

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE FÍSICA

**DIFRAÇÃO DE LUZ COM MOMENTO ANGULAR ORBITAL POR UMA
FENDA**

QUEILA DA SILVA FERREIRA

Maceió
2011

QUEILA DA SILVA FERREIRA

DIFRAÇÃO DE LUZ COM MOMENTO ANGULAR ORBITAL POR UMA
FENDA

*Dissertação apresentada ao Instituto de Física
da Universidade Federal de Alagoas, como parte
dos requisitos para obtenção do Título de Mestre
em Ciências.*

ORIENTADOR: PROF. DR. JANDIR MIGUEL HICKMANN

CO-ORIENTADOR: PROF. DR. EDUARDO JORGE DA SILVA FONSECA

Maceió

2011

**Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

F383d Ferreira, Queila da Silva.
Difração de luz com momento angular orbital por uma fenda / Queila da Silva
Ferreira. – 2011.
94 f. : il., grafs.

Orientador: Jandir Miguel Hickman.
Co-Orientador: Eduardo Jorge da Silva Fonseca.
Dissertação (mestrado em Física da Matéria Condensada) – Universidade
Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2011.

Bibliografia: f. 92-94.

1. Difração. 2. Momento angular orbital. 3. Feixe Laguerre-Gauss. 4. Fase
espacial. 5. Interferência. 3. I. Título.

CDU: 535.42



Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Física
Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14. Campus A.C. Simões
Cidade Universitária
Tabuleiro dos Martins
57072-970 Maceió - AL. Brasil
FONE : (82) 3214-1423/FAX 3214-1645

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

“Difração de Luz com Momento Angular Orbital por uma Fenda”.

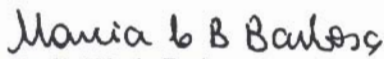
por

Queila da Silva Ferreira

A Banca Examinadora composta pelos professores Jandir Miguel Hickmann (orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Márcia Barbosa, do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul e Márcio André Rodrigues Cavalcanti de Alencar, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, consideram a candidata aprovada com grau A.

Maceió, 22 de fevereiro de 2011


Prof. Jandir Miguel Hickmann


Prof. Márcia Barbosa


Prof. Márcio André Rodrigues Cavalcanti de Alencar

Aos meus pais.

Agradecimentos

- Primeiro a Deus pela minha vida e todas as realizações.
- A minha família, primos, tios que mesmo estando longe nunca deixaram de me apoiar e incentivar para que assim eu alcançasse meus objetivos.
- Ao meu namorado Moacy, por toda força e paciência ao longo de todos esses anos.
- Ao professor Jandir pela orientação e credibilidade a mim depositados ao longo desses dois anos.
- Ao meu co-orientador Eduardo por todas as discussões, apoio e paciência naqueles dias difíceis, onde parecia que nada iria dar certo.
- Ao grupo OPTMA pela oportunidade a mim concedida, ao Prof. Márcio e a todos os colegas de trabalho, em especial ao Alcenísio que tanto colaborou e ajudou na execução deste trabalho.
- As minhas amigas Geovana e Daniela pelo companheirismo e amizade durante esses longos anos.
- Aos amigos da “Bat Caverna”, Henrique, Fred, Paulo, Anderson e Neto pela convivência, pelas brigas e alegrias que tivemos.
- Aos demais amigos que fiz ao longo desses dois anos, Thaíla, Carlos, Rafael meu muito obrigado a todos pela amizade.
- Aos professores do Instituto de Física pelo aprendizado durante esses anos.
- A CAPES pela bolsa a mim concedida.
- E a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a execução deste trabalho.

Resumo

O momento angular da luz possui duas componentes. A primeira está associada ao estado de polarização do campo elétrico, correspondendo ao momento angular intrínseco, relacionado à polarização circular no sentido horário e anti-horário. A segunda componente está associada à distribuição transversal do campo elétrico e corresponde ao momento angular orbital (MAO). Feixes com MAO possuem uma estrutura de fase azimutal da forma $\exp(-il\phi)$, onde ϕ é a coordenada azimutal e l é um número inteiro, normalmente referido como carga topológica. Para tais feixes, o MAO é dado por $l\hbar$ por fóton. A rica relação entre a fase azimutal da luz com o MAO e os fenômenos difrativos tem revelado um número de efeitos interessantes. Mesmo em problemas tradicionais de difração, como por exemplo, fenda simples, dupla fenda e abertura circular ganharam novas interpretações devido a distribuição de fase não usual da luz com MAO. Neste trabalho estudamos o problema de difração da luz possuindo MAO por fenda simples quando a singularidade de fase está incidindo sobre a fenda e fora dela. No primeiro caso, observamos um padrão de interferência análogo ao padrão de dupla fenda de Young com os máximos e mínimos de interferência dependentes do valor do MAO. Para o segundo caso, devido a variação da fase ao longo do feixe, delimitado pela fenda, o padrão de interferência torná-se assimétrico e deslocado. Estudamos ambos os casos sob os pontos de vista teórico e experimental.

Palavras-Chaves: Difração. Interferência. Momento Angular Orbital. Feixe Laguerre-Gauss. Fase Espacial.

Abstract

The angular momentum of light has two components. The first involves the state of polarization of the electric field, corresponding to the intrinsic angular momentum associated to circular polarization clockwise and counterclockwise. The second component is associated to the transverse distribution of electric field and corresponds to the orbital angular momentum (OAM). Beams with OAM have an azimuthal phase structure of the form $\exp(-il\phi)$, where ϕ is the azimuthal coordinate and l is an integer, which usually referred to as topological charge. For such beams the OAM is given by $l\hbar$ per photon. The rich relationship between the azimuthal phase of the light with OAM and diffractive phenomena has revealed a number of interesting effects. Even in traditional problems of diffraction, for example, single slit, double slit and circular aperture gained new interpretations due to unusual phase distribution of light with OAM. We study the problem of diffraction of light by single slit possessing OAM when the phase singularity is incident over the slit and out of it. In the first case, we observed an interference pattern analogous to the Young double slit pattern with the maximum and minimum of interference depending on the amount of OAM. For the second case, due to the variation of phase along the beam, defined by the slit, the interference pattern becomes asymmetrical and shifted. We study both cases under theoretical and experimental point of views.

Keywords: Diffraction. Interference. Orbital Angular Momentum. Laguerre-Gauss Beam. Spatial Phase.

Lista de Figuras

1.1	Representação do MAO e do momento angular de Spin [19].	22
1.2	Representação da polarização circular (a) a direita e (b) a esquerda.	24
1.3	Decomposição dos estados de polarização.	25
1.4	Frentes de onda normal de uma onda paraxial no plano x-z [16].	30
1.5	Frente de onda dos feixes Laguerre-Gauss para ordem zero e ordens superiores [18].	32
1.6	Distribuição de fase de um feixe Laguerre-Gauss com carga topológica (a) $l = 0$, (b) $l = 1$, (c) $l = 2$ e (d) $l = 3$	33
1.7	Perfil de intensidade de um feixe Laguerre-Gauss (a) $l = 10$ e (b) $l = 20$, em ambos os casos $p = 0$	34
1.8	(Colorido) Distribuições de intensidades dos feixes Hermite-Gauss: (a) HG_{10} (b) HG_{01} (c) HG_{11} e (d) HG_{21} [4].	35
2.1	Superfície de integração.	38
2.2	Representação de difração por tela plana na formulação de Kirchhoff.	41
2.3	Fonte pontual iluminando uma tela plana.	43
2.4	Difração por uma tela plana para a formulação de Rayleigh-Sommerfeld.	44
2.5	Princípio de Huygens-Fresnel [29].	47
2.6	Geometria de difração.	48
2.7	Arranjo para observação da difração de Fraunhofer.	52
2.8	Fenda simples.	52
2.9	(a) Padrão de difração de Fraunhofer e (b) seção de corte ao longo do eixo x produzidos por uma fenda simples [31, 32].	53
2.10	Fenda dupla.	55
2.11	Seção de corte em um padrão de interferência de uma fenda dupla [25].	55
2.12	(a) Padrão de difração de Fraunhofer (b) seção de corte para uma abertura circular [33, 34].	57
2.13	(a) Registro do holograma sobre uma placa holográfica e (b) reconstrução da onda original pela iluminação do holograma pela onda de referência [16].	58
2.14	Fluxograma para comparação da holografia clássica e computacional.	60
2.15	Frente de onda de um feixe Laguerre-Gauss ao longo da dupla fenda, com a singularidade de fase entre as fendas [12].	61

2.16	(a) e (c) Padrões de interferência da frente de onda de um feixe Laguerre-Gauss incidindo sobre a dupla fenda. (b) Padrão de interferência de uma onda incidindo sobre a dupla fenda. (d)-(f) Padrões de interferência experimentais obtidos para (d) $l = +1$, (e) $l = 0$ e (f) $l = -1$ passando através da dupla fenda [12].	62
2.17	(a) Padrão de difração de uma fenda simples de um feixe singular com carga +1 e (b) padrão de difração de uma fenda simples de um feixe singular com carga -1 [11].	63
2.18	(a) Imagem experimental (coluna da direita) e teórica (coluna da esquerda) de um feixe gaussiano passando através de uma íris. (b) Imagem experimental (coluna da direita) e teórica (coluna da esquerda) do padrão de interferência de um feixe gaussiano passando através de uma íris com um feixe de referência [13].	64
2.19	(a) Imagem experimental (coluna da direita) e teórica (coluna da esquerda) de um feixe contendo MAO com carga topológica, $l = 1$, passando através de uma íris. (b) Imagem experimental (coluna da direita) e teórica (coluna da esquerda) do padrão de interferência de um feixe contendo MAO com carga topológica, $l = 1$, passando através de uma íris com um feixe de referência [13].	65
2.20	Resultados para a difração de um feixe de luz possuindo MAO passando através de uma abertura triangular. Resultados teóricos (parte superior) e experimentais (parte inferior) para l variando de 1 até 3. No interior do resultado teórico de $l = 1$ tem-se a orientação da abertura triangular [10].	66
3.1	A fenda está posicionada a uma distância d do centro do feixe, R é o raio do feixe e $2a$ o comprimento da fenda.	70
3.2	Padrão de intensidade de fenda simples para $d = 0$. Com a carga topológica (a) $l = 0$, (b) $l = 1$, (c) $l = 2$, (d) $l = 3$, (e) $l = 4$, (f) $l = 5$ (g) $l = 10$ e (h) $l = 11$ em todos os casos o índice radial p é igual a zero.	70
3.3	Gráficos da intensidade em função da posição para a seção de corte feita ao longo dos padrões vistos na Fig. 3.2, (a) $l = 0$, (b) $l = 1$, (c) $l = 2$, (d) $l = 3$, (e) $l = 4$, (f) $l = 5$ (g) $l = 10$ e (h) $l = 11$ em todos os casos o índice radial p é igual a zero.	71
3.4	(Colorido) Simulação numérica da distribuição de intensidade dentro da fenda para (a) $l = 0$, (b) $l = 2$ e (c) $l = 5$. Na escala, azul representa intensidade nula e vermelho intensidade máxima.	72
3.5	Para a distância entre as fendas e a tela de observação muito maior que a separação entre as fendas podemos supor que os raios provenientes da mesma são aproximadamente paralelos.	73
3.6	(Colorido) Simulação numérica do diagrama de fase para $d = 0$ e (a) $l = 0$, (b) $l = 1$, (c) $l = 2$, (d) $l = 3$, (e) $l = 4$, (f) $l = 5$, (g) $l = 10$ e (h) $l = 11$	74

3.7	Gráficos da variação de fase, em radianos, ao longo da fenda em função da posição para $d = 0$ com as seguintes cargas topológicas (a) $l = 1$, (c) $l = 2$ (e) $l = 3$, (g) $l = 4$, (i) $l = 5$ (k) $l = 10$ e (m) $l = 11$. As demais curvas da intensidade em função da posição são referentes a localização dos perfis de intensidade.	75
3.8	Padrão de intensidade para fenda simples com $d = 0,2R$ para a carga topológica (a) $l = 0$, (b) $l = 1$, (c) $l = 2$, (d) $l = 3$, (e) $l = 4$, (f) $l = 5$, (g) $l = 10$ e (h) $l = 11$	76
3.9	Gráficos da intensidade em função da posição para a seção de corte feita ao longo dos padrões vistos na Fig. 3.8, (a) $l = 0$, (b) $l = 1$, (c) $l = 2$, (d) $l = 3$, (e) $l = 4$, (f) $l = 5$, (g) $l = 10$ e (h) $l = 11$ em todos os casos o índice radial p é igual a zero.	77
3.10	(Colorido) Simulação numérica do diagrama de fase para $d = 0,2R$ e (a) $l = 0$, (b) $l = 1$, (c) $l = 2$, (d) $l = 3$, (e) $l = 4$, (f) $l = 5$, (g) $l = 10$ e (h) $l = 11$	78
3.11	Gráficos da variação de fase, em radianos, ao longo da fenda em função da posição para $d = 0,2R$ com as seguintes cargas topológicas (a) $l = 1$, (c) $l = 2$ (e) $l = 3$, (g) $l = 4$, (i) $l = 5$ (k) $l = 10$ e (m) $l = 11$. As demais curvas da intensidade em função da posição são referentes a localização dos perfis de intensidade.	79
3.12	Representação do perfil de intensidade de dois feixes Gaussianos localizados nas extremidades da fenda. O par de feixes é análogo a uma dupla fenda de Young.	80
3.13	Gráficos da intensidade normalizada em função da posição referente ao padrão de intensidade da Eq.(3.6) para alguns valores da inclinação da fase ao longo da fenda (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = 2$ e (c) $\alpha = 5$	82
3.14	Setup experimental	83
3.15	Configuração do LCOS-SLM [36].	84
3.16	Fluxograma do código holográfico.	85
3.17	Imagens experimentais do padrão de difração de uma fenda simples com $d = 0$. Com a carga topológica (a) $l = 0$, (b) $l = 1$, (c) $l = 2$, (d) $l = 3$, (e) $l = 4$, (f) $l = 5$, (g) $l = 10$ e (h) $l = 11$ em todos os casos o índice radial p é igual a zero.	86
3.18	Imagens experimentais do padrão para $d = 0,2R$. Com a carga topológica (a) $l = 0$, (b) $l = 1$, (c) $l = 2$, (d) $l = 3$, (e) $l = 4$, (f) $l = 5$, (g) $l = 10$ e (h) $l = 11$ em todos os casos o índice radial p é igual a zero.	87
3.19	Resultados teóricos (esquerda) e experimentais (direita) para $l = 5$ e 10. Para valores de (a) $d = 0$, (b) $d = 0,1R$ (c) $d = 0,2R$ (d) $d = 0,5R$ e (e) $d = 1,0R$	88

Lista de Tabelas

3.1	Características do LCOS-SLM.	84
-----	--------------------------------------	----

Sumário

INTRODUÇÃO	16
1 MOMENTO ANGULAR DA LUZ E FEIXES LAGUERRE-GAUSS	17
1.1 Introdução	17
1.2 Decomposição do momento angular	18
1.2.1 Momento angular da luz	18
1.2.2 Polarização e momento angular de spin	22
1.2.3 Momento angular orbital	25
1.3 Equação paraxial de Helmholtz	28
1.3.1 Função de onda complexa	28
1.3.2 Ondas paraxiais	29
1.4 Feixes Laguerre-Gaus	31
1.5 Conclusão	35
2 DIFRAÇÃO DA LUZ	36
2.1 Introdução	36
2.2 Teoria inicial	37
2.2.1 Teorema de Green	37
2.3 Formulação de Kirchhoff	40
2.3.1 Condições de contorno de Kirchhoff	40
2.3.2 Fórmula de difração de Fresnel-Kirchhoff	42
2.4 Formulação de Rayleigh-Sommerfeld	44
2.4.1 Difração segundo a formulação de Rayleigh-Sommerfeld	44
2.5 Difração de Fresnel e Fraunhofer	46
2.5.1 O princípio de Huygens-Fresnel	46
2.5.2 Aproximação de Fresnel	48
2.5.3 Aproximação de Fraunhofer	50
2.6 Padrões de difração de Fraunhofer	51
2.6.1 Fenda simples	52
2.6.2 Fenda dupla	54
2.6.3 Abertura circular	56
2.7 Holografia	57
2.8 Difração com luz possuindo MAO	61

2.9	Conclusão	67
3	DIFRAÇÃO ATRAVÉS DE UMA FENDA SIMPLES DE FEIXE LAGUERRE-GAUSS	68
3.1	Introdução	68
3.2	Difração de feixes contendo momento angular orbital por uma fenda simples: descrição teórica	69
3.3	Experimento	82
3.4	Conclusão	88
4	CONCLUSÃO GERAL	90
	REFERÊNCIAS	92

Introdução

Nos últimos anos, muito se avançou no campo da ótica, seja do ponto de vista teórico ou experimental. O estudo da teoria eletromagnética possibilitou explicar muitos fenômenos, dentre os quais é possível demonstrar que uma onda eletromagnética transporta energia, momento linear e momento angular [1]. Além disso, também foi possível explicar que o momento angular da luz possui duas componentes, uma está associada ao estado de polarização do feixe, correspondendo ao momento angular de spin ou intrínseco. Estes estados correspondem à luz circularmente polarizada a direita ou à esquerda. Já a componente que corresponde ao momento angular orbital (MAO) do feixe está associada a componente azimutal do momento linear da luz presente em feixes com uma frente de onda helicoidal.

Allen *et al.* [2] demonstraram que um feixe de luz com uma distribuição de fase que possui uma dependência angular de $\exp(-il\phi)$, onde ϕ é a coordenada azimutal e l é um número inteiro, normalmente referido como carga topológica, transporta um MAO de $l\hbar$ por fóton. Este resultado independe dos estados de polarização e pode ser dito extrínseco pois seu valor depende da escolha do eixo [3]. Feixes Laguerre-Gauss fazem parte de uma família de feixes que possuem MAO. Estes feixes são solução da equação paraxial em coordenadas cilíndricas e podem ser decompostos em termo dos feixes Hermite-Gauss, solução da equação paraxial em coordenadas cartesianas. Existe uma outra classe de feixes, a dos feixes Bessel que são solução da equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas e possuem características não difratantes [4].

O estudo da luz possuindo MAO tem revelado inesperados efeitos em diferentes campos de pesquisa tais como informação quântica [5], comunicação óptica [6], pinças ópticas [7] e biofísica [8].

A rica relação entre a fase azimutal da luz possuindo MAO e o fenômeno de difração tem revelado um número de interessantes efeitos e motivado cientistas a fazer novas descobertas. Em particular, um interferômetro feito com vários orifícios de diferentes tamanhos tem-se apresentado como um método eficiente para investigar a presença de vórtices ópticos [9]. Hickmann *et al.* [10] mostraram um interessante resultado onde uma rede óptica truncada foi revelada no padrão de difração da luz com MAO por uma simples fenda triangular. Mesmo tradicionais problemas de difração por uma fenda simples [11], dupla fenda [12] e abertura circular [13] ganham novas interpretações físicas devido a uma distribuição de fase não usual da luz com MAO.

De fato, a difração é um fenômeno já bem estabelecido que teve o passo inicial para sua evolução feita por Christian Huygens, no ano de 1678. Huygens estabeleceu o princípio no qual a propagação de uma onda de luz pode ser prevista se assumirmos que cada ponto da frente de onda atua como uma fonte de uma onda secundária que se propaga em todas as direções. O envelope que se forma em torno de todas as ondas secundárias é a nova frente de onda. Em 1818 Fresnel fez suposições sobre a fase e amplitude das ondas secundárias de Huygens, permitindo que várias ondas interferissem mutuamente. Com isso foi possível calcular o padrão de difração da distribuição da luz, complementando o trabalho de Huygens. Em seguida, Kirchhoff mostrou que as amplitudes e fases obtidas por Fresnel eram conseqüências diretas da natureza ondulatória da luz. A teoria de Kirchhoff foi modificada por Sommerfeld, eliminando uma das condições de contorno estabelecidas por Kirchhoff pelo uso da teoria das funções de Green.

Em particular, a maioria das investigações na área de difração envolvendo MAO tem como objetivo obter de maneira simples o valor da magnitude e da carga topológica do

feixe. Por exemplo, através de um experimento de fenda triangular [10] foi possível obter de maneira direta o sinal e a magnitude da carga topológica. Também é possível obter o valor e o sinal da carga topológica utilizando uma fenda simples [11], embora não tão direto como em [10].

Embora existam várias pesquisas sobre difração, nenhuma até o momento estudou a formação do padrão de difração de Fraunhofer de feixes possuindo MAO por uma fenda simples. Para realizar este estudo, dividimos o trabalho como segue. No capítulo 1 faremos uma abordagem sobre a teoria de momento angular transportado por um feixe. Deduziremos a expressão para o momento angular e observaremos que ele pode ser dividido em duas componentes, o momento angular de spin e o MAO. Em seguida, trataremos da equação paraxial e, por fim, veremos que os feixes Laguerre-Gauss são soluções desta equação em coordenadas cilíndricas.

No capítulo 2, iniciaremos nossos estudos tratando da teoria de difração de uma maneira mais quantitativa. A partir do conceito matemático de Sommerfeld, buscaremos obter duas aproximações, conhecidas como aproximação de Fresnel e Fraunhofer. De modo especial trabalharemos com a aproximação de Fraunhofer para os casos de difração por aberturas simples, dupla e circular.

No capítulo 3, apresentaremos pela primeira vez o estudo da formação de padrões de difração de feixes possuindo MAO por uma fenda simples. Mostramos que os padrões obtidos são análogos aos de interferência de onda plana por dupla fenda. Onde os máximos e mínimos formados dependem da quantidade de MAO bem como a assimetria do padrão depende da posição da fenda ao longo do feixe. Por fim, no capítulo 4 finalizaremos com a conclusão geral do nosso trabalho e as perspectivas.

1 Momento Angular da Luz e Feixes Laguerre-Gauss

1.1 Introdução

Sabe-se que a luz transporta energia, momento linear e momento angular. O momento angular pode ser decomposto em duas partes; momento angular de spin (ou momento angular intrínseco), que está associado à polarização da luz e o momento angular orbital (MAO), que aparece devido à componente azimutal do momento linear da luz presente em feixes com uma frente de onda helicoidal.

Em 1909 Poynting [14] mostrou, pelo uso de uma analogia mecânica, que luz circularmente polarizada deve exercer um torque por unidade de área igual a $E\lambda/2\pi$ onde E é a energia por unidade de volume e λ é o comprimento de onda da luz. De fato, esta abordagem é consistente com a expressão escrita em termos da razão do momento angular com o momento linear do fóton, $\hbar/\hbar k = \lambda/2\pi$. Uma variação do experimento proposto por Poynting foi realizado em 1936 por Beth [15].

Este capítulo tem como objetivo deduzir as expressões para o momento angular intrínseco e orbital. Iniciaremos com a teoria do momento angular transportado por um feixe de luz. Em seguida, mostraremos que um feixe com uma dependência de fase azimutal de $e^{-il\phi}$ transporta MAO. Faremos uma abordagem sobre a aproximação paraxial e,

fazendo uso da mesma, veremos que os feixes Laguerre-Gauss são soluções desta equação possuindo MAO bem definido proporcional a l [2].

1.2 Decomposição do momento angular

O momento angular total da luz é obtido através da soma do momento angular de spin com o MAO. Se por um lado o momento angular de spin é um assunto bem estabelecido na literatura, por outro, a idéia de luz possuindo MAO é relativamente recente. Em 1992, um grupo da universidade de Leiden na Holanda mostrou que um feixe de luz com uma dependência azimutal na fase da forma $e^{-il\phi}$ tem um momento angular que é independente do estado de polarização da luz [2], onde ϕ é a coordenada azimutal na seção transversal do feixe e l é um número inteiro positivo ou negativo, conhecida como índice azimutal (ou carga topológica).

