

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

JOSEANDERSON AUGUSTO DE CALDAS COSTA

**ESTUDO E IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DA TEORIA DE BIOT  
PARA MEIOS ELASTOPLÁSTICOS E USO DE ESTRATÉGIAS DE  
OTIMIZAÇÃO PARA O PROCESSAMENTO**

MACEIÓ  
2012

**JOSEANDERSON AUGUSTO DE CALDAS COSTA**

**ESTUDO E IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DA TEORIA DE BIOT  
PARA MEIOS ELASTOPLÁSTICOS E USO DE ESTRATÉGIAS DE  
OTIMIZAÇÃO PARA O PROCESSAMENTO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages

Coorientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Viviane C. Leão Ramos

MACEIÓ  
2012

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**  
**Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale**

- C837e Costa, Joseanderson Augusto de Caldas.  
Estudo e implementação numérica da teoria de Biot para meios elasto-plásticos e uso de estratégias de otimização para o processamento / Joseanderson Augusto de Caldas Costa. – 2012.  
171 f. : il., tabs., grafs.
- Orientador: Eduardo Nobre Lages.  
Co-Orientadora: Viviane Carrilho Leão Ramos.  
Dissertação (mestrado em Engenharia Civil : Estruturas) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2012.
- Bibliografia: f. 150-153.  
Apêndices: f. 154-163.  
Anexos: f. 164-171.
1. Engenharia civil. 2. Análise acoplada. 3. Poroplasticidade modelos constitutivos. 4. Método dos elementos finitos. 5. Otimização de código. I. Título.

CDU: 624.12

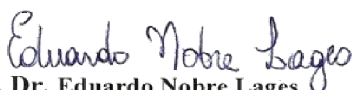


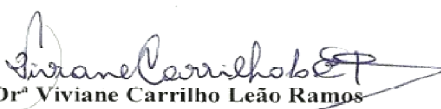
**ESTUDO E IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DA TEORIA DE BIOT  
PARA MEIOS ELASTOPLÁSTICOS E USO DE ESTRATÉGIAS DE  
OTIMIZAÇÃO PARA O PROCESSAMENTO**

**JOSEANDERSON AUGUSTO DE CALDAS COSTA**


Dissertação submetida à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas.

Banca Examinadora:

  
Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages  
Orientador – CTEC/UFAL

  
Prof. Dr. Viviane Carrilho Leão Ramos  
Coorientadora - CTEC/UFAL

  
Prof. Dr. Eduardo Toledo de Lima Junior  
CTEC/UFAL

  
Prof. Dr. Leonardo José do Nascimento Guimarães  
UFPE

Campus A. C. Simões, Av. Lourival de Melo Mota, S/N  
Tabuleiro do Martins – CEP 57072-970 – Maceió – Alagoas  
Tel/Fax: (82) 3214-1863  
E-mail: ppgec@ctec.ufal.br  
Homepage: www.ctec.ufal.br/posgraduacao/ppgec

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar gostaria de agradecer a Deus por tudo que ele tem feito em minha vida. Não apenas pelas oportunidades concedidas, mas principalmente pela família que eu cresci e pelas pessoas que estão ao meu redor.

À minha família, em especial aos meus pais e irmãos, eu aproveito o documento para registrar o meu sincero agradecimento por tudo que possuo. Eles representam a base da minha caminhada e minhas ações são os reflexos de seus ensinamentos.

À minha eterna namorada, **Juliana Melo**, eu agradeço mais ainda. Há mais de uma década juntos eu agradeço pela sua presença, amor e apoio incondicional em todas as fases da minha vida. Agradeço a paciência e por mesmo sabendo que isso ainda não é o fim, finge acreditar que isso é passageiro e que tudo será mais tranquilo.

Não menos importante, eu agradeço a uma segunda família que ao longo de vários anos foi construída no LCCV e que me sinto membro. Agradeço em especial aos amigos Theonelly, Daniel, David, Reberth e a todos que fazem o PEM. Agradeço a Catarina, Diogo's, Clayton, Michele, Romildo, Camila, Fábio, Roseane, Rayssa e outros amigos que posso ter esquecido. Em especial atenção gostaria de agradecer aos amigos **Giancarlo** e **Ricardo** que, além da amizade, me ajudaram diretamente no desenvolvimento do trabalho.

Agradeço pelo envolvimento e paciência aos meus orientadores, **Eduardo Nobre** e **Viviane Ramos**, que mesmo com os meus atrasos e contínuas mudanças de planejamento, não economizaram palavras de incentivo. Sem eles essa etapa seria muito difícil. Aos membros que participaram da banca, demais professores do LCCV e do curso de Engenharia Civil, eu agradeço todas as observações e contribuições.

Registro o agradecimento ao LCCV pelo financiamento ao longo dos anos e ao apoio financeiro da Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis - ANP, da financiadora de Estudos e Projetos – FINEP e do Ministério da Ciência e Tecnologia – MCT por meio do Programa de Recursos Humanos PRH da ANP. Por fim, agradeço a todos que de alguma forma contribuíram, direta ou indiretamente, para o desenvolvimento deste trabalho. A todos os meus sinceros agradecimentos.

*“Uma jornada de quilômetros se inicia com um simples passo.”*

Provérbio Chinês

## RESUMO

Este trabalho apresenta, discute e implementa a formulação poro-elastoplástica fortemente acoplada. A discretização espacial das equações diferenciais governantes é realizada através do Método dos Elementos Finitos (MEF), com interpolação do campo de deslocamento e da poropressão. O problema poro-mecânico é resolvido de forma totalmente acoplada, com base em um único sistema de equações. O método iterativo de Newton-Rhapson é empregado para a solução global do problema não linear, tendo ainda o algoritmo implícito iterativo Closest Point para a integração local das equações da plasticidade. Baseando-se em um programa computacional pré-existente denominado PORO, escrito na linguagem C++ e que utiliza o paradigma de Programação Orientada a Objetos (POO), faz-se a adaptação desse código através da criação de novas classes para permitir o uso de modelos constitutivos elastoplásticos e lei de fluxo associada no acoplamento poro-mecânico. Para verificação do programa são analisados problemas clássicos da literatura, a exemplo da coluna poro-elástica e o caso de Schiffman. Descrevem-se ainda algumas estratégias de otimização do custo computacional, implementando-se o uso de bibliotecas matemáticas (MKL) e paralelização do código (OpenMP).

**Palavras-Chave:** Análise acoplada. Poroplasticidade. Modelos constitutivos. Método dos elementos finitos, Otimização de código.

## ABSTRACT

This work presents a strategy for the coupled poro-elasto-plastic formulation. The Finite Element Method (FEM) is used to solve the differential equations, interpolating displacement and pore pressure fields. This problem is solved fully coupled, based on an only one system of equations. The nonlinear problem is globally solved by the Newton-Raphson procedure, and the Closest Point algorithm is implemented for the returning map in the elasto-plastic models. Based on a computational module that has already been developed (PORO), which is written using C++ language and Object-Oriented Programming (OOP), this work expands this program creating new classes for different elasto-plastic constitutive models. The program is verified by classical examples in the literature such as the poro-elastic column and the problem of Schiffman. Some strategies for optimization the computational cost are presented, which use specialized math libraries (MKL) and code parallelization (OpenMP).

**Keywords:** Coupled analysis. Poroplasticity. Constitutive models. Finite element method.

Code optimization.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Amostra de solo saturada. ....	11
Figura 2.2 - Analogia do adensamento. ....	14
Figura 2.3 - Variação das tensões em função da profundidade. ....	15
Figura 2.4 - Camada de argila submetida ao adensamento. ....	17
Figura 2.5 - Grau de adensamento para uma camada de argila. ....	21
Figura 2.6 – Elemento infinitesimal de solo. ....	30
Figura 2.7 - Fluxo em um elemento infinitesimal de solo. ....	35
Figura 2.8 - Distribuição inicial da poropressão. ....	42
Figura 2.9 - Amostra de solo em formato esférico sujeita a um carregamento. ....	42
Figura 2.10 – Modelos constitutivos para solos saturados e secos. ....	45
Figura 2.11 – Modelos constitutivos para solos não saturados e estruturados. ....	46
Figura 2.12 – Curva tensão <i>versus</i> deformação para o modelo elástico-linear. ....	47
Figura 2.13 – Curva tensão <i>versus</i> deformação para um modelo elastoplástico. ....	50
Figura 2.14 – Curva tensão <i>versus</i> deformação para um modelo bi-linear. ....	55
Figura 2.15 – Quadro-resumo para implementação do algoritmo Closest Point. ....	59
Figura 2.16 – Superfície de escoamento de Tresca no espaço 2D e 3D. ....	63
Figura 2.17 – Superfície de escoamento de von Mises no espaço 2D e 3D. ....	64
Figura 2.18 – Representação gráfica do critério de Mohr-Coulomb. ....	65
Figura 2.19 – Superfície de escoamento de Mohr-Coulomb. ....	66
Figura 2.20 – Superfície de escoamento de Drucker-Prager. ....	67
Figura 3.1 – Etapas do processo de análise numérica. ....	70
Figura 3.2 – Exemplos de malhas de elementos finitos de estruturas reais. ....	78
Figura 3.3 – Elemento finito paramétrico. ....	82
Figura 3.4 – Função rampa utilizada para aplicação do carregamento. ....	91
Figura 3.5 – Fluxograma para a estratégia totalmente acoplada. ....	97
Figura 3.6 – Diagrama UML do PORO. ....	99
Figura 3.7 – Principais métodos da classe <code>ElastoPlastic</code> . ....	100
Figura 3.8 – Fluxo principal para o caso poro-elastoplástico. ....	102
Figura 4.1 – Malha utilizada e condições de contorno utilizadas. ....	104

Figura 4.2 – Variação da poropressão na base da coluna. ....	106
Figura 4.3 – Deslocamento vertical (recalque) na coluna. ....	107
Figura 4.4 – Função rampa utilizada para aplicação do carregamento. ....	108
Figura 4.5 – Poropressão para diferentes estratégias de condição inicial. ....	109
Figura 4.6 – Poropressão inicial para diferentes estratégias de condição inicial. ....	110
Figura 4.7 – Variação da poropressão na base da coluna para diferentes $dt$ . ....	111
Figura 4.8 – Modelo bidimensional de Mandel. ....	112
Figura 4.9 – Solução analítica para o exemplo de Mandel. ....	113
Figura 4.10 – Resultado numérico obtido com o PORO. ....	113
Figura 4.11 – Modelo numérico de uma barra submetida a esforços de tração. ....	114
Figura 4.12 – Variação de considerando o modelo de von Mises. ....	115
Figura 4.13 – Variação de $\sigma_{xx}$ considerando o modelo de Drucker-Prager. ....	116
Figura 4.14 – Resultados para o caso da coluna elastoplástica. ....	117
Figura 4.15 – Poropressão na base da coluna poro-elastoplástica. ....	118
Figura 4.16 – Poropressão na base da coluna poro-elastoplástica (escala $\log$ ). ....	119
Figura 4.17 – Deslocamento no topo da coluna poro-elastoplástica. ....	119
Figura 4.18 – Deslocamento no topo da coluna poro-elastoplástica (escala $\log$ ). ....	120
Figura 4.19 – Tensão efetiva e poropressão na base da coluna. ....	121
Figura 4.20 – Evolução do parâmetro de endurecimento ao longo do tempo. ....	122
Figura 4.21 – Deslocamento vertical do topo da coluna. ....	122
Figura 4.22 – Poropressão para malhas com diferentes níveis de discretização. ....	123
Figura 4.23 – Deslocamento para malhas com diferentes níveis de discretização. ....	123
Figura 4.24 – Malha de elementos finitos utilizada. ....	124
Figura 4.25 – Resultados numéricos obtidos para o problema bidimensional. ....	127
Figura 4.26 – Tensões e poropressão para o problema de Schiffman. ....	127
Figura 4.27 – Poropressão normalizada para diferentes profundidades. ....	129
Figura 4.28 – Coluna submetida a um carregamento e fluxo prescrito. ....	130
Figura 4.29 – Variação da poropressão com aplicação do carregamento e fluxo. ....	132
Figura 4.30 – Variação da tensão $s_{yy}$ com aplicação do carregamento e fluxo. ....	132
Figura 4.31 – Parâmetro de endurecimento ( $\alpha$ ) ao longo do tempo. ....	133
Figura 4.32 – Variação das tensões ao longo do tempo. ....	134
Figura 4.33 – Representação gráfica para uma fundação rasa e profunda. ....	135

Figura 4.34 – Distribuição do deslocamento vertical no instante 800s. ....	136
Figura 4.35 – Distribuição do parâmetro de endurecimento no instante 800s. ....	137
Figura 5.1 – <i>Profiling</i> para o caso poro-elástico e solver LU. ....	141
Figura 5.2 – <i>Profiling</i> utilizando a estratégia de fatoração LU da MKL. ....	144
Figura 5.3 – <i>Profiling</i> utilizando a estratégia de fatoração LU da MKL. ....	145

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 - Matrizes do sistema de equações do problema acoplado. ....	80
Tabela 3.2 - Vantagens e desvantagens da estratégia totalmente acoplada. ....	97
Tabela 4.1 – Valores utilizados para a coluna. ....	105
Tabela 4.2 – Valores utilizados para o problema de Mandel. ....	112
Tabela 4.3 – Valores utilizados para a barra submetida a um esforço de tração.....	115
Tabela 4.4 – Valores dos parâmetros para o exemplo de bidimensional. ....	125
Tabela 4.5 – Incrementos de tempo ( $dt$ ) utilizados para as simulações. ....	126
Tabela 4.5 – Parâmetros para o caso da coluna com carregamento e fluxo.....	131
Tabela 5.1 – Distribuição de tempo para o caso elástico. ....	143
Tabela 5.2 – Distribuição de tempo para o caso poro-elástico.....	146

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\gamma_w$	Peso específico da água
$\gamma_{sat}$	Peso específico do solo saturado
$\gamma_{sub}$	Peso específico do solo submerso
$\sigma$	Tensão total hidrostática utilizada para o caso unidimensional
$\sigma'$	Tensão efetiva utilizada para o caso unidimensional
$p$	Poropressão utilizada no caso unidimensional
$p_0$	Excesso de poropressão na equação da teoria de Terzaghi
$p_z$	Excesso de poropressão na profundidade $z$
$V$	Volume total do solo
$V_v$	Volume de vazios no solo
$V_s$	Volume dos grãos do solo
$t$	Tempo
$\{v\}$	Vetor velocidade formado pelos vetores $v_x$ , $v_y$ e $v_z$
$k$	Coefficiente de permeabilidade do meio
$k_e$	Coefficientes de permeabilidade do meio
$e$	Índice de vazios do solo
$e_0$	Índice de vazios inicial do solo
$a_v$	Coefficiente de compressibilidade
$m_v$	Coefficiente de compressibilidade volumétrica
$c_v$	Coefficiente de adensamento do solo
$T_v$	Fator de tempo
$H_{dr}$	Distância de drenagem

$U_z$	Grau de adensamento
$U$	Porcentagem de recalque
$\zeta$	Varição da quantidade de água
$\epsilon$	Deformação volumétrica
$K$	Módulo volumétrico drenado
$1/H$	Coefficiente de expansão poroelástico relacionando deformação e poropressão
$1/H_1$	Coefficiente de expansão poroelástico relacionando variação da quantidade de água e tensão
$1/R$	Coefficiente de armazenamento específico sob tensão constante
$1/Q$	Coefficiente de armazenamento específico sob deformação constante
$S_\sigma$	Coefficiente de armazenamento específico não restrito
$S_\epsilon$	Coefficiente de armazenamento específico restrito
$B$	Coefficiente de Skempton
$\alpha$	Coefficiente de tensão efetiva ou coefficiente de Biot-Willis
$\sigma$	Tensor de tensões
$\epsilon$	Tensor de deformações
$u$	Deslocamento na direção $x$
$v$	Deslocamento na direção $y$
$w$	Deslocamento na direção $z$
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\nu_u$	Coefficiente de Poisson não drenado
$E$	Módulo de Elasticidade
$G$	Módulo Transversal
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$\nabla^2$	Operador diferencial de <i>Laplace</i>
$\Omega$	Domínio

$\Gamma$	Contorno
$\mathcal{L}, \mathcal{S}$	Operadores diferenciais
$w$	Funções de ponderação
$n$	Vetor unitário normal ao fluxo
$\{\bar{u}\}$	Vetor de deslocamentos nodal
$\{\bar{p}\}$	Vetor de poropressões nodal
$[K_{MM}]$	Matriz do problema mecânico
$[K_{MF}]$	Matriz de acoplamento mecânico-fluxo
$[C_{FF}]$	Matriz de compressibilidade
$[K_{FF}]$	Matriz do problema de fluxo
$\{f_M\}$	Vetor de forças mecânicas prescritas
$\{f_V\}$	Vetor de fluxo prescrito
$[B]$	Matriz das derivadas das funções de forma
$[N]$	Matriz das funções de forma
$[D']$	Matriz constitutiva do problema mecânico em termos de tensões efetivas
$[D]$	Matriz constitutiva do problema mecânico em termos de tensões totais
$[D_f]$	Matriz constitutiva que relaciona deformações e poropressões
$[I]$	Matriz Identidade
$\Delta t$	Incremento de tempo
$\beta$	Escalar que define o método de integração
$\varepsilon_{kk}$	Deformação volumétrica
$\lambda$	Constante elástica de Lamé
$\mu$	Constante elástica de Lamé
$\varepsilon^e$	Deformação elástica
$\varepsilon^p$	Deformação plástica

$\dot{\varepsilon}^p$	Taxa de deformação plástica
$\Phi$	Função de plastificação
$\sigma_y$	Tensão de escoamento (plastificação)
$\dot{\gamma}$	Multiplicador plástico
$\bar{\varepsilon}^p$	Deformação plástica acumulada
$H$	Módulo plástico ou Módulo de endurecimento generalizado
$E^{ep}$	Módulo elastoplástico
$N$	Vetor de fluxo
$\Psi$	Potencial elastoplástico
$A$	Forças termodinâmicas associadas ao endurecimento
$\tau_{max}$	Tensão cisalhante máxima
$\sigma_{max}$	Tensão normal máxima
$\sigma_{min}$	Tensão normal mínima
$I_i$	Primeiros invariantes de tensão
$J_i$	Segundos invariantes de tensão
$\mathcal{U}_d$	Energia de distorção
$s$	Tensor desviador de tensão
$\tau$	Tensão cisalhante
$c$	Coesão
$\sigma_n$	Tensão normal
$\phi$	Ângulo de atrito
$\eta, \bar{c}$	Parâmetros do material no modelo elastoplástico de Drucker-Prager
$p'$	Invariante de tensão associado as tensões hidrostáticas
$q$	Invariante de tensão associado as tensões desviadoras
$\sigma_1, \sigma_2$ e $\sigma_3$	Tensões principais



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	1
<b>1.1</b>	<b>Revisão Histórica</b> .....	2
<b>1.2</b>	<b>Motivação e Objetivos</b> .....	6
<b>1.3</b>	<b>Relevância</b> .....	7
<b>1.4</b>	<b>Divisão do Trabalho</b> .....	8
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	10
<b>2.1</b>	<b>Teoria do adensamento de Terzaghi</b> .....	10
2.1.1	Princípio das Tensões Efetivas .....	10
2.1.2	Interpretação da Teoria do Adensamento .....	13
2.1.3	Equação Governante da Teoria do Adensamento de Terzaghi .....	16
2.1.4	Limitações da Teoria de Terzaghi .....	22
<b>2.2</b>	<b>Teoria da Poroelasticidade de Biot</b> .....	23
2.2.1	Teoria de Biot .....	25
2.2.2	Equações Constitutivas Lineares .....	29
2.2.3	Equações Governantes do Problema Estático .....	34
2.2.4	Constantes Utilizadas na Teoria Acoplada .....	37
2.2.5	Comparação entre a Teoria de Biot e a Teoria de Terzaghi .....	39
2.2.6	Desenvolvimento das Tensões Durante o Adensamento .....	41
<b>2.3</b>	<b>Modelos Constitutivos</b> .....	43
2.3.1	Modelo Elástico-Linear .....	46
2.3.2	Teoria Elastoplástica .....	48
2.3.3	Modelos Elastoplásticos Clássicos .....	60
<b>3</b>	<b>ANÁLISE NUMÉRICA</b> .....	69
<b>3.1</b>	<b>Etapas de uma análise numérica</b> .....	69
<b>3.2</b>	<b>Métodos dos Resíduos Ponderados</b> .....	72
3.2.1	Ponderação dos Resíduos nas Equações da Poroelasticidade .....	74
<b>3.3</b>	<b>Método dos Elementos Finitos</b> .....	77
3.3.1	Discretização das Equações do Problema Fluxo-mecânico .....	78

<b>3.4</b>	<b>Integração Numérica</b> .....	82
3.4.1	Integração no Espaço .....	82
3.4.2	Integração no Tempo .....	83
<b>3.5</b>	<b>Formulação da Matriz Elastoplástica</b> .....	86
<b>3.6</b>	<b>Condições Iniciais para Deslocamento e Poropressão</b> .....	89
<b>3.7</b>	<b>Acoplamento entre o Problema Mecânico e de Fluxo</b> .....	94
3.7.1	Estratégias para Solução de Problemas Acoplados .....	95
<b>3.8</b>	<b>Implementação Computacional</b> .....	98
3.8.1	Diagrama UML do PORO .....	98
3.8.2	Fluxo geral de uma simulação poro-elastoplástica .....	101
<b>4</b>	<b>VERIFICAÇÕES E DISCUSSÕES</b> .....	103
<b>4.1</b>	<b>Coluna Poro-Elástica</b> .....	103
4.1.1	Estratégias para solução da condição inicial .....	107
4.1.2	Influência do incremento de tempo .....	110
<b>4.2</b>	<b>Exemplo bidimensional de Mandel</b> .....	111
<b>4.3</b>	<b>Coluna Poro-Elastoplástica</b> .....	114
<b>4.4</b>	<b>Adensamento Bidimensional</b> .....	124
<b>4.5</b>	<b>Coluna com carregamento e fluxo prescrito</b> .....	129
<b>4.6</b>	<b>Considerações poro-mecânicas em fundações</b> .....	135
<b>5</b>	<b>ESTRATÉGIAS DE OTIMIZAÇÃO E PARALELIZAÇÃO</b> .....	138
<b>5.1</b>	<b>Principais estratégias para otimização de um simulador</b> .....	139
<b>5.2</b>	<b>Otimização e paralelização no sistema PORO</b> .....	140
5.2.1	Caso 1: simulação poro-elástica .....	141
5.2.2	Caso 2: simulação poro-elastoplástica .....	144
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS</b> .....	147
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	150
	<b>ANEXOS</b> .....	164

## 1 INTRODUÇÃO

Entender o comportamento dos fenômenos que acontecem na natureza sempre foi e continua sendo o combustível da ciência. No campo da engenharia de estruturas, em especial, esse entendimento permite que o homem antecipe suas ações evitando comportamentos indesejáveis. Estimadas as ações que atuarão nessas estruturas, cabe ao engenheiro encontrar as reações e prever seu comportamento. Em geral, esse processo envolve a adoção de várias hipóteses para que seja possível construir um modelo matemático que represente tal estrutura.

