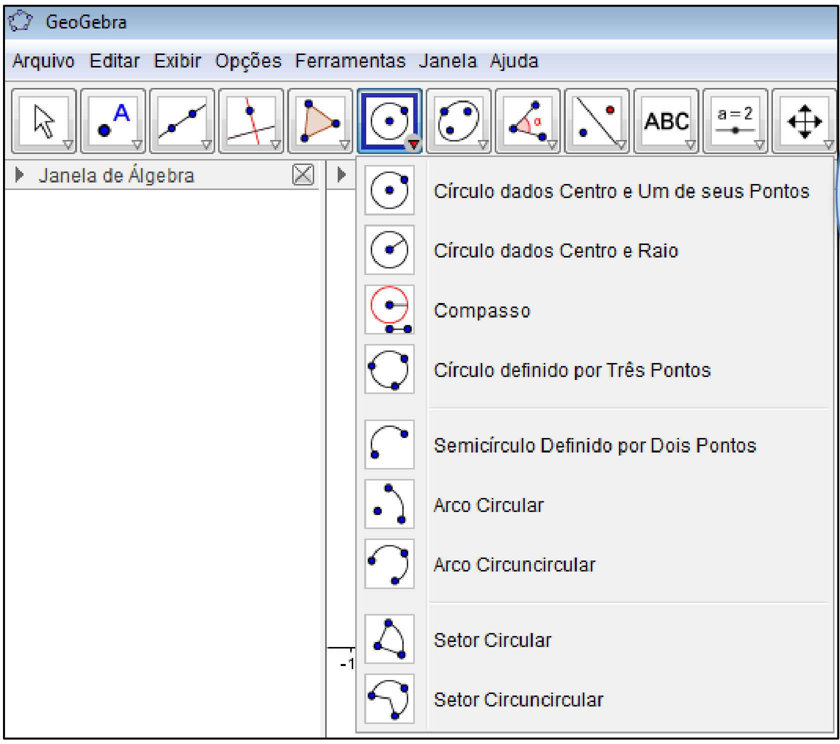
Guia com as ferramentas para outras construções com retas e pontos

Figura 3 (Arquivo do autor)

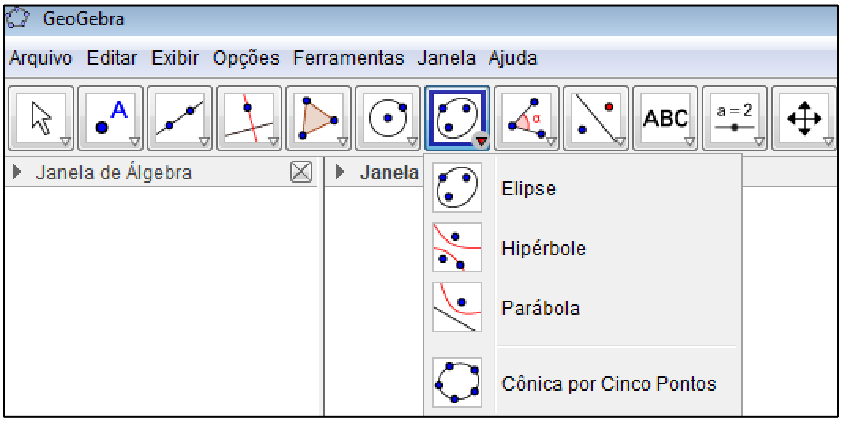


Guia para construção de polígonos.

Figura 3 (Arquivo do autor)

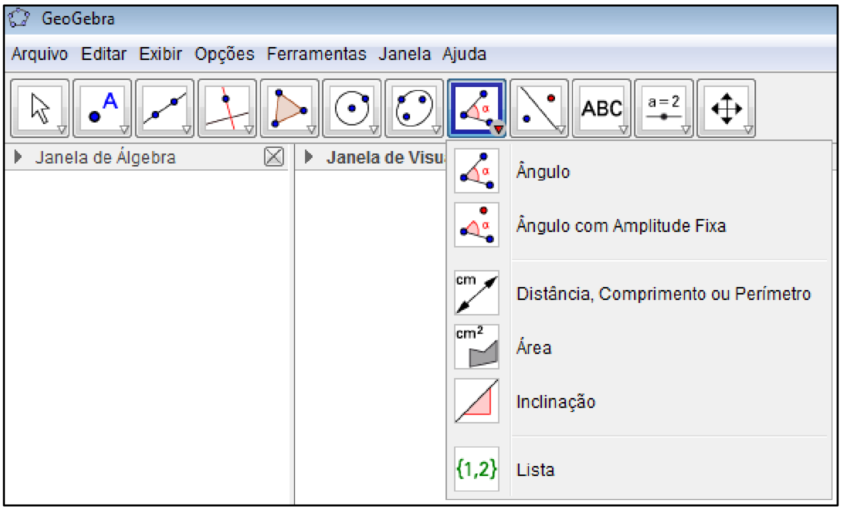


Guia para construção de círculos, circunferências e setores circulares.



