UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ROSEMEIRE ROBERTA DE LIMA

CAMPO MULTIPLICATIVO
estratégias de resolução de problemas de divisão de alunos do 4º ano do Ensino Fundamental em escolas públicas de Maceió

Maceió/AL
2012

ROSEMEIRE ROBERTA DE LIMA

CAMPO MULTIPLICATIVO
estratégias de resolução de problemas de divisão de alunos do 4º ano do Ensino Fundamental em escolas públicas de Maceió

Dissertação apresentada à banca examinadora como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática – Área de Concentração "Pedagogia", pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Alagoas.

Orientadora: Profª Drª Mercedes Bêtta Quintano de Carvalho Pereira dos Santos

Maceió/AL
2012

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Fabiana Camargo dos Santos

L732c Lima, Rosemeire Roberta de.
Campo multiplicativo : estratégias de resolução de problemas de divisão de alunos do 4º ano do ensino fundamental em escolas públicas de Maceió / Rosemeire Roberta de Lima. – 2012.

126 f. : il., grafs., tabs.

Orientador: Mercedes Bêtta Quintano de Carvalho Pereira dos Santos.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Maceió, 2012.

Inclui bibliografia.
Anexo: f. 124.

1. Ensino de matemática. 2. Resolução de problemas. 3. Campo multiplicativo – Divisão. 4. Divisão – Estratégias de solução. 5. Matemática – Ensino fundamental. I. Título.

CDU: 511.12:37

ROSEMEIRE ROBERTA DE LIMA

CAMPO MULTIPLICATIVO
estratégias de resolução de problemas de divisão de alunos do 4º ano do Ensino Fundamental em escolas públicas de Maceió

Dissertação apresentada à banca examinadora como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática – Área de Concentração "Ensino de Pedagogia", pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Alagoas, aprovada em 11 de abril de 2012.

BANCA EXAMINADORA

Prof.ª Dr.ª Mercedes Bêtta Quintano de Carvalho Pereira dos Santos
(Presidente)

Prof.ª Drª Abigail Fregni Lins
(CCT/UEPB)

Prof. Dr. Elton Casado Fireman
(PPGECIM/CEDU/UFAL)

AGRADECIMENTOS

A Deus, em primeiro lugar, por ter me concedido o dom da vida, saúde, sabedoria e paciência, na complexa tarefa de concretização de mais uma etapa da minha formação, que constitui não apenas por uma realização pessoal, mas também profissional.

À professora doutora Mercedes Carvalho, por ter me dado a oportunidade de ser sua orientanda, e pelo profissionalismo, paciência e dedicação em seu fazer docente. Seus conhecimentos, orientações constantes e convivência acolhedora foram fundamentais para o desenvolvimento deste estudo. A você, o meu muito e eterno obrigada!

Aos gestores, às coordenadoras e professoras das escolas voluntárias, pela colaboração para a realização deste trabalho.

Aos professores doutores Edna Cristina do Prado e Elton Casado Fireman, pelas contribuições no exame de qualificação.

À professora Abdízia Barros, pelo exemplo de profissional da educação; pela primeira oportunidade de pesquisa e as contribuições em minha formação inicial e continuada, mostrando-me, em ação, que educar é muito mais que ensinar.

Aos meus familiares, pelo apoio constante na minha formação acadêmica e por vibrarem junto comigo por mais esta conquista.

Aos meus amigos e amigas pessoais e profissionais Andreia Ferreira, Aldianne Tenório, Ana Luísa Soares, Andrezza Valões, Daniela Santos, Cidinha Fausto, Deywid Melo, Jerdi Santos, Juliane Medeiros, Luciano Ferreira, Marizete Santos, Piedade Feitosa, Simone Fonseca, Isabella Lyra, Lívia Paula Lima, Silvânio Silvério e Zayanne Suica, que torceram por mim, encorajando-me a prosseguir este estudo e oferecendo estímulo e carinho.

Aos membros do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática pelas brilhantes discussões acerca dos conceitos matemáticos.

Aos amigos Juliane Medeiros, Ana Luísa Soares e Luiz Galdino pelos comentários e colaborações para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores e alunos do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM), pelas discussões e contribuições para a minha formação acadêmica.

À Técnica em Assuntos Educacionais do PPGECIM, Mônica Barros, pela prontidão, carinho e acolhimento em ajudar a primeira turma durante o período da realização do curso.

Enfim, obrigada a todos!

MENININHO

Era uma vez um menino.
Ele era bastante pequeno.
Ela era uma grande escola.
Mas, quando o menininho descobriu que podia ir à sua sala,
caminhando, através da porta, ele ficou feliz.
E a escola não parecia mais tão grande quanto antes.
Uma manhã, quando o menininho estava na escola, a professora disse:
Hoje nós iremos fazer um desenho.
Que bom! Pensou o menino.
Ele gostava de fazer desenhos.
Ele podia fazê-los de todos os tipos:
leões, tigres, galinhas, vacas, barcos, trens; e
ele pegou sua caixa de lápis e começou a desenhar.
Mas a professora disse:
Esperem! Ainda não é hora de começar.
E ele esperou até que todos estivessem prontos.
Agora — disse a professora — nós iremos desenhar flores.
Que bom! Pensou o menininho.
Ele gostava de desenhar flores.
E começou a desenhar com seu lápis cor de rosa, laranja e azul.
Mas a professora disse:
— Esperem! Vou mostrar como fazer.
E a flor era vermelha com caule verde.
Assim — disse a professora. — Agora vocês podem começar.
Então ele olhou para a sua flor.
Ele gostava mais de sua flor, mas não podia dizer isto.
Ele virou o papel e desenhou uma flor igual à da professora.
Ela era vermelha com caule verde.
Num outro dia, quando o menininho estava em aula, ao ar livre, a professora disse:
— Hoje nós vamos fazer alguma coisa com barro.
— Que bom! Pensou o menininho. Ele gostava de barro.
Ele podia fazer todos os tipos de coisas com barro: elefantes, camundongos, carros e caminhões.
Ele começou a juntar e amassar a sua bola de barro.
Mas a professora disse:
— Esperem! Não é hora de começar.
E ele esperou até que todos estivessem prontos.
Agora, disse a professora, nós iremos fazer um prato.
— Que bom! Pensou o menino.
Ele gostava de fazer pratos de todas as formas e tamanhos.
A professora disse:
— Esperem! Vou mostrar como se faz.
E ela mostrou a todos como fazer um prato fundo.
— Assim — disse a professora.
— Agora vocês podem começar.
O menininho olhou para o prato da professora.
Então olhou para o seu próprio prato.
Ele gostava mais de seu prato do que do da professora.

Mas não podia dizer isto.
Ele amassou o seu barro numa grande bola novamente,
e fez um prato igual ao da professora. Era um prato fundo.
E muito cedo, o menininho aprendeu a esperar e a olhar,
e a fazer as coisas exatamente como a professora.
E muito cedo, ele não fazia mais as coisas por si próprio.
Então aconteceu que o menino e sua família se mudaram para outra casa, em outra cidade,
e o menininho tinha que ir para outra escola.
E no primeiro dia ele estava lá. A professora disse:
— Hoje nós faremos um desenho.
— Que bom! Pensou o menininho.
E ele esperou que a professora dissesse o que fazer.
Mas a professora não disse.
Ela apenas andava na sala.
Veio até ele e falou:
— Você não quer desenhar?
— Como posso fazê-lo perguntou o menininho.
— Da maneira que você gostar, — disse a professora.
— De que cor? Perguntou o menininho.
E a professora disse:
— Se todo mundo fizer o mesmo desenho e usar as mesmas cores,
como eu posso saber quem fez o quê?
E qual o desenho de cada um?
— Eu não sei — disse o menininho.
E ELE COMEÇOU A DESENHAR UMA FLOR VERMELHA COM CAULE VERDE.

Autor desconhecido

RESUMO

Nesta pesquisa de abordagem qualitativa, na modalidade estudo de caso, foram investigadas diferentes estratégias de resolução de problemas de divisão – ideias de partição e quotição – utilizadas por alunos do 4º ano do Ensino Fundamental. Participaram da pesquisa 105 alunos com idade entre 8 e 14 anos de três escolas públicas maceioenses que resolveram quatro situações-problema, sendo três problemas de divisão por quota e um problema de partição. Ancoramos nossas análises nas pesquisas de Vergnaud (2009), Pozo (1998), Starepravo (1997), Itacarambi (1997), Carvalho (2007, 2010), Walle (2009), Cunha (1997), Nunes et al. (2002) , Smole e Diniz (2001), Caraça (1984), entre outros. Os resultados indicaram que os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental não vivenciam o trabalho com resolução de problemas e suas estratégias revelam que tiveram como base, em suas respostas, a tabuada de multiplicação e/ou a continuidade do raciocínio do campo aditivo – uso da adição de parcelas repetidas – e que as ideias de partição (ação de distribuir por igual) foram mais presentes nas resoluções dos problemas propostos, não sendo verificada diferenciação entre as ideias de partição e quotição. Além disso, as resoluções dos alunos demonstram que eles não tiveram durante a sua escolaridade, contato com propostas de atividades de Matemática que solicitem justificativas para as respostas, o que caracteriza ausência da especificidade da linguagem matemática. Tal resultado aponta que, na Matemática, o mais importante é o uso de cálculos e a linguagem natural é um estudo específico da disciplina Língua Portuguesa. Essa visão só vem contribuir para a importância de trabalhar resolução de problemas a fim de que os enunciados sejam compreendidos e o aluno, por sua vez, explicite estratégias variadas de resolução, optando pela mais econômica, e tomadas de decisão coerentes com seu pensamento matemático.

Palavras-chave: Resolução de problemas. Campo multiplicativo. Divisão. Estratégias de solução. Aritmética. Conceitos da Matemática elementar.

ABSTRACT

In this research of qualitative approach, in the format of case study, different problem-solving strategies for division were investigated - ideas of partition and quotição used by students of the 4th year of elementary school. A hundred and five students, aged between eight and 14 years old, from three public schools in Maceió, have taken part of the research. These students have solved four problem-situations, being three problems of division by quota and one problem of partition. We have based our analyses in the studies of Vergnaud (2009), Pozo (1998), Starepravo (1997), Itacarambi (1997), Carvalho (2007, 2010), Walle (2009), Dixon (1997), Nunes et al (2002), Smole and Diniz (2001), Caraça (1984), among others. The results have indicated that students in their early years of Elementary School do not experience the work with problem solving and their strategies reveal that they have based their answers on the table of multiplication and/or on the continuity of the reasoning of the additive field – the use of adding repeated plots- and that the ideas of partition, action of distributing equally, was more present in the proposed problems solutions, not showing differentiation between the ideas of partition and quotição. Besides that, the students ' answers demonstrate that during their schooling they had no contact with proposals for math activities that demand moments of justifications for their answers. This fact shows the absence of the specificity of mathematical language. Such an absence indicates that in Mathematics what does matter is the use of calculations and that the natural language is a specific study of the Portuguese Language subject. Such a vision just contributes to the importance of working problem-solving, so that enunciations can be understood and that the students, in their turn, explicite various strategies of resolution, choosing the most economic ones, and that their decision-making can be coherent to their mathematical thinking.

Key words: Troubleshooting. Field of multiplication. Division. Estrategies of solution. Arithmetic. Concepts of elementary Maths.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Ilustração 1 – Solução do problema 1 por meio do raciocínio aditivo 75
Ilustração 2 – Solução do problema 3 por meio da técnica da multiplicação 76
Ilustração 3 – Solução do problema 3 por meio da técnica da divisão 78
Ilustração 4 – Solução do problema 3 por meio da representação do enunciado 80
Ilustração 5 – Solução do problema 4 por meio de uso da subtração reiterada 81
Ilustração 6 – Solução do problema 3 por meio da escrita convencional, a linguagem natural 82
Ilustração 7 – Solução do problema 1 por meio do raciocínio aditivo, operação da divisão e desenho 84
Ilustração 8 – Estratégia de resolução por meio da operação de divisão 87
Ilustração 9 – Estratégia de resolução do problema 2 por meio da subtração reiterada ... 88
Ilustração 10 – Estratégia de resolução por meio do desenho, correspondência um- a- um e agrupamento 89
Ilustração 11 – Estratégias de resolução utilizada em várias tentativas para encontrar o resultado correto 90
Ilustração 12 – Estratégia de resolução mediada pelo cálculo mental e conhecimento implícito acerca da tabuada de multiplicação 91
Ilustração 13 – Estratégia de resolução utilizada por meio da divisão e decomposição da parte que equivale ao todo 92

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Participantes da investigação quanto à solução do instrumento utilizado na pesquisa 29

Quadro 2 – Denominação dos sujeitos por escola e turma 29

Quadro 3 – Problemas aplicados às turmas do 4º ano do Ensino Fundamental 31

Quadro 4 – Problema de divisão por quota aplicado às turmas do 4º ano do Ensino Fundamental 31

Quadro 5 – Problema de divisão partitiva aplicado às turmas do 4º ano do Ensino Fundamental 32

Quadro 6 – Problema de divisão por quota (utilização do sistema monetário) aplicado às turmas participantes 33

Quadro 7 – Problema de divisão por quota, por meio de quantidades discretas, aplicado às turmas participantes 34

Quadro 8 – Procedimentos heurísticos de resolução de problemas 51

Quadro 9 – Algumas técnicas que ajudam a compreender o enunciado 53

Quadro 10 – Diferentes estratégias de resolução para um mesmo problema 59

Quadro 11 – Estratégias de resolução da escola A 62

Quadro 12 – Estratégias de resolução da escola B, turma 1 63

Quadro 13 – Estratégias de resolução da escola B, turma 2 64

Quadro 14 – Estratégias de resolução da escola C 65

Quadro 15 – Justificativas das estratégias de resolução utilizadas pelos alunos na atividade final 72

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Porcentagem das resoluções dos problemas quanto ao resultado 66
Gráfico 2 – Porcentagem das resoluções quanto ao resultado do problema 1 67
Gráfico 3 – Porcentagem das resoluções quanto ao resultado do problema 2 68
Gráfico 4 – Porcentagem das resoluções quanto ao resultado do problema 3 69
Gráfico 5 – Porcentagem das resoluções quanto ao resultado do problema 4 70
Gráfico 6 – Estratégias frequentes dos alunos participantes da pesquisa 71

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
Ebrapem	Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática
Ebrem	Encontro Brasiliense de Educação Matemática
Educon	Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade
EF	Ensino Fundamental
EM	Ensino Médio
Epenn	Encontro de Pesquisa Educacional Norte e Nordeste
GPEM	Grupo de Pesquisa em Educação Matemática
LAP	Laboratório de Aprendizagem de Matemática
LD	Livros didáticos
MMM	Movimento da Matemática Moderna
NCTM	Naciontal Council of Teachers of Mathematics
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PPGECIM	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
Sbem	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SEEE	Secretaria de Estado da Educação e do Esporte do Estado de Alagoas
SNCT	Semana Nacional de Ciência e Tecnologia
SND	Sistema de numeração decimal
Sudene	Superintendência do Desenvolvimento do Nordeste
Ufal	Universidade Federal de Alagoas

SUMÁRIO

1 APRESENTANDO A PESQUISA 14
1.1 Trajetória acadêmico-profissional …... 15
1.2 Revisão da literatura e fundamentação teórica 18
1.2.1 Por que estudar divisão por meio de resolução de problemas 22
1.3 A contribuição da pesquisa aos professores polivalentes 24
1.4 Do problema aos objetivos 26
1.5 Procedimentos metodológicos 26
1.5.1 Procedimentos de coleta de dados 27
1.5.2 Procedimentos de análise 35
1.5.3 Elaboração do produto 38

2 O CAMPO MULTIPLICATIVO POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ….. 42
2.1 Resolução de problemas matemáticos …... 42
2.2 Breve histórico da resolução de problemas …... 44
2.3 Tipos de problemas e abordagens de trabalho 46
2.4 Estratégias de resolução de problemas no ensino da matemática........................ 48
2.5 O enunciado 52
2.6 O conceito de números e o nosso sistema de numeração decimal 54
2.7 Campo multiplicativo nos anos iniciais de escolarização 56
2.7.1 Divisão, operação inversa da multiplicação ….. 57

3 RESULTADOS E ANÁLISE DE DADOS ….. 62
3.1 Análise quantitativa das estratégias dos alunos por escola 62
3.1.1 Escola A 62
3.1.2 Escola B 63
3.1.3 Escola C 64
3.2 Análise quantitativa das estratégias de todos os sujeitos participantes 65
3.3 Análise quantitativa por problema 66
3.3.1 Problema 1 66
3.3.2 Problema 2 67
3.3.3 Problema 3 68
3.3.4 Problema 4 69
3.4 Análise quantitativa das respostas corretas quanto às estratégias........................... 70

3.4.1 Análise das justificativas dos alunos aos problemas propostos 71
3.5 Análise das estratégias 73
3.5.1 As estratégias de solução presentes no conceito de quotição (medida/ correspondência um- para- muitos) 74
3.5.2 As estratégias de resolução presentes no conceito de partição (distribuição) 86

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS ….. 94

REFERÊNCIAS ….. 102

APÊNDICES ….. 107
APÊNDICE A – Atividade piloto 1 108
APÊNDICE B – Atividade piloto 2 110
APÊNDICE C – Atividade final 112
APÊNDICE D – Texto didático 113

ANEXO …... 123
ANEXO A – Aprovação do Comitê de Ética 124

1 APRESENTANDO A PESQUISA

Esta pesquisa apresenta uma análise das estratégias de problemas que envolveram a divisão quotitiva e partitiva de alunos do 4º ano do Ensino Fundamental (EF) de escolas públicas maceioenses, na perspectiva de detectar quais conceitos matemáticos e conhecimentos implícitos revelam em suas respostas, conforme a proposta do trabalho com resolução de problemas.

O estudo acerca das estratégias de resolução procurou apontar a necessidade de possibilitar aos alunos vivenciar diferentes situações, bem como levá-los a explicitar e compreender diferentes mecanismos de cálculo, de modo que não fiquem limitados apenas ao cálculo escrito, o qual, conforme Mamede (2012, p. 250), deve ser ensinado de forma a "promover a reflexão sobre as propriedades dos números e das operações, o desenvolvimento do cálculo aproximado e a investigação de números, em lugar de cair num conjunto rotineiro de procedimentos com pouco significado para a criança".

Para o levantamento dos dados, aplicamos uma atividade com quatro situações-problema e recolhemos alguns cadernos dos alunos participantes para compreender como o conteúdo de divisão é trabalhado em sala de aula e quais procedimentos de ensino os professores apresentam, em geral, aos seus alunos.

Este estudo encontra-se dividido em três capítulos. No primeiro capítulo é apresentada a trajetória profissional da pesquisadora, as motivações que levaram à investigação, a relevância e a problemática existente ao redor do tema, os objetivos pretendidos. Ainda, delineamos o percurso metodológico utilizado, descrevendo os caminhos adotados para os procedimentos de coleta de dados e para a análise. Além disso, apresentamos os passos seguidos para a elaboração do produto da dissertação, em que optamos pela elaboração de texto didático. Nesse capítulo esclarecemos o que vem a ser uma pesquisa qualitativa e a modalidade estudo de caso. Também descrevemos os sujeitos da pesquisa, o critério de escolha das instituições investigadas e a atividade aplicada aos alunos participantes.

No segundo capítulo, apresentamos discussões sobre problema, o que são problemas matemáticos, além de um breve histórico do surgimento da resolução de problemas na educação matemática, as estratégias de resolução e a relação multiplicação e divisão, conforme conceitualização do campo multiplicativo. Para encontrar respostas que atendessem ao objetivo da pesquisa, foram efetuadas leituras acerca do aporte teórico de autores nacionais e internacionais da área da educação matemática, como Polya (2006), Pozo (1998), Smole e Diniz (2001), Nunes e Bryant (1997), Starepravo (1998), Vergnaud (2009), Cunha (1997), Carvalho (2007, 2010), entre outros.

No terceiro capítulo, fazemos a análise dos dados e destacamos as estratégias de resolução usadas pelos alunos participantes da investigação, considerando a análise de conteúdo e o aporte teórico da metodologia de resolução de problemas e do campo multiplicativo. Os dados obtidos foram analisados de modo quantitativo e qualitativo.

Seguem-se as considerações finais, em que destacamos o percurso realizado pela pesquisadora quanto aos avanços alcançados acerca do conhecimento do objeto investigado, sobretudo a importância das estratégias de resolução de problemas para a compreensão de conceitos desde os anos iniciais do EF. Listamos as referências utilizadas na pesquisa e, por último, apresentamos os apêndices e anexos.

1.1 Trajetória acadêmico-profissional

A presente pesquisa teve como fonte de inspiração a minha prática pedagógica desenvolvida nos anos iniciais de escolarização em escolas públicas e particulares do estado de Alagoas, no período de 2001 a 2009. Neste período começava-se a questionar a valorização do ensino da Matemática e Língua Portuguesa nos anos iniciais do EF.

Ser professora era algo que, desde cedo, atraía-me e estava entre as minhas possíveis escolhas profissionais. Tal interesse ficou evidenciado quando, em 1995, passei a ensinar reforço em Matemática a crianças na faixa etária de 8 a 10 anos do bairro onde morava e, em 1998, ingressei no curso de Pedagogia.

Atuando como profissional da educação, a Matemática esteve presente em minha formação continuada quando desenvolvi, nos anos de 2000 e 2001, atividades de bolsista em turmas de alfabetização no Projeto Xingó[1], acompanhando a metodologia de ensino dos professores alfabetizadores em Delmiro Gouveia. Para a realização dessas atividades, participei de cursos em todas as áreas do conhecimento as quais englobavam disciplinas dos anos iniciais, a formação continuada em Matemática que me direcionou para uma nova proposta de ensino até então não vivenciada — o estudo desta disciplina em seus diversos contextos, incluindo jogos, situações-problema, enfim, uma Matemática voltada para uma

[1] Programa desenvolvido no semiárido nordestino em parcerias com as instituições federais de educação superior da região, juntamente com o atual Instituto Federal de Alagoas, a Sudene e o CNPq, oferecendo cursos de alfabetização e profissionalizantes aos alunos participantes.

abordagem com sentido e aplicabilidade em diversas situações, possibilitando-me conferir significado aos conteúdos estudados. Ainda assim restava uma lacuna em minha formação profissional, principalmente no que se referia à construção de conceitos.

Ao concluir o curso de Pedagogia, em 2001, e passar a atuar na qualidade de docente, como também na de coordenadora pedagógica, em escolas das redes estadual, municipal e particular das cidades de Coqueiro Seco, São Miguel dos Campos e Maceió, todas no estado de Alagoas, pude perceber mais de perto a dificuldade do professor dos anos iniciais em ministrar o ensino da Matemática na perspectiva de conceitos, uma vez que na formação desse profissional da educação, no ensino da Matemática, não contemplou o seu uso na sociedade, sendo trabalhada apenas como técnica, procedimento pronto e acabado. No período de 2002 a 2004, exerci a função de coordenadora pedagógica da Educação Infantil ao Ensino Fundamental em instituições públicas. Pude constatar a preocupação das professoras com a disciplina de Matemática, tendo em vista as dificuldades de saber ensinar, e à sua insatisfação pelo fato de os alunos não conseguirem bons resultados nas avaliações.

A prática profissional nos anos iniciais possibilitou o contato com os alunos, a fim de aferir níveis de ensino e aprendizagem, como também contatos com os pais. Em 2004, vivenciei uma situação que envolveu uma mãe de um aluno de uma escola particular, a qual questionava o visto nos livros e nos cadernos dos alunos e a não verificação de questão por questão. Como eu fazia a correção das operações na lousa (também chamado de quadro), com a colaboração dos alunos, no final da aula apenas verificava o resultado, corrigindo, e em seguida consignava a minha rubrica nos materiais escolares. O questionamento dessa mãe chamou a atenção, pela ênfase que eu dava no resultado, em detrimento dos procedimentos.

Em 2004 ingressei no curso *lato sensu* em Metodologia para os anos iniciais do EF na Universidade Federal de Alagoas (Ufal), o que me proporcionou, mais uma vez, refletir acerca da prática pedagógica das diferentes disciplinas do currículo do 1º ao 5º ano, focalizando a importância da formação docente para um ensino que atenda às novas exigências educacionais — aprender compreendendo o que se faz, isto é, atribuindo significado às atividades desenvolvidas em sala de aula. A disciplina de Matemática tratou a abordagem de diferentes conceitos da Aritmética e da Geometria, permitindo-me dar um salto qualitativo em meu desempenho profissional no espaço de sala de aula. Como professora de Matemática dos anos iniciais, olhando para as experiências atuais e prática docente, percebi que alguns procedimentos já eram diferentes de quando iniciei a carreira profissional.

Com esses novos saberes, passei a utilizar em minhas aulas diferentes metodologias, recursos e, sobretudo, a dar maior atenção aos procedimentos das resoluções matemáticas, procurando compreender as relações que os alunos explicitam em suas respostas e, ainda, quais significados demonstram atribuir à atividade de Matemática. No entanto, embora gostasse da disciplina e participasse de cursos de formação continuada, não percebia ainda a importância de relacionar linguagem oral e escrita nessas aulas. Tal necessidade levou-me à busca incessante para melhorar a formação na área e, também, a tratar a Matemática como linguagem, que é específica, devendo ser trabalhada desde os anos iniciais de escolarização, o que contribui para entender como os alunos pensam matematicamente.

Foi então que, no final de 2009, submeti-me ao processo seletivo para o mestrado em Ciências e Matemática e pude perceber a importância do programa com a formação de profissionais que atuam nos anos iniciais do EF, uma vez que, apesar da importância dessas disciplinas, são evidentes as deficiências de conceitos por parte de aluno e professores dos anos iniciais de escolarização. Além disso, o programa demonstrou a intencionalidade de disponibilizar mão de obra qualificada para o mercado de trabalho e a atuação de novos pesquisadores na formação continuada, nessa etapa de escolaridade, que é tão carente.

Ao ingressar no mestrado profissional em Ciências e Matemática, pude avoltar-me para algumas questões enfrentadas durante a atuação como docente, como a construção de conceitos matemáticos e o trabalho com resolução de problemas. Por ter trabalhado com a 3ª série (atual 4º ano do EF) desde o início da carreira, optei por investigar os conceitos matemáticos de divisão, que apresentam evidência no contexto escolar de aplicação de ações equivocadas quanto ao destaque da tabuada como principal instrumento para a resolução de problemas, não abordando a relação entre multiplicação e divisão. Assim, percebi, durante as aulas ministradas, que a divisão foi um dos conteúdos em que os alunos enfrentavam várias dificuldades, como: erro no algoritmo, não relação entre os termos da divisão etc.

Para alguns pesquisadores as dificuldades nas operações de multiplicação e divisão estão associadas à não compreensão dos procedimentos adotados no espaço escolar para a resolução de uma atividade, tendo em vista que o foco, em geral, está voltado para o resultado e não para o procedimento, apresentando-se uma Matemática elementar que não priorizava o conceito, as situações e, sobretudo, as regularidades do nosso sistema de numeração e as especificidades das operações fundamentais. Nessa direção, Cunha (1997), ao refletir acerca do assunto, constatou que os alunos têm fraco desempenho no ensino da Matemática, principalmente nos conteúdos multiplicação e divisão, porque na escola ainda são muitos os equívocos conceituais nessa disciplina, entre eles: não estabelecimento de relações entre adição e subtração, entre multiplicação e divisão; ênfase do ensino da multiplicação por meio da adição repetida etc.

O contato com a literatura trabalhada nas disciplinas oferecidas no mestrado: Teorias de Aprendizagem, Seminários Avançados de Matemática 1 e Desenvolvimento de Projetos em Ensino de Ciências, assim como as discussões desenvolvidas no Grupo de Pesquisa em Educação Matemática (GPEM), levaram-nos à definição do aporte teórico e do objeto de pesquisa. Visando aprender Matemática por compreensão e não por memorização, buscamos estudar as estratégias de resolução de divisão dos alunos do 4º ano do EF com o objetivo de compreender como eles pensam matematicamente e o que demonstram saber das ideias de divisão.

A seguir é apresentada a revisão da literatura que permitiu compreender a importância do ensino da divisão por meio da metodologia da resolução de problemas.

1.2 Revisão da literatura e fundamentação teórica

Onuchic (1999, p. 200) destaca que, em nosso país, o ensino de Matemática ainda "é caracterizado pelos altos índices de retenção, pela formalização e mecanização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão". Tal problema é citado por Nehring (1996, apud CUNHA, 1997, p. 7) como uma questão de concepção matemática em que "os professores têm e transmitem, por meio de suas aulas, uma disciplina pronta, definitiva e distante da realidade, revestida de uma abstração e que serve para justificar, muitas vezes, as dificuldades que os alunos encontram na escola". Desse modo, a Matemática necessita ser tratada como uma ciência que possui linguagem específica e caminhos diversificados para a resolução de problemas. Como escreve Carvalho (2007, p. 13) para "fazer matemática é preciso aprender a resolver problemas".

É perceptível como na instrução formal, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, o aluno geralmente é avaliado não por sua compreensão, mas pela repetição da técnica eficaz que consegue executar.

Investigações em educação matemática que se debruçam sobre os anos iniciais, como as de Carvalho (2009, 2010), indicam que os conteúdos de multiplicação e divisão são considerados pelos professores os mais complexos para trabalhar com os alunos. É comum os docentes ancorarem o trabalho da multiplicação no ensino da tabuada, pois, equivocadamente, a maioria deles acredita que se o aluno aprender a tabuada saberá a multiplicação e, em consequência, a divisão.

Tal crença acerca do trabalho de multiplicação e divisão, leva-nos a conjecturar que os conceitos destas operações reduzem-se aos procedimentos dos algoritmos, produzindo o empobrecimento do trabalho matemático, porque

> reduz a Matemática a cálculo ou execução de algoritmos, ignorando que a Matemática fornece modelos para a representação e compreensão do mundo em que vivemos. Em segundo lugar [...] porque o algoritmo se refere a um conjunto de procedimentos que leva à execução de uma dada operação, enquanto a operação implica transformações realizadas sobre números, quantidades, grandezas e medidas. (CORREA; SPINILLO, 2004, p. 105)

Dada a ênfase na técnica do algoritmo, as críticas de educadores matemáticos incidem na descontextualização do ensino e na linearização curricular, que limitam o processo de construção de conceitos matemáticos pelos alunos e não lhes propiciam a oportunidade de lançar mão dos seus conhecimentos implícitos sobre a divisão para resolver situações-problema que lhes são apresentadas. Nesse contexto, o docente, por sua vez, espera que os alunos resolvam as situações-problema aplicando o algoritmo da divisão, impossibilitando a discussão do campo multiplicativo.

Nesse sentido, somos favoráveis a um ensino de Matemática para os anos iniciais que tenha por base o trabalho com situações-problema, propício desde a Educação Infantil, como propõe Carvalho (2007). Esta autora defende a inserção da resolução de problemas como um eixo norteador do ensino de Matemática, possibilitando a construção de conceitos em virtude da explicitação das estratégias de resolução em que os alunos revelam seus pensamentos e procedimentos na realização das atividades, proporcionando-lhes oportunidades de questionar, indagar o que aprenderam e o que não compreenderam, desenvolvendo assim a estrutura lógica de seu pensamento.

Dada a importância de compreender a razão das resoluções de problemas pelos alunos, alguns pesquisadores têm dedicado seus estudos à investigação acerca das estratégias de resolução por eles utilizadas, de modo a identificar quais relações estabelecem e o que compreendem de conceitos matemáticos.

Em um levantamento de estudos sobre a literatura supracitada, destacamos os que se seguem:

Benvenutti (2008), em sua pesquisa dissertativa, investigou por meio de estudo de caso as estratégias de resolução de divisão partitiva e quotitiva de alunos do 6º ano da educação básica por meio de aplicação de atividade que envolvia quatro situações-problema, sendo duas situações de partição e duas de quotição exata e não exata. A atividade foi aplicada para 41 alunos de uma escola pública da rede estadual de Santa Catarina. A autora comprovou que a situação quotitiva mostrou-se mais difícil de ser compreendida pelos alunos investigados e que os conceitos de divisão são poucos explorados no contexto escolar. Para a análise dessa pesquisa, foram observadas as estratégias da operação de divisão, com base nas categorias dos acertos e erros dos algoritmos postos pelos alunos. A investigadora verificou que os alunos empregaram diversas estratégias, sendo o algoritmo da divisão a mais utilizada, mas eles não se restringiram ao uso da divisão, vista como a mais eficiente para a situação proposta. Nos resultados, foi constatado que a utilização do algoritmo da divisão como solução predominante correta não caracterizou a mobilização dos esquemas intelectuais dos alunos de modo a sinalizar enfrentamento de desafio, antecipação dos conhecimentos implícitos para o estabelecimento de relações e especificidades do campo multiplicativo e, em consequência, para a construção de novos conceitos.

Já a pesquisa de Vasconcelos (2009) tem como tema a formação continuada de professores polivalentes quanto à (re)construção dos conceitos de divisão — ideias de partição e quotição — por meio de jogos. O referencial teórico utilizado foi o campo multiplicativo, categoria da teoria do campo conceitual de Gérard Vergnaud. Quanto à metodologia, a pesquisa apresentou uma proposta de intervenção, no que se refere ao domínio dos conteúdos matemáticos, durante a participação das professoras no Laboratório de Aprendizagem de Matemática (LAP) oferecido para docentes da rede estadual de ensino do estado de Alagoas. A investigadora revelou que uma das dificuldades dos alunos para aprender Matemática está atrelada às deficiências de compreensão da especificidade da disciplina por parte do professor, o que acarreta o não entendimento dos conceitos essenciais dessa disciplina nos anos iniciais, e ainda ao fato de professores e alunos não entenderem a diferença entre a ação de distribuir e de correspondência um- para- muitos do conteúdo da divisão.

Cunha (2007) analisou as concepções de alunos de 5ª e 7ª séries (atuais 6º e 8º anos do EF) acerca da multiplicação e da divisão. Participaram 32 alunos, na faixa etária de 11 a 14 anos, de uma escola da rede particular, sendo 16 do 6º ano e 16 do 8º ano, os quais foram escolhidos aleatoriamente. Como instrumentos, foram aplicadas atividade diagnóstica, atividades sequenciadas em duplas e teste final para fim comparativo com o instrumento anterior, bem como entrevista individual, gravada, para investigar se os alunos superaram a concepção equivocada de que “multiplicação sempre aumenta” e “divisão sempre diminui”.

O primeiro teste foi baseado em tarefa desenvolvida por Hoyles, Noss e Sutherland, que poderia ser resolvida tanto por adições repetidas como por multiplicação. Os alunos realizaram-na sem dificuldades, mas, na segunda parte, com a introdução de um multiplicador decimal menor que 1, de início tiveram dificuldades para escolher a operação que solucionaria o problema. O objetivo era verificar se estabeleciam relações possíveis entre a multiplicação e a divisão. A investigadora percebeu que, no contexto escolar, a ênfase é dada a domínio dos números inteiros e os alunos usam as concepções aprendidas neste campo de conjunto para os domínios dos números racionais, o que leva à construção de conceitos equivocados. Em seu estudo, foram confirmadas as falhas oriundas da introdução dos conteúdos de multiplicação e divisão de números inteiros no âmbito escolar, em que os alunos, de forma implícita e explícita, revelaram a concepção que aprenderam na escola, que a multiplicação dar-se por meio de adições repetidas e a divisão pela ação de distribuir. Para Cunha (2007), seu propósito de superar as concepções equivocadas dos alunos não foi alcançado, pelo fato deles vivenciarem durante toda a vida escolar um único conceito para todos os conjuntos numéricos, provocando, com isso, aos equívocos conceituais.