Os modelos iniciais são construídos com base em várias simplificações. Contudo, tais simplificações vão sendo abandonadas ao longo do tempo como resultado do avanço da ciência e conseqüentemente do domínio do homem sobre esse fenômeno. Exemplificando esse avanço e destacando o foco deste trabalho, podem-se citar as teorias desenvolvidas para explicar o comportamento de meios saturados submetidos a carregamentos, entre as quais se destacam as teorias de Terzaghi (1923) e Biot (1941).

Com base nessas teorias, é de conhecimento comum na engenharia geotécnica que um solo totalmente ou parcialmente saturado submetido a um excesso de carga não assume uma deformação instantânea. A presença do fluido e a possibilidade do fluxo em seu interior fazem o solo apresentar deformações variáveis com o tempo. Essa dependência está associada à velocidade com que o fluido se move entre os vazios e às propriedades do solo, tais como permeabilidade, porosidade, etc.

O entendimento desse processo nos dias atuais é de grande relevância para a economia. Além da sua importância comprovada em projetos geotécnicos (fundações, barragem, aterros, etc.), essas teorias fundamentam diversos segmentos na indústria do petróleo, como os de projeto e produção de poços. O petróleo e seus derivados representam a maior parcela na matriz energética mundial e seu processo de extração está intimamente associado a esse fenômeno.

Nesse contexto, este trabalho apresenta um estudo sobre essas teorias, mais especificamente sobre a teoria de Biot, e destaca os avanços ocorridos ao longo do tempo desde sua formulação inicial. Utilizando estratégias modernas de programação, este trabalho

apresenta e expande um código computacional existente que implementa a teoria de Biot. Além disso, são reproduzidos exemplos clássicos da literatura e discutidas potenciais áreas de aplicação desse sistema computacional. Neste capítulo é feita uma breve revisão histórica do desenvolvimento dessas teorias, a motivação deste trabalho, sua relevância e como este documento está estruturado.

## 1.1 Revisão Histórica

Diversos exemplos históricos envolvendo o comportamento mecânico do solo saturado e submetido a um excesso de carga em sua superfície são reportados na literatura. As publicações que datam o surgimento da Lei de Darcy, entre 1856 e 1900, já faziam observações de como o nível da água em poços próximos a estações de trem variavam com a aproximação e afastamento de uma locomotiva (WANG, 2000).

A primeira teoria comprovadamente aceita para explicar o processo de deformação do solo saturado quando um excesso de carga atuava sobre sua superfície foi formulada por Terzaghi (1923). Publicada no trabalho *Die Berechnung der durchlässigkeitsziffer des tones aus dem verlauf der hydrodynamischen spannungserscheinungen*, essa teoria recebeu o nome de Teoria da Consolidação, mas também é conhecida como Teoria do Adensamento. Para explicar sua teoria, Terzaghi formulou um dos princípios mais importantes da Mecânica dos Solos, o *princípio das tensões efetivas*. Todas essas contribuições lhe renderam o título de “pai da mecânica dos solos”.

O termo consolidação tem sido pouco utilizado nos dias atuais, e geralmente é substituído por adensamento na engenharia geotécnica, tendo o mesmo significado que compactação na engenharia de petróleo.

A teoria proposta por Terzaghi fazia a analogia do solo com uma mola em um meio elástico totalmente saturado. Sua formulação esteve baseada em resultados experimentais e diversas hipóteses foram admitidas, tais como: fluxo unidimensional, carregamento constante, relação elástica-linear entre a tensão e deformação, deformações infinitesimais.

Uma breve história na literatura descreve um episódio triste que tangencia o surgimento dessa teoria. Uma pequena disputa científica entre Terzaghi e Fillunger,

inicialmente sobre problemas associados a barragens e, em seguida, em relação à teoria do adensamento, acabou em uma trágica morte. Fillunger cometeu suicídio em 1937 quando o comitê científico da época apoiou a teoria de Terzaghi (WANG, 2000).

A solução teórica de Terzaghi é uma boa aproximação durante a fase inicial do adensamento (primário), mas existe uma fase posterior, chamado adensamento ou compressão secundária, em que o adensamento continua a um ritmo superior à fase anterior. Essa fase ocorre após uma dissipação completa do excesso de poropressão quando alguma deformação acontece devido algum reajuste plástico da estrutura do solo (DAS, 2007).

Em seguida foram propostas outras teorias tridimensionais. A primeira foi denominada Teoria Pseudo-Tridimensional e foi proposta por Rendulic (1936). No entanto essa nova teoria continuava por apresentar quase que as mesmas limitações impostas por Terzaghi, inclusive ainda considerava o problema de fluxo de modo desacoplado do problema mecânico. A segunda teoria foi proposta por Biot (1941) e permitiu o acoplamento entre os problemas.

Entre as teorias tridimensionais propostas, a teoria de Biot teve notável aceitação na comunidade acadêmica. Um resumo de sua teoria foi publicado por ele mesmo por volta de 1935, mas somente a publicação *General Theory of Three-Dimensional Consolidation*, em 1941, reuniu de forma mais completa e rigorosa sua teoria. Esta seria a primeira teoria a idealizar o problema fluxo-mecânico de maneira acoplada, ou seja, a deformação e a poropressão foram tratadas como variáveis do problema e obtidas simultaneamente em uma única solução. Os anos seguintes foram marcados por uma série de publicações de sua autoria ampliando e dando novas interpretações à teoria.

Em 1957, Biot e Willis publicam um artigo discutindo os coeficientes elásticos da teoria do adensamento. Nesse artigo novas interpretações dos coeficientes propostos por Biot são feitas e o princípio das tensões efetivas proposto por Terzaghi é alterado pelo acréscimo de um coeficiente de tensão efetiva ou coeficiente de Biot-Willis.

Cryer (1963) apresenta um estudo comparativo entre as teorias de adensamento tridimensional de Biot e a teoria unidimensional de Terzaghi. Em seus estudos ele demonstra

que os resultados qualitativos para uma esfera de solo carregada hidrostaticamente é o mesmo quando analisado pelas duas teorias. No entanto, os valores da poropressão no centro da esfera diferem bruscamente. Segundo Cryer, a teoria de Terzaghi prevê que a pressão da água deve gradualmente diminuir enquanto na teoria de Biot há um incremento da poropressão no início da análise. Esse efeito é denominado Mandel-Cryer e foi discutido anos seguintes por vários autores.

Nas teorias de Terzaghi e Biot, uma das hipóteses básicas é a consideração de deslocamentos infinitesimais. Isto significa admitir que a geometria varia muito pouco com o carregamento. Gibson *et al.* (1967) reconheceram essa limitação e foram os primeiros a desenvolver uma teoria unidimensional que representasse essa deformação finita.

Schiffman (1969) levanta mais uma discussão sobre as teorias de Terzaghi e de Biot. Em suas conclusões ele apresenta dois argumentos que tornam o uso da teoria de Terzaghi mais atrativa para a época. O primeiro deles com base na simplicidade matemática e o segundo relacionado à experiência acumulada e validação dessa teoria. Até aquela data, quase todos os casos haviam sido estudados e interpretados com base na teoria de Terzaghi. Contudo, ele menciona que, com o desenvolvimento de computadores e de métodos numéricos mais robustos, a teoria de Biot deveria se tornar mais atrativa.

De fato, o desenvolvimento dos computadores e métodos numéricos mais eficientes permitiram a análise de problemas mais complexos envolvendo a teoria de Biot, principalmente depois da década de 60 com o desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos (MEF). Sandhu e Wilson (1969) foram alguns dos autores que formularam a teoria do adensamento utilizando princípios variacionais combinado ao Método dos Elementos Finitos. Com isso, tornou-se possível a análise de modelos que envolvessem propriedades materiais e condições de contorno mais complexas.

Embora o comportamento tensão-deformação de solos fosse altamente não linear e acompanhado de deformações plásticas permanentes, nos trabalhos publicados nesse período sobre adensamento, o solo era na maioria das vezes idealizado como material elástico linear. Poucos estudos haviam sido publicados nesse período, sendo Lewis *et al.* (1976) uns dos

primeiros a formular a teoria da adensamento considerando essa não linearidade (MANOHARAN & DASGUPTA, 1995).

Rice e Cleary (1976) reformularam as equações constitutivas da teoria da poroelasticidade apresentando uma formulação modificada. Em seu trabalho são propostas novas constantes que possuem um novo significado físico e de mais fácil entendimento.

Na abordagem elastoplástica para a análise de adensamento, em geral são utilizados os critérios de escoamento que descrevem o desenvolvimento das tensões dentro do esqueleto do solo através de Mohr-Coulomb, Drucker-Prager e o modelo modificado de Cam Clay (MANOHARAN & DASGUPTA, 1995).

Carter *et al.* (1979) não foram os pioneiros, mas apresentaram estudos sobre o adensamento desenvolvendo as equações governantes em termos incrementais. Eles consideraram o solo como um meio elastoplástico e utilizaram o critério de escoamento de Mohr-Coulomb e a lei de fluxo não associada. Carter *et al.* destacaram a necessidade de considerar deformações finitas quando o solo possui um grande número de vazios ou o excesso de carga é muito maior que o módulo de deformação do solo.

Inoue (2005), em sua revisão bibliográfica, faz um mapeamento de diversos modelos de elementos finitos que foram apresentados na literatura para a solução de problemas de adensamento em solos saturados, entre os quais seu trabalho apresenta: Ghaboussi e Wilson (1973); Zienkiewicz e Taylor (1989 e 1991); Simon, Zienkiewicz e Paul (1984); Zienkiewicz e Shiomi (1984); Lewis e Schrefler (1987 e 1998) e Nogueira (1992).

Borba (1992) apresenta um trabalho com a implementação numérica do método dos elementos de contorno para um problema em estado plano da poroelasticidade acoplada. Em seu trabalho ele destaca o fraturamento hidráulico como uma potencial área de aplicação da teoria da poroelasticidade.

Mesmo a teoria de Biot tratando o problema fluxo-deformação como único, a formulação permite sua solução na forma desacoplada. Gutierrez e Hansteen (1994) foram alguns dos pesquisadores que compararam os resultados obtidos de simulações numéricas de reservatórios considerando a estratégia de formulação acoplada e desacoplada. Seus

resultados mostraram que as alterações das pressões no reservatório devido à compactação só são avaliadas adequadamente se o fluxo do fluido e as deformações das rochas forem analisados de maneira acoplada.

Nos dias atuais centenas de trabalhos tratando da teoria da poroelasticidade estão presentes na literatura científica. Publicações mais recentes remetem à simulação de modelos cada vez mais reais e complexos, a exemplo do trabalho de Inoue (2005). Em seu trabalho é descrita a formulação para um problema elastoplástico bifásico (água e ar) com a possibilidade de considerar o solo parcialmente saturado. Outros trabalhos utilizam técnicas de programação mais avançadas, como a programação orientada a objetos para modelar o fenômeno da poroelasticidade (SIQUEIRA, 1995; SENA, 2008; FERNANDES, 2009).

Com as potenciais áreas de aplicação na indústria de petróleo, diversos trabalhos foram direcionados para o estudo de fraturamento hidráulico, compactação e subsidência em reservatórios de hidrocarbonetos, entre outros (PEREIRA, 2007; NAVIEIRA, 2008).

Esta breve revisão histórica não tem o objetivo de descrever todos os trabalhos mais importantes desde o surgimento da teoria até o presente momento, mas de relacionar algumas contribuições que ocorreram ao longo do tempo e servir como ponto de referência inicial para uma investigação mais detalhada sobre o assunto.

## **1.2 Motivação e Objetivos**

O interesse no desenvolvimento deste trabalho foi motivado pelas recentes pesquisas em simulações multifísica desenvolvidas no Laboratório de Computação Científica e Visualização (LCCV), da Universidade Federal de Alagoas (UFAL). Esse laboratório possui um histórico com o desenvolvimento de mais uma década de trabalhos envolvendo simulações computacionais de problemas de engenharia, a maioria deles relacionado ao setor de petróleo e gás, com sólida parceria com a PETROBRAS.

Essa nova frente de pesquisa teve início com o trabalho de Sena (2008). Em seu trabalho de conclusão de curso, Sena desenvolveu um módulo computacional capaz de analisar numericamente o comportamento de meios porosos de forma totalmente acoplada usando a teoria de Biot. Esse módulo desenvolvido ainda não tratava de forma genérica a



imposição de condições iniciais necessárias para integração das equações diferenciais governantes, assim como não formulava a prescrição de fluxo no contorno.

Dando continuidade a esse trabalho, Fernandes (2009) propôs uma nova estratégia numérica para a análise acoplada fluxo-deformação de meios porosos baseada também na Teoria da Poroelasticidade de Biot. Com base no método dos elementos finitos e usando o paradigma de orientação a objetos, Fernandes expande o sistema PORO, idealizado por Sena (2008). Em seu trabalho, ele faz a prescrição das condições iniciais do problema transiente a partir dos resultados de deslocamentos e poropressões obtidos com a solução prévia de um problema estático não drenado em termos de tensões totais.

Estendendo ainda mais o sistema PORO construído por Sena (2008) e Fernandes (2009), este trabalho visa expandir e tornar esse sistema ainda mais robusto, permitindo a simulação de modelos mais complexos e mais discretizados. Dessa forma, são objetivos principais deste trabalho:

- Reformular a estrutura de classes existente no sistema PORO e incorporar uma classe de modelos constitutivos que permita a consideração de modelos elastoplásticos mais apropriados para solos, como os modelos de Drucker-Prager e Mohr-Coulomb.
- Estudar e propor uma nova estratégia para a geração do estado de tensão inicial no solo, uma vez que essa consideração apresenta grande relevância quando o solo é considerado como um meio elastoplástico.
- Implementar estratégias de Computação de Alto Desempenho (CAD) baseada principalmente na paralelização do código, para permitir a simulação de modelos mais discretizados.

### **1.3 Relevância**

A teoria apresentada por Biot em 1941 permitiu que a análise dos fenômenos fluxo-deformação fosse feita de maneira acoplada, aproximando ainda mais o comportamento real do solo. Além da notável importância desses fundamentos em projetos de engenharia, como citado, tais teorias possuem potenciais áreas de aplicação na indústria de petróleo. Como o processo de extração desse mineral está diretamente associado ao comportamento fluxo-deformação do solo, tal tema se apresenta como de grande relevância nos dias atuais, ainda

mais com as crescentes descobertas de campos de petróleo em lugares nunca explorados, como os campos no Pré-Sal. O desafio em produzir nessas regiões requer grandes investimentos em pesquisas, pois existe pouca experiência acumulada.

Em simulações numéricas de reservatórios é comum em algumas delas apenas a utilização da equação de fluxo em meios porosos para prever o comportamento de um reservatório durante sua exploração. Durante o período de produção, fenômenos como compactação, subsidência, estabilidade de poços e produção de areia não podem ser previstos apenas com a simulação do fluxo no meio poroso, pois esses fenômenos estão relacionados com as deformações do reservatório.

Dessa forma, para que uma simulação de fluxo de um reservatório possa considerar os fenômenos anteriormente descritos, ela deve ser realizada juntamente com a simulação do estado de tensões do reservatório durante o período de produção. Duas estratégias podem ser utilizadas: uma delas considerando os dois problemas de forma desacoplada e a outra considerando o acoplamento das equações dos dois problemas. Essa última estratégia pode ser realizada utilizando a teoria de Biot.

#### **1.4 Divisão do Trabalho**

O trabalho está dividido em seis capítulos. Os capítulos são estruturados de modo a apresentar os fundamentos necessários para a formulação e implementação da teoria de Biot para meios elastoplásticos. O assunto, objetivos e justificativa do trabalho são apresentados no primeiro capítulo, assim como a estruturação dos capítulos.

O segundo capítulo é denominado **Fundamentação Teórica** e descreve a teoria unidimensional de Terzaghi e em seguida a Teoria da Poroelasticidade de Biot, sendo essa última analisada neste trabalho. Ainda nesse capítulo, uma seção é reservada para a descrição de modelos constitutivos elásticos e elastoplásticos (Tresca, von Mises, Mohr-Coulomb e Drucker-Prager).

O terceiro capítulo, **Análise Numérica**, combina vários temas necessários para o entendimento do processo, desde a modelagem até a discretização das equações governantes utilizando o Método dos Elementos Finitos. Também é discutido sobre estratégias de

acoplamento numérico para solução do problema poro-mecânico, e a última seção descreve alguns detalhes da implementação computacional realizada.

No quarto capítulo, **Verificações e Discussões**, têm-se a apresentação e discussão dos resultados obtidos com alguns modelos simulados com o PORO e comparados com soluções analíticas, numéricas e respostas de outros softwares. Em resumo, esse capítulo é o de verificação do código implementado.

O quinto capítulo, **Estratégias de Otimização e Paralelização**, apresenta um ensaio sobre algumas estratégias que podem ser utilizadas para otimizar o código e alguns resultados obtidos com a sua implementação no PORO. Nesse capítulo é apresentado o resultado da análise de *profiling* do código e são identificadas as regiões que demandam maior consumo de tempo.

Por fim, no sexto capítulo, **Conclusão e Trabalhos Futuros**, é feito um resumo dos pontos fracos e fortes do trabalho e apresentado uma lista das principais limitações do código e propostas que podem ser incorporadas e/ou desenvolvidas em trabalhos futuros.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo é apresentado um resumo da Teoria Unidimensional de Terzaghi e em seguida é apresentada, em maiores detalhes, a Teoria da Poroelasticidade de Biot. Essa teoria permite o acoplamento total do problema mecânico com o de fluxo e permite também um estudo desse comportamento com diferentes relações constitutivas. Por isso, neste capítulo também são apresentados alguns modelos constitutivos, elásticos e elastoplásticos, implementados durante o desenvolvimento deste trabalho.

### 2.1 Teoria do adensamento de Terzaghi



Karl Terzaghi nasceu em 1883 na Áustria e viveu até 1963. Entre 1925 e 1929 tornou-se líder de uma nova área da engenharia denominada mecânica dos solos. O início dessa nova era é marcado pela publicação do seu trabalho em 1923. Considerado por muitos o pai da mecânica dos solos, poucos discordam que durante sua vida Terzaghi foi também o intercâmbio para pesquisa e aplicação em todo o mundo. Juntamente com Casagrande em Harvard, Terzaghi foi professor de Milton Vargas, engenheiro que é considerado o “pai da geotecnia” no Brasil.

Adensamento é o fenômeno que explica a saída da água presente em um solo saturado quando esse é submetido a um carregamento em sua superfície. O recalque, termo muito utilizado na engenharia civil, é usado para designar o fenômeno que ocorre quando uma edificação sofre um rebaixamento devido ao adensamento do solo sob sua fundação, sendo a principal causa de trincas em edificações.

Em 1923, Terzaghi propôs uma teoria utilizada até os dias atuais para explicar como ocorre a evolução dos recalques e do adensamento no solo. Essa teoria possui várias simplificações, mas sem dúvida representa a base para o desenvolvimento das teorias mais complexas.

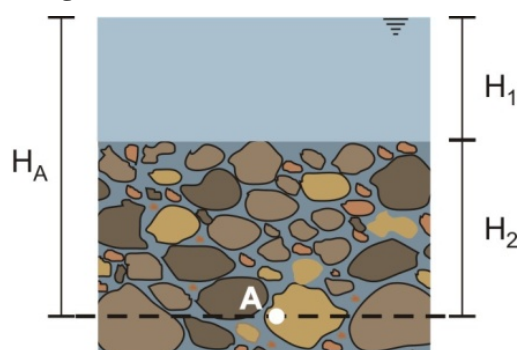
#### 2.1.1 Princípio das Tensões Efetivas

O solo é constituído por três fases distintas: sólido, líquido e gasoso. Do ponto de vista da engenharia ele pode ser definido como agregado não cimentado de grãos minerais e matéria orgânica (formando a parte sólida), com líquido e gás nos espaços vazios entre as

partículas sólidas. Dessa forma, o comportamento do solo depende diretamente da quantidade de cada uma dessas parcelas e a análise das tensões atuantes requer a consideração delas (DAS, 2007).