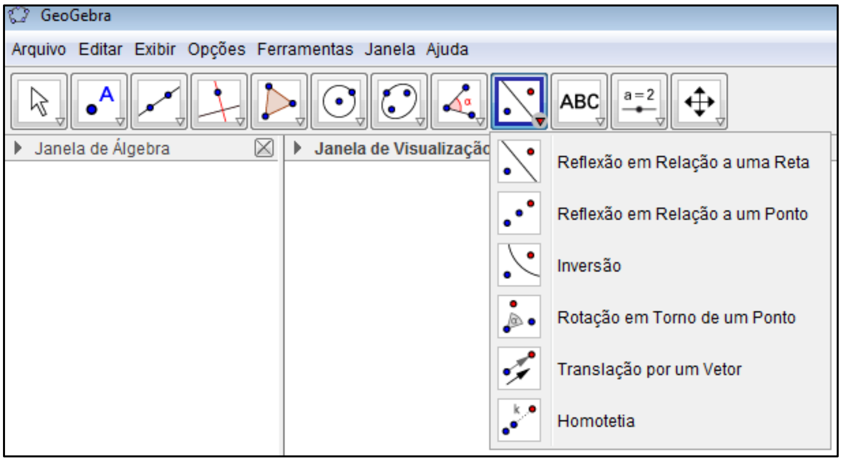
Guia com ferramentas para construção das cônicas.

Figura 3 (Arquivo do autor)



Guia com ferramentas para medir ângulos, áreas, entre outras.

Figura 3 (Arquivo do autor)



Guia com ferramentas úteis no estudo da Geometria

Figura 3 (Arquivo do autor)

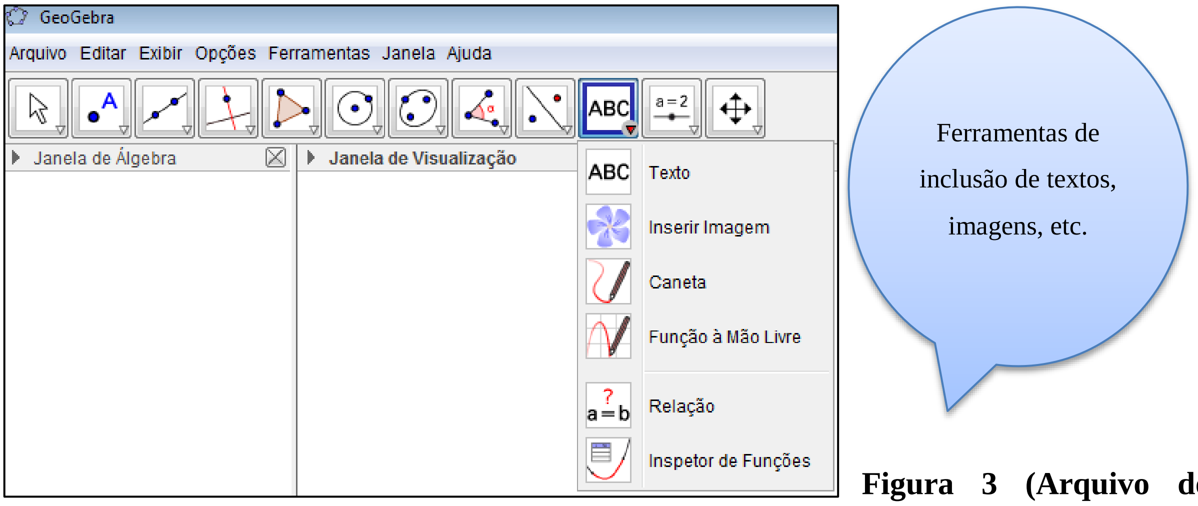
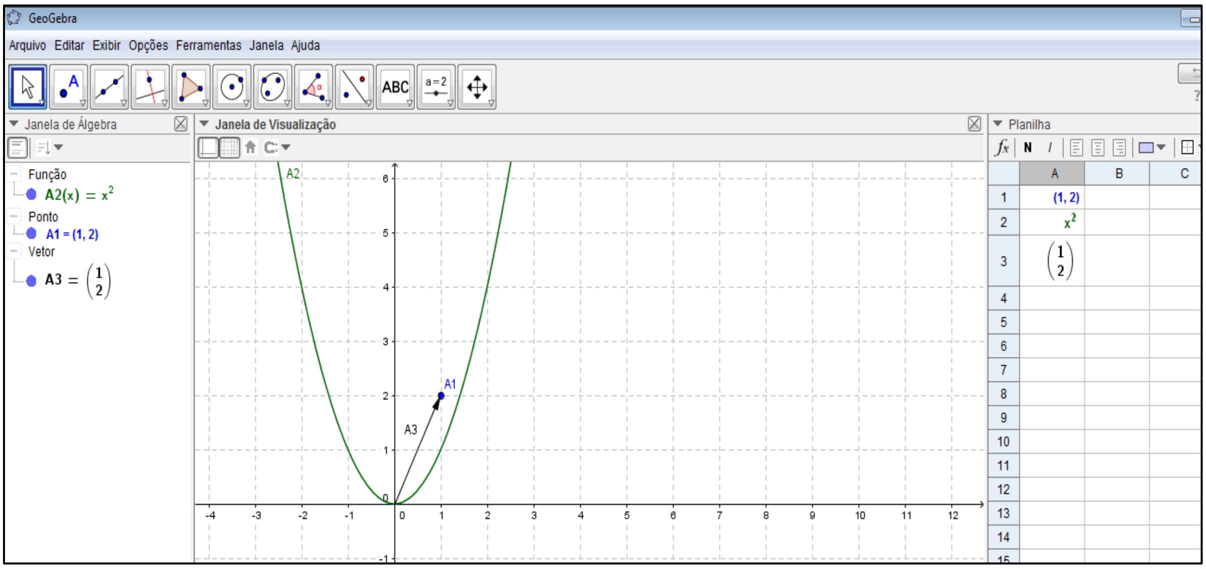