Saiz (2001), em seu artigo "Dividir com dificuldade ou a dificuldade de dividir", apresentou as dificuldades que alunos dos anos iniciais do EF enfrentaram diante de situações que envolviam o conteúdo de divisão. Foram apresentados aos alunos de 5ª e 6ª séries (atuais 6º e 7º anos) cinco problemas, selecionados por serem habituais no final dos anos iniciais do EF. A investigadora analisou as dificuldades e os procedimentos inadequados de alunos, ressaltando que é um meio que auxilia o professor na interpretação dos resultados encontrados em sala de aula, redirecionando-o para o registro de novas soluções, do ponto de vista conceitual, coerentes com o enunciado.

Com base nas ideias de Roland Charnay *(*apud SAIZ, 2001), uma das dificuldades do aluno para aprender divisão está centrada na ideia da ausência de significado e no sentido da divisão trabalhada no âmbito escolar. Um dos problemas de aprender conceitos matemáticos, segundo Saiz (2001), é que os alunos não atribuem significado ao algoritmo que aplicam, por isso não interpretam as suas soluções em conformidade com o enunciado do problema. Isto ocorre pelo fato de o algoritmo ensinado na escola amparar-se no trabalho com os números, independentemente dos dados da situação. A pesquisa da autora revelou que compreender é muito mais que repetir técnica, uma vez que, aprendido o algoritmo, isolado do contexto, aprende-se apenas a "resolver problemas, porém se desconhece de que problema se trata" (SAIZ, 2001, p. 162). Isto é, o ensino pauta-se apenas na memorização de regras, em detrimento das relações que o conteúdo estabelece com os conhecimentos implícitos e explícitos do aluno que tenta solucionar o problema.

Zunino (1995) trouxe a discussão acerca das "Estratégias de resolução de problemas". Observou que a não compreensão dos procedimentos das operações realizadas pelos alunos, em geral, não estava relacionada com dificuldades para compreender as operações em si mesmas, uma vez que a maioria deles sabe quando se deve somar, subtrair, multiplicar ou dividir. Para a autora, essa incompreensão detém raiz na desvinculação entre os procedimentos e a natureza posicional do nosso sistema de numeração. Além disso, enfatiza que a utilização de problemas-padrão pode levar alguns alunos a centrar-se nas palavras-chave do enunciado, o que dificulta o entendimento do conceito e a explicitação de respostas coerentes com o enunciado. A autora sugere aos professores a inserção de diversas situações-problema durante as aulas de Matemática, considerando as ideias e as diversas abordagens, desde que se dê espaço ao aluno para partir do que sabe e, em consequência, amplie o seu repertório de conceitos, o que contribui para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Dadas as dificuldades e a complexidade em ensinar e aprender Matemática, e levando em consideração que há muito tempo a disciplina vem sendo vista como uma das mais difíceis de aprender. Onuchic (1999, p. 199), por sua vez, destaca a importância do trabalho com resolução de problemas, que revela que essa proposta de trabalho tem "ocupado um lugar central no currículo de Matemática escolar desde a antiguidade". Nesse sentido, optamos por investigar os conceitos de divisão[2] nas ideias de partição e quotição.

Vale salientar que a relevância desta pesquisa está no fato de ser o primeiro estudo, no estado de Alagoas e no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM), a tratar conceitos via análise das estratégias de resolução de problemas de divisão dos alunos dos anos iniciais, buscando destacar as relações e especificidades que há no campo multiplicativo e como os participantes da pesquisa apresentam as ideias da divisão e quais conteúdos matemáticos sinalizam conhecer, de modo explícito e implícito.

1.2.1 Por que estudar divisão por meio de resolução de problemas?

A opção por estudar divisão surgiu mediante o contato com a teoria de Gerard Vergnaud (2009), que a compreende como inversão da multiplicação, destacando a importância de perceber relações, de vivenciar diferentes situações as quais direcionam para a construção de conceitos. Desse modo, decidimos estudar divisão na perspectiva de resolução de problemas. Esta proposta de trabalho, segundo Pozo (1988), propicia aos alunos a resolverem uma situação para a qual não se dispõe de um caminho rápido para encontrar a solução, obtida conforme o seu nível de conceitualização, que requer compreensão do assunto.

[2] Para Selva e Borba (2010) os problemas de divisão são de dois tipos: partição e quotição. Problemas de partição são aqueles em que é dado um conjunto maior e o número de partes em que deve ser distribuído; o resultado é o valor de cada parte. Problemas de quotição consistem em problemas em que é dado o valor do conjunto maior e o valor das quotas em que se deseja dividi-lo; o resultado consiste no número de partes obtidas.

De acordo com Onuchic (1999), a metodologia de resolução de problemas permite que o aluno tanto aprenda Matemática resolvendo problemas como para resolver problemas. Isto significa entender a relação da Matemática com o contexto sociocultural, em que se destaca a contextualidade, o significado, bem como a ação de resolver problemas como sendo parte da natureza humana.

Nessa direção, problematizar situações possibilita a mobilização de conhecimentos implícitos, tratados na teoria de Vergnaud, da qual optamos estudar a categoria do campo multiplicativo. Para Franchi (2009), este é um campo conceitual que abrange conceitos de multiplicação, divisão, fração, razão, proporção, função linear, número racional, similaridade, espaço vetorial, entre outros. Nesta pesquisa, optamos por estudar os conceitos de divisão devido a sua complexidade, tendo em vista que possui um nível maior de abstração do que o campo aditivo, como enfatiza Cunha (1997).

Conforme Pais (2008), os estudos desse campo teórico apresentam um olhar diferenciado para as soluções dos alunos, para a formação dos professores e, ainda, para a didática de ensino de Matemática, por focalizar o gerenciamento do ensino, a oportunidade de vivenciar diversas situações, bem como para a compreensão das diferentes estratégias e a inclusão de possíveis mediações do professor.

O estudo acerca de resolução de problemas e do campo multiplicativo apresenta uma proposta de ensino de Matemática na perspectiva de construir, e não de repetir, enfatizando a importância da interpretação e elaboração de enunciados, a contextualização de situações-problema e do trabalho por meio de uma diversidade de abordagens de conceitos e situações.

Nesse sentido, reafirmamos o interesse pelo estudo da divisão por meio de resolução de problemas. Conforme Anghileri et al. (apud CUNHA, 1997), foi levando em consideração o fraco desempenho dos alunos em problemas de divisão, devido à limitação no estudo do campo multiplicativo, que se enfatizou o campo dos números naturais ou inteiros positivos, direcionando para a aprendizagem de concepções equivocadas de que a “multiplicação sempre aumenta” e a “divisão sempre diminui”, assim como ensinar a multiplicação por meio da continuidade de raciocínio (uso do campo aditivo), isto é, da adição repetida ou da subtração sucessiva, para resolução de problemas que envolvem o campo multiplicativo.

Para Cunha (1997), a utilização do raciocínio do campo aditivo em situações-problema do campo multiplicativo fortalece as continuidades do que já foi aprendido, impedindo que os alunos avancem em termos conceituais. Além disso, na escola existem

> falhas em se introduzir a divisão como um modo eficiente de solucionar problemas de distribuição. Por exemplo, suponhamos que se tenham 30 balas para serem distribuídas em 6 pacotes, então temos 30 balas/6 pacotes. Note que o quociente de uma quantidade com o referente balas e uma quantidade com o referente pacotes gera uma quantidade cujo referente não é nem balas e nem pacotes. No caso é balas/pacote. (SCHWARTZ, apud CUNHA, 1997, p. 12-3)

Tendo em vista que a divisão é um conteúdo da categoria do campo multiplicativo, as pesquisas de educadores matemáticos, como Starepravo (1997), Cunha (1997), Carvalho (2007, 2010) e Vergnaud (2009), destacam o papel da relação entre multiplicação e divisão no ensino da Matemática. Esses estudiosos refletem sobre a importância de aprender conceitos para a compreensão do conteúdo matemático e, ainda, sobre a possibilidade de direcionar os alunos em tomadas de decisão por meio da explicitação de suas resoluções.

Buscando desenvolver um estudo acerca da compreensão de conceitos, defendemos que o ensino de Matemática seja desenvolvido via problema e não exercício, evitando uma ação do aluno amparada no conhecimento social, no empírico e na resolução da conta pela conta. Nessa direção, Starepravo (1997, p. 66) enfatiza que "contas isoladas, principalmente quando devem ser resolvidas de acordo com um modelo previamente estabelecido, não ajudam no desenvolvimento do raciocínio, pois não exigem dos alunos o estabelecimento de relações. Passam a ser uma atividade mecanizada".

Estabelecer relações contribui para a aprendizagem de conceitos, uma vez que considera o contexto do enunciado, assim como as ideias de número e dos algoritmos, conhecimentos essenciais para o ensino da Matemática nos anos iniciais do EF. Além disso, como afirmam Nunes e Bryant (1997), a compreensão do senso numérico é importante porque possibilita a eliminação de respostas absurdas, já que o pensamento lógico dos alunos precisa ser trabalhado para ampliar seu repertório de saberes, contribuindo assim para a sua progressão conceitual.

Portanto, possibilitar aos alunos a explicitação de seus saberes não apenas beneficia o desenvolvimento de seu pensamento, como também contribui para o professor refletir acerca de sua prática docente.

1.3 A contribuição da pesquisa aos professores polivalentes

A prática, nas aulas de Matemática, revela a necessidade de o professor compreender os conceitos matemáticos, bem como apoiar-se em um referencial teórico que lhe dê sustentação em seu fazer pedagógico. Conforme Guimarães e Costa (2009), a prática de uso de listas de problema, denominado de exercício, como modelo a ser ensinado é uma forma de trabalho que não habilita os alunos a aprender a resolver problemas.

Compreender os procedimentos postos pelos alunos durante as atividades escolares possibilitam aos professores mediações que levam os alunos a progredirem em seus conceitos matemáticos, além de adotarem uma postura profissional pautada na investigação, característica essencial do trabalho com resolução de problemas.

Vale ressaltar que a maioria dos professores dos anos iniciais, via de regra, ou tem a formação no Curso Normal (antigo Magistério) ou no curso de Pedagogia. Em sua maioria, optaram por essa formação inicial por não gostarem de Matemática. Assim, com formação inicial no antigo Magistério ou em licenciatura em Pedagogia, tais profissionais não possuem formação específica em qualquer uma das áreas que compõem o currículo do EF. Conforme salientado por Curi (2010), tais cursos não tratam da especificidade da linguagem matemática, ficando evidente uma carência no suporte para um trabalho pautado na compreensão de conceitos, pois o referencial dos futuros professores serão os estudos de sua educação básica.

Essa perspectiva de formação inicial para os professores polivalentes provoca um distanciamento entre o domínio da linguagem matemática e o tratamento didático-pedagógico no seu trabalho, impossibilitando discussões sobre como, o que e por que ensinar Matemática nos anos iniciais do EF.

Em conformidade com a visão de Guimarães e Vasconcelos (2010), é comum encontrar professores sem direcionamento para tratar as dúvidas dos alunos no momento de empregar uma operação na resolução de problemas, demonstradas principalmente quando se ouve a pergunta típica: de que é a conta? Essa situação apresenta indícios de um ensino alicerçado na linearização do conteúdo matemático, assim como na ênfase do procedimento único, pronto e acabado, que não auxilia na compreensão do problema e, em consequência, do senso numérico da solução. Guimarães e Santos (2009, p. 3), por sua vez, afirmam que, quando essa pergunta é respondida pelo professor, "retira do aluno a oportunidade de, efetivamente, resolver o problema, deixando para o estudante apenas a tarefa de executar a conta".

Nesse sentido, Polya (2006) destaca a importância do professor na mediação da aprendizagem dos alunos:

> Um professor de Matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar o objetivo. (POLYA, 2006, p. v)

Diante disso, Smole e Diniz (2001) destacam o papel das estratégias de resolução para a compreensão do pensamento matemático dos alunos, assim como das relações entre os conteúdos já aprendidos, os dados numéricos e as situações do enunciado. Com isso, Guimarães e Santos (2009) afirmam que, quanto maior a quantidade de estratégias os alunos dominarem, maiores as chances de resolverem as situações-problema, uma vez que melhor se adequarão a cada uma das situações enfrentadas.

1.4 Do problema aos objetivos

Tendo como problema "quais as estratégias de resolução de problemas de divisão quotitiva e partitiva utilizadas por alunos do 4º ano do Ensino Fundamental (EF) de escolas públicas maceioenses?", esta pesquisa objetivou analisar as estratégias de alunos do 4º ano, buscando compreender o entendimento dos referidos conceitos e da regularidade no nosso sistema de numeração decimal. Diante disso, esforçamos para: a) verificar se os alunos reconhecem a divisão como operação indicada para a resolução de problemas; b) identificar quais estratégias de solução predominaram na resolução de problemas de divisão que envolveram as ideias de partição e quotição; c) investigar se as soluções apresentaram procedimentos coerentes com o enunciado do problema; d) refletir acerca das antecipações que foram explicitadas pelos alunos e se seus conhecimentos matemáticos demonstraram relações, significados e especificidades do campo multiplicativo. Para tanto, fizemos uma análise das justificativas dadas pelos alunos nos problemas utilizados como instrumento da pesquisa.

1.5 Procedimentos metodológicos

Realizamos uma pesquisa qualitativa, na modalidade estudo de caso, que tem por premissa investigar uma unidade específica de forma profunda e completa e que possui dinâmica própria, por sua contextualidade, como ressaltam Fiorentini e Lorenzato (2009).

Para Chizzotti (2006), a pesquisa qualitativa caracteriza-se por produzir dados descritivos passíveis de análises interpretativas, permitindo verificar significados intrínsecos ao fenômeno estudado. Esse autor destaca que a interpretação das pesquisas qualitativas não é fruto de dados isolados; por sermos parte da pesquisa e estarmos no e para o mundo, atribuímos aos dados coletados um significado. Tal ideia sugere que o "objeto não é um dado inerte e neutro; está possuído de significados e relações que sujeitos concretos criam em suas ações" (ibid., p. 79).

Para Bogdan e Biklen (1994), a principal característica da pesquisa qualitativa é investigar um ambiente natural e ao pesquisador, cabe interpretar os dados. Nessa perspectiva, os autores apresentam cinco especificidades básicas que identificam esse tipo de estudo: 1) é uma pesquisa também denominada de naturalista; 2) há descrição dos dados coletados; 3) a preocupação é com o processo e não apenas com o produto; 4) o pesquisador analisa as interpretações dadas pelos sujeitos da pesquisa; 5) a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo. Desse modo, analisaremos as estratégias de divisão por meio do campo multiplicativo e da resolução de problemas.

Na visão de Godoy (2006) e André (2007), as estratégias de divisão dos alunos do 4º ano do EF dos anos iniciais assume um caráter interpretativo. Com isso, buscamos enfatizar procedimentos que conferem mais qualidade a essa modalidade de pesquisa. Para este autor, a pesquisa qualitativa difere das demais pelo fato de não ser as técnicas que definem o tipo de estudo, e sim o conhecimento que dele advém. Ainda, para o autor, o estudo de caso é diferente de outras pesquisas no que diz respeito ao conhecimento gerado, pois ele é mais concreto, contextualizado e voltado para a interpretação do leitor.

Assim, neste estudo, interpretaremos as soluções frequentes, com o objetivo de compreender as estratégias de resolução de problemas de divisão de alunos do 4º ano do EF de escolas públicas maceioenses.

1.5.1 Procedimentos de coleta de dados

Cenário da pesquisa

Este estudo foi realizado em três escolas[3] públicas[4] localizadas na região sul, nas

---

[3] Por questão ética não informaremos os nomes das escolas. Optamos por preservar o sigilo das instituições investigadas.

[4] Optamos, por se tratar de escola da rede pública, por entender que a universidade tem como principal missão prestar serviços ao público dessas instituições de ensino.

proximidades da lagoa Mundaú, da cidade de Maceió. Duas escolas pertencem à rede municipal e a outra à rede estadual. Na escola A, contamos com a participação de uma classe do 4º ano; na escola B, duas professoras aceitaram aplicar a atividade de pesquisa em suas turmas por trabalharem em parceria. Na escola C tivemos a participação de uma sala de aula. Para tanto, foi solicitada autorização às coordenações das escolas, para que uma turma da etapa de escolaridade supracitada participasse da pesquisa; porém, na escola B, as professoras do turno vespertino decidiram colaborar com a pesquisa.

Vale ressaltar que, do universo de escolas públicas localizadas na região mencionada da cidade de Maceió, quatro oferecem o ensino dos anos iniciais. No período de contato entre esta pesquisadora, a gestora escolar, a coordenadora e as professoras do 4º ano do EF das escolas da região, entre os meses de julho e agosto de 2010, uma instituição encontrava-se impossibilitada de participar da pesquisa devido às enchentes ocorridas no período, servindo como abrigo aos desalojados da comunidade do Trapiche e bairros circunvizinhos. As escolas investigadas, embora situadas em bairros diferentes, estão próximas umas das outras.

As três escolas foram selecionadas para esta investigação devido à "conveniência, ao acesso aos dados e à proximidade geográfica", conforme propõe Yin (2005, p. 104). Na escolha das escolas, utilizamos os seguintes critérios: pertencer à rede pública de ensino; ser de fácil acesso às pesquisadoras; ofertar turmas de alunos regulares e/ou fora da faixa etária de escolaridade nos turnos matutino e/ou vespertino; possuir mais de uma turma de 4º ano do EF; e ter professores efetivos nas turmas investigadas. Corresponderam a esses critérios as três escolas já mencionadas. Convém salientar que, para manter o sigilo acerca da identidade dos *loci* investigados, neste trabalho aparecem denominadas de escola A, escola B e escola C; na escola B, duas turmas de 4º ano responderam ao questionário proposto.

Os sujeitos

Participaram desta investigação 105 alunos, na faixa etária[5] de 8 a 14 anos, das três escolas que participaram da pesquisa. Eles residem, em sua maioria, nas proximidades da instituição. Todas as crianças eram do 4º ano do EF da rede pública de ensino, havendo predominância do sexo masculino nas escolas B e C, conforme mostra o quadro a seguir:

[5] Informamos que na lista de frequência das turmas participantes tivemos alunos de 8 a 14 anos. Entre os alunos que resolveram a atividade final, a faixa etária foi de 8 a 13 anos.

Quadro 1 – Participantes da investigação quanto à solução do instrumento utilizado na pesquisa

Escolas	Nº de participantes	Sexo feminino	%	Sexo masculino	%
A	25	14	56	11	44
B1	17	4	25,53	13	74,47
B2	27	13	48,15	14	51,85
C	36	15	41,67	21	58,33
Total	105	47	44,76	58	55,24

Fonte: Escolas participantes da pesquisa.

Nesta pesquisa os alunos não tiveram contato com a pesquisadora, para que esta não interferisse em suas estratégias, evitando apresentar em seus registros sua concepção na resolução da atividade. Ludke e André (1986, p. 27) explicitam tal escolha, enfatizando que é preciso evitar o envolvimento do pesquisador com os sujeitos da pesquisa, em nosso caso, os alunos, "para que não se obtenha uma visão distorcida do fenômeno ou de uma representação da realidade". As professoras[6] inteiraram-se dos objetivos e dos procedimentos da investigação (Anexo A), e quatro delas aceitaram aplicar a atividade a suas turmas.

Para facilitar a análise dos dados, nomeamos os alunos participantes das três escolas do seguinte modo:

Quadro 2 – Denominação dos sujeitos por escola e turma

Escolas	Sujeitos
A	Sa1 a Sa25
B	$Sb_1$1 a $Sb_1$17
	$Sb_2$1 a $Sb_2$27
C	Sc1 a Sc36

Fonte: Escolas participantes da pesquisa.

[6] As professoras regentes das turmas investigadas aplicaram a atividade final, instrumento principal para esta pesquisa.

Sabendo que as nossas escolas, em geral, valorizam o registro escrito, em detrimento do oral, e tal prática não é diferente no ensino de Matemática. Sendo assim, optamos, nesta investigação, por analisar somente materiais escritos.

Instrumentos da pesquisa

Os instrumentos utilizados para a coleta de dados foram:

a) Atividade piloto

As atividades piloto 1 (Apêndice A) e 2 (Apêndice B), aplicadas a uma turma de 4º ano, envolvendo multiplicação e divisão, foram utilizadas com o objetivo de mapear o perfil da turma no que se refere ao seu conhecimento sobre o campo multiplicativo e direcionar para a elaboração da atividade de análise da pesquisa. Essa atividade foi composta por dez problemas numéricos e não numéricos, envolvendo conceitos de multiplicação e divisão, destacando especificamente, a divisão do tipo exata (mais bem denominada como resto zero, conforme a divisão euclidiana) e não exata. Devido ao volume de dados, optamos por não analisar as atividades piloto aplicadas aleatoriamente a uma única turma do 4º ano de uma escola pública também participante desta pesquisa, pois, além do excesso de informações, isso não alteraria o resultado da análise da atividade, que tratou a divisão por meio da resolução de problemas.

b) Atividade sobre resolução de problemas de divisão quotitiva e partitiva

O instrumento de coleta de dados consistiu em uma atividade (Apêndice C) envolvendo quatro problemas, sendo três de divisão por quota e um de partição. Optamos pela predominância de problemas de divisão quotitiva na atividade da pesquisa porque, conforme os estudos de Cunha (1997) e Benvenutti (2008), esse conceito é pouco desenvolvido nos anos iniciais de escolarização e os professores e alunos demonstram dificuldades em diferenciar ideias de partição e quotição. Todos os problemas trataram de quantidades discretas[7], com a divisão de resto zero.

Como já observamos, os problemas foram organizados considerando duas grandes categorias: divisão quotitiva e divisão partitiva.

---

[7] Refere-se a elementos contáveis.

Quadro 3 – Problemas[8] aplicados às turmas do 4º ano do Ensino Fundamental

Problema	Conceito	Enunciado
1	Quotição	Problema 1 – Maria fez 30 brigadeiros e irá colocar 5 em cada saquinho. De quantos saquinhos ela irá precisar? Explique como você chegou à resposta.
2	Partição	Problema 2 – Se repartirmos 24 pães para 6 crianças, quantos pães receberá cada uma? Explique como você chegou à resposta.
3	Quotição	Problema 3 – Quantas cédulas de 5 reais há em 50 reais? Explique como você chegou à resposta.
4	Quotição	Problema 4 – Carlos vai fazer aniversário. Cada amigo que vier a sua festa vai ganhar 3 balões. Ele comprou 18 balões. Quantos amigos ele pode convidar? Explique como você chegou à resposta.

Fonte: Problemas extraídos e adaptados dos livros de Carvalho (2010), Nunes *et al* (2002) e Zunino (1995.

Selecionamos os problemas do tipo convencional[9] na perspectiva de os alunos se sentirem familiarizados com o enunciado, que estão comumente presentes nos livros didáticos (LD) dos anos iniciais do EF. Objetivamos, como análise da compreensão de divisão discutir especificamente as ideias de partição e quotição, que é o objeto do presente estudo.

Seguem as descrições e os critérios de escolha dos problemas propostos às turmas investigadas.

Quadro 4 – Problema de divisão por quota aplicado às turmas do 4º ano do Ensino Fundamental

Problema 1 – Maria fez 30 brigadeiros e irá colocar 5 em cada saquinhos. De quantos saquinhos ela irá precisar? Explique como você chegou à resposta.

Fonte: Problema adaptado extraído de Carvalho (2010, p. 82).

O problema 1 trata de divisão quotitiva, porque envolve situação que trabalha o conceito de quota, ação de medida. Para a solução, é necessária a descoberta da quantidade de

8 Problemas adaptados ou extraídos dos livros de NUNES, Terezinha et al. *Introdução à educação Matemática*: os números e as operações numéricas. São Paulo: Proem, 2002; e CARVALHO, Mercedes. *Números*: conceitos e atividades para Educação Infantil e Ensino Fundamental I. Petrópolis, RJ: Vozes, 2010.

9 Carvalho (2007) também chama de problema convencional aquele do tipo padrão, exercício de arme e efetue e problema tradicional, caracterizado por se desenvolver um único procedimento de resolução.

grupos a serem formados, isto é, as quotas. É conhecido como problema inverso, pois há ausência de um dos fatores e a relação fixa é conhecida (5 brigadeiros). Além disso, envolve procedimento de correspondência de um- para- muitos.

Este problema foi escolhido por envolver dados numéricos, com quantidades discretas, por apresentar enunciados semelhantes aos que existem nos LD dos anos iniciais do EF, denominados de problemas convencionais, e por envolver a divisão com resto zero.

Para a solução desse problema, o aluno teria de identificar o todo e perceber que há um dos fatores para que possa estabelecer as relações entre os termos da divisão e os dados numéricos do enunciado e encontrar a solução. No enunciado, os dados numéricos do problema correspondem a dividir dois algarismos (dezenas), representando o dividendo por um algarismo (unidade), caracterizando o divisor. Fica implícito no enunciado que 1 (um) saquinho tem 5 (cinco) brigadeiros. Esse tipo de problema apresenta uma quantidade inicial (30 brigadeiros) que deve ser dividida em quotas preestabelecidas — número de elementos de cada quota (5 brigadeiros), objetivando encontrar o número de quotas; — número de partes (6 saquinhos). O resultado (quociente) relaciona brigadeiros e saquinhos, grandezas denominadas discretas e conhecidas também como referentes[10] do problema.

Quadro 5 – Problema de divisão partitiva aplicado às turmas do 4º ano do Ensino Fundamental

Problema 2 – Se repartirmos 24 pães para 6 crianças, quantos pães receberá cada uma? Explique como você chegou à resposta.

Fonte: Problema adaptado extraído de Zunino (1995, p. 78).

O problema 2 trata de divisão partitiva, porque trabalha o raciocínio “partitivo” ou “distribuição equitativa”, que significa repartir em partes iguais. Camejo (2009) registra que na divisão partitiva, comumente, os enunciados apresentam uma estrutura em que é dado um todo e a quantidade de partes em que este deve ser distribuído, e o resultado é o valor de cada parte.

Esse problema foi escolhido em virtude da ideia que é trabalhada com frequência nos LD e na sala de aula e por ser utilizado fora do ambiente escolar, por meio de ações como repartir e distribuir. Selecionamos o conceito partitivo porque há indícios de que os alunos, muitas vezes, fazem a partilha dos objetos por meio da divisão social, a qual, por sua vez, é diferente da divisão matemática.

[10] Referentes são entendidos como os objetos ou sujeitos que acompanham os dados numéricos.

Esse problema de divisão partitiva envolve números naturais ou inteiros positivos, e obter a solução requer do aluno a ação de distribuir em partes iguais. A divisão tem resto zero e apresenta duas variáveis (pães e crianças), também denominadas de quantidades discretas. Nesse enunciado, pretendemos conhecer a relação fixa entre essas duas variáveis — quantidade de pães por criança —, conhecidas como referentes do problema.

As expressões “repartir” e “cada uma”, presentes no problema partitivo, são familiares aos alunos, levando-os a aplicar a distribuição equitativa, isto é, dividir o todo (24 pães) em partes iguais pelo número de crianças (6 crianças). O resultado (o quociente) relaciona as grandezas pães e crianças.

Quadro 6 – Problema de divisão por quota (utilização do sistema monetário) aplicado às turmas participantes

Problema 3 – Quantas cédulas de 5 reais há em 50 reais? Explique como você chegou à resposta.

Fonte: Problema adaptado extraído de Zunino (1995, p. 78).

O problema 3 trata de divisão quotitiva, que trabalha o raciocínio de medida e se caracteriza como inversa da multiplicação. Embora se refira a quantidades — quantas notas de 5 reais cabem em 50 reais —, tal característica pode confundir o aluno por causa dos cifrões no nosso sistema monetário, os reais, que não são contáveis e diferem da ideia de quantidade de notas.

Esse problema foi adaptado por se tratar de uma situação que envolve o sistema monetário usual, o real. Essa inserção ocorreu por se tratar da moeda vigente, o real, e, sobretudo, na tentativa de trazer à tona a Matemática do cotidiano para a sala de aula, na perspectiva de “facilitar” a representação do aluno para a sistematização do seu saber, seja ele espontâneo ou aceito no âmbito escolar, e mostrar que a divisão está presente nas diferentes situações não escolares.

O problema foi selecionado com o objetivo de averiguar se os alunos identificavam-no como sendo de quota e se estabeleciam relações entre os termos da divisão pelo fato de tratar do uso de dinheiro, que é uma situação do cotidiano. O problema apresenta números naturais ou inteiros positivos, cujo resultado tem resto igual a zero. O enunciado envolve uma situação que deve ser solucionada por meio do campo multiplicativo, ou utilizando-se esquema de correspondência de um- para- muitos ou do de distribuição. Não são adequados nesse campo os procedimentos de subtração reiterada ou de adição repetida, por pertencer ao raciocínio do campo aditivo.

O problema, de início, apresenta as partes para chegar ao todo, enfatizando o modelo de divisão quotitiva, que nas pesquisas de Cunha (1997, p. 14) parece “associado com problemas nos quais se deseja encontrar quantas vezes uma dada quantidade está contida em uma outra”. No enunciado foi apresentada a quantia maior (50 reais) e uma quantia menor, representando um dos fatores (5 reais), sendo esta a relação fixa da situação.

Quadro 7 – Problema de divisão por quota por meio de quantidades discretas aplicado às turmas participantes

Problema 4 – Carlos vai fazer aniversário. Cada amigo que vier a sua festa vai ganhar 3 balões. Ele comprou 18 balões. Quantos amigos ele pode convidar? Explique como você chegou à resposta.

Fonte: Problema adaptado extraído de Nunes et al. (2002, p. 89).

Esse é um problema de divisão quotitiva porque trabalha a correspondência um- para-muitos, envolvendo o conceito de quota, e constitui problema inverso da multiplicação.

Ele envolve também situações numéricas e, para a solução, o aluno deve conhecer os fatos fundamentais presentes no enunciado: uma medida (quociente), que são 3 balões para cada aluno, correspondente à relação fixa da situação; o dividendo, cujo algarismo é 18; ele deve encontrar o divisor, que se refere ao número de elementos.

O objetivo desse problema foi verificar, além das relações que os alunos foram capazes de explicitar, se fazem uso da divisão matemática, e não da divisão social. O critério de escolha foi o fato de envolver o conceito de quota, pouco usual nos LD e nas salas de aulas, objetivando que o aluno identifique os termos da divisão e estabeleça as relações entre eles, solucionando-o via campo multiplicativo, e não aditivo.

O aluno poderia resolver esse problema por meio da representação $3 \cdot x = 18$. Tal solução aproxima a multiplicação da quotição, por isso Nunes et al., denominam esta última de problema inverso. Além disso, o referido problema envolve quantidades discretas, em que há o todo (18 balões) e a relação fixa, um dos fatores (3 balões); envolve a mesma grandeza (balões) e deve ser resolvido por meio da divisão, e não da adição repetida.

c) Outros materiais

Para melhor fundamentar a pesquisa, recolhemos alguns cadernos dos alunos das turmas participantes, com o objetivo de compreender a prática cotidiana do ensino da

Matemática desenvolvida na sala de aula, já que as pesquisas constatam que no ensino dessa disciplina nos anos iniciais do EF ocorrem muitos equívocos conceituais, devido à limitação em estudar os números naturais ou inteiros positivos e à forma linear de tratar os conteúdos da Aritmética.

Foi solicitado as professoras regentes das salas de aula autorização para fotocopiar alguns cadernos de Matemática dos alunos. No mês de dezembro de 2010, fotocopiamos alguns cadernos das turmas da escola B; em fevereiro de 2011, após aplicarmos a atividade final, não fotocopiamos cadernos das turmas das escolas A e C, pois ainda não tinha sido feito o estudo do referido conteúdo na sala de aula. Diante do exposto, optamos por não utilizar os cadernos dos alunos para fins comparativos com a atividade de resolução de problemas de divisão aplicada em todas as turmas.

1.5.2 Procedimentos de Análise

Tendo em vista que esta pesquisa investigou as estratégias de resolução de divisão, voltada para o cálculo numérico, no âmbito dos números inteiros positivos, decidimos fazer uso da análise de conteúdo em nossos instrumentos coletados nas salas de aula investigadas. A análise de conteúdo, segundo Rizzini, Castro e Sartor (1991, apud FIORENTINI; LORENZATO, 2009, p. 137), é uma técnica de investigação de cunho interpretativo, cuja função primordial é "descobrir o que está por trás de uma mensagem, de uma comunicação, de uma fala, de um texto, de uma prática".

Buscamos, nesta pesquisa, compreender as estratégias dos alunos, em conformidade com o aporte teórico acerca de resolução de problemas da divisão, ante o entendimento das diferenças existentes na ação de partilhar e medir.

Para a análise dos dados, classificamos as estratégias que usaram "em categorias de menor amplitude e, em seguida, sem nos afastar dos significados e dos sentidos atribuídos pelos sujeitos da pesquisa, criamos marcos interpretativos mais amplos para reagrupá-los" (FRANCO, 2008, p. 63), na segunda etapa de análise.

As categorias dos problemas foram definidas *a posteriori*, realizando-se cruzamento dos dados das soluções obtidas pelos alunos na atividade — já que a modalidade de estudo de caso requer interpretação e compreensão de um fenômeno. A orientação deu-se por meio da unidade de registro apontada por Franco (2008, p. 41), em que se buscam "características definidoras específicas" dos dados, evocando assim as soluções recorrentes.

Desse modo, para a análise das estratégias envolvendo o campo da Aritmética, precisamente o campo multiplicativo, referenciamos o conceito de contagem, agrupamento, valor posicional, as operações elementares, enfim, conteúdos que os alunos demonstraram conhecer em suas resoluções. As informações foram analisadas, considerando a maneira como as correções dos alunos são em geral realizadas em salas de aula e à forma de solução evidenciada na atividade deste estudo de caso.

Nas respostas ao problema da pesquisa acerca das estratégias de solução de divisão utilizadas pelos 105 alunos do 4º ano do EF, buscamos:

1) identificar quais estratégias foram utilizadas em cada problema, considerando turma por turma;

2) verificar se os alunos reconheceram os problemas como pertencentes ao campo multiplicativo e se, na resolução, utilizaram estratégias de conceitos da multiplicação e divisão, tratadas aqui como operações que se relacionam quanto ao raciocínio matemático, o qual, por sua vez, difere do campo aditivo, categoria que relaciona adição e subtração; e

3) observar aquelas estratégias que apresentaram organização no procedimento e coerência com o enunciado.

A atividade final aplicada foi composta por quatro problemas de divisão, sendo três de quotição e um de partição. Investigamos 105 soluções dos problemas de partição e 315 soluções dos problemas de quotição. Em seguida, analisamos como os conceitos de divisão foram desenvolvidos e qual tratamento foi dado pela professora em sala de aula.

As atividades aplicadas às turmas foram do tipo problema convencional, os denominados problemas numéricos, explorando situações que envolveram conceitos de divisão, considerando as ideias de partição e quotição. Vale ressaltar que, para a busca da resposta ao problema da pesquisa, realizamos os seguintes procedimentos:

1) levantamento de todas as estratégias de solução utilizadas pelos alunos;
2) levantamento quantitativo das estratégias quanto às subcategorias, classificadas em certo, errado e em branco;
3) levantamento quantitativo das estratégias corretas por problemas utilizado na pesquisa;
4) seleção das estratégias corretas quanto às diversas formas de solução por problema.