1.2.1 Momento angular da luz

O fluxo de energia do campo eletromagnético no espaço livre é dado pelo vetor de Poynting:

$$\vec{S}_{Poynting} = c^2 \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}. \quad (1.1)$$

No espaço livre, a densidade de momento linear (por unidade de volume) é proporcional ao vetor de Poynting [16]:

$$\vec{p} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \frac{\vec{S}_{Poynting}}{c^2}. \quad (1.2)$$

Sendo que o momento linear total será dado pela integral de \vec{p} em todo o volume,

$$\vec{P} = \epsilon_0 \int \vec{E} \times \vec{B} d^3r. \quad (1.3)$$

A densidade de momento angular \vec{j} de um feixe de luz pode ser expressa em função da densidade de momento linear:

$$\vec{j} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (1.4)$$

Assim, substituindo a Eq.(1.2) na Eq.(1.4) temos para a densidade de momento angular:

$$\vec{j} = \vec{r} \times \vec{p} = \varepsilon_0 (\vec{r} \times \vec{E} \times \vec{B}) \quad (1.5)$$

ou

$$\vec{j} = \frac{\varepsilon_0}{c^2} (\vec{r} \times \vec{S}_{Poynting}). \quad (1.6)$$

Podemos notar que se o feixe de luz vem na forma de uma onda plana infinita não existe momento angular. Isto porque, para uma frente de onda plana, \vec{S} é constante e paralelo à direção de propagação em todos os pontos no plano.

A teoria de campos eletromagnéticos é descrita pelas equações de Maxwell. Estas são resumidas em um conjunto de quatro equações diferenciais. No Sistema Internacional de Unidades, em um meio livre de cargas e correntes, elas podem ser escritas como [1]:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (1.7)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (1.8)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0; \quad (1.9)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.10)$$

Onde \vec{B} , \vec{D} , \vec{E} e \vec{H} são os vetores indução magnética, deslocamento elétrico, campo elétrico e campo magnético, respectivamente. Para um meio linear no espaço livre, as relações constitutivas são:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}; \quad (1.11)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \quad (1.12)$$

Com ε_0 e μ_0 sendo a permissividade elétrica e magnética do espaço livre.

Uma vez que o divergente do rotacional de um campo vetorial é nulo, podemos escrever o vetor indução magnética \vec{B} [Eq.(1.10)], como sendo o rotacional de outro campo vetorial.

Conforme a relação [17],

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{A}] = 0, \quad (1.13)$$

logo a indução magnética em função do potencial vetor fica:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (1.14)$$

Substituindo a Eq.(1.14) em (1.5) e utilizando a identidade $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$, a Eq.(1.5) fica,

$$\vec{j} = \varepsilon_0 \vec{r} \times \left[\sum_{i=1}^3 (E_i \vec{\nabla} A_i) - (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \right] \quad (1.15)$$

$$\vec{j} = \varepsilon_0 \left\{ \sum_{i=1}^3 E_i (\vec{r} \times \vec{\nabla}) A_i - \vec{r} \times (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \right\} \quad (1.16)$$

onde i representa as componentes x , y e z dos vetores.

Substituindo as identidades (1.17) e (1.18) na Eq.(1.16):

$$\vec{r} \times (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} = \sum_{i=1}^3 \vec{\nabla}_i (E_i \vec{r} \times \vec{A}) - \vec{r} \times \vec{A} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} \times \vec{A} \quad (1.17)$$

$$(\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} = \vec{E} \quad (1.18)$$

temos,

$$\vec{j} = \varepsilon_0 \left\{ \sum_{i=1}^3 E_i (\vec{r} \times \vec{\nabla}) A_i - \sum_{i=1}^3 \vec{\nabla}_i (E_i \vec{r} \times \vec{A}) - \vec{r} \times \vec{A} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \vec{E} \times \vec{A} \right\}. \quad (1.19)$$

Das equações de Maxwell na ausência de cargas livres, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, o terceiro termo da Eq.(1.19) se anula. Podemos então reescrever a densidade de momento angular como:

$$\vec{j} = \varepsilon_0 \left\{ \sum_{i=1}^3 E_i (\vec{r} \times \vec{\nabla}) A_i - \sum_{i=1}^3 \vec{\nabla}_i (E_i \vec{r} \times \vec{A}) + \vec{E} \times \vec{A} \right\} \quad (1.20)$$

Integrando sobre todo volume, obtemos o momento angular total sendo:

$$\vec{J} = \varepsilon_0 \left\{ \sum_{i=1}^3 \int [E_i(\vec{r} \times \vec{\nabla})A_i]d^3r - \sum_{i=1}^3 \int [\vec{\nabla}_i(E_i \vec{r} \times \vec{A})]d^3r + \int (\vec{E} \times \vec{A})d^3r \right\}. \quad (1.21)$$

Se aplicarmos o teorema da divergência ao segundo termo do lado direito da Eq.(1.21),

$$\int [\vec{\nabla}_i(E_i \vec{r} \times \vec{A})]d^3r = \oint E_i(\vec{r} \times \vec{A})ds_i \quad (1.22)$$

e considerando que o campo elétrico se anula quando $\vec{r} \rightarrow \infty$, a integral de superfície na Eq.(1.22) também se anula. Assim, temos o momento angular total para o campo eletromagnético da forma,

$$\vec{J} = \varepsilon_0 \int (\vec{E} \times \vec{A})d^3r + \varepsilon_0 \sum_{i=1}^3 \int [E_i(\vec{r} \times \vec{\nabla})A_i]d^3r \quad (1.23)$$

$$\vec{J} = \vec{S} + \vec{L}. \quad (1.24)$$

Observemos que a primeira parte de (1.24) não depende da escolha do eixo de propagação, e representa o momento angular intrínseco, também chamado de momento angular de Spin. Por outro lado, a segunda parte tem dependência explícita em \vec{r} e portanto estando associada ao MAO da Luz. Na Fig. 1.1 temos uma representação do MAO e momento angular de spin.

Ao contrário do momento angular de spin, que tem somente dois estados independentes $\pm\hbar$, o MAO tem um ilimitado número de estados ortogonais, correspondendo a valores inteiros de l [18].

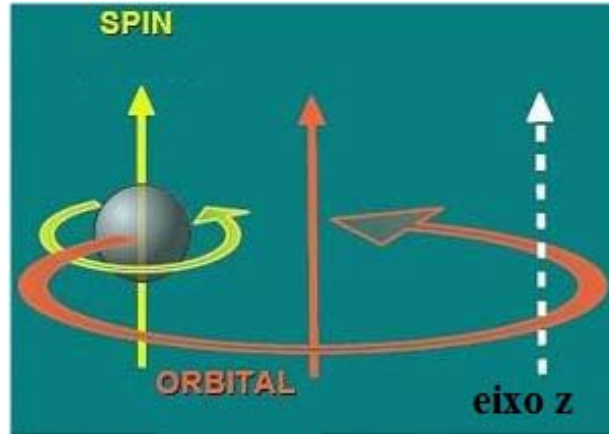


Figura 1.1: Representação do MAO e do momento angular de Spin [19].

1.2.2 Polarização e momento angular de spin

O campo elétrico de uma onda eletromagnética propagando ao longo do eixo z pode ser representado por,

$$\vec{E} = E_0 \left[\cos(kz - \omega t)\hat{i} \pm \sin(kz - \omega t)\hat{j} \right], \quad (1.25)$$

onde o sinal positivo representa uma onda circularmente polarizada a direita e o sinal negativo representa uma onda circularmente polarizada a esquerda. Se admitirmos a ausência de cargas e correntes elétricas no espaço livre, o potencial escalar ϕ é nulo e podemos escrever a expressão para o campo elétrico como segue,

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (1.26)$$

Substituindo a Eq.(1.25) em (1.26) tem-se o potencial vetor dado por:

$$\vec{A} = -\int \vec{E} dt = \frac{E_0}{\omega} [\sin(kz - \omega t)\hat{i} \pm \cos(kz - \omega t)\hat{j}]. \quad (1.27)$$

Substituindo (1.26) e (1.27) no primeiro termo da Eq.(1.23), após resolvermos a integração o momento angular de spin torna-se:

$$\vec{S} = \varepsilon_0 \int (\vec{E} \times \vec{A}) d^3r = \pm \varepsilon_0 \frac{E_0^2}{\omega} \hat{k} \int d^3r. \quad (1.28)$$

O sentido do momento angular de spin expresso na Eq.(1.28) depende dos estados de polarização, isto é, se a onda é circularmente polarizada a direita ou à esquerda. Quando a onda é polarizada linearmente o momento angular de spin se anula, pois $\vec{E} \times \vec{A} = 0$.

De acordo com a teoria de Maxwell, um campo eletromagnético tem uma densidade de energia expressa por:

$$w = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{B}). \quad (1.29)$$

Substituindo a Eq.(1.27) na Eq.(1.14) e resolvendo o produto vetorial encontramos a expressão para o campo magnético:

$$\vec{B} = \frac{E_0 k}{\omega} [\cos(kz - \omega t) \hat{j} \pm \sin(kz - \omega t) \hat{i}]. \quad (1.30)$$

Inserindo o resultado obtido acima juntamente com a Eq.(1.25) na Eq.(1.29) teremos expressão para a densidade de energia:

$$w = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E_0^2 + \frac{k^2 E_0^2}{\mu_0 \omega^2} \right) \\ w = \varepsilon_0 E_0^2. \quad (1.31)$$

A energia total do feixe é dada pela integral em todo volume sobre a densidade de energia.

Com isso fazemos a razão entre o momento angular de spin [Eq.(1.28)] e a sua energia,

$$\frac{S_z}{W} = \pm \frac{\int \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{\omega} d^3 r}{\int \varepsilon_0 E_0^2 d^3 r} = \pm \frac{1}{\omega}. \quad (1.32)$$

Substituindo as Eqs.(1.25) e (1.30) na Eq.(1.2), obtemos a densidade de momento linear sendo:

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 k}{\omega} \hat{k}. \quad (1.33)$$

Como definido anteriormente o momento linear total é dado pela integral em todo volume da densidade de momento linear, logo tomando a integral da expressão anterior:

$$\vec{P} = \int \frac{\varepsilon_0 E_0^2 k}{\omega} \hat{k} d^3 r. \quad (1.34)$$

Fazendo a razão entre as Eqs.(1.28) e (1.34):

$$\frac{S_z}{P_z} = \pm \frac{\int \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{\omega} d^3r}{\int \frac{\varepsilon_0 E_0^2 k}{\omega} d^3r} = \pm \frac{1}{k}. \quad (1.35)$$

Sabemos da mecânica quântica que a energia do fóton é dada por $E_{fóton} = \hbar\omega$ e o spin assume valores $\pm\hbar$. Conhecemos também que o momento linear é dado por $\hbar k$, logo quando fazemos a razão entre o spin do fóton e sua energia obtemos o mesmo valor encontrado em (1.32), e ao fazer a razão entre o spin do fóton e seu momento linear obtemos a expressão (1.35). Através das interpretações experimentais de Beth [15] podemos dizer que uma onda circularmente polarizada pela direita ou esquerda possui fótons com spin bem definido de $+\hbar$ ou $-\hbar$, isto é, a onda circularmente polarizada pela direita tem seu vetor momento angular de spin paralelo ao vetor momento linear, já a onda circularmente polarizada a esquerda possui seu momento angular de spin anti-paralelo ao vetor momento linear. Na Fig. 1.2 temos uma representação de luz circularmente polarizada a direita e a esquerda, respectivamente.

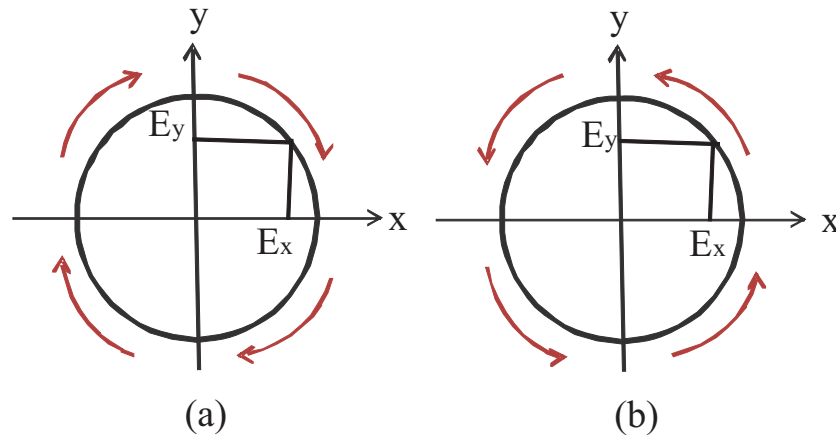


Figura 1.2: Representação da polarização circular (a) a direita e (b) a esquerda.

O estado de polarização pode ser descrito como uma combinação linear de dois estados de polarização ortogonais. Para convertermos, experimentalmente, uma onda linearmente

polarizada em uma onda polarizada circularmente a esquerda, ou uma onda circularmente polarizada a direita em uma onda linearmente polarizada, fazemos uso de uma placa de um quarto de onda que insere um atraso na fase de $\pi/2$. Já para convertermos ondas circularmente polarizadas a direita para ondas circularmente polarizadas a esquerda utilizamos uma placa de meia-onda que insere um atraso de π na fase. A Fig. 1.3 mostra esses resultados graficamente.

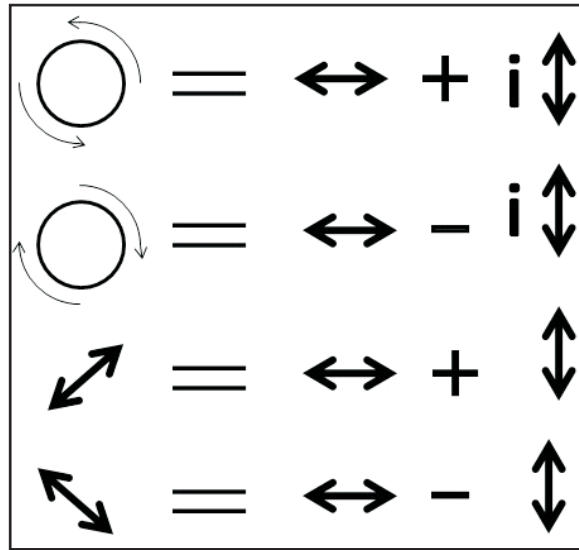


Figura 1.3: Decomposição dos estados de polarização.

1.2.3 Momento angular orbital

Agora vamos admitir que um feixe de luz monocromática tenha polarização linear e seja definido pelo potencial vetor a seguir:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = u(\vec{r}) \exp[i(kz - \omega t)] \hat{i} \quad (1.36)$$

onde $k = 2\pi/\lambda$ é o módulo do vetor de onda, \hat{i} é o vetor unitário na direção do eixo x , λ é o comprimento de onda do feixe, $u(\vec{r})$ é uma função complexa que descreve a distribuição de amplitude do feixe e ω é a frequência angular.

Vale salientar que o potencial vetor [Eq.(1.36)] satisfaz o calibre de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, podemos calcular agora a densidade de momento angular total. Notando que os campos são complexos, calculemos a parte real:

$$\Re(\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{2}(\vec{E}^* \times \vec{B} + \vec{E} \times \vec{B}^*) \quad (1.37)$$

Podemos calcular as expressões para o campo elétrico e magnético através da Eq.(1.36):

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i\omega u(\vec{r}) \exp[i(kz - \omega t)] \hat{i} \quad (1.38)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left\{ \frac{\partial}{\partial z} [u(\vec{r}) \exp[i(kz - \omega t)]] \hat{j} - \frac{\partial}{\partial y} [u(\vec{r}) \exp[i(kz - \omega t)]] \hat{k} \right\} \quad (1.39)$$

$$\vec{B} = \left[\frac{\partial u}{\partial z} + iku \right] \exp[i(kz - \omega t)] \hat{j} - \frac{\partial u}{\partial y} \exp[i(kz - \omega t)] \hat{k}. \quad (1.40)$$

Assim o primeiro termo de (1.37) fica,

$$\vec{E}^* \times \vec{B} = -i\omega u^* \left[\frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{k} \right] + \omega k |u|^2 \hat{k} \quad (1.41)$$

como $\partial u / \partial x = 0$.

$$\vec{E}^* \times \vec{B} = -i\omega u^* \nabla u + \omega k |u|^2 \hat{k}, \quad (1.42)$$

O mesmo vale para o segundo termo em (1.37):

$$\vec{E} \times \vec{B}^* = i\omega u^* \nabla u + \omega k |u|^2 \hat{k}. \quad (1.43)$$

Logo a densidade de momento linear média do campo eletromagnético é dada por:

$$\vec{p} = \Re \left[\varepsilon_0 \langle \vec{E} \times \vec{B} \rangle \right] = \frac{\varepsilon_0}{2} [\vec{E}^* \times \vec{B} + \vec{E} \times \vec{B}^*] = \frac{i\omega\varepsilon_0}{2} (u\nabla u^* - u^*\nabla u) + \varepsilon_0\omega k |u|^2 \hat{k}. \quad (1.44)$$

Este resultado também se aplica para coordenadas cilíndricas, onde u é escrito como $u(r, \phi, z)$. Seja qualquer campo da forma :

$$u(r, \phi, z) = u_0(r, z) \exp(i\ell\phi), \quad (1.45)$$

o qual obedece às condições da aproximação paraxial (que será discutida na próxima seção). Fazendo uso dessas aproximações podemos escrever a densidade de momento linear como:

$$\vec{p} = \frac{i\omega\varepsilon_0}{2} \left(u_0 \frac{\partial u_0^*}{\partial r} - u_0^* \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) \hat{r} + \frac{l\varepsilon_0\omega}{r} |u_0|^2 \hat{\phi} + \varepsilon_0\omega k |u_0|^2 \hat{z}, \quad (1.46)$$

onde $\hat{r}, \hat{\phi}$ e \hat{z} são vetores unitários em coordenadas cilíndricas.

Ao substituírmos a Eq.(1.46) em (1.1) obtemos o vetor de Poynting:

$$\vec{S}_{Poynting} = c^2 \left[\frac{i\omega\varepsilon_0}{2} \left(u_0 \frac{\partial u_0^*}{\partial r} - u_0^* \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) \hat{r} + \frac{l\varepsilon_0\omega}{r} |u_0|^2 \hat{\phi} + \varepsilon_0\omega k |u_0|^2 \hat{z} \right]. \quad (1.47)$$

Ao fazer isto vemos que ele descreve uma trajetória na forma de um helicóide ao longo da direção de propagação, sendo que a componente \hat{r} está relacionada com a dispersão do feixe, a componente $\hat{\phi}$ é responsável pelo surgimento do MAO na direção de propagação e a componente \hat{z} está relacionada com o momento linear na direção z. Sabendo que a densidade de energia em tal feixe é $w = c\varepsilon_0 \langle \vec{E} \times \vec{B} \rangle_z = c\varepsilon_0\omega k |u|^2 = \varepsilon_0\omega^2 |u|^2$; isto é, a velocidade da luz multiplicada pela densidade de momento linear [20].

Já o cálculo da densidade de momento angular em coordenadas cilíndricas produz:

$$\vec{l} = -\frac{l\varepsilon_0\omega z |u_0|^2}{r} \hat{r} + \frac{i\omega\varepsilon_0}{2} \left[\left(u_0 \frac{\partial u_0^*}{\partial r} - u_0^* \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) z + 2ikr |u_0|^2 \right] \hat{\phi} + l\varepsilon_0\omega |u_0|^2 \hat{z}, \quad (1.48)$$

Integrando \vec{l} e \vec{p} no volume do feixe, constatamos que restará apenas a componente paralela ao sentido de propagação, pois as outras componentes são simétricas em relação ao eixo z.

O MAO total é dado pela integral sobre todo volume da densidade de momento angular e como definido anteriormente [Eq.(1.32)] a energia total do feixe é dada pela integral de volume sobre a densidade de energia. Assim fazendo a razão entre essas duas grandezas:

$$\frac{L_z}{W} = \frac{\int \vec{l} d^3r}{\int w d^3r} = \frac{\int l\varepsilon_0\omega |u_0|^2 d^3r}{\int \varepsilon_0\omega^2 |u_0|^2 d^3r} = \frac{l}{\omega}. \quad (1.49)$$

A razão do MAO e o momento linear pode ser escrito como:

$$\frac{L_z}{P_z} = \frac{\int \vec{l} d^3r}{\int \vec{p} d^3r} = \frac{\int l \epsilon_0 \omega |u_0|^2 d^3r}{\int \epsilon_0 \omega k |u_0|^2 d^3r} = \frac{l}{k} = \frac{l\lambda}{2\pi}, \quad (1.50)$$

onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ é o número de onda.

O feixe é polarizado linearmente, logo o momento angular não pode ser devido ao spin. Claramente, a Eq.(1.49) é análoga a Eq.(1.32) para um feixe de luz polarizado circularmente. A analogia entre mecânica quântica e óptica paraxial sugere que tais feixes são autovetores do operador momento angular \vec{L}_z e transportam um MAO de $l\hbar$ por fóton.

1.3 Equação paraxial de Helmholtz

Muitos cálculos em óptica podem ser simplificados se tomarmos a aproximação paraxial, isto é, a mudança no perfil transversal de um feixe bem colimado é pequena ao longo da direção de propagação z .

1.3.1 Função de onda complexa

Seja uma onda monocromática representada pela função [16]:

$$u(\vec{r}, t) = a(\vec{r}) \cos[2\pi\nu t + \phi(\vec{r})], \quad (1.51)$$

onde $a(\vec{r})$ é a amplitude, $\phi(\vec{r})$ é a fase, ν é a frequência onde $\omega = 2\pi\nu$ é a frequência angular e $T = 1/\nu = 2\pi/\omega$ é o período. Sendo que amplitude e fase são geralmente dependentes da posição.

É conveniente representar a função real $u(\vec{r}, t)$ em (1.51) em termos de uma função complexa,

$$U(\vec{r}, t) = a(\vec{r}) \exp[i\phi(\vec{r})] \exp(2\pi i\nu t), \quad (1.52)$$

de modo que,

$$u(\vec{r}, t) = \Re \{U(\vec{r}, t)\} = \frac{1}{2} [U(\vec{r}, t) + U^*(\vec{r}, t)]. \quad (1.53)$$

A Eq.(1.52) é conhecida como *função de onda complexa* e descreve a onda completamente; a função de onda em (1.53) é simplesmente a parte real. Assim como a função de onda $u(\vec{r}, t)$, a função de onda complexa $U(\vec{r}, t)$ deve satisfazer a *equação de onda*

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \quad (1.54)$$

Agora vamos reescrever a Eq.(1.52) na forma,

$$U(\vec{r}, t) = U_0(\vec{r}) \exp(2\pi i \nu t), \quad (1.55)$$

o fator independente do tempo em (1.55), $U_0(\vec{r}) = a(\vec{r}) \exp[i\phi(\vec{r})]$, é referido como a amplitude complexa da onda. A função de onda $u(\vec{r}, t)$ em (1.53) está associada com a amplitude complexa por:

$$u(\vec{r}) = \Re \{U_0(\vec{r}) \exp(2\pi i \nu t)\} = \frac{1}{2} [U_0(\vec{r}) \exp(2\pi i \nu t) + U_0^*(\vec{r}) \exp(-2\pi i \nu t)]. \quad (1.56)$$

Em uma dada posição \vec{r} , a amplitude complexa $U_0(\vec{r})$ é uma variável complexa cuja magnitude, $|U_0(\vec{r})| = a(\vec{r})$, é a amplitude da onda e cujo argumento, $\arg\{U_0(\vec{r})\} = \phi(\vec{r})$, é a fase. O valor da função complexa $U(\vec{r}, t)$ em $t = 0$ é a amplitude complexa $U_0(\vec{r})$.

1.3.2 Ondas paraxiais

Uma onda é dita ser paraxial se suas frentes de onda normais têm raios paraxiais associados, isto é, o ângulo entre os raios e o eixo de referência do sistema óptico sempre permanece pequeno, $\ll 1 \text{ rad}$ [21] (Fig. 1.4). Podemos construir uma onda paraxial iniciando com uma onda plana $A \exp(-ikz)$, considerando-a como uma onda portadora e que modifica ou modula seu envelope complexo A , fazendo com que sua variação seja pequena em relação a posição, $A(\vec{r})$, uma vez que a amplitude complexa da onda modulada

torná-se:

$$U(\vec{r}) = A(\vec{r}) \exp(-ikz). \quad (1.57)$$

A variação do envelope $A(\vec{r})$ e sua derivada com a posição z deve ser pequena ao longo da distância do comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k$ de modo que a onda mantém, aproximadamente, sua natureza plana.