A Figura 2.1 ilustra uma amostra de solo em que é possível observar as três fases constituintes do solo. A figura é apenas uma ilustração para facilitar o entendimento do princípio das tensões efetivas. Nessa amostra de solo apresentada, considera-se o nível máximo de saturação, indicando que todos os vazios estão preenchidos por água.

**Figura 2.1 - Amostra de solo saturada.**



Fonte: Autor, 2012.

Nota-se que o solo é constituído por um conjunto de partículas que possuem granulometria diferenciadas e que as forças aplicadas por um carregamento superficial são transmitidas de partícula a partícula. Diante da complexa tarefa em desenvolver modelos matemáticos que contemplem essa distribuição de forças, tais ações são substituídas pelo conceito de tensão em um ponto, abordagem utilizada no desenvolvido da Mecânica do Contínuo.

O princípio das tensões efetivas postulado por Terzaghi para solos saturados sugere que a tensão em qualquer ponto no solo deve ser calculada com base em duas parcelas: a tensão suportada pelos grãos e a pressão do fluido.

A tensão total calculada no ponto A da Figura 2.1, denominada  $\sigma_A$ , é obtida através do peso específico da camada de solo saturada ( $\gamma_{sat}$ ) e do peso específico da camada de água ( $\gamma_w$ ). No ponto A imagina-se que existe uma coluna de massa (sólida + líquida) que resulta

em uma pressão final nesse ponto de referência. Assim, a tensão total no ponto A é definida como

$$\sigma_A = H_1\gamma_w + H_2\gamma_{sat} \quad (2.1)$$

Em um meio líquido, naturalmente existe uma pressão distribuída que faz com que toda a estrutura esteja submetida a pressões hidrostáticas que dependem unicamente da altura em relação a um nível de referência. Essa pressão é denominada pressão de poro, ou poropressão, e denotada por  $p$ . No ponto A, essa pressão é determinada como

$$p_A = H_A\gamma_w \quad (2.2)$$

Baseando-se nessas tensões e na natureza delas, Terzaghi estabeleceu o Princípio das Tensões Efetivas como

$$\sigma = \sigma' + p \quad (2.3)$$

Segundo esse princípio, a tensão total que atua no solo depende da tensão efetiva e da poropressão. Terzaghi também assume que todos os efeitos mensuráveis resultantes de variações de tensões em solos, como compressão, distorção e resistência ao cisalhamento, são devidos a variações de tensões efetivas (PINTO, 2009), ou seja, somente variações nas tensões efetivas são capazes de provocar deformações no solo.

A tensão efetiva no ponto A pode ser calculada substituindo as Eqs. (2.1) e (2.2) na Eq. (2.3), o que resulta em

$$\sigma' = H_2\gamma_{sub} \quad (2.4)$$

onde  $\gamma_{sub}$  é o peso específico submerso que, diferentemente do peso específico saturado, considera o empuxo que o solo sofre pelo fato de estar submerso. O peso específico submerso

é o peso natural menos o peso específico da água. Isso reforça a ideia de que a tensão efetiva é a tensão suportada pelos grãos descontada a ação do empuxo.

A análise do ponto de vista da Mecânica dos Sólidos não faz distinção entre as tensões atuantes, sendo consideradas apenas as tensões totais. No entanto, na Mecânica dos Solos é estritamente necessário o cálculo através das tensões efetivas, pois como foi admitido, são essas as tensões que contribuem para as deformações do solo.

Outro fator ainda mais importante é a consideração do fluxo do fluido presente no solo. O deslocamento do fluido presente no interior dos vazios do solo pode alterar o nível da água e assim provocar variações na poropressão, alterando as tensões efetivas. Terzaghi, através da analogia do solo com uma mola em meio saturado, explica e formula como acontecem as variações nessas tensões. Essa teoria é denominada Teoria do Adensamento de Terzaghi e somada com o princípio das tensões efetivas estão entre as maiores contribuições de Terzaghi.

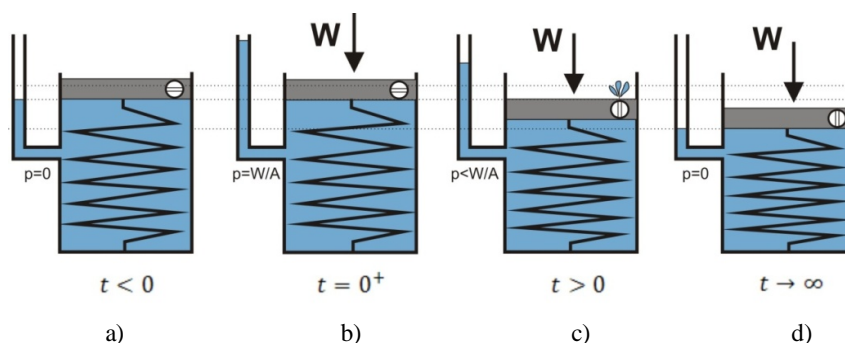
### 2.1.2 Interpretação da Teoria do Adensamento

Supondo inicialmente uma camada de solo com todos os vazios preenchidos com água. Quando um carregamento é aplicado na superfície dessa camada, há um aumento instantâneo da poropressão e a existência dos vazios permite que a água se desloque até zonas com pressões menores. Esse fluxo inicia e continua até que todo o excesso de pressão na água seja dissipado. A saída da água do interior desses vazios provoca um aumento da tensão efetiva, fazendo com que o arranjo entre os grãos seja modificado para restabelecer o equilíbrio. Essas deformações no solo recebem o nome de recalque e caracterizam o fenômeno do adensamento.

Para explicar como acontece o adensamento, Terzaghi propôs a analogia desse mesmo solo com um cilindro com área da seção transversal  $A$  completamente preenchido por água. O cilindro contém em seu interior uma válvula com um orifício, de dimensões reduzidas, conectada a um pistão na tampa do cilindro, por onde é possível aplicar um carregamento. A água representa o fluido presente no solo, os grãos do solo são representados pela mola e o orifício representa a permeabilidade (Figura 2.2).

Inicialmente, quando não existe carregamento aplicado no pistão, o nível da água no interior do cilindro é o mesmo no vaso externo comunicante, que se encontra sob pressão atmosférica, indicando que a pressão no interior do cilindro também é a atmosférica (Figura 2.2-a).

**Figura 2.2 - Analogia do adensamento.**



Fonte: Autor - Adaptada de WANG, 2000.

Na etapa seguinte aplica-se uma carga de peso  $W$  sobre o pistão. Nesse instante, tem-se um aumento no nível da água no vaso que comunica o cilindro com o meio externo, ilustrando um aumento instantâneo da pressão na água dentro do cilindro. Nota-se que nesse instante a mola não sofreu nenhuma deformação e como não existem perdas no sistema, conclui-se que toda a carga aplicada foi diretamente transferida para a água, aumentando sua pressão em  $W/A$ .

Esse aumento de pressão na água é denominado sobrepressão e representa um aumento na poropressão inicial, denotado por  $p$ . Como não existe deformação na mola, conclui-se também que a tensão efetiva nesse instante não sofreu alterações. Como a tensão efetiva não foi alterada conclui-se que o aumento da tensão total ocorreu devido apenas ao aumento da poropressão (Figura 2.2-b).

Passado esse instante inicial, a válvula com o orifício sofre uma rotação devido ao aumento da pressão interna ocasionado pelo peso  $W$ , permitindo a saída da água. Com esse fluxo, tem-se início uma dissipação da pressão excedente na água e como consequência a mola começa a apresentar pequenas deformações, o que significa que o excesso de poropressão está sendo transferido para a mola em termos de tensões efetivas. Nesse instante





instantaneamente o carregamento. Através de um processo dinâmico esse carregamento é transferido para os grãos em uma velocidade que depende das propriedades do meio. O processo de deformação do solo é acompanhado pela dissipação do excesso de poropressão.

Assim como descrito em DAS (2007), as magnitudes da tensão efetiva e da poropressão a várias profundidades mudarão dependendo da distância mínima do caminho de drenagem até o topo ou a base da camada de areia. A maneira como ocorre esta transferência de poropressão para tensões efetivas em uma camada de solo consiste na Teoria do Adensamento de Terzaghi. A seção seguinte apresenta a dedução da equação governante para o problema do adensamento segundo Terzaghi.

### 2.1.3 Equação Governante da Teoria do Adensamento de Terzaghi

O recalque total de uma camada de solo quando submetida a um acréscimo de carga pode ser determinado através da análise dos resultados do ensaio de adensamento, assumindo que o adensamento é unidimensional. Esses ensaios consistem na determinação de curvas de deformação no tempo e no estudo da variação do índice de vazios com a pressão do corpo de prova. Diversos autores apresentam expressões que permitem o cálculo do recalque total.

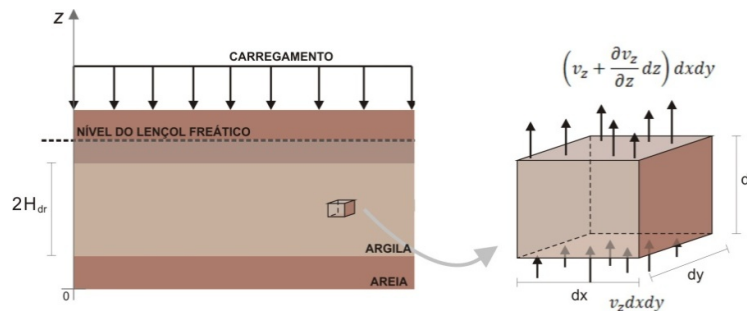
Entretanto, essas expressões não fornecem nenhuma informação a respeito da taxa de adensamento primário. Terzaghi, em 1923, propôs a primeira teoria para quantificar a evolução do adensamento em solo de argilas saturadas. A dedução dessa teoria está baseada em seis hipóteses (DAS, 2007):

- **O sistema argila-água é homogêneo** – Isso indica que a distribuição dos vazios no solo é uniforme e que o fluxo acontece sob as mesmas condições.
- **O solo está totalmente saturado** – Essa hipótese admite que toda a água que se encontra na mesma linha de referência deverá percorrer a mesma distância para sair do solo e que o aumento de poropressão ocorre em todos os pontos do solo.
- **A compressibilidade da água é desprezível** – Quando o carregamento é aplicado o fluido presente no solo deverá fluir para zonas de baixas pressões e não haverá redução do volume das moléculas de água.

- **A compressibilidade dos grãos do solo é desprezível** – Isso indica que não haverá deformação por redução do volume do solo, mas sim por uma alteração no arranjo estrutural entre os grãos devido à saída da água.
- **O escoamento é unidimensional** – O meio é considerado como semi-infinito na direção longitudinal e simétrico ao longo da direção transversal de modo que o fluxo pode ser idealizado em apenas uma direção.
- **A lei de Darcy governa o fluxo** – A velocidade de escoamento é governada pela lei de Darcy e a carga hidráulica é representada pelo acréscimo de pressão.

Admite-se uma camada de argila saturada entre duas camadas de solos impermeáveis submetida a um carregamento superficial, conforme a Figura 2.4. Na camada de argila existe um pequeno duto que permite escoar a água quando a camada é pressionada. A espessura da camada de argila é  $2H_{dr}$ , onde  $H_{dr}$  é altura de drenagem da camada, isto é, a maior distância que a água pode percorrer para deixar essa camada de solo. A direção do fluxo é ilustrada no elemento infinitesimal destacado na figura.

**Figura 2.4 - Camada de argila submetida ao adensamento.**



Fonte: Autor, 2012.

O balanço entre a quantidade de água que sai e entra desse elemento resulta em

$$\left( v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz \right) dx dy - v_z dx dy = \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} dx dy dz = \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.6)$$

em que  $V$  representa o volume total,  $v_z$  a velocidade na respectiva direção e  $t$  o tempo.

Com a lei de Darcy é possível calcular a velocidade de escoamento como o produto entre um coeficiente de permeabilidade do meio ( $k$ ) e a carga hidráulica existente ( $\partial h/\partial z$ ). No presente caso, a carga hidráulica é representada pela sobrepressão ( $p$ ) proveniente do acréscimo de tensões na superfície do solo, dada por

$$v_z = ki = -k \frac{\partial h}{\partial z} = -k \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.7)$$

onde o parâmetro  $k$  é definido pela razão do coeficiente de permeabilidade ( $k_e$ ) e o peso específico da água ( $\gamma_w$ ).

Substituindo a Eq. (2.7) na Eq. (2.6) tem-se a expressão que relaciona a variação de poropressão com a altura e a variação do volume no tempo.

$$-k \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{dx dy dz} \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.8)$$

O volume total ( $V$ ) do solo é composto pela soma do volume dos grãos ( $V_s$ ) e o volume de vazios presentes no solo ( $V_v$ ). O volume de vazios é composto pelo volume preenchido pelo fluido e pelo ar. Usando a definição de índice de vazios ( $e$ ) e substituindo o volume total por essas parcelas, tem-se que

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial(V_s + V_v)}{\partial t} = \frac{\partial(V_s + eV_s)}{\partial t} = \frac{\partial V_s}{\partial t} + e \frac{\partial V_s}{\partial t} + V_s \frac{\partial e}{\partial t} \quad (2.9)$$

Como hipótese foi admitido que o solo é incompressível, portanto

$$\frac{\partial V_s}{\partial t} = 0 \quad (2.10)$$

O volume dos sólidos pode ser representado pelo índice de vazios como

$$V_s = \frac{V}{1 + e_0} \quad (2.11)$$

Substituindo as Eq. (2.10) e (2.11) na Eq. (2.9) resulta em

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{dx dy dz}{1 + e_0} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (2.12)$$

Combinando as Eqs. (2.8) e (2.12) tem-se que

$$-k \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{1 + e_0} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (2.13)$$

A variação no índice de vazios está relacionada com a variação no excesso de poropressão existente no solo. Admite-se que a relação entre esse excesso de poropressão e o índice de vazios é descrito por uma relação linear e estão relacionados através de um coeficiente  $a_v$ , denominado coeficiente de compressibilidade, que pode ser considerado constante para uma faixa pequena de variação da tensão (DAS, 2007), ou seja,

$$\frac{\partial e}{\partial(\Delta\sigma')} = -\frac{\partial e}{\partial p} = a_v \quad (2.14)$$

Na derivada temporal da Eq. (2.13) aplica-se a regra da cadeia assumindo a dependência do índice de vazios da poropressão e substitui nessa expressão a Eq. (2.14), resultando em

$$-k \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -\frac{a_v}{1 + e_0} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.15)$$

Para reduzir o número de variáveis da equação são definidos o coeficiente de compressibilidade volumétrica ( $m_v$ ) e o coeficiente de adensamento do solo ( $c_v$ ) nas formas

$$m_v = \frac{a_v}{1 + e_0} \quad (2.16)$$

$$c_v = \frac{k}{m_v} \quad (2.17)$$

Substituindo-se as Eqs. (2.16) e (2.17) na Eq. (2.15) encontra-se a equação diferencial proposta por Terzaghi para expressar a variação da poropressão no solo ao longo do tempo e da altura como

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (2.18)$$

Detalhes sobre a solução dessa equação diferencial são apresentados no Anexo A, construída com base na dedução de Fernandes (2010). Para as condições de contorno e inicial consideradas, dadas por

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 0$$

$$z = 2H_{dr} \quad \Rightarrow \quad p = 0$$

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad p = p_0$$

tem-se como solução

$$p = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{2p_0}{M} \operatorname{sen} \left( \frac{Mz}{H_{dr}} \right) \right] e^{-M^2 T_v} \quad (2.19)$$

onde

$m$  = número inteiro

$p_0$  = excesso de poropressão inicial

$M = (\pi/2)(2m + 1)$

$$T_v = \frac{c_v t}{H_{dr}^2} = \text{fator de tempo}$$

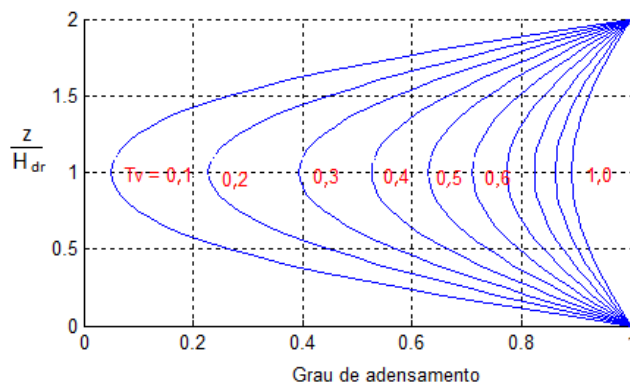
Como o adensamento continua até que todo o excesso de poropressão seja dissipado, o grau de adensamento ( $U_z$ ) em certa profundidade pode ser definido como

$$U_z = 1 - \frac{p_z}{p_0} \quad (2.20)$$

e ele representa o grau de adensamento a qualquer profundidade  $z$  em qualquer instante de tempo  $t$ . Nessa expressão,  $p_z$  é o excesso de poropressão na profundidade  $z$  e no instante  $t$ .

As Equações (2.19) e (2.20) podem ser combinadas para se obter o grau de adensamento a qualquer profundidade  $z$ , conforme é ilustrado na Figura 2.5. Para um mesmo fator de tempo, as regiões próximas ao centro da camada apresentam grau de adensamento sempre menor comparado com as regiões próximas à superfície ou fundo da camada. Isso ocorre porque a água nos pontos mais próximos dessas regiões necessita de um tempo menor para deixar a camada de solo comparada com a água que está próxima ao centro da camada, que deve percorrer uma distância maior.

**Figura 2.5 - Grau de adensamento para uma camada de argila.**



Fonte: Autor, 2012.

A Equação (2.20) representa o grau de adensamento para uma profundidade específica. Outra equação que pode ser deduzida é o grau médio de adensamento ( $U$ ) para toda a camada de argila ao longo de toda profundidade, também denominado *porcentagem de recalque*

(PINTO, 2009). Para isso, integra-se o grau de adensamento ao longo da profundidade e divide-se pela espessura total da camada, resultando em

$$U = 1 - \frac{\left(\frac{1}{2H_{dr}}\right) \int_0^{2H_{dr}} p_z dz}{p_0} \quad (2.21)$$

Substituindo a Eq. (2.19) na Eq. (2.21) tem-se

$$U = 1 - \sum_{m=0}^{m=\infty} \left[ \frac{2}{M^2} \right] e^{-M^2 T_v} \quad (2.22)$$

As equações apresentadas para evolução do adensamento foram construídas considerando a existência de duas superfícies de drenagem. No entanto, em algumas situações a camada saturada pode estar acima de uma camada de rocha impermeável. Nesse caso, a solução é idêntica à apresentada anteriormente, bastando apenas considerar a parte superior do gráfico apresentado na Figura 2.5.

O fator de tempo ( $T_v$ ) que aparece nas equações é adimensional e está relacionado com o tempo e com as propriedades geométricas e físicas do solo. O coeficiente de adensamento, que depende da permeabilidade do meio e de outros parâmetros, pode ser determinado através de ensaios experimentais.

#### 2.1.4 Limitações da Teoria de Terzaghi

Embora a teoria de Terzaghi tenha dado contribuições essenciais para a Mecânica dos Solos e o estudo das tensões em solos saturados, essa teoria apresenta uma série de limitações, dentre as quais

- Consideração do fluxo em apenas uma dimensão;
- Solo considerado totalmente saturado;
- Desacoplamento entre as deformações e poropressão;
- Consideração da tensão total constante durante o adensamento;
- Variação linear entre as tensões e índice de vazios;
- Comportamento elástico do solo.



Essas restrições foram importantes para a construção da teoria de Terzaghi. O mesmo ocorre nos dias atuais quando fenômenos complexos são inicialmente idealizados com inúmeras restrições e aos poucos, ao longo dos anos, algumas dessas limitações são abandonadas, conduzindo a teoria inicial a teorias cada vez mais completas e próximas da realidade. Um exemplo dessa evolução no estudo de tensões em meios saturados foi proposto por Biot. Em sua teoria, o espaço pode ser considerado tridimensional, a condição de saturação total pode ser modificada e, por fim, a Teoria de Biot permitiu o acoplamento entre o problema mecânico e hidráulico. Com isso, não apenas a poropressão passou a influenciar nas tensões efetivas, como também as deformações no solo passaram a influenciar a poropressão.

## 2.2 Teoria da Poroelasticidade de Biot



Maurice Anthony Biot (1905-1985) foi um físico belga naturalizado estadunidense. Ao longo de sua vida obteve o grau de bacharel em filosofia (1927), engenharia de minas (1929), engenharia elétrica (1930), doutorado em ciências (1931) e também Ph.D. em ciências aeronáuticas (1932). Entre 1935 e 1962 publicou uma série de artigos que fundamentaram a Teoria da Poroelasticidade, conhecida como *Teoria de Biot*. As contribuições de Biot não estiveram restritas apenas à Mecânica dos Solos, mas também abrange estudos e patentes em áreas como Termodinâmica, Aeronáutica, Geofísica, Eletromagnetismo e outras (WANG, 2000).

Como descrito em Das (2007), quando um solo saturado é submetido a um aumento de tensão, o aumento do excesso de poropressão é quase instantâneo. Em solos arenosos, o recalque elástico e o adensamento ocorrem quase que simultaneamente. No caso de argilas, por exemplo, o recalque elástico ocorre de imediato, mas o adensamento ocorre ao longo do tempo. Nesse último caso, a presença do fluido e a possibilidade do fluxo em seu interior fazem o solo apresentar deformações que além da profundidade, dependem também do tempo. Essa dependência temporal está associada à velocidade com que o fluido se move entre os vazios e as propriedades do solo (permeabilidade, porosidade, etc.). O entendimento e formulação desse processo foram inicialmente propostos por Terzaghi em 1923 e é conhecido como Teoria do Adensamento, tendo sido discutido no capítulo anterior.