Na primeira etapa da análise dos dados enfocamos as atividades considerando as práticas de correção utilizadas pelas professoras, principalmente no ensino da Matemática, a fim de tabular as respostas dos sujeitos. Para tanto, classificamos as soluções em:

1) CERTO – o problema foi corretamente resolvido, utilizando a operação aritmética da divisão, por meio de representações pessoais (uso de bolas, traços ou outro desenho) ou pelo cálculo mental e seu registro;
2) ERRADO – o problema foi incorretamente resolvido, devido à operação, à relação inadequada dos termos ou ao resultado do cálculo ou, ainda, pelo uso de desenhos que não se aproximavam da situação contextual ou do enunciado ou nos quais a estratégia utilizada estava incoerente com o problema proposto**;**
3) EM BRANCO – quando os alunos ou não tentaram solucionar o problema ou apenas apresentaram a estrutura da operação aritmética.

A partir dessa tabulação, passamos para a segunda etapa da análise dos dados, elencando as questões corretas, para identificarmos as estratégias de resolução predominantes.

O critério de fazer uso de categorias de análise de conteúdo apenas para as questões corretas justifica-se pela diversidade de registros de solução, oriundas da predominância de procedimentos isolados e combinados que caracterizavam o nível de compreensão lógico-matemático do conteúdo pelo aluno.

Para a análise qualitativa, elegemos duas grandes categorias: estratégias de resolução de problemas e linguagem matemática para as situações de divisão partitiva e quotitiva. As principais estratégias utilizadas pelos alunos nos problemas de partição e quotição foram classificadas em sete subcategorias: 1) algoritmo da adição, 2) algoritmo da multiplicação, 3) algoritmo da divisão, 4) estratégia pessoal (repetição aditiva, repetição subtrativa, fazer uso de desenho ou uma simulação), 5) estratégias combinadas (algoritmo e ilustração ou algoritmo e língua materna), 6) linguagem natural e 7) ensaio e erro.

Para a análise dos dados das soluções dos alunos, entendemos:

1) **algoritmo da adição** como a solução que envolve conta e que o aluno utilizou em sua resposta ao enunciado, apresentado a operação da adição nas formas algorítmicas horizontal ou vertical;
2) **algoritmo da multiplicação** como a utilização da operação de multiplicação como resposta para o enunciado, podendo apresentar-se também na forma horizontal ou vertical. Enfim, técnica apresentada na maioria dos LD e presente no contexto escolar, no ensino desse conteúdo;
3) **algoritmo da divisão** quando houve o uso de uma técnica operatória denominada de ação mecânica, em que os alunos registram operações que envolvem cálculos da divisão na forma horizontal ou longa (uso de subtrações sucessivas), mas obedecendo à estrutura usual presente nos LD e ensinada na escola;

4) **estratégia pessoal** quando o aluno resolveu o problema por meio de ilustração ou desenho, apresentando em suas respostas o uso de contagem, o conceito de repetição aditiva nos problemas que tratavam do campo multiplicativo, repetição subtrativa, ou quando fez uso de desenho, esquema ou de uma simulação coerente com o enunciado;
5) **estratégias combinadas** (algoritmo e ilustração, ou algoritmo e língua materna) quando o aluno ao resolver o problema apresentou mais de um procedimento em sua solução, registrando ora qualquer operação da Aritmética junto com o desenho, ora uma das operações da Matemática elementar junto com a língua materna, justificando ou explicando como foi feito o procedimento da solução. Aqui, o desenho serviu como reforço para validar as soluções;
6) **linguagem natural** quando o aluno chegou à solução do problema apenas usando a escrita e explicou a simbologia da operação, ou apenas registrou o resultado ou ainda justificou como obteve à resposta;
7) **ensaio e erro** como um problema em que o aluno fez várias tentativas para encontrar a resposta, podendo ter chegado a uma solução coerente ou não com o enunciado. Nessas soluções, há indícios das várias tentativas de respostas por meio das marcas de soluções apagadas, consideradas incoerentes pelo aluno, retificando mediante sentido numérico o seu raciocínio.

1.5.3 Elaboração do produto

Por exigência dos mestrados profissionais, optamos, como produto desta dissertação, pela elaboração de um texto didático direcionado para o professor e os futuros professores dos anos iniciais, considerando a linguagem didática e os conceitos de divisão tratados neste trabalho, a fim de que percebam a importância de o aluno compreender a linguagem matemática, mediante atividades de questionar, comparar, estabelecer semelhanças e diferenças nas propostas.

Para a elaboração desse texto didático acerca dos conceitos da divisão por meio da resolução de problemas, tivemos como suporte a realização de um minicurso, de uma oficina e do estágio supervisionado realizado no segundo semestre de 2011, além desta pesquisa.

O minicurso foi desenvolvido no V Encontro Brasiliense de Educação Matemática (Ebrem)[11], em Brasília, no período de 23 a 25 de setembro de 2011, apresentando a temática:

[11] O Ebrem, promovido pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional DF, realiza-se a cada dois anos.

“Por que trabalhar com resolução de problemas no ensino da Matemática”, com carga horária de 2 horas. Destinado a professores que atuam do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental, teve o intuito de discutir estratégias de resolução de problemas de situações numéricas e não numéricas, bem como refletir acerca da resolução de problemas e qual tratamento que os professores participantes dão aos procedimentos usados pelos alunos.

Nesse minicurso, trabalhamos com problemas escritos e soluções escritas e orais, destacando as etapas definidas por George Polya para compreender o enunciado. Participaram deste trabalho 10 professores. Durante a discussão, pudemos observar que a maioria conhecia o trabalho com resolução de problemas e a importância de facultar ao aluno a arte de resolver problemas, de modo compatível com o seu nível de desempenho e de verificar a solução, numa perspectiva de não avaliar quantitativamente, mas de possibilitar ao aluno rever seus equívocos, compreendê-los e, em consequência, revisitá-los atribuindo significado ao seu fazer matemático.

Como complemento para a elaboração do artigo, desenvolvemos uma oficina, realizada em 18 de outubro de 2011 em Arapiraca, Alagoas, denominada de “A matemática por meio de jogos matemáticos”, com carga horária de três horas, realizada na Semana Nacional de Ciência e Tecnologia (SNCT)[12], no período de 17 a 21 de outubro de 2011. Nesse encontro, propusemos o trabalho com jogos, cujas soluções foram orais.

O objetivo da realização da oficina foi discutir outra forma de tratamento dado aos problemas de divisão, em que os professores assumiram o papel de solucionadores das situações-problema, respondendo por meio da oralidade. Assim, procuramos enfocar as ideias de partição e quotição em uma nova abordagem de ensino: os jogos. Participaram dessa oficina dezessete professores da rede pública municipal de Arapiraca. Foi estudada a Aritmética, por envolver conceitos de números e do nosso sistema de numeração. Além disso, discutimos valor absoluto, valor relativo, Sistema de numeração decimal (SND), agrupamento e as quatro operações, com destaque para a divisão. Os jogos que envolveram esse último conteúdo foram: jogo da velha, trilha e jogo dos múltiplos. Para a execução da atividade, os participantes escolhiam problemas e só marcavam ponto quando apresentavam a solução e explicavam como haviam chegado à resposta.

Na explicação das regras dos jogos e durante sua execução, percebemos que os professores resolviam os problemas da divisão com base na tabuada, no raciocínio aditivo,

[12] É um evento que acontece desde 2004, com o apoio do Ministério da Ciência e Tecnologia. Em 2011, com a parceria entre Universidade Federal de Alagoas e a Prefeitura Municipal de Arapiraca, foi realizada a 1ª Semana de Ciência e Tecnologia de Arapiraca.

usando cálculo mental ou com o auxílio dos dedos. Durante o jogo, verificamos as justificativas dadas as respostas, na maioria das vezes, sendo a operação de multiplicação. Nos problemas de divisão partitiva, uma das professoras chamou a atenção para o fato de que no enunciado havia a palavra-chave "repartir", e não "repartir por igual"; logo, em sua resolução, ela poderia dividir em partes diferentes o valor total apresentado no enunciado.

O estágio supervisionado de que participei no curso de Pedagogia da Ufal, na disciplina Saberes e Metodologia no Ensino da Matemática I, no segundo semestre de 2011, reforçou a ideia de elaborar um texto para professores e futuros professores na perspectiva de discutir que aprender Matemática está relacionado às oportunidades de vivenciar várias situações e formas de trabalho, mostrando que "prestar atenção no procedimento do ensino do cálculo não significa entender e muito menos compreender os conceitos da Aritmética".

Buscamos refletir acerca da relação dos conceitos possíveis de explorar no conteúdo da divisão, suas ideias e os esquemas necessários para o tratamento a ser dado à divisão partitiva e quotitiva, considerando o ponto de vista conceitual, e não apenas o operacional, pois optamos por desenvolver o material didático mediante as estratégias e ações analisadas, no tocante ao raciocínio multiplicativo, necessário em situações que envolvem a multiplicação e a divisão.

Apontamos as diferentes estratégias de resolução na perspectiva de vê-las que levam à construção de conceitos pelos alunos, e ao professor como oportunidade de enxergar as relações no ensino da Matemática e no campo da Aritmética, tendo em vista que o trabalho com resolução de problemas requer mudança de postura e abordagens no ambiente escolar. Desse modo, pretendemos introduzir no artigo o debate sobre as ideias da divisão, sobretudo as de Smole e Diniz (2001), Nunes e Bryant (1997) e Carvalho (2007).

A dissertação orientou a escolha do conteúdo do artigo, a divisão, e também a importância de uma base teórica consistente na formação do professor para que ele possa tratar a resolução de problemas como eixo norteador de seu trabalho, além do conhecimento do campo da Aritmética exigido em prol de um olhar investigativo para as relações existentes na situação-problema proposta, as resoluções e os conhecimentos requeridos no problema, bem como dos procedimentos utilizado pelos alunos.

Assim, buscamos tratar, no material didático, a resolução de problemas, as propostas de trabalho com diversas situações — problemas numéricos, problemas não numéricos, problemas cotidianos, problemas com mais de uma solução, problemas com excesso de dados, problemas de lógica e problemas sem solução — e as estratégias de solução, por meio de desenho, tabelas, gráficos, dramatização, esquema, cálculo mental, língua materna e as operações fundamentais, para refletir sobre a Aritmética.

Nesse sentido, estruturamos o material abordando a importância da resolução de problemas no ensino da Matemática, as relações entre conceitos da Aritmética, precisamente as ideias da divisão partitiva e quotitiva, oferecendo sugestões de tipos de problemas que podem ser trabalhados com os alunos, a diversidade de soluções para problemas de divisão, o tratamento dado pelo aluno à situação e o papel do professor ao acatar a resolução de problemas como eixo norteador de seu trabalho.

Denominamos o artigo **Repensando a divisão: obstáculos podem ser superados com diferentes formas de trabalho** (Apêndice D).

2 O CAMPO MULTIPLICATIVO POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

2.1 Resolução de problemas matemáticos

Educadores matemáticos como Pozo (1998), Smole e Diniz (2001), Itacarambi (2010), Starepravo (1997), Carvalho (2007, 2009, 2010), Walle (2009), Palhares (2005) comungam a ideia de que a resolução de problemas matemáticos possibilita a mobilização dos conhecimentos dos alunos, tendo em vista a explicitação de estratégias para encontrar uma solução. Os estudiosos da área também diferenciam “problemas” de “problemas matemáticos escolares” e ressaltam que ambos requerem reflexão e tomada de decisão mediante o enfrentamento de desafios.

Para Dante (2000, p. 10), a diferença entre “problema” e “problema matemático”, é que este último corresponde a “qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la”. Desse modo, os professores que possuem sólidos conhecimentos dos fundamentos da Matemática realizam melhores intervenções no processo de aprendizagem dos alunos, além de direcioná-los para entendimento do contexto e sentido da situação.

Problema é definido por Dante (2000, p. 9) como “qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la. Echeverría et al. (1998, p. 13) explicam o termo problema fazendo referência a “situações muito diferentes, em função do contexto no qual ocorrem e das características e expectativas das pessoas que nelas se encontram envolvidas”. Ainda, Lester (apud ECHEVERRÍA et al., 1998, p. 15) apresenta uma definição clássica do problema, visto como “uma situação que um indivíduo ou um grupo de indivíduos quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que leve à solução”. Para esses pesquisadores, problema pode ser tanto numérico quanto não numérico**,** mas ele está relacionado a uma proposta de trabalho que requer raciocínio lógico, motivação/ interesse dos alunos para a busca de uma solução que possibilite reflexão, análise, investigação em prol da construção e compreensão de conceitos matemáticos.

Nessa direção, Costa (2007, p. 15) observa que

> nem toda situação desafiadora caracteriza-se como uma situação problema, pois quando o homem se encontra diante de uma situação problemática e já conhece as estratégias e soluções de como resolvê-la isto não se caracteriza como um problema, pois ele já possui os elementos necessários para sua resolução [...] a pessoa ou o grupo assimila a situação, mas não encontra uma solução óbvia imediata, mas que ela exige uma ação e quer ou precisa agir sobre ela.

Pesquisadores desta área que tratam da resolução de problemas matemáticos entendem que resolvê-los, em geral, não é tarefa simples, pois requer compreensão do enunciado e, sobretudo, conhecimento matemático. O sucesso, por sua vez, depende das relações que os alunos conseguem estabelecer, pois, de acordo com Diniz (2001), para solucionar um problema requer pensar, planejar e executar. Fazer indagações acerca da situação-problema é o primeiro passo para desestruturar nosso pensamento, deixando-o aberto a nova aprendizagem. O ato de planejar permite traçar caminhos para promover a progressão conceitual, a interação na tríade aluno-saber-professor e constantes problematizações que contribuem para a dinamicidade do processo de aprender.

Para a proposta deste trabalho convém ao professor identificar quando utilizá-las, e qual a intencionalidade de executá-la em suas aulas, se será para trabalhar conceitos, diagnosticar os conhecimentos dos alunos ou consolidar a aprendizagem deles, pois o seu uso tem como ponto de partida na atividade Matemática

> não a definição, mas o problema; o problema não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório; aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros; o aluno não constrói um conceito em reposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas; a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. (BRASIL, 1997, p. 43)

Palhares (2005, p. 12), por sua vez, acrescenta que

> a resolução de problemas envolve o recurso a procedimentos que, apesar de o indivíduo os possuir, terá de escolher os que mais se adaptam à situação em causa. A capacidade para ter sucesso não está diretamente ligada ao conhecimento dos conteúdos, mas depende também da experiência e conhecimento das próprias capacidades e limitações de cada um. Este processo envolve conceitos, procedimentos e raciocínios.

A posição desse autor com relação ao trabalho por meio de resolução de problemas destaca a importância de verificar o nível de conhecimento dos alunos, para que não sejam atividades difíceis de serem executadas, como também o papel dos recursos utilizados por eles diante da solução de problemas e quais procedimentos explicitam, de modo que possamos verificar quais relações demonstram conhecer e como dão significado ao problema. Logo,

> um problema é, então, uma situação nova ou diferenciada do que já foi aprendido e necessita do uso de técnicas e instrumentos já conhecidos. Assim, um problema inúmeras vezes solucionado torna-se um exercício, e para a solução de um novo problema são necessários os conhecimentos *a priori* gerados nos e dos exercícios anteriores. (COSTA, 2007, p. 16)

Diante do exposto, resolver um problema significa estabelecer relações e apresentar uma solução a uma situação nova. Este direcionamento de aula possibilita ao aluno explicitar seus conhecimentos matemáticos, de forma que pense o caminho a seguir para encontrar uma resposta coerente com o enunciado. De acordo com Dante (2000), resolver problemas apresenta vantagens no âmbito escolar: direciona o aluno a pensar produtivamente; desenvolve o seu raciocínio; propõe o enfrentamento de desafios; referencia o sentido das soluções do problema, atraindo o interesse dos alunos na busca de soluções aceitáveis; possibilita a exposição de diversos procedimentos para resolver problemas e, sobretudo, contribui para a formação de conceitos matemáticos. Enfim, didaticamente, auxilia na aprendizagem do aluno.

2.2 Breve histórico da resolução de problemas

Segue-se uma breve retomada histórica da origem da resolução de problemas nas aulas de Matemática.

Para Palhares (2005), a 'era da resolução de problemas' nasceu a partir da recomendação feita pelo Nacional Council of Teachers of Mathematics (NCTM), nos Estados Unidos, em 1989, pela qual o foco central no ensino da Matemática escolar era o trabalho por meio da resolução de problemas. O NCTM influenciou reformas no currículo de Matemática que ocorreram em todo o mundo, destacando a resolução de problemas no ensino da Matemática e o papel ativo do aluno na construção de seu conhecimento, relacionando aspectos contextuais e tecnológico nas discussões pedagógicas.

No final da década de 1950 e início da de 1960, o ensino de Matemática no Brasil foi influenciado pelo Movimento da Matemática Moderna (MMM), cujo objetivo era aproximar a Matemática trabalhada na educação básica da Matemática produzida pelos pesquisadores da área. Nessa década, os professores da educação básica tiveram de se adaptar à nova proposta, tendo de seguir um roteiro de conteúdos e de metodologias.

De acordo com Carvalho (2009), o MMM não foi uma proposta bem-vista na educação matemática, uma vez que não havia a preocupação com a formação do professor, mas sim formar “matemáticos mirins”, expressão criada por Pitombeira de Carvalho (2000).

Os pesquisadores estão de acordo que o MMM cometeu vários equívocos, por ter sido planejado por profissionais que tinham pouco contato com a realidade da educação básica e devido ao formalismo atribuído ao ensino da Matemática, entre outros. Nesse sentido,

> ao aproximar a Matemática escolar da Matemática pura, centrando o ensino nas estruturas e fazendo uso de uma linguagem unificadora, a reforma deixou de considerar um ponto básico que viria se tornar seu maior problema: o que se propunha estava fora do alcance dos alunos, em especial, das séries iniciais do ensino fundamental. (BRASIL, 1997, p. 21)

Nessa época, houve grande predominância da Matemática pura, não se diferenciando a especificidade da área como pesquisa da Matemática escolar. No entanto, Bloom e Broder (apud ONUCHIC, 1999) afirmam que as pesquisas desenvolvidas na década de 1950 enfatizavam o produto/resultado final das soluções, em vez de valorizar os processos implícitos na resolução criativa de problemas. Esses pesquisadores defendiam que o "ensino de resolução de problemas deveria centrar-se nas estratégias, pois acreditavam que os hábitos de resolução de problemas poderiam ser alterados ou aprimorados por uma adequada formação e prática" (Ibid., p. 202). Nos anos 60, o trabalho com resolução de problemas começou a ser investigado de forma mais sistemática, sob a influência de George Polya[13], mas o ensino ainda se limitava à busca de solução, tipo treino, num esquema cognitivo estímulo-resposta.

A partir da década de 1970, o ensino de Matemática passou a ser desenvolvido por meio de resolução de problemas, que é uma proposta de trabalho que possibilita a explicitação de diferentes estratégias de solução. Já na metade da década de 1980, muitos materiais foram elaborados para auxiliar o trabalho do professor, e o ensino pautou-se na busca da solução do problema. Tal preocupação trouxe a possibilidade de verificar as respostas dos alunos, relacionando-as com os seus conhecimentos matemáticos sobre a compreensão dos fundamentos da Matemática.

No final da década de 1990, foi elaborado no Brasil um guia de orientação para o trabalho docente da educação básica, os PCN, e os professores dos anos iniciais passaram a tê-los como o primeiro documento que propõe trabalhar Matemática na perspectiva da resolução de problemas como eixo norteador do ensino e da aprendizagem dos agentes educacionais — alunos e professor —, objetivando o processo de construção e não a mera reprodução de técnicas do conhecimento matemático. Os livros didáticos, por sua vez,

---

[13] George Polya foi um dos primeiros matemáticos a estudar resolução de problemas, alertando a comunidade de educadores matemáticos para a sua importância no ensino e na aprendizagem da Matemática.

passaram a ser elaborados atendendo à concepção dos PCN. No entanto, os resultados ainda revelam baixo desempenho global dos alunos quanto aos conceitos matemáticos e à resolução de problemas. Eis a razão do interesse na área da Matemática, precisamente o conteúdo de divisão, na perspectiva da resolução de problemas nos anos iniciais do EF.

2.3 Tipos de problemas e abordagens de trabalho

Para Carvalho (2010), embora não seja recomendado classificar os problemas, observamos que tal prática é favorável para que os professores insiram diversidades de situações-problema em suas aulas e nas vivências de resolução de problemas pelos alunos, dando-lhes a oportunidade de ampliar o repertório de conceitos matemáticos por meio de atividades de leitura e compreensão de enunciado, elaboração de situações que envolvem partição, transformação de problemas de partição para quotição e vice-versa, entre outras propostas.

Smole e Diniz (2001), assim como Carvalho (2007), classificam os problemas em convencionais, não convencionais e cotidianos. Para a compreensão do tipo de problema desta pesquisa, apresentamos a diferença entre problemas convencionais e não convencionais.

Segundo Smole e Diniz (2001), os problemas convencionais são caracterizados por situações que focalizam apenas um resultado e um único procedimento. Esse tipo costuma ser aplicado fora de um contexto que chame a atenção do aluno. Para Stacanelli (2001), os problemas convencionais, denominados também de problemas-padrão, frequentes nos livros didáticos e nas aulas de Matemática, caracterizam-se por requererem a técnica operatória, em que se utiliza apenas um caminho para o resultado.

Já os problemas não convencionais estão relacionados a situações práticas que propiciam aos alunos demonstrar várias estratégias para chegar a uma solução, uma vez que eles são guiados por estratégias pessoais, ou seja, pelo raciocínio intuitivo, que difere do conhecimento matemático. Para Starepravo (1997), esse tipo de problema possibilita várias soluções, já que sua principal característica é permitir aos alunos a exposição de suas estratégias, o que em geral não condiz com as convenções exigidas no sistema de numeração. Nesse sentido,

> crianças acostumadas a simplesmente usar uma das quatro operações que aprendeu a fazer através de uma técnica convencional têm muita dificuldade para saber se a conta que devem fazer no problema é uma multiplicação ou uma divisão e, ainda, quando escolhem uma delas, normalmente não questionam o resultado, contentando-se quando chegam a uma resposta, sem pensar no sentido dela. (Ibid., p. 73)

Essa ideia respalda os nossos questionamentos acerca do reducionismo conceitual e ausência de um ensino pautado na problematização. Assim, Starepravo (1997) apresenta evidências de que os problemas convencionais, embora possam possibilitar a explicitação de muitas estratégias, são trabalhados em geral no espaço escolar apenas por meio do ensino de uma única técnica, enfim, o uso do algoritmo tradicional da operação em estudo.

Para Carvalho (2007), a resolução de problemas não está relacionada apenas ao texto escrito, podendo ser utilizada em diversas práticas docentes, como atividades de rotina, inserindo ou não diferentes recursos didáticos para a resolução. Nessa direção, Smole e Diniz (2001), e também Dante (2000), enfatizam que esta proposta de trabalho na área de Matemática deverá levar em consideração a diversidade de recursos e encaminhamentos das práticas de ensino, de modo que os alunos se sintam motivados para explicitar suas estratégias via uso de lápis e papel, por meio de desenho, cálculo mental, linguagem oral, entre outros.

Quanto à classificação, Carvalho (2007) adverte que os problemas, independentemente de sua classificação, "trabalham com a ideia das operações matemáticas", além de favorecerem os alunos na utilização do processo de contagem. A referida autora também afirma que os problemas não podem ser classificados em função das operações, mas sim a partir dos procedimentos utilizados. Diante disso, enfatiza que, dependendo do enunciado, podem ser transformados em problemas de partição para quotição ou de quotição para multiplicação e vice-versa. Para isso, sugere que nas aulas de Matemática sejam propostos aos alunos diferentes tipos de situações-problema, numéricas e não numéricas, e também que explorem situações do cotidiano, o que, para a referida autora, favorece o pensamento matemático dos alunos.

Pozo (1998), Carvalho (2007), Echeverría et al. (1998) comungam a ideia de que um problema pode ser um desafio para determinado sujeito, considerando tempo e situação, enquanto para outra pessoa pode ser uma situação trivial, ressaltando com isso a importância de considerar o nível de saberes dos alunos e, ainda, de trabalhar vários tipos de problemas, como também de instigá-los a explicitar as várias formas de respostas, que denominamos de estratégias.

Além da importância de trabalhar diferentes situações-problema, Carvalho (2007), Smole e Diniz (2001) e Pozo (1998) destacam o valor da atividade de elaborar e interpretar enunciados para ampliar o repertório de estratégia de resolução dos estudantes. No entanto, Carvalho (2007) observa que o tipo de classificação de problemas não precisa ser apresentado aos alunos. Para essa autora, o que importa é o desenvolvimento do trabalho docente em sala de aula, numa ação consciente, que objetiva construir conhecimento, ou seja, desenvolver a aprendizagem, o saber escolar. Para tanto, devemos proporcionar aos alunos a "ativação de diversos tipos de conhecimentos, não só de diferentes procedimentos, mas também de diferentes atitudes, motivações e conceitos". (ECHEVERRÍA et al., 1998, p. 17)

Smole e Diniz (2001) e Carvalho (2007) apresentam como proposta de trabalho no ensino da Matemática nos anos iniciais do EF a utilização de diversos encaminhamentos, destacando características e funções dos problemas no ensino e na aprendizagem da Matemática, que são: problemas sem solução, problemas com mais de uma solução, problemas com excesso de dados e problemas de lógica. No entanto, carvalho as classifica a partir das estratégias de resolução, de modo que na análise das respostas dos alunos perceba se eles repetiram um modelo ensinado ou se esforçaram para a busca de uma solução, demonstrando, com isso, mobilização de seus saberes diante de uma situação nova.

Starepravo (1997, p. 70), por sua vez, sugere para o ensino de Matemática que o professor inicie suas aulas com problemas, devendo as técnicas operatórias aparecer somente depois, como um instrumento para a resolução. Essa proposta requer do professor um novo rumo ao modo de ensinar, uma prática diferente das vivenciadas nas aulas tradicionais de Matemática, em que primeiro se dá o conteúdo para depois passar o exercício e ter como retorno a mesma técnica ensinada.

Sendo assim, acreditamos que o trabalho com resolução de problemas deve ser uma proposta frequente no currículo da Matemática elementar, devendo ser tratado como essencial para que os alunos desenvolvam, desde cedo, sua capacidade de enfrentar situações-problema.

Para a compreensão do papel da resolução de problemas no ensino da Matemática, seguem-se estudos que tratam de estratégias de resolução de problemas, as quais são vistas como ponto de partida para a aprendizagem de conteúdo.

2.4 Estratégias de resolução de problemas no ensino da matemática

Vale ressaltar que tanto exercícios como problemas requerem dos alunos a ativação de seus conhecimentos *a priori*. No entanto, os procedimentos para chegar a sua resolução são diferenciados**:** enquanto nos exercícios apenas executamos, nos problemas deparamos com situações ainda não trabalhadas, mas possíveis de solução quando ativados os conhecimentos implícitos, o que favorece a explicitação de estratégias diversificadas, mas compatível com o nível de conhecimento que o aluno se encontra no dado momento da atividade. Já nos problemas os alunos buscam "encontrar por si mesmos respostas às perguntas que os inquietam ou que precisam responder, ao invés de esperar uma resposta já elaborada por outros e transmitida pelo livro-texto ou pelo professor" (POZO, 1998, p. 9). São estas soluções diante de uma situação nova que fazem surgir estratégias interessantes utilizadas pelos alunos e que revelam um campo de conceitos implícitos da Aritmética.

A diferença entre eles, leva-nos a compreender o que caracteriza a conta (algoritmo) e o cálculo. Para Starepravo (1997, p. 67), nas técnicas operatórias ou contas o que se pratica são ações convencionais "do tipo que admitem uma única forma de se obter o resultado". Já o cálculo é uma atividade essencialmente mental, que se dá por meio do raciocínio lógico-matemático.

Vale e Pimentel (2005, p. 24) definem estratégias de resolução de problemas como "um conjunto de técnicas a serem dominadas pelo solucionador e que o ajudam a 'atacar' o problema ou a progredir no sentido de obter a sua solução". Nesse sentido, referem-se a procedimentos implícitos ou explícitos que são disponibilizados pelos alunos para chegar à resolução de um problema, via algoritmos tradicionais da adição, subtração, multiplicação, divisão, ou estratégias combinadas (algoritmo e desenho ou algoritmo e linguagem materna), ou ilustração/ representação do enunciado, diagramas, tabelas, entre outros caminhos de resolução.

Para a resolução de um problema matemático, por exemplo, o aluno pode apresentá-la usando papel ou lápis, cálculo mental, linguagem materna, dramatização, ilustração, entre outros recursos. Ressaltamos que as estratégias de resolução variam conforme o nível de conhecimento dele, que tem ou está disposto a explicitá-lo no momento. Assim,

> o primeiro passo na solução de problemas consiste na compreensão dos mesmos. [...] compreender um problema não significa somente compreender as palavras, a linguagem e os símbolos com os quais ele é apresentado, mas também assumir a situação desse problema e adquirir uma disposição para buscar a solução. Geralmente, para que possamos expor a situação como um problema que devemos tomar consciência de que estamos diante de uma situação nova, de que ocorreu uma mudança em relação a situação anterior ou, então, de que nos deparamos com uma tarefa para a qual temos somente uma explicação insuficiente. Dito de outra forma, compreender um problema implica dar-se conta das dificuldades e obstáculos apresentados por uma tarefa e ter vontade de tentar superá-los. Para que essa compreensão ocorra, é logicamente necessário que, além dos elementos novos, o problema contenha problemas já conhecidos que nos permitam guiar a nossa busca de solução. (ECHEVERRÍA et al., 1998, p. 23-4)

Com isso, podemos inferir que as estratégias estão presentes tanto nas práticas desenvolvidas por meio de exercício quanto por problemas. O diferencial encontra-se no procedimento adotado para encontrar a solução. Esta podendo ser pela explicitação de uma única técnica (treino do algoritmo) ou compreensão de conceitos, revelada por antecipação de conhecimentos e execução do plano, caracterizando uma ação que tem significado e sentido na resposta.

No entanto, vale ressaltar que, em geral, a maioria dos alunos vive um dilema quanto a aprendizagem realizada na escola e a vivenciada no cotidiano, pois muitas vezes o ensino da Matemática é desprovido de sentido, porque

> os contextos escolares costumam ser muito diferentes, quase opostos em muitos aspectos aos contextos sociais nos quais se pretende que, mais tarde, os alunos apliquem os conhecimentos aprendidos [...] para que os alunos enfrentem as tarefas escolares como verdadeiros problemas é necessário que eles tenham relação com os contextos de interesse dos alunos ou, pelo menos, adotem um formato interessante, no sentido literal do termo. (ECHEVERRÍA et al., 1998, p. 41-2)

Assim, acreditamos que quando este é pautado na problematização do enunciado e com situações que possibilitam o interesse do aluno demonstra uma preocupação com o currículo ensinado na Matemática e, além disso, apresenta indícios de superação de obstáculos, buscando o envolvimento e, sobretudo, o desenvolvimento de atividades dinâmicas e compreensível ao nível de conhecimento do aluno. Com isso, verificamos que resolver problemas requer pensar, planejar e executar, além de ativar os conhecimentos implícitos dos alunos.

Benvenutti (2008) salienta que o algoritmo pode ser uma estratégia, mas nem sempre esta é um algoritmo, uma vez que tal termo define-se como sequência de instrução para a realização de uma tarefa. Além disso, Courant et al. (2000, p. 50) acrescenta, conceituando algoritmo como “um método sistemático de cálculo”. Em outras palavras, corresponde a uma sequência de procedimentos para a obtenção de resultados desejados.

Esta pesquisa foi amparada na busca das estratégias de resolução de problemas empregadas pelos alunos que dela participaram. Nessa direção, Benvenutti (2008) defende que a estratégia está atrelada a uma solução que apresenta significado, sentido e contexto, devido à compreensão do enunciado e às problematizações das situações enfrentadas, e proporciona direcionamento para o senso numérico da resposta, enquanto o algoritmo, em geral, não apresenta sentido e nem significado durante a resolução, tendo em vista que predomina uma ação mecânica, cujo fim é chegar a uma resposta rápida, pautada em uma única técnica. A autora lembra que o emprego de algoritmo tradicional é uma estratégia para chegar a um resultado de forma econômica, rápida, diferente de outros procedimentos.

A proposta de trabalhar Matemática na perspectiva da resolução, em que o aluno problematiza e é problematizado, propõe oferecer possibilidades para o aluno construir, descobrir e, em consequência, evoluir em seus conceitos, caracterizando aprender por compreensão, conforme apontados por Starepravo (1997) e Pozo (1998). Compreender, na perspectiva da Matemática, requer que os fundamentos da disciplina sejam explicitados, bem como o sentido da situação proposta nas atividades em sala de aula. Isso significa aprender questionando e sendo questionado, que apresentam as seguintes vantagens para o aluno: entender o que está fazendo, demonstrando ações coerentes com o enunciado e, ainda, questionar os resultados.

Nesse sentido, Starepravo (1997, p. 69) afirma que aprender por compreensão é possível à medida que as crianças dão sentido ao fazem e não simplesmente "repetem uma técnica que lhes foi ensinada", pois um ensino pautado apenas em obter resultados corretos, não tem significado para a meta de compreender conceitos.

Echeverría et al. (1998) ressaltam a importância de o professor apresentar aos alunos variedades de problemas para que obtenham diversidades de estratégias de resolução, de modo que utilizem estratégias sofisticadas (econômicas). Não é um caminho fácil, e requer envolvimento, interesse e superação das dificuldades. Para resolver o problema, os autores mencionados apresentam alguns procedimentos heurísticos de resolução que auxiliam o aluno na explicitação de seus saberes e, em consequência, a chegar a uma solução adequada ao enunciado.

Quadro 8 – Procedimentos heurísticos de solução de problemas

- Realizar tentativas por meio de ensaio e erro.
- Aplicar a análise meios-fins.
- Dividir o problema em subproblemas.
- Estabelecer submetas.
- Decompor o problema.
- Procurar problemas análogos.
- Ir do conhecido até o desconhecido.

Fonte: Echeverría et al. (1998, p. 25)

Segundo as referidas autoras (1998), esses procedimentos gerais são aplicáveis em qualquer área do conhecimento, mas não são estanques. Suas variações devem ser desenvolvidas conforme cada situação proposta no problema. Assumir a posição da argumentação, segundo Starepravo et al. (1998) confere aos professores um delineamento do seu planejamento coerente com o nível da turma, haja vista que o aluno deverá vivenciar a prática de problematizar para compreender o enunciado, assim como terá que elaborar problemas para sistematizar e firmar os seus conhecimentos. Por outro lado, Walle (2009) destaca a importância de saber escutar as explicações dos alunos, para que possamos compreender os seus procedimentos matemáticos e, assim, realizar intervenções reais e possíveis para direcioná-los à progressão conceitual.

Para compreender a situação-problema, Echeverría et al. (1998) apresentam o plano de George Polya, que visa fazer o aluno conceber o caminho que o oriente a encontrar procedimentos de resolução. Estes, por sua vez, "guiam a solução de problemas de uma forma muito mais vaga e global" (Ibid., 1998, p. 24-5) e são úteis para a organização do pensamento matemático, uma vez que o aluno revela o seu raciocínio implícito, seja por escrito ou oralmente, contribuindo com a difícil tarefa do professor de traçar caminhos que o levem a aprender. Isso significa que, conforme Carvalho (2007), nas aulas de Matemática, o professor deveria possibilitar ao aluno lançar mão de diferentes estratégias para resolver os problemas propostos, usando seus conhecimentos e sua criatividade.