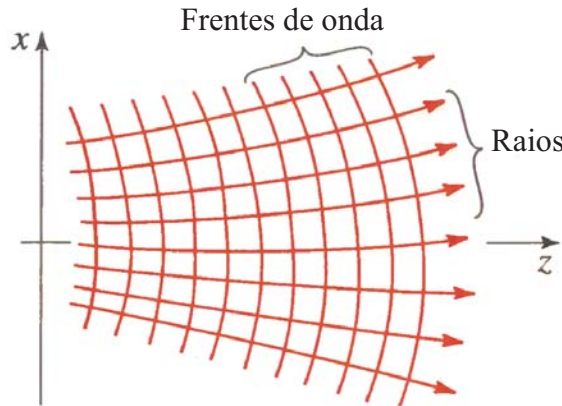


Figura 1.4: Frentes de onda normal de uma onda paraxial no plano x-z [16].

Agora, se fizermos a substituição da Eq.(1.55) na equação de onda (1.54) obtemos a equação diferencial para a amplitude complexa $U(\vec{r})$:

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0, \quad (1.58)$$

a Eq.(1.58) é conhecida como *equação de Helmholtz*, e $k = 2\pi\nu/c = \omega/c$ é o número de onda.

De modo que para onda paraxial descrita pela Eq.(1.57) satisfazer a equação de Helmholtz o envelope complexo $A(\vec{r})$ deve satisfazer outra equação diferencial parcial que é obtida quando substituimos a Eq.(1.57) em (1.58). Quando assumimos que $A(\vec{r})$ varia lentamente com relação a z significa que ao longo de uma distância $\Delta z = \lambda$, a mudança ΔA é muito menor que A , ou seja, $\Delta A \ll A$. Uma vez que $\Delta A = (\partial A/\partial z)\Delta z = (\partial A/\partial z)\lambda$,

segue que $(\partial A/\partial z) \ll A/\lambda = Ak/2\pi$, de modo que

$$\frac{\partial A}{\partial z} \ll kA. \quad (1.59)$$

A derivada $(\partial A/\partial z)$ deve também variar lentamente ao longo da distância do comprimento de onda λ , de modo que $(\partial^2 A/\partial z^2) \ll k(\partial A/\partial z)$, para o qual fornece

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll k^2 A. \quad (1.60)$$

Substituindo (1.57) em (1.58), e desprezando $\partial^2 A/\partial z^2$, em comparação com $k(\partial A/\partial z)$ ou $k^2 A$, nos leva a equação diferencial parcial para o envelope complexo $A(\vec{r})$,

$$\nabla_T^2 A - 2ki \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad (1.61)$$

onde $\nabla_T^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ é o operador Laplaciano transversal.

A Eq.(1.61) é chamada a equação *paraxial de Helmholtz*. Os feixes Bessel são solução da Eq.(1.58), já os feixes Laguerre-Gauss e Hermite-Gauss são soluções da Eq.(1.61).

Os feixes Bessel são uma classe de feixes solução da Eq.(1.58) em coordenadas cilíndricas, devido sua característica não-difratante vem sendo amplamente utilizado como pinças ópticas, onde é possível aprisionar e mover pequenas partículas [22]. Já os feixes Laguerre-Gauss são soluções da Eq.(1.61) obtidas também em coordenadas cilíndricas, porém podem ser decompostos em termos dos feixes Hermite-Gauss que são soluções em coordenadas cartesianas. O estudo dos feixes Laguerre-Gauss será desenvolvido adiante.

1.4 Feixes Laguerre-Gauss

Uma solução obtida ao resolver a Eq.(1.61) em coordenadas cilíndricas, usando a técnica de separação de variáveis em r e ϕ , é a amplitude complexa dos feixes Laguerre-Gauss que pode ser escrita da seguinte forma,

$$U_{l,p}(r, \phi, z) = A_{l,p} \left[\frac{W_0}{W(z)} \right] \left(\frac{r}{W(z)} \right)^l \mathcal{L}_p^l \left(\frac{2r^2}{W^2(z)} \right) \exp \left(-\frac{r^2}{W^2(z)} \right) \\ \times \exp \left[-ikz - ik \frac{r^2}{2R(z)} - il\phi + i(l+2p+1)\zeta(z) \right]. \quad (1.62)$$

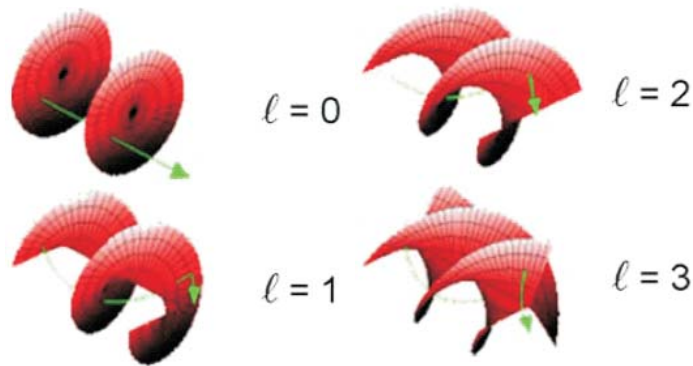


Figura 1.5: Frente de onda dos feixes Laguerre-Gauss para ordem zero e ordens superiores [18].

A Eq.(1.62) corresponde a um feixe viajando ao longo da direção z . Onde $p \geq 0$ é o índice radial (número de anéis = $p + 1$) e l é o índice azimutal (ou carga topológica) e \mathcal{L}_p^l é o polinômio de Laguerre generalizado; $W(z)$ é a cintura do feixe, $R(z)$ o raio de curvatura da frente de onda, $\zeta(z)$ a fase de Gouy e W_0 é a cintura do feixe em $z = 0$, e são dados respectivamente por:

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \frac{z}{z_R}} \quad (1.63)$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right] \quad (1.64)$$

$$\zeta(z) = \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_R} \right) \quad (1.65)$$

$$W_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}}. \quad (1.66)$$

z_R é o comprimento de Rayleigh,

$$z_R = \frac{\pi W_0^2}{\lambda} \quad (1.67)$$

Em $z = 0$, a fase do feixe é simplesmente descrito por $l\phi$. Para $l = 0$ o feixe é

gaussiano, a onda é plana e a fase é constante; para $l \neq 0$ a onda é helicoidal e a fase varia de $-\pi$ a π .

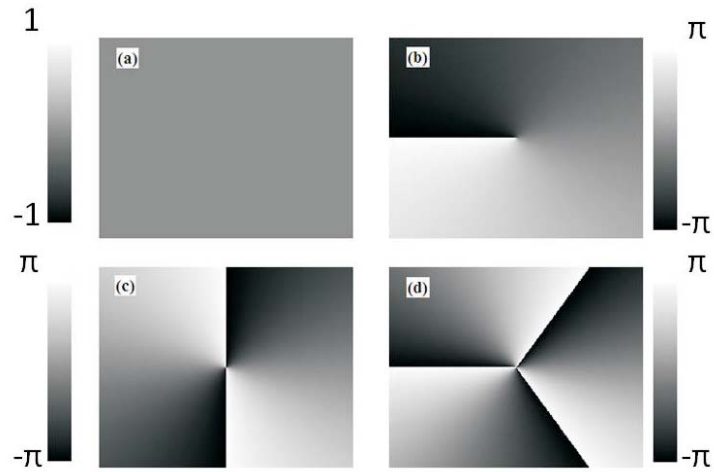


Figura 1.6: Distribuição de fase de um feixe Laguerre-Gauss com carga topológica (a) $l = 0$, (b) $l = 1$, (c) $l = 2$ e (d) $l = 3$.

Na Fig. 1.5 temos a representação das frentes de onda e na Fig. 1.6 e representação da fase para o feixe Laguerre-Gauss com a carga topológica $l = 0, 1, 2$ e 3 .

A intensidade do feixe Laguerre-Gauss é uma função de r e z , uma vez que ele é simétrico circularmente. Feixes de luz que possuem uma fase azimutal de $\exp(-il\phi)$, como é o caso dos feixes Laguerre-Gauss, possuem uma frente de onda em forma de hélice. O MAO destes feixes é proporcional a l . A presença deste tipo de fase faz com que para $l \neq 0$, o feixe apresente uma singularidade de fase, ou seja, o feixe tem intensidade zero no centro e tem-se um padrão de intensidade anelar [23], conhecido como vórtice óptico, como ilustrado na Fig. 1.7.

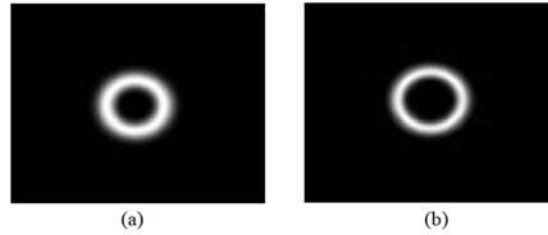


Figura 1.7: Perfil de intensidade de um feixe Laguerre-Gauss (a) $l = 10$ e (b) $l = 20$, em ambos os casos $p = 0$.

Os feixes Laguerre-Gauss podem ser decompostos em termos dos feixes Hermite-Gauss, os quais também são solução da equação paraxial. Entretanto, diferentemente dos feixes Laguerre-Gauss, são deduzidos em coordenadas cartesianas e não possuem MAO. A amplitude complexa dos feixes Hermite-Gauss é:

$$U_{m,n}(x, y, z) = A_{m,n} \left[\frac{W_0}{W(z)} \right] H_n \left[\frac{\sqrt{2}y}{W(z)} \right] H_m \left[\frac{\sqrt{2}x}{W(z)} \right] \times \exp \left[-ikz - ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + i(m+n+1)\zeta(z) \right], \quad (1.68)$$

onde $A_{m,n}$ é uma constante de normalização, H_m e H_n são os polinômios de Hermite, $W(z)$, $R(z)$, $\zeta(z)$ e W_0 são dados por (1.63), (1.64), (1.65) e (1.66), respectivamente. Os índices (m, n) são relacionados com os índices (p, l) por $l = |m - n|$ e $p = \min(m, n)$, a ordem do feixe Hermite-Gauss (HG_{mn}) é definida por $N = m + n$. Algumas distribuições de intensidade para os feixes Hermite-Gauss são mostrados na Fig. 1.8.

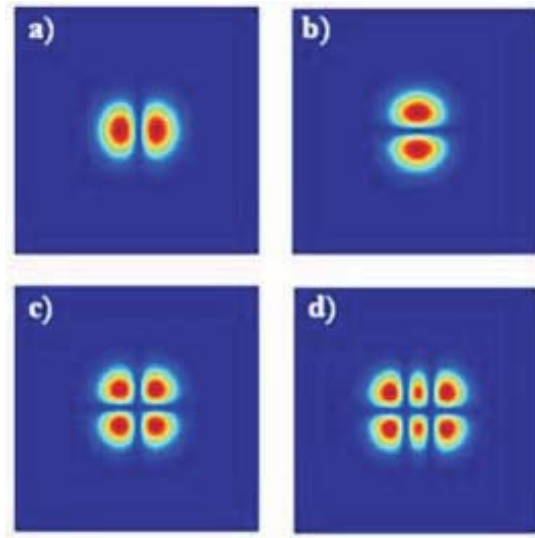


Figura 1.8: (Colorido) Distribuições de intensidades dos feixes Hermite-Gauss: (a) HG_{10} (b) HG_{01} (c) HG_{11} e (d) HG_{21} [4].

1.5 Conclusão

Neste capítulo iniciamos nosso estudo sobre momento angular da luz. Vimos que podemos decompô-lo em duas componentes, uma é o momento angular de spin (ou momento angular intrínseco), que está associado aos estados de polarização da luz, e o momento angular orbital, o qual está associado à fase azimutal do feixe. Depois, prosseguimos com a aproximação paraxial e vimos que um feixe de luz linearmente polarizado possuindo uma fase azimutal de $\exp(-il\phi)$ possui MAO bem definido na direção de propagação. Finalizamos vendo que os feixes Laguerre-Gauss com carga topológica diferente de zero possuem vórtices ópticos e também obedecem a equação paraxial em coordenadas cilíndricas. Além disso, podem ser decompostos em termos de feixes Hermite-Gauss, os quais igualmente aos feixes Laguerre-Gauss obedecem a equação paraxial, porém em coordenadas cartesianas.

2 Difração da Luz

2.1 Introdução

Difração é a dispersão da frente de onda do feixe que ocorre sempre que a luz se propaga. O efeito de difração é evidenciado quando a luz é transmitida por orifícios ou obstáculos cuja dimensão é da mesma ordem de grandeza que o seu comprimento de onda.

A óptica de Fourier é uma poderosa ferramenta usada para investigar como um sinal óptico é afetado por sistemas ópticos (aberturas e lentes). Através desta formulação matemática podemos entender qualitativamente vários fenômenos físicos relacionados com difração sem entrar em detalhes no problema que está sendo estudado, por exemplo, sem examinar a direção de cada raio da luz que incide em uma abertura.

As características essenciais do fenômeno de difração podem ser explicadas qualitativamente pelo princípio de Huygens. Este princípio determina que a propagação da onda pode ser estabelecida assumindo que cada ponto na frente de onda atua como uma fonte de onda secundária que espalha a luz em todas as direções. Sendo agora o envelope de todas as ondas secundárias a nova frente de onda.

Neste capítulo, faremos uma abordagem mais quantitativa ao invés de uma aplicação direta do princípio de Huygens. Utilizaremos algumas aproximações, que são referidas como aproximações de Fresnel e Fraunhofer. Nesta parte da dissertação vamos trabalhar apenas com a aproximação de Fraunhofer para alguns casos de difração por aberturas. E

por fim abordaremos alguns trabalhos recentes envolvendo a teoria de difração de Fraunhofer utilizando feixes contendo MAO.

2.2 Teoria inicial

Antes de iniciar o tratamento de difração consideremos alguns cálculos iniciais que servirão de base para desenvolver a teoria de difração. Estes cálculos serão utilizados para introduzir as notações do capítulo.

2.2.1 Teorema de Green

Para calcularmos a perturbação óptica U em um ponto de observação no espaço, faremos uso do teorema de Green. Este teorema estabelece que se U e G são quaisquer duas funções escalares ao longo de uma curva fechada, S , satisfazendo as condições de continuidade e que suas primeiras e segundas derivadas possuam valores únicos, então a seguinte igualdade é válida [24]:

$$\iiint (G \nabla^2 U - U \nabla^2 G) dv = \iint \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds. \quad (2.1)$$

A integral do lado esquerdo inclui o volume V dentro da superfície e a integral do lado direito estende-se sobre qualquer superfície fechada S e $\frac{\partial}{\partial n}$ significa a derivada parcial na direção normal externa em cada ponto sobre S .

Considere um ponto de observação P e uma superfície S ao redor deste ponto, como indicado na Fig. 2.1. Nosso objetivo é determinar a perturbação óptica no ponto P em termos dos valores na superfície S . Para isso, vamos escolher como uma função G uma onda esférica de amplitude unitária. Assim, o valor de G em um ponto arbitrário P_1 é dado por:

$$G(P_1) = \frac{\exp(ikr_1)}{r_1}, \quad (2.2)$$

onde r_1 é o comprimento do vetor \vec{r}_1 apontando a partir de P para P_1 .

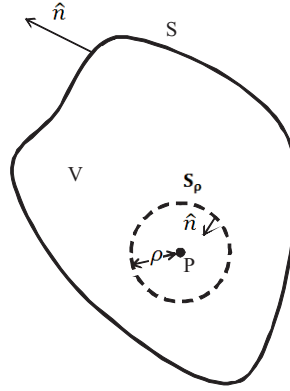


Figura 2.1: Superfície de integração.

Para que a Eq.(2.2) possa realmente ser usada no teorema de Green, a função G deve ser contínua dentro de todo volume fechado V . Para excluir a descontinuidade no ponto P , uma pequena superfície esférica S_ρ , de raio ρ , é feita em torno deste ponto. O volume de integração V está entre S e S_ρ , com a superfície de integração S' sendo composta das superfícies S e S_ρ ,

$$S' = S + S_\rho, \quad (2.3)$$

esta situação é ilustrada na Fig. 2.1. A componente normal externa aponta para fora da superfície no sentido de S e para dentro (em direção a P) sobre S_ρ .

Dentro do volume V , as perturbações G e U devem satisfazer a equação de Helmholtz [Eq.(1.58)], ou seja,

$$\nabla^2 \chi + k^2 \chi = 0.$$

Substituindo G e U na equação de Helmholtz e aplicando os resultados no lado esquerdo do teorema de Green, temos:

$$\iiint_V (G \nabla^2 U - U \nabla^2 G) dv = - \iiint_V (GUk^2 - UGk^2) dv \equiv 0. \quad (2.4)$$

Assim o teorema fica,

$$\iint_{S'} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds = 0 \quad (2.5)$$

ou se levarmos em conta a Eq.(2.3),

$$-\iint_{S_\rho} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds = \iiint_S \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds. \quad (2.6)$$

Substituindo agora a Eq.(2.2) na Eq.(2.6) e resolvendo somente o termo em relação a x , pois para as direções y e z os cálculos seguem de forma análoga, tem-se,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n} &= \hat{n} \cdot (\vec{\nabla} G) = \hat{n} \cdot \left(\hat{i} \frac{\partial \exp(ik\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\partial x} \right) \\ &= \left[\frac{ik}{r_1^2} \exp(ikr_1) - \frac{1}{r_1^3} \exp(ikr_1) \right] r_1 \cos(\hat{n}, \vec{r}_1), \end{aligned} \quad (2.7)$$

Nos cálculos acima consideramos o termo da derivada normal, $\frac{\partial}{\partial n} = \hat{n} \cdot \vec{\nabla}$ e $\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$, onde \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} são os vetores unitários nas direções x , y e z respectivamente. De forma geral:

$$\frac{\partial G(P_1)}{\partial n} = \frac{\exp(ikr_1)}{r_1} \cos(\hat{n}, \vec{r}_1) \left(ik - \frac{1}{r_1} \right), \quad (2.8)$$

onde a função $\cos(\hat{n}, \vec{r}_1)$ representa o cosseno do ângulo entre a normal externa \hat{n} e o vetor \vec{r}_1 . Para um caso particular de P_1 sobre S_ρ , $\cos(\hat{n}, \vec{r}_1) = -1$, as Eqs.(2.2) e (2.8) tornam-se:

$$G(P_1) = \frac{\exp(ik\rho)}{\rho} \quad (2.9)$$

e

$$\frac{\partial G(P_1)}{\partial n} = \left(\frac{1}{\rho} - ik \right) \frac{\exp(ik\rho)}{\rho}. \quad (2.10)$$

Sobre a esfera no interior da superfície de integração (veja Fig. 2.1) $r = \rho$, e assim podemos escrever:

$$-\iint_{S_\rho} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds = \iint_S \left(\frac{\exp(ik\rho)}{\rho} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial \exp(ik\rho)}{\partial n} \frac{1}{\rho} \right) \rho^2 d\Omega, \quad (2.11)$$

onde $d\Omega$ é o elemento de ângulo sólido sobre a esfera centrada em P , e $\rho^2 d\Omega$ é o elemento de área correspondente. No limite em que ρ torna-se muito pequeno e devido a condição

de continuidade de U (e suas derivadas) em P , podemos escrever,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left[- \iint_{S_\rho} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds \right] = \lim_{\rho \rightarrow 0} 4\pi\rho^2 \left[\frac{\exp(ik\rho)}{\rho} \frac{\partial U(P)}{\partial n} - U(P) \left(\frac{1}{\rho} - ik \right) \frac{\exp(ik\rho)}{\rho} \right]$$

$$\iint_{S_\rho} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds = 4\pi U(P). \quad (2.12)$$

Substituindo a Eq.(2.12) na Eq.(2.6), levando em conta que já fizemos uso do sinal negativo, teremos:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \frac{\partial U}{\partial n} \left[\frac{\exp(ikr_1)}{r_1} \right] - U \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{\exp(ikr_1)}{r_1} \right] \right\} ds. \quad (2.13)$$

A Eq.(2.13) é conhecida como *teorema integral de Kirchhoff* [25], relaciona o valor de qualquer função de onda escalar em qualquer ponto P dentro de uma superfície fechada arbitrária com o valor da função de onda na superfície. Na aplicação do teorema de Kirchhoff para difração, a função de onda U [na Eq.(2.13)] é conhecida como perturbação óptica.

2.3 Formulação de Kirchhoff

Consideremos agora uma abertura de forma arbitrária que produz o padrão de difração em uma tela. Esta abertura é feita sobre uma placa plana que divide uma superfície S em duas partes. Assumimos que uma onda atinge a abertura, e calculamos o campo logo atrás desta. Esta formulação permitirá obter a fórmula de difração de Fresnel-Kirchhoff.

2.3.1 Condições de contorno de Kirchhoff

Expressemos a perturbação em P em termos da perturbação e de suas derivadas normais sobre um plano, S_1 , logo atrás da tela. Esta situação está ilustrada na Fig. 2.2.

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left(\frac{\partial U}{\partial n} G - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds \quad (2.14)$$

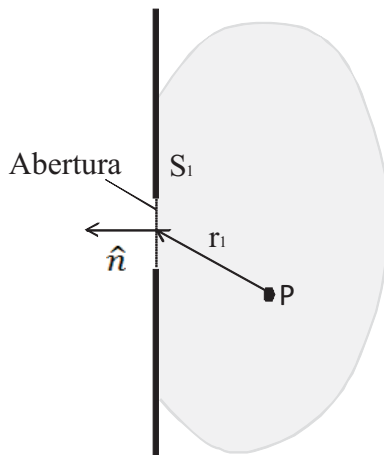


Figura 2.2: Representação de difração por tela plana na formulação de Kirchhoff.

A tela é opaca, exceto na abertura. Portanto, é razoável considerar que a maior contribuição para a integral da Eq.(2.14) surge para pontos localizados dentro da abertura.

Assim podemos estabelecer duas condições [1]:

(1) A função de onda U e sua derivada $\frac{\partial U}{\partial n}$ se anulam em todos os pontos logo atrás da abertura, exceto sobre a abertura;

(2) Os valores de U e $\frac{\partial U}{\partial n}$ na abertura são iguais aos valores da onda incidente na ausência de quaisquer telas ou obstáculos.

Estas condições são conhecidas como *condições de contorno de Kirchhoff*. A primeira hipótese nos permite desprezar toda superfície de integração exceto a abertura. A segunda nos permite determinar a perturbação na abertura, desprezando a tela. Assim a Eq.(2.14) se reduz a:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint \left(\frac{\partial U}{\partial n} G - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds \quad (2.15)$$

a integral agora é somente sobre a abertura na tela. Porém a validade das condições de contorno de Kirchhoff é limitada. Pode-se mostrar que, para a equação de Helmholtz [Eq.(1.58)], da mesma forma que para a equação de Laplace, que, se U e $\frac{\partial U}{\partial n}$ são ambos nulos sobre qualquer superfície finita, então $U = 0$ em todos os pontos do espaço. Assim,

a única consequência matematicamente correta da primeira condição de Kirchhoff é a de que o campo difratado se anula em qualquer ponto. Isto, porém, não é coerente com a segunda condição. Essa inconsistência foi solucionada por Sommerfeld como veremos na seção seguinte.