Essa teoria teve notável aceitação e mesmo nos dias atuais possui grande utilidade. Contudo, a teoria de Terzaghi possui algumas restrições: formulação restrita a problemas unidimensionais, relações lineares entre a tensão e deformação, desacoplamento entre os problemas de fluxo e mecânico, entre outras. Mesmo diante disso, o mecanismo idealizado por Terzaghi revolucionou os estudos em solos e rochas, razão pela qual ele ficou conhecido como o pai da Mecânica dos Solos.

Em 1936, Rendulic expande a teoria de Terzaghi para análise de problemas tridimensionais, originando a Teoria Pseudo-Tridimensional ou Teoria de Terzaghi-Rendulic. Para isso, ele substituiu a derivada segunda espacial presente na teoria de Terzaghi pelo operador de Laplace, mas não considerou termos de acoplamento entre os fenômenos envolvidos (WANG, 2000).

Ampliando algumas limitações impostas por Terzaghi, Biot publicou em 1941 um artigo denominado: *General Theory of Three-Dimensional Consolidation*. Nesse artigo Biot descreve sua teoria sobre o acoplamento entre o problema mecânico e de fluxo sob regime linear. Segundo Biot, um resumo de sua teoria havia sido publicado por ele mesmo em meados 1935, porém o artigo mais recente reuniu de forma mais rigorosa e completa sua teoria, denominada em anos posteriores como Teoria da Poroelasticidade de Biot.

O termo “poroelasticidade” foi utilizado pela primeira vez em uma nota de rodapé no trabalho de J. Geertsma em 1966. O trabalho tinha o título “Problemas de mecânica das rochas em engenharia de produção de petróleo” e o termo fazia referência aos trabalhos de Biot na elasticidade e viscoelasticidade de sólidos saturados com fluidos (WANG, 2000).

A teoria tridimensional da poroelasticidade foi formulada por Biot quando ele era professor de mecânica na Universidade de Columbia (EUA). Em sua proposta, Biot introduziu uma variável associada à variação da quantidade de água e formulou sua dependência em relação às tensões atuantes no solo, caracterizando o acoplamento de termos mecânicos no problema de fluxo. Usando o princípio das tensões efetivas proposto por Terzaghi, Biot também fez o acoplamento de termos de fluxo no problema mecânico ao introduzir o termo de poropressão nas relações constitutivas derivadas da lei de Hooke para um meio elástico, linear, homogêneo e isotrópico.

### 2.2.1 Teoria de Biot

A teoria desenvolvida por Biot em 1941 (Teoria da Poroelasticidade) não esteve restrita apenas ao problema poroelástico, tendo grande aplicação no estudo de ondas em meios saturados. No acoplamento entre o problema mecânico e de fluxo, Biot criou equações de acoplamento para relacionar esses fenômenos.

Nas equações constitutivas descritas pela teoria da elasticidade, Biot incorporou o termo poropressão e, para o problema de fluxo, ele criou uma nova variável para quantificar a variação do volume de água no solo em função das tensões. Essa nova variável foi denominada *variação na quantidade de água* ( $\zeta$ ) e representa o incremento de água por unidade de volume de solo.

Em sua teoria, as seguintes hipóteses são assumidas:

1. Isotropia do material
2. Comportamento elástico entre as tensões e deformações
3. Relações lineares entre as tensões e deformações
4. Pequenas deformações
5. Incompressibilidade da água contida nos poros
6. A possibilidade de o fluido conter bolhas de ar
7. O fluxo de água através do esqueleto poroso é regido pela lei de Darcy
8. Teoria tridimensional

Sobre a hipótese de isotropia (1), Biot comenta que ela pode ser facilmente contornada. As considerações (2) e (3) são as mais sujeitas a críticas. Contudo, deve-se ter em mente que essas hipóteses constituem a base da teoria de Terzaghi e foram comprovadamente aceitas ao longo dos anos. Uma consideração que merece atenção, e destacada por Biot, é a influência que as tensões inicialmente presentes no solo podem provocar nos deslocamentos e poropressões de meios porosos saturados, principalmente em materiais com baixo módulo de elasticidade (BIOT, 1941).

A base do desenvolvimento das equações da poroelasticidade é a consideração de duas equações constitutivas lineares envolvendo as variáveis cinemáticas e dinâmicas que

governam o fenômeno acoplado. Essas equações expressam a deformação volumétrica ( $\epsilon$ ) e a variação da quantidade de água ( $\zeta$ ) como combinações lineares da tensão hidrostática ( $\sigma$ ) e poropressão ( $p$ ), conforme Eqs. (2.23) e (2.24). Com isso, Biot criou coeficientes para quantificar a contribuição das variáveis dinâmicas nas variáveis cinemáticas, ou seja,

$$\epsilon = a_{11}\sigma + a_{12}p \quad (2.23)$$

$$\zeta = a_{21}\sigma + a_{22}p \quad (2.24)$$

onde  $\epsilon = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$ .

Esses coeficientes representam as constantes poroelásticas da teoria e são definidos em termos de taxas considerando as outras variáveis constantes como

$$a_{11} = \frac{\delta\epsilon}{\delta\sigma_{p=0}} \equiv \frac{1}{K} \quad (2.25)$$

$$a_{12} = \frac{\delta\epsilon}{\delta p_{\sigma=0}} \equiv \frac{1}{H} \quad (2.26)$$

$$a_{21} = \frac{\delta\zeta}{\delta\sigma_{p=0}} \equiv \frac{1}{H_1} \quad (2.27)$$

$$a_{22} = \frac{\delta\zeta}{\delta p_{\sigma=0}} \equiv \frac{1}{R} \quad (2.28)$$

O coeficiente  $1/K$  representa a relação entre a variação da deformação volumétrica e a tensão quando a poropressão é mantida constante e  $K$  é denominado *módulo volumétrico drenado*. Esse coeficiente é uma medida de compressibilidade do solo sob condições drenadas e está presente na teoria da elasticidade.

O coeficiente  $1/H$  é uma medida não comum em elasticidade, ele determina como a deformação volumétrica varia com a alteração na poropressão. Supondo uma variação  $\Delta p$  na

poropressão, a variação provocada na deformação volumétrica ( $\Delta\epsilon$ ) será  $(1/H)\Delta p$ . Esse termo é denominado *coeficiente de expansão poroelástico* e através de princípios baseados em energia demonstra-se que  $H = H_1$  (BIOT, 1941). Ou seja, o efeito que uma variação da poropressão causa na deformação volumétrica é o mesmo que uma variação na tensão causa na variação da quantidade de água.

O parâmetro  $1/R$  é o *coeficiente de armazenamento específico* medido sob condições de tensão constante. Ele quantifica a taxa de variação da quantidade de água quando a poropressão é alterada e a tensão é mantida constante. Ele também é denominado *coeficiente de armazenamento específico não restrito* e denotado por  $S_\sigma$ . Biot também introduziu o coeficiente  $1/Q$  para representar o armazenamento específico sob deformação constante. Esse parâmetro é denominado *coeficiente de armazenamento específico restrito* e denotado por  $S_\epsilon$  (WANG, 2000).

Substituindo-se esses coeficientes nas Eqs. (2.23) e (2.24) tem-se

$$\epsilon = \frac{1}{K}\sigma + \frac{1}{H}p \quad (2.29)$$

$$\zeta = \frac{1}{H}\sigma + \frac{1}{R}p \quad (2.30)$$

Outro parâmetro adicional é o *coeficiente de Skempton (B)*, dado por

$$B = -\left.\frac{\delta p}{\delta \sigma}\right|_{\zeta=0} \quad (2.31)$$

onde  $B$  deve assumir valores entre 0 e 1 e representa a razão entre a variação da poropressão e a variação da tensão quando a quantidade de água é mantida constante, ou seja, em condições não drenadas.

Na definição da Mecânica dos Sólidos, tensões positivas geram deformações positivas no sentido de aumentar o volume de um elemento de solo. Entretanto, na Mecânica dos Solos o sentido positivo da poropressão está associado a uma redução do volume do elemento.

Como o sentido de ação dessas tensões difere em cada campo de atuação é necessário acrescentar o sinal negativo para compatibilizar o sentido dessas tensões.

Se uma variação de tensão é aplicada repentinamente em uma amostra de solo saturada em condições não drenadas, a poropressão induzida é  $B$  vezes essa variação da tensão. Para definir a relação entre a variação no volume ocupado pelos poros e a deformação total do material Biot introduziu o coeficiente de tensão efetiva  $\alpha$ . A definição desse coeficiente é dada por

$$\alpha = \frac{2(1 + \nu) G}{3(1 - 2\nu) H} \quad (2.32)$$

em que  $G$  é o módulo de elasticidade transversal e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

Em 1957 Biot e Willis apresentaram um estudo sobre as constantes poroelásticas e fizeram interpretações alternativas dessas constantes. O parâmetro  $\alpha$  passou a também ser denominado coeficiente de *Biot-Willis* e foi interpretado como a proporção da pressão do fluido que irá produzir as mesmas deformações que as tensões totais. Com isso, o princípio das tensões efetivas pode ser modificado para

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \alpha p \delta_{ij} \quad (2.33)$$

Diferentemente da expressão apresentada no capítulo anterior, o princípio das tensões efetivas foi escrito em notação indicial e o sinal da poropressão foi alterado pelas mesmas razões citadas na definição de  $B$ . Na equação de Terzaghi essa alteração não foi necessária porque não havia acoplamento entre os fenômenos.

Definições alternativas para esses parâmetros são apresentadas por Rice e Cleary (1976) *apud* Wang (2000), como seguem:

$$B = \frac{R}{H} \quad (2.34)$$

$$\alpha = \frac{K}{H} \quad (2.35)$$

### 2.2.2 Equações Constitutivas Lineares

As quatro variáveis básicas da poroelasticidade podem ser agrupadas em:

- Tensões ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) e deformações ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ )
- Poropressão ( $p$ ) e variação da quantidade de água ( $\zeta$ )

Tensões e deformações são grandezas tensoriais e em função de suas simetrias cada tensor pode ser definido por seis componentes. Poropressão e variação na quantidade de água são grandezas escalares.

As variáveis  $\boldsymbol{\varepsilon}$  e  $\zeta$  são as duas variáveis cinemáticas da teoria da poroelasticidade e, portanto, estão associadas a movimento. Os componentes do tensor de deformação são derivadas espaciais dos deslocamentos e  $\zeta$  está associada ao fluxo do fluido. As variáveis estáticas da teoria da poroelasticidade são  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $p$  e são responsáveis pelas forças que causam o movimento.

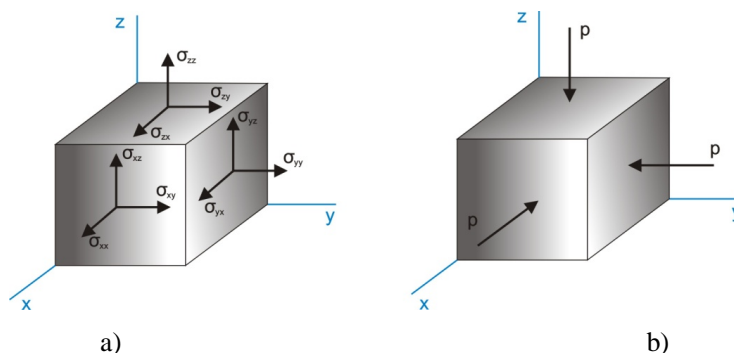
Essas quatro variáveis podem ser combinadas gerando diferentes estratégias de formulação. A ideia é combinar as variáveis do problema mecânico ( $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) com uma das variáveis do problema de fluxo ( $p$  e  $\zeta$ ) e fazer a outra combinação com as variáveis de fluxo e uma das variáveis do problema mecânico. As diferentes estratégias de formulação surgem na escolha das variáveis que serão admitidas como dependentes em cada equação.

No desenvolvimento deste trabalho adota-se a estratégia de escrever as tensões e a quantidade de água como variáveis dependentes e as variáveis deformações e poropressão como variáveis independentes. Essa técnica de permutação é denominada *Mixed Stiffness* (WANG, 2000). No desenvolvimento que segue, procura-se explicitar os componentes do tensor de tensão e da variação da quantidade de água como função das outras variáveis.

Considera-se um elemento cúbico de solo cujos lados são paralelos aos eixos coordenados e suas dimensões são suficientemente grandes quando comparado às dimensões

dos poros existentes, de forma que o solo pode ser considerado um material homogêneo. O mesmo é suficientemente pequeno quando comparado à dimensão macroscópica do problema, podendo ser assumido como um elemento infinitesimal no tratamento matemático. A Figura 2.6 ilustra as tensões totais (a) e a poropressão (b) atuando nesse elemento.

**Figura 2.6 – Elemento infinitesimal de solo.**



Fonte: Autor, 2012.

Com base na Teoria da Elasticidade é possível descrever o estado de tensão de um ponto no solo através do tensor de tensões totais, dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

O tensor de deformações pode também ser definido como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

onde  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  e  $\varepsilon_{zz}$  são as deformações específicas nas direções cartesianas. Os outros componentes do tensor estão relacionados com as deformações angulares do elemento.

Ambos os tensores são simétricos e, considerando a hipótese de pequenos deslocamentos, pode-se expressar a relação entre os deslocamentos e deformações como



$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{2.38}$$

onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  são os respectivos deslocamentos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

De maneira mais compacta os componentes de deformação podem ser como

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{2.39}$$

Ainda considerando pequenos deslocamentos, a lei de Hooke oferece as seguintes equações constitutivas para um meio elástico, linear, homogêneo e isotrópico. Essas equações são escritas em termos das tensões efetivas, mas no caso puramente mecânico essas tensões se confundem com as tensões totais pela ausência do fluido, conforme

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma'_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma'_{yy} + \sigma'_{zz}) & \varepsilon_{xy} &= \frac{\sigma'_{xy}}{2G} \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\sigma'_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma'_{xx} + \sigma'_{zz}) & \varepsilon_{xz} &= \frac{\sigma'_{xz}}{2G} \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\sigma'_{zz}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma'_{yy} + \sigma'_{xx}) & \varepsilon_{yz} &= \frac{\sigma'_{yz}}{2G}
\end{aligned} \tag{2.40}$$

onde:

- $\nu$  é o módulo de Poisson
- $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young
- $G$  é o módulo de elasticidade transversal

O módulo de elasticidade transversal é definido como

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.41)$$

O conjunto de Eqs. (2.40) pode ser expresso em notação indicial por (MASE, 1999)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma'_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma'_{kk} \delta_{ij} \quad (2.42)$$

Na dedução apresentada por Biot (1941), a poropressão é de natureza hidrostática e atua apenas nas direções longitudinais do elemento (Figura 2.6-b). Isso indica que essas tensões não provocam deformações cisalhantes no elemento de solo. Em seu artigo, Biot reescreveu os componentes de deformações longitudinais em função das tensões totais e poropressão como

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \frac{1}{3H} p \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) + \frac{1}{3H} p \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{yy} + \sigma_{xx}) + \frac{1}{3H} p \end{aligned} \quad (2.43)$$

Essas equações podem ser entendidas lembrando o conceito do coeficiente  $1/H$  introduzido por Biot. Esse coeficiente quantifica a variação na deformação volumétrica provocado pelo excesso de poropressão  $p$ . Dessa forma, cada componente de deformação longitudinal recebe uma contribuição da poropressão de valor  $p/3H$ . Porém, as mesmas equações governantes podem ser obtidas considerando a nova interpretação feita por Biot-Willis (1957) para o parâmetro  $\alpha$ .

A substituição da Eq. (2.33) na Eq. (2.42) sem considerar a contribuição da poropressão em componentes de deformações cisalhantes resulta em

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij} + (1 - 2\nu)\alpha p\delta_{ij}] \quad (2.44)$$

Conforme estratégia da formulação adotada, isolam-se as tensões totais nessa equação,

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + 2G\frac{\nu}{1 - 2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - \alpha p\delta_{ij} \quad (2.45)$$

Isso é estritamente necessário pois as equações de equilíbrio são escritas em termos de tensões totais.

A Equação (2.45) representa uma das equações com as variáveis combinadas. A etapa seguinte é relacionar uma das variáveis de fluxo com as variáveis do problema mecânico. Esse acoplamento é feito isolando a tensão na Eq. (2.29) e substituindo na Eq. (2.30), o que resulta em

$$\zeta = \frac{K}{H}\epsilon + \left(\frac{1}{R} + \frac{K}{H^2}\right)p \quad (2.46)$$

Wang (2000) apresenta a seguinte relação para o *coeficiente de armazenamento específico restrito*:

$$\frac{1}{Q} = \left(\frac{1}{R} + \frac{K}{H^2}\right) \quad (2.47)$$

Substituindo as Eqs. (2.35) e (2.47) na Eq. (2.46) tem-se

$$\zeta = \alpha\varepsilon_{kk} + \frac{1}{Q}p \quad (2.48)$$

As Equações (2.45) e (2.48) são as relações constitutivas propostas na estratégia de formulação adotada (*Mixed Stiffness*).

### 2.2.3 Equações Governantes do Problema Estático

Para que o elemento infinitesimal que aparece na Figura 2.7 esteja em equilíbrio, as seguintes equações de equilíbrio devem ser satisfeitas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + b_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + b_z &= 0\end{aligned}\tag{2.49}$$

onde  $b_x$ ,  $b_y$  e  $b_z$  são os componentes cartesianos da força de corpo.

Essas equações podem ser descritas de forma mais compacta por

$$\sigma_{jij} + b_i = 0\tag{2.50}$$

As equações de equilíbrio descritas acima estão relacionadas com as tensões totais atuantes no elemento. Quando não existe fluido ou este é desconsiderado, essas tensões são as tensões efetivas e essas equações de equilíbrio são as mesmas equações utilizadas na elasticidade linear. Caso contrário, os componentes de tensão total devem ser decompostos em tensão efetiva e poropressão.

A tensão efetiva é responsável pelo comportamento mecânico do solo, e só mediante uma análise através de tensões efetivas se consegue estudar cientificamente os fenômenos de resistência e deformação dos solos (PINTO, 2009).

As equações governantes do problema mecânico com acoplamento de termos de fluxo são obtidas pela substituição da Eq. (2.45) na Eq.(2.50). Com isso as equações de equilíbrio passam a ser definidas em função dos deslocamentos e poropressão. Essas equações conforme deduzidas em BIOT (1941) são expressas em coordenadas cartesianas como

$$\begin{aligned}
 G\nabla^2 u + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} - \alpha \frac{\partial p}{\partial x} + b_x &= 0 \\
 G\nabla^2 v + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} - \alpha \frac{\partial p}{\partial y} + b_y &= 0 \\
 G\nabla^2 w + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} - \alpha \frac{\partial p}{\partial z} + b_z &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.51}$$

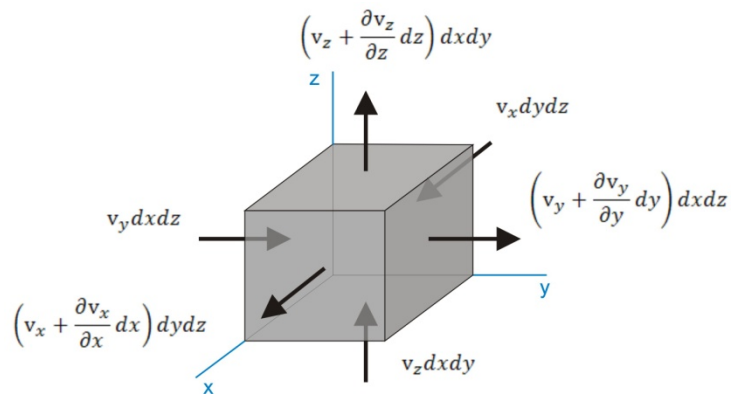
Esse conjunto de equações pode ser expresso como

$$G\nabla^2 \mathbf{u}_i + \frac{G}{1-2\nu} \epsilon_{,i} - \alpha p_{,i} + b_i = 0
 \tag{2.52}$$

As equações de equilíbrio resultantes dependem de quatro variáveis ( $u, v, w$  e  $p$ ), mas existem apenas três equações. Para compatibilizar o sistema de equações, uma nova equação governante deve ser inserida. Essa equação surge do acoplamento de termos mecânicos no problema de fluxo.

Essa equação é resultado da aplicação da lei de Darcy como equação governante do fluxo. Considera-se novamente o elemento infinitesimal sujeito a um fluxo nas direções perpendiculares de suas faces (Figura 2.7).

**Figura 2.7 - Fluxo em um elemento infinitesimal de solo.**



Fonte: Autor, 2012.

A aplicação da equação da continuidade para esse elemento resulta em

$$Q_{entrada} - Q_{saída} = \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.53)$$

$$\left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dx dy dz = - \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.54)$$

Mais uma vez, o gradiente hidráulico presente na lei de Darcy é substituído pelo excesso de poropressão em cada direção. Assim, é possível relacionar a velocidade do fluxo em cada direção com o excesso de poropressão na forma

$$v_x = -k \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$v_y = -k \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.55)$$

$$v_z = -k \frac{\partial p}{\partial z}$$

em que  $k$  é o coeficiente de permeabilidade, que é considerado o mesmo em todas as direções. Esse coeficiente resulta de parâmetros como permeabilidade intrínseca e viscosidade cinemática.