2.5 O enunciado

Os enunciados do problema da pesquisa foram numéricos, e envolveram situações familiares ao aluno, por serem frequentes nas aulas de Matemática e nos LDs.

Segundo Walle (2009), para um problema interessar aos alunos e dar-lhes a convicção de que são capazes de fazer matemática, o enunciado deverá ter as seguintes características: ser contextualizado; estar relacionado com a Matemática que os alunos vão aprender; possibilitar problematizações; estar adequado ao conhecimento do aluno, entre outras.

O enunciado pode, por sua vez, ser escrito ou oral. Os pesquisadores da educação matemática, como Pozo (1998), Carvalho (2007) entre outros, destacam a importância do aluno atribuir sentido diante das situações propostas. Assim, verificamos que cabe ao professor diagnosticar o nível da turma e apresentar caminhos que levem a compreensão do problema por eles, podendo ser apresentado por dramatização, por meio da contagem de uma história, de aulas dialogadas entre professor e alunos, demonstrando com isso que ambos têm saberes diferentes, mas que contribuem para o entendimento do enunciado.

Para a compreensão de enunciados, Polya (2006) apresenta diferentes técnicas que contribuem para esse fim, como apresentado no quadro a seguir:

Quadro 9 – Algumas técnicas que ajudam a compreender o enunciado

• Primeiro: compreender o problema - Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? Etc. • Segundo: encontrar a conexão entre os dados e a incógnita. É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata. É preciso chegar afinal a um plano para a resolução. - Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente? - Conhece um problema correlato? - Conhece um problema que lhe poderia ser útil? Etc. • Terceiro: executar o seu plano. - Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto? • Quarto: Examinar a solução obtida - É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? - É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isso num relance? - É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Fonte: Polya (2006, p. XIX).

Tais problematizações não são guias, apenas orientações para compreensão do enunciado. Dante (2000), por sua vez, menciona que um enunciado pode ser numérico e não numérico. Logo, podemos conjecturar que os problemas convencionais, os quais são presentes nos LD, caracterizam-se, geralmente, como enunciados numéricos em que favorecem o desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno, desde que não nos detenhamos nas palavras-chave.

Carvalho (2007) e Zunino (1995) enfatizam que a ênfase em palavras-chave pode distorcer o sentido do enunciado, direcionando para soluções equivocadas dos problemas. Diante disso, Carvalho (2007, p. 19) destaca que “trabalhar com resolução de problemas a partir de palavras-chave ou com base na pergunta incentiva o raciocínio mecânico por parte do aluno, desconsiderando o enunciado, apenas traduzindo ‘ao pé da letra’ uma palavra ou pergunta do problema”.

Desenvolver um trabalho com enunciado na perspectiva de resolução de problemas corresponde a facultar ao aluno ler, interpretar e compreender o enunciado conforme o sentido e significado em que foi elaborada a situação. Assim, para compreender o enunciado “o aluno deve ler e interpretar as informações nele contidas, criar uma estratégia de solução, aplicar e confrontar a solução encontrada”. (CARVALHO, 2007, p. 18)

Diante disso, notamos que não é fácil estar diante de um problema e, sobretudo, resolvê-lo, uma vez que as práticas de nossas escolas em geral revelam um ensino mecanizado, em que predomina o estímulo-resposta. Superar este problema é um dos desafios dos professores de Matemática, tendo em vista que são as suas mediações que farão dos enunciados um desafio a ser enfrentado e conquistado. Para tanto, as operações precisam ser contextualizadas e o professor deve, por sua vez, propor várias situações-problema.

Como observa Carvalho (2007, p. 14): "há várias situações do cotidiano da escola, da sala de aula, nas quais se está trabalhando com resolução de problemas sem necessariamente esses problemas estarem escritos na lousa, no livro ou no caderno". Complementa ainda enfatizando que, nas aulas de Matemática, perdem-se muitas oportunidades de desafios e caminhos favoráveis à progressão conceitual do aluno, "por se achar que os problemas têm de estar escritos no livro, no caderno ou na folha de atividade" (Ibid., p. 15).

Tendo em vista que os problemas trabalhados nos anos iniciais do Ensino Fundamental em boa parte são numéricos, a solução de problemas de divisão requer a retomada de conceitos elementares da Matemática. Seguem discussões acerca de números, multiplicação e divisão, pertencentes ao campo da Aritmética.

2.6 O conceito de número e o nosso sistema de numeração decimal

Para a resolução dos problemas propostos aos alunos participantes da pesquisa, foi necessário o reconhecimento do conceito de número, suas funções e regularidades, bem como das operações fundamentais.

A criação dos números, sem dúvida, foi uma das grandes invenções da humanidade, primordial para o desenvolvimento do pensamento matemático de nossos alunos. Sobretudo, eles foram "criados para que o homem controlasse as quantidades, ou seja, pudesse contar as coisas da natureza, por isso números naturais" (CARVALHO; SARRAF, 2008, p. 14). Conforme Courant (2000, p. 1) a "teoria matemática dos números naturais ou inteiros positivos é conhecida como Aritmética". Esta, por sua vez, estuda os números e as operações.

Estudar Matemática faz-se necessário para a compreensão das regularidades do sistema de numeração decimal (SND), tendo em vista que neste está implícito as operação de adição e multiplicação, isso porque falamos de forma decomposta e escrevemos posicionalmente. No entanto, quando os alunos estão aprendendo tal conteúdo, é comum escreverem conforme escutam, o que é denominado de escrita aditiva. Daí a importância de compreenderem as regularidades do SND: se o aluno "não compreender o sistema de numeração e não souber contar ele não irá operar, isto é, calcular". (CARVALHO; SARRAF, 2008, p. 14). Assim, Brito (2006, p. 102), ensina que "compreender e usar os números não é apenas uma questão de relacioná-los a um conjunto de objetos (cardinalidade)". Além de compreender as regularidades dos números, faz-se necessário entender o nosso SND.

Para Lima et al. (1997, p. 25), números são "entes abstratos desenvolvidos pelo homem como modelos que permitem contar e medir; portanto, avaliar as diferentes quantidades de uma grandeza". Isso representa as suas funções. Carvalho (2010) destaca que os alunos nos anos iniciais de escolarização têm noção de números, por fazer uso em diversas situações, como indicar, medir, quantificar e codificar.

Caraça (1984) revela que os números foram criados por meio da contagem, e esta é fruto do desenvolvimento social e se tornou necessária na relação entre os homens, uma vez que a "necessidade de contar começou com o desenvolvimento das atividades humanas; quando o homem foi deixando de ser um nômade pescador, caçador e coletor de alimentos para fixar-se no solo" (LOPES et al., 2005, p. 21).

Segundo Lorenzato (2006), o campo conceitual dos números é constituído de inúmeras variáveis, como: correspondência um- a- um, cardinalidade de um conjunto, ordinalidade na contagem, contagem seriada um- a- um, contagem por agrupamentos, composição e decomposição de quantidade, reconhecimento de símbolos numéricos, reconhecimento de símbolos operacionais, representação numérica, operacionalização numérica, percepção de semelhanças e diferenças, percepção de inclusão e invariância.

Diante da complexidade desse estudo, Carvalho (2010) considera os números e o SND como importantes no ensino da Matemática nos anos iniciais do EF por caracterizarem caminhos para os alunos realizarem os atos de operar, calcular, entre outros.

O nosso SND foi criado pelos hindus e divulgado pelos árabes, tornando-se de grande importância para a civilização, como destacam Carvalho (2007) e Courant et al. (2000). Para estes pesquisadores, o referido sistema é posicional e apresenta quatro regularidades: tem forma decomposta, os números assumem valores conforme a posição que assume, é multiplicativo e aditivo.

O SND (base dez), adotado no Brasil, envolve conceitos da contagem. Esta, por sua vez, referencia o aspecto ordinal e cardinal dos números. Apesar de esses aspectos estarem interligados, eles são distintos, como aponta Lorenzato (2006, p. 36):

> O ordinal refere-se a um só elemento, indica a posição desse elemento num (sub)conjunto ordenado e seu significado remete à relação de ordem presente no conceito de número; o cardinal refere-se ao total de elementos que possui um (sub)conjunto e significa a relação de inclusão presente no conceito de número.

Carvalho (2007, p. 12) ressalta que a falta de entendimento do SND e das regularidades e funções do número compromete “o trabalho com a construção dos conceitos das operações matemáticas (adição, subtração, multiplicação e divisão)”, desfavorecendo o aluno na arte de aprender Matemática e, em consequência, construir conceitos.

2.7 Campo multiplicativo nos anos iniciais de escolarização

Optamos por estudar o campo multiplicativo por se tratar de uma categoria que trabalha as operações via entendimento das relações dos conceitos da Aritmética e devido às críticas à forma linear de que é empregado as operações elementares, principalmente nas práticas escolares dos anos iniciais do EF.

Vergnaud (2009) categorizou as operações fundamentais da Aritmética em campos aditivos e multiplicativos. Tendo em vista que o conteúdo desta pesquisa é a divisão, o qual, por sua vez, está associado ao campo multiplicativo, podemos considerá-lo como estudo que trata da relação entre a multiplicação e a divisão. Segundo Cunha (1997, p. 4) o campo multiplicativo é “um aglomerado de situações e um aglomerado de conceitos em que tanto se relacionam com as estruturas aditivas, mas elas também têm a sua própria organização intrínseca, a qual não é redutível aos aspectos aditivos”. Esse campo envolve a multiplicação, a divisão, a fração, entre outros conteúdos. Adição, subtração, multiplicação e divisão são as operações fundamentais da Aritmética, mas, nesta pesquisa focalizamos a divisão, nas ideias de partição e quotição.

Neste estudo, analisamos as estratégias utilizadas pelos alunos dos anos iniciais do EF no que se refere ao conteúdo divisão, considerando o trabalho com cálculo numérico, no âmbito do conjunto dos números naturais ou inteiros positivos.

Vergnaud (2009) apresentou a distinção de dois tipos de cálculo: o cálculo numérico, que significa fazer uso das operações da Aritmética, e o cálculo relacional, que se caracteriza pela utilização do conhecimento implícito acerca das operações do pensamento, ou seja, o uso das operações realizadas mentalmente, sem a necessidade de emprego do algoritmo para reconhecer as relações envolvidas em uma situação. Vamos nos deter no cálculo numérico, tendo em vista que tal tipo de cálculo é mais comum no contexto escolar e nos materiais a que a maioria dos professores tem acesso para ministrar suas aulas, que são os livros didáticos.

Franchi (2010, p. 200) observa que Vergnaud avançou na teoria de Piaget porque sua abordagem apresenta um diferencial na noção de esquema, referindo-se ao deslocamento da “relação indivíduo-objeto para a relação indivíduo-situação”, o que representou um salto qualitativo na construção de conceitos, mediado pelo contexto e, sobretudo, pelo nível de desenvolvimento do aluno. Este, passando a assumir papel ativo na busca de respostas. O esquema é apontado por Vergnaud (2009) e sintetizado por Carvalho (2009, p. 75) como “organização invariante da conduta para uma dada classe de situações”.

No que concerne às ideias do raciocínio multiplicativo, Carvalho (2007) apresenta quatro delas: comparação (há a relação entre duas situações), comparação entre razões (envolve a ideia de proporcionalidade), configuração retangular (considera a propriedade comutativa da multiplicação) e combinação (muitas combinações são usadas para se chegar à solução do problema). Tais ideias são elementos importantes na organização do trabalho docente, porque auxiliam o professor em sua tarefa de planejar diferentes atividades com o objetivo de explorar uma diversidade de situações que direciona para a compreensão de conceitos.

2.7.1 Divisão, operação inversa da multiplicação

A divisão é apresentada aos alunos como operação inversa da multiplicação. Para Imenes et al. (1998, p. 201), a palavra multiplicação vem do latim, “*multi* significa 'muitas vezes' e *plicare* quer dizer 'dobrar', 'duplicar'. Multiplicar, então, significa 'dobrar várias vezes'”. Palhares (2005, p. 188) define-a como “*n* conjuntos finitos, disjuntos dois a dois e com o mesmo número *a* de elementos”, em que o produto de *n* por *a* escreve-se *n x a*. Os termos da multiplicação são denominados fatores (*n* e *a*). O *n* é o multiplicador, o *a* é o multiplicando e o resultado de *n* x *a* é chamado de produto.

Nesse sentido, para Palhares (2005, p. 59), a multiplicação é uma operação em que “dados dois números naturais *a* e *b*, com *a* # *b* e *a* # 1, definimos o produto de *a* por *b* (*a* . *b* = *p*)”. Carvalho (2010, p. 53), por sua vez, trata a multiplicação como “um conteúdo conceitual, porque, além da ideia de adição repetida de parcelas iguais, também envolve as ideias de razão, proporção, combinação e configuração retangular”. Nesse estudo tratamos a utilização da multiplicação como adição de parcelas iguais como pensamento contínuo do campo aditivo, que requer a evolução do aluno para atingir a progressão conceitual.

Segundo Palhares (2005, p. 191), as propriedades da multiplicação são:

> Fecho: Se a e b são inteiros, então a x ab é um inteiro.
> Comutativa: Se a e b são inteiros, então $a \times b = b \times a$.
> Associativa: Se a, b e c são inteiros, então $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.
> Existência de elemento neutro – 1: Se a é inteiro, então, $a \times 1 = 1 \times a = a$.
> Existência de elemento absorvente – 0: Se a é inteiro, então $a \times 0 = 0 \times a = 0$.
> Distributiva da multiplicação em relação à adição: Se a, b e c são inteiros, então $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$.

Essas propriedades são aplicadas a diversos domínios, entre eles, o dos números naturais, o dos números inteiros positivos, os quais facilitam ao aluno na escolha de suas soluções, uma vez que, por meio dessas propriedades, é possível estabelecer várias relações entre os termos da multiplicação, entre a adição e a multiplicação etc. No entanto, convém ressaltar que não podemos migrar as propriedades de um conjunto numérico para outro, uma vez que muitos dos equívocos estão atrelados a essa prática.

A multiplicação e a divisão são operações consideradas complexas de ensinar, principalmente a última operação elementar, de acordo com Carvalho (2009) e Nunes et al. (2001), em virtude de exigir do aluno o trabalho com duas variáveis, as quais diferenciam do trabalho apresentado com o campo aditivo.

Segundo Saiz (2001), na antiguidade somente os homens sábios sabiam dividir, pois os métodos para isso eram numerosos e confusos. Hoje, no entanto, "dispomos de um algoritmo eficaz e rápido, válido para todos os números". Atualmente a definimos como operação inversa da multiplicação.

No século XV, a divisão era vista como uma operação difícil de ser realizada. Foi nesse século que surgiu o método "danda", considerado um dos precursores da divisão atual (Cunha, 1997).

A divisão é uma das quatro operações da Aritmética. Teles (2007) a conceitua como uma ação que requer dividir um número por outro em partes iguais, de forma que sobre o menor resto possível.

Para Moretti (1999), no domínio dos números inteiros, em $a : b = c$, c é o único número inteiro que verifica $a = b \times c$, revelando a divisão como inversão da multiplicação. Para o referido autor, os termos da divisão são: quociente (c), dividendo (a) e divisor (b).

Na divisão euclidiana há o reconhecimento do resto. Para caracterizar esse tipo de divisão, Moretti (1999) apresenta os seguintes princípios: os objetos a serem repartidos devem ser idênticos; cada parte dividida deve conter o mesmo número de objetos; o resto deve ser menor do que o número de partes. Para esse autor, ferir um desses princípios descaracteriza o que chamamos de divisão euclidiana. Esta é definida pela simbologia $A \div B$, em que $B \neq 0$, sendo representada por $A \div B = (q; r)$ desde que $A = q \; x \; B + r$ e $r < B$. Quando a divisão tem resto zero, sua representação é $A \div B = q$ desde que $A = q \; x \; B$. Palhares (2005), por sua vez, considera que esse tipo de uso da divisão não é válido para todos os conjuntos numéricos e situações. Para solucionar essa questão, o autor classificou a divisão em “inteira” e “exata”. A divisão inteira, identidade fundamental da divisão, consiste em determinar dois números inteiros q e r, tais que: $a = b \; x \; q + r$ com $0 \leq r < b$. “Contrariando a divisão exata, a divisão inteira tem sempre solução em $|N_0$ desde que b # 0” (Ibid., p. 195).

Dentre as diversas formas de divisão — horizontal, americana, algorítmica tradicional etc. —, o algoritmo da divisão tradicional é a forma mais econômica e compacta de chegar à solução. As estratégias são procedimentos em geral longos, mas eficientes para a evolução conceitual do aluno. É comum no início do estudo da divisão, tal operação ser ensinada via subtração repetida, e a multiplicação, como adição repetida, conforme os exemplos a seguir:

Quadro 10 – Diferentes estratégias de solução para um mesmo problema

Exemplo 1	Exemplo 2	Exemplo 3	Exemplo 4	Exemplo 5
$30 \div 5 = 6$	30 |5 -10 2 20 2 -10 2 10 6 -10 (0)	30 |5 (0) 6	30 |5 -30 6 (0)	5+5+5+5+5+5=30
Divisão horizontal	Divisão americana ou divisão via subtração sucessiva ou repetida	Divisão algorítmica tradicional (apoio na multiplicação)	Divisão algorítmica tradicional (apoio na subtração)	Multiplicação via adição repetida

Fonte: Alunos participantes da pesquisa.

Como esta pesquisa encontra-se amparada no campo multiplicativo, não é viável seguir este procedimento de uso da adição e subtração, pois não favorece ao aluno a descontinuidade do raciocínio, isto é, avançar qualitativamente para o uso de procedimento específico do campo multiplicativo.

Saiz (2001, p. 159) apresenta as diversas expressões usadas para nomear a divisão: “divisão exata, divisão com ou sem resto, quociente inteiro, quociente aproximado por falta ou por excesso e quociente dado como uma aproximação”. Aprendemos no contexto escolar que a operação divisão exata é quando o resto é zero e a divisão não exata quando o resto é maior que zero e menor que o divisor, considerando o conjunto dos números naturais ou inteiros positivos.

Teles (2007) analisa a classificação do resto da divisão como resto não nulo, como também divisão que tem resto zero, enfatizando que, no âmbito escolar, usa-se uma linguagem equivocada ao classificar divisão como exata, não considerando o resto. Nessa direção, Saiz (2001, p. 159) conjectura que a classificação da divisão como exata "é enganosa porque supõe que existem divisões inexatas; 'sem resto' não é uma expressão mais feliz, porque o zero também é um resto".

Carraher (2003) apresenta outros conceitos abordados na escola que não favorecem a compreensão de conceitos, diferenciando, a princípio, medir de dividir e, em seguida, dividir de cortar. O autor ainda ensina que "medir não é o mesmo que dividir: dividem-se números e medem-se quantidades" (CARRAHER, 2003, p. 77). Ele esclarece essa ideia registrando a distinção entre número e quantidade, ressaltando que divisão está atrelada a números, enquanto medida está relacionada a magnitudes físicas.

Para o referido autor (ibid.) dividir difere de cortar pelo fato de que o número de cortes é um a menos do que o número de partes, isto é, dividir está relacionado à remoção de um enésimo. "A divisão de uma quantidade A por *n* pode ser concebida como tirar um enésimo de A" (Ibid., p. 83). Tal conceito, embora remeta à noção de subtração, estabelece a especificidade da divisão, conteúdo afeito ao campo multiplicativo.

Quanto ao significado da divisão, Walle (2009) ressalta que essa operação é de natureza multiplicativa e apresenta duas ideias: os problemas de partição (ação de partilha) e os problemas de quotição (ação de medida/ correspondência de um- para- muitos). Para Correa (2006), a diferença entre elas diz respeito às quantidades conhecidas e ao cálculo numérico. Já Borba e Selva (2010) enfatizam que estas ideias têm significados diferentes, embora apresentem a mesma operação.

> Dois problemas de divisão podem ser respondidos por meio da mesma operação (13 dividido por 4, por exemplo), mas podem envolver diferentes relações implícitas (como 13 maçãs para serem distribuídas entre 4 crianças – um problema de partição, ou 13 maçãs para serem colocadas em caixas nas quais cabem 4 maças por caixa – um problema de quotição). Embora a partir da mesma operação aritmética se possam resolver dois problemas distintos de divisão, o significado desta operação envolvida nos mesmos pode diferir. (BORBA; SELVA, 2010, p. 1)

Nesse sentido, Lautert (apud BENVENUTTI, 2008) reflete que embora os dois tipos de problemas de divisão possam ser registrados com o mesmo algoritmo da operação formal, eles se diferenciam quanto às situações apresentadas e os alunos podem utilizar estratégias de solução diferentes nos conceitos de divisão.

Para Benvenutti (2008), na divisão partitiva a ação requerida é a distribuição equitativa, pois, no problema, a relação é constante entre os dados do enunciado e ele não pode ser resolvido por correspondência um- para- muitos, porque a relação fixa não é conhecida. Já na divisão quotitiva a ação envolve a correspondência um- para- muitos porque a relação fixa é conhecida e há a ausência de um dos fatores no enunciado.

Walle (2009) esclarece que as ideias de partição e de medida da divisão apresentam as seguintes diferenças:

> Os problemas em que o tamanho do conjunto é desconhecido são chamados de problemas de partição ou de compartilhar. O todo é compartilhado ou distribuído entre um número conhecido de conjuntos para determinar o tamanho de cada um. Se a quantidade de conjuntos é desconhecida, mas o tamanho dos conjuntos iguais é conhecido, os problemas são chamados de medida ou, às vezes, problemas de subtração repetida. O todo é 'medido' em conjuntos do determinado tamanho. (WALLE, 2009, p. 177)

Nesse sentido, Walle (2009) apresenta a classificação da divisão e da multiplicação quanto à sua estrutura:

a) **grupos iguais – todo desconhecido (multiplicação):** busca-se encontrar o total de elementos, pois são dadas tanto a quantidade dos subconjuntos quanto a de seus elementos;

b) **grupos iguais – tamanho dos grupos desconhecidos (divisão – partição)**: busca-se encontrar a quantidade de elementos presentes em cada subconjunto, já que são dados no enunciado o todo e a quantidade deles;

c) **grupos iguais – número de grupos desconhecido (**divisão – medida): busca-se encontrar a quantidade de subconjuntos, uma vez que no enunciado já são dados o todo e os seus elementos;

d) **comparação – produto desconhecido (multiplicação)**: busca-se entender os subconjuntos do enunciado, comparando-os para encontrar o todo;

e) **comparação – tamanho do conjunto desconhecido (divisão – partição)**: busca-se entender os subconjuntos do enunciado, mas na consigna consta a quantidade de subconjunto e o todo, sendo preciso encontrar a quantidade de elementos do subconjunto;

f) **comparação – multiplicador desconhecido (divisão – medida) –** no enunciado consta a quantidade do todo e dos elementos que ficarão em cada subconjunto, sendo preciso encontrar a quantidade de subconjuntos, utilizando a técnica de retiradas de partes do todo sucessivamente até chegar ao resto zero.

3 RESULTADOS E ANÁLISE DE DADOS

3.1 Análise quantitativa das estratégias dos alunos por escola

Para termos uma visão das estratégias de solução utilizadas pelos alunos nas atividades de divisão, fizemos levantamento por turma, a fim de identificá-las, independentemente de acertos e erros em suas diversas formas de raciocínio, considerando soluções do tipo convencional (uso do algoritmo) e não convencional (formas diferentes dos algoritmos da operação elementar).

3.1.1 Escola A

Constatamos que na escola A, os 25 alunos que realizaram a atividade, na faixa etária de 9 a 11 anos, apresentaram soluções envolvendo seis tipos de estratégias: algoritmo da adição, algoritmo da divisão, estratégia pessoal, língua materna, ensaio e erro e estratégias combinadas. Predominou o algoritmo da divisão, seguido da língua materna e da estratégia pessoal. Ressaltamos que esta última estratégia correspondeu ao uso frequente de desenhos que demonstraram como um procedimento levou à compreensão do enunciado.

Nessa escola, algumas questões dos problemas 3 e 4 não foram concluídas ou os alunos deixaram-nas em branco. Ressaltamos que três alunos não solucionaram o problema 3 e dois deixaram em branco o problema 4.

Nessa turma, perceberam-se indícios de que o problema de partição direcionou para o uso da estratégia mais econômica, o algoritmo. Por outro lado, os problemas 3 e 4 pareceram os mais difíceis ou os conceitos não foram compreendidos pelos alunos, devido à existência de maior número de questões em branco, quando comparadas às situações 1 e 2.

Quadro 11 – Estratégias de solução dos alunos da escola A

Problemas	Estratégias de solução de divisão da Escola A						
	Algoritmo da adição	Algoritmo da multiplicação	Algoritmo da divisão	Estratégia pessoal	Língua materna	Ensaios e erros	Estratégias combinadas
Problema 1	-	-	9	5	7	3	1
Problema 2	-	-	10	7	6	1	1
Problema 3	2	-	8	4	7	1	1
Problema 4	-	-	10	8	4	-	1
Total	2		37	24	24	4	4

Fonte: Escola A.

3.1.2 Escola B

3.1.2.1 Turma 1

Percebemos que, na primeira turma da escola B, os 17 alunos que realizaram a atividade, na faixa etária de 9 a 13 anos, apresentaram soluções envolvendo quatro tipos de estratégias: algoritmo da divisão, estratégia pessoal, língua materna e estratégias combinadas. Predominou o algoritmo da divisão, seguido da estratégia pessoal. Ressaltamos que esta última estratégia correspondeu, com frequência, não à utilização de desenho, mas identificaram-se indícios de utilização de cálculo mental, como “fiz de cabeça”, “pensando” e a sequência do valor da relação fixa do enunciado, sem ser apresentado nenhum símbolo das quatro operações fundamentais.

Nessa escola, duas questões do problema 4 foram deixadas em branco, evidenciando que para todo problema deve existir uma “solução”, preferivelmente uma operação elementar, que neste caso foi a divisão.

Quadro 12 – Estratégias de solução dos alunos da escola B, turma 1

Problemas	Estratégias de solução de divisão da escola B – Turma 1						
	Algoritmo da adição	Algoritmo da multiplicação	Algoritmo da divisão	Estratégia pessoal	Língua materna	Ensaios e erros	Estratégias combinadas
Problema 1	-	-	10	4	3	-	-
Problema 2	-	-	8	5	3	-	1
Problema 3	-	-	8	5	3	-	1
Problema 4	-	-	9	3	3	-	-
Total	-	-	35	17	12	-	2

Fonte: Escola B – Turma 1.

3.1.2.2 Turma 2

Na segunda turma da escola B, predominou o uso da operação de divisão. Nessa turma, os 27 alunos que realizaram a atividade, na faixa etária de 9 a 12 anos, apresentaram soluções envolvendo seis tipos de estratégias: algoritmo da adição, estratégia da multiplicação, algoritmo da divisão, estratégia pessoal, língua materna, e estratégias combinadas. Predominou o algoritmo da divisão, seguido da estratégia pessoal. Ressaltamos que esta última estratégia correspondeu, com frequência, à utilização de desenho (bolas e traços), sem ser apresentado nenhum símbolo das quatro operações fundamentais, sinalizando uso de cálculo mental no procedimento de resolução.

Nessa turma, em todos os problemas propostos, uma e/ou duas questões ficaram em branco. Isso revela que os alunos já tinham conhecimento das operações fundamentais da Matemática, principalmente da divisão, ensinada na escola, em geral, no final do ano letivo. Devido à ênfase no ensino linear, não se reconheceu a importância das relações da Aritmética e, sobretudo, da divisão com a multiplicação.

Quadro 13 – Estratégias de solução dos alunos da escola B, turma 2

Problemas	Estratégias de solução de divisão da escola B – Turma 2						
	Algoritmo da adição	Algoritmo da multiplicação	Algoritmo da divisão	Estratégia pessoal	Língua materna	Ensaios e erros	Estratégias combinadas
Problema 1	-	1	15	4	2	-	4
Problema 2	-	-	16	4	1	-	5
Problema 3	1	-	15	8	1	-	1
Problema 4	-	-	14	2	1	-	6
Total	1	1	60	18	5	-	16

Fonte: Escola B – Turma 2.

3.1.3 Escola C

A escola C reunia alunos na faixa etária de 8 a 10 anos, apresentando um alto índice em idade regular nessa etapa de escolaridade. Constatamos que, nessa escola, 36 alunos utilizaram sete tipos de estratégias: algoritmo da adição, estratégia da multiplicação, algoritmo da divisão, estratégia pessoal, língua materna, ensaios e erros, estratégias combinadas, com predomínio do algoritmo da divisão (embora muitas tenham apresentado estrutura elementar, como inversão da multiplicação, estrutura horizontal; em outras não houve registro do resto), seguido da estratégia pessoal e das estratégias combinadas.

As estratégias pessoais mostraram-se de diversas formas: uso de bolas, de traços, representação do enunciado (desenho/ ilustração), registro apenas do resultado do problema em forma de algarismo, evidenciando resolução via cálculo mental.

Tendo em vista que nos detivemos na análise dos problemas corretamente solucionados, considerando raciocínio e/ou respostas à pergunta do enunciado; realizamos levantamento considerando as categorias: certo, errado e em branco. Esses dados objetivaram identificar os problemas que apresentaram soluções ou raciocínios adequados ao enunciado.

Segue-se a percentagem das soluções quanto às subcategorias relacionadas ao resultado (certo, errado e em branco), aqui caracterizadas como oriundas de correção apresentada geralmente nas avaliações de atividades de Matemática desenvolvidas no contexto escolar.

Quadro 14 – Estratégias de solução dos alunos da escola C

Problemas	Estratégias de solução de divisão da escola C						
	Algoritmo da adição	Algoritmo da multiplicação	Algoritmo da divisão	Estratégia pessoal	Língua materna	Ensaios e erros	Estratégias combinadas
Problema 1	-	-	16	2	3	1	11
Problema 2	-	1	13	11	3	-	5
Problema 3	5	1	12	9	2	-	4
Problema 4	1	-	16	12	1	-	3
Total	6	2	57	34	9	1	33

Fonte: Escola C

3.2 Análise quantitativa das estratégias de todos os sujeitos participantes

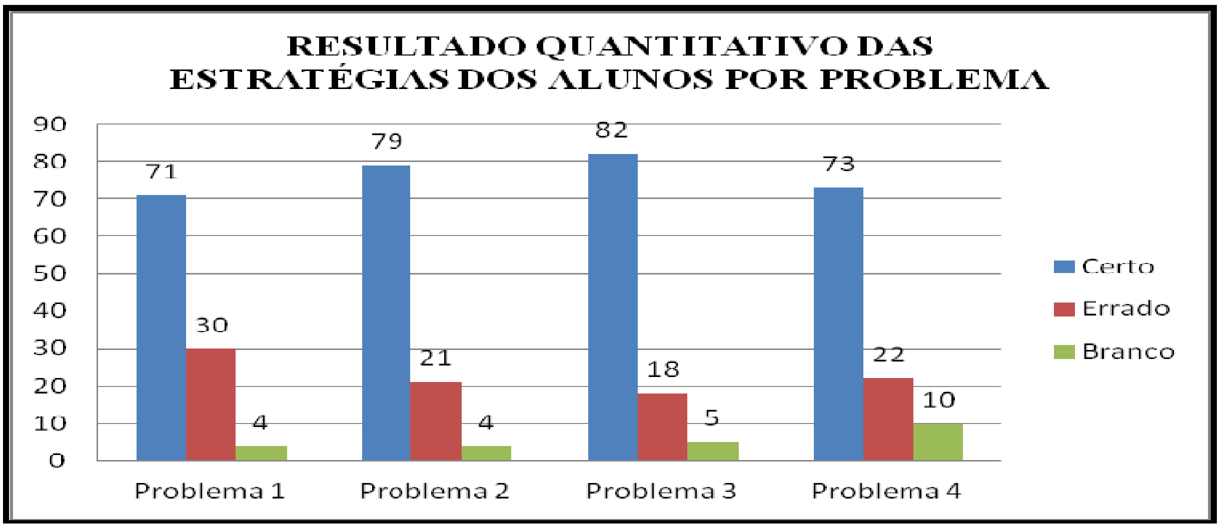
Conforme observamos, dos 105 participantes obtivemos 17% de acertos do problema 1 (quotição), 19% no problema 2 (partição), 20% no problema 3 (quotição) e 18% no problema 4. Tais percentagens revelam que não existem diferenças, para os alunos, em relação aos conceitos de divisão mais fáceis para a solução.

Observamos que as estratégias usadas na resolução dos problemas consideradas corretas predominaram em todas as situações. Os dados obtidos apresentam evidências de que a maioria dos alunos realizou a atividade, com um índice de 74% de acertos em todos os problemas. Quanto às questões em branco, somente uma minoria dos alunos utilizou essa subcategoria. Somente 1% deles não resolveram os problemas 1, 2 e 3, e 2% deixaram em branco o problema 2. Pelo elevado índice de acertos, destacamos o uso de estratégias de resolução corretas por problema, por melhor caracterizarem o critério de seleção e, sobretudo, para analisar quais foram utilizadas em cada conceito de divisão tratado nesta pesquisa.

Para compreensão do perfil das turmas no que concerne ao resultado, apresentamos o levantamento considerando cada problema. No gráfico a seguir, representamos as soluções encontradas, classificadas nas subcategorias *certo, errado e branco*.

Esse levantamento foi realizado com a finalidade de detectar as convergências entre as turmas participantes.

Gráfico 1 – Porcentagem das soluções dos problemas quanto ao resultado



Fonte: Escolas participantes da pesquisa (Ea, Eb e Ec)) em nov/2010 e fev/2011.

3.3 Análise quantitativa por problema

3.3.1 Problema 1

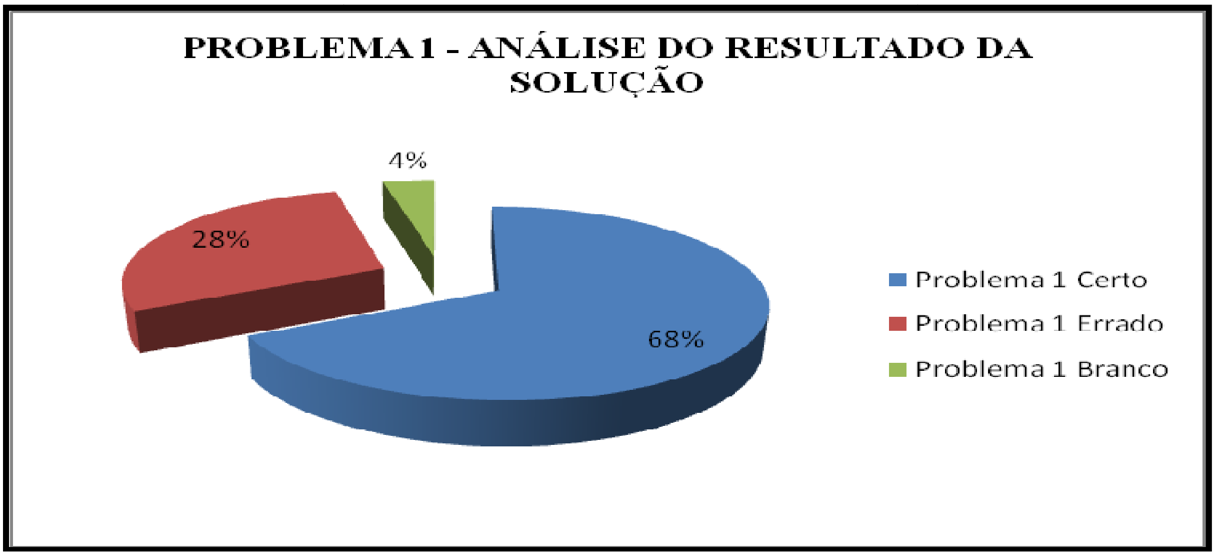
Do ponto de vista matemático, 28% das resoluções não representaram resultado correto, seja por ao explicitar a resposta ao enunciado, seja por apresentar quociente diferente do esperado (nesse problema, esperávamos como resposta: Maria precisará de 6 saquinhos).