2.3.2 Fórmula de difração de Fresnel-Kirchhoff

Podemos simplificar a expressão para $U(P)$ observando que a distância r_1 a partir do ponto de observação à abertura é muito maior que o comprimento de onda, e assim, uma vez que $k \gg 1/r_1$ a Eq.(2.8) torna-se,

$$\frac{\partial G(P_1)}{\partial n} \cong ik \cos(\hat{n}, \vec{r}_1) \frac{\exp(ikr_1)}{r_1}. \quad (2.16)$$

Substituindo as Eqs.(2.16) e (2.2) para G na Eq.(2.15), temos:

$$\begin{aligned} U(P) &= \frac{1}{4\pi} \iint \left[\frac{\partial U}{\partial n} \frac{\exp(ikr_1)}{r_1} - U ik \cos(\hat{n}, \vec{r}_1) \frac{\exp(ikr_1)}{r_1} \right] ds \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint \frac{\exp(ikr_1)}{r_1} \left[\frac{\partial U}{\partial n} - U ik \cos(\hat{n}, \vec{r}_1) \right] ds. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Suponha agora que a abertura seja iluminada por uma única onda esférica,

$$U(P_1) = \frac{U_0 \exp(ikr_2)}{r_2} \quad (2.18)$$

onde U_0 é amplitude da onda. A onda surge a partir de uma fonte em um ponto P_2 , a uma distância r_2 de P_1 (veja Fig. 2.3). Substituindo a Eq.(2.18) na Eq.(2.17), temos

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{\exp(ikr_1)}{r_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{U_0 \exp(ikr_2)}{r_2} \right] - \frac{U_0 \exp(ikr_2)}{r_2} ik \cos(\hat{n}, \vec{r}_1) \right\} ds. \quad (2.19)$$

É interessante notar que a derivada normal do lado direito da Eq.(2.19) é calculada da mesma maneira que em (2.16), logo:

$$U(P) = \frac{U_0}{i\lambda} \iint \frac{\exp(ik(r_2 + r_1))}{r_2 r_1} \left[\frac{\cos(\hat{n}, \vec{r}_1) - \cos(\hat{n}, \vec{r}_2)}{2} \right] ds. \quad (2.20)$$

A integração é somente sobre a abertura. A Eq.(2.20) é conhecida como *fórmula de difração de Fresnel-Kirchhoff*, a qual se aplica somente para uma única fonte pontual.

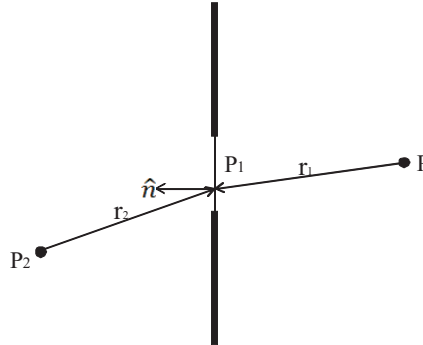


Figura 2.3: Fonte pontual iluminando uma tela plana.

Notemos que a Eq.(2.20) é simétrica com relação à fonte pontual e o ponto de observação. Assim uma fonte pontual em P produzirá em P_2 o mesmo efeito que uma fonte pontual de igual intensidade em P_2 produzirá em P .

Podemos reescrever a Eq.(2.20) como:

$$U(P) = \iint U'(P_1) \frac{\exp(ikr_1)}{r_1} ds \quad (2.21)$$

onde

$$U'(P_1) = \frac{1}{i\lambda} \left[\frac{U_0 \exp(ikr_2)}{r_2} \right] \left[\frac{\cos(\hat{n}, \vec{r}_1) - \cos(\hat{n}, \vec{r}_2)}{2} \right]. \quad (2.22)$$

A amplitude $U'(P_1)$ da fonte secundária localizada em P_1 é proporcional a amplitude $\left[\frac{U_0 \exp(ikr_2)}{r_2} \right]$ da onda incidente em P_1 . Porém a amplitude secundária difere da amplitude da onda incidente por dois fatores. Primeiro, pelo fator $1/\lambda$. Segundo, a amplitude é reduzida pelo fator de obliquidade $\left[\frac{\cos(\hat{n}, \vec{r}_1) - \cos(\hat{n}, \vec{r}_2)}{2} \right]$. Observe também que a existência do fator $-i$ significa que a fase da fonte secundária está deslocada 90° com relação à fase da onda incidente.

Os cálculos acima foram restringidos para o caso de uma abertura sendo iluminada por uma única onda esférica. Tal limitação, como veremos a seguir, pode ser removida pelo uso da teoria de Rayleigh-Sommerfeld.

2.4 Formulação de Rayleigh-Sommerfeld

Existe certa inconsistência na teoria de Kirchhoff. As dificuldades estão nas condições de contorno impostas na distribuição de campo e na sua derivada normal [26], como visto na seção anterior. Essa inconsistência foi solucionada por Sommerfeld, no qual eliminou a necessidade das condições de contorno impostas sobre a perturbação e sua derivada normal [26].

2.4.1 Difração segundo a formulação de Rayleigh-Sommerfeld

Se tomarmos a Eq.(2.14) e supormos agora uma função para teoria de Kirchhoff modificando-a de tal maneira que as condições impostas para obtenção da Eq.(2.14) permaneçam válidas, e além disso, tanto G quanto $\frac{\partial G}{\partial n}$ desapareçam sobre a superfície S_1 , a necessidade de impor simultaneamente condições de contorno tanto sobre U quanto $\frac{\partial U}{\partial n}$ deve ser removida e conseqüentemente a inconsistência da teoria de Kirchhoff anulada [27].

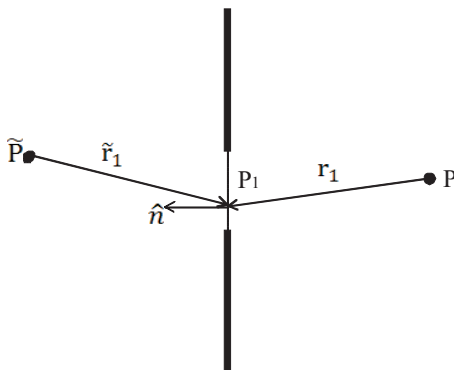


Figura 2.4: Difração por uma tela plana para a formulação de Rayleigh-Sommerfeld.

Sommerfeld mostrou que funções com as propriedades necessárias exigidas acima realmente existem. Vamos supor que G seja gerado não só por uma fonte pontual em P , mas também por uma fonte secundária em uma posição \tilde{P} o qual é um espelho de P localizado do lado oposto da tela, como mostrado na Fig. 2.4.

Consideremos que a fonte em \tilde{P} tem o mesmo comprimento de onda que em P , e vamos supor que as duas fontes estão oscilando com uma diferença de fase de 180° . Neste caso a função de G é dada por:

$$G'(P_1) = \frac{\exp(ikr_1)}{r_1} - \frac{\exp(ik\tilde{r}_1)}{\tilde{r}_1} \quad (2.23)$$

onde \tilde{r}_1 é a distância a partir de \tilde{P} a P_1 . Derivando a Eq.(2.23) da mesma maneira que em (2.7) temos,

$$\frac{\partial G'}{\partial n} = \cos(\hat{n}, \vec{r}_1) \left(ik - \frac{1}{r_1} \right) \frac{\exp(ikr_1)}{r_1} - \cos(\hat{n}, \vec{\tilde{r}}_1) \left(ik - \frac{1}{\tilde{r}_1} \right) \frac{\exp(ik\tilde{r}_1)}{\tilde{r}_1}. \quad (2.24)$$

Sendo que para P_1 localizado atrás da tela na superfície S_1 temos:

$$r_1 = \tilde{r}_1 \quad (2.25)$$

e

$$\cos(\hat{n}, \vec{r}_1) = -\cos(\hat{n}, \vec{\tilde{r}}_1), \quad (2.26)$$

usando as duas relações anteriores, as Eqs.(2.23) e (2.24) sobre S_1 no ponto P_1 se tornam,

$$G'(P_1) = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial G'}{\partial n} = 2 \cos(\hat{n}, \vec{r}_1) \left(ik - \frac{1}{r_1} \right) \frac{\exp(ikr_1)}{r_1}. \quad (2.28)$$

Desta maneira a função G' desaparece sobre toda a superfície S_1 .

Substituindo as Eqs.(2.27) e (2.28) em (2.14), temos:

$$U(P) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{S_1} U(P_1) \frac{\exp(ikr_1)}{r_1} \cos(\hat{n}, \vec{r}_1) ds \quad (2.29)$$

a integral é somente sobre a superfície S_1 . Assumindo que $r_1 \gg \lambda$, podemos aplicar as condições de contorno de Kirchhoff somente para U , obtendo assim o resultado geral:

$$U(P) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{S_1} U(P_1) \frac{\exp(ikr_1)}{r_1} \cos(\hat{n}, \vec{r}_1) ds. \quad (2.30)$$

A integral na equação anterior é somente sobre a abertura. Uma vez que nenhuma condição de contorno é necessária ser aplicada sobre $\frac{\partial U}{\partial n}$, vemos que a inconsistência na teoria de Kirchhoff agora não existe mais.

Assim como fizemos na formulação de Kirchhoff, supomos que a abertura seja iluminada por uma única onda esférica localizada em P_2 . Então:

$$U(P_1) = \frac{U_0 \exp(ikr_2)}{r_2}, \quad (2.31)$$

substituindo a Eq.(2.31) em (2.30) obtemos:

$$U(P) = \frac{U_0}{i\lambda} \iint \frac{\exp(ik(r_2 + r_1))}{r_2 r_1} \cos(\hat{n}, \vec{r}_1) ds. \quad (2.32)$$

A Eq.(2.32) é conhecida como a *fórmula de difração de Rayleigh-Sommerfeld*, a integração é feita sobre toda abertura. Notemos que a diferença entre as Eqs.(2.32) e (2.20) é somente no fator de obliquidade.

2.5 Difração de Fresnel e Fraunhofer

Nas seções anteriores obtivemos os resultados da teoria de difração escalar da sua forma mais geral. Agora estudaremos duas aproximações conhecidas como difração de Fraunhofer e Fresnel. No primeiro caso a distância entre o objeto difratante e a tela de observação é suficientemente grande e o padrão de difração formado passa a depender somente da direção de observação. Já no segundo caso a distância entre o objeto difratante e a tela de observação não é excessivamente grande e o padrão formado preserva a semelhança do objeto [28].

2.5.1 O princípio de Huygens-Fresnel

Segundo Huygens, cada ponto de uma frente de onda comporta-se como uma fonte puntiforme, gerando ondas secundárias, conforme Fig. 2.5.

Vamos considerar uma abertura localizada em uma tela sendo iluminada por uma luz monocromática na direção z , como pode ser visto na Fig. 2.6. Consideremos que a tela onde está a abertura seja plana sobre um sistema de coordenadas cartesianas (x, y) , e que a tela de observação também seja plana, estando paralela ao plano da tela da abertura a uma distância normal z . O sistema de coordenadas da tela de observação é dado por x_0, y_0 , paralelo com o plano x, y e o eixo z passando através da origem dos dois sistemas.

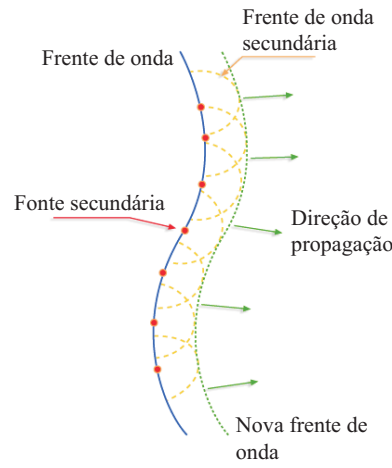


Figura 2.5: Princípio de Huygens-Fresnel [29].

Consideremos a Eq.(2.32) para a amplitude do campo no ponto (x_0, y_0) escrita como,

$$U(x_0, y_0) = \iint h(x_0, y_0; x, y)U(x, y)dxdy \quad (2.33)$$

onde

$$h(x_0, y_0; x, y) = \frac{1}{i\lambda} \frac{\exp(ikr_1)}{r_1} \cos(\hat{n}, \vec{r}_1) \quad (2.34)$$

e a distância r_1 é dada por,

$$r_1 = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z^2}. \quad (2.35)$$

De acordo com as condições de contorno de Kirchhoff, $U(x, y)$ é zero fora da abertura.

Assim podemos calcular $U(x_0, y_0)$ como,

$$U(x_0, y_0) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x_0, y_0; x, y)U(x, y)dxdy. \quad (2.36)$$

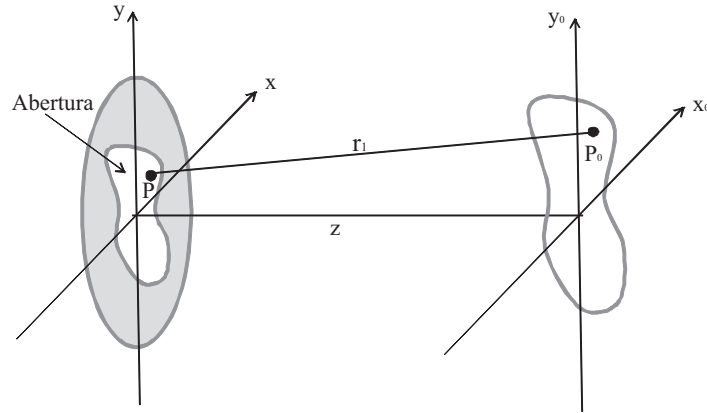


Figura 2.6: Geometria de difração.

Vamos supor que a distância z , entre a abertura e o plano de observação, é muito maior do que o tamanho da abertura. Além disso, assumiremos também que o plano de observação de interesse é somente uma região finita sobre o eixo z , e que a distância z é muito maior do que o tamanho desta região. Com estas considerações o fator de obliquidade poder ser aproximado para,

$$\cos(\hat{n}, \vec{r}_1) \cong 1. \quad (2.37)$$

Sob tais considerações podemos ver que o fator r_1 no denominador da Eq.(2.34) não difere de maneira significativa da distância z , com isso a Eq.(2.34) fica:

$$h(x_0, y_0; x, y) \cong \frac{1}{i\lambda} \frac{\exp(ikr_1)}{z} \quad (2.38)$$

O fator r_1 no exponencial não pode ser substituído por z , pois os erros resultantes seriam multiplicados por um número k muito grande, e por conseqüência geraria um erro de fase muito maior que 2π radianos.

2.5.2 Aproximação de Fresnel

Quando os padrões de difração são obtidos utilizando uma fonte de luz e/ou uma tela de observação a uma distância finita a partir da abertura difrativa ou outros obstáculos quaisquer chamamos de difração de Fresnel [30].

Agora vamos tentar expressar o princípio de Huygens-Fresnel de uma maneira mais simples, introduzindo aproximações para a distância r_1 entre P e P_0 . Vamos fazer as aproximações utilizando a expansão binomial na Eq.(2.35). Seja $|c| < 1$ e consideremos a expressão $\sqrt{1+c}$. A expansão binomial da raiz quadrada é dada por:

$$\sqrt{1+c} = 1 + \frac{1}{2}c - \frac{1}{8}c^2 + \frac{1}{16}c^3 - \frac{5}{128}c^4 + \dots, |c| < 1 \quad (2.39)$$

Para aplicarmos o teorema binomial vamos reescrever a Eq.(2.35) retirando o fator z para fora da raiz quadrada,

$$r_1 = z\sqrt{\left(\frac{x_0 - x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y_0 - y}{z}\right)^2 + 1}. \quad (2.40)$$

Consideremos que a raiz quadrada na Eq.(2.40) possa ser aproximada pelo primeiro e segundo termos da expansão binomial, assim

$$r_1 = z\sqrt{\left(\frac{x_0 - x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y_0 - y}{z}\right)^2 + 1} \approx z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x_0 - x}{z}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y_0 - y}{z}\right)^2 \right] \quad (2.41)$$

A expressão (2.41) é conhecida como *aproximação de Fresnel*. Assim nós podemos escrever a Eq.(2.38) da seguinte maneira:

$$h(x_0, y_0; x, y) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp \left\{ \frac{ik}{2z} [(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2] \right\} \quad (2.42)$$

Quando a distância z é suficientemente grande para que esta aproximação seja precisa, o ponto de observação está na região de difração de Fresnel.

Substituindo a Eq.(2.42) em (2.36) obtemos a expressão para a distribuição de campo $U(x_0, y_0)$:

$$U(x_0, y_0) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U(x, y) \exp \left\{ \frac{ik}{2z} [(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2] \right\} dx dy. \quad (2.43)$$

Resolvendo o termo quadrático no expoente teremos,

$$\begin{aligned} U(x_0, y_0) &= \frac{\exp(ikz) \exp \left[\frac{ik}{2z} (x_0^2 + y_0^2) \right]}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ U(x, y) \exp \left[\frac{ik}{2z} (x^2 + y^2) \right] \right\} \\ &\quad \times \exp \left[-\frac{2\pi i}{\lambda z} (x_0 x + y_0 y) \right] dx dy. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Os fatores que estão fora da integral são independentes de x, y , e a função $U(x_0, y_0)$ pode ser encontrada a partir da transformada de Fourier de $U(x, y) \exp \left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2) \right]$ [Eq.(2.44)], expressa em termos das frequências espaciais $f_x = x_0/\lambda z$, $f_y = y_0/\lambda z$.

Ao realizarmos a transformada de Fourier da Eq.(2.42) encontramos a função transferência que é dada por:

$$H(f_x, f_y) = \exp(ikz) \exp \left[-i\pi\lambda z(f_x^2 + f_y^2) \right]. \quad (2.45)$$

Esta descreve os efeitos de propagação na região de difração de Fresnel. A função transferência, $H(f_x, f_y)$, é uma função complexa simetricamente circular de frequências espaciais f_x e f_y . A primeira exponencial em (2.45) representa um atraso de fase global, já a segunda exponencial representa uma dispersão de fase com uma dependência quadrática na frequência.

Utilizando a Eq.(2.43) podemos escrever a distribuição de intensidade $I(x_0, y_0) = |U(x_0, y_0)|^2$ a uma certa distância z ,

$$I(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{\lambda z} \right)^2 \left| \iint_{-\infty}^{\infty} U(x, y) \exp \left\{ \frac{ik}{2z} [(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2] \right\} dx dy \right|^2. \quad (2.46)$$

2.5.3 Aproximação de Fraunhofer

Quando os padrões de difração são obtidos utilizando uma fonte de luz e uma tela, afastadas a uma distância suficientemente grande da abertura obtém-se o que chamamos de difração de Fraunhofer.

A difração de Fraunhofer é muito mais simples de ser tratada teoricamente do que a de Fresnel. Se fizermos a suposição,

$$z \gg \frac{k(x^2 + y^2)_{\text{máx}}}{2}, \quad (2.47)$$

o fator de fase quadrático vale aproximadamente 1 sobre a abertura, e encontramos a distribuição de campo diretamente a partir da transformada de Fourier da distribuição

da abertura. Assim na região de difração de Fraunhofer:

$$U(x_0, y_0) = \frac{\exp(ikz) \exp\left[\frac{ik}{2z}(x_0^2 + y_0^2)\right]}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U(x, y) \exp\left[-\frac{2\pi i}{\lambda z}(x_0 x + y_0 y)\right] dx dy. \quad (2.48)$$

Com exceção dos termos fora da integral a Eq.(2.48) expressa a transformada de Fourier da distribuição da abertura, podendo ser calculada utilizando o espaço das frequências $f_x = x_0/\lambda z$, $f_y = y_0/\lambda z$.

Notemos que esta aproximação não apresenta função transferência que possa ser associada com a aproximação de Fraunhofer. Porém, a difração de Fraunhofer é apenas um caso limite da difração de Fresnel, assim a função transferência (2.45) é válida em ambas as aproximações.

2.6 Padrões de difração de Fraunhofer

Nesta seção, apresentaremos uma técnica matemática usual para estudar as propriedades de propagação do plano de onda. Esta técnica é baseada na representação do campo eletromagnético como uma transformada de Fourier, e sua formulação é conhecida como óptica de Fourier. Consideraremos agora alguns exemplos de difração de Fraunhofer. Um arranjo experimental normalmente usado para observação do padrão de difração de Fraunhofer é mostrado na Fig. 2.7. A abertura é iluminada por uma fonte pontual de luz monocromática e coerente que é colimada por uma lente. Uma segunda lente é colocada atrás da abertura para focalizar o feixe.

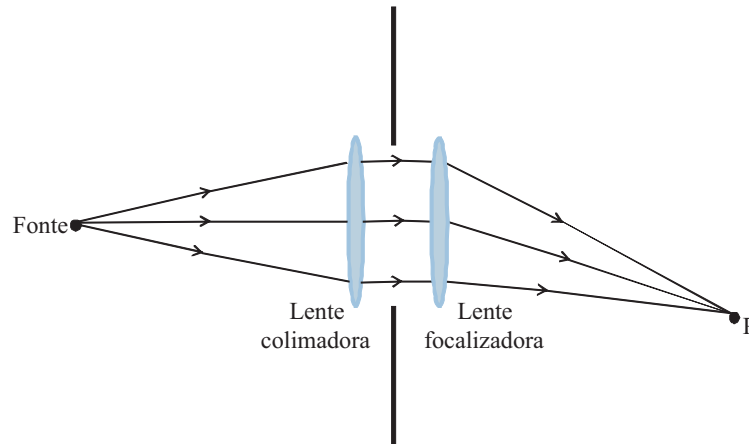


Figura 2.7: Arranjo para observação da difração de Fraunhofer.

2.6.1 Fenda simples

Trataremos de difração por fenda simples como um caso unidimensional. Vamos assumir que a fenda tenha comprimento L e largura $2a$. Como pode ser visto na Fig. 2.8. Consideremos a fenda simples com uma função transmitância dada por,

$$t(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} 1 & -a < x < a \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases} \quad (2.49)$$

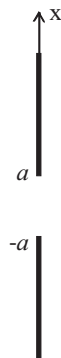


Figura 2.8: Fenda simples.

Se a abertura for iluminada por uma onda plana monocromática de amplitude unitária, a distribuição de campo na abertura é igual a função transmitância. Usando a Eq.(2.48),

porém somente em uma dimensão podemos escrever a distribuição de campo na abertura da seguinte maneira,

$$U(x_0, y_0) = \frac{\exp(ikz) \exp\left[\frac{ik}{2z}(x_0^2 + y_0^2)\right]}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \exp(ik_x x) \exp\left[-\frac{2\pi i}{\lambda z} x_0 x\right] dx, \quad (2.50)$$

k_x é uma das componentes do vetor de onda. Como a integral tem valor diferente de zero somente dentro da abertura podemos escrever:

$$U(x_0, y_0) = \frac{C}{i\lambda z} \int_{-a}^a \exp\left[ik_x x - \frac{2\pi i}{\lambda z} x_0 x\right] dx, \quad (2.51)$$

sendo $C = \exp(ikz) \exp\left[\frac{ik}{2z}(x_0^2 + y_0^2)\right]$. Resolvendo a integral na Eq.(2.51), obtemos:

$$U(x_0, y_0) = \frac{2aC}{i\lambda z} \text{sinc}\left(k_x - \frac{2\pi}{\lambda z} x_0\right), \quad (2.52)$$

onde $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(cx)}{cx}$. Fazendo o módulo ao quadrado da distribuição de campo da Eq.(2.52) obtemos o padrão de intensidade para uma fenda simples dado por:

$$I(x_0, y_0) = |U(x_0, y_0)|^2 = \left(\frac{2a}{\lambda z}\right)^2 \text{sinc}^2\left(k_x - \frac{2\pi}{\lambda z} x_0\right). \quad (2.53)$$

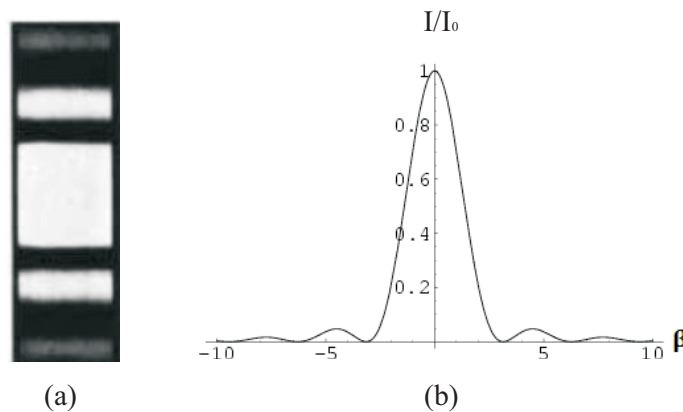


Figura 2.9: (a) Padrão de difração de Fraunhofer e (b) seção de corte ao longo do eixo x produzidos por uma fenda simples [31, 32].