Figura 3 (Arquivo do autor)

Uso da Planilha do Geogebra

Ao clicar no menu exibir e depois planilha o Geogebra mostrará uma nova janela. Essa janela é a planilha do Geogebra. Várias construções podem ser feitas na planilha, porém, o objetivo de nossa oficina é também fazer uso dessa ferramenta para resolução de problemas de proporcionalidade direta e inversa. A título de construção simples na planilha, façamos as construções abaixo:

- parábola ($y = x^2$)
- ponto (1,2)
- vetor v = (1,2)



No campo de entrada digitamos a função $y = 2x$ e aperta enter, com isso aparecerá o gráfico da função digitada, que é uma reta. No campo de entrada de funções digitamos qualquer função matemática e o Geogebra esboçará seu gráfico. No entanto, o Geogebra exige a digitação correta da função ou da equação, é o que o software chama de sintaxe da equação.

Exemplo 1

Esboce no Geogebra os gráficos das funções $y = x$; $y = -x$; $y = 2x$; $y = -2x$; $y = 3x$ e $y = -3x$. Utilize o campo de entrada e deixe cada gráfico com uma cor diferente.

O **seletor ou controle deslizante** (penúltimo botão da esquerda pra direita do Geogebra) é um botão que serve para criar movimento numa função qualquer ou também para variar os valores dos parâmetros de um objeto matemático. Por exemplo, criando os controles **a, b** e **c** variando de -10 até 10 e no campo de entrada digitamos a função $y = ax^2 + bx + c$, notaremos o que cada coeficiente faz de diferente no gráfico após essa variação. Façamos essa atividade no Geogebra.

7. Criar três controles deslizantes **a, b** e **c.**
8. Digitar a função $y = ax^2 + bx + c$ no campo de entrada e aperte enter.
9. Variar os controles.
10. O que aconteceu com o gráfico quando você variou o parâmetro **a**?
11. O que aconteceu com o gráfico quando você variou o parâmetro **b**?
12. O que aconteceu com o gráfico quando você variou o parâmetro **c**?

Exemplo 2

No Geogebra, crie o controle deslizante **a** e digite a função $y = ax$ no campo de entrada e aperte enter. Deixe o valor mínimo de -5 e máximo de 5. Deslize o ponto **a** e veja o que acontece com o gráfico da função.