No tocante à solução em branco, observamos um índice relevante para esta pesquisa, tendo em vista que duas turmas não estudaram o conteúdo da divisão com a professora regente do ano de escolaridade investigada e as outras duas turmas estudaram o conteúdo da divisão em período próximo à aplicação da atividade da pesquisa. A porcentagem da solução em branco foi de 4% no problema 1. Isto significa que a maioria dos alunos foram desafiados a encontrar uma solução, ou podemos conjecturar que, para eles, todos os problemas devem ter uma resposta. A metodologia de resolução de problemas indica que os alunos também podem deparar com problemas sem solução. Porém, vale ressaltar que, nesta pesquisa, tratamos de problemas numéricos convencionais, porque as práticas escolares demonstram que esse tipo de problema é comum nas aulas de Matemática nos anos iniciais.

Embora 68% dos alunos tenham acertado o problema 1, verificamos que a maioria não apresentou os procedimentos utilizados, nem explicou como chegou à resposta. Isso talvez tenha acontecido devido à ênfase no algoritmo convencional, que caracteriza o uso de uma única técnica desenvolvida na escola. Diante disso, acreditamos que o uso exclusivo do algoritmo da operação é frequente, a ênfase nesse algoritmo, de fato, limita a tentativa de busca de soluções diversificadas às situações enfrentadas pelos alunos.

Por outro lado, chamam atenção os 28% de respostas erradas, dentre as 105 resoluções. Acreditamos que os erros ou equívocos detectados no problema 1 revelam indícios de que os alunos ou não compreenderam o enunciado, por não terem vivência com esse conceito de quotição ou por apresentarem deficiência na habilidade de leitura. Na resolução de um dos problemas, os referentes (brigadeiros e saquinhos) do enunciado foram trocados, o que significa que os alunos não compreenderam os dados apresentados no problema, pois muitos não identificaram o 5 como cinco brigadeiros, por estar implícita essa grandeza no algarismo.

Gráfico 2 – Porcentagem das soluções quanto ao resultado do problema 1



Fonte: Escolas participantes da pesquisa (Ea, Eb e Ec) em nov/2010 e fev/2011.

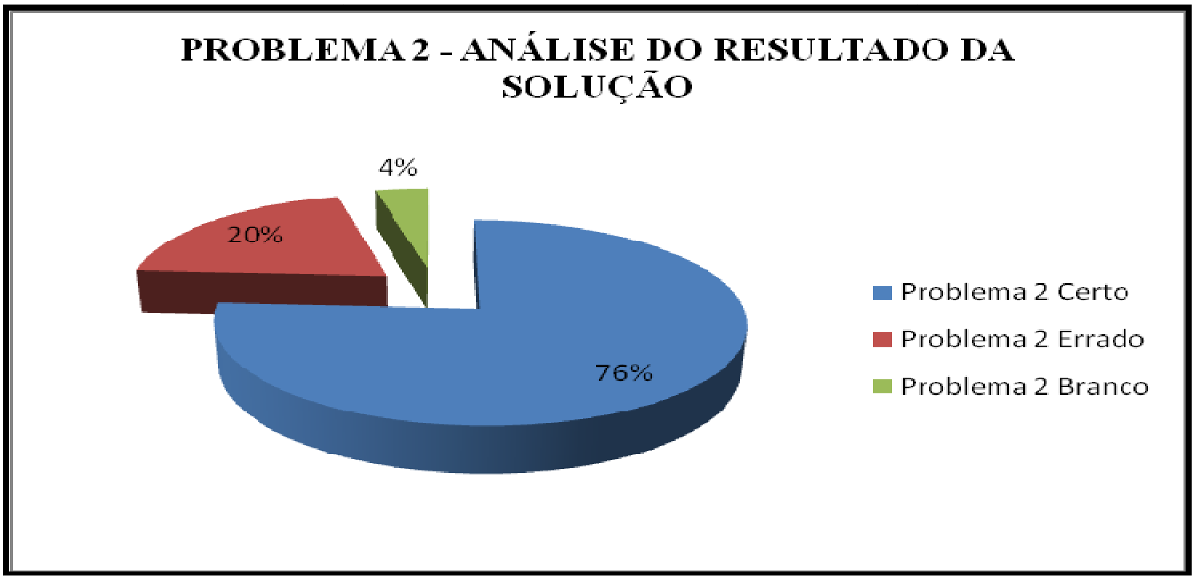
3.3.2 Problema 2

Nesse problema, a situação envolveu a ação de distribuir (partilha). Segundo Camejo (2009), esse tipo de problema apresenta no enunciado uma estrutura de fácil percepção, o que contribui para a solução. Para essa autora, na estrutura desse tipo de problema é dado um todo e a quantidade de partes em que deve ser dividido, e o resultado é o valor de cada parte.

Carvalho (2010), por sua vez, chama a atenção para o fato que, muitas vezes, os alunos fazem a partilha dos objetos por meio da divisão social, que para a autora difere da divisão matemática. Nas soluções desse problema, encontramos respostas pautadas no desenho, em que aparece a ideia de agrupamento de quatro pães para entregar a uma criança.

Assim, podemos inferir que os alunos, de fato, tendo em vista que houve 78% de respostas corretas para esse problema partitivo, têm mais vivência com esse tipo de situação por ser frequente nos LDs e, em consequência, no ambiente escolar. Por ser considerado um problema usual nas salas de aula, observamos que os alunos demonstraram criatividade na resolução, uma vez que apresentaram “de maneiras diferentes os problemas que envolvem divisão partitiva” (CUNHA, 1997, p. 15). Pela familiaridade com a situação, a forma esperada seria o uso do algoritmo convencional na maioria das respostas ou em todas elas. Nesse problema, os alunos não confundiram os referentes (pães e crianças) ao explicarem a resposta.

Gráfico 3 – Porcentagem das soluções quanto ao resultado do problema 2



Fonte: Escolas participantes da pesquisa (Ea, Eb e Ec) em nov/2010 e fev/2011.

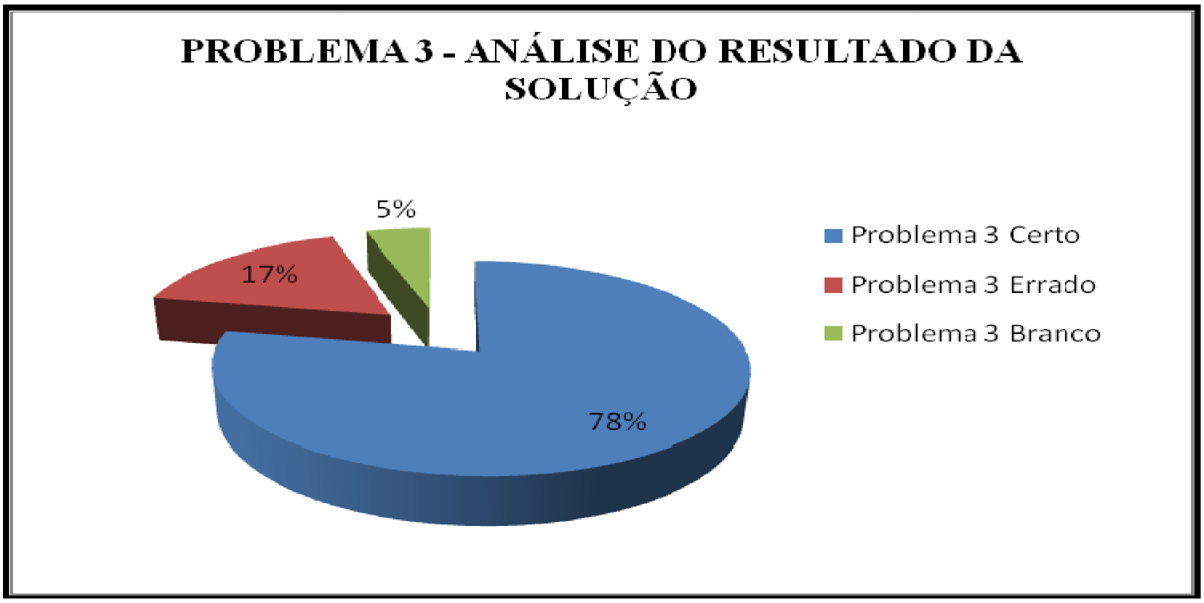
3.3.3 Problema 3

O problema 3 também envolveu o conceito de quotição, mas aqui o nosso referente está relacionado ao sistema monetário vigente, quantia e quantidade de cédulas.

Embora esse problema envolva a mesma ideia do problema 1, na tentativa de detectar quantos grupos existem no todo, foi grande o número de acertos. As soluções corretas indicam que os alunos, na resolução, mobilizaram seus conhecimentos práticos, porém, fizeram uso do campo multiplicativo, mas no aditivo grande parte das respostas teve resultado correto: dez cédulas.

A porcentagem de resultados corretos foi de 78%. No entanto, vale ressaltar que nem toda solução correta apresentou raciocínio coerente com o enunciado. No problema 3, a maioria das resoluções, predominou o raciocínio aditivo. O percentual de respostas em branco foi significativo, revelando que os alunos buscam uma solução para todo problema. Desse modo, cabe ao professor apresentar aos alunos problemas com solução e sem solução, para que essa ideia não seja tratada como um princípio-fim.

Gráfico 4 – Porcentagem das soluções quanto ao resultado do problema 3



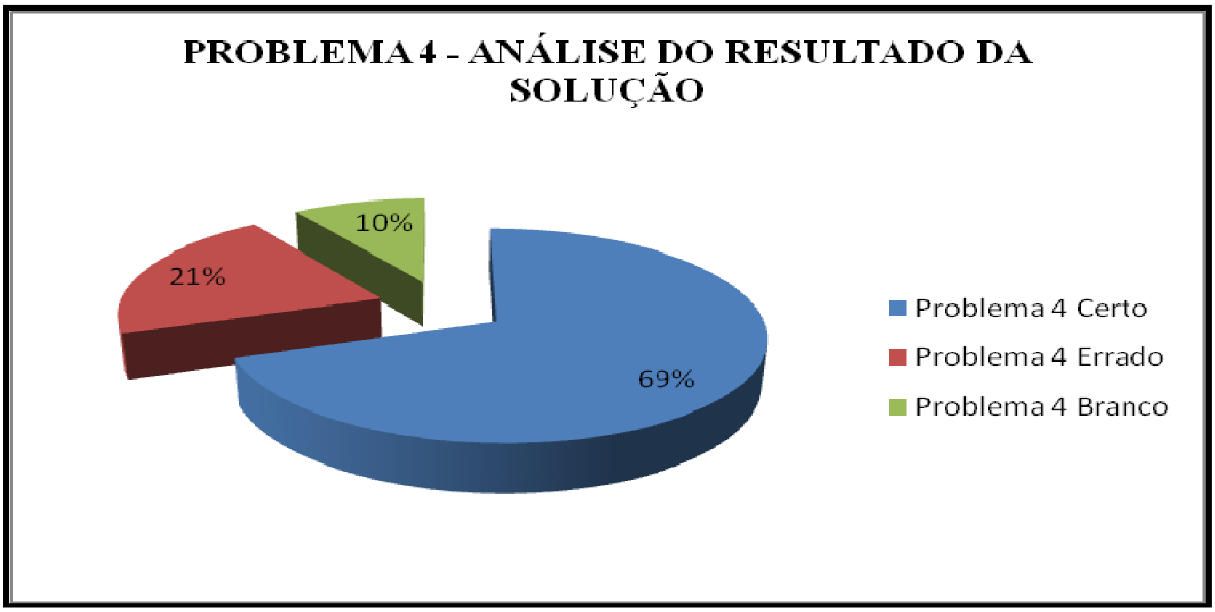
Fonte: Escolas participantes da pesquisa (Ea, Eb e Ec) em nov/2010 e fev/2011.

3.3.4 Problema 4

Esse problema envolve uma situação que implica o raciocínio quotitivo e também apresentou elevado índice de soluções corretas; 69%, dentre as 105 respostas obtidas. Vale ressaltar que, em muitas resoluções, foi usada a representação, o que demonstra que o aluno não associou o problema a uma situação prática de seu cotidiano. Podemos conjecturar que ele não teve vivência com situações que requerem o uso do raciocínio quotitivo. A porcentagem das soluções erradas chama a atenção; 21% das 105 soluções analisadas, evidenciando que os alunos ou têm dificuldade de leitura ou não identificaram as grandezas apresentadas no enunciado.

Após o levantamento das resoluções no que concerne ao resultado, buscamos identificar quais estratégias foram frequentes, independente do problema.

Gráfico 5 – Porcentagem das soluções quanto ao resultado do problema 4



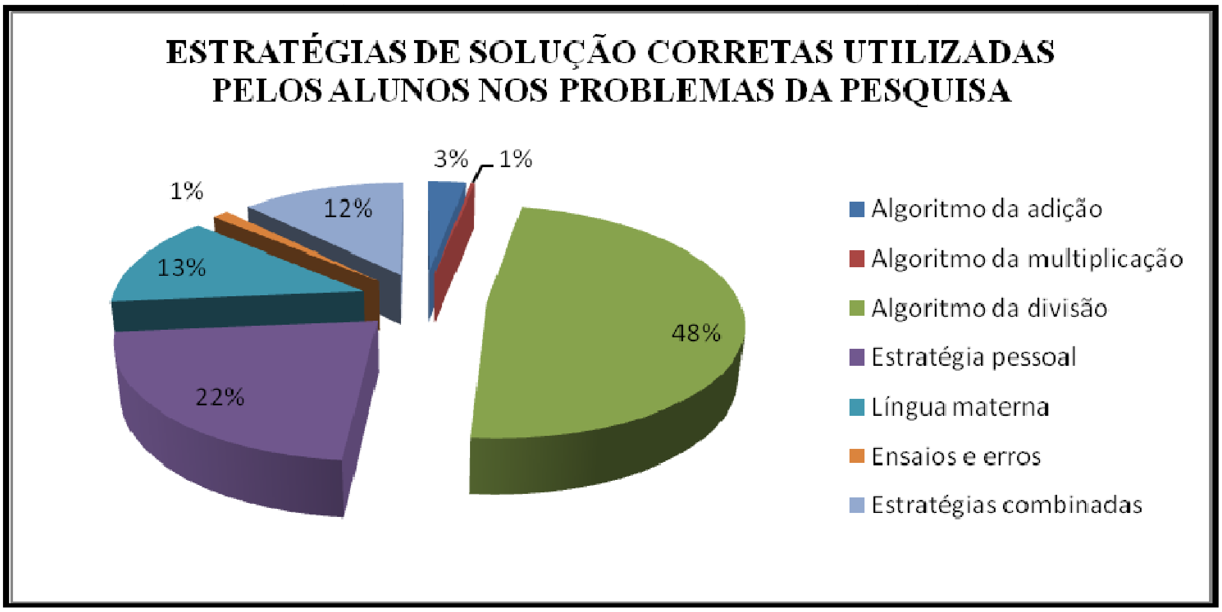
Fonte: Escolas participantes da pesquisa (Ea, Eb e Ec) em nov/2010 e fev/2011.

3.4 Análise quantitativa das respostas corretas quanto às estratégias

Entre os 105 alunos participantes, 48% utilizaram o algoritmo da divisão. Tal resultado indica que, nas aulas de Matemática, as professoras consideram como procedimento único a utilização do algoritmo convencional, a aplicação da operação de divisão, tendo em vista que, nos casos em que essa estratégia foi utilizada, muitos alunos não registraram a resposta aos questionamentos apresentados no enunciado nem justificaram como obtiveram a solução.

As estratégias pessoais caracterizaram-se, nesta pesquisa, pelo uso de desenhos, bolas, ilustração do enunciado, emprego do cálculo mental, este apresentado por meio do registro do resultado numérico ou uso de procedimento que envolve número, mas sem a utilização do símbolo das operações elementares (adição, subtração, multiplicação, divisão). Nessa estratégia, 22% dos alunos utilizaram ilustração, um índice significativo. Podemos conjecturar que os alunos, quando solicitados, demonstram como pensaram matematicamente.

Gráfico 6 – Estratégias frequentes dos alunos participantes da pesquisa



Fonte: Escolas participantes da pesquisa (Ea, Eb e Ec) em nov/2010 e fev/2011.

3.4.1 Análise das justificativas dos alunos aos problemas propostos

No que concerne às explicações sobre o procedimento utilizado em cada problema, observamos que poucos deles as apresentaram. Conforme Smole e Diniz (2001, p. 17),

> Sempre que pedimos a uma criança ou a um grupo para dizer o que fizeram e por que o fizeram, ou quando solicitamos que verbalizem os procedimentos que adotaram, justificando-os, ou comentem o que escreveram, representaram ou esquematizaram, relatando as etapas de sua pesquisa, estamos permitindo que modifiquem conhecimentos prévios e construam novos significados para as ideias matemáticas. Dessa forma, simultaneamente, os alunos refletem sobre os conceitos e os procedimentos envolvidos na atividade proposta, apropriam-se deles, revisam o que não entenderam, ampliam o que compreenderam e, ainda, explicitam suas dúvidas e dificuldades.

Smole e Diniz (2001, p. 19) ainda acrescentam que no caso de “crianças que ainda não escrevem, que não conseguem expressar-se oralmente, ou que já escrevem, mas ainda não dominam a linguagem matemática, o desenho pode ser uma alternativa para que elas comuniquem o que pensam.

Considerando a importância das justificativas dos alunos mediante a resolução de um problema, seguem dados quantitativos dos participantes que justificaram os seus procedimentos. Assim, convém destacar que quanto é usado a linguagem natural ou outra forma de explicar de como obtiveram o resultado, observamos que na realização de 420 soluções de divisão partitiva e quotitiva, encontramos as seguintes soluções cujos procedimentos foram explicados:

Quadro 15 – Justificativas das estratégias de resolução utilizadas pelos alunos na atividade final

Escolas	Nº alunos/ turma	Problema 1		Problema 2		Problema 3		Problema 4	
		Qtde	%	Qtde	%	Qtde	%	Qtde	%
Ea	25	8	32	6	24	5	20	5	20
Eb_1	17	9	52,9	9	52,9	8	47	8	47
Eb_2	27	11	40,7	10	37	14	51,8	14	51,8
Ec	36	8	22,2	5	13,8	3	8,3	2	5,5

Fonte: Alunos participantes da pesquisa.

Dos 105 alunos participantes da pesquisa que justificaram as estratégias de resolução, as porcentagens encontradas foram as que se seguem: ressaltamos que no problema 1, contamos com 34,2%; nos problemas 2 e 3, obtivemos 28,5%; e no Problema 4, houve 27,6%. Encontramos muitas explicações que não se auxiliam no entendimento acerca do pensamento matemático utilizado pelo aluno, como estas: “eu cheguei fazendo a conta”, “pela mente”, “eu fui direto”, “com listras”, “pensando”, “contando no dedo”, “eu cheguei a resposta contando na mente”, “somando e pensando” etc.

Vale destacar que, dos 36 alunos que justificaram a resolução do problema 1, apenas 7 alunos explicaram a estratégia utilizada considerando os conceitos do campo multiplicativo. No problema 2, dos 30 alunos que registraram de como chegaram à solução, 6 alunos apresentaram explicações, ainda superficiais, mas apresentando indícios da utilização das operações de multiplicação e divisão. Já, no problema 3, dos 30 alunos que justificaram a solução, apenas 5 alunos explicaram o procedimento, por meio da formação de grupos e do uso da operação de multiplicação. E, no problema 4, dos 29 alunos que explicaram a solução encontrada, computamos 2 alunos que formaram grupos e aplicaram a operação da de divisão.

As escritas acerca do procedimento posto pelos alunos revelam que eles não escrevem na disciplina de Matemática, apresentando dificuldade na utilização da linguagem matemática para explicação de seu pensamento matemático. Podemos inferir que eles desconhecem propostas de atividades que convertem linguagem matemática em linguagem natural e vice-versa. Como afirma Smole e Diniz (2001, p. 23): “a escrita não constitui para a matemática um segundo código, mas um código único. Os símbolos de Matemática, como as letras ou os caracteres em outras linguagens, formam a linguagem escrita de Matemática”. Daí, a importância de explorar as diferentes linguagens no ensino da Matemática.

Seguem-se as estratégias de resolução, mais frequentes, utilizadas pelos alunos participantes. Elas foram analisadas para tentar na busca de compreender os procedimentos adotados pelos alunos que adotaram no que se refere ao raciocínio empregado nos problemas que envolvem ação de distribuição e correspondência de um- para- um, os quais devem ser usados nas situações de quotição, enquanto aquele para os de partição.

3.5 Análise das estratégias

Os alunos participantes desta pesquisa apresentaram muitas formas de resposta para um mesmo problema, ressaltando a importância do trabalho com resolução de problemas. Conforme Magina et al. (2001), essa proposta de trabalho favorece o envolvimento dos alunos com uma variedade de problemas que os direcionam a explicitar as estratégias utilizadas. Essa gama de variedades de resoluções no espaço de sala de aula contribui para que o professor assuma uma mudança de postura tanto no que se refere ao ensino, como também ao tratamento e aos procedimentos diante das soluções dos alunos como, por exemplo, propondo comparação e discussão acerca das diferentes respostas, para que eles se apropriem de uma nova conceitualização.

O trabalho na perspectiva de resolução de problemas como recurso metodológico implica em direcionar o aluno da melhor na escolha da melhor forma de solucionar o problema e, sobretudo, no questionamento do enunciado. Educadores matemáticos como Pozo (1998), Dante (2000), Carvalho (2007), entre outros, comprovam que o trabalho com resolução de problemas encoraja os alunos para o revelar do pensamento matemático, direcionando-os a atingir sua autonomia ante a um problema enfrentado, permitindo-lhes, tomadas de decisões conscientes e planejadas, devido ao repertório de situações que lhes foi oferecido. Assim:

> É preciso oferecer às crianças diferentes possibilidades de resolver os problemas, sem vetar as estratégias criadas por elas nas resoluções. Os alunos precisam ser livres para pensar sobre qual a melhor forma de resolver os problemas e essas formas devem ser consideradas possíveis pelos professores. Diferentes formas ou estratégias de solução podem implicar também diferentes registros. É partindo dessas formas que podemos confrontá-las com o algoritmo convencional, levando os alunos a sua compreensão. Acreditamos que os alunos devem saber realizar as quatro operações básicas, entretanto, salientamos que o algoritmo convencional é apenas um das formas (GUIMARÃES; SANTOS, 2009, p. 4).

Além disso, tal proposta de trabalho permite a superação de algumas ideias que estão impregnadas no espaço escolar, entre elas a de que resolver problemas é para quem sabe ler e escrever.

Smole e Diniz (2001) e Carvalho (2007, 2010) consideram que as habilidades de ler e escrever ajudam na resolução de problemas, porém não são critérios de exclusividade para a construção de conceitos, pois o trabalho com essa metodologia requer que seja considerada a elaboração de um planejamento intencional, de acordo com o nível de conhecimento matemático do aluno, para que este, na intervenção individualizada ou coletiva, evolua em cada situação vivenciada, até descobrir a forma mais simples de solução, que é o uso do algoritmo.

Nessa direção, Starepravo (1997) e Carvalho (2007) recomendam que primeiro seja dado oportunidade de para os alunos evidenciarem suas estratégias de solução que, em princípio, são longas, mas necessárias para chegar ao uso do algoritmo por compreensão, e não modelo, técnica. Isso significa dizer que o uso do algoritmo tradicional nem sempre caracteriza a compreensão de conceitos.

Na resolução de problemas os alunos não têm apenas um caminho de solução, nem os problemas são estruturados da mesma forma. Carvalho (2007) enfatiza a importância de não classificar os problemas por sua estrutura, mas pela situação, sugerindo ao professor um ensino de Matemática que proporcione aos alunos lançar mão de suas estratégias de resolução, na perspectiva valorizar as diferentes soluções com que se depara quando opta por desenvolver um trabalho por meio de resolução de problemas. Este envolve compreender a situação por meio da compreensão dos dados, dos conceitos e, sobretudo, do caminho que os alunos levam para chegar a uma solução coerente com o enunciado.

Em conformidade com essas soluções, Diniz e Smole (2001) propõem que o tratamento da discussão, comparação e validação do resultado seja trabalhado com os alunos, para que eles compreendam o seu fazer matemático, podendo, por si só, criar mecanismo para alcançar evolução conceitual.

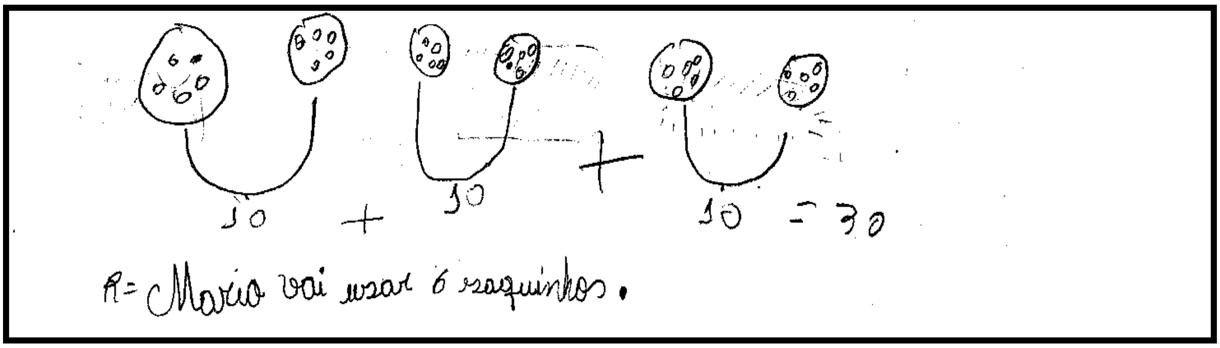
Seguem as estratégias selecionadas que se configuram como soluções diversificadas encontradas no *corpus* desta pesquisa.

3.5.1 As estratégias de solução presentes no conceito de quotição (medida/ correspondência um- para- muitos)

a) Algoritmo da adição

Problema 1 – Maria fez 30 brigadeiros e irá colocar 5 em cada saquinho. De quantos saquinhos ela irá precisar? Explique como você chegou à resposta.

Ilustração 1 – Solução do problema 1 por meio do raciocínio aditivo



Fonte: Aluno participante da pesquisa denominado Sc31

Considerando o raciocínio utilizado pelo aluno Sc31 para a resolução desse problema, verificamos que ele usou caminhos próprios de estratégias para obter o resultado. Para a resposta do enunciado, esse aluno tentou aproximar os dados a de uma situação concreta, demonstrando o seu próprio raciocínio. Tal procedimento revela que ele estava diante de um problema, e não de um exercício, uma vez que não registrou um modelo específico para esse tipo de situação, que envolve o campo multiplicativo.

Verificamos, assim, que o aluno não relacionou os dados numéricos presentes no problema com os termos da divisão, o todo (30 brigadeiros) como sendo o dividendo e a relação fixa (5 brigadeiros) como sendo o divisor. Conforme Nunes et al. (2002), para resolver problema de quotição faz-se necessário o reconhecimento da relação fixa da situação e de duas variáveis.

O procedimento revela uma estratégia pautada na contagem dos grupos formados e na verificação do resultado por meio da adição das partes, em que teve como suporte o desenho. Este, por sua vez, caracterizou-se como um meio para o aluno compreender o resultado, pois serviu como caminho e validação do resultado, uma vez que foi a contagem de cada elemento presente no saquinho e o senso numérico que lhe permitiram encontrar a solução, enfim, descobrir quantas partes foram necessárias para chegar ao todo. Nunes et al. (2002) quando o problema envolve números pequenos, o aluno pode chegar à solução correta, mas tal procedimento seria difícil de ser resolvido utilizado com números grandes.

Nesse sentido, Pozo (1998, p. 39) ressalta que o “uso de estratégias mais sofisticadas para a solução de problemas exigiria, então, em determinados contextos escolares e não escolares, a superação ou o abandono dessas formas simples ou intuitivas de raciocínio”. Para tanto, requer que o aluno tenha vivências de variedades de situações e formas de trabalho, para que na prática se torne um especialista, resolvendo e construindo problemas como assevera o autor.

A solução também traz indícios de o aluno ter utilizado a distribuição via correspondência um- a- um e, depois do desenho do enunciado, ter compreendido a correspondência um- para- um, o que facilitou a descoberta do número de saquinhos necessários para comportar os 30 brigadeiros. No entanto, o conceito de quotição não fica em evidência na compreensão desse procedimento, pois os grupos foram formados, mas a contagem explícita foi do número de elementos, que caracterizam uma parte e que, somados, resultam no todo, em cuja ação predomina o raciocínio de juntar, próprio do campo aditivo.

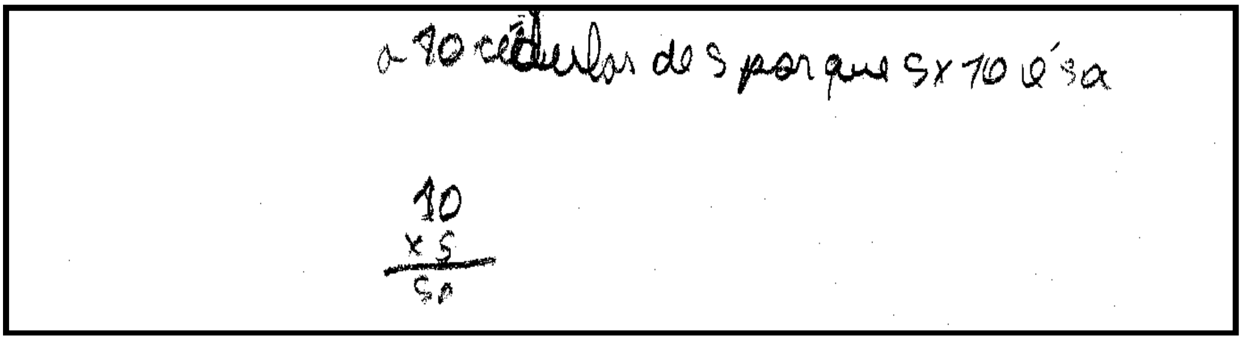
O aluno não atendeu ao quesito do enunciado que trata de explicação de como ele chegou à solução, como solicitado no enunciado. Nesta perspectiva, o Sc31 demonstra que não vivenciou situações de diálogo acerca da linguagem matemática e, sobretudo, que ela não é tratada como ciência que se relaciona com outras áreas, inclusive a Língua Portuguesa. Podemos conjecturar que, para esse aluno, resolver problema é aplicar algoritmo canônico.

Diante do exposto, o aluno chegou ao resultado correto, mas usando procedimento primário, a que não condizem com seu nível de escolaridade. Assim, valer ressaltar que o problema envolveu conceito de quotição, que implica a descoberta de quantas partes há no todo, via raciocínio multiplicativo e não aditivo.

b) Algoritmo da multiplicação

Problema 3 – Quantas cédulas de 5 reais há em 50 reais? Explique como você chegou à resposta.

Ilustração 2 – Solução do problema 3 por meio da técnica da multiplicação



Fonte: Aluno participante da pesquisa denominado Sc30

O aluno Sc30 resolveu a situação-problema por meio da operação de multiplicação. No entanto, o seu raciocínio revelou que ele reconheceu o problema como pertencente ao campo multiplicativo, tendo em vista que escreveu m sua resposta “há10 cédulas de 5 por que

5 x 10 é 50”.

É comum, no início da aprendizagem da multiplicação, o aluno ter dúvida quanto à propriedade de anulamento[14], isto é, qualquer número multiplicado por zero tem como resposta zero. Porém, podemos explicitar que essa ação de operar pode ter sido efetuada mediante o suporte da tabuada, pois o aluno também sinaliza, que por ter utilizado o número 10 em sua solução, que seu raciocínio foi mediado pelo conhecimento implícito acerca da tabuada e da propriedade comutativa.

Nunes et al. (2002, p. 94) nos alertam que

> uma resposta correta nesse problema não indica necessariamente que o aluno usou a comutatividade da multiplicação como base de seu raciocínio ao resolver o problema. Observamos que muitos alunos calcularam inicialmente o número total de bombons e depois dividiram pelo número de crianças, a fim de encontrar a resposta.

Na solução, o referido aluno demonstrou também saber manusear o dinheiro, em uso, o que nos permite conjecturar que esse conhecimento facilitou encontrar a resposta correta, porém, considerando o nível de escolaridade dele. Se considerarmos os números que aparecem no enunciado, verificamos que o Sc30 não estabeleceu relação com os termos da divisão.

Quanto ao campo multiplicativo, Benvenutti (2008) chama a atenção para a diferença entre as ideias da divisão, observando a incógnita. Para a autora (ibid.), a mudança da incógnita do problema significa alteração da natureza da operação a ser aplicada. Segundo suas pesquisas, o aluno deve resolver as situações considerando que “em problemas de divisão por partição a criança deve encontrar o tamanho das partes; já em problemas de divisão por quotição, deve encontrar o número de partes em que o todo foi dividido” (Ibid., p. 20). Percebemos a alteração na incógnita, que o aluno explicita, r que corresponde à quantidade de notas de 5 que formam 50 reais: o algarismo 10, que não se encontra presente nos dados do enunciado. Com isso, a operação por ele utilizada indica que houve mudança na natureza da operação a ser aplicada, que nesse problema deveria ser a divisão.

Esse tipo de equívoco é explicado por Tancredi (apud BENVENUTTI, 2008, p. 22), quando ressalta que “a operação de divisão tem sido um dos grandes obstáculos que os alunos enfrentam na escola [...] os motivos de tais dificuldades vão desde as características do próprio algoritmo até o nível de conhecimento que os professores têm sobre o assunto e de como ensiná-lo”.

Em relação aos conceitos em sua solução, podemos inferir que, além da operação da

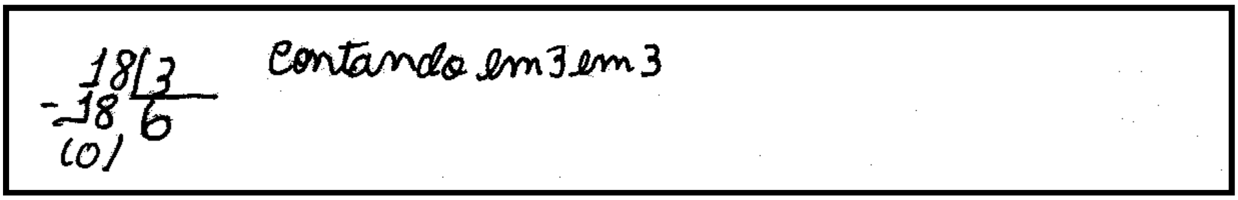
[14] 5 x 0 = 0 e não 5 x 0 = 5

multiplicação, do uso de cálculo mental para a contagem dos grupos formados, da adição de parcelas iguais (soma dos 5 reais), da contagem dos números de parcelas repetidas (grupos), o referido aluno deixa implícito que conhece a propriedade comutativa, quando explicita “5 x 10 é 50” e, diante do algoritmo da operação da multiplicação, “10 x 5 = 50”, ou que é uma prática cotidiana da professora nas aulas de Matemática o trabalho com atividade de armar e efetuar, obedecendo a essa estrutura. Assim, o aluno sinaliza ter entendido a situação como operação inversa, pois mentalmente encontra a quantidade de notas e, para validar a resposta, executa a operação da multiplicação para chegar ao todo, recorrendo a seu conhecimento acerca da tabuada de multiplicação, o que, para Vergnaud (2009), denomina-se de mobilização de conhecimento, e que tal ação é necessária para a construção de novos saberes.

c) Algoritmo da divisão

Problema 4 – Carlos vai fazer aniversário. Cada amigo que vier a sua festa vai ganhar 3 balões. Ele comprou 18 balões. Quantos amigos ele pode convidar? Explique como você chegou à resposta.