Se tomarmos o limite de $\text{sinc}(k_x - \frac{2\pi}{\lambda z} x_0)$ quando $x_0 \rightarrow 0$ obtemos o máximo central do padrão de intensidade. A função seno possui valor zero em múltiplos inteiros de π , ao

considerarmos isso encontramos os mínimos do padrão de difração. Assim o padrão de difração consiste de uma franja central clara e franjas laterais escuras. Na Fig. 2.9 temos o padrão de difração de Fraunhofer e a seção de corte ao longo do eixo x produzidos por uma fenda simples, onde I/I_0 é a intensidade normalizada sendo $I_0 = \left(\frac{2a}{\lambda z}\right)^2$ e $\beta = \left(k_x - \frac{2\pi}{\lambda z}x_0\right)$.

2.6.2 Fenda dupla

Vamos considerar uma abertura consistindo de duas fendas paralelas e unidimensionais, cada uma de largura a e separadas por uma distância h (Fig. 2.10). Usando novamente a Eq.(2.48), e considerando uma onda plana monocromática de amplitude unitária incidindo sobre a abertura, a distribuição de campo na abertura será igual a função transmitância, podemos escrever a distribuição do campo da seguinte maneira:

$$U(x_0, y_0) = \frac{C}{i\lambda z} \left\{ \int_0^a \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \exp(ik_x x) \exp\left[-\frac{2\pi i}{\lambda z}x_0 x\right] dx + \int_h^{h+a} \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \exp(ik_x x) \exp\left[-\frac{2\pi i}{\lambda z}x_0 x\right] dx \right\}, \quad (2.54)$$

onde $C = \exp(ikz) \exp\left[\frac{ik}{2z}(x_0^2 + y_0^2)\right]$. Resolvendo as integrais em (2.54) obtemos,

$$U(x_0, y_0) = \frac{C}{i\lambda z \left(k_x - \frac{2\pi}{\lambda z}\right)} \left[\exp\left[i\left(k_x - \frac{2\pi}{\lambda z}\right)a\right] - 1 \right] \times \left[1 + \exp\left[i\left(k_x - \frac{2\pi}{\lambda z}\right)h\right] \right],$$

fazendo $2\beta = \left(k - \frac{2\pi}{\lambda z}x_0\right)a$ e $2\gamma = \left(k_x - \frac{2\pi}{\lambda z}x_0\right)h$. Obtemos a seguinte expressão para

distribuição de campo na abertura:

$$U(x_0, y_0) = \frac{2aC \exp(\beta i) \exp(\gamma i)}{i\lambda z} \left[\frac{\sin(\beta) \cos(\gamma)}{\beta} \right]. \quad (2.55)$$

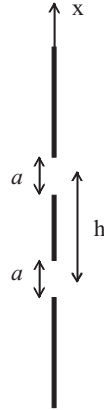


Figura 2.10: Fenda dupla.

A intensidade correspondente a essa distribuição de campo [Eq.(2.55)] é dada por:

$$I(x_0, y_0) = |U(x_0, y_0)|^2 = \left(\frac{2a}{\lambda z}\right)^2 \left(\frac{\sin(\beta)}{\beta}\right)^2 \cos^2(\gamma). \quad (2.56)$$

O fator $\left(\frac{\sin(\beta)}{\beta}\right)^2$ já o encontramos para a função de distribuição de uma fenda simples. O que vemos é que este fator constitui um envelope para as franjas de interferência dadas por $\cos^2(\gamma)$. Temos na Fig. 2.11 uma seção de corte feita em um padrão de interferência para fenda dupla. As franjas claras ocorrem em múltiplos inteiros de π . Onde I/I_0 é a intensidade normalizada sendo $I_0 = \left(\frac{2a}{\lambda z}\right)^2$, $\beta = \frac{1}{2} \left(k_x - \frac{2\pi}{\lambda z} x_0\right) a$ e $\gamma = \frac{1}{2} \left(k_x - \frac{2\pi}{\lambda z} x_0\right) h$.

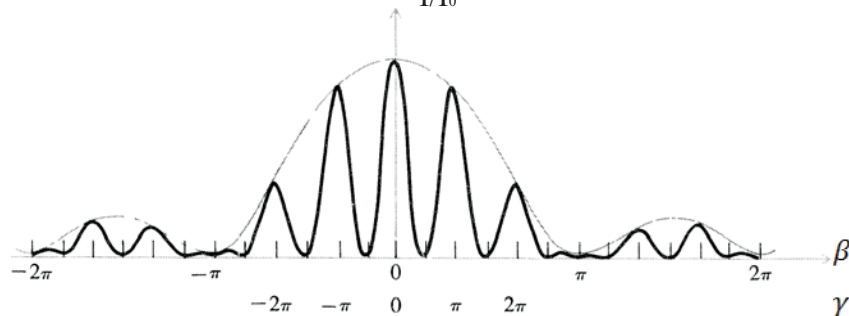


Figura 2.11: Seção de corte em um padrão de interferência de uma fenda dupla [25].

2.6.3 Abertura circular

Consideremos agora uma abertura circular unidimensional, de diâmetro d . Deixemos r ser a coordenada do raio no plano da abertura, assim:

$$t(r) = \text{circ} \left(\frac{r}{d/2} \right). \quad (2.57)$$

Devido a simetria circular do problema podemos reescrever a Eq.(2.48) como uma transformada de Fourier-Bessel. Se r_0 for a coordenada radial no plano de observação podemos escrever,

$$U(r_0) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp \left(\frac{ikr_0^2}{2z} \right) \text{B}[U(r)]_{\rho=r_0/\lambda z}. \quad (2.58)$$

Para uma onda plana incidente de amplitude unitária, temos que o campo transmitido pela abertura é igual a função transmitância, e também que,

$$\text{B} \left\{ \text{circ} \left(\frac{r}{d/2} \right) \right\} = \left(\frac{d}{2} \right) \frac{J_1(\pi d \rho)}{d \rho / 2} \quad (2.59)$$

Assim substituindo a Eq.(2.59) em (2.58) a distribuição de campo no padrão de Fraunhofer será:

$$U(r_0) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp \left(\frac{ikr_0^2}{2z} \right) \left(\frac{d}{2} \right)^2 \frac{J_1(\pi d \rho)}{d \rho / 2}, \quad (2.60)$$

fazendo $\rho = r_0/\lambda z$

$$U(r_0) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp \left(\frac{ikr_0^2}{2z} \right) \left(\frac{d}{2} \right)^2 \frac{J_1(\pi d r_0 / \lambda z)}{d r_0 / 2 \lambda z}. \quad (2.61)$$

Escrevendo o módulo ao quadrado da Eq.(2.61) encontramos a intensidade na abertura circular,

$$I(r_0) = |U(r_0)|^2 = \left(\frac{kd}{8z} \right)^2 \left[2 \frac{J_1(kd r_0 / 2z)}{kd r_0 / 2z} \right]. \quad (2.62)$$

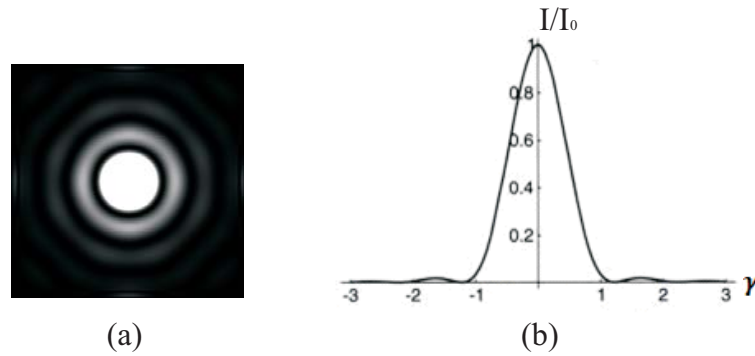


Figura 2.12: (a) Padrão de difração de Fraunhofer (b) seção de corte para uma abertura circular [33, 34].

Esta distribuição de intensidade é conhecida como *padrão de Airy*. O gráfico da distribuição de intensidade é mostrado na Fig. 2.12, onde I/I_0 é a intensidade normalizada sendo $I_0 = \left(\frac{kd}{8z}\right)^2$ e $\gamma = kdr_0/2z$. O padrão de difração é simetricamente circular e consiste de um disco central claro rodeado por anéis circulares que diminuem de intensidade rapidamente. A área central clara é conhecida como disco de Airy. E estende-se até o primeiro anel escuro, cuja área é dada pelo primeiro zero da função de Bessel, $\rho = 3,832$ [25]. O raio angular do primeiro anel escuro é dado por,

$$\sin \theta = \frac{3,832}{kr} = \frac{1,22\lambda}{d} \approx \theta \quad (2.63)$$

a Eq.(2.63) é válida para pequenos ângulos θ e d é o diâmetro da abertura.

2.7 Holografia

Holografia envolve o registro e a reconstrução de ondas ópticas [16]. O termo holografia surgiu em 1949 com Dennis Gabor quando ele teve a idéia de registrar em uma placa fotográfica não só a amplitude, mas também a fase de uma onda óptica incidente. Podemos criar um holograma fazendo primeiro o registro da amplitude e da fase das frentes de onda, por meio da interferência entre a luz vinda de um objeto (U_o) e um feixe de referência

(U_r). Em seguida a reconstrução das frentes de onda originais é feita a partir da incidência do mesmo feixe de referência sobre o holograma já formado.

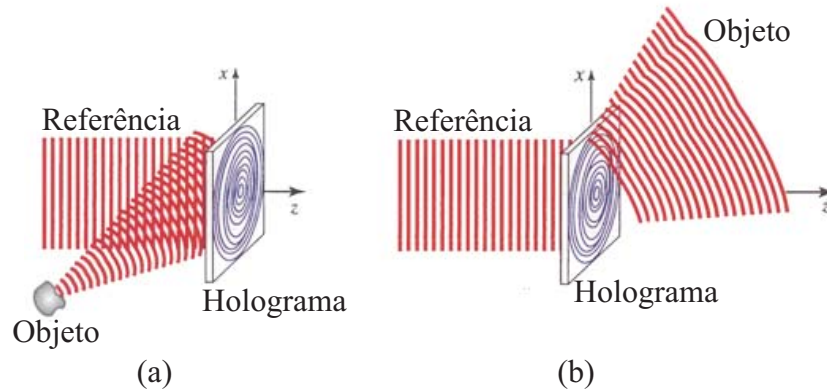


Figura 2.13: (a) Registro do holograma sobre uma placa holográfica e (b) reconstrução da onda original pela iluminação do holograma pela onda de referência [16].

Para ilustrarmos essa idéia vamos pensar em uma onda plana monocromática que faz um ângulo θ com a normal do plano onde será registrado o código holográfico proveniente de uma onda objeto, $U_o(x, y) = \exp(-ikx \sin \theta)$. Usemos como feixe de referência uma onda plana análoga a incidente e registremos o padrão de interferência no plano $z = 0$. A soma das intensidades resultantes das duas ondas é registrada sobre a placa fotográfica e uma transparência de transmitância de amplitude complexa t , proporcional a intensidade, é feita (Fig. 2.13 (a)). A transmitância é, portanto,

$$\begin{aligned}
 t &\propto |U_o + U_r|^2 = |U_r|^2 + |U_o|^2 + U_r^* U_o + U_r U_o^* \\
 &= I_r + I_o + U_r^* U_o + U_r U_o^* \\
 &= I_r + I_o + 2\sqrt{I_r I_o} \cos[\arg\{U_r\} - \arg\{U_o\}], \tag{2.64}
 \end{aligned}$$

onde I_o e I_r são as intensidades das ondas objeto e referência, respectivamente. A transparência, chamada holograma transporta o código de informações da magnitude e fase da onda objeto U_o . Na visualização do holograma as franjas gravadas devido à interferência das duas ondas, vão funcionar como uma rede de difração. A princípio a

obtenção do padrão de intensidade segue as mesmas regras das fendas duplas, porém ela é composta por N fendas.

$$I(x_0, y_0) = I_0 \left(\frac{\sin(\beta)}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin(N\gamma)}{N \sin(\gamma)} \right)^2.$$

Se agora quisermos reconstruir a onda objeto, iluminamos o holograma com a onda de referência utilizada para o seu registro (Fig. 2.13 (b)). O resultado é uma onda com amplitude complexa,

$$\begin{aligned} U &= tU_r \propto U_r I_r + U_r I_o + U_o I_r + U_r^2 U_o^* \\ &= U_r (I_r + I_o) + U_o I_r + U_r^2 U_o^* \end{aligned} \quad (2.65)$$

Os primeiros dois termos do lado direito da Eq.(2.65) representam a onda de referência, modulada pela soma das intensidades das duas ondas. O terceiro termo é a onda original multiplicada pela intensidade I_r da onda referência. Por fim, o quarto termo é uma versão conjugada da onda original modulada por U_r^2 .

Se a onda de referência for uma onda plana uniforme, $U_r = \sqrt{I_r} \exp(-ikz)$ se propagando ao longo do eixo z , então no plano $z = 0$ é constante e independe de x e y . Dividindo a Eq.(2.65) por $U_r = \sqrt{I_r}$ temos,

$$U(x, y) \propto I_r + I_o(x, y) + \sqrt{I_r} U_o(x, y) + \sqrt{I_r} U_o^*(x, y). \quad (2.66)$$

O primeiro termo da Eq.(2.66) corresponde a uma onda plana viajando na direção z , o segundo termo corresponde a uma onda viajando na direção z com uma pequena propagação angular. Enquanto o terceiro termo é proporcional a amplitude da onda original, o quarto e último termo é proporcional a amplitude da onda conjugada.

Podemos separar o sinal desejado, $\sqrt{I_r} U_o(x, y)$, dos termos restantes da onda reconstruída para assegurar que suas frequências espaciais variem separadamente. De modo que suas direções permaneçam separadas consideremos a adição de um portador,

$U_o(x, y) = f(x, y) \exp(-ikx \sin \theta)$. Desta maneira a Eq.(2.66) fica,

$$U(x, y) \propto I_r + |f(x, y)|^2 + \sqrt{I_r} f(x, y) \exp(-ikx \sin \theta) + \sqrt{I_r} f^*(x, y) \exp(+ikx \sin \theta) \quad (2.67)$$

O primeiro termo da Eq.(2.67) corresponde a uma onda plana viajando na direção z , o segundo termo é geralmente conhecido como termo de ambigüidade. O terceiro termo é uma réplica da onda objeto, o qual tem uma deflexão na direção θ . A presença do fator de fase $\exp(+ikx \sin \theta)$, no quarto termo indica uma deflexão na direção $-\theta$.

Um exemplo de equipamento utilizado para fazer holografia é o modulador espacial de luz (*SLM*) que é um dispositivo que impõe uma variação na modulação espacial de fase do feixe. A vantagem do SLM é ter a possibilidade de controlar dinamicamente a amplitude e a fase ou mesmo, os estados de polarização da luz [35]. A diferença entre a holografia clássica e a holografia computacional, realizada com o uso do modulador de luz, está no processo de construção do holograma. No primeiro caso, as frentes de onda são registradas em um holograma utilizando a interferência como processo de gravação. No segundo caso, o registro das frentes de onda são feitos no holograma por meio de técnicas computacionais. Em ambos os processos, a reconstrução óptica das ondas gravadas é obtida pela difração da luz. A Fig. 2.14 apresenta um fluxograma indicando a diferença entre os dois processos.

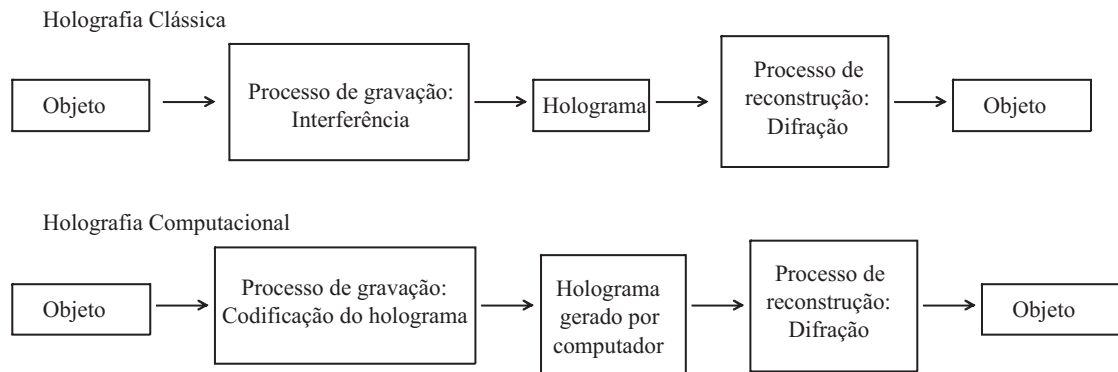


Figura 2.14: Fluxograma para comparação da holografia clássica e computacional.

2.8 Difração com luz possuindo MAO

Examinemos agora quais são os efeitos de difração observados quando utilizamos feixes contendo MAO. Seja a Eq.(2.48) com uma pequena modificação. Onde tínhamos o fator que indicava uma onda plana incidindo sobre a abertura, temos o termo de vórtice óptico $\exp(-il\phi)$,

$$U(x_0, y_0) = \frac{\exp(ikz) \exp \left[\frac{ik}{2z}(x_0^2 + y_0^2) \right]}{i\lambda z} \int \int_{-\infty}^{\infty} t(x) \exp(-il\phi) \exp \left[-\frac{2\pi i}{\lambda z}(x_0 x + y_0 y) \right] dx dy. \quad (2.68)$$

Onde $t(x)$ é a função transmitância para a abertura.

Os efeitos de feixes de luz com MAO propagando ao longo de aberturas têm sido retratados em alguns trabalhos recentes. Sztul e Alfano [12] retrataram a interferência por uma dupla fenda de Young de um feixe Laguerre-Gauss transportando MAO. Os feixes Laguerre-Gauss exibem interferência em razão da diferença de caminho em adição à contribuição de fase devido à estrutura da frente de onda, ocasionando assim uma mudança no padrão usual de fenda dupla, como veremos na Fig. 2.16. A variação de fase em toda a frente de onda ocorre ao longo das duas fendas (Fig. 2.15).

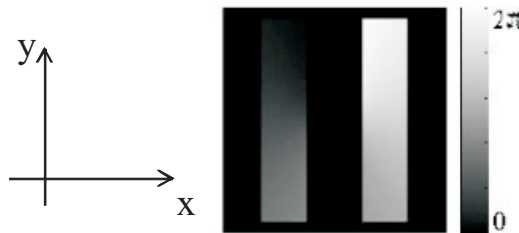


Figura 2.15: Frente de onda de um feixe Laguerre-Gauss ao longo da dupla fenda, com a singularidade de fase entre as fendas [12].

A diferença de fase entre as fendas na direção y é dada por,

$$\Delta\phi(y) = \phi_2(y) - \phi_1(y),$$

onde a fase ao longo da fenda esquerda é $\phi_1(y)$ e a fase ao longo da fenda esquerda é $\phi_2(y)$. Logo o termo $\Delta\phi(y)$ é adicionado a distribuição de intensidade de interferência de uma fenda dupla usual,

$$\begin{aligned} I(x, y) &\propto \cos^2 \left(\frac{\delta}{2} + \frac{\Delta\phi(y)}{2} \right) \\ &\propto \cos^2 \left(\frac{\pi ax}{\lambda d} + \frac{\Delta\phi(y)}{2} \right) \end{aligned}$$

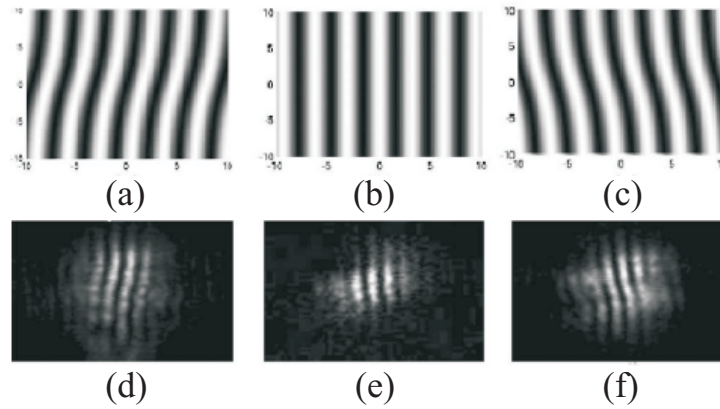


Figura 2.16: (a) e (c) Padrões de interferência da frente de onda de um feixe Laguerre-Gauss incidindo sobre a dupla fenda. (b) Padrão de interferência de uma onda incidindo sobre a dupla fenda. (d)-(f) Padrões de interferência experimentais obtidos para (d) $l = +1$, (e) $l = 0$ e (f) $l = -1$ passando através da dupla fenda [12].

Já no trabalho feito por Ghai *et al.* em 2009 [11] foi estudado o padrão de difração de um feixe óptico com MAO por uma fenda simples. Para uma onda plana uniforme, a distribuição de campo dentro da fenda é a mesma ao longo de todo o comprimento da fenda e assim franjas em linha reta são observadas no padrão de difração. Devido à dependência de fase azimutal e o padrão não ter sido obtido no regime de Fourier, as franjas de um feixe contendo vórtice óptico sofrem um desvio contínuo, enquanto passam pelo centro do padrão e exibem um deslocamento da esquerda para direita ou da direita para esquerda, dependendo do sinal da carga topológica do feixe (veja Fig. 2.17). Desta forma o deslocamento das franjas no padrão de difração podem ser usados para obter o

valor e o sinal da carga topológica.

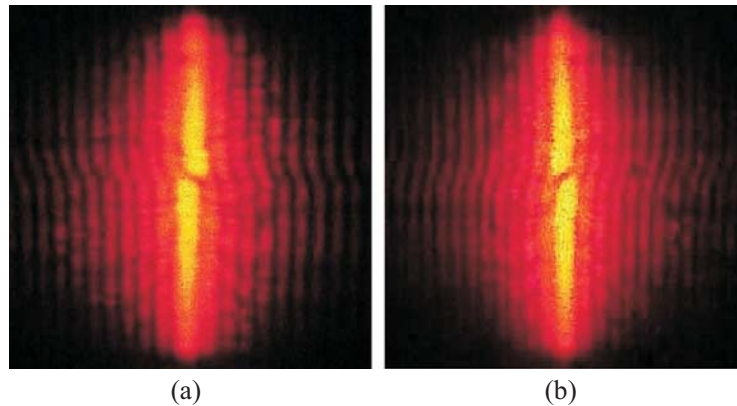


Figura 2.17: (a) Padrão de difração de uma fenda simples de um feixe singular com carga $+1$ e (b) padrão de difração de uma fenda simples de um feixe singular com carga -1 [11].

Kumar *et al.* [13] retrataram em um estudo as características de difração de um feixe contendo vórtice óptico ao passar através de uma íris, que representa uma abertura quase circular, isto é, possui a forma de um hendecágono regular. Eles estudaram também o padrão obtido a partir de um feixe Gaussiano passando pela íris para compará-lo com o padrão do feixe contendo MAO. Para isso utilizaram a Eq.(2.48) para gerar a distribuição de campo de uma onda plana e a Eq.(2.68) para um feixe contendo MAO. Após realizarem a difração com feixe Gaussiano perceberam que em torno da borda da abertura formavam círculos concêntricos claros e escuros e que apareciam vórtices no centro. Todavia realizando interferência com um feixe de referência confirmaram que estes não eram vórtices, pois não formou nenhuma bifurcação ou espirais. No entanto, quando foi feito o mesmo estudo só que agora incidindo um feixe contendo MAO perceberam que o centro do padrão permaneceu sempre escuro e quando realizada a interferência com um feixe de referência no centro do padrão formaram-se espirais, confirmando assim a presença do MAO no feixe e mostrando-se muito útil para aplicações como armadilhas ópticas. Na Fig. 2.18 (a) e (b) temos imagens do padrão de difração experimental e teórico de um feixe Gaussiano incidindo sobre a íris. Já na Fig. 2.19 são mostrados os resultados teóricos e experimentais

de um vórtice óptico de carga topológica ($l = 1$) passando através da íris. O que podemos notar a partir da franjas de interferência é que o vórtice está presente somente no centro do feixe e mesmo após a difração através de um pequeno tamanho da abertura o vórtice não sofre nenhuma perturbação.