1. O que você notou?
2. Quando $\boldsymbol{a = 0}$**,** o que acontece com o gráfico? E quando $\boldsymbol{a < 0}$? E quando $\boldsymbol{a > 0}$?

Outras ferramentas serão mostradas durante a oficina no laboratório de informática com o professor. O aluno interessado conhecer essa ferramenta e instalar o software, caso tenha computador em casa, basta acessar www.geogebra.org , depois clicar em download, e por fim clica em Windows. O Geogebra também pode ser instalado em outros sistemas (Mac e Linux) e também pode ser usado direto no navegador (clica em Chrome App). O Geogebra pode ser acessado e instalado em tablets e smartphones. A novidade é que a partir da versão 5.0, o Geogebra veio mais recheado de recursos para o ensino e aprendizagem da Matemática. **A janela de visualização 3D e suas ferramentas** trás mais novidades para professores e alunos explorar o mundo em três dimensões.

Problemas de Proporcionalidade Direta

Em cada um dos problemas abaixo:

- *Resolva o problema na folha e utilize o Geogebra quando necessário;*
- *Crie tabelas relacionando as grandezas envolvidas;*
- *Plote o gráfico;*
- *No Geogebra, caso os pontos indicados não apareçam, clique com o botão direito na área de trabalho e clique em mostrar todos os objetos;*
- *Crie um ponto no gráfico do problema e faça-o percorrer com o controle deslizante.*

1. Um carro percorre cento e vinte quilômetros a cada 3 horas. Quantos quilômetros ele percorre em 5 horas?
2. Para a produção de leite do Campus Satuba, três torneiras idênticas despejam 21,6 litros num certo tempo. Quantos litros despejará 8 dessas torneiras no mesmo tempo?
3. Se 3 kg de queijo tipo do reino custam R$132,00, quanto custarão 7 kg desse queijo?
4. Cem quilogramas de arroz com casca fornecem 96kg de arroz sem casca. Quantos quilos de arroz com casca serão necessários para produzir 300 kg de arroz sem casca?
5. Uma caixa d’água do campus está furada no fundo. Por causa disso, ela perde 2 litros de água por hora. Escreva a função linear que denota a vazão nessa caixa d’água. Se essa caixa tiver 3 metros de comprimento por 3 metros de largura e 2 metros de altura, em quanto tempo ela estará completamente vazia? Considere ela completamente cheia.

Problemas de Proporcionalidade Inversa

1. Uma torneira enche um tanque em 20 horas com numa vazão de 40 litros por minuto. Quanto tempo demorará para encher o tanque com uma vazão de 50 litros por minuto?
2. A Lei de Boyle diz que se mantermos a temperatura constante de um gás, a pressão P e o volume V são inversamente proporcionais. Se a pressão sofrer um acréscimo de $\frac{1}{5}$, qual a correspondente diminuição do volume? É possível plotar um gráfico desse problema?
3. Um criador tem milho para alimentar cem galinhas durante cento e cinquenta dias. No fim de trinta dias, ele compra mais cinquenta galinhas. Quanto tempo mais irá durar o milho, sabendo que a ração diária por ave é sempre a mesma?
4. Uma análise de dois litros de certo tipo de água revelou dezoito gramas de impurezas (distribuídas uniformemente). Que quantidade aproximada, desta mesma água, apresentará novecentos gramas de impurezas?
5. (UFPel – RS) Uma barra de chocolate de 200 g é dividida em 32 porções iguais. Sabendo-se que cada 50 g contém 270 calorias, calcule o número máximo de porções (inteiras) que uma pessoa poderá comer para não ultrapassar 80 calorias.

APÊNDICE 5: TERMO DE CONSENTIMENTO DA ESCOLA

TERMO DE CONSENTIMENTO DA ESCOLA

AUTORIZAÇÃO

Eu____, abaixo assinado, responsável pelo departamento de apoio acadêmico autorizo a realização do estudo____ a ser conduzido pelo professor/pesquisador Hugo Silva Leão. Fui informado pelo responsável do estudo sobre as características e objetivos da pesquisa, bem como das atividades que serão realizadas na instituição a qual represento. Esta instituição está ciente de suas corresponsabilidades como instituição coparticipante do presente projeto de pesquisa e de seu compromisso no resguardo da segurança e bem-estar dos sujeitos de pesquisa nela recrutados, dispondo de infraestrutura necessária para a garantia de tal segurança e bem-estar.

Satuba, ____ de ________________de 20___.

____

Assinatura e carimbo do Diretor de Apoio Acadêmico