Ilustração 3 – Solução do problema 3 por meio da técnica da divisão



Fonte: Aluno participante da pesquisa denominado Sb$_2$26

Nessa solução, o aluno identificou os dados numéricos do enunciado com os termos da divisão. Reconheceu que o todo são os 18 balões, que correspondem ao dividendo, e os 3 balões, como são uma das partes, correspondendo ao divisor. Podemos depreender que foi a aplicação de uma técnica, porque ele justificou o procedimento pela adição de parcelas iguais, quando dizer “contando em 3 em 3”.

Correa e Spinillo (apud BENVENUTTI, 2008, p. 16) alertam que

> a solução correta de um problema ou operação nem sempre é sinônimo de uma compreensão mais sofisticada do conceito, pois a criança pode aplicar corretamente o algoritmo para a solução de um problema e ter um nível de compreensão bastante elementar, ou de maneira oposta, cometer erros ao aplicar algoritmo e ter um conhecimento mais elaborado do que a criança que resolve corretamente.

Podemos conjecturar também, que este aluno solucionou o problema pela percepção de que o 3 significa a quantidade de 3 balões que cada amigo receberá, apontando a correspondência um- para- um: um amigo deve receber 3 balões, dois amigos devem receber 6 balões e assim sucessivamente, até chegar ao todo.

Mediante a sua justificativa dada, "contando de 3 em 3", o aluno apresentou indícios de que somou as partes para chegar ao todo, não reconhecendo que essa parte é uma relação fixa, que caracteriza "o tamanho de cada parte em que o todo foi dividido" (SPINILLO; LAUTERT, 2006, p. 54).

No tocante à resolução de problemas, verificamos que o aluno não estava diante de um problema, se consideramos que, na situação, ele aplicou apenas o cálculo da operação de divisão. No entanto, aplicar a operação por si só não caracteriza a compreensão de conceitos, como é enfatizado no trabalho com resolução de problemas. Assim, Correa e Spinillo (apud BENVENUTTI, 2008, p. 16) enfatizam que

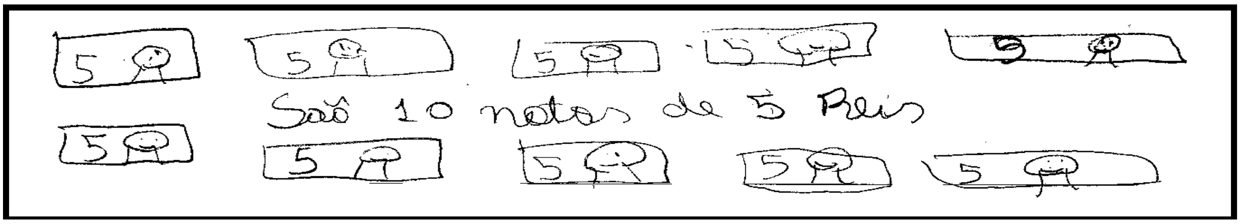
> a solução correta de um problema ou operação nem sempre é sinônimo de uma compreensão mais sofisticada do conceito, pois a criança pode aplicar corretamente o algoritmo para a solução de um problema e ter um nível de compreensão bastante elementar, ou de maneira oposta, cometer erros ao aplicar algoritmo e ter um conhecimento mais elaborado do que a criança que resolve corretamente.

No entanto, o aluno ao somar as partes para chegar ao todo, pode ter chegado à solução correta pelo reconhecimento da relação fixa, que o leva a realizar cálculo mental ou distribuição até chegar ao valor total, de acordo com Benvenutti (2008). Notamos que a solução do $Sb_2 26$ demonstra reconhecer o algoritmo tradicional da divisão, uma vez que se encontra implícito o conhecimento acerca da multiplicação e, ainda, está explícito o uso da subtração na sua resolução. Por outro lado, Mamede (2012, p. 250) nos alerta que "restringir o cálculo realizado na sala de aula ao cálculo escrito, é limitar em muito as potencialidades do cálculo e o desenvolvimento de capacidades que lhes são inerentes, fundamentais para a formação dos indivíduos da sociedade atual".

d) Estratégia pessoal

Problema 3 – Quantas cédulas de 5 reais há em 50 reais? Explique como você chegou à resposta.

Ilustração 4 – Solução do problema 3 por meio da representação do enunciado



Fonte: Aluno participante da pesquisa denominado Sa2

Nessa solução, o aluno representou o enunciado tomando por base o valor fixo, a quantia de 5 reais. Ao desenhar os valores, o Sa2 apresentou indícios de que tomou como base a contagem das quantidades de notas de 5 que ele tem para obter o valor de 50 reais. Na resposta “são 10 notas de reais” demonstra ter feito o cálculo mental, tendo em vista que não há registro do algoritmo.

Acreditamos que foi o reconhecimento do sistema monetário, bem como a mobilização dos seus conhecimentos, que favoreceu ao aluno solucionar o problema. Apesar de ter usando de estratégias diversificadas, inferimos que ele não relacionou os dados numéricos do problema como sendo uma divisão, pois resolveu por meio da contagem de 5 em 5 e da decomposição dos cinquenta reais. Tal procedimento corrobora com a pesquisa de Spinillo e Lautert (2006), as quais afirmam que os alunos, mesmo que ainda não formalmente ensinados, conseguem da sua maneira, resolver problemas escolares ou do cotidiano.

Como esse problema envolve o conceito de quotição, a solução apresentada pelo aluno, apesar de variada, vai aquém da solução esperada para um aluno do 4º ano do EF, já que ainda resolve problema de divisão pela quotição, isto é, prevaleceu a solução mediada pelo conhecimento social, e não o matemático, especificamente no que se refere ao conceito quotitivo, que requer, conforme Nunes et al. (2002), a identificação do invariante conceitual, que se caracteriza pela existência de uma relação fixa entre duas variáveis. E, ainda, nesse tipo de problema, as referidas autoras (ibid.) alertam que a dificuldade em solucionar problemas de quotição está relacionada em não saber lidar com a coordenação dos esquemas de multiplicação e divisão, que se refere à correspondência um- para- um e ao esquema de agrupamento.

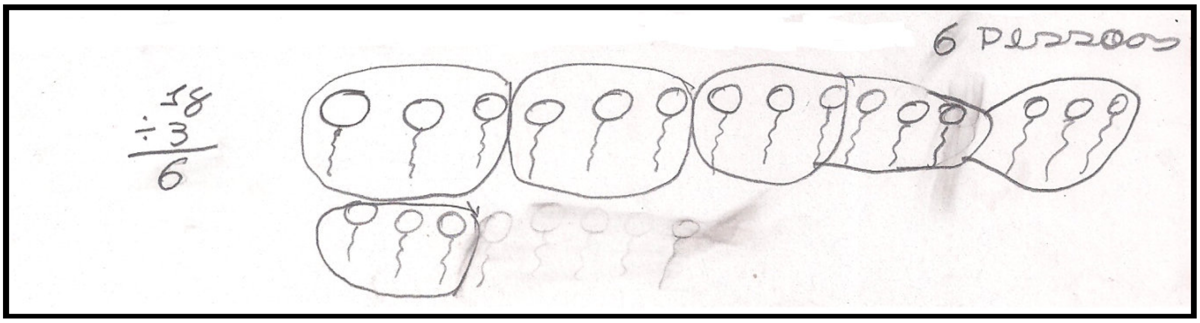
O aluno sinaliza, em seu desenho, que associou a correspondência quantidade de cédulas x valor de cinco reais sem fazer uso de símbolos da operação elementar.

Por outro lado, as autoras associam a dificuldade em solucionar problemas de quotição à ação de não saber lidar com a coordenação dos esquemas de multiplicação e divisão, que são a correspondência um- para- um e o esquema de agrupamento. Observam que embora as pesquisas em Educação Matemática apontem que é possível trabalhar o campo multiplicativo desde os anos iniciais, é "mais fácil solucionar problemas diretos do que os inversos" (NUNES et al., 2002, p. 91), pois estes exigem a descontinuidade do raciocínio aditivo.

e) Ensaios e erros

Problema 4 – Carlos vai fazer aniversário. Cada amigo que vier a sua festa vai ganhar 3 balões. Ele comprou 18 balões. Quantos amigos ele pode convidar? Explique como você chegou à resposta.

Ilustração 5 – Solução do problema 4 por meio de uso da subtração reiterada



Fonte: Aluno participante da pesquisa denominado Sb_218

A solução sinaliza o uso do raciocínio da adição repetida. Esse aluno demonstrou estar diante de um problema, uma vez que seu procedimento foi longo e pautou-se principalmente no registro de vários balões, sem considerar em princípio o todo (18 balões). Ele formou grupos a partir da relação fixa (3 balões), como se observa nas marcas apagadas do excesso de balões.

Nessa direção, Nunes et al. (2002), ao analisarem esse problema[15], frisam que o enunciado

> descreve a relação entre o número de balões e o número de amigos: três balões por amigo. O fator ausente é o número de amigos. Quando apresentamos problemas desse tipo a alunos de primeira e segunda série e lhes oferecemos blocos para que resolvam o problema, sua solução típica é fazer grupos de 3 blocos: o número de grupos corresponde ao número de amigos que Carlos pode convidar. O problema é, portanto, resolvido usando o esquema de correspondência um- a- muitos. Embora seja um problema inverso, a estratégia de correspondência pode ser usada porque o problema contém a informação sobre a relação fixa entre número de amigos e número de balões [...] o esquema de correspondência ainda pode ser usado, embora com uma pequena modificação: o aluno precisa tirar a conclusão de que o número de grupos é igual ao número de amigos que se pode convidar. (NUNES et al., 2002, p. 90)

[15] Esse problema de quotição foi aplicado pelo grupo de pesquisa de Nunes et al. (2002) a alunos do I ciclo do Ensino Fundamental por meio de materiais concretos.

A operação de divisão apresentada na solução do problema revela indícios de que o aluno ainda não tem o domínio do algoritmo da divisão, pois a estrutura assemelha-se à das operações fundamentais de adição e subtração.

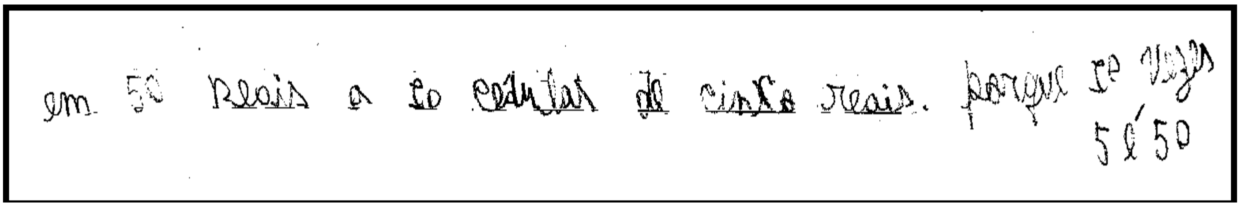
A resposta à operação revela-nos que o aluno teve por base a multiplicação, que é a operação inversa da divisão. Sendo assim, podemos conjecturar que este aluno identifica a situação como problema do campo multiplicativo, mas que a afirmação de sua resposta somente é validada na contagem dos grupos formados. Com isso, percebemos que a operação de divisão foi utilizada sem que o aluno atribuísse um sentido para o enunciado. Nessa direção, Benvenutti (2008) reafirma que os alunos não atribuem significado ao algoritmo que aplicam, uma vez que o ensino dos conteúdos da multiplicação e da divisão está centrado mais na técnica que no desenvolvimento conceitual.

Logo, podemos afirmar também que o aluno não atribuiu sentido ao questionamento do enunciado “como chegou à solução”, evidenciando não ser uma prática familiar em seu espaço escolar e que a Matemática se soluciona por meio de contas e não de palavras, mesmo levando em consideração o desenho como justificativa para a escolha do procedimento e, em consequência, o raciocínio aditivo ou multiplicativo.

f) Língua materna

Problema 3 – Quantas cédulas de 5 reais há em 50 reais? Explique como você chegou à resposta.

Ilustração 6 – Solução do problema 3 por meio da escrita convencional, a linguagem natural.



Fonte: Aluno participante da pesquisa denominado Sa15

O aluno apresentou uma solução pautada no campo multiplicativo, uma vez que, em linguagem natural, sinalizou que reconheceu os dados do enunciado, optando pela inversão da divisão. Conforme Caraça (1984, p. 22), “dado o dividendo e o divisor, se determina um terceiro número, quociente, que multiplicado pelo divisor dá o dividendo”.

Convém ressaltar que Nunes et al. (2002, p. 91) consideram os problemas de divisão de quotas como problemas inversos da multiplicação porque “os alunos resolvem o problema com a mesma estratégia que utilizam para resolver problemas de multiplicação". Perceber essa relação faculta ao aluno pensar em procedimento que se utiliza da correspondência e não da distribuição.

A solução desse aluno demonstrou também que ele identificou as grandezas presentes na situação, a quantidade e quantia de cédulas são familiares. Nesse sentido, parece-nos que o aluno estabeleceu relações entre a Matemática da escola e a Matemática da vida, pois atribuiu sentido à situação enfrentada. Além disso, o aluno sinaliza ter utilizado o conhecimento da tabuada, quando diz "10 vezes 5 é 50'.

Nesse sentido, podemos conjecturar que o referido aluno superou o paradigma da visão que a sociedade tem acerca do ensino da Matemática, de uma disciplina que se limitada à aplicação de fórmulas e à memorização de fatos básicos não auxiliam na compreensão de conceitos, tendo em vista que ele resolveu o problema sem a utilização de modelos, apresentando os seus próprios caminhos de solução, uma resposta via linguagem escrita e não conta, como se espera nas aulas de Matemática tradicionais.

Diante disso, Sadovsky (2007, p. 16) afirma que muitos alunos têm medo da disciplina Matemática porque "o ensino se resume a regras mecânicas que ninguém sabe, nem o professor, para que servem". Observamos que os dados referentes ao sistema monetário presentes no enunciado permitiram que o aluno reconhecesse as grandezas, a parte fixa da situação, os 5 reais, demonstrando, com isso, que ele sabe para serve a Matemática e, em consequência, as cédulas, atribuindo sentido ao enunciado diante de sua solução.

Verificamos, na solução desse problema, que o aluno não tratou a escrita dos valores das cédulas de forma diferente dos números naturais ou inteiros positivos. Podemos conjecturar que o enunciado influenciou para o registro das cédulas na forma de números inteiros e que a escrita de números decimais ou racionais ainda não lhe é familiar em ambiente escolar, no que se refere à forma de registro do nosso sistema monetário, o real. Inferimos que o conteúdo aprendido não lhe deu possibilidades de estabelecer relações entre os números decimais e a escrita convencional do nosso sistema monetário. Tais indícios comprovam que o ensino de Matemática foi apresentado a esse aluno de forma estanque/fragmentada, não havendo a utilização do espaço da sala de aula para discussões, comparações, identificação de semelhanças, diferenças, como é proposto na metodologia de resolução de problemas.

Mediante a solução do aluno, constatamos que resolver um problema por meio da língua natural é uma das formas para solucionar uma situação, mesmo que o aluno tenha conhecimento da linguagem específica da Matemática. Nessa direção, Feio (2009) assinala que é necessária a conversão da língua natural para a linguagem matemática e que se levem em conta as relações entre essas duas linguagens, pois, conforme Machado (apud FEIO, 2009, p. 88):

> A língua materna é imprecisa, frequentemente de caráter polissêmico, é comum pretender-se que a Matemática represente para a Ciência o papel de uma linguagem precisa, monossemia, depurada de ambiguidades.

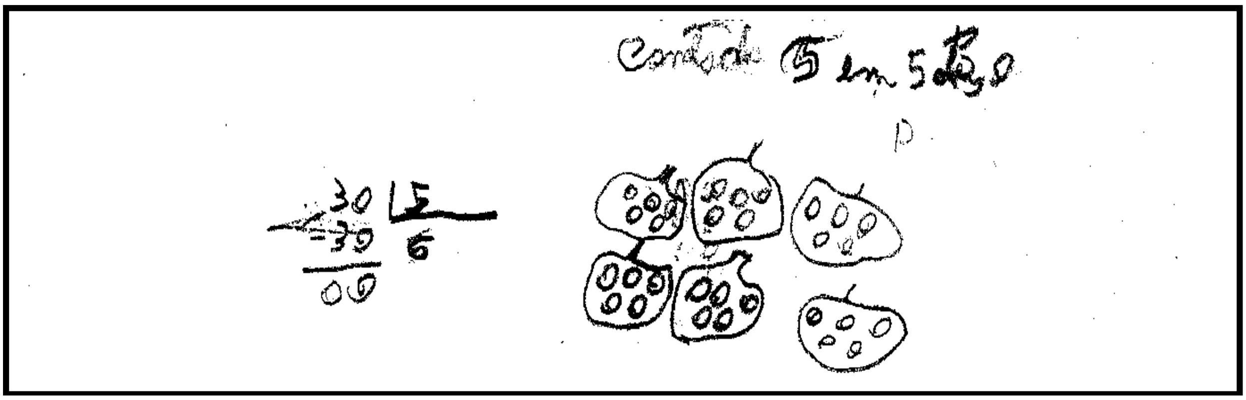
Por outro lado, vale ressaltar que o referido aluno não justificou como chegou à solução, o que revela que a Matemática vivenciada está relacionada a cálculo, e não a explicações dos conceitos trabalhados ou procedimentos desenvolvidos.

Dado o exposto, podemos conjecturar que a estratégia do aluno se pautou na multiplicação, a partir do conhecimento que ele tem acerca dessa operação. Inferimos que ele mobilizou o conhecimento sobre propriedade comutativa, o que lhe permitiu a fazer uso da incógnita da situação em seu raciocínio. Logo, embora a multiplicação seja parte do campo multiplicativo, a solução do aluno não atendeu ao raciocínio requerido na situação proposta, pois o raciocínio a ser realizado em problema de quotição requer a descoberta do número de grupos a serem formados, e não do número de elementos do grupo. Na resposta do aluno, a incógnita já foi evidenciada na solução. Neste sentido, o procedimento utilizado foi incoerente com o problema proposto.

g) Estratégias combinadas

Problema 1 – Maria fez 30 brigadeiros e irá colocar 5 em cada saquinho. De quantos saquinhos ela irá precisar? Explique como você chegou à resposta.

Ilustração 7 – Solução do problema 1 por meio do raciocínio aditivo, operação da divisão e desenho.



Fonte: Aluno participante da pesquisa denominado Sc12

Nessa solução, o aluno fez uso da representação gráfica (esquema) do enunciado para validar a sua solução, tendo em vista que sua justificativa para a situação revela utilização da contagem, pois ele chegou à solução “contando de 5 em 5 até 30”. Nessa direção, Starepravo (1997) ressalta que os procedimentos de estratégias pessoais são caminhos criados pelos alunos que não foram ensinados na escola, mas construídos por eles com base no próprio conhecimento dos números. E esses conhecimentos são fundamentais para situações deste tipo e ainda para auxiliar no enfrentamento de novas situações e, assim, direcionar para a aprendizagem de novos conceitos.

Observamos que a solução do referido aluno não apresenta um único caminho para chegar à resposta, utilizando estratégias combinadas. Podemos conjecturar que ele leu e tentou compreender o enunciado, revelando estar diante de um problema, e não de um exercício, pois, “quando trabalhamos com problemas, nossos alunos pensam diretamente no sentido das contas que fazem” (STAREPRAVO, 1997, p. 74), e, mediante esse envolvimento, aprendem a problematizar, bem como a ser problematizados.

Em sua solução, verificamos que o aluno identificou a grandeza relacionada ao número, fazendo-lhe emitir uma resposta coerente. Há evidências de que partiu da relação fixa presente no enunciado, representou a situação e, em consequência, reconheceu que o enunciado solicita o número de sacolinhas e não de brigadeiros. O procedimento utilizado por ele no emprego da operação de divisão apresentada pelo aluno traz indícios da busca de compreender a propriedade da divisão em que $a : b = q$, quando se trata de divisão com resto zero, como foi o caso da operação empregada nesse problema. Na divisão de resto zero, o aluno deve compreender os termos para que estabelecer as relações necessárias — identificação do dividendo e do divisor e que este deve ser diferente de zero para que possa tratá-la como inversa da multiplicação.

Embora o aluno tenha registrado a operação de divisão corretamente ele pode ter utilizado esse conhecimento como um modelo aprendido pelo professor. Nunes et al. (2002) reafirmam a complexidade da divisão em virtude da necessidade de compreensão desse conteúdo, que requer entender a relação entre as partes que o compõem e levar em conta o tamanho do todo e o número das partes, o tamanho das partes, e a relação inversa entre o tamanho das partes e o número das partes.

No tocante à resolução de problemas e ao campo multiplicativo, podemos conjecturar que a solução empregada pelo aluno revelou um caminho pautado no conhecimento social, pois na distribuição dos 30 brigadeiros, representou uma ação comum no cotidiano não escolar dos alunos, que é repartir por igual. Carvalho (2010) nos chama a atenção para o fato de que a ação distribuição pode estar associada ao ato de dividir socialmente, que é diferente da ideia da divisão na matemática. Logo, esse procedimento não pode permanecer no raciocínio do aluno ao resolver uma situação-problema de Matemática. Ele deve compreender o seu fazer matemático, isto é, precisa desenvolver o seu pensamento matemático para enfrentar as diferentes situações e, assim, empregar o raciocínio mais adequado ao problema solucionado.

Podemos conjecturar que as mobilizações do conhecimento do aluno levaram a coordenar o controle da solução, e ele resolveu um problema e não um exercício. Conforme Starepravo (1997, p. 74), “quando trabalhamos com problemas, nossos alunos pensam diretamente no sentido das contas que fazem” e buscam apresentar o caminho mais econômico para a solução. Tendo em vista que a solução apresenta procedimento longo, isso indica que o aluno ainda não é um especialista, como denomina Pozo (1998), por enfrentar uma situação nova.

Verificamos que todo o procedimento do aluno foi pautado no campo aditivo, sendo necessárias boas intervenções para que ele compreenda as relações no tocante ao tratamento acerca do raciocínio do campo multiplicativo, que requer esquema de distribuição ou correspondência um- para- muitos. Essa situação requer o uso desse raciocínio por ser um problema que apresenta a mesma estrutura de um enunciado que envolve a multiplicação.

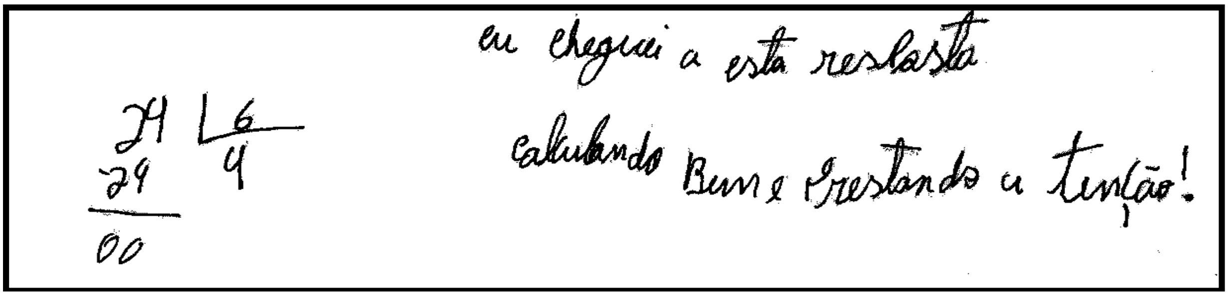
A manutenção do raciocínio aditivo, nessa situação, caracterizou-se como uma ação que não permite avanço conceitual, pois há a continuidade do raciocínio aprendido em etapas anteriores, o uso do campo aditivo. No entanto, o estudo acerca de resolução de problemas nos ensina que a solução de problema de divisão não deve ficar restrita ao campo aditivo nem ao conteúdo da multiplicação, pois dividir e multiplicar requerem novas ações para lidar com a relação parte-todo, cujo raciocínio é diferente do campo aditivo.

3.5.2 As estratégias de solução presentes no conceito de partição (distribuição)

a) Algoritmo da divisão

Problema 2 – Se repartimos 24 pães para 6 crianças, quantos pães receberá cada uma? Explique como você chegou à resposta.

Ilustração 8 – Estratégia de solução por meio da operação da divisão.



Fonte: Aluno participante da pesquisa denominado $Sb_2 13$

O aluno, em seu procedimento, demonstrou que aprendeu a calcular, revelando em sua justificativa (“eu cheguei a esta resposta calculando bem e prestando atenção!”) que a técnica foi aprendida mediante a sua atenção por ter atentado ao modelo apresentado no contexto escolar. Diante disso, observamos que o referido aluno mobilizou seus conhecimentos acerca da multiplicação, procurando identificar qual número multiplicado por 6 dá ou se aproxima de 24, encontrando o algarismo 4, cujo resultado foi subtraído ao divisor. Tal procedimento demonstra que ele reconheceu os termos da divisão — dividendo (24 pães), divisor (6 crianças) — e deu tratamento adequado aos dados numérico presentes no enunciado para encontrar o quociente (4 pães) e o resto zero.

Sobre a resolução de problemas, observamos que o aluno utilizou um procedimento, que foi o conhecimento acerca da operação da divisão, o que indica tratar-se de um saber aprendido em um período não muito distante da aplicação desta atividade de pesquisa. Assim, mostrou-nos que não estava diante de um problema, mas sim de um exercício, por solucioná-lo por meio do algoritmo mais econômico, solicitado pela situação.

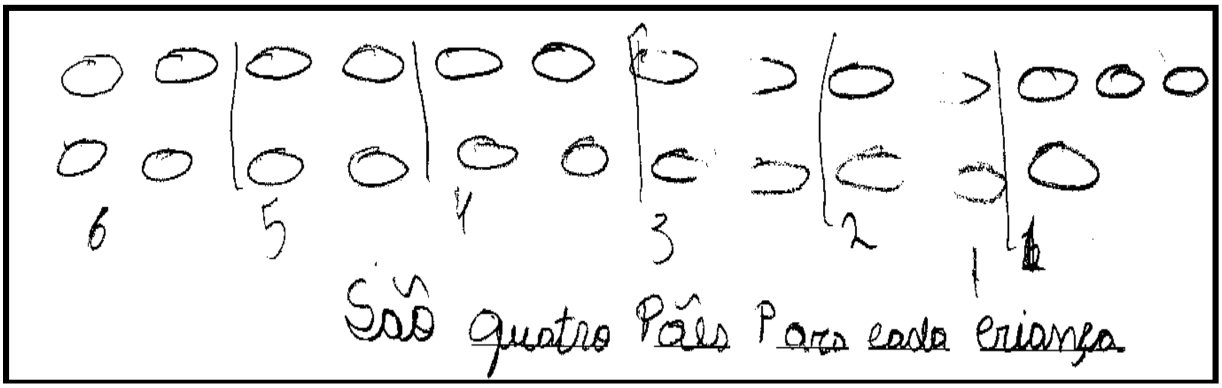
Tendo em vista que esta pesquisa busca analisar a estratégia de solução do ponto de vista conceitual, Nunes et al. (2002, p. 83) enfatizam que há diferença entre a divisão partitiva e quotitiva. Embora as duas ideias apresentem a mesma estrutura, duas variáveis, neste caso o problema em questão corresponde a uma divisão partitiva, que requer a ação de distribuição; ele “não pode ser resolvido por correspondência, porque a relação fixa não é conhecida”. Logo, conforme as autoras, a pergunta para o problema seria encontrar qual a relação que devemos fixar para que o número de pães por criança seja constante. Encontrar esse número constante da situação, que significa usar o procedimento do esquema da distribuição equitativa.

Vale ressaltar que para o problema, o aluno usou a operação de divisão e a explicou de como chegou ao resultado, porém, não registrou a pergunta do problema, que é: “quantos pães receberá cada uma?”. Assim, podemos conjecturar que o aluno não atribui sentido às grandezas (pães e crianças) presentes no enunciado.

b) Estratégia pessoal

Problema 2 – Se repartimos 24 pães para 6 crianças, quantos pães receberá cada uma? Explique como você chegou à resposta.

Ilustração 9 – Estratégia de solução do problema 2 por meio do raciocínio da subtração reiterada



Fonte: Aluno participante da pesquisa denominado Sa2

O procedimento do aluno, diante dessa situação, foi representar o todo (24 pães). Ele que mobilizou os conhecimentos acerca da contagem e, em seguida, mediante a relação com a propriedade comutativa e o conhecimento da tabuada, encontrou a relação fixa do problema, formando grupos e, em consequência, a sequência de números de 1 a 6, escritos da direita à esquerda. São indícios de que o aluno associou a sua contagem ao número de crianças para 4 pães, o que caracteriza a correspondência um- para- muitos.

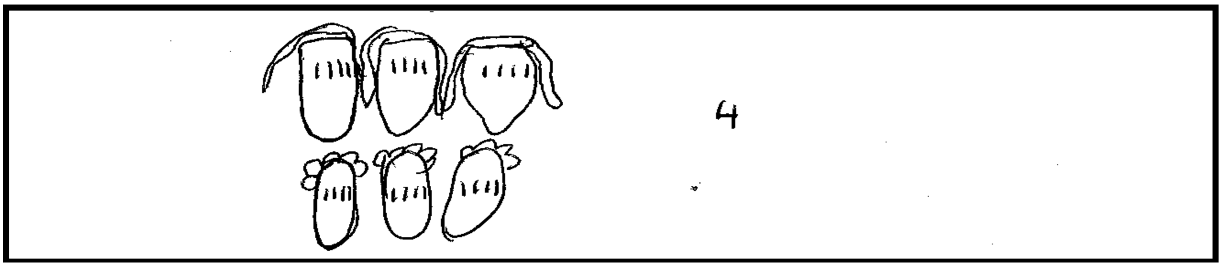
Do ponto de vista conceitual, o referido aluno não apresentou raciocínio no campo multiplicativo, uma vez que fez sua solução pautou-se no raciocínio aditivo, em que do todo foram retiradas as partes até se esgotar a retirada, dando-nos a entender, por outro lado, que utilizou uma divisão partitiva, que requer a coordenação de esquema de distribuição equitativa, conforme assinalam Nunes et al. (2002) em suas pesquisas.

Quanto às relações, podemos conjecturar que o aluno identificou a quantidade que se refere ao todo, mas não relacionou ao termo da divisão denominado de dividendo. Ao representar os 24 pães por 24 bolinhas, implicitamente ele sinaliza que fez subtração reiterada de 4 em 4, que encontrou por meio de seu conhecimento acerca da multiplicação, pois o enunciado apresenta o algarismo 4.

Podemos conjecturar que o aluno não apresenta procedimentos aceitáveis da solução para o campo multiplicativo, pois há implicitamente a predominância da subtração reiterada, que se caracteriza como limitação do raciocínio ao campo aditivo.

Problema 2 – Se repartimos 24 pães para 6 crianças, quantos pães receberá cada uma? Explique como você chegou à resposta.

Ilustração 10 – Estratégia de solução por meio do desenho, correspondência um- a- um e agrupamento.



Fonte: Aluno participante da pesquisa denominado Sb_18

O aluno usou, na solução do problema, o procedimento de esquema de distribuição com que ilustrou o enunciado, desenhando as crianças, uma das grandezas do problema, apresentando indícios de uma busca de aproximação da situação matemática para a prática. Nessa direção, Lautert e Spinillo (2002, p. 23) afirmam que "o esquema de ação da distribuição permite que os alunos que ainda não foram formalmente ensinadas consigam resolver, de modo prático, problemas escolares ou do cotidiano".

Na solução, o Sb_18 demonstrou reconhecer o todo (24 pães) e o número de crianças que receberiam uma quantidade fixa de pães, e, por meio da correspondência um- a- um, distribuiu o valor apresentado no enunciado até se esgotar a quantidade citada.

Nessa situação, podemos conjecturar que o aluno mobilizou os conceitos de correspondência um- a- um, ao distribuir o todo (24 pães para as 6 crianças); de agrupamento, ao formar seis grupos com 4 elementos; de contagem de quantos elementos constam em cada grupo; e correspondência de um- para- muitos ao identificar a relação de uma criança para quatro pães e assim sucessivamente.

Por outro lado, podemos inferir que a solução do aluno foi elementar, pois há outras formas mais eficientes de resolução para o problema, já que, conforme Smole e Diniz (2001), o desenho é apenas uma alternativa para que os alunos comuniquem o que pensam; mas não pode ser tratada no Ensino Fundamental como única, pois eles devem aprender a linguagem matemática. Neste estudo, estamos trabalhando não com crianças da Educação Infantil, mas com alunos do 4º ano dos anos iniciais de escolarização.

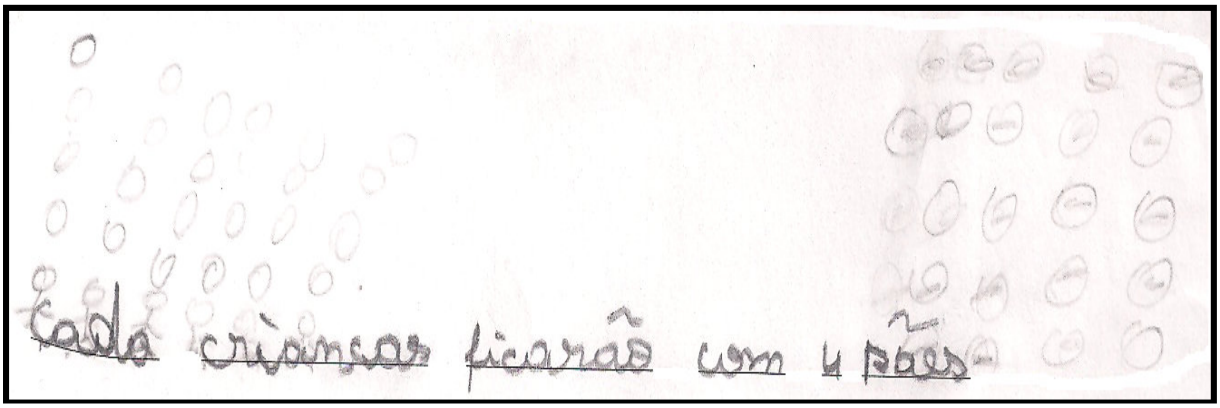
Ainda conforme a Smole e Diniz (ibid.), o desenho pode ser utilizado em diversas soluções. Aqui, verificamos que ele foi utilizado para resolver o problema, e não apenas como ilustração do enunciado.