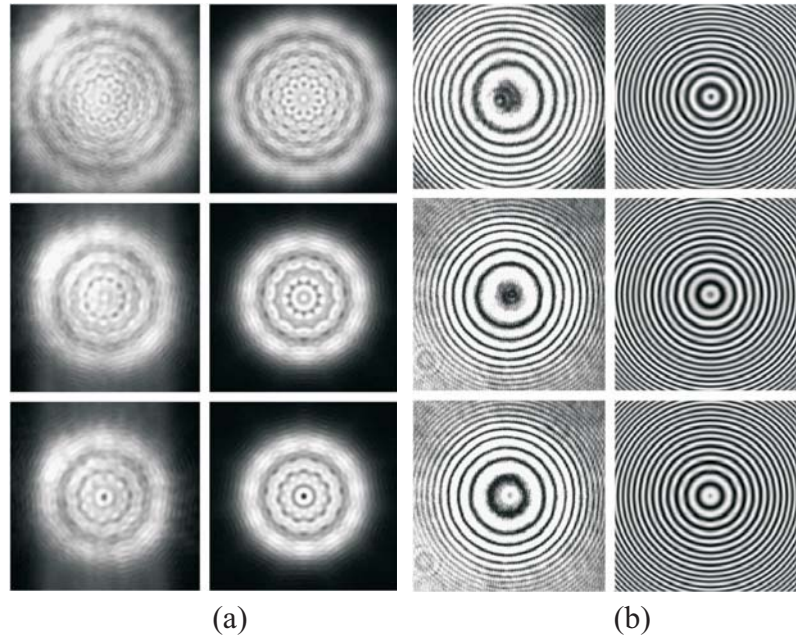


Figura 2.18: (a) Imagem experimental (coluna da direita) e teórica (coluna da esquerda) de um feixe gaussiano passando através de uma íris. (b) Imagem experimental (coluna da direita) e teórica (coluna da esquerda) do padrão de interferência de um feixe gaussiano passando através de uma íris com um feixe de referência [13].

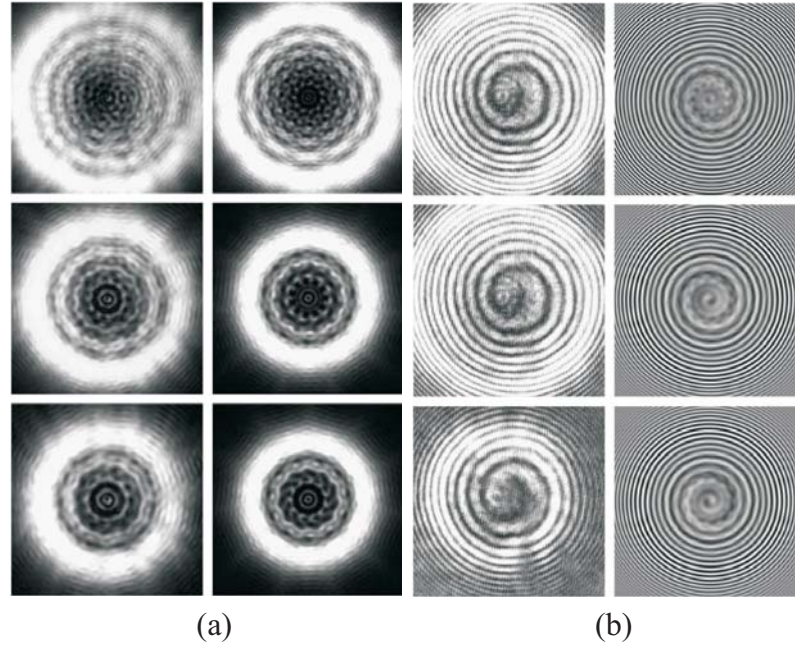


Figura 2.19: (a) Imagem experimental (coluna da direita) e teórica (coluna da esquerda) de um feixe contendo MAO com carga topológica, $l = 1$, passando através de uma íris. (b) Imagem experimental (coluna da direita) e teórica (coluna da esquerda) do padrão de interferência de um feixe contendo MAO com carga topológica, $l = 1$, passando através de uma íris com um feixe de referência [13].

Outro trabalho bastante interessante foi realizado por Hickmann *et al.* [10] que mostraram como a difração de um feixe com frente de onda helicoidal por abertura triangular produz no plano de campo distante uma rede triangular correlacionada com a carga topológica l , para tal fizeram uso da Eq.(2.68). Eles utilizaram um argumento qualitativo para analisar o efeito da fase azimutal sobre as bordas da abertura, analisando cada borda separadamente. A partir do vórtice óptico $e^{-il\phi}$, obtiveram uma aproximação válida ao longo de qualquer uma das bordas,

$$\phi(x) = \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{a^2/12 + x^2}} \right) \quad (2.69)$$

onde x é uma coordenada com origem no centro da fenda e varia de $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ e a é o tamanho de cada lado do triângulo. Fizeram uso somente do primeiro termo da expansão de Taylor, e aproximaram as bordas do triângulo para fendas infinitamente finas que

pudessem ser tratadas como uma delta de Dirac, ignorando a variação de amplitude do campo. Ao fazer isto eles encontraram uma expressão bastante simples para o campo ao longo da fenda, sendo possível a resolução da integral para a difração de Fraunhofer ao longo de uma fenda com feixe contendo MAO,

$$\begin{aligned} E_{slit}(k_x, k_y) &\sim \int \delta(y) \exp\left(\frac{i2\sqrt{3}mx}{a}\right) \exp\left(-i\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp\right) dx dy \\ &= \delta\left(k_x - \frac{2\sqrt{3}m}{a}\right) \end{aligned}$$

Na Fig. 2.20 podemos ver o padrão de difração formado quando o feixe com MAO passa através da abertura triangular, notemos que o valor de l é diretamente relacionado com os pontos externos da rede formando o triângulo. A carga total é dada por $l = N - 1$, onde N é o número de pontos de qualquer lado do triângulo. Desta forma eles demonstraram um método simples para obter a magnitude e o sinal da carga topológica.

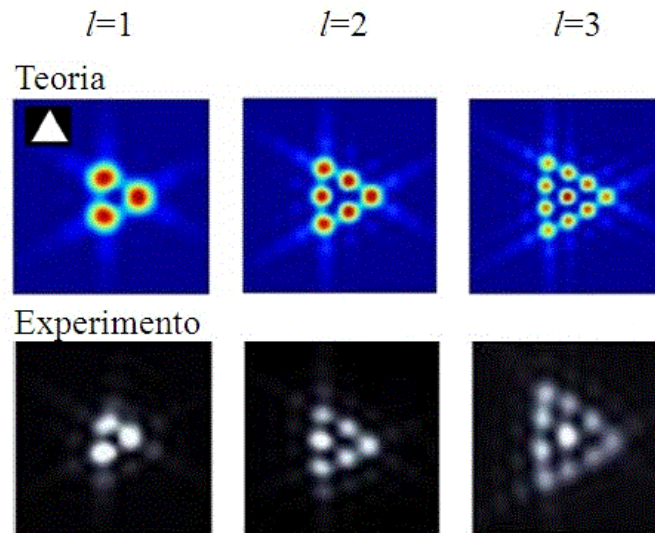


Figura 2.20: Resultados para a difração de um feixe de luz possuindo MAO passando através de uma abertura triangular. Resultados teóricos (parte superior) e experimentais (parte inferior) para l variando de 1 até 3. No interior do resultado teórico de $l = 1$ tem-se a orientação da abertura triangular [10].

2.9 Conclusão

Utilizando o teorema de Green obtivemos a teoria de difração na formulação de Kirchhoff. Vimos também que a validade das condições de contorno de Kirchhoff é limitada e que a inconsistência da teoria Kirchhoff foi solucionada pelo trabalho de Sommerfeld, eliminando a necessidade das condições de contorno impostas sobre a perturbação e sua derivada normal. Com estas teorias em mãos passamos a estudar os casos de duas aproximações conhecidas, aproximação de Fraunhofer e Fresnel. Onde no primeiro caso a distância entre o objeto difratante e a tela de observação é suficientemente grande e no segundo caso essa distância é bastante reduzida; casos estes conhecidos como difração de campo distante e campo próximo, respectivamente. Em seguida vimos alguns exemplos de difração de Fraunhofer. Discutimos também dois métodos holográficos, a holografia convencional e a sintética. Onde a última é feita com o uso de um computador para a geração do holograma. Finalizamos vendo alguns trabalhos recentes sobre difração de feixes contendo MAO, mostrando que a fase exerce um papel importante sobre os padrões tanto de interferência quanto de difração.

3 Difração através de uma Fenda Simples de Feixes Laguerre-Gauss

3.1 Introdução

No capítulo anterior discutimos algumas formulações matemáticas para casos de campos complexos no estudo da difração. Neste capítulo, estudaremos as propriedades de feixes Laguerre-Gauss ao passarem por uma abertura tipo fenda simples, com intuito de explicarmos a formação do padrão de difração de Fourier. Faremos uma abordagem teórica e experimental do problema. Na parte teórica simulamos a reconstrução de um holograma, que codifica a fase e a amplitude, para o feixe Laguerre-Gauss incidindo na fenda simples. Já na parte experimental, o feixe Gaussiano incidente sobre o modulador espacial adquiria a fase do feixe Laguerre-Gauss através do holograma criado em um computador e enviado ao modulador espacial de luz.

3.2 Difração de feixes contendo momento angular orbital por uma fenda simples: descrição teórica

Inicialmente daremos enfoque aos resultados teóricos obtidos via simulação numérica.

Seja a Eq.(1.62) para o feixe Laguerre-Gauss,

$$U_{l,p}(r, \phi, z) = A_{l,p} \left[\frac{W_0}{W(z)} \right] \left(\frac{r}{W(z)} \right)^l \mathcal{L}_p^l \left(\frac{2r^2}{W^2(z)} \right) \exp \left(-\frac{r^2}{W^2(z)} \right) \\ \times \exp \left[-ikz - ik \frac{r^2}{2R(z)} - il\phi + i(l + 2p + 1)\zeta(z) \right]$$

e a função transmitância de uma fenda simples,

$$t(x) = \text{rect} \left(\frac{x}{a} \right) = \begin{cases} 1, & -a < x < a \\ 0, & \text{outros casos.} \end{cases} \quad (3.1)$$

O teorema da convolução afirma que se a transformada de Fourier de duas funções, $\mathcal{F}\{b(x, y)\} = B(f_x, f_y)$ e $\mathcal{F}\{d(x, y)\} = D(f_x, f_y)$ são conhecidas, então:

$$\mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b(\xi, \eta) d(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \right\} = B(f_x, f_y) D(f_x, f_y).$$

Portanto a convolução das Eqs.(1.62) e (3.1) no domínio espacial é equivalente a multiplicação de suas transformadas individuais. A Fig. 3.1 ilustra a situação onde o perfil de um feixe Laguerre-Gauss incide sobre uma fenda simples. Para obtenção dos padrões foi considerado que o comprimento da fenda é muito maior que o diâmetro do feixe. Desta forma d é a distância do centro geométrico da fenda ao centro geométrico do feixe. Desta maneira utilizamos a seguinte relação $d = \epsilon R$ para obtermos a posição da fenda em relação ao raio, R , do feixe.

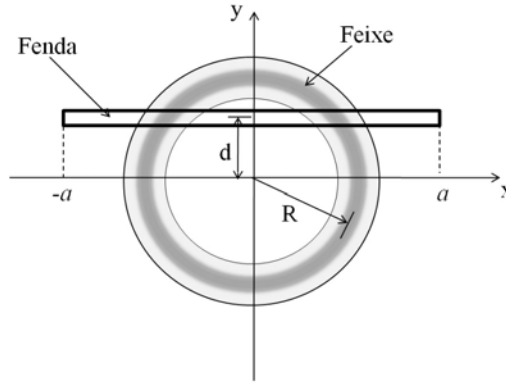


Figura 3.1: A fenda está posicionada a uma distância d do centro do feixe, R é o raio do feixe e $2a$ o comprimento da fenda.

A incidência do feixe Laguerre-Gauss na fenda simples nos fornece os padrões de difração no plano de Fourier mostrados na Fig. 3.2.

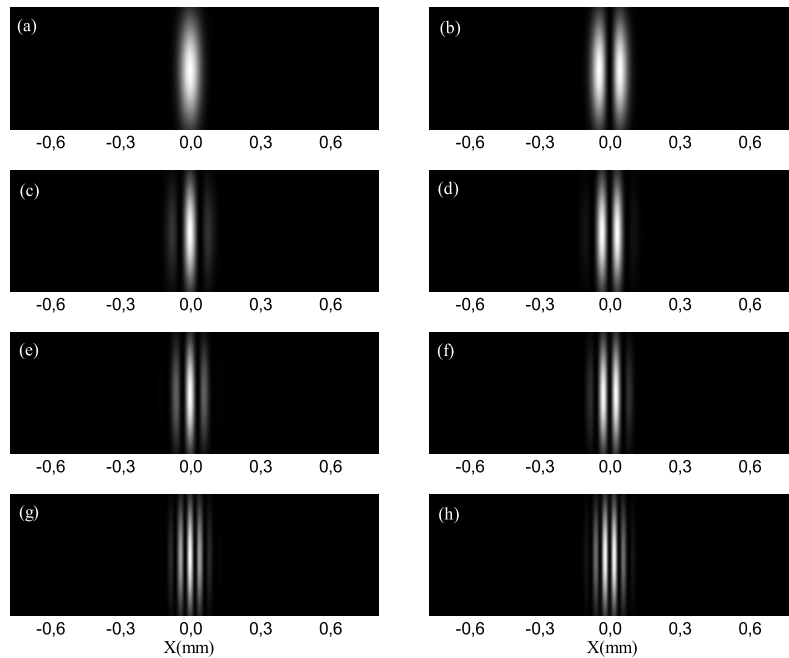


Figura 3.2: Padrão de intensidade de fenda simples para $d = 0$. Com a carga topológica (a) $l = 0$, (b) $l = 1$, (c) $l = 2$, (d) $l = 3$, (e) $l = 4$, (f) $l = 5$ (g) $l = 10$ e (h) $l = 11$ em todos os casos o índice radial p é igual a zero.

O perfil do feixe sofre uma variação direta com o valor da carga topológica, por isso se l aumenta o raio R também aumenta. Nas imagens da Fig. 3.2 a distância d não sofreu nenhuma variação, ou seja, a fenda se encontrava disposta no centro do feixe ($d = 0$). Para melhor visualização do comportamento das franjas formadas foi passado uma seção de corte ao longo dos padrões das imagens na Fig. 3.2. O resultado pode ser visto na Fig. 3.3.

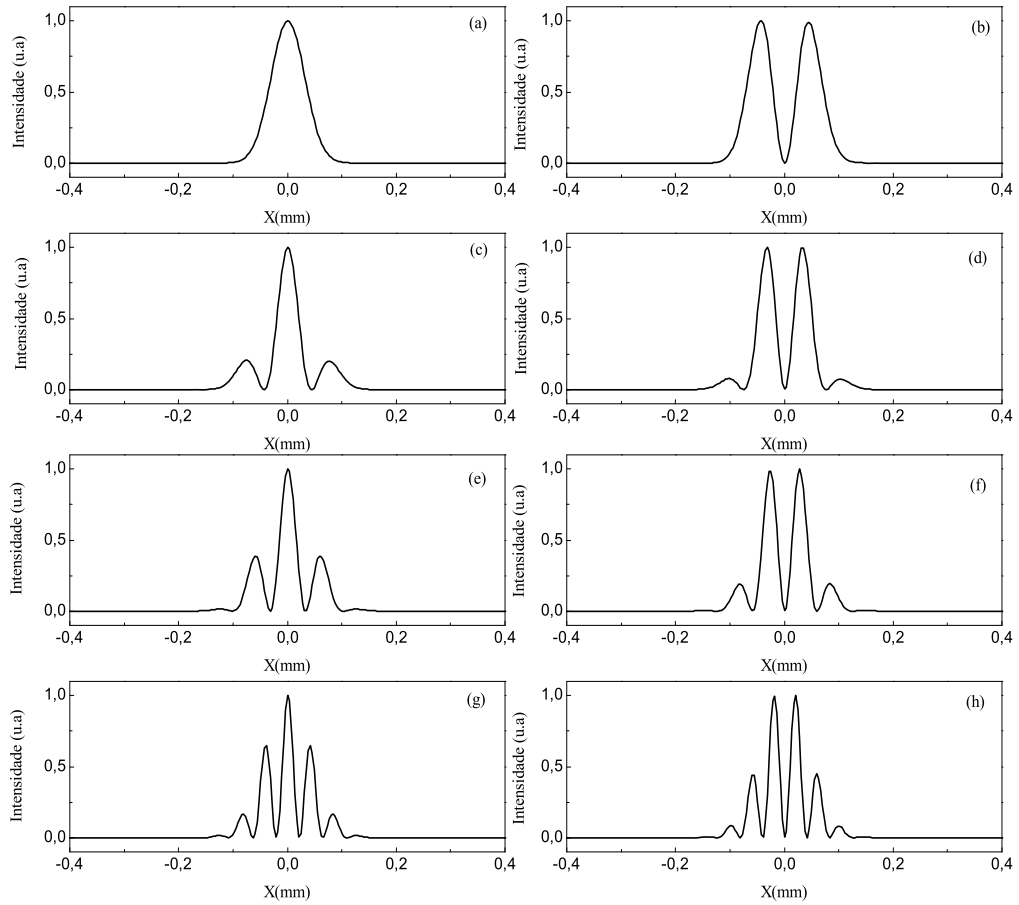


Figura 3.3: Gráficos da intensidade em função da posição para a seção de corte feita ao longo dos padrões vistos na Fig. 3.2, (a) $l = 0$, (b) $l = 1$, (c) $l = 2$, (d) $l = 3$, (e) $l = 4$, (f) $l = 5$ (g) $l = 10$ e (h) $l = 11$ em todos os casos o índice radial p é igual a zero.

As seções de corte da Fig. 3.3 mostram um padrão de máximos e mínimos típico de interferência, ou seja, a difração de um feixe Laguerre-Gauss por uma fenda simples

tem como consequência um padrão análogo ao padrão de interferência da dupla fenda de Young. Isso ocorre, pois como mencionamos anteriormente, o feixe possui um perfil anelar e estando a fenda localizada no centro do feixe somente suas extremidades são iluminadas, fazendo com que ela se comporte como uma dupla fenda. Na Fig. 3.4 temos esta situação ilustrada para a simulação numérica da distribuição de intensidade dentro da fenda para $l = 0, 2$ e 5 . Observe que para $l = 0$, temos a situação de um feixe Gaussiano incidindo sobre a fenda, corroborando com o resultado da Fig. 3.3 (a). A medida que l aumenta a distância entre os dois perfis de intensidade também aumenta, ocasionando um maior número de franjas de interferência (Fig. 3.3 (b)-(h)).

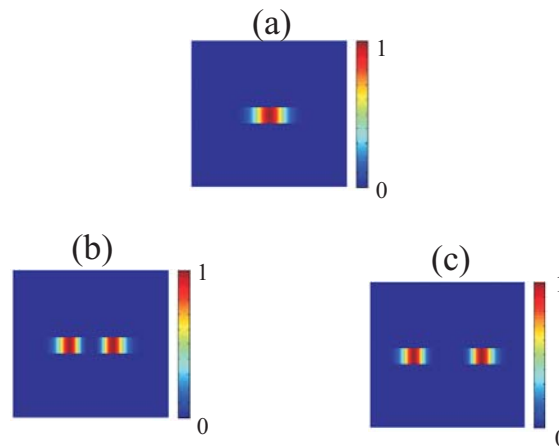


Figura 3.4: (Colorido) Simulação numérica da distribuição de intensidade dentro da fenda para (a) $l = 0$, (b) $l = 2$ e (c) $l = 5$. Na escala, azul representa intensidade nula e vermelho intensidade máxima.

Os padrões vistos na Fig. 3.2 podem ser explicados da mesma maneira que para o caso de uma dupla fenda sob incidência de uma onda plana monocromática, que ao atravessar as fendas é difratada, produzindo uma figura de interferência na tela de observação. As ondas estão em fase ao chegarem às duas fendas, já que fazem parte da mesma onda incidente. Depois de passar pelas fendas, as ondas percorrem diferentes caminhos até atingirem um ponto sobre a tela de observação. A diferença de caminho ΔL entre as distâncias percorridas pelas duas ondas é zero ou um número inteiro de comprimentos

de onda quando chegam a um ponto comum exatamente em fase, sendo a interferência nesse ponto totalmente construtiva, ou seja, visualizamos uma franja clara no padrão de interferência. Por outro lado, quando ΔL é um múltiplo ímpar de metade do comprimento de onda, as ondas chegam a um ponto comum com diferença de fase de meio comprimento de onda e a interferência é totalmente destrutiva, logo vemos uma franja escura no padrão de interferência.

Se considerarmos que a distância, D , entre a tela de observação e as fendas é muito maior que a distância, a , entre as fendas, podemos admitir que os raios que saem das duas fendas são aproximadamente paralelos. Supondo também que o triângulo formado pelas duas fendas e um ponto b sobre o raio que sai de F_1 tem um ângulo interno no vértice em F_2 igual a θ , temos esta situação mostrada na Fig. 3.5. Assim,

$$\Delta L = a \sin \theta. \tag{3.2}$$

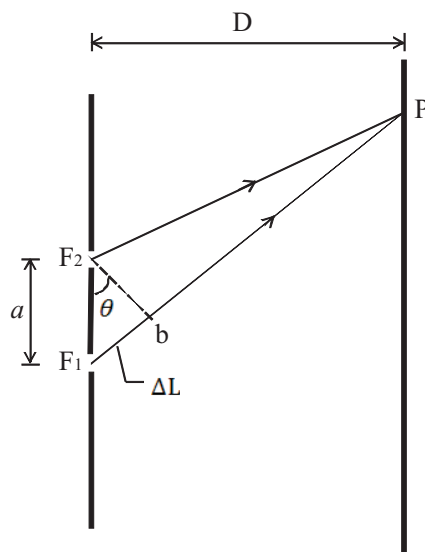


Figura 3.5: Para a distância entre as fendas e a tela de observação muito maior que a separação entre as fendas podemos supor que os raios provenientes da mesma são aproximadamente paralelos.

No caso de franjas claras (máximos de interferência), a Eq.(3.2) pode ser expressa

como,

$$n\lambda = a \sin \theta, \quad \text{onde } n = 1, 2, 3, \dots$$

Já no caso de franjas escuras (mínimos de interferência), a Eq.(3.2) assume a forma,

$$(n + 1/2)\lambda = a \sin \theta, \quad \text{onde } n = 1, 2, 3, \dots$$

O mesmo é válido para a fenda simples sob incidência do feixe Laguerre-Gauss, com uma variação nula da distância d . Porém, notamos que para valores pares da carga topológica l o padrão exibe um máximo (franja clara) no centro. Isto ocorre porque as partes do feixe incidente sobre a fenda estão em fase e a diferença de caminho é nula. No entanto, quando l é ímpar o padrão apresenta um mínimo (franja escura) no centro, devido à defasagem de π entre as partes do feixe incidente na fenda, sendo a diferença de caminho também nula. Originando uma diferença de fase de π entre os dois perfis de intensidade após passarem pela fenda. Nos demais pontos situados fora do centro do padrão, além da diferença de fase devido a frente de onda do feixe tem-se também a variação de fase devido a diferença de caminho percorrido pelos feixes que passam pelas extremidades da fenda. A Fig. 3.6 mostra um painel da simulação numérica do diagrama de fase para $d = 0$ e $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10$ e 11 .