A substituição do conjunto de Eqs. (2.55) na Eq. (2.54) resulta em

$$\left( k \nabla^2 p \right) dx dy dz = \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.56)$$

Admitindo-se que o fluido seja incompressível, a taxa de variação do volume do elemento deve corresponder à taxa de variação da quantidade de água que entra e sai do elemento. Essa variação da *quantidade de água* ( $\zeta$ ) no tempo é a variação no volume no tempo por unidade de volume, expresso por

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{dx dy dz} \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2.57)$$

Combinando-se as Eqs. (2.56) e (2.57) tem-se

$$(k \nabla^2 p) - \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad (2.58)$$

A substituição da Eq. (2.48) na Eq. (2.58) resulta na equação que faltava para compatibilizar as equações. Esta é a equação governante do problema de fluxo com termos acoplados do problema mecânico, dada por

$$(k \nabla^2 p) - \alpha \frac{\partial \epsilon}{\partial t} - \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (2.59)$$

Por fim, as Eqs. (2.52) e (2.59) constituem as equações governantes da teoria poroelástica. Segundo Biot (1941) as constantes  $\alpha$  e  $Q$  terão grande influência para solos parcialmente saturados, o que implica em dizer que elas devem assumir valores dependentes do grau de saturação do solo.

#### 2.2.4 Constantes Utilizadas na Teoria Acoplada

Os parâmetros  $\nu$ ,  $G$ ,  $E$  e  $K$  são respectivamente o coeficiente de Poisson, o módulo de elasticidade transversal, módulo de elasticidade longitudinal (módulo de Young) e o módulo volumétrico drenado. Eles são os mesmos parâmetros utilizados na Teoria da Elasticidade e os valores atribuídos a esses parâmetros estão associados a valores médios do esqueleto do solo.

O coeficiente de Poisson presente nas equações apresentadas está relacionado com a condição drenada do solo. Ele é resultado da relação entre as deformações transversais e longitudinais obtidas em ensaios de compressão uniaxial. Trata-se de uma grandeza adimensional e seu valor varia entre 0 e 0,5, sendo o limite superior utilizado para sólidos incompressíveis. No estudo de rochas, geralmente utilizam-se valores entre 0,15 e 0,45. Em condições não drenadas deve-se utilizar o coeficiente de Poisson obtido em ensaios não

drenados ( $v_u$ ), cuja faixa de variação apresenta valores entre o coeficiente de Poisson drenado e 0,5 (BORBA, 1992).

O módulo volumétrico drenado mede a relação entre uma tensão hidrostática aplicada e a variação volumétrica decorrente sob condições drenadas. Ele pode ser definido em termos das tensões e deformações ou através dos módulos elásticos conforme as expressões

$$K = -\frac{\sigma_{kk}}{3\varepsilon_{kk}} \quad (2.60)$$

$$K = \frac{2G(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)} \quad (2.61)$$

Valores típicos desse parâmetro para rochas estão entre  $G$  e  $10G$  (BORBA, 1992). Os parâmetros  $1/H$ ,  $1/R$  e  $1/K$  estão associados ao problema de fluxo e já foram definidos em seções anteriores. Dois outros parâmetros foram definidos em função dessas constantes poroelásticas:  $\alpha$  e  $B$ .

O coeficiente de tensão efetiva ou coeficiente de *Biot-Willis* pode ter seu valor obtido em laboratório através do ensaio denominado “teste de esponja” (BORBA, 1992). O ensaio consiste em aplicar uma deformação na amostra do material que está saturado com fluido incompressível e a quantidade de fluido expulsa do material define esse parâmetro.

O coeficiente de tensão efetiva é uma medida adimensional e seu valor varia entre a porosidade e 1. O limite inferior é atingido quando os constituintes sólidos do material são altamente compressíveis, e o superior quando os mesmos são incompressíveis. Ou seja, ele é uma medida de compressibilidade do esqueleto de solo.

Os parâmetros  $1/R$  e  $1/Q$  são os *coeficientes de armazenamento específico sem restrição* (tensão constante) e *com restrição* (deformação constante), respectivamente. O exemplo descrito abaixo facilita a interpretação física desses coeficientes.

Imagine um recipiente em formato esférico constituído de aço com uma amostra de solo saturado em seu interior sujeito a um excesso de poropressão. Quando a pressão  $p$  do



fluido decai até zero, o fluxo do fluido que sai da esfera ocorre devido à expansão da água em função de sua compressibilidade. Esse processo está associado ao coeficiente de armazenamento específico com restrição.

Para exemplificar o coeficiente de armazenamento específico sem restrição admite-se agora que esse recipiente seja constituído de borracha. Quando a pressão decai até zero o fluxo do fluido ocorre devido à compressibilidade da água e também devido à redução do volume do recipiente.

### 2.2.5 Relações de Rice e Cleary

Rice e Cleary, em 1976, apresentam uma formulação modificada para a Teoria da Poroelasticidade de Biot, sendo propostas novas constantes com outro significado físico e de fácil entendimento.

Com o objetivo de facilitar a comparação entre resultados numéricos e experimentais, eles apresentaram duas expressões que relacionam o coeficiente de Skempton ( $B$ ) e o coeficiente de Poisson não drenado ( $v_u$ ), com o coeficiente de Biot-Willis ( $\alpha$ ) e o coeficiente de armazenamento específico com restrição ( $1/Q$ ) (FERNANDES, 2009).

$$\alpha = \frac{3(v_u - v)}{B(1 + v_u)(1 - 2v)} \quad (2.62)$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{9(v_u - v)(1 - 2v_u)}{2GB^2(1 + v_u)^2(1 - 2v)} \quad (2.63)$$

### 2.2.6 Comparação entre a Teoria de Biot e a Teoria de Terzaghi

Nesta seção ilustra-se que a teoria proposta por Terzaghi pode ser considerada um caso particular da Teoria de Biot. Para isso, considera-se uma carga  $-P$  aplicada sobre a superfície do solo e desprezam-se as forças de corpo.

Resgatando a Eq. (2.45) e considerando a carga  $-P$  com o fluxo e deformação apenas na direção  $z$ , tem-se

$$-P = 2G \frac{(1 - \nu)}{(1 - 2\nu)} \frac{\partial w}{\partial z} - \alpha p \quad (2.64)$$

Derivando-se essa equação em relação ao tempo, obtém-se a equação

$$2G \frac{(1 - \nu)}{(1 - 2\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} - \alpha \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (2.65)$$

Combinando-se a Eq. (2.65) com a Eq. (2.59) e considerando ainda o fluxo em apenas uma direção tem-se

$$k \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \left( \frac{\alpha^2}{2G} \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.66)$$

Essa equação pode ser descrita de forma mais compacta como

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{c_v} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.67)$$

$$\frac{1}{c_v} = \frac{1}{k} \left( \frac{\alpha^2}{2G} \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} + \frac{1}{Q} \right) \quad (2.68)$$

Como a teoria de Terzaghi é baseada na hipótese de incompressibilidade da água e dos grãos do solo, os parâmetros  $\alpha$  e  $1/Q$  são admitidos como

$$\alpha = 1 \text{ e } \frac{1}{Q} = 0 \quad (2.69)$$

Substituindo-se esses parâmetros na Eq. (2.69), tem-se que

$$c_v = k \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.70)$$

Nogueira (1998) define o coeficiente de compressibilidade volumétrico ( $m_v$ ) como

$$\frac{1}{m_v} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.71)$$

Combinando-se as Eqs. (2.70) e (2.71) encontra-se o mesmo coeficiente definido no Capítulo 2 para o adensamento de Terzaghi, denominado coeficiente de adensamento de Terzaghi, comprovando assim que a Teoria de Terzaghi é um caso particular da Teoria de Biot.

### 2.2.7 Desenvolvimento das Tensões Durante o Adensamento

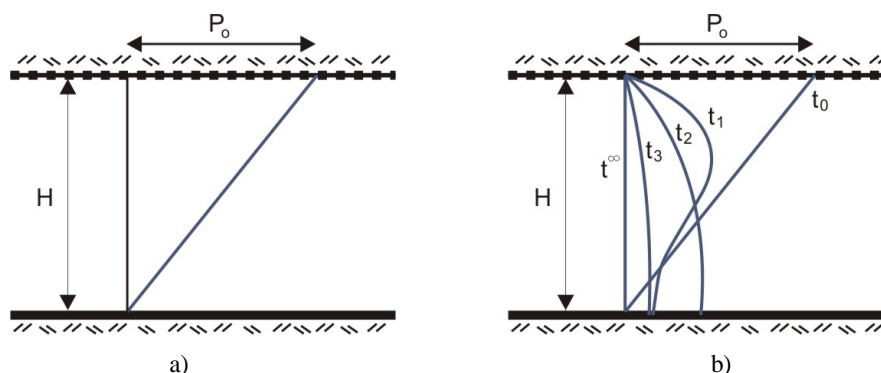
Segundo Terzaghi (1943), as tensões totais devem permanecer constantes durante o adensamento. Essa hipótese continua sendo válida mesmo quando a teoria de Terzaghi é expandida para o caso tridimensional. Contudo, a teoria proposta por Biot (1941), mesmo considerando a relação elástico-linear, não faz essa restrição, e as tensões totais podem variar durante o adensamento. Com isso, Biot conseguiu representar aspectos não descritos pela teoria de Terzaghi, como o efeito Mandel-Cryer, que consiste em um acréscimo de poropressões maior que o das tensões provocadas por uma variação no estado de tensões totais. Sena (2008) comenta sobre dois fenômenos que podem explicar o aumento local das pressões neutras:

#### **i) Redistribuição das poropressões na massa do solo**

A redistribuição das poropressões pode ser entendida através do exemplo apresentado por Kochen e Zagottis (1983). No exemplo, considerou-se uma amostra de solo confinada entre duas camadas, uma delas permeável (superior) e outra impermeável (inferior) e sujeita a uma distribuição inicial de poropressão triangular, conforme ilustra a

Figura 2.8. No início do adensamento a poropressão na base da camada impermeável aumenta além do valor inicial, isso acontece porque inicialmente a água existente no solo percola em direção à camada impermeável, gerando um acúmulo de água nessa região. Esse acúmulo faz com que a pressão nessa região atinja um valor suficientemente alto para inverter esse fluxo e assim dissipar todo o excesso gerado pelo acúmulo de água.

**Figura 2.8 - Distribuição inicial da poropressão.**

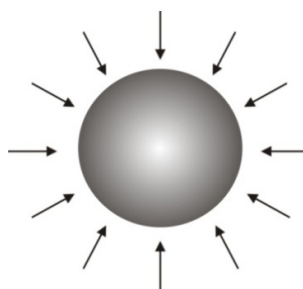


Fonte: Autor, 2012.

## ii) Variação no estado de tensões totais em regiões isoladas durante o processo de adensamento

As variações nas tensões totais podem ser explicadas pelo efeito Mandel-Cryer apresentada por Cryer (1963). Considera-se inicialmente uma amostra de solo em formato esférico com superfície permeável e sujeita a um carregamento radial constante ao longo do tempo (Figura 2.9).

**Figura 2.9 - Amostra de solo em formato esférico sujeita a um carregamento.**



Fonte: Autor, 2012.

Devido à simetria da esfera, pode-se demonstrar que para Poisson igual a 0,5 as teorias de Biot e Terzaghi apresentam os mesmos resultados para o caso da esfera. Entretanto, nesse caso específico, não ocorre o fenômeno do adensamento.

Cryer mostrou que para valores do coeficiente de Poisson diferentes de 0,5 as poropressões no centro da esfera aumentam além do valor inicial durante um período do

tempo para em seguida voltar a decrescer. A interpretação do efeito *Mandel-Cryer* nos casos do Poisson diferente de 0,5 é discutida por Kochen e Zagottis (1983) e é resumida no trabalho de Sena (2008) conforme descrição abaixo.

No início do processo de escoamento a água presente nas camadas mais próximas à superfície drena com mais facilidade e, conseqüentemente, a compressão volumétrica próxima à superfície é maior que no interior na esfera. Dessa forma, a região superficial da esfera tende a se contrair e a região interna da esfera é comprimida na direção radial, causando um aumento nas tensões totais. Como não ocorre compressão volumétrica no centro da esfera as tensões efetivas devem permanecer constantes e o aumento da tensão total é atribuído ao aumento da poropressão nessa região. Assim, a poropressão irá aumentar no início do adensamento e em estágios posteriores irá começar a decrescer devido à saída da água em direção à superfície.

Devido a esses efeitos, pode ser necessário um intervalo de tempo maior para dissipar todo o excesso de poropressão em alguns pontos do solo, dependendo da geometria do problema, das condições de drenagem e da permeabilidade do solo. É importante destacar que mesmo acontecendo um aumento da poropressão por certo período de tempo, os recalques devido ao processo de adensamento acontecem continuamente.

A próxima seção descreve sobre algumas relações constitutivas que podem ser utilizadas, e apresenta um resumo dos modelos constitutivos que são implementados para construção da versão atual do PORO.

### **2.3 Modelos Constitutivos**

Em uma análise estrutural, o modelo constitutivo relaciona as tensões com as deformações. Em notação matricial ele é representado por uma matriz que contém informações das propriedades constitutivas do material. Por exemplo, admitido um carregamento qualquer sobre uma estrutura, o modelo constitutivo é um dos fatores responsáveis por definir como a estrutura irá se deformar.

Os fenômenos que ocorrem na natureza são complexos e, a depender da escala de interesse, esses fenômenos podem ser modelados considerando pequenas ou grandes

simplificações. Na análise de uma barra submetida a um carregamento axial, por exemplo, pode-se admitir um comportamento elástico linear quando pequenos carregamentos forem aplicados. Contudo, admitindo-se elevados carregamentos que ocasionam grandes deslocamentos, a consideração de deformações reversíveis e permanentes é mais apropriada.

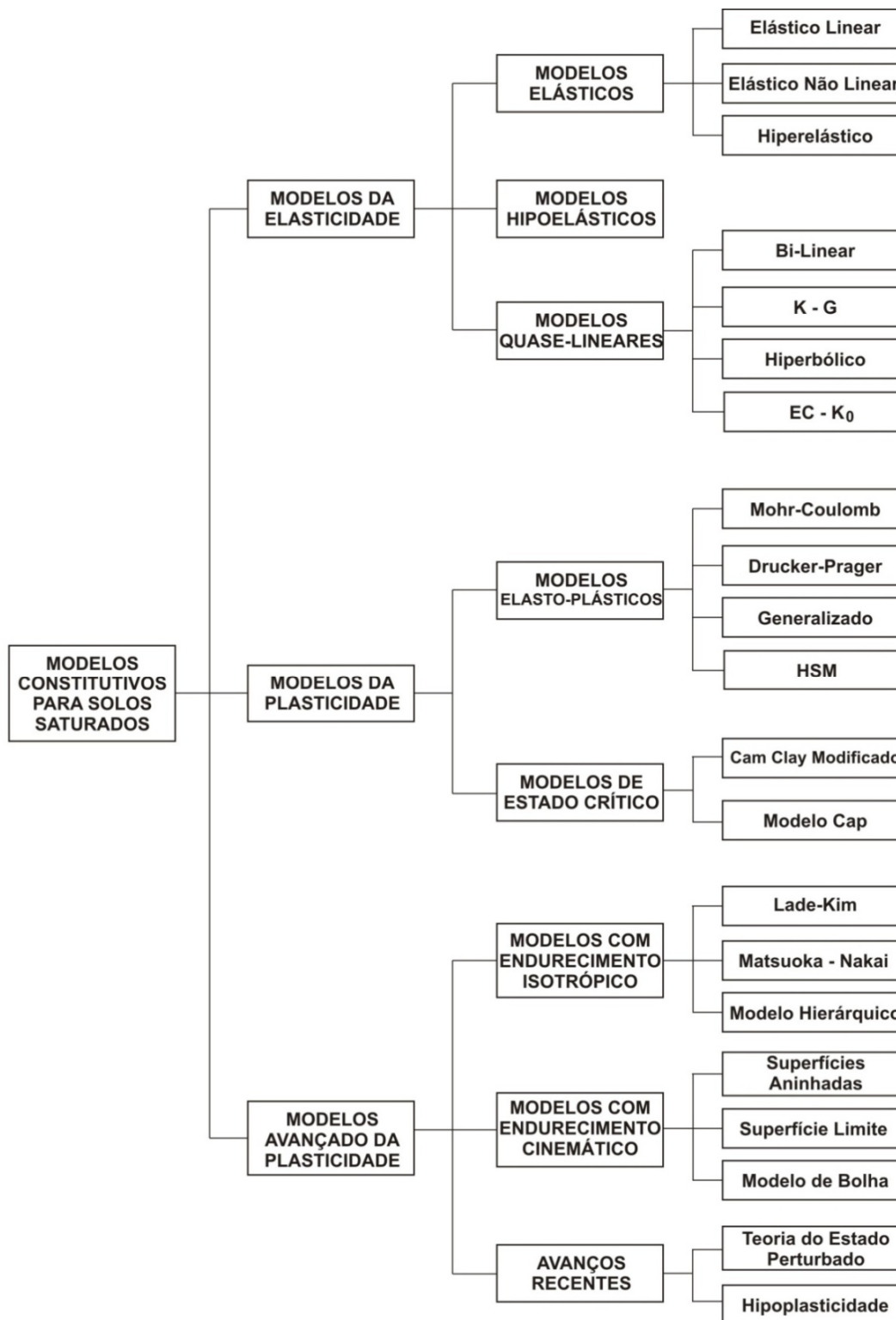
O exemplo descrito deixa evidente que o modelo constitutivo mais apropriado é função do fenômeno analisado e da escala na qual se deseja obter uma resposta. Atualmente existem diversos modelos constitutivos propostos na literatura. Uma classificação mais geral divide esses modelos em elástico, plástico e viscoso, podendo ainda ser linear e não linear. Esses são apenas exemplos de alguns modelos constitutivos.

O termo “elástico” está associado à ausência de deformações permanentes com a retirada do carregamento, indicando que a estrutura consegue recuperar sua forma inicial. A designação “plástica” está associada às deformações irrecuperáveis no material. E por fim, o termo “viscoso” associa uma dependência das deformações em relação à velocidade do carregamento. Os termos linear e não linear estão associados ao grau de complexidade da relação entre a tensão e deformação da estrutura.

Como comentado anteriormente, este trabalho tem como ponto de partida o sistema computacional PORO, que utiliza um modelo constitutivo elástico e linear. Com o objetivo de ampliar os tipos de solo e condições de análise, neste trabalho são adicionados alguns modelos elastoplásticos. Modelos com essas características são mais apropriados para solos e neste capítulo eles são apresentados em maiores detalhes. Entre os modelos que atendem essas características e que serão incorporados ao sistema PORO estão os seguintes modelos: von Mises, Tresca, Drucker-Prager e Mohr-Coulomb.

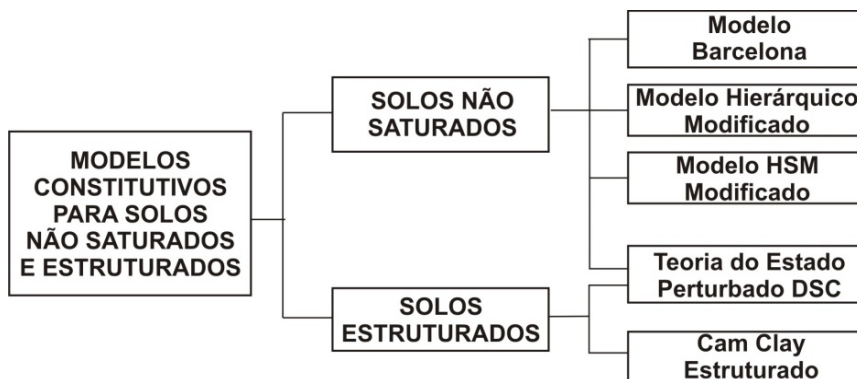
Atualmente existem vários modelos constitutivos disponíveis na literatura para aplicação em solos. Esses modelos podem ser agrupados em modelos para solos saturados ou secos e modelos para solos não saturados (parcialmente), conforme ilustra a e a Figura 2.10 (adaptada de Ibañez, 2003).

Figura 2.10 – Modelos constitutivos para solos saturados e secos.



Fonte: Autor, 2012 baseado em INOUE, 2005.

**Figura 2.11 – Modelos constitutivos para solos não saturados e estruturados.**



Fonte: Autor, 2012.

Não é objetivo deste trabalho detalhar sobre todos os modelos constitutivos apresentados acima. Maiores detalhes podem ser encontrados no trabalho de Ibañez (2003).

### 2.3.1 Modelo Elástico-Linear

No modelo elástico-linear, dois comportamentos do material são admitidos. Primeiramente a elasticidade do material, indicando que ao aplicar um carregamento qualquer, o material irá se deformar e quando esse carregamento for removido, toda a deformação será recuperada, fazendo com que a estrutura retorne a configuração inicial indeformada. Isso acontece devido à hipótese de que a estrutura acumula uma energia ao ser deformada e, como o sistema é considerado conservativo, quando a estrutura é descarregada, essa energia é convertida em esforços para trazer a estrutura para sua configuração inicial. Pelas características do modelo, essa deformação é denominada deformação elástica e é representada por  $\varepsilon^e$ .

O segundo comportamento, a linearidade do modelo, está associado à curva de tensão versus deformação apresentada pelo material. Essa curva pode ser obtida tracionando-se uma barra em um experimento e observando as deformações e respectivos níveis de tensão. Essa curva é representada por uma reta e seu coeficiente angular é denominado módulo de elasticidade linear ou simplesmente módulo de Young, sendo representado por E (Figura 2.12).

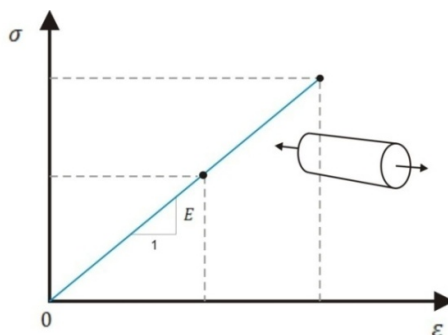


Na caracterização do material, esse coeficiente representa uma propriedade física associada à rigidez da estrutura.