Conforme o exposto, na solução do aluno, embora predomine o desenho, o raciocínio da distribuição é coerente com o enunciado, que envolve uma situação de divisão partitiva.

c) Ensaios e erros

Problema 2 – Se repartimos 24 pães para 6 crianças, quantos pães receberá cada uma? Explique como você chegou à resposta.

Ilustração 11 – Estratégia de solução utilizada por várias tentativas para encontrar o resultado correto



Fonte: Aluno participante da pesquisa denominado Sa14

Segundo Nunes et al. (2002, p. 91), o procedimento ensaio e erro corresponde a uma ação dos alunos em que experimentam valores até chegar à solução correta. Para encontrar a resposta para a situação, a autora enfatiza que "o comportamento desses alunos, embora levando a acerto no problema, indica sua dificuldade em coordenar os esquemas de multiplicação e divisão". Observamos que ele apresentou duas ilustrações, uma pictográfica, em que representou as crianças e fez a distribuição um- a- um como controle da distribuição; na outra ilustração usou bolas na configuração 5 x 5, demonstrando tê-la utilizado para contagem, e mas, após perceber o equívoco, traçou novo caminho para a busca da solução.

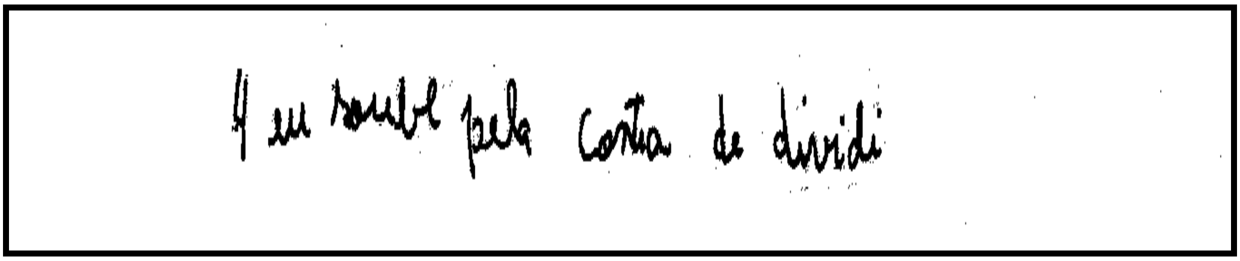
Nessa direção, podemos conjecturar que o aluno não planejou, a princípio, o melhor caminho para encontrar a resposta, mas, mediante o sentido numérico, não aceitou a quantidade contada na ilustração das 25 bolas, e procurou outro esquema para problema. Com isso, há evidências de que o Sa14 enfrentou uma situação nova, implicando que o referido aluno estava diante de um problema, e não um exercício.

Essa estratégia, se mediada pela comunicação oral, por meio das atividades de justificativas de como foi pensada a solução, se comparada e debatida no coletivo, facultaria a esse aluno a reorganização do seu fazer matemático, contribuindo assim para a construção de novos conceitos.

d) Língua natural

Problema 2 – Se repartimos 24 pães para 6 crianças, quantos pães receberá cada uma? Explique como você chegou à resposta.

Ilustração 12 – Estratégia de solução mediada pelo cálculo mental e conhecimento da tabuada da multiplicação



Fonte: Aluno participante da pesquisa denominado Sc22

O problema matemático pode ser solucionado por meio de diferentes estratégias, as quais dependem do nível de compreensão do aluno acerca do problema vivenciado por ele. Nesse caso, a atividade demonstra que o aluno compreendeu o enunciado e que, implicitamente, conhece a tabuada da multiplicação ou que já vivenciou a divisão com os referidos algarismos do problema, tendo feito uso de cálculo mental. Assim, verificamos que ele apresentou o resultado apenas na escrita convencional, registrando como chegou à solução, em virtude da solicitação do enunciado.

A objetividade da resposta mostra-nos que o aluno já tem familiaridade com esse tipo de problema e que domina a tabuada. Logo, podemos conjecturar que, por meio da propriedade comutativa, o referido aluno chegou à solução correta. Para tanto, fez uso de conceitos da Aritmética, como multiplicação e divisão, e a "conta" expressa em sua resposta está associada ao cálculo mental, pois não usou nenhum símbolo matemático.

Podemos ressaltar que esse aluno não resolveu uma situação nova, pois sua estratégia de solução, embora não tenha sido o algoritmo da operação de divisão, tida como a forma mais econômica de resolução de um problema matemático, sinaliza que identificou os dados do enunciado, tratando-os como operação inversa da multiplicação. Nesse sentido, o referido aluno apresenta características de que parece entender que resolver problemas é encontrar uma solução. Diniz e Smole (2001, p. 11) ressaltam que

> a competência da resolução de problemas envolve a compreensão de uma situação que exige resolução, a identificação de seus dados, a mobilização de conhecimentos, a construção de uma estratégia ou um conjunto de procedimentos, a organização e a perseverança na busca da resolução.

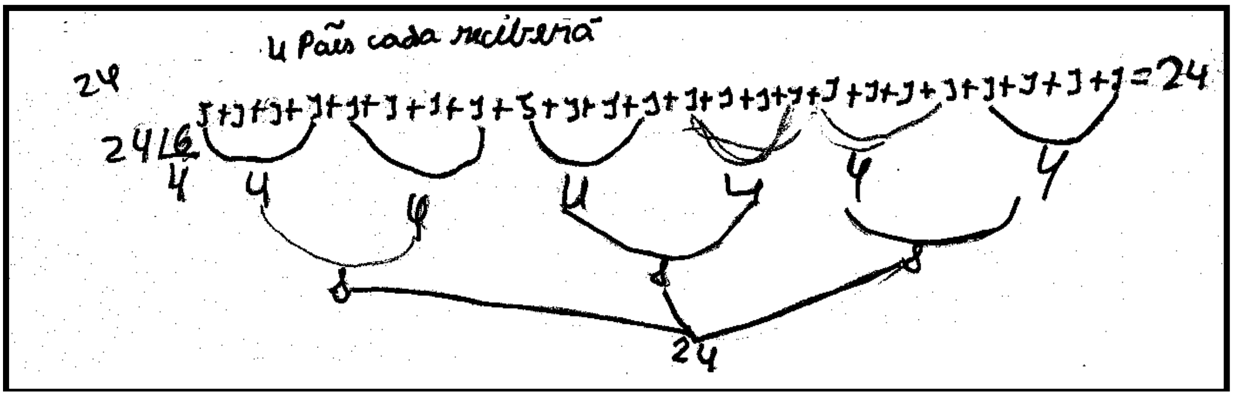
O aluno utilizou a estratégia da língua materna, que é considerada polissêmica, uma vez que de acordo com Smole e Diniz (2001, p. 23), "a linguagem matemática é mais concisa e precisa que a linguagem usual no sentido de eliminar qualquer possibilidade de dubiedade em sua interpretação".

Mesmo resolvendo o problema por meio da linguagem escrita usual, o aluno nos mostrou que compreendeu a situação, registrando um resultado coerente com o enunciado. Porém, se essa escrita tivesse sido explorada na sala de aula, em conjunto, o aluno teria tido a oportunidade de "esclarecer, refinar e organizar seus pensamentos, fazendo com que se aproprie tanto de conhecimentos específicos como de habilidades essenciais para aprender qualquer conteúdo em qualquer tempo", como defendem Smole e Diniz (2001, p. 16).

e) Estratégias combinadas

Problema 2 – Se repartimos 24 pães para 6 crianças, quantos pães receberá cada uma? Explique como você chegou à resposta.

Ilustração 13 – Estratégia de solução utilizada por meio da divisão e decomposição da parte que equivale ao todo



Fonte: Aluno participante da pesquisa denominado Sc11

Os procedimentos utilizados pelo aluno para a solução foram: a divisão, que indica ter sido operacionalizada com base na tabuada, uma vez que ele procedeu conforme à divisão horizontal, pois não deu sentido ao zero; a decomposição da parte que corresponde ao todo, em unidades, revelando-nos implicitamente conhecimento da propriedade comutativa; a adição e o cálculo mental, ao apresentar o esquema de somar quatro unidades sequencialmente, em seguida, sem utilizar símbolos matemáticos, somando os pares de quatro e, logo após, os pares de 8, para validar o todo presente no enunciado, os 24 pães. Logo, o aluno também fez uso do conceito de agrupamento.

Na mobilização de seus conhecimentos implícitos acerca do campo da Aritmética (adição, decomposição, contagem etc.), a operação empregada serviu apenas para validar o esquema, predominando o raciocínio aditivo. O aluno, ao decompor o todo, fez a distribuição um- a- um, formando seis conjuntos de quatro pães, para depois executar a contagem, verificando a quantidade de elementos que cada criança ganhou até chegar à solução do problema. Tal ação caracterizou que o aluno continua usando o raciocino no campo aditivo, sendo necessárias boas intervenções para que dê um salto em conceitos mais complexos, aqui abordado como sendo o campo multiplicativo. Assim, podemos conjecturar que, o referido aluno ao revelar um procedimento longo, esteve diante de uma situação nova, e não de uma atividade frequente em seu ambiente escolar e não escolar. O uso de uma estratégia longa significa, para Pozo (1998), que o aluno compreendeu o enunciado e por caminhos próprios mobilizou seus conhecimentos para planejar, executar e validar uma solução.

O aluno, em sua resolução, utilizou estratégias combinadas, registrando a operação do algoritmo da divisão, o que indica limitação, por estar amparado na tabuada da multiplicação. Além de não dar sentido a um dos termos da referida operação (o resto zero), parece-nos que fez associação com a divisão horizontal, que tem por base a técnica da memorização da tabuada, percebendo-se indícios de que foi facultado ao aluno apenas um caminho desse estudo e, ainda, sem o estabelecimento das relações entre a tabuada de multiplicação que auxiliam na construção de novos conceitos. Tais características revelam limitações que os alunos adquiriram em contexto escolar, que provocam equívocos na apropriação de conceitos matemáticos, como assinalam pesquisadores em educação matemática, entre eles Cunha (1997), Benvenutti (2008), Lautert e Spinillo (2006).

Comparando com a ideia de divisão euclidiana, esse aluno demonstrou conhecer o conceito de divisão, que é distribuir por igual todos os pães até obter o menor resto possível ou não existir sobra, como assevera Moretti (1999). Para este autor (ibid.), dividir com resto zero significa dividir A por B para encontrar q e r, sendo $r = 0$. Escrevemos simbolicamente $A \div B = q$, desde que $A = q \times B$.

Vale ressaltar que o referido aluno não atendeu completamente o enunciado, pois não respondeu ao questionamento que justificou como ele procedeu e o que compreendeu do raciocínio multiplicativo. A não resposta ao questionamento indica que ele não tem hábito de tratar o ensino da Matemática na língua convencional. Sendo assim, podemos conjecturar que a Matemática, para esse aluno, é considerada como sinônimo de cálculo.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa acerca das estratégias de resolução de divisão revelou que os alunos dos anos iniciais apresentam diferentes procedimentos para uma mesma situação numérica, mesmo sendo evidenciado no ensino o uso de um único algoritmo e equívocos que provocam limitação conceitual, como: a linearização do conteúdo da Aritmética; ensino das operações fundamentais com foco nos números naturais ou inteiros positivos, possibilitando a transposição dos conceitos aprendidos neste campo para outros conjuntos, o que provoca a aprendizagem de conceitos errôneos; não tratamento da Matemática enquanto disciplina abstrata e que possui linguagem específica; ensino da multiplicação e divisão com base na tabuada de forma mecânica, não proporcionando a liberdade ao aluno para expressar novas estratégias de solução, mobilizando com isso seus conhecimentos e propostas de atividades de contas isoladas que requer apenas a explicitação de um modelo previamente ensinado.

Tais soluções evidenciaram a importância do trabalho com resolução de problemas, por possibilitar aos alunos a mobilização de seus conhecimentos implícitos e expressarem uma solução diante de uma situação nova. Além de estudar a referida disciplina na perspectiva de construir e não repetir.

Considerando que o objetivo deste trabalho foi investigar as estratégias de resolução dos alunos do 4º ano do Ensino Fundamental de escolas públicas maceioenses no campo multiplicativo, especificamente a divisão, nas ideias de participação e quotição, o trabalho foi norteado pelo seguinte problema: quais estratégias de solução os alunos utilizaram em problemas de divisão, nas ideias de partição e quotição? A busca pela compreensão dos conceitos por parte dos alunos caracterizou uma atividade essencial para a minha formação enquanto pedagoga, sobretudo por tratar-se de uma profissional da educação.

Esta pesquisa revelou que as estratégias dos alunos representam um dos caminhos para a organização do planejamento do professor, pois analisá-las e traçar novos procedimentos, permite-lhe alcançar melhores práticas pedagógicas em serviço e, sobretudo, resultados mais eficientes quanto a construção de conceitos matemáticos.

Na pesquisa, as resoluções demonstraram que, no ensino da Matemática, há a priorização do resultado, em detrimento do procedimento, uma vez que as respostas apresentaram um modelo de técnica ensinado, embora os alunos tenham utilizados do desenho para encontrar a solução do problema. Com isso, notamos que eles buscaram explicitar as diferentes linguagens em suas soluções, mas apresentando incompreensão acerca do entendimento da especificidade da linguagem matemática, registrando da sua maneira, caminhos primários para chegar ao resultado.

Tendo em vista que houve predominância do uso de desenho, isoladamente ou junto com a conta, tais registros indicam a necessidade de investimento na formação continuada dos professores polivalentes quanto a área da Matemática, para que estes compreendam a importância de analisar as estratégias de solução dos alunos e aprender por meio da construção de conceitos.

Diante das estratégias analisadas, pudemos inferir que faltam aos professores conhecimentos matemáticos mínimos que lhes permitam levá-los a intervir no currículo, nos critérios e objetivos definidos para a aprendizagem dos alunos. Parece-nos que a padronização no ensino do conteúdo e, em seguida, a apresentação de uma lista de exercício não é suficiente para que os alunos possam questionar as situações propostas e justificar as suas resoluções, de modo a verificar o seu senso numérico e, também, desenvolver seu pensamento lógico-matemático, já que eles são estimulados a repetir um modelo e não a mobilizar seus conhecimentos.

O aporte teórico utilizado confirma os resultados dos pesquisadores em educação matemática de que o trabalho com resolução de problemas é complexo, assim como as ideias da divisão, embora proporcione melhores resultados no ensino da Matemática. Optar pela utilização desta proposta de trabalho, tendo em vista o seu uso enquanto meio e não fim demonstrou, de fato, ser um caminho que envolve o entrelaçamento de diferentes conceitos, superando a ideia de que resolver problema é apenas para quem sabe ler e escrever. Nessa perspectiva de ensino, a Matemática deve ser tratada como uma disciplina que requer, por parte do professor, explicação clara sobre definição, propriedades e aplicações, pois geralmente verificamos que

> por toda a Educação Básica não há esclarecimento sobre a definição da Matemática e, consequentemente, isto interfere na compreensão dos demais conceitos. Os alunos não relacionam a Matemática com a abstração e isto é muito grave, pois a Matemática é uma ciência abstrata. (PINTO, 2010, p. 16)

Dado o exposto, as soluções dos alunos revelaram a importância de uma nova postura do professor diante das estratégias. No entanto, embora eles ainda não tivessem estudado o conteúdo de divisão, responderam com coerência ao enunciado, demonstrando que se as oportunidades de participar, argumentar, elaborar e reelaborar lhes fossem dadas, eles participariam e lançariam mão de estratégias implícitas e criativas de resolução para o problema.

Por outro lado, as soluções apresentaram que há um ensino equivocado em relação aos conceitos das operações elementares, principalmente da divisão. As estratégias de solução apresentadas pelos alunos investigados apontaram que, além da limitação em aprender a divisão com foco na ideia de partição e ainda do tipo exata (divisão com resto zero), os alunos demonstraram não diferenciar partição de quotição. Com isso, verificamos a necessidade de uma boa formação inicial e continuada dos professores polivalentes para realizar intervenções que forneçam aos alunos a compreensão de seu fazer matemático.

Nesse sentido, os estudos de Pinto (2010) confirmam a importância da formação inicial concernente aos conceitos do campo da Aritmética e de formação continuada, que levem os professores a adotar uma atitude de prática investigativa, para atingir o principal papel da escola, que é fazer com que o aluno aprenda.

A autora destaca que os professores polivalentes não têm formação específica em uma só área de conhecimento, neste caso a Matemática, assumindo, por sua vez, a responsabilidade de ensinar os primeiros conceitos matemáticos aos alunos dos anos iniciais com base nos saberes adquiridos durante a sua formação. No entanto, sabemos que, muitas vezes, os conceitos matemáticos não são tratados nas salas de aula como objetos de aprendizagem, porque a escola tradicional enfatiza a simples memorização dos signos e algoritmos matemáticos, sem ter uma conexão com a vida cotidiana nem com a formação do pensamento matemático, como aponta Brito (2001).

De acordo com Pinto (2010, p. 20), “o estudo aprofundado dos conceitos ensinados deve fazer parte da preparação do professor para atuar em sala de aula”. Sem esse aprofundamento, o ensino pode ser desenvolvido por abordagens impróprias, em que predomina a linearidade, a repetição técnica, sem levar em consideração o nível de desenvolvimento lógico-matemático dos alunos, as relações entre os conteúdos matemáticos que favoreçam a construção de conceitos. Nesse sentido, Pinto (2010) destaca que

> um profissional capacitado tem maior clareza de suas concepções em relação à Matemática. Tais compreensões interferem na abordagem dos conteúdos, nas estratégias pedagógicas, na elaboração de objetivos e nas formas de avaliação. Assim, o trabalho desenvolvido em sala de aula depende muito da relação que o professor tem com a Matemática, por isso é tão importante uma formação de qualidade (PINTO, 2010, p. 23).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) ressaltam a importância da formação do professor, esclarecendo que, “decorrentes dos problemas da formação de professores, as práticas na sala de aula tomam por base os livros didáticos, que, infelizmente, são muitas vezes de qualidade insatisfatória” (BRASIL, 1997, p. 22). Todavia, acreditamos que, quando se tem uma boa base teórica, é possível o professor tirar bom proveito do material, independentemente da qualidade do instrumento utilizado, uma vez que suas mediações direcionam à evolução conceitual do aluno.

Quanto às estratégias de divisão, muitas das soluções postas pelos alunos foram pautadas no campo aditivo e no uso do desenho. Por se tratar de alunos que estão praticamente no final do primeiro ciclo do Ensino Fundamental, considerando que tais respostas são primárias se levarmos em conta sua escolaridade (4º ano), uma vez que o currículo dos anos iniciais proposto nos PCN de Matemática espera que, nessa etapa, o aluno elabore, problematize e resolva diferentes situações da Aritmética, construindo progressivamente os conceitos elementares. No entanto, questionamos as práticas escolares que priorizam a linearização do conteúdo e, ainda, o reducionismo conceitual, privando os alunos de contextualizar, relacionar, questionar e resolver problemas da sua maneira. Insistir nessa prática impossibilita ao aluno lançar mão de suas próprias estratégias de solução.

Convém ressaltar que os alunos chegam à sala de aula com saberes que os direcionam a resolver situações-problema propostas e que eles muitas vezes não são desconsiderados pelo professor em seu planejamento. Desse modo, enfatizamos a necessidade de mediar e desenvolver práticas de ensino que mobilizem as diversas habilidades, de modo que os alunos falem, escrevam, trabalhem individualmente, em dupla e em grupos para que não saiam do espaço escolar da mesma forma como entraram. Para tanto, são necessárias intervenções que promovam a discussão, comparação e avaliação, considerando a evolução conceitual. Logo, o papel do professor é de suma importância no processo da construção de conceitos.

As estratégias dos alunos dessa investigação indicam que eles vivenciaram apenas uma situação de trabalho e, sobretudo, de conceito de divisão, a partitiva, o que Muniz (2009) chama de reducionismo conceitual. Diante desse ensino conceitual, os alunos são levados a atentar para as palavras-chave, que muitas vezes direcionam para ideias incompatíveis com o enunciado. Assim, verificamos que se faz necessário grupos de estudo no ambiente escolar para que se discutam as peculiaridades e novos direcionamentos para o ensino da Matemática.

Vale ressaltar que nas atividades dos alunos há ausência de trabalho que os levam a elaborar, problematizar e reescrever enunciados, ou a explicar seu pensamento matemático. Isso significa que as ações desenvolvidas em sala de aula, bem como o currículo apresentado aos alunos dos anos iniciais, precisam ser revistos. Sendo assim, reforçamos a necessidade de o professor ter boa formação para apresentar abordagens eficientes de seu fazer pedagógico na sala de aula, de modo que possa, quando necessário, redirecionar seu planejamento para atender às necessidades da turma.

Entendemos que as soluções dos alunos investigados deveriam contemplar significativamente o algoritmo canônico, pois conforme os PCN (1997), eles deveriam estudar as quatro operações fundamentais desde o primeiro ciclo e os respectivos conceitos. Além disso, esse documento propõe que o ensino da Matemática deveria auxiliá-los a mobilizar seus conhecimentos, de modo a registrar uma solução mais econômica.

Quanto à divisão quotitiva, os alunos demonstraram não estabelecer relações entre os dados numéricos e os termos da divisão e, além disso, a relação fixa do problema foi tratada como parcela da adição repetida, demonstrando ênfase na continuidade do campo aditivo (uso da adição) e, sobretudo, necessidade de aprender Matemática resolvendo problemas.

Por outro lado, embora os alunos tenham revelado dificuldades acerca da compreensão dos conceitos da divisão, observamos que mobilizaram os seus conhecimentos. No entanto, as soluções indicam que não compreendem o fazer matemático e, ainda, que se apoiam no desenho para entender o enunciado. Os procedimentos utilizados por eles também indicam que possivelmente não vivenciaram situações diversificadas nem foram estimulados a analisar, comparar e explicar o pensamento matemático. A prática tradicional de ensino, por sua vez, não facilita, mas dificulta a aprendizagem e a participação dos alunos nas aulas de Matemática que propõem refletir acerca das semelhanças e diferenças do novo conteúdo com os que já foram estudados e, em consequência, construir conceitos.

Diante do exposto, observamos que o ensino da Matemática ainda se encontra aquém das necessidades exigidas, em termos da compreensão conceitual e entendimento das relações entre as operações, para a aprendizagem do currículo mínimo da referida disciplina. Essa situação leva-nos a levantares os seguintes questionamentos: Por que os professores insistem em desenvolver um ensino linear acerca da Aritmética? Que referencial teórico os cursos de formação oferecem aos professores polivalentes, de modo a torná-los aptos a mediar a aprendizagem dos alunos e favorecer a evolução conceitual? O trabalho com resolução de problemas vem sendo proposto aos professores dos anos iniciais de escolarização desde 1997 com a divulgação dos PCN. Sendo assim, por que ainda é pouco frequente essa proposta de trabalho nas aulas de Matemática? Por que dificilmente encontramos propostas de ensino de elaboração de problemas e de justificativas às respostas dadas às situações nos anos iniciais de escolarização? O que leva os professores polivalentes a tratar a Matemática como sinônimo de cálculo escrito?

A pesquisa demonstrou que as turmas investigadas alcançaram um índice de acerto significativo, mas, sob o ponto de vista da Matemática conceitual há um atraso no currículo matemático, possivelmente pela linearidade dos conteúdos, ao ensino pautado no exercício e não no problema, entre outras ações que não propiciam as relações necessárias para que os alunos compreendam o que fazem nas aulas de Matemática e, portanto, consigam justificar suas soluções.

Nessa direção, no trabalho com resolução de problemas, embora considerado uma proposta complexa, o processo de aprender é pautado na perspectiva de auxiliar o aluno a alcançar a sua autonomia, de modo que tenha oportunidade de falar sobre Matemática por meio de um trabalho que discute, compara e analisa diferentes raciocínios apresentados diante de uma solução. Com isso, professor e aluno verificam que não há apenas um único caminho para chegar à solução, e eles aprendem na interação, na relação dos conhecimentos explícitos postos em evidência.

Smole e Diniz (2001, p. 16) destacam a importância de expor na sala de aula diferentes formas e situações aos alunos, com a intencionalidade de que eles tenham oportunidade de trocar "experiências em grupo, comunicando suas descobertas e dúvidas, ouvindo, lendo e analisando as ideias dos outros". Com esse envolvimento, as autoras defendem que "o aluno interioriza os conceitos e os significados envolvidos nessa linguagem e relaciona-os com suas próprias ideias".

Vale destacar que, embora os PCN referenciem o ensino da Matemática por meio da resolução de problemas e que foi um documento disponibilizado para a maioria dos professores da rede pública, inclusive com oferta de formação continuada, na prática de sala de aula as estratégias de solução apresentam indícios de que essa abordagem ainda não chegou ou é deficiente ou mal compreendida, sobremaneira nas aulas de Matemática. Assim, concordamos com Nacarato (apud SISTO et al., 2002, p. 26), quando diz que "a prática tem revelado que a simples publicação de documentos oficiais, tais como propostas curriculares, subsídios de apoio às propostas e outros documentos auxiliares não são suficientes para se mudar uma concepção de ensino".

Os resultados da pesquisa, por sua vez, apresentam a necessidade de investimento na formação dos professores dos anos iniciais de escolarização, para que eles vejam as resoluções dos alunos não como equívocos, mas como caminhos que revelam quais conceitos dominam e os que precisam aprender. Para tanto, o professor deverá ensinar não via continuidade da multiplicação, como adição repetida, nem pela continuidade da divisão, subtração sucessiva, mas conforme o raciocínio do campo multiplicativo, em que trabalha os conteúdos não do ponto de vista da operação, mas do ponto de vista conceitual. Com isso, Carvalho e Costa (2010) sugerem que se deixe de lado

> o currículo organizado de maneira linear (primeiro conta de adição, problema de adição, depois conta de subtração, problema de subtração, e assim por diante), e dar espaço para um currículo organizado de forma espiral, em que os conteúdos vão sendo conectados de forma a favorecer as crianças a desenvolverem o pensamento matemático, desde a Educação Infantil. (CARVALHO; COSTA, 2010, p. 12)

As estratégias dos alunos demonstram a continuidade de um ensino linear no espaço de sala de aula. Esta não pode ser considerada uma prática aceitável, nem tampouco o ensino de um único conceito, na perspectiva de facilitar a aprendizagem do aluno, e por avaliá-lo pela repetição da técnica, em vez dos conhecimentos implícitos e explícitos apresentados. As soluções dos alunos indicam que, além de serem limitados à aprendizagem e prejudiciais à construção de conceitos, suas aulas não trataram da especificidade da Matemática e relações com outras linguagens, demonstrando que aprender esta disciplina significa repetir um modelo de algoritmo ensinado pelo professor.

A pesquisa revela-se importante porque direciona para um trabalho contextualizado e por considerar o nível de aprendizagem do aluno no que diz respeito à escolha dos problemas a serem propostos, e, ainda, porque desenvolve atividades no espaço escolar, que possibilitam a interação entre os diferentes sujeitos e, sobretudo, a comunicação ante as soluções postas. Também possibilita a revisão no currículo, de modo a evitar a linearização e um ensino mecânico, que não auxilia o aluno a entender os procedimentos adotados e a escolher qual o melhor caminho a seguir.

Nesse sentido, a pesquisa aponta para que os cursos de formação de professores dos anos iniciais revejam o trabalho desenvolvido acerca da educação matemática, na perspectiva de ofertar uma base consistente, que dê sustentação aos professores e futuros professores para compreenderem o sentido e o significado da Matemática e, também, que estes exponham suas tomadas de decisão diante das dúvidas dos alunos, para que possam direcioná-los a um trabalho que mobilize conhecimentos e, em decorrência, permita-lhes dar um salto qualitativo. Para isso, as diferentes linguagens deverão ser levadas em consideração no ensino da Matemática, para que o aluno estabeleça relações e compreenda que o melhor caminho de solução para uma situação-problema matemática é o algoritmo canônico.

Vale ressaltar que o envolvimento com esta pesquisa atendeu a minha expectativa, pois, mediante uma prática de oito anos em salas de aula dos anos iniciais de escolarização de escolas públicas e particulares, em que a diversidade de público, de idade e, sobretudo, de respostas, foi a mais ampla possível, o trabalho com resolução de problemas, envolvendo o campo multiplicativo, possibilitou enxergar que não existe um único caminho de solução, que as ações dos alunos sempre têm uma explicação e o professor, quando possui uma boa formação, as vê de outra maneira, direcionando para um caminho mais elaborado, que é a compreensão de conceitos corretos. Além disso, os estudos sinalizaram a possibilidade de ensinar e aprender Matemática com recursos e mecanismos simples, fáceis de serem disponibilizados no espaço escolar.

Assim, verificamos a necessidade de a Matemática ser tratada como uma ciência que possui linguagem específica e dispõe de vários caminhos de solução para um mesmo problema, e que o aluno é quem opta, conforme seu nível de conhecimento, pelo caminho seguir e a qual resolução revelar. Embora não seja um caminho rápido, aprender por compreensão apresenta-se como a melhor opção para construir conceitos.

De acordo com os resultados apurados na pesquisa e os oficiais acerca da aprendizagem matemática dos alunos dos anos iniciais, notamos a urgência para mudar as propostas de ensino nessa área de conhecimento, pois o discurso de que o ensino linear é o caminho mais fácil para o aluno aprender não traz resultados satisfatórios, pois, nos espaços escolares, ainda constatamos índices elevados nas dificuldades em explicitar conceitos matemáticos, assim como em estabelecer relações entre os termos da divisão (dividendo, divisor, quociente e resto), e compreensão do fazer matemático, apresentando, em geral, erros nos algoritmos e resultados pelo fato de se apoiar na tabuada da multiplicação mediante um procedimento sem sentido e significado.

Em nossos estudos, não tivemos a intenção de julgar o que é certo ou errado das práticas desenvolvidas no ensino da Matemática, mas sim refletir sobre a importância de divulgar aos alunos dos anos iniciais conceitos corretos matematicamente de divisão e, sobretudo, das relações possíveis de serem estabelecidas com o campo da Aritmética, de modo a tratar a Matemática não de forma fragmentada, isolada, estanque, mas numa abordagem em que professor e aluno são responsáveis por seu desenvolvimento lógico-matemático à medida que problematizam e são problematizados.

Ao chegar ao final deste percurso, percebemos avanços nítidos conseguidos e conhecimentos adquiridos. Não foi um caminho fácil, tendo em vista o vasto campo de investigação da educação matemática. Mas, nesta jornada de ação investigativa, tenho a consciência de que poderia ter feito muito mais no espaço de sala de aula se tivesse a oportunidade de compreender o fazer pedagógico durante a minha formação inicial e, também, conhecimento do referencial teórico acerca da educação matemática para entender o porquê dos erros presentes nos anos iniciais e do que fazer diante da diversidade de estratégias de resolução postas pelos alunos. Assim, conforme as palavras de Feio (2009), "sinto-me em uma promissora viagem que, ao invés de estar chegando ao fim, certamente está apenas começando".

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, Marli E. D. A. **Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional**. Brasília, DF: Liber Livro, 2007.

BENVENUTTI, Luciana C. **A operação divisão**: um estudo com alunos de 5ª série. 2008. 60 f. Dissertação (Programa de Mestrado Acadêmico em Educação)–Universidade do Vale do Itajaí, Santa Catarina, 2008.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, Rute Elizabete de S. R.; SELVA, Ana C. V. **Alunos de 3ª e 5ª séries resolvendo problemas de divisão com resto diferente de zero:** o efeito de representações simbólicas, significados e escolarização. Disponível em: <www.ufrrj.br/emamped/paginas/conteudo_producoes/docs_29/alunos.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2010.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática**. 8v. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRITO, Márcia Regina F. de (Org.). **Solução de problemas e a matemática escolar**. Campinas: Alínea Editora, 2006.

CARAÇA, Bento de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1984.

CARRAHER, David W. Relações entre razão, divisão e medida. In: SCHLIEMANN, Analúcia; CARRAHER, David W. (Org.). **A compreensão de conceitos aritméticos:** ensino e pesquisa. São Paulo: Papirus, 2003, p. 73-94. (Perspectivas em Educação Matemática).

CARVALHO, Mercedes. **Problemas? Mas que problemas?!**: estratégias de resolução de problemas matemáticos em sala de aula. 3ª ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2007.

CARVALHO, Mercedes; SARRAF, Cida. Números e Letras: processos de aprendizagem nos anos iniciais. **Revista Direcional Educador**, mar. 2008, p. 12-16.

CARVALHO, Mercedes. **Ensino da Matemática em cursos de Pedagogia:** a formação do professor polivalente. 2009. 206f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paul, São Paulo, 2009.

CARVALHO, Mercedes. **Números:** conceitos e atividades para Educação Infantil e Ensino Fundamental I. Petrópolis, RJ: Vozes, 2010.

CAMEJO, Adriana. **A constituição dos saberes da docência:** uma análise do campo multiplicativo. 2009. 220 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática)–Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

CHIZZOTTI, Antônio. Pesquisa Qualitativa. In: **Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais**. São Paulo: Cortez, 2006.

CORREA, Jane; SPINILLO, Alina Galvão. A resolução de tarefas de divisão por crianças. **Estudos da Psicologia**, Natal, v. 9, nº 1, 2004.

COSTA, Nívia Maria V. **A resolução de problemas aditivos e sua complexidade:** a previsão dos professores e a realidade dos alunos. 2007. 96 f. (Dissertação do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas)–Universidade Federal do Pará, Pará, 2007.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. Os números naturais. In: **O que é Matemática?** Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda, 2000, p. 1-24.

CUNHA, Maria Carolina C. **As operações de multiplicação e divisão junto a alunos de 5ª e 7ª séries**. 1997. 153 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática)–Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

CURI, Edda. **A formação matemática de professores dos anos iniciais do ensino fundamental face às novas demandas brasileiras**. Disponível em: <www.rieoei.org/deloslectores/1117Curi.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2010.

D'AMORE, Bruno. **Epistemologia e Didática da Matemática**. São Paulo: Escrituras, 2005.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** São Paulo: Ática, 2000.

DINIZ, Maria Ignez. Os problemas convencionais dos livros didáticos. In: SMOLE, Kátia S. Org.). **Ler, escrever e resolver problemas:** habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: ArtMed, 2001, p. 99-101.

ECHEVERRÍA, Maria Del Puy et al. Aprender a Resolver Problemas e Resolver Problemas para Aprender. In POZO, Juan Ignacio (Org.). **A solução de problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998, p. 13-42.

FEIO, Evandro dos Santos Paiva. **Matemática e linguagem**: um enfoque na conversão da língua natural para a linguagem matemática. 2009. 101 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática)–Universidade Federal do Pará, Pará, 2009.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2009.

FRANCHI, Anna. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais**.** In: MACHADO, S.D. A. **Educação matemática.** São Paulo: EDUC, 2010.

FRANCO, Maria Laura P. B. **Análise do conteúdo**. Brasília: Liber Livro Editora, 2008.

GODOY, Arilda; BANDEIRA, Rodrigo; SILVA, Anielson B. (Orgs.). **Pesquisa qualitativa em estudos organizacionais**: paradigmas, estratégias e métodos. São Paulo: Saraiva, 2006.

GUIMARÃES, Gilda L.; SANTOS, Roberta Rodrigues. Crianças elaborando problemas de estrutura multiplicativa. In*:* **Educação Matemática em Revista**, março 2009, p. 3-9.

GUIMARÃES, Sheila Denize; VASCONCELOS, Mônica. **Resolução de problemas aditivos e formação inicial:** uma análise das concepções de acadêmicos e de professores da

Educação Básica. Disponível em: < www.anped.org.br/reunioes/30ra/trabalhos/GT19-3101--Res.pdf>. Acesso em: 6 dez. 2010.