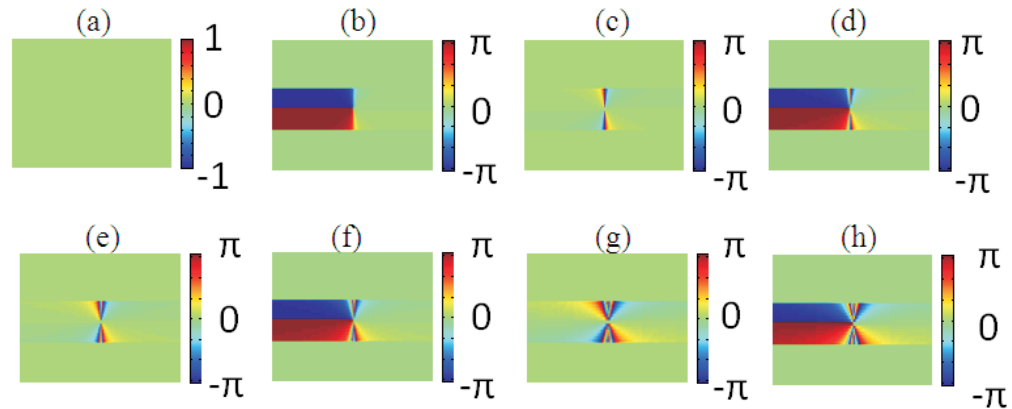


Figura 3.6: (Colorido) Simulação numérica do diagrama de fase para $d = 0$ e (a) $l = 0$, (b) $l = 1$, (c) $l = 2$, (d) $l = 3$, (e) $l = 4$, (f) $l = 5$, (g) $l = 10$ e (h) $l = 11$.

Já na Fig. 3.7 (a), (c), (e), (g), (i), (k) e (m) têm-se as sessões de corte feitas ao longo do diagrama de fase da Fig. 3.6 onde vê-se claramente a variação da fase de 0 ou módulo de π de acordo com o valor de l ao longo da fenda. Os demais gráficos (Fig. 3.7 (b), (d), (f), (h), (j), (l) e (n)) são as curvas da intensidade em função da posição indicando a localização dos perfis de intensidade vistos na Fig. 3.4.

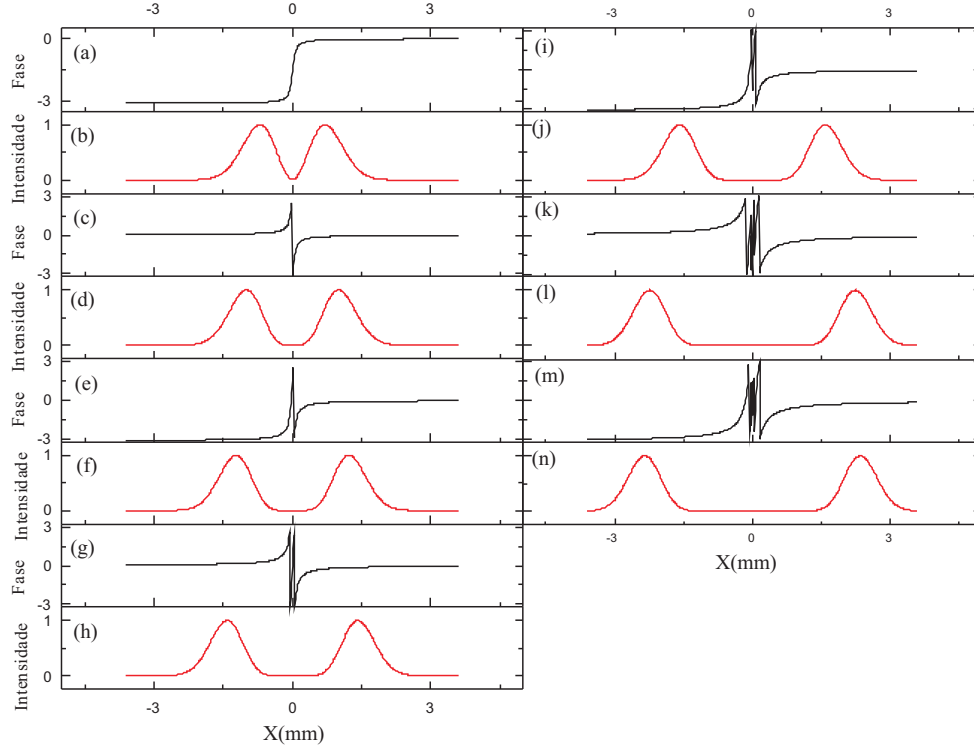


Figura 3.7: Gráficos da variação de fase, em radianos, ao longo da fenda em função da posição para $d = 0$ com as seguintes cargas topológicas (a) $l = 1$, (c) $l = 2$ (e) $l = 3$, (g) $l = 4$, (i) $l = 5$ (k) $l = 10$ e (m) $l = 11$. As demais curvas da intensidade em função da posição são referentes a localização dos perfis de intensidade.

Vejamos agora a situação onde $d = 0, 2R$. Na Fig. 3.8 (a) temos o padrão de difração típico de um feixe Gaussiano. Para valores de $l \neq 0$ tem-se a formação de franjas de interferência como pode ser visto nas imagens da Fig. 3.8 (b)-(h), no entanto surge um deslocamento no padrão que varia de acordo com l .

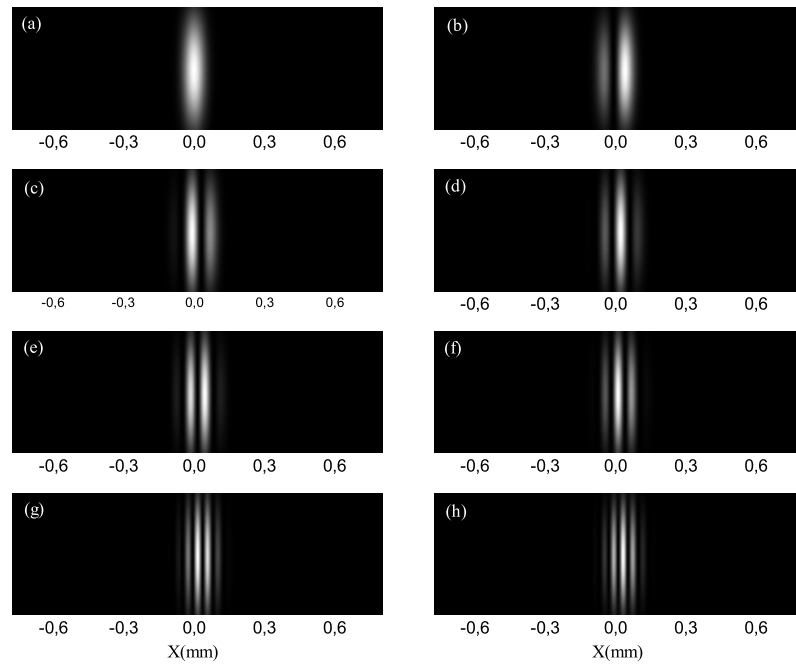


Figura 3.8: Padrão de intensidade para fenda simples com $d = 0, 2R$ para a carga topológica (a) $l = 0$, (b) $l = 1$, (c) $l = 2$, (d) $l = 3$, (e) $l = 4$, (f) $l = 5$, (g) $l = 10$ e (h) $l = 11$.

Os deslocamentos nos padrões podem ser melhor visualizados se passarmos uma seção de corte ao longo do padrão, como podemos ver na Fig. 3.9.

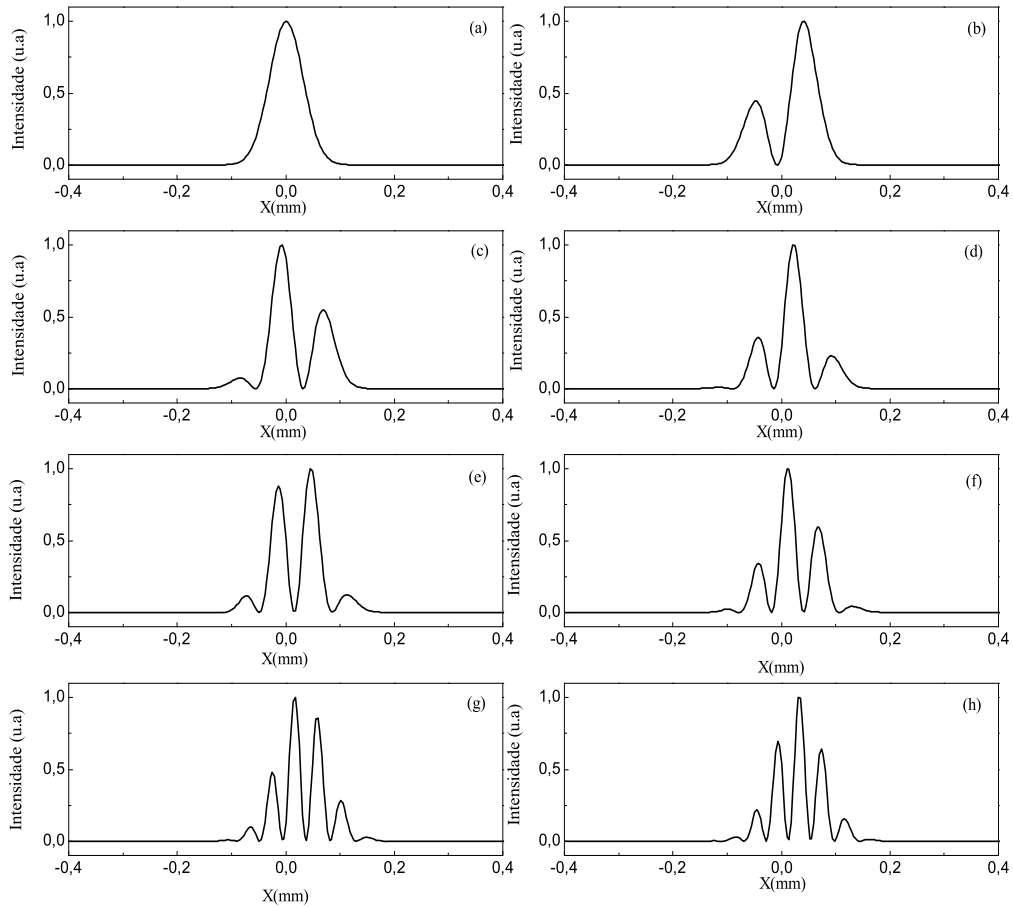


Figura 3.9: Gráficos da intensidade em função da posição para a seção de corte feita ao longo dos padrões vistos na Fig. 3.8, (a) $l = 0$, (b) $l = 1$, (c) $l = 2$, (d) $l = 3$, (e) $l = 4$, (f) $l = 5$, (g) $l = 10$ e (h) $l = 11$ em todos os casos o índice radial p é igual a zero.

Na Fig. 3.9 temos os gráficos da intensidade normalizada pela posição. Analisando cada gráfico separadamente podemos observar que na Fig. 3.9 (a) a curva é típica de um feixe Gaussiano, com o máximo do padrão localizado no centro das coordenadas. Olhando para os demais gráficos (Figs. 3.9 (b)-(h)) notamos um claro deslocamento em relação a posição zero. Estes gráficos são os resultados encontrados numericamente para os padrões de difração.

A Fig. 3.10 mostra o diagrama de fase para $d = 0,2R$. Já a Fig. 3.11 é a seção de corte feita ao longo das Figs. 3.10 para fase em função da posição, observamos em (a),

com $l = 1$, que a fase é praticamente constante na parte iluminada da fenda. Conforme aumenta-se o valor de l os dois perfis de intensidade nas extremidades da fenda ficam cada vez mais separados (como pode ser visto nos gráficos da intensidade em função da posição na Fig. 3.11 (b), (d), (f), (h), (j), (l) e (n) aumentando o número de franjas. A distância d agora é diferente de zero, o que contribui para a variação de fase ao longo da porção do feixe que está dentro da fenda (Fig. 3.11 (c), (e), (g), (i), (k) e (m)) não ser mais constante, este comportamento evolui de aproximadamente linear para não linear a medida que l aumenta. Ocasionalmente a assimetria observada nos padrões de difração.

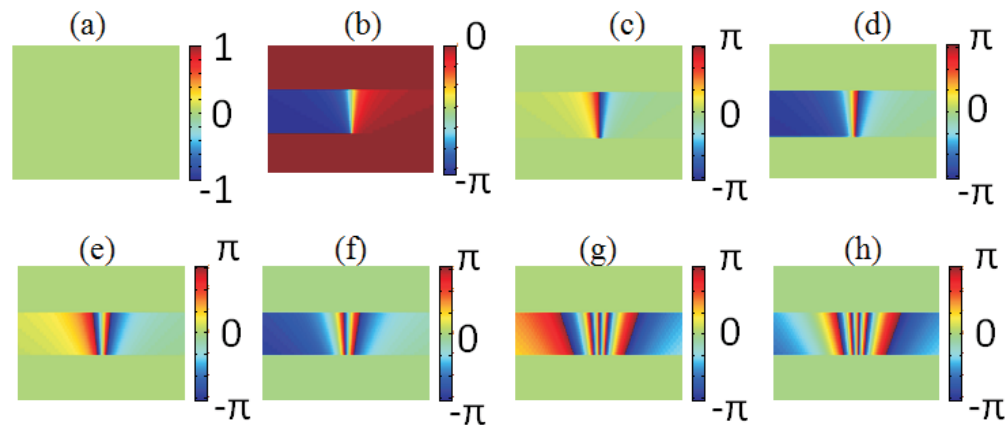


Figura 3.10: (Colorido) Simulação numérica do diagrama de fase para $d = 0,2R$ e (a) $l = 0$, (b) $l = 1$, (c) $l = 2$, (d) $l = 3$, (e) $l = 4$, (f) $l = 5$, (g) $l = 10$ e (h) $l = 11$.

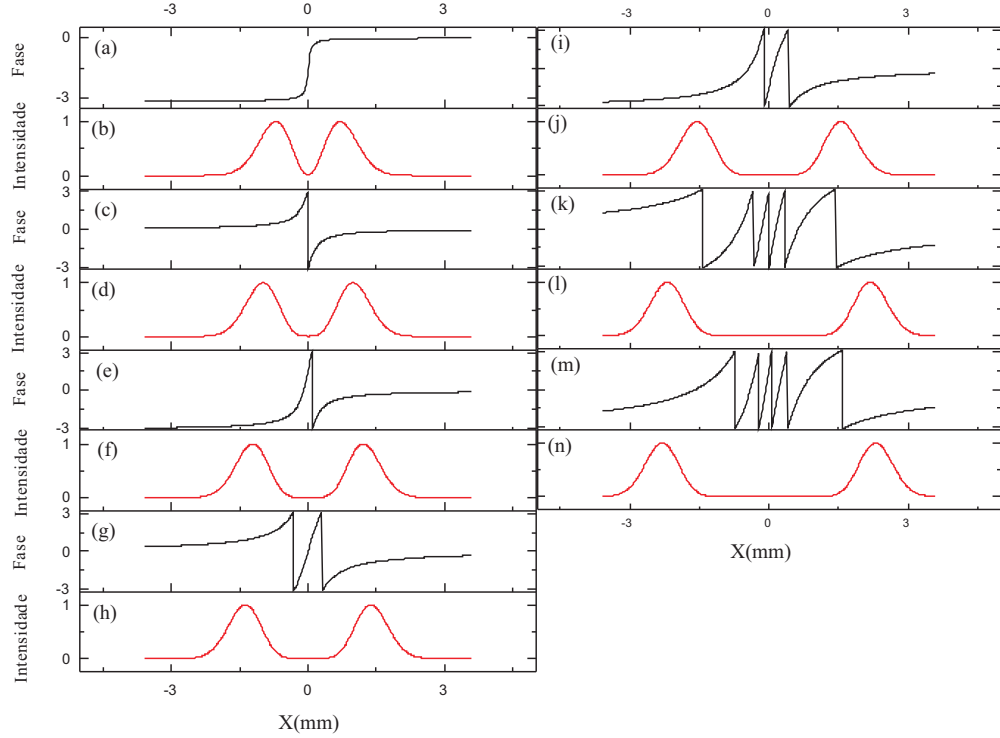


Figura 3.11: Gráficos da variação de fase, em radianos, ao longo da fenda em função da posição para $d = 0, 2R$ com as seguintes cargas topológicas (a) $l = 1$, (c) $l = 2$ (e) $l = 3$, (g) $l = 4$, (i) $l = 5$ (k) $l = 10$ e (m) $l = 11$. As demais curvas da intensidade em função da posição são referentes a localização dos perfis de intensidade.

Ao observarmos a Fig. 3.9 nota-se que, além do deslocamento do padrão, também há uma assimetria. Essa assimetria pode ser explicada se analisarmos a fase do feixe dentro da fenda. Nesta condição cabe analisar uma situação simples. No capítulo 2 abordamos a distribuição de campo ao longo de uma abertura, agora definiremos essa abertura como sendo uma fenda simples sob incidência de um feixe com uma frente de onda helicoidal, assim tomemos novamente a Eq.(2.48),

$$U(x_0, y_0) = \frac{\exp(ikz) \exp \left[\frac{ik}{2z}(x_0^2 + y_0^2) \right]}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} U(x, y) \exp \left[-\frac{2\pi i}{\lambda z}(x_0 x + y_0 y) \right] dx dy. \quad (3.3)$$

Supomos que a fenda seja unidimensional infinita estando localizada ao longo do eixo x . Como mencionado anteriormente, a fenda simples sob incidência de um feixe Laguerre-Gauss constitui um caso especial de dupla fenda de Young. Para tratarmos esse fato

consideremos a Fig. 3.12 onde está representado a fenda com dois perfis de intensidade Gaussiano em suas extremidades.

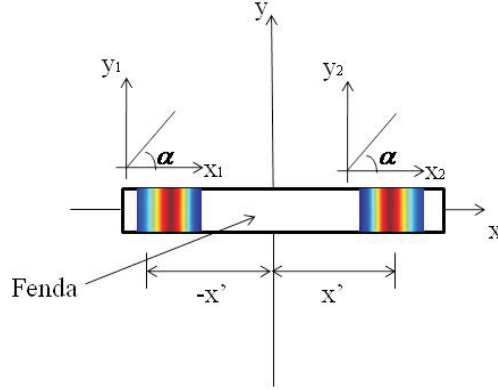


Figura 3.12: Representação do perfil de intensidade de dois feixes Gaussianos localizados nas extremidades da fenda. O par de feixes é análogo a uma dupla fenda de Young.

Esta situação é uma aproximação para o feixe Laguerre-Gauss dentro da fenda. Assumindo que a variação da fase ao longo desses dois feixes é praticamente linear podemos escrever a seguinte expressão,

$$U(x) = \exp(i\phi_1) \exp\left[-\frac{(x+x')^2}{W_0^2}\right] + \exp(i\phi_2) \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{W_0^2}\right]. \quad (3.4)$$

onde $\phi_1 = \alpha x + \alpha x'$, $\phi_2 = \alpha x - \alpha x'$ sendo α a inclinação da reta, e W_0 é dado pela Eq.(1.66). Logo a Eq.(3.3) fica,

$$U(f_x) = \frac{C}{i\lambda z} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iy_1) \exp\left[-\frac{(x+x')^2}{W_0^2}\right] \exp[-i2\pi f_x x] dx + \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iy_2) \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{W_0^2}\right] \exp[-i2\pi f_x x] dx \right\}, \quad (3.5)$$

assumimos $C = \exp(ikz) \exp\left[\frac{ik}{2z}(x_0^2 + y_0^2)\right]$, $f_x = \frac{x_0}{\lambda z}$. Resolvendo a integral (3.5) com o auxílio da identidade,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

encontramos o seguinte resultado,

$$U(f_x) = \frac{C\sqrt{\pi}W_0}{i\lambda z} \left\{ \exp \left[i\alpha x' - \left(\frac{x'}{W_0} \right)^2 \right] \exp \left[- \left(\frac{x'}{W_0} - \frac{i\alpha W_0}{2} + i\pi f_x W_0 \right)^2 \right] + \exp \left[-i\alpha x' - \left(\frac{x'}{W_0} \right)^2 \right] \exp \left[- \left(-\frac{x'}{W_0} - \frac{i\alpha W_0}{2} + i\pi f_x W_0 \right)^2 \right] \right\}. \quad (3.6)$$

Apartir do módulo ao quadrado da Eq.(3.6) obtemos a intensidade para o padrão de difração dos dois feixes Gaussianos localizados nas extremidades da fenda. Vemos que esses padrões sofrem um deslocamento dependente da inclinação da fase ao longo da porção do feixe que se encontra dentro da fenda. As curvas referentes a esses padrões de intensidade são ilustradas na Fig. 3.13. Este deslocamento no padrão pode ser explicado se levarmos em conta o teorema do deslocamento (do inglês *Shift Theorem*) [27], onde se considerarmos $\mathcal{F}\{g(x, y)\} = G(f_x, f_y)$, logo

$$\mathcal{F}\{g(x - a, y - b)\} = G(f_x, f_y) \exp[-i2\pi(f_x a + f_y b)],$$

isto é, a translação de uma função no domínio espacial introduz um deslocamento de fase linear no domínio da frequência.

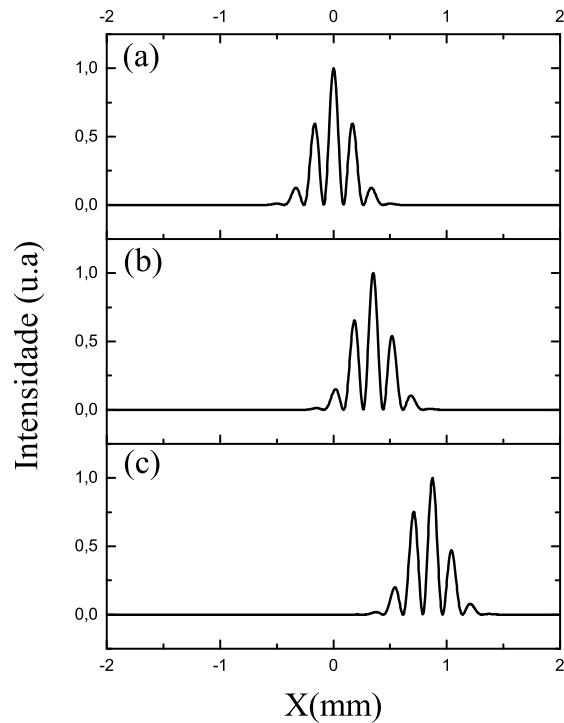


Figura 3.13: Gráficos da intensidade normalizada em função da posição referente ao padrão de intensidade da Eq.(3.6) para alguns valores da inclinação da fase ao longo da fenda (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = 2$ e (c) $\alpha = 5$.

Comparando as Figs. 3.9 e 3.13 vemos que esta aproximação é válida para explicar a assimetria e o deslocamento vistos nos padrões de difração formados.

3.3 Experimento

Nesta seção, vamos demonstrar experimentalmente a difração de um feixe Laguerre-Gauss ao passar através de uma fenda simples. Para obtenção dos padrões de difração utilizamos o setup mostrado na Fig. 3.14.

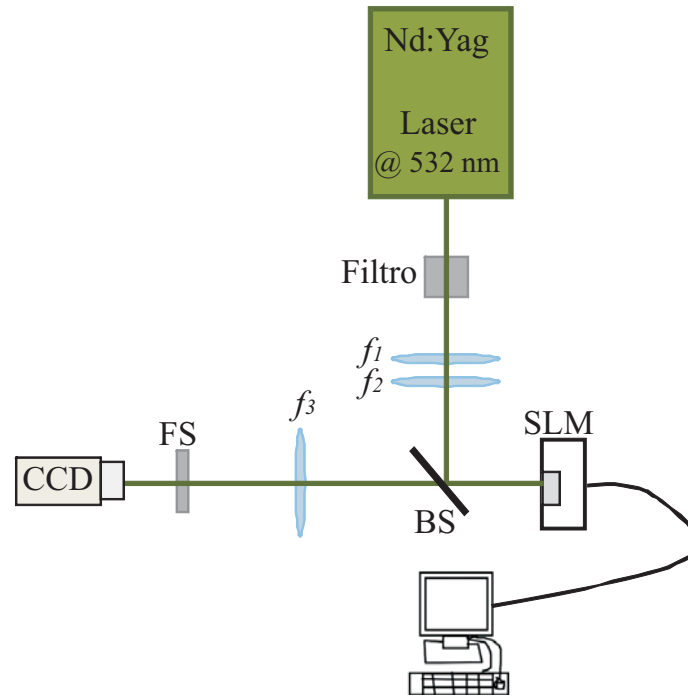


Figura 3.14: Setup experimental

Um laser de Nd:YAG operando no comprimento de onda $\lambda = 532nm$ foi utilizado como fonte de luz. Primeiramente o feixe de laser passa por um filtro neutro que serve para a atenuação da potência para que não haja saturação na câmera CCD (Charge-Coupled Device). Em seguida o feixe passa por um par de lentes de foco $f_1 = 8mm$ e $f_2 = 200mm$ em posição confocal (telescópio). O par de lentes é usado para expandir o feixe para que ele ocupe uma maior área sobre o SLM. Depois o feixe incide sobre um divisor de feixes (BS), onde parte do feixe é refletido pelo SLM (LCOS-SLM X10468-01 Hamamatsu) e a outra parte que não é utilizada é bloqueada. O SLM utilizado em nossas medidas atua como um elemento óptico difrativo que modula a fase do feixe incidente [36]. A Fig. 3.15 descreve a configuração do modulador usado.