A relação entre a tensão e deformação longitudinal é resultado da aplicação direta da lei de Hooke, definida para o caso unidimensional por

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} \quad (2.72)$$

**Figura 2.12 – Curva tensão *versus* deformação para o modelo elástico-linear.**



Fonte: Autor, 2012.

As deformações longitudinais induzem deformações transversais nas outras direções, caracterizando uma redução na área da seção transversal. A relação entre as deformações transversais e longitudinais é definida pelo coeficiente de Poisson, expresso por  $\nu$  e definido como

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} = -\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx}} \quad (2.73)$$

Para o caso totalmente isotrópico, admite-se que a estrutura apresenta o mesmo comportamento em todas as direções. No caso tridimensional, a lei constitutiva para materiais linearmente elásticos e isotrópicos é conhecida como a lei de Hooke generalizada, expressa em notação indicial por

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (2.74)$$

onde  $\lambda$  e  $\mu$  são as constantes elásticas de Lamé. No contexto de modelos constitutivos para solos, é mais conveniente expressar a Eq. (2.74) em termos do módulo de deformação volumétrica  $K$  ( $\lambda = K - 2G/3$ ) e do módulo de cisalhamento  $G$  ( $\mu = G$ ).

Em um formato matricial a relação constitutiva presente na Eq. (2.74) pode ser escrita em termos das constantes elásticas  $K$  e  $G$  como

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K + 4G/3 & K - 2G/3 & K - 2G/3 & 0 & 0 & 0 \\ K - 2G/3 & K + 4G/3 & K - 2G/3 & 0 & 0 & 0 \\ K - 2G/3 & K - 2G/3 & K + 4G/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} \quad (2.75)$$

A Equação (2.75) relaciona as deformações e tensões para um estado tridimensional. Contudo, em diversas simulações de análise estrutural, é comum o corpo estar submetido a um estado particular de tensões ou deformações, permitindo uma análise mais simplificada do modelo. Entre esses estados destacam-se: *estado plano de tensões*, *estado plano de deformações* e *estado axissimétrico*.

### 2.3.2 Teoria Elastoplástica

A teoria elastoplástica está associada à presença de deformações recuperáveis (elástica) e irrecuráveis (plástica) após um ciclo de carregamento e descarregamento. O modelo é dito elastoplástico por apresentar inicialmente um comportamento elástico e, após um nível específico de tensão, apresentar um comportamento plástico. Este modelo pode também apresentar uma dependência da velocidade do carregamento, mas neste trabalho serão considerados apenas modelos independentes da taxa de carregamento, desconsiderando a parcela viscosa envolvida.

Segundo Souza Neto *et al.* (2008), a origem da teoria da plasticidade data da metade do século XIX e segue com contínuo desenvolvimento matemático. Na primeira metade do século XX essa teoria se estabeleceu com forte embasamento matemático e pode ser considerada como um dos maiores sucessos de modelos constitutivos fenomenológicos. Alguns associam seu surgimento com os trabalhos desenvolvidos por Coulomb em 1773,

quando ele estudou a definição de um critério de ruptura para solos. Contudo, Tresca é considerado um dos primeiros a apresentar um estudo científico da plasticidade através do seu critério de ruptura de metais.

Uma análise elastoplástica é não linear na relação tensão-deformação do corpo e por isso a análise deve ser feita em termos incrementais. Inicialmente, dado um incremento de deformação, verifica-se o **estado de tensão** do corpo em estudo. Em seguida, após definido um **critério de plastificação**, verifica-se se esse estado conduz a uma deformação plástica. Em caso afirmativo, o modelo constitutivo deve ser alterado e deve-se consultar qual a **regra de fluxo** imposta ao material para descrever as deformações nessas condições. Caso contrário, o corpo responderá de forma elástica e linear ao estado de tensão imposto.

Na teoria da Plasticidade algumas hipóteses e considerações são admitidas.

- **Decomposição aditiva do tensor de deformação** – Considerando pequenas deformações, admite-se que o tensor de deformações pode ser dividido em uma parcela elástica e outra plástica, ou seja,  $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ .
- **Respostas elásticas e plásticas entre tensões e deformações** – O modelo constitutivo adotado é função do tensor de tensão e de variáveis internas associadas ao endurecimento do material.
- **Domínio elástico e superfície de plastificação** – Existe uma superfície de plastificação fechada que limita o comportamento elástico e plástico do material. Não são admitidas tensões fora dessa superfície e a plastificação ocorre quando as tensões encontram-se nessa superfície.
- **Lei de Fluxo e lei de endurecimento** – Em um caso unidimensional a direção da plastificação ocorre na direção da tensão. Porém, no espaço tridimensional, essa direção é definida pela lei de fluxo. O comportamento do material após a plastificação é definida pela lei de endurecimento admitida.

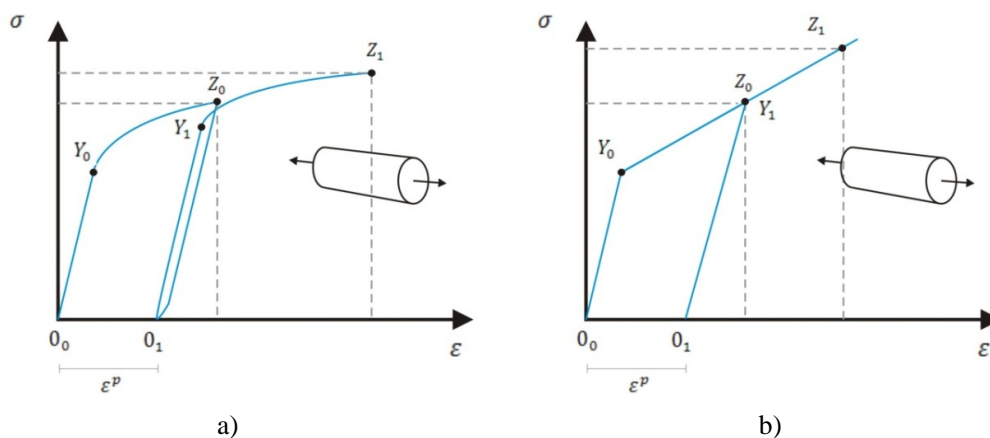
#### 2.3.2.1 Deduções e Discussões para um Modelo Unidimensional

Nesta seção é discutido um modelo uniaxial simples. Apesar da sua simplicidade, um modelo constitutivo unidimensional contém todas as características essenciais que formam a base matemática da teoria da plasticidade.

Quando a barra é carregada seu comportamento é inicialmente descrito pelo segmento de reta  $O_0Y_0$ . Esse trecho caracteriza o comportamento elástico e linear do material. Se a carga sobre a barra é aumentada além do limite  $Y_0$  a curva que descreve o comportamento do material apresentará um comportamento não linear, indicando o regime plástico do material (trecho  $Y_0Z_0$ ). Supondo que a barra seja continuamente carregada até o limite  $Z_0$  e em seguida descarregada, o que se observa é que existirá uma deformação permanente na ausência do carregamento. Nota-se também que o descarregamento é linear e sua trajetória possui a mesma inclinação da reta de carregamento.

Se a barra for novamente carregada, esta apresentará um comportamento linear até o limite  $Z_0$ , indicando um ganho de resistência pela barra. Esse fenômeno é denominado endurecimento (*hardening*) e também será tratado neste trabalho. Após o limite de tensão  $Z_0$ , a barra passa novamente ao modelo plástico e se submetida a ciclos de carregamento, o mesmo padrão de comportamento será observado. Além do endurecimento do material, duas outras situações podem ocorrer: amolecimento (*softening*) e uma deformação contínua para o mesmo nível de tensão (*creep*).

**Figura 2.13 – Curva tensão versus deformação para um modelo elastoplástico.**



Fonte: Autor, 2012.

A curva descrita na Figura 2.13-a apresenta um comportamento elastoplástico de uma barra submetida a um carregamento longitudinal com base em resultados experimentais. Essa curva pode ser simplificada para a curva descrita na Figura 2.13-b. Observa-se que o nível de tensão  $Y_0$  marca a transição do comportamento elástico para o plástico. Esse valor é verificado

de forma imediata em casos unidimensionais, mas em um caso tridimensional é necessário definir uma função de plastificação do material.

### Função de Plastificação

Para definir um limite entre o comportamento elástico e plástico é necessário definir algum critério. Esse critério define a função de plastificação (escoamento) do material. Nesse caso em particular (barra tracionada), a função de escoamento é definida por

$$\Phi(\sigma, \sigma_y) = |\sigma| - \sigma_y \quad (2.76)$$

onde  $\sigma$  é a tensão atuante no material e  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento do material. Assim, tensões acima de  $\sigma_y$  resultarão em deformações plásticas. Observa-se que a presença do módulo na equação faz com que o comportamento do material seja o mesmo sob tensões de compressão e tração, comportamento esse não observado em solos. Para caracterizar o regime elástico, a Eq. (2.76) deve satisfazer a equação

$$\Phi(\sigma, \sigma_y) \leq 0 \quad (2.77)$$

Duas situações podem ocorrer com base na Eq. (2.77). Se  $\Phi < 0$ , isso indica que a tensão atuante é menor que a tensão de plastificação e conseqüentemente, o regime é elástico linear, o que implica que não há deformação plástica, ou seja,  $\dot{\epsilon}^P = 0$ . No caso de  $\Phi = 0$  e  $\dot{\epsilon}^P = 0$  tem-se uma situação de descarregamento elástico, indicando que a tensão está no limite do comportamento elástico, mas a barra está sendo descarregada. Caso  $\Phi = 0$  e  $\dot{\epsilon}^P \neq 0$ , tem-se um carregamento plástico e isso indica que a tensão está aumentando e a barra terá um comportamento plástico.

Com a definição envolvida pelo módulo, tem-se um comportamento análogo quando a barra é tracionada ou comprimida. Assim, a taxa de deformação plástica ( $\dot{\epsilon}^P$ ) assumirá valores positivos quando a tensão for positiva e negativa em caso contrário. Essa consideração permite a definição da taxa de deformação como

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\gamma} \text{sign}(\sigma) \quad (2.78)$$

onde  $\dot{\gamma}$  é denominado multiplicador plástico e  $\text{sign}(\sigma)$  é uma função que retorna um valor positivo ou negativo em função do valor da tensão. O multiplicador plástico é sempre não negativo ( $\dot{\gamma} \geq 0$ ) e deve sempre obedecer a *condição de complementaridade*, definida por

$$\Phi \dot{\gamma} = 0 \quad (2.79)$$

A Equação (2.79) indica que a taxa de deformação plástica desaparece no domínio elástico. Pois, como  $\Phi < 0 \Rightarrow \dot{\gamma} = 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon}^p = 0$ . Ainda com base nessa condição tem-se que o fluxo plástico somente pode ocorrer quando  $\Phi = 0$  e  $\dot{\gamma} > 0$ .

Definir o limite do comportamento elástico não é suficiente para o desenvolvimento da Teoria da Plasticidade. É necessário também quantificar as deformações plásticas. Como ilustra a Figura 2.13-b, a inclinação da curva é alterada indicando a mudança de comportamento. Caso a barra seja submetida a ciclos de carregamento e descarregamento, o limite elástico pode ser alterado. Quando esse limite permanece sempre constante, o material é denominado perfeitamente plástico. Quando esse limite aumenta após carregar e descarregar a barra, diz-se que o material ganhou resistência, ou seja, houve um endurecimento. Caso contrário, admite-se que houve um amolecimento do material. Nesses dois últimos casos, o material é dito puramente elastoplástico. Essa característica do material é definida por uma lei de endurecimento e depende da deformação plástica acumulada.

### **Lei de endurecimento**

Como comentado, pode existir uma evolução ou redução do ponto de escoamento da barra. Esse comportamento pode ser incorporado assumindo que a tensão de escoamento é função da deformação plástica axial acumulada,  $\bar{\varepsilon}^p$  (SOUZA NETO *et al.*, 2008). A deformação plástica acumulada pode ser calculada por

$$\bar{\varepsilon}^p = \int_0^t |\dot{\varepsilon}^p| dt \quad (2.80)$$

Da definição de  $\bar{\epsilon}^p$  tem-se que  $\dot{\bar{\epsilon}}^p = |\dot{\epsilon}^p|$  e, do ponto de vista do fluxo plástico isso é equivalente a

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \dot{\gamma} \quad (2.81)$$

### Determinação do Multiplicador Plástico e do Módulo Tangente

As expressões  $\dot{\gamma} \geq 0$  e  $\Phi \dot{\gamma} = 0$  apenas indicam que  $\dot{\gamma} = 0$  durante a deformação elástica e pode assumir valores positivos durante o fluxo plástico. Deve-se notar primeiramente que, durante o fluxo plástico, o valor da função de escoamento permanece constante, ou seja,  $\Phi = 0$ . Com base nisso, tem-se uma condição de complementaridade adicional, definida como

$$\Phi \dot{\gamma} = 0 \quad (2.82)$$

Quando o limite plástico é atingido o multiplicador plástico pode assumir valores diferentes de zero e a função de escoamento passa a ser nula, assim como sua derivada temporal. A equação  $\dot{\Phi} \dot{\gamma} = 0$  é denominada *condição de consistência*.

Considerando a evolução do limite de escoamento em função da deformação plástica acumulada, ao derivar a Eq. (2.76), tem-se

$$\dot{\Phi} = \text{sign}(\sigma) \dot{\sigma} - \frac{d\sigma_y}{d\bar{\epsilon}^p} \dot{\bar{\epsilon}}^p = \text{sign}(\sigma) \dot{\sigma} - H \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (2.83)$$

onde  $H$  é denominado módulo plástico e representa a inclinação da curva tensão de escoamento ( $\sigma_y$ ) versus deformação plástica acumulada.

Pela *condição de consistência* tem-se que  $\dot{\Phi} = 0$  no escoamento plástico, assim

$$\text{sign}(\sigma) \dot{\sigma} = H \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (2.84)$$

Como o modelo elastoplástico é não linear, sua definição deve ser feita em termos incrementais. Dessa forma, no domínio elástico é válida a relação

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \quad (2.85)$$

Combinando as Eqs. (2.78), (2.81), (2.84) e (2.85), é possível definir o multiplicador plástico como

$$\dot{\gamma} = \frac{E}{H + E} \text{sign}(\sigma) \dot{\varepsilon} = \frac{E}{H + E} |\dot{\varepsilon}| \quad (2.86)$$

A Equação (2.85) pode ser escrita em termos de tensões e deformações totais, ou seja,

$$\dot{\sigma} = E^{ep} \dot{\varepsilon} \quad (2.87)$$

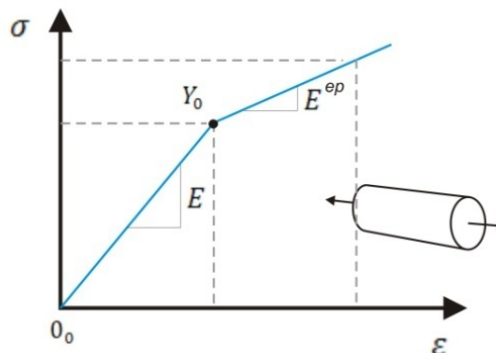
onde  $E^{ep}$  é denominado módulo elastoplástico. Combinando as Eqs. (2.78), (2.85), (2.86) e (2.87) define-se o módulo elastoplástico como

$$E^{ep} = \frac{EH}{E + H} \quad (2.88)$$

Em síntese, a análise de uma barra unidimensional considerando um modelo elastoplástico consiste em definir inicialmente os parâmetros  $E$  e  $H$  associados ao material. Em seguida, utilizando o módulo elástico  $E$ , a barra é sujeita a um carregamento crescente e inferior a  $\sigma_y$ . Ao atingir a tensão de escoamento e aumentando o carregamento, o módulo elástico  $E$  é substituído pelo módulo elastoplástico  $E^{ep}$  e a curva tensão *versus* deformação sofre uma alteração na inclinação, conforme ilustra a Figura 2.14.



Figura 2.14 – Curva tensão *versus* deformação para um modelo bi-linear.



Fonte: Autor, 2012.

### 2.3.2.2 Equações para um Modelo Tridimensional

As equações para o modelo tridimensional são encontradas expandindo as equações do modelo unidimensional. Nesta seção, essas equações são tratadas de maneira superficial e maiores detalhes podem ser encontrados em Souza Neto *et al.* (2008).

No critério de escoamento uniaxial foi estabelecido que o fluxo plástico ocorre quando a tensão uniaxial alcança um valor crítico. A extensão deste conceito para o caso tridimensional é obtido afirmando que o fluxo plástico pode ocorrer apenas quando

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0 \quad (2.89)$$

onde a função de plastificação é função do tensor de tensões ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) e de um grupo de forças termodinâmicas associadas ao fenômeno de endurecimento ( $\mathbf{A}$ ). No caso bidimensional ou tridimensional, o limite elástico é representado por uma superfície no espaço das tensões.

Quando foi analisada uma barra submetida a um carregamento uniaxial, a verificação foi feita diretamente comparando o esforço de tração com o valor crítico de escoamento, pois existia uma distribuição de tensão uniforme na barra. Quando não se trata de um problema unidimensional, tem-se um plano ou elemento submetido a um campo de tensões, que podem não ser uniformes ao longo da área ou do volume. Por isso se faz necessário incorporar outros parâmetros para avaliar o limite do comportamento elástico.

A definição de um modelo de plasticidade requer a definição de uma lei que indique a relação entre as tensões e as deformações e, de que forma as variáveis internas serão alteradas. Nesse caso, as variáveis internas são o tensor de deformação plástica e um grupo  $\alpha$  de variáveis relacionadas ao endurecimento. As seguintes regras de fluxo plástico e lei de endurecimento são postuladas:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}^p &= \dot{\gamma}N \\ \dot{\alpha}^p &= \dot{\gamma}H\end{aligned}\tag{2.90}$$

$N$  é o vetor de fluxo e  $H$  o módulo de endurecimento generalizado (SOUZA NETO *et al.*, 2008).

Na formulação de modelos plásticos multidimensionais é conveniente definir a regra de fluxo em termos de um potencial de fluxo. O ponto inicial para essa abordagem é a existência de um postulado para o potencial de fluxo de forma genérica, ou seja, admite-se que a existência de um potencial  $\Psi$  que é função do tensor de tensões e das forças termodinâmicas associadas ao endurecimento, conforme

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})\tag{2.91}$$

onde  $N$  e  $H$  são definidos como

$$N \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \text{e} \quad H \equiv -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{A}}\tag{2.92}$$

Em muitas situações é comum considerar a função de escoamento  $\Phi$  coincidente com o potencial  $\Psi$ . Nesses casos o modelo é denominado modelo plástico associado e o vetor de fluxo passa a ser definido como  $N = \partial \Phi / \partial \boldsymbol{\sigma}$ . Neste trabalho são considerados modelos com a lei de fluxo associada.

A Equação (2.86) define o multiplicador plástico e a Eq. (2.88) o módulo elastoplástico para o caso unidimensional. Assim como descrito por Souza Neto *et al.* (2008), ao expandir as equações para um estado tridimensional, elas podem ser escritas como

$$\dot{\gamma} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} : D^e : \dot{\epsilon}}{\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} : D^e : N - \frac{\partial \Phi}{\partial A} \rho \frac{\partial^2 \psi^P}{\partial \alpha^2} H} \quad (2.93)$$

$$D^{ep} = D^e - \frac{(D^e : N) \otimes \left( D^e : \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right)}{\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} : D^e : N - \frac{\partial \Phi}{\partial A} \rho \frac{\partial^2 \psi^P}{\partial \alpha^2} H} \quad (2.94)$$

Nas simulações com modelos constitutivos elastoplásticos é necessário garantir que as tensões estejam na superfície de plastificação quando o limite elástico é atingido e o incremento de carregamento é crescente. Isso é possível através de algoritmos iterativos que são acionados quando a superfície é extrapolada. Simo e Hughes (1998) fazem referência aos algoritmos *Cutting Plane* e *Closest Point* como estratégias de retorno para a superfície de plastificação, sendo essa última descrita e utilizada neste trabalho.

#### ▪ Método iterativo *Closest Point*

O método *Closest Point* é uma estratégia implícita que tem como ideia básica assumir um comportamento elástico do estado de tensão em um ponto e através de um resíduo verificar se a predição estava correta ou não. A seguir é descrita a sequência das etapas para implementação dessa estratégia, e que são utilizadas neste trabalho.

1. **Início do processo iterativo.** As variáveis associadas ao modelo elastoplástico são carregadas assumindo os valores do último incremento de tempo.
2. **Predição elástica do comportamento.** Calcula-se a deformação elástica como a diferença entre a deformação total e a deformação plástica acumulada. Admitindo o comportamento elástico e usando a matriz constitutiva elástica, calcula-se o estado de tensão correspondente.

3. **Função de plastificação.** Esse estado de tensão é submetido para avaliação através da superfície de plastificação.
4. **Vetor de fluxo.** Calcula-se o vetor de fluxo para esse estado de tensão. O vetor de fluxo é calculado de acordo com o critério de plastificação adotado.
5. **Função Resíduo.** É feito um balanço entre deformações e parâmetros de endurecimento para avaliação do resíduo.
6. **Avaliação de comportamento elástico ou plástico.** Os valores de retorno da função de escoamento (3) e o cálculo do resíduo (5) são comparados com tolerâncias pré-definidas. O processo iterativo é encerrado para o caso elástico ou plástico com tensões em equilíbrio, e continua para o caso plástico desequilibrado.
7. **Cálculo do módulo elástico e do módulo tangente consistente.** Nesta etapa é calculada uma matriz com base na inversa da matriz elástica e derivadas de primeira e segunda ordem em relação à função de escoamento.
8. **Cálculo do incremento do parâmetro de consistência.** Este incremento é um escalar e é calculado com base na matriz calculada na etapa anterior.
9. **Cálculo dos incrementos de deformação plástica e parâmetro de endurecimento.**
10. **Atualização dos vetores de deformação plástica, parâmetros de endurecimento e incremento do parâmetro de consistência.**
11. **Próxima iteração.** Inicia-se uma nova iteração até que um estado equilibrado de tensões compatível com o escoamento plástico seja encontrado ou que o limite máximo de iterações seja encontrado.