IMENES, Luiz Márcio P. et al. **Microdicionário de matemática.** São Paulo: Scipione, 1998.

ITACARAMBI, Ruth R. **Resolução de problemas nos anos iniciais do ensino fundamental**: construção de uma metodologia. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

LAUTERT, Síntria L; SPINILLO, Alina G. **As relações entre o desempenho em problemas de divisão e as concepções de crianças sobre divisão**. Psicologia: Teoria e Pesquisa, Brasília, v. 18, nº 3, p. 237-246, 2002.

LIMA, Elon L. et al. **A matemática do ensino médio.** Rio de Janeiro: SBM, 1997.

LOPES, Sérgio Roberto et al. **Metodologia do ensino da Matemática.** Curitiba: Ibpex, 2005.

LORENZATO, Sergio. **Educação Infantil e percepção matemática**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. (Coleção Formação de Professores).

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. A . **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. Coleção: Temas básicos de Educação e Ensino. São Paulo: EPU, 1986.

MAGINA, Sandra et al. **Repensando adição, subtração:** contribuição da teoria dos campos conceituais. São Paulo: PROEM, 2001.

MAMEDE, Ema**. A calculadora e a resolução de problemas:** uma experiência na sala de aula. V Congreso galego-português de Psicopedagoxía. Actas (comunicacións e posters), nº 4 (Vol. 6), ano 4º - 2000. Disponível em:< ruc.udc.es/dspace/bitstream/2183/6839/1/RGP_6-33.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2012.

MORETTI, Méricles Thadeu. **Dos sistemas de numeração às operações básicas com números naturais**. Florianópolis: Ed. da UFSC, 1999.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. **Crianças fazendo matemática.** Porto Alegre: Artmed, 1997.

NUNES, Terezinha et al. **Introdução à educação matemática:** os números e as operações numéricas. São Paulo: PROEM, 2002.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-aprendizagem de matemática através de resolução de problema**.** In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em educação matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, p. 199-220.

PAIS, Luiz Carlos. A Teoria do Campo Conceitual. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara. **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. 3 ed. São Paulo: EDUC, 2008.

PALHARES, Pedro**. Elementos de Matemática**: para professores do Ensino Básico. Lisboa/ Porto: Lidel, 2005.

PINTO, Valessa L. L. de S. **Formação matemática de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental e suas compreensões sobre os conceitos básicos da Aritmética.** 2010. 174 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências da Educação Básica: Matemática, Física e Química)–Universidade do Grande Rio "Prof. José de Souza Herdy", Duque de Caxias, 2010.

PITOMBEIRA de CARVALHO, João Bosco. As propostas curriculares de matemática. In: BARRETO, Elba Siqueira de Sá (Org.). **Os currículos do ensino fundamental para as escolas brasileiras.** 2ª ed. Campinas: Editora Autores Associados, 2000, p. 91-125.

POLYA, George. **A arte de resolver problema**. Tradução Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

POZO, Juan Ignacio (Org.). **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

SADOVSKY, Patrícia. Falta fundamentação didática no ensino da Matemática. In: **Revista Nova Escola**, nº 199, fev/2007, São Paulo: Ed. Abril, 2007, p. 16-17.

SAIZ, Irma. Dividir com dificuldades ou dificuldades para dividir. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (Org.). **Didática da Matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 2001, p. 156-183.

SISTO, Fernando F. et al. **Cotidiano escolar:** questões de leitura matemática e aprendizagem. Petrópolis: Vozes; Bragança Paulista: USF, 2002.

SMOLE, Kátia S.; DINIZ, Maria Ignez (org.). **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: ArtMed, 2001.

SPINILLO, Alina G.; LAUTERT, Síntria L. O diálogo entre a psicologia do desenvolvimento cognitivo e a educação matemática. In: MEIRA, L. L.; SPINILLO, A . G. **Psicologia cognitiva:** cultura, desenvolvimento e aprendizagem. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 2006, p. 46-79.

STANCANELLI, Renata. Conhecendo diferentes tipos de problemas. In: SMOLE, K. S. (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas:** habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001, p. 103-120.

STAREPRAVO, Ana Ruth. **Matemática em tempo de transformação:** construindo o conhecimento matemático através das aulas operatórias. Curitiba: Renascer, 1997.

TELES, Rosinalda A. de M. **Imbricações entre os campos conceituais na matemática**: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas. 2007. 220 f. Tese (Doutorado em Educação)–Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.

VALE, Isabel; PIMENTEL, Teresa. Números e operações. In: PALHARES, Pedro. **Elementos de Matemática: para professores do Ensino Básico.** Lisboa/ Porto: Lidel, 2005, p. 159 - 213.

VASCONCELOS, Cheila Francett Bezerra Silva de. **A (re)construção do conceito de dividir na formação dos professores:** o uso do jogo como recurso metodológico. 2009. 157 f. Dissertação. (Mestrado em Educação Brasileira)–Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2009.

VERGNAUD, Gérard. **A criança, a matemática e a realidade.** Tradução Maria Lucia Faria Moro. Curitiba: Ed. da UFPR, 2009.

WALLE, John A. V. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. 6ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

ZUNINO, Delia Lerner de. **A matemática na escola:** aqui e agora. Tradução Juan Acuña Lhorens. Porto Alegre: Artmed, 1995.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Atividade piloto 1

ESCOLA: ____
ANO DE ESCOLARIDADE: _______________________ DATA: ________________
ALUNO(A): _____________________________________ IDADE: _______________

ATIVIDADE DE MATEMÁTICA

1) Dona Ana tem 5 netos, se quer dar a cada neto 35 reais, de quantos reais ela precisa?

2) Se repartirmos 42 reais entre 5 crianças, quantos reais receberá cada uma?

3) Quantas cédulas de 2 reais há em 50 reais? Explique você chegou à resposta.

4) Quero repartir o triplo de 25 reais entre 3 pessoas. Quanto corresponderá a cada uma? Explique como você chegou à resposta.

5) Fábio está organizando um jogo. Cada jogador precisa de 3 bolas de gude para entrar no jogo. São 5 jogadores. Quantas bolas Fábio precisa arrumar?

6) Em uma jaqueta é usado 7 botões. Um alfaiate tem 63 botões prateados. Em quantas jaquetas ele poderá colocar botões?

7) Um comerciante compra um celular por 210 reais e o vende por 240 reais. Quanto ganhará na venda de 4 celulares?

8) Uma televisão de 42 polegadas foi comprada em 12 prestações de valores iguais. Foram pagas 3 prestações, totalizando 750 reais. Qual o valor da televisão?

9) Luzia comprou charque na feira. Ela comprou 2 quilos. Veja na tabela quanto ela pagou. Paula comprou um quilo na banca. Escreva na tabela quanto ela pagou. Ana comprou três quilos. Escreva na tabela quanto ela pagou. Eduardo comprou quatro quilos. Escreva na tabela quanto ele pagou.

	Kg DO CHARRQUE	**VALORES EM R$**
Paula	1	
Luzia	2	8
Ana	3	
Eduardo	4	

10) Em uma caixinha há 3 bombons. Temos cinco caixinhas de bombons para serem repartidos entre 3 crianças. Quantos bombons cada criança vai ganhar?

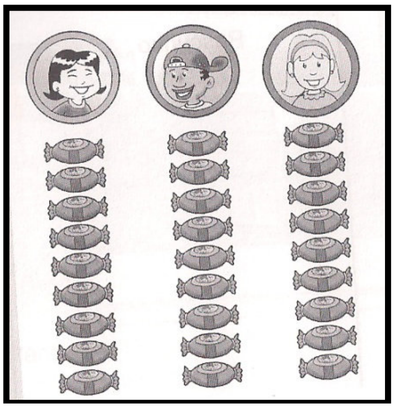
Obrigada pela participação!

APÊNDICE B – Atividade piloto 2

ESCOLA: ____
ANO DE ESCOLARIDADE: ________________________ DATA: ________________
ALUNO(A): ______________________________________ IDADE: _______________

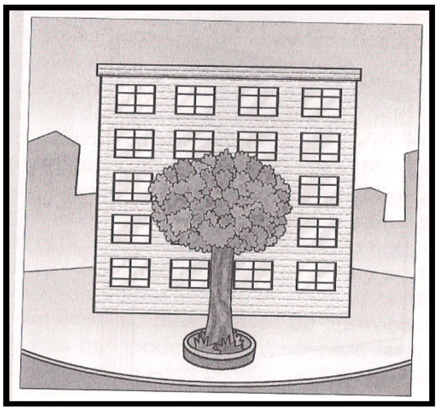
ATIVIDADE DE MATEMÁTICA

1) Temos 27 balas para distribuir para três crianças. Todas as crianças querem ganhar a mesma quantidade de balas. Quantas balas cada uma vai ganhar? (NUNES et al., 200 2, p. 88).



Fonte: NUNES et al., 2002

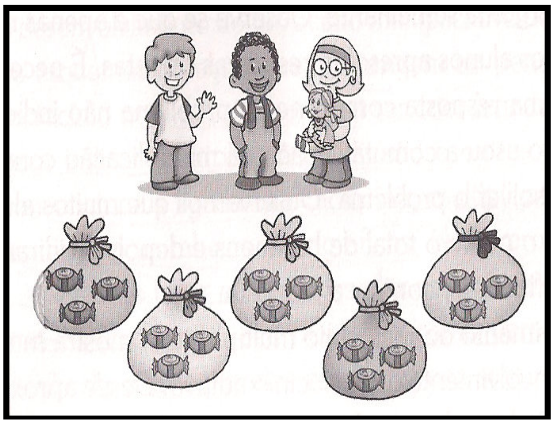
2) Esse edifício tem muitas janelas na frente. Por causa da árvore, você não consegue ver todas as janelas. Quantas janelas têm na frente do edifício? (NUNES et al., 2002 , p. 87).



Fonte: NUNES et al., 2002.

3) Numa festa estão 10 convidados e todos eles se cumprimentam com um aperto de mão. Quantos apertos de mãos serão dados? (SMOLE e DINIZ, 2001, p. 118).

4) Vamos repartir os bombons que estão nos saquinhos entre três crianças. Cada saquinho tem três bombons. Quantos bombons cada criança vai ganhar?



Fonte: SMOLE e DINIZ, 2001.

5) Organize as tiras e escreva o problema adequadamente, inserindo a resposta.

ELE JÁ LEU 15 PÁGINAS DESTE LIVRO.
JOÃO TEM UM LIVRO COM 45 PÁGINAS.
QUANTAS PÁGINAS ELE DEVE LER POR DIA?
VAI TERMINAR A LEITURA EM 3 DIAS, LENDO O MESMO NÚMERO DE PÁGINAS EM CADA DIA.

Obrigada pela participação!

APÊNDICE C – Atividade final

ESCOLA: ____
ANO DE ESCOLARIDADE: _______________________ DATA: ________________
ALUNO(A): _____________________________________ IDADE: _______________

ATIVIDADE DE MATEMMÁTICA

1) Maria fez 30 brigadeiros e irá 5 em cada saquinho. De quantos saquinhos ela irá precisar? Explique como você chegou à resposta (CARVALHO, 2010, p. 82).

2) Se repartimos 24 pães para 6 crianças, quantos pães receberá cada uma? Explique como você chegou à resposta (ZUNINO, 1995, p. 78).

3) Quantas cédulas de 5 reais há em 50 reais? ? Explique como você chegou à resposta (ZUNINO, 1995, p. 78).

4) Carlos vai fazer aniversário. Cada amigo que vier a sua festa vai ganhar 3 balões. Ele comprou 18 balões. Quantos amigos ele pode convidar? Explique como você chegou à resposta (NUNES et al., p. 89).

Obrigada pela participação!

APÊNDICE D – Texto didático (produto da dissertação)

Repensando a divisão

Obstáculos podem ser superados com diferentes formas de trabalho

Por Rosemeire Roberta de Lima

Compreender os conceitos da divisão em sua relação com o campo da Aritmética corresponde nossa intenção neste texto. Como afirma Muniz (2009, p. 102), “a escola trabalha em cada operação aritmética um e tão somente um conceito entre as muitas ações que cada operação suscita”.

O contato com atuais e futuros professores dos anos iniciais de escolarização em minicurso e oficina, bem como em estágio supervisionado de que participei no segundo semestre de 2011, no curso de Pedagogia da Universidade Federal de Alagoas, confirmam esse reducionismo conceitual das operações elementares que eles vivenciam durante a sua Educação Básica. Tais equívocos favoreceram-nos observar a necessidade que eles têm de compreender a complexidade do trabalho com resolução de problemas e ao mesmo tempo as vantagens, pois nessa metodologia o objetivo é aprender conceitos e não aplicar modelos de forma mecanizada. A resolução de problemas na Matemática, como eixo norteador, possibilita a compreensão do fazer matemático e, em consequência, a evolução do conhecimento do aluno.

Durante o estágio supervisiona pude presenciar e escutar as discussões acerca da construção de números e do campo aditivo. As falas dos futuros professores tratavam de que eles sabiam o saber fazer, mas não conseguiam explicar o porquê do raciocínio efetuado, anunciando com isso que a formação deles na Educação Básica foi pautada na repetição de modelos de fórmula, os quais não lhes eram atribuídos sentidos; logo, caracterizando-se como uma aprendizagem mecanizada, pois o que estava em jogo era aprender o que professor ensinou para passar na “prova”.

Com o levantamento da literatura para a elaboração da dissertação do mestrado profissional em Ciências e Matemática acerca dos conceitos multiplicativos, precisamente o da divisão, encontramos como referenciais a teoria do campo conceitual, de Gerard Vergnaud, e a metodologia de trabalho com resolução de problemas. Verificamos também que muitos materiais de acesso do professor apresentam como suporte os referenciais citados, como os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, os módulos do proletramento em Matemática e o programa Gestar da disciplina em estudo.

A partir desse levantamento, fomos nos debruçando sobre os conceitos matemáticos, referenciando os números, os sistema de numeração decimal e as operações fundamentais, destacando a operação da divisão, em que foram discutidos em eventos locais promovidos pela Universidade Federal de Alagoas, os organizados pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (Sbem) e outros voltados para a área da educação matemática, como Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (Ebrapem) e também eventos em educação de âmbito nacional e internacional, como o Encontro de Pesquisa Educacional do Norte e Nordeste (Epenn) e o Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade (Educon).

Em nossos estudos, não tivemos a intenção de julgar o que é certo ou errado das práticas desenvolvidas no ensino da Matemática, mas sim refletir sobre a importância de divulgar aos alunos dos anos iniciais conceitos corretos matematicamente de divisão e, sobretudo, das relações possíveis de serem estabelecidas com o campo da Aritmética, de modo a tratar a Matemática não de forma fragmentada, isolada, estanque, mas numa abordagem em que professor e aluno são responsáveis por seu desenvolvimento lógico-matemático à medida que problematizam e são problematizados.

Introdução

Por que os alunos fazem divisão em seu cotidiano e não aplicam o mesmo raciocínio em problemas escolares?

Nos problemas matemáticos, por que muitos professores não dão tratamento adequado às diferentes soluções dos alunos?

Por que a proposta de trabalho com resolução de problemas em geral só aplicada para quem sabe ler e escrever?

Essas e outras perguntas são as que nos deparamos quando conversamos com professores e futuros professores dos anos iniciais. Tais indagações nos mostram o quanto a Matemática é maltratada nas salas de aula e como os equívocos são gritantes nesta área de conhecimento. Essas perguntas são fruto da visão que muitos profissionais da educação que atuam nos anos iniciais de escolarização têm acerca do ensino da Matemática.

E, para superar os obstáculos enfrentados nesta disciplina, é preciso optar por uma nova posição em face à Matemática. Para tanto, devemos tratá-la como uma ciência e principalmente como uma área que requer contextualização e envolvimento com diferentes áreas do conhecimento. Assumir essa proposta de trabalho é compatível com trabalho de resolução de problemas e que, por sua vez, contribui para o aluno "vencer obstáculos criados por sua própria curiosidade, vivenciando o que significa fazer matemática" (SMOLE; DINIZ, 2010, p. 1). Isso significa aprender por compreensão, que nesse sentido ganha destaque no ensino da Matemática quando se tem como eixo norteador a resolução de problemas no ensino da Matemática.

Essa proposta de trabalho requer que o professor tenha mudança de postura no tratamento dos conteúdos abordados e, sobretudo, no pensamento matemático do aluno. Tal discussão nos mostra que a escola ainda não se preparou para lidar com a diversidade de situações que chegam em seu espaço e, sobretudo, de como oportunizar o desenvolvimento lógico-matemático dos alunos, pois os professores ainda não enxergam a Matemática, principalmente no campo da Aritmética, em suas diversas relações.

Sabemos que os alunos são desafiados em seu cotidiano e à sua maneira conseguem encontrar a solução. Por que no contexto escolar essas práticas, em geral, não são consideradas? A resposta para essa pergunta talvez seja encontrada na forma como o professor trata o ensino da Matemática. Esta não pode mais ser considerada como uma área de especialista e uma disciplina fragmentada. É preciso romper com a ideia de que ela é difícil e que tem existência para poucos.

Essas ideias estão fortemente arraigadas em nossa cultura, e superá-las exige-nos formação e encorajamento para problematizar e ser problematizado, que são caminhos que levam à arte de aprender Matemática.

Nessa direção, a sala de aula é um espaço em que devem ser exploradas variedades de situações e formas de trabalho, para que os problemas possam ser pensados em prol da explicitação de diferentes estratégias, nos quais a ação mecânica de operacionalizar é abandonada para dar lugar à tarefa de "construir para aprender".

A divisão, operação inversa da multiplicação

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental predominam os estudos sobre a Aritmética. Esta é um campo da Matemática que estuda os números e as operações elementares. Compreender as relações deste campo corresponde a perceber a importância dos números e do nosso sistema de numeração decimal para operar, calcular, contar.

Uma das operações fundamentais é a divisão, conteúdo denominado como inverso da multiplicação, que faz parte do campo multiplicativo, o qual requer a compreensão da ação de correspondência um- para- muitos ou da distribuição equitativa, conforme Nunes et al. (2002). No que se refere ao ponto de vista conceitual, tratamos as ideias da divisão de forma diferente do ponto de vista operacional. Esta trata a divisão como subtração sucessiva e a multiplicação como adição repetida. Optar pelo uso destas estratégias significa a escolha pela utilização do raciocínio aditivo.

Porém, no campo conceitual não faz sentido tratar a divisão por meio do raciocínio aditivo, pois este envolve uma situação em que há apenas uma variável, enquanto na divisão a situação requer duas variáveis. Aceitar a solução de problemas de divisão por meio do campo aditivo implica desconsiderar a especificidade que há no campo multiplicativo, o que significa uma escolha pela continuidade do raciocínio.

Devido aos equívocos conceituais apresentados acerca desse assunto nos anos iniciais, Teles (2007) aconselha que o professor polivalente observe a definição de divisão euclidiana, de modo que seja dado um tratamento adequado ao resto. Para a autora (ibid*.)* divisão requer uma ação de dividir um número por outro em partes iguais, de forma que sobre o menor resto possível.

Na divisão euclidiana há o reconhecimento do resto. Teles (2007), por sua vez, analisa e classifica-o como resto não nulo e divisão que tem resto zero, enfatizando que no âmbito escolar há uma linguagem equívoca ao classificarmos a divisão como exata, em que o resto não é considerado. Nessa direção, Saiz (2001, p. 159) conjectura que a denominação da divisão como exata é enganosa porque supõe que existe a denominação divisão inexata. Para a autora, "'sem resto' não é uma expressão mais feliz, porque o zero também é um resto".

Por que trabalhar o conceito além da distribuição

Um dos primeiros caminhos para o aluno dar um salto qualitativo em sua aprendizagem é por meio da descontinuidade do campo aditivo. E a divisão, por sua vez, não apresenta apenas a ideia partitiva. Avançar nesse conceito caracteriza validar o que já foi aprendido, usando esses saberes para enfrentar novas situações e, com isso, construir conceitos. Com essa atitude, professor e aluno percebem que não há um só caminho para a solução de um problema.

O professor, nessa perspectiva, é direcionado a planejar intencionalmente vários tipos de problema, conforme o perfil da turma, para que os alunos elaborem estratégias de solução adequadas ao enunciado. No envolvimento com as variedades de problemas, os alunos se utilizam do sentido numérico e do significado que atribui ao enunciado, tendo em vista perceber que o caminho seguido para resolver divisão partitiva não é o mesmo para a divisão de quota.

É preciso oportunizar um ambiente problematizador

Os alunos criam seus esquemas de solução. Para tanto, o professor deve incentivá-los a construir seus conhecimentos mediante a abertura de um espaço propício para falar, escrever, desenhar, comparar, diferenciar, enfim, desenvolver atitudes de tomadas de decisão e, assim, lançar mão de suas estratégias para a solução do problema. Sem um ambiente problematizador, o aluno poderá aprender sem compreender o se fazer matemático. Logo, seu conhecimento tenderá a ser mecanizado. Para aprender por compreensão, os alunos deverão ser estimulados a problematizar e ser problematizado e, assim, diante de situações novas explorarem o enunciado, seus dados, indagando, simulando, criando hipóteses, planejando, executado e, sobretudo, verificando a solução encontrada em nome do sentido numérico e da coerência do enunciado.

Nessa direção, as aulas deverão ser desenvolvidas com problemas numéricos, não numéricos, problemas do cotidiano, problemas com solução e sem solução, problema com excesso de dados e problema de lógica, conforme classificação expressa por Carvalho (2007) e Smole e Diniz (2001). Exploramos na pesquisa os problemas numéricos. Estes ocupam espaço primordial nas salas de aula dos anos iniciais.

Problemas numéricos e outros tipos de abordagens

Dentre os problemas numéricos, há também os problemas não numéricos, os problemas do cotidiano, os que apresentam mais de uma solução e os que não apresentam solução, assim classificadas por Carvalho (2007). Enfrentar estes tipos de problema favorece aos alunos ampliar os seus repertórios de conhecimento e, sobretudo, tomadas de decisão para a escolha da estratégia adequada ao enunciado.

Na pesquisa, nos propomos a investigar as soluções dos problemas numéricos por serem frequentes nos livros didáticos. Considerar esse aspecto foi necessário para que o aluno tenha o interesse em resolver a situação. Outras formas de critérios também podem ser utilizadas para que ele explicite o que sabe de Matemática e que relações estabelecem. Para chamar a atenção do aluno a solucionar os problemas podem ser propostos atividades oralmente, por escrito, por meio de jogo etc.

Vejamos algumas soluções explicitadas por alunos do 4º ano de duas escolas públicas de Maceió.

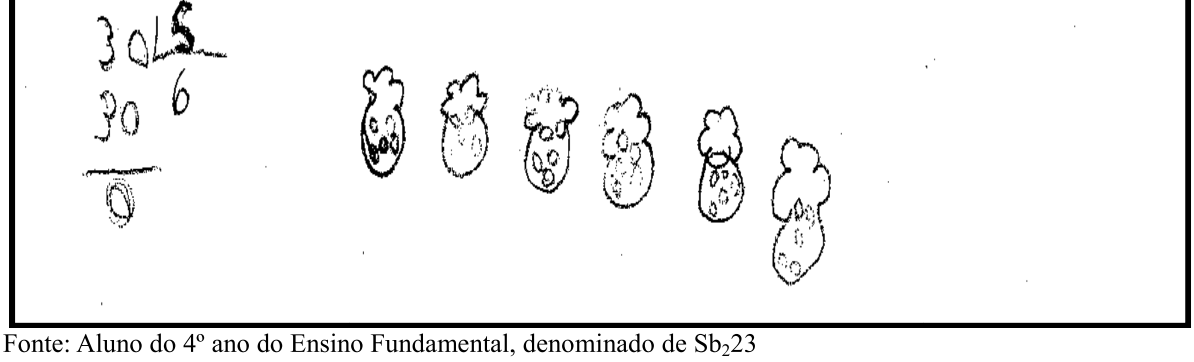
Registrando soluções

Em atividades propostas na perspectiva de resolução de problemas, a intenção é que os alunos registrem seus próprios caminhos de solução. Tais respostas podem ser por meio de desenho, da língua natural, do cálculo, de esquema, de tabela até atingir a forma mais elaborada. Por se tratar de solução de alunos do 4º do ano do Ensino Fundamental, espera-se que seja utilizado o algoritmo mais econômico, procedimentos mais objetivos, os quais são diferentes quando os alunos ainda não vivenciaram a situação. Estas costumam serem longas, sendo representadas por caminhos mais elementares, como o desenho. Sugerimos que as soluções estejam acompanhadas de texto explicativo de como o aluno pensou para encontrar a resposta. Assim, conforme Smole e Diniz (2010, p. 5) "traduzir por escrito os termos de um problema ou as relações entre os números depende de uma aprendizagem que exige que essas relações tenham significado para a criança".

Vejamos, nas figuras 1 e 2, como alunos solucionaram os problemas propostos de divisão partitiva e quotitiva.

Problema de quotição — Maria fez 30 brigadeiros e irá colocar 5 em cada saquinho. De quantos saquinhos ela irá precisar?

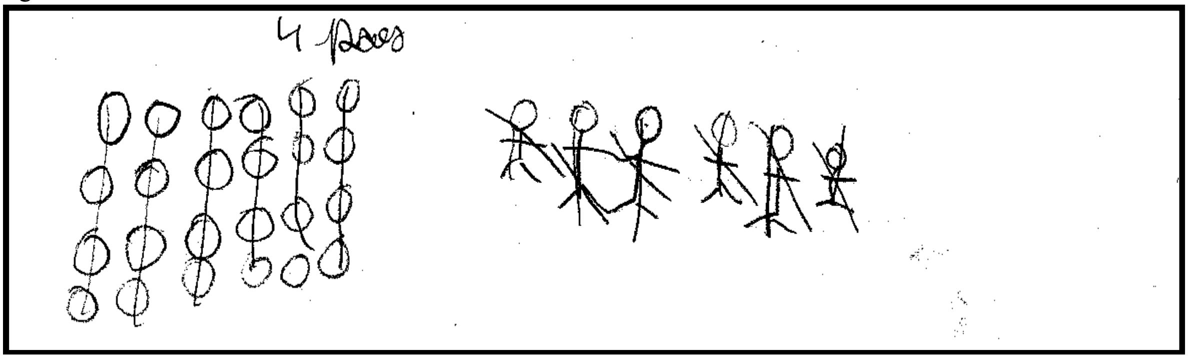
Figura 1



Fonte: Aluno do 4º ano do Ensino Fundamental, denominado de $Sb_2 23$

Problema de Partição — Se repartimos 24 pães para 6 crianças, quantos pães receberá cada uma?

Figura 2



Fonte: Aluno do 4º ano do Ensino Fundamental, denominado de Sc33

Percebemos que as duas crianças, para resolverem o problema, fizeram uso do desenho como procedimento para compreender o enunciado.

Na figura 1, o aluno apresentou estratégias combinadas: uso da operação da divisão e desenho. Demonstra que mobilizou o conhecimento acerca de agrupamento e contagem do número de saquinhos. Nesse problema há a relação fixa, número de brigadeiro (5), que facilita a formação de grupos e que caracteriza problema de quotição. O aluno sinaliza que reconheceu os dados numéricos relacionando aos termos da divisão, o todo (30 brigadeiros) sendo utilizado como dividendo e a parte (5 brigadeiros), utilizado como divisor. Aqui, esse aluno aplicou ação de correspondência de um- para- muitos, que é coerente ao problema de quotição.

Na figura 2 o aluno apresentou ilustração do enunciado, que apresenta indícios que fez uso da distribuição do todo para as 6 crianças e, em seguida, utilizou-se da contagem para identificar o número de pães por criança. Nesse problema não há a relação fixa, mas o enunciado sinaliza ao aluno que a solução requer ação de distribuição. O procedimento apresenta coerente com o enunciado, embora registrado por meio de linguagem não matemática.

Sugestões

Segundo Smole e Diniz (2001, p. 15), “se os alunos forem encorajados a se comunicar matematicamente com seus colegas, com o professor ou com pais, eles terão oportunidades para explorar, organizar e conectar seus pensamentos, novos conhecimentos”. Nessa direção, que pensamos em propostas de atividades em que a

Matemática não seja tratada de forma isolada, mas associada às diferentes linguagens, as quais são necessárias para a compreensão da escrita mais elaborada. Para isso, destacamos que,

> Quando se trata de Matemática, sempre que pedimos a uma criança ou a um grupo para dizer o que fizeram e por que o fizeram, ou quando solicitamos que verbalizem os procedimentos que adotaram, justificando-os, ou comentem o que escreveram, representaram ou esquematizaram, relatando as etapas de sua pesquisa, estamos permitindo que modifiquem conhecimentos prévios e construam novos significados para as ideias matemáticas. Dessa forma, simultaneamente, os alunos refletem sobre os conceitos e os procedimentos envolvidos na atividade proposta, apropriam-se deles, revisam o que não entenderam, ampliam o que compreenderam e, ainda, explicitam, testam suas dúvidas e dificuldades. (SMOLE; DINIZ, 2001, p. 17)

Nessa perspectiva de proposta de trabalho, que acreditamos na potencialidade do ensino em promover a construção de conceitos em detrimento da mecanização da aplicação de fórmulas. Conforme Smole e Diniz (2001) e Carvalho (2007, 2010), seguem algumas propostas de atividades para o ensino da Matemática. A lista de sugestões não se esgota. Sendo assim, cada professor desenvolverá formas que atrairão a participação ativa de seus alunos para que busquem soluções compatíveis com o nível conceitual deles e, consequentemente, entendam a forma mais elaborada de solução.

- Selecionar situações-problema para iniciar um conteúdo. Solicitar aos alunos que resolvam individualmente ou em dupla. Depois, analisar com eles os resultados obtidos.
- Distribuir imagens para os alunos formularem problemas numéricos. Explorar no coletivo os enunciados que são compreensíveis e, em seguida, problematizar os dados, as perguntas a fim de reelaborá-los.
- Elaborar várias situações-problema utilizando-se de um mesmo cálculo numérico.
- Entregar aos alunos uma pergunta e solicitá-los para que elaborarem problemas. Em seguida, recolhê-los e redistribuí-los aleatoriamente, para que outro aluno responda e um terceiro avalie o enunciado a resolução.
- Reestruturar enunciados mal elaborados.
- Trabalhar com problemas numéricos para que sejam solucionados com materiais concretos, como tampas, palitos, copos, ábacos, material doutorado etc.
- Apresentar aos alunos problemas com excesso dados. Discutir e comparar os resultados de forma participativa. Reescrever o enunciado e solucioná-lo oralmente e por escrito.
- Incentivar o aluno a escrever o procedimento utilizado para registrar a estratégia de solução de problemas numéricos e não numéricos.
- Transformar problemas do campo aditivo para o campo multiplicativo. Pedir para os

alunos registrarem as semelhanças e diferenças nas soluções encontradas. Comparar as produções, discutir e reescrever um texto no coletivo.

- Proporcionar estimativas de valores e verificação do resultado por meio do uso de calculadora.
- Explorar problemas com excesso de dados. Comparar e analisar os resultados e expos as estratégias de solução em mural para que possam ser apreciados pela classe. Reescrever o enunciado.
- Apresentar enunciados sem o questionamento, mas com as operações para que o aluno conclua o problema com uma pergunta compatível com o enunciado.
- Entregar aos alunos diversos enunciados e soluções para que emparelhem o problema com a solução adequada.
- Distribuir diversas soluções da própria turma, aleatoriamente, para que os alunos escrevam como pensaram para chegar o resultado e, em seguida, sugerir uma nova estratégia de solução.
- Apresentar um jogo à turma e construir coletivamente as regras. Em seguida, após as partidas em grupos, solicitar a tabulação dos dados. Explorar os dados com questionamentos orais. Depois, pedir ao aluno que faça perguntas sobre os dados da tabela para a classe ou a outro colega. Estimular o aluno a pensar bem antes de fazer a pergunta, verificar os dados mais de uma vez para não fazer perguntas óbvias ou incompreensíveis. Avaliar, com os alunos, as perguntas e as respostas.
- Confeccionar com a turma uma matemateca, uma caixa com diferentes tipos de situações, como problemas de lógica, problemas sem solução, problemas com excesso de dados, problemas numéricos para que sejam explorados em um dia da semana agendado como "Dia dos desafios".■

Referências

CARVALHO, Mercedes. **Problemas? Mas que problemas?!**: estratégias de resolução de problemas matemáticos em sala de aula. 3ª ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2007.

MUNIZ, Cristiano. Diversidade dos conceitos das operações e suas implicações nas resoluções de classes de situações. In: GUIMARÃES; BORBA, Rute (Orgs.). **Reflexões sobre o ensino de Matemática nos anos iniciais de escolarização**. Recife: SBEM, 2009, p. 101-118.

NUNES, Terezinha et al. **Introdução à Educação Matemática:** os números e as operações numéricas. São Paulo: Proem, 2002.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez (Orgs.). **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

SMOLE, Kátia Cristina S; DINIZ, Maria Ignez de S. **Resolvendo problemas**. Disponível em: <www.revistadoprofessor.com.br/system/biblioteca/.../resolvprob.pdf> Acesso em: 10 fev. 2010.

ANEXO

ANEXO A – Aprovação do Comitê de Ética

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
Comissão de Bioética UFAL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA

Maceió – AL, 29/08/2011

Senhor (a) Pesquisador (a), Mercedes Bêtta Quintano Carvalho Pereira dos Santos
Rosemeire Roberta de Lima

O Comitê de Ética em Pesquisa (CEP), em 25/08/2011 e com base no parecer emitido pelo (a) relator (a) do processo nº **000337/2011-29** sob o título, **Campo multiplicativo: estratégias de resolução de problemas de divisão dos alunos do 4 ano o ensino fundamental de escolas públicas do município de Maceió,** vem por meio deste instrumento comunicar a aprovação do processo supra citado, com base no item VIII.13, b, da Resolução nº 196/96.

O CEP deve ser informado de todos os efeitos adversos ou fatos relevantes que alterem o curso normal do estudo (Res. CNS 196/96, item V.4).

É papel do(a) pesquisador(a) assegurar medidas imediatas adequadas frente a evento grave ocorrido (mesmo que tenha sido em outro centro) e enviar notificação ao CEP e à Agência Nacional de Vigilância Sanitária – ANVISA – junto com seu posicionamento.

Eventuais modificações ou emendas ao protocolo devem ser apresentadas ao CEP de forma clara e sucinta, identificando a parte do protocolo a ser modificada e sua justificativa. Em caso de projeto do Grupo I ou II apresentados anteriormente à ANVISA, o (a) pesquisador (a) ou patrocinador(a) deve enviá-los à mesma junto com o parecer aprovatório do CEP, para serem incluídas ao protocolo inicial (Res. 251/97, item IV. 2.e).

Relatórios parciais e finais devem ser apresentados ao CEP, de acordo com os prazos estabelecidos no Cronograma do Protocolo e na Res. CNS, 196/96.

Na eventualidade de esclarecimentos adicionais, este Comitê coloca-se a disposição dos interessados para o acompanhamento da pesquisa em seus dilemas éticos e exigências contidas nas Resoluções supra - referidas.

Esta aprovação não é válida para subprojetos oriundos do protocolo de pesquisa acima referido.

(*) Áreas temáticas especiais

Válido até: julho de 2012

Prof. Dr. Walter Matias Lima
Coordenador do Comitê de Ética em Pesquisa
UFAL