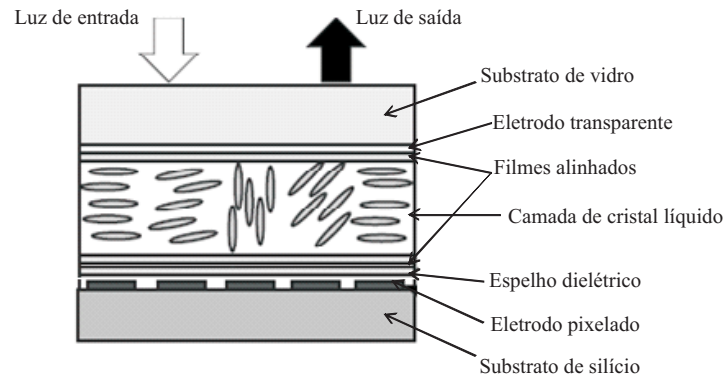


Figura 3.15: Configuração do LCOS-SLM [36].

Um circuito de matriz ativa é formado sobre o substrato de silício para a aplicação de voltagens sobre os pixels dos eletrodos e assim controlar a orientação das moléculas do cristal líquido em cada pixel. A fase é modulada pela camada de cristal líquido cujas moléculas estão alinhadas paralelamente. A quantidade de modulação de fase varia de acordo com a voltagem aplicada, a qual provoca uma inclinação das moléculas do cristal. O espelho dielétrico é utilizado para aumentar a eficiência na utilização da luz. Na tabela 3.1 temos algumas especificações do modulador utilizado.

Número de pixels	792×600
Pixel pitch	$20\mu m$
Frequência espacial máxima	$25Ip/mm$
Área efetiva	$16mm \times 12mm$
Orientação do cristal líquido	Alinhamento paralelo
Níveis de sinais de entrada	256 para 8 bit
Níveis de modulação de fase	2π (radiano) ou mais

Tabela 3.1: Características do LCOS-SLM.

Quando o feixe Gaussiano, viajando na direção z , incide sobre o modulador, adquire a fase do feixe Laguerre-Gauss que foi impressa a ele através de uma imagem holográfica criada em um computador (CGH). O holograma enviado ao SLM é uma imagem composta de uma fenda simples (FS) sob incidência de um feixe Laguerre-Gauss. As dimensões da fenda empregada em ambas as abordagens (teórico e experimental) são: largura de $280\mu m$

e comprimento de 9,34mm.

Para gerar o holograma computacionalmente utilizamos um código capaz de codificar um campo complexo arbitrário, cujas modulações de fase e amplitude são independentes [37]. Este campo complexo pode ser expresso como,

$$s(x, y) = a(x, y) \exp[i\phi(x, y)], \quad (3.7)$$

onde a amplitude $a(x, y)$ e a fase $\phi(x, y)$ estão no intervalo $[0, 1]$ e $[-\pi, \pi]$, respectivamente. E a transmitância de fase do CGH, expressa como uma função explicitamente dependente da amplitude e da fase do campo codificado é dada por,

$$h(x, y) = \exp[i\psi(a(x, y), \phi(x, y))], \quad (3.8)$$

onde $\psi(a, \phi)$ é a modulação de fase do CGH. Para uma melhor compreensão apresentamos na Fig. 3.16 um fluxograma do código holográfico empregado.

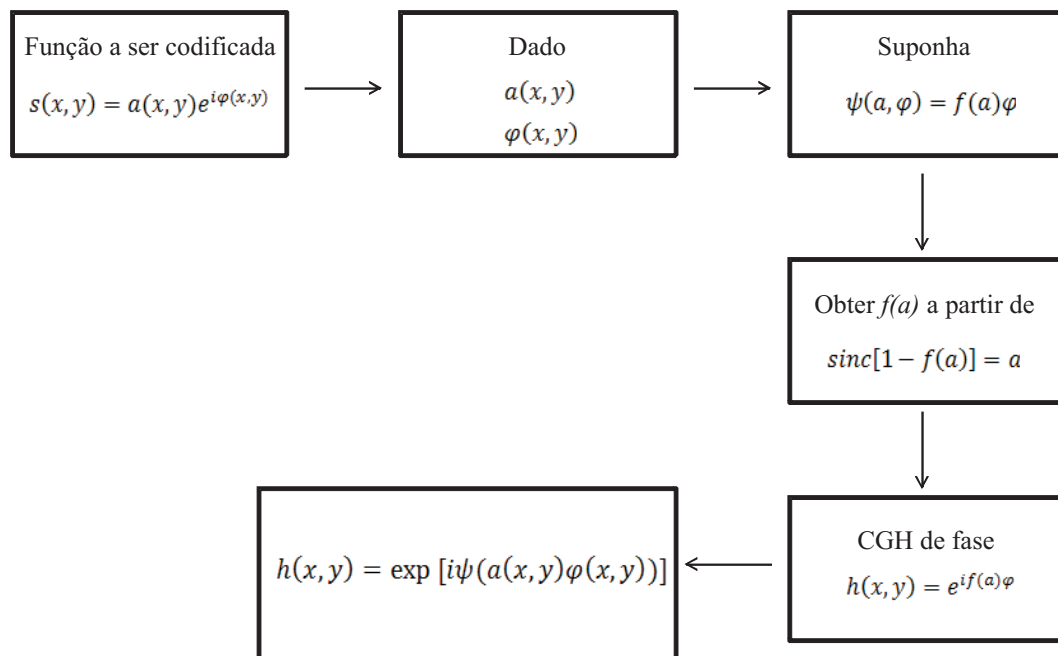


Figura 3.16: Fluxograma do código holográfico.

Após o SLM colocamos uma lente de foco $f_3 = 500\text{mm}$ para realizar a transformada de Fourier e assim obtermos o padrão de difração. A luz difratada a partir do SLM contém

diferentes ordens, como vimos na seção Holografia do capítulo 2. Por isso utilizamos um filtro espacial (FS) para bloquear ruídos e ordens difratadas indesejadas, exceto o sinal desejado. O padrão foi então guiado até ser detectado por uma câmera CCD PixeLink modelo PL-B781F, conectada a um computador.

Após obtermos as imagens enviadas à CCD e analisá-las, concluímos que a teoria descrita na seção anterior é válida. Os resultados referentes a $d = 0$ podem ser vistos na Fig. 3.17, já para o caso onde $d = 0,2R$ temos as imagens da Fig. 3.18. Os resultados experimentais são similares aos das Figs. 3.2 e 3.8, respectivamente, confirmando nossos resultados teóricos.

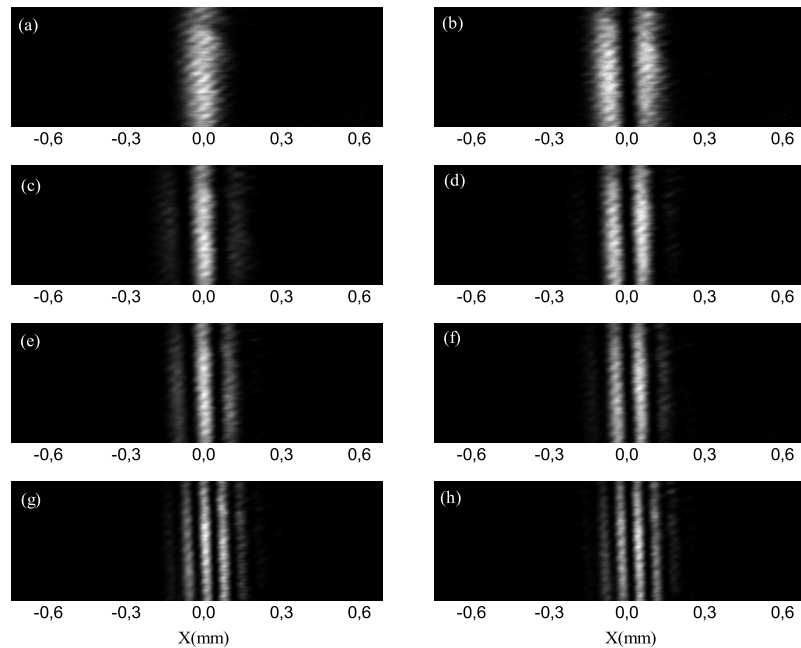


Figura 3.17: Imagens experimentais do padrão de difração de uma fenda simples com $d = 0$. Com a carga topológica (a) $l = 0$, (b) $l = 1$, (c) $l = 2$, (d) $l = 3$, (e) $l = 4$, (f) $l = 5$, (g) $l = 10$ e (h) $l = 11$ em todos os casos o índice radial p é igual a zero.

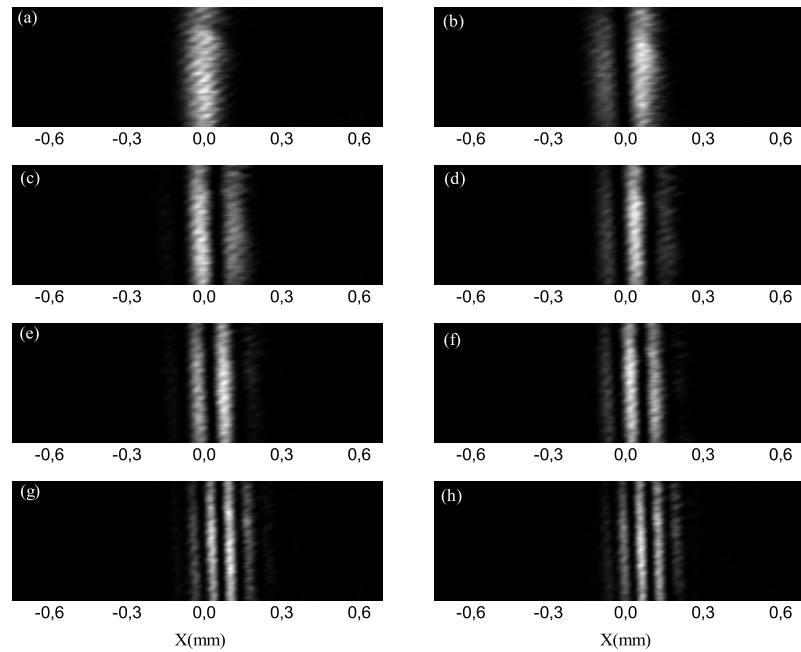


Figura 3.18: Imagens experimentais do padrão para $d = 0, 2R$. Com a carga topológica (a) $l = 0$, (b) $l = 1$, (c) $l = 2$, (d) $l = 3$, (e) $l = 4$, (f) $l = 5$, (g) $l = 10$ e (h) $l = 11$ em todos os casos o índice radial p é igual a zero.

Nas imagens da Fig. 3.19 temos dois painéis para outros valores de d no caso de $l = 5$ e 10. O lado esquerdo de cada painel refere-se aos resultados teóricos e o lado direito os experimentais. Para valores pequenos da distância d ((a), (b) e (c)) temos padrões de difração análogos aos que vêm sendo abordados, porém quando esse valor é acrescido (d) observa-se que as franjas vão diminuindo em quantidade até formar um padrão de difração de um feixe Gaussiano (e). Isso ocorre pois quando d é igual ao raio do feixe, como no caso da letra (e), não é possível distinguir duas regiões iluminadas isoladas espacialmente.

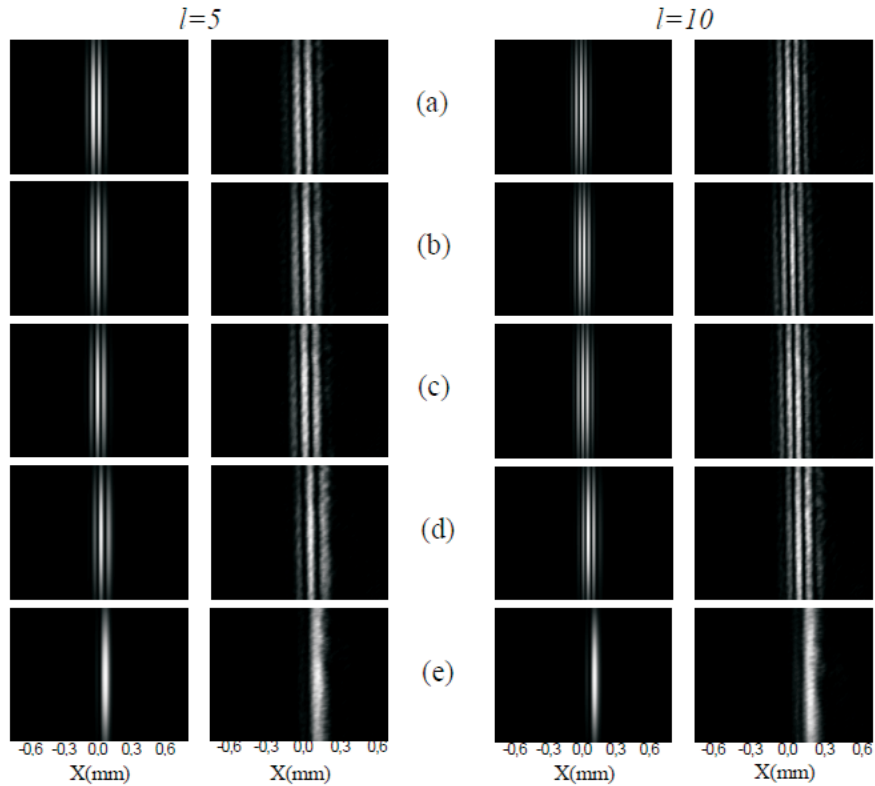


Figura 3.19: Resultados teóricos (esquerda) e experimentais (direita) para $l = 5$ e 10 . Para valores de (a) $d = 0$, (b) $d = 0,1R$ (c) $d = 0,2R$ (d) $d = 0,5R$ e (e) $d = 1,0R$.

3.4 Conclusão

Neste capítulo, estudamos a difração de um feixe Laguerre-Gauss por uma fenda simples. Os feixes Laguerre-Gauss são soluções da equação paraxial em coordenadas cilíndricas e possuem MAO bem definido de $l\hbar$ por fóton. Baseado nesta distribuição, desenvolvemos um código holográfico que codifica a fase e amplitude do feixe.

Presenciamos que o padrão de difração não é o padrão observado com uma onda plana. Isso ocorre porque o feixe utilizado possui uma frente de onda helicoidal ocasionada pela presença do MAO. Mostramos também que a variação de fase ao longo da porção do feixe que está dentro da fenda é praticamente constante para um valor nulo de d e aproximadamente linear para o caso de $d \neq 0$. Estes resultados foram utilizados para

explicar a assimetria do padrão. Vimos também que através do MAO é possível controlar a posição do máximo e mínimo central e a quantidade de franjas do padrão de difração.

4 Conclusão Geral

Nesta dissertação, fizemos uma revisão sobre o conceito de momento angular transportado pela luz. Vimos que um feixe com polarização circular possui momento angular de Spin e Orbital. O primeiro independe da escolha do eixo de propagação. Não obstante, o segundo depende da escolha do eixo e esta condicionado a existência de uma fase azimutal. Vimos ainda que os feixes Laguerre-Gauss são um exemplo de feixes que possuem momento angular orbital e satisfazem a equação paraxial em coordenadas cilíndricas, podendo ser decompostos em feixes Hermite-Gauss que também são soluções da equação paraxial, porém em coordenadas cartesianas e não possuem momento angular orbital.

Em seguida, no capítulo 2, apresentamos uma abordagem mais quantitativa ao invés de uma aplicação direta do princípio de Huygens para o estudo da difração. Onde para isso fizemos uso do teorema de Green. Com estas teorias já em mãos passamos a estudar duas aproximações bastante conhecidas, aproximação de Fresnel e Fraunhofer. Este trabalho foi realizado baseando-se particularmente na aproximação de Fraunhofer por isso nos aprofundamos um pouco mais nesse conceito ao longo da dissertação.

Com os conceitos de momento angular orbital e difração já bem definidos, o nosso intuito era de obter uma representação para a distribuição de campo de um feixe Laguerre-Gauss ao passar através de uma fenda simples. Assim no capítulo 3 mostramos que o comportamento da difração de um feixe contendo momento angular orbital é diferente da

difração típica de uma fenda simples. Aquele possui máximos e mínimos assimétricos em relação ao centro do padrão, devido à variação de fase ao longo da fenda não ser constante.

Quando a fenda se encontrava posicionada no centro do feixe, em razão do perfil anelar do feixe, o padrão de difração de fenda simples é análogo ao padrão de interferência de dupla fenda. Verificamos que a posição dos máximos e mínimos de difração obtidos dependem do valor da carga topológica do feixe. Para valores de d diferente de zero observou-se um padrão de difração assimétrico e deslocado devido a variação de fase ao longo da fenda.

Os efeitos de assimetria e deslocamento vistos nos padrões de difração foram abordados tanto teoricamente quanto experimentalmente. Os resultados teóricos foram obtidos por meio da reconstrução numérica do holograma. Experimentalmente utilizamos um modulador que atuou como um elemento óptico difrativo modulando a fase do feixe incidente. Confirmamos assim, a concordância entre nossos resultados teóricos e experimentais.

Como perspectiva pretendemos utilizar os conceitos aqui estudados para explorar a formação do padrão de difração de polígonos e de redes ópticas.

Referências

- [1] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. 3rd ed, Wiley, New York, (1999).
- [2] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, and J. P. Woerdman. *Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes*. Phys. Rev. A **45**, 8185-8189 (1992).
- [3] A. T. O’Neil, I. MacVicar, L. Allen, and M. J. Padgett. *Intrinsic and Extrinsic Nature of the Orbital Angular Momentum of a Light Beam*. Phys. Rev. Lett. **88**, 053601 (2002).
- [4] W. C. S. Silva. *Representação geométrica de feixes não difratantes possuindo momento angular orbital*. UFAL, tese de mestrado (2006).
- [5] G. Molina-Terriza, J. P. Torres, and L. Torner. *Twisted photons*. Nature Physics **3**, 305-310 (2007).
- [6] J. P. Torres, Y. Deyanova, L. Torner and G. Molina-Terriza. *Preparation of engineered two-photon entangled states for multidimensional quantum information*. Phys. Rev. A. **67**, 052313 (2003).
- [7] S. Straupe, and S. Kulik. *The quest for higher dimensionality*. Nature Photonics **4**, 585-586 (2010).

-
- [8] H. He, M. E. J. Friese, N. R. Heckenberg, and H. Rubinsztein-Dunlop. *Direct observation of transfer of angular momentum to absorbing particles from a laser beam with a phase singularity*. Phys. Rev. Lett. **75**, 826-829 (1995).
- [9] G. C. G. Berkhout, and M. W. Beijersbergen. *Method for Probing the Orbital Angular Momentum of Optical Vortices in Electromagnetic Waves from Astronomical Objects*. Phys. Rev. Lett. **101**, 100801 (2008).
- [10] J. M. Hickmann, E. J. S. Fonseca, W. C. Soares, and S. Cháves-Cerda. *Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using light's orbital angular momentum*. Phys. Rev. Lett. **105**, 053904 (2010).
- [11] D. P. Ghai, P. Senthilkumaran, and R. S. Sirohi. *Single-slit diffraction of an optical beam with phase singularity*. Opt. Laser Eng. **47**, 123-126 (2009).
- [12] H. I. Sztul, and R. R. Alfano. *Double-slit interference with Laguerre-Gaussian beams*. Opt. Lett. **31**, 999-1001 (2006).
- [13] A. Kumar, P. Vaity, and R. P. Singh. *Diffraction characteristics of optical vortex passing through an aperture-iris diaphragm*. Opt. Com. **283**, 4141-4145 (2010).
- [14] J. H. Poynting. *On Pressure Perpendicular to the Shear Planes in Finite Pure Shears, and on the Lengthening of Loaded Wires When Twisted*. Proc. R. Soc. Lond. A **82**, 546-559 (1909)
- [15] R. A. Beth. *Mechanical Detection and Measurement of the Angular Momentum of Light*. Phys.Rev. **50**, 115-125 (1936).
- [16] B. E. A. Saleh, and M. C. Teich. *Fundamentals of Photonics*. 2nd ed, Wiley, New York (2007).

- [17] K. D. Machado. *Teoria do Eletromagnetismo*. Vol 1, 2^aed, UEPG, Ponta Grossa, (2000).
- [18] L. Allen, and M. Padgett. *Structured Light and its Applications*. Elsevier, Califórnia, 1-15 (2008).
- [19] Disponível em: <<http://www.inovacaotecnologica.com.br/noticias/>>. Acessado em 19 de out. de 2010.
- [20] L. Allen, M. J. Padgett, and M. Babiker. *Progress in Optics*. Ed. E. Wolf, **39**, 291-372 (1999).
- [21] R. Paschotta. *Encyclopedia of Laser Physics and Technology*. Vol 1. Wiley, New York (2008).
- [22] D. McGloin, V. Garcés-Chávez, and K. Dholakia. *Interfering Bessel beams for optical micromanipulation*. *Opt. Lett.* **28**, 657-659 (2003).
- [23] E. J. Galvez. *Structured Light and its Applications*. Elsevier, Califórnia, 63-74 (2008).
- [24] W. Greiner. *Classical Electrodynamics*. Springer, New York (1998).
- [25] G. R. Fowles. *Introduction to Modern Optics*. 2nd ed., Dover, New York (1975).
- [26] E. Wolf, and E. W. Marchand. *Comparison of the Kirchhoff and the Rayleigh-Sommerfeld Theories of Diffraction at an Aperture*. *J. Opt. Soc. Am.* **54**, 587-594 (1964).
- [27] J. W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-Hill, New York (1968).
- [28] H. M. Nussenzveig. *Curso de Física Básica*. Vol 4, 1^a ed., Edgard Blücher, São Paulo (1998).

- [29] Disponível em: < <http://efisica.if.usp.br/optica/universitario/difracao/huygens/>>. Acessado em 22 de nov. de 2010.
- [30] F. A. Jenkins, and H. E. White. *Fundamentals of Optics*. 4th ed., McGraw-Hill, New York (2001).
- [31] Disponível em: <<http://tolstenko.net/dados/Unicamp/2010.2/f428/aula4.pdf>>. Acessado em 24 de novembro de 2010.
- [32] Disponível em: < <http://scienceworld.wolfram.com/physics/FraunhoferDiffractionSingleSlit.html>>. Acessado em 24 de nov. de 2010.
- [33] Disponível em: <<http://edu.tnw.utwente.nl/inlopt/lpmcad/examples.html>>. Acessado em 26 de nov. de 2010.
- [34] Disponível em: < <http://www.johnloomis.org/eop513/asgn/asgn5/fop05.html>>. Acessado em 26 de nov. de 2010.
- [35] R. L. Eriksen, P. C. Mogensen, and J. Glückstad. *Elliptical polarisation encoding in two dimensions using phase-only spatial light modulator*. Opt. Com. **187**, 325-336 (2001).
- [36] N. Matsumoto, T. Ando, T. Inoue, Y. Ohtake, N. Fukuchi, and T. Hara. *Generation of high-quality higher-order Laguerre–Gaussian beams using liquid-crystal-on-silicon spatial light modulators*. J. Opt. Soc. Am. A **25**, 1642-1651 (2008).
- [37] V. Arrizón, U. Ruiz, R. Carrada, and L. A. González. *Pixelated phase computer holograms for the accurate encoding of scalar complex fields*. J. Opt. Soc. Am. A **24**, 3500-3507 (2007).