A Figura 2.15 apresenta um quadro-resumo com a sequência e as equações para implementação do algoritmo *Closest Point*. A imagem foi extraída de Simo e Hughes (1998) e a implementação seguiu exatamente esse fluxo. Recomenda-se a leitura em detalhes para maiores informações.

Figura 2.15 – Quadro-resumo para implementação do algoritmo Closest Point.

1. Initialize:  $k = 0$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(0)} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(0)} = \boldsymbol{\alpha}_n$ ,  $\Delta\gamma_{n+1}^{(0)} = 0$ .

2. Check yield condition and evaluate flow rule/hardening law residuals

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} := \nabla W(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)})$$

$$\boldsymbol{q}_{n+1}^{(k)} := -\nabla \mathcal{H}(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)})$$

$$f_{n+1}^{(k)} := f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}, \boldsymbol{q}_{n+1}^{(k)})$$

$$\boldsymbol{R}_{n+1}^{(k)} := \begin{Bmatrix} -\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)} + \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \\ -\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)} + \boldsymbol{\alpha}_n \end{Bmatrix} + \Delta\gamma_{n+1}^{(k)} \begin{Bmatrix} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f_{n+1} \\ \partial_{\boldsymbol{q}} f_{n+1} \end{Bmatrix}^{(k)}$$

IF:  $f_{n+1}^{(k)} < \text{TOL}_1$  and  $\|\boldsymbol{R}_{n+1}^{(k)}\| < \text{TOL}_2$  THEN: *EXIT*.

3. Compute elastic moduli and consistent tangent moduli

$$\boldsymbol{C}_{n+1}^{(k)} := \nabla^2 W(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)})$$

$$\boldsymbol{D}_{n+1}^{(k)} := -\nabla^2 \mathcal{H}(\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)})$$

$$[\boldsymbol{A}_{n+1}^{(k)}]^{-1} := \begin{bmatrix} [\boldsymbol{C}_{n+1}^{-1} + \Delta\gamma_{n+1} \partial_{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}}^2 f_{n+1}] & \Delta\gamma_{n+1} \partial_{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{q}}^2 f_{n+1} \\ \Delta\gamma_{n+1} \partial_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{\sigma}}^2 f_{n+1} & [\boldsymbol{D}_{n+1}^{-1} + \Delta\gamma_{n+1} \partial_{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}}^2 f_{n+1}] \end{bmatrix}^{(k)}$$

4. Obtain increment to consistency parameter

$$\Delta^2\gamma_{n+1}^{(k)} := \frac{f_{n+1}^{(k)} - [\partial_{\boldsymbol{\sigma}} f_{n+1}^{(k)} \partial_{\boldsymbol{q}} f_{n+1}^{(k)}]^T \boldsymbol{A}_{n+1}^{(k)} \boldsymbol{R}_{n+1}^{(k)}}{[\partial_{\boldsymbol{\sigma}} f_{n+1}^{(k)} \partial_{\boldsymbol{q}} f_{n+1}^{(k)}]^T \boldsymbol{A}_{n+1}^{(k)} \begin{Bmatrix} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f_{n+1} \\ \partial_{\boldsymbol{q}} f_{n+1} \end{Bmatrix}^{(k)}}$$

5. Obtain incremental plastic strains and internal variables

$$\begin{Bmatrix} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)} \\ \Delta\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{n+1}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{D}_{n+1}^{-1} \end{bmatrix}^{(k)} \boldsymbol{A}_{n+1}^{(k)} \left[ \boldsymbol{R}_{n+1}^{(k)} + \Delta^2\gamma_{n+1}^{(k)} \begin{Bmatrix} \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f_{n+1} \\ \partial_{\boldsymbol{q}} f_{n+1} \end{Bmatrix}^{(k)} \right]$$

6. Update state variables and consistency parameter

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)} + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k+1)} = \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)} + \Delta\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)}$$

$$\Delta\gamma_{n+1}^{(k+1)} = \Delta\gamma_{n+1}^{(k)} + \Delta^2\gamma_{n+1}^{(k)}$$

Set  $k \leftarrow k + 1$  and GO TO 2.

### 2.3.3 Modelos Elastoplásticos Clássicos

Como definido na e na Figura 2.10, existem diversos modelos constitutivos para solos. Como o trabalho está baseado na teoria de Biot, serão apenas considerados modelos constitutivos para solos saturados. Entre os modelos clássicos destacam-se os modelos de Tresca, von Mises, Mohr-Coulomb e Drucker-Prager.

Antes de avançar na leitura, é necessário definir os conceitos de estado de tensões principais, desviador e hidrostático. Um estado de tensão genérico, denotado por  $\boldsymbol{\sigma}$ , pode ser representado pelo tensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

Esse tensor pode ser dividido em dois tensores: hidrostático ( $\boldsymbol{p}$ ) e desviador ( $\boldsymbol{s}$ ):

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

$$\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - p & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - p & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - p \end{bmatrix}$$

onde  $p = \sigma_{ii}/3$ .

Além da decomposição do tensor de tensões, ele pode ser rotacionado de modo que apareçam apenas tensões nas direções normais. Este estado particular é conhecido como tensor de tensões principais. O valor dessas tensões pode ser encontrado resolvendo um problema de valor principal e esse tensor pode ser definido por

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

onde  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  são as tensões principais.

### ▪ Propriedades Importantes dos Modelos Elastoplásticos

Os modelos de Tresca e von Mises apresentam a característica de independência das tensões hidrostáticas, sendo baseados exclusivamente a partir do tensor desviador. Na análise de solos, a dependência hidrostática é um importante fator e por isso os modelos de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager são mais utilizados, pois apresentam essa dependência. Outra propriedade importante e presente em todos esses modelos é a isotropia. Isso significa que o tensor de tensões pode ser rotacionado e os limites de escoamento não serão alterados. Por isso é frequente a representação das superfícies de plastificação no plano das tensões principais.

### ▪ Tresca

Este critério foi proposto por H. Tresca (1868) para descrever o escoamento plástico em metais. O critério de escoamento de Tresca assume que o escoamento plástico inicia quando a metade da diferença entre as tensões máximas atinge um valor crítico. Esse valor corresponde exatamente à tensão cisalhante máxima (SHAMES e COZZARELLI, 1992).

A tensão cisalhante máxima pode ser encontrada em função da tensão principal máxima e mínima conforme

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}) \quad (2.98)$$

Isso pode ser facilmente observado no círculo de Mohr para um estado plano de tensões, onde a tensão cisalhante máxima ( $\tau_{max}$ ) representa o raio do círculo.

Supondo um ensaio de tração simples de uma barra onde a mesma seja submetida a um acréscimo de carga até atingir o limite elástico do material, ou seja, atingir a superfície de plastificação, tem-se que

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(Y - 0) \Rightarrow Y = 2\tau_{max} \quad (2.99)$$

Como  $Y$  é a tensão de escoamento do material, substituindo a Eq. (2.99) na Eq. (2.98), tem-se a definição de Tresca para o limite elástico do material, ou seja,

$$\frac{Y}{2} = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}) \quad (2.100)$$

Assim, pode-se definir a função de escoamento ( $\Phi$ ) pelo critério de Tresca como

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) - Y \quad (2.101)$$

Uma forma alternativa para representação do critério de Tresca é definida em termos dos invariantes de tensão, ou seja,

$$\Phi(\mathbf{s}) = 2\sqrt{J_2} \cos \theta - Y \quad (2.102)$$

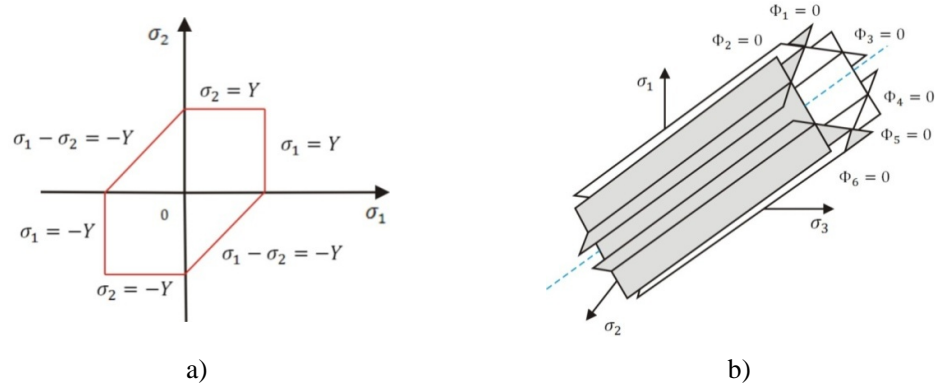
onde  $J_2$  é o segundo invariante do tensor desviador e  $\theta$  é denominado *Lode angle*. Esses valores são definidos como

$$J_2 \equiv \frac{1}{2}\text{tr}[\mathbf{s}^2] \text{ e } \sin(3\theta) = \frac{-3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{3/2}} \quad (2.103)$$

Em um modelo unidimensional o critério de Tresca é representado no espaço por um ponto (limite de escoamento do material). No caso bidimensional, o limite de escoamento é definido por um conjunto de retas em um plano definidas por  $\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = 0$  e representadas graficamente na Figura 2.16-a. Por fim, no espaço tridimensional, o critério de Tresca pode ser definido por  $\Phi_i(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y) = 0$  e sua representação gráfica é descrita na Figura 2.16-b.



**Figura 2.16 – Superfície de escoamento de Tresca no espaço 2D e 3D.**



Fonte: Autor, 2012.

### ▪ Von Mises

Apropriado para descrever o escoamento plástico em metais, este critério foi proposto por von Mises em 1913. A ideia está baseada na energia de deformação elástica armazenada em um estado genérico. Essa energia é composta por uma energia de distorção e uma energia volumétrica (SOUZA NETO *et al.*, 2008). Como o critério de von Mises independe das tensões hidrostáticas, o critério é definido apenas em função das parcela de distorção, associada às tensões nas direções principais. Assim como descrito por Shames e Cozzarelli (1992), a energia de distorção é definida por

$$u_d = \frac{1}{6E}(1 + \nu) \left[ (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 \right] \quad (2.104)$$

Pode-se observar que a energia de distorção independe das tensões hidrostáticas e por isso essa mesma expressão continua válida para o estado desviador. O escoamento deve ocorrer quando essa energia atinge um valor crítico. Esse valor pode ser obtido em um ensaio experimental de uma barra tracionada, onde  $\sigma_{xx} = Y$ ,  $\sigma_{yy} = 0$  e  $\sigma_{zz} = 0$ . Substituindo esses valores na Eq. (2.104), tem-se que

$$\frac{1}{6E}(1 + \nu) \left[ (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 \right] = \frac{1}{3E}(1 + \nu)Y^2 \quad (2.105)$$

Essa equação pode ser reduzida conforme abaixo. O termo do lado esquerdo é o segundo invariante do tensor de tensões principais ( $I_2$ ) ou o segundo invariante do tensor de tensões desviador ( $J_2$ ).

$$\frac{1}{6}[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2] = \frac{1}{3}Y^2 \quad (2.106)$$

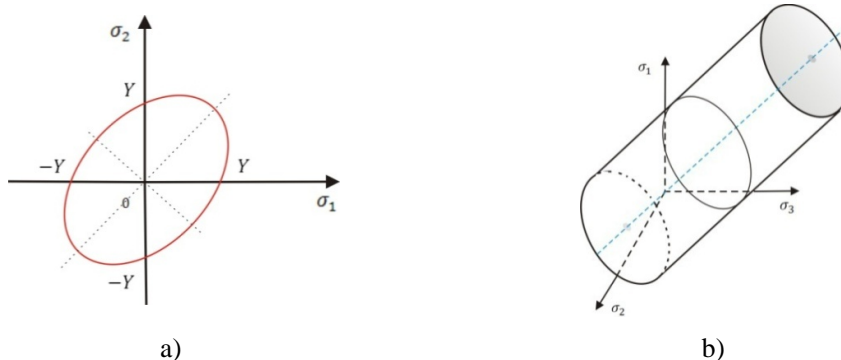
$$J_2 = \frac{1}{3}Y^2 \Rightarrow \sqrt{3J_2} = Y \quad (2.107)$$

Dessa forma, a função de escoamento no critério de von Mises é definida como

$$\Phi(\mathbf{s}) = \sqrt{3J_2} - Y \quad (2.108)$$

A representação gráfica das superfícies de escoamento segundo critério de von Mises no plano 2D e 3D é apresentada na Figura 2.16 e a Figura 2.17

**Figura 2.17 – Superfície de escoamento de von Mises no espaço 2D e 3D.**



Fonte: Autor, 2012.

#### ▪ Mohr-Coulomb

Uma descrição do escoamento plástico apropriado para análise de solos, por exemplo, requer a introdução da dependência de tensões média (pressões hidrostáticas), como acontece no critério de Mohr-Coulomb. Esse considera que o fenômeno de escoamento plástico é resultado do atrito devido ao deslizamento entre as partículas que constituem o material.

Assim, ele assume que o escoamento plástico inicia quando, em um plano do corpo, a tensão cisalhante  $\tau$  e a tensão normal  $\sigma_n$  atingem uma combinação crítica, definida pela equação

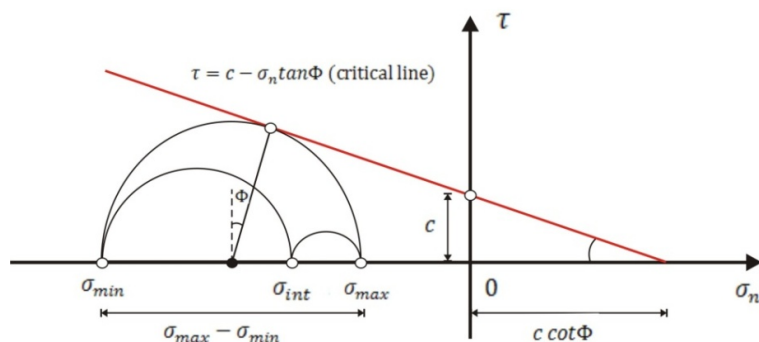
$$\tau = c - \sigma_n \tan \phi \quad (2.109)$$

onde  $c$  é a coesão e  $\phi$  é o ângulo de atrito interno (ângulo de atrito).

A superfície de escoamento por esse critério é definida por todas as combinações que atendem a Eq. (2.109). Essa superfície pode ser mais facilmente visualizada na representação do estado de tensão através do círculo de Mohr, conforme Figura 2.18. No mesmo plano cartesiano onde estão desenhados os círculos, projeta-se a reta referente à Eq. (2.109).

A linha crítica que define o limite elástico do material é aquela que tangencia o círculo mais externo. Dessa forma, o domínio elástico é definido pelo conjunto das tensões cujos três círculos estão abaixo da linha crítica. Observa-se que o raio do círculo mais externo corresponde à tensão cisalhante máxima definida pela Eq. (2.98), o que indica que esse critério pode ser considerado uma extensão do critério de Tresca.

**Figura 2.18 – Representação gráfica do critério de Mohr-Coulomb.**



Fonte: Autor, 2012.

A Equação (2.109) pode ser descrita em função das tensões principais, ou seja,

$$\frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \cos \phi = c - \left( \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} + \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \sin \phi \right) \tan \phi \quad (2.110)$$

Essa equação pode ainda ser manipulada resultando em

$$(\sigma_{max} - \sigma_{min}) + (\sigma_{max} + \sigma_{min})\sin\phi = (2c)\cos\phi \quad (2.111)$$

Portanto, a superfície de escoamento pelo critério de Mohr-Coulomb é definida por

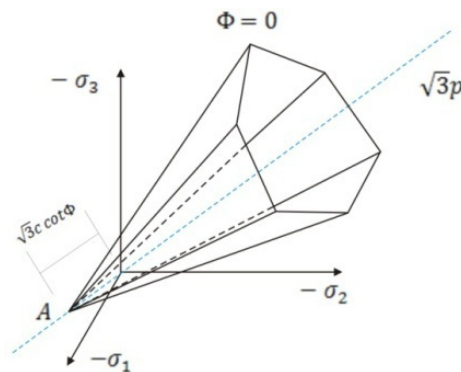
$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) + (\sigma_{max} + \sigma_{min})\sin\phi - (2c)\cos\phi \quad (2.112)$$

Nota-se que, diferentemente dos critérios de Tresca e von Mises, esse critério depende de dois parâmetros ( $c$  e  $\phi$ ). A função de escoamento pelo critério de Mohr-Coulomb pode ainda ser definida em função dos invariantes de tensão, conforme equação

$$\Phi(\mathbf{s}, \boldsymbol{\sigma}) = \left( \cos\theta - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\sin\phi \right) \sqrt{J_2(\mathbf{s})} + p(\boldsymbol{\sigma})\sin\phi - c \cos\phi \quad (2.113)$$

No espaço tridimensional a superfície de escoamento ( $\Phi = 0$ ) é descrita por uma pirâmide hexagonal com eixo hidrostático e limitada pelo vértice em  $p = c \cot\phi$  (Figura 2.19).

**Figura 2.19 – Superfície de escoamento de Mohr-Coulomb.**



Fonte: Autor, 2012.

Sua forma piramidal, oposta à forma prismática do critério de Tresca, é uma consequência da dependência de pressões hidrostáticas. Deve-se notar, no entanto, que esses

critérios coincidem quando o ângulo de atrito é nulo. Como não é permitido nenhum estado de tensão fora da superfície de escoamento, o vértice da pirâmide define o limite de resistência do material para tensão média. Essa característica é típica de materiais como o concreto, rocha e solos, exatamente onde o critério de Mohr-Coulomb é mais aplicável (SOUZA NETO *et al.*, 2008).

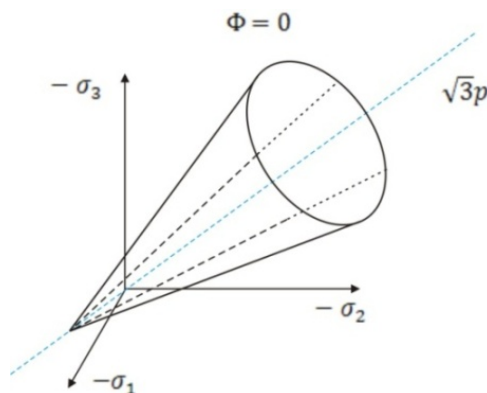
#### ▪ Drucker-Prager

Este critério foi proposto por Drucker e Prager (1925) como uma aproximação suave para a lei de Mohr-Coulomb. Ele consiste em uma modificação no critério de von Mises no qual um termo é incluído para introduzir a dependência da tensão média. O critério de Drucker-Prager assume que o escoamento plástico inicia quando o invariante  $J_2$  do tensor desviador e a pressão hidrostática  $p$  atingem uma combinação crítica. Isso é definido pela equação

$$\sqrt{J_2(\mathbf{s})} + \eta p(\boldsymbol{\sigma}) = \bar{c} \quad (2.114)$$

onde  $\eta$  e  $\bar{c}$  são parâmetros do material. Para  $\eta = 0$  o critério de von Mises é restabelecido. A representação gráfica no espaço tridimensional desse critério é feita por um cone circular com eixo na linha hidrostática, representado na Figura 2.20.

**Figura 2.20 – Superfície de escoamento de Drucker-Prager.**



Fonte: Autor, 2012.

A função de escoamento para o critério de Drucker-Prager é definida por

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{J_2(s)} + \eta p(\boldsymbol{\sigma}) - \xi c \quad (2.115)$$

onde  $c$  é a coesão e os parâmetros  $\eta$  e  $\xi$  são escolhidos de acordo com a aproximação requerida. Duas aproximações usuais consistem em fazer as superfícies de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager coincidirem nas bordas internas e externas. Para as bordas internas isso acontece quando

$$\eta = \frac{6 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)} \quad \xi = \frac{6 \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)} \quad (2.116)$$

e para as bordas externas

$$\eta = \frac{6 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad \xi = \frac{6 \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (2.117)$$

O cone interno coincide com o critério de Mohr-Coulomb em tração uniaxiais e compressão biaxial. A aproximação pela aresta externa coincide com a superfície de Mohr-Coulomb em compressão uniaxial e tensão biaxial.

Essas considerações indicam que os usos dos critérios de plastificação devem estar condicionados ao problema analisado, caso contrário, o critério escolhido pode estar subestimando ou superestimando o limite elástico do material.

### 3 ANÁLISE NUMÉRICA

Os fenômenos que acontecem na natureza são essencialmente complexos e interdependentes. Independente da escala micro ou macroscópica, eles resultam da interação simultânea de diversos problemas. Na análise desses fenômenos, dependendo da abordagem adotada e da ordem de grandeza tolerável para as variáveis envolvidas, essa complexidade pode ser reduzida a modelos mais simples, tornando possível seu estudo em escalas de interesse prático.

O parágrafo anterior remete ao desenvolvimento apresentado nos capítulos anteriores (dedução da teoria de Terzaghi e Biot), em que foi descrito o processo de concepção de um modelo matemático para representar um fenômeno físico. Esse desenvolvimento é denominado idealização do problema e é acompanhado por diversas hipóteses e simplificações que são necessárias para tornar possível a modelagem do problema.

Além do problema da poroelasticidade, existem infinitos outros fenômenos que necessitam desse processo para tornar possível seu estudo. A maioria dos fenômenos que ocorrem na natureza é governado por equações diferenciais parciais de difícil solução. Resolver esses problemas analiticamente muitas vezes implica em impor restrições geométricas e físicas ao problema, ou mesmo introduzir novas simplificações, tornando o problema ainda mais distante da realidade.

Estratégias baseadas em métodos numéricos permitem analisar esses fenômenos com um menor número de intervenções. Essa abordagem é conhecida como análise numérica do problema e comumente consiste em utilizar ferramentas computacionais para análise do problema.

#### 3.1 Etapas de uma análise numérica

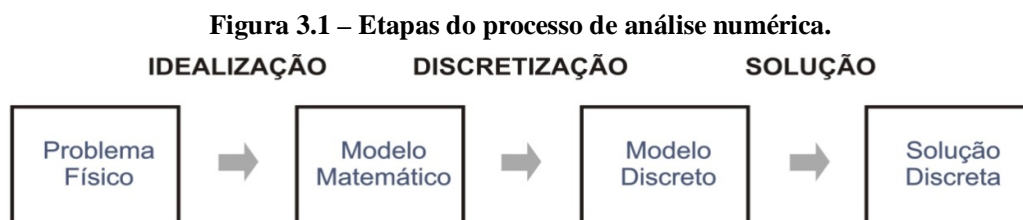
Assim como descrito no trabalho de Dadvand (2007), uma análise numérica pode ser dividida em três etapas principais, conforme descrito abaixo e ilustrado na Figura 3.1.

**Idealização** – Consiste na definição de um modelo matemático que deve representar um sistema físico. Esta etapa é também conhecida como modelagem matemática. Nesta etapa,

um problema físico e suas condições são formatadas matematicamente, tornando possível sua análise analítica e/ou numérica. Este processo é acompanhado de diferenças entre o modelo matemático e o real, o que resulta no surgimento de *erros de modelagem*.

**Discretização** – Este processo consiste na conversão de um modelo matemático constituído de infinitas variáveis, denominadas graus de liberdade, em um número finito delas. Resolver um problema usando métodos numéricos requer um número discreto (finito) de variáveis e um modelo contínuo apresenta infinitos graus de liberdade. Esta aproximação acaba introduzindo *erros de discretização* no processo.

**Solução** – Consiste em resolver o modelo discreto e obter os graus de liberdade do problema, além de outros resultados relacionados. Esta etapa também introduz *erros de solução* advindos da imprecisão dos algoritmos e máquinas computacionais.



Fonte: Autor, 2012.

Na etapa de idealização do modelo existem diferentes formas de expressar o modelo matemático que representa o problema físico, das quais podemos destacar: forma variacional, forma forte e forma fraca.

A **forma variacional**, não discutida em detalhes neste trabalho, acontece quando o modelo é escrito através de princípios variacionais baseados em conceitos de energia. Através de um balanço de energia interna e trabalho de ações externas é possível escrever equações de equilíbrio do problema, por exemplo.

A **forma forte** define um modelo matemático como um sistema de equações diferenciais parciais ou ordinárias. No Capítulo 3, por exemplo, desenvolve-se a forma forte para o problema da poroelasticidade segundo Biot. Como o problema em análise se refere a



dois fenômenos acoplados (mecânico e de fluxo), foi necessário definir equações para ambos os problemas.

A **forma fraca** é a definição de equações matemáticas do modelo em uma forma particular modificada. As equações são escritas envolvendo integrais e ponderação dos resíduos. A formulação fraca do modelo pode ser obtida pela aplicação de condições estacionárias à forma variacional ou pela aproximação ponderada dos resíduos na forma forte. Ela é fundamental para o processo de discretização e solução numérica do problema.

Para o completo desenvolvimento da formulação numérica do problema fluxo-mecânico acoplado é necessária a definição de equações na forma forte no domínio e contorno do problema. Em seguida essas equações são escritas na sua forma fraca para tornar possível a discretização e uso de algum método numérico.

As Equações (2.50) e (2.59), apresentadas no capítulo anterior, correspondem às equações governantes para o problema mecânico e o problema de fluxo. Elas são as equações governantes do problema fluxo-mecânico na forma forte (equação diferencial) e devem ser atendidas em todo o domínio do problema. Podem ser escritas como:

$$\sigma_{j,i,j} + \bar{b}_i = 0 \text{ em } \Omega \quad (3.1)$$

$$\zeta_{,t} - Kp_{,ii} = 0 \text{ em } \Omega \quad (3.2)$$

Além dessas equações, é necessária a definição de equações no contorno do problema. Tais equações surgem pela imposição de condições de contorno no problema mecânico e no problema de fluxo, correspondendo a prescrições dos deslocamentos, do vetor de tensão, da poropressão e do fluxo normal (FERNANDES, 2009), ou seja,

$$u_i = \bar{u}_i \text{ em } \Gamma_u \quad (3.3)$$

$$\sigma_{ji}n_j = \bar{t}_i \text{ em } \Gamma_\sigma \quad (3.4)$$

$$p = \bar{p} \text{ em } \Gamma_u \quad (3.5)$$

$$q_i n_i = \bar{v}_n \text{ em } \Gamma_v \quad (3.6)$$

onde  $n_i$  e  $n_j$  representam os componentes do versor normal ao contorno  $\Gamma$ .

A etapa seguinte consiste em escrever essas equações na forma fraca, ou seja, expressá-las através de integrais. A denominação “fraca” está associada ao fato de que a solução do problema pode ser atendida em termos de valores médios e não pontual, como exige a equação diferencial. Este processo permite reduzir um grau da equação diferencial do problema e é fundamental para o processo de discretização por permitir a substituição do operador integral em um contínuo pelo somatório de valores discretos.

Neste trabalho as equações de equilíbrio na forma fraca são escritas utilizando uma ponderação dos resíduos (diferença entre a solução analítica e aproximada). Essa estratégia é conhecida como Método dos Resíduos Ponderados e é discutida em maiores detalhes na seção seguinte.

### 3.2 Métodos dos Resíduos Ponderados

O Método dos Resíduos Ponderados consiste em uma classe de métodos numéricos para solução de equações diferenciais (BATHE, 1996). A ideia do método é ponderar o resíduo do erro entre a solução aproximada e analítica.

Para explicar a ideia do método, admitem-se as seguintes equações como sendo as equações diferenciais de equilíbrio para o domínio e contorno, respectivamente, de um problema físico genérico:

$$\mathcal{L}(u) - p = 0 \quad (3.7)$$

$$\mathcal{S}(u) - q = 0 \quad (3.8)$$

onde  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{S}$  são operadores diferenciais e  $u$  a variável de estado do problema.

Admitindo-se uma solução aproximada  $\bar{u}$ , essas equações resultam em resíduos

$$\mathcal{L}(\bar{u}) - p \neq 0 \quad (3.9)$$

$$\mathcal{S}(\bar{u}) - q \neq 0 \quad (3.10)$$

Intuitivamente, conclui-se que quanto menor o resíduo, mais próxima da solução exata estará a solução aproximada.

A equação de referência do método surge quando se assume que a solução aproximada é aquela que anula a soma desses resíduos ponderados no domínio e contorno, ou seja,

$$\int_{\Omega} w_{\Omega}[\mathcal{L}(\bar{u}) - p] d\Omega + \int_{\Gamma} w_{\Gamma}[\mathcal{S}(\bar{u}) - q] d\Gamma = 0 \quad (3.11)$$

onde  $w_{\Omega}$  e  $w_{\Gamma}$  são as funções de ponderação no domínio e contorno do problema. Em muitos problemas, uma prática comum é considerar as mesmas funções  $w$  para ponderação no domínio e contorno.

A depender da função de ponderação utilizada, surgem diferentes métodos da classe dos Métodos dos Resíduos Ponderados. Alguns desses métodos são: colocação pontual, colocação por subdomínio, mínimos quadrados, Galerkin, entre outros (BATHE, 1996).

Para aproximar a solução analítica, podem-se adotar como solução candidata, funções polinomiais de aproximação. No caso particular em que essas funções de aproximação coincidem com as funções de ponderação tem-se o método de Galerkin.

### 3.2.1 Ponderação dos Resíduos nas Equações da Poroelasticidade

Ponderando-se os resíduos nas equações do domínio e contorno do problema mecânico, tem-se que

$$\int_{\Omega} w(\sigma_{ji,j} + \bar{b}_i) d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} w(\bar{t}_i - \sigma_{ji}n_j) d\Gamma = 0 \quad (3.12)$$

Utilizando-se a regra de derivada do produto, tem-se

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ji}w)_j d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ji,j}w d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ji}w_j d\Omega \quad (3.13)$$

Isolando-se o primeiro termo do lado direito e substituindo-se na Eq. (3.12), resulta em

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ji}w)_j d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ji}w_j d\Omega + \int_{\Omega} w\bar{b}_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} w(\bar{t}_i - \sigma_{ji}n_j) d\Gamma = 0 \quad (3.14)$$

Pelo Teorema da Divergência de Gauss (STEWART, 2005), seja  $F$  um campo vetorial cujas funções componentes têm derivadas parciais contínuas em uma região aberta contida em  $\Omega$ , tem-se que

$$\int_{\Omega} F_{i,i} d\Omega = \int_{\Gamma} F_i n_i d\Gamma \quad (3.15)$$

A aplicação do Teorema de Gauss no primeiro termo da Eq. (3.14) resulta em

$$\int_{\Gamma} w\sigma_{ji}n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ji}w_j d\Omega + \int_{\Omega} w\bar{b}_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} w(\bar{t}_i - \sigma_{ji}n_j) d\Gamma = 0 \quad (3.16)$$

O termo associado com a integração no contorno resultante da aplicação do Teorema da Divergência de Gauss pode ser subdividido na integração no contorno de prescrição de deslocamento e no contorno de prescrição de tensão, ou seja,

$$\int_{\Gamma} w \sigma_{ji} n_j d\Gamma = \int_{\Gamma_u} w \sigma_{ji} n_j d\Gamma_u + \int_{\Gamma_{\sigma}} w \sigma_{ji} n_j d\Gamma_{\sigma} \quad (3.17)$$

A parcela que se refere ao contorno com prescrição em deslocamento é nula, pois se trata de uma condição de contorno essencial e deve obrigatoriamente ser satisfeita. Substituindo-se a Eq. (3.17) na Eq. (3.16) tem-se que

$$\int_{\Omega} \sigma_{ji} w_j d\Omega = \int_{\Omega} w \bar{b}_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} w \bar{t}_i d\Gamma_{\sigma} = 0 \quad (3.18)$$

A equação anterior representa a equação do problema puramente mecânico escrita através do Método dos Resíduos Ponderados. De maneira idêntica ao processo apresentado no capítulo anterior, acopla-se o termo de fluxo nessa equação fazendo uso do Princípio das Tensões Efetivas, representado na Eq. (2.33).

Substituindo-se a Eq. (2.33) na Eq. (3.18) tem-se a equação governante do problema mecânico na forma fraca e escrita em termos das tensões efetivas e poropressão, ou seja,

$$\int_{\Omega} \sigma'_{ji} w_j d\Omega - \int_{\Omega} \alpha p w_j \delta_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} w \bar{b}_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} w \bar{t}_i d\Gamma_{\sigma} \quad (3.19)$$

O mesmo processo é repetido para as equações do problema de fluxo, descritas pelas Eqs. (3.2) e (3.6). A ponderação dos resíduos nessas equações resulta em

$$\int_{\Omega} w (\zeta_{,t} - K p_{,ii}) d\Omega + \int_{\Gamma_v} w (\bar{v}_n - q_i n_i) d\Gamma = 0 \quad (3.20)$$

A Equação (2.55) pode ser escrita em formato indicial e substituída na Eq. (3.20),

$$\int_{\Omega} w (\zeta_{,t} - K p_{,ii}) d\Omega + \int_{\Gamma_v} w (\bar{v}_n - k p_{,i} n_i) d\Gamma = 0 \quad (3.21)$$

Empregando mais uma vez a regra de derivação do produto, tem-se

$$\int_{\Omega} (kp_{,i}w)_{,i} d\Omega = \int_{\Omega} kp_{,ii}w d\Omega + \int_{\Omega} kp_{,i}w_{,i} d\Omega \quad (3.22)$$

Isolando-se o primeiro termo do lado direito da Eq. (3.22) na Eq. (3.21), tem-se

$$\int_{\Omega} w\zeta_{,t} d\Omega - \int_{\Omega} (kp_{,i}w)_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} kp_{,i}w_{,i} d\Omega + \int_{\Gamma_v} w(\bar{v}_n - kp_{,i}n_i) d\Gamma = 0 \quad (3.23)$$

De maneira idêntica ao processo anterior, aplica-se o Teorema da Divergência de Gauss no segundo termo da Eq. (3.23). Com isso é possível reduzir o grau da equação diferencial e substituir a integração no domínio por uma integração no contorno. Usando o teorema tem-se que

$$\int_{\Omega} (kp_{,i}w)_{,i} d\Omega = \int_{\Gamma^p} kp_{,i}wn_i d\Gamma + \int_{\Gamma^v} kp_{,i}wn_i d\Gamma \quad (3.24)$$

Substituindo-se a Eq. (3.24) na Eq. (3.23) tem-se

$$\int_{\Omega} w\zeta_{,t} d\Omega - \int_{\Gamma^p} kp_{,i}wn_i d\Gamma + \int_{\Omega} kp_{,i}w_{,i} d\Omega + \int_{\Gamma_v} w\bar{v}_n d\Gamma = 0 \quad (3.25)$$

O termo associado ao contorno em poropressão deve ser nulo por se tratar de uma condição de contorno essencial. Dessa forma, a equação do problema de fluxo na forma fraca pelo método dos resíduos ponderados é expressa por

$$\int_{\Omega} w\zeta_{,t} d\Omega + \int_{\Omega} kp_{,i}w_{,i} d\Omega = - \int_{\Gamma_v} w\bar{v}_n d\Gamma_v \quad (3.26)$$

As Equações (3.19) e (3.26) representam as equações governantes do problema fluxomecânico escritas através de integrais pelo Método dos Resíduos Ponderados. A presença dos operadores integrais nessas equações é fundamental para a etapa seguinte de discretização. Para esse processo de discretização será utilizado o Método dos Elementos Finitos.

### 3.3 Método dos Elementos Finitos

Segundo Fish e Belytschko (2009), milhões de engenheiros e cientistas em todo o mundo usam o Método dos Elementos Finitos (MEF) para prever o comportamento estrutural de sistemas.

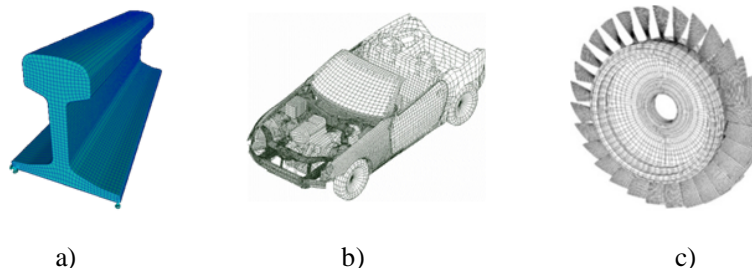
O MEF foi desenvolvido nos anos 1950 pela indústria aeroespacial. Em 1956, M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin e L. J. Topp publicaram um dos primeiros artigos no qual expuseram as primeiras ideias sobre esse método. Naquela ocasião, eles estabeleceram os procedimentos de montagem da matriz de elementos, mas não usaram o termo elementos finitos. O segundo autor desse artigo, Ray Clough, escreveu um outro artigo utilizando a palavra elementos finitos e ganhou muitos créditos como um dos criadores do método. Seu trabalho incentivou jovens professores, tais como E. Wilson e R. L. Taylor, além de estudantes de pós-graduação como T. J. R. Hughes, C. Felippa, K. J. Bathe entre outros.

No início, a maior parte da comunidade acadêmica científica viu o MEF de forma muito céptica, e alguns dos periódicos de maior prestígio se recusaram a publicar artigos sobre o método. Passados alguns anos, vários pesquisadores renomados logo reconheceram as vantagens do método, a exemplo de O. C. Zienkiewicz e R. H. Gallagher. Nos dias atuais são encontrados diversos *softwares* comerciais (Abaqus, ANSYS, etc.) ou públicos que usam o MEF para os mais diversos problemas, e seu uso tem sido fundamental para o desenvolvimento da pesquisa e tecnologia.

A ideia básica do MEF é dividir um domínio de interesse em subdomínios menores, denominado elementos finitos, conectados por nós. Esse conjunto de elementos interconectados é chamado *malha de elementos finitos* e seu processo de construção é denominado *geração da malha*. No método dos elementos finitos, em sua formulação convencional, a solução é aproximada por funções polinomiais associadas aos nós dos elementos, e quanto maior o grau dessas funções melhor a qualidade da resposta. A solução aproximada é determinada para um elemento finito e a solução do problema global é obtida com a soma das contribuições de cada elemento. É possível provar que quanto maior o número de elementos utilizados na malha (maior discretização), melhor será a qualidade da

resposta. Na Figura 3.2 estão ilustradas algumas malhas de elementos finitos utilizadas na análise de problemas reais.

**Figura 3.2 – Exemplos de malhas de elementos finitos de estruturas reais.**



Fonte: www.google.com: elementos finitos.

Além do Método dos Elementos Finitos, existem diversos outros métodos que também são utilizados na análise numérica de problemas. Como exemplo, pode-se citar: Método das Diferenças Finitas, Método dos Elementos de Contorno, Método dos Volumes Finitos, Método dos Elementos Discretos, entre outros que podem ser encontrados na literatura. Na seção seguinte é feita a discretização das equações governantes do problema poroelástico pelo Método dos Elementos Finitos.

### 3.3.1 Discretização das Equações do Problema Fluxo-mecânico

Na abordagem pelo MEF, o domínio do problema é dividido em regiões menores denominadas elementos. Os operadores integrais das Eqs. (3.19) e (3.26) podem ser substituídos por um somatório de todos os elementos da malha, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{n_{\text{ele}}} \left( \int_{\Omega_e} \sigma'_{ji} w_j d\Omega - \int_{\Omega_e} \alpha p w_j \delta_{ij} d\Omega \right) = \sum_{n=1}^{n_{\text{ele}}} \left( \int_{\Omega_e} w \bar{b}_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma_e}} w \bar{t}_i d\Gamma_{\sigma} \right) \quad (3.27)$$

$$\sum_{n=1}^{n_{\text{ele}}} \left( \int_{\Omega_e} w \zeta_{,t} d\Omega + \int_{\Omega_e} k p_{,i} w_{,i} d\Omega \right) = \sum_{n=1}^{n_{\text{ele}}} \left( - \int_{\Gamma_{v_e}} w \bar{v}_n d\Gamma_v \right) \quad (3.28)$$

Pode-se observar que o somatório é aplicado no domínio de cada elemento e não no domínio do problema. Para resolver numericamente essas equações é necessária a imposição



de uma solução aproximada. Na abordagem pelo MEF, funções polinomiais são usadas na aproximação da solução em cada elemento da malha e as incógnitas do problema são as próprias variáveis de estado, ou seja, deslocamentos e poropressões.

Cada elemento finito é definido geometricamente por um conjunto de nós e a solução dentro de cada elemento finito, que é um espaço contínuo, é obtida a partir de valores nos nós do elemento. Esses campos aproximados podem ser escritos como uma combinação de funções de interpolação e das variáveis de estado nesses nós, ou seja,

$$\{\bar{u}\} = [N_d]^T \{d\} \quad (3.29)$$

$$\{\bar{p}\} = [N_p]^T \{p\} \quad (3.30)$$

onde  $[N_d]$  é a matriz de funções de interpolação para deslocamento e  $[N_p]$  a matriz de funções de forma para poropressão. Os vetores  $\{d\}$  e  $\{p\}$  são os deslocamentos e poropressões nodais.

Considerando a aplicação do MEF resultante do método de Galerkin, tem-se que as funções de peso ( $w$ ) utilizadas para ponderar as equações devem ser as mesmas funções utilizadas para interpolar as variáveis ( $N$ ).

A relação entre tensões e deformações no problema mecânico é definida pelo modelo constitutivo adotado. O trabalho de Fernandes (2009) apresenta a formulação para o problema acoplado fluxo-deformação considerando um modelo constitutivo elástico linear. Neste trabalho, faz-se uma ampliação dessa representação através da incorporação de modelos elastoplásticos. A seguir são apresentados os detalhes que envolvem essas considerações.

#### ▪ Formulação Elástico-Linear

Com base nas soluções aproximadas descritas nas equações acima, considerando um modelo elástico-linear e utilizando um formato matricial, as Eqs. (3.27) e (3.28) podem ser discretizadas e escritas através do sistema de equações

$$[K_{MM}]\{d\} - [K_{MF}]\{p\} = \{f_M\} \quad (3.31)$$

$$[K_{MF}]^T\{\dot{d}\} + [C_{FF}]\{\dot{p}\} + [K_{FF}]\{p\} = \{f_V\} \quad (3.32)$$

As matrizes e vetores presentes nesse sistema são definidos na Tabela 3.1.

**Tabela 3.1 - Matrizes do sistema de equações do problema acoplado.**

Matriz de Rigidez do problema mecânico	$[K_{MM}]$	$[K_{MM}] = \sum_{elem} \int_{\Omega^e} [B_d]^T [D'] [B_d] d\Omega$
Matriz de acoplamento	$[K_{MF}]$	$[K_{MF}] = \sum_{elem} \int_{\Omega^e} [B_d]^T \{\alpha\} [N_p] d\Omega$
Matriz de Compressibilidade ou matriz de massa	$[C_{FF}]$	$[C_{FF}] = \sum_{elem} \int_{\Omega^e} [N_p]^T \frac{1}{Q} [N_p] d\Omega$
Matriz de Condutância	$[K_{FF}]$	$[K_{MF}] = \sum_{elem} \int_{\Omega^e} [B_p]^T k [I] [B_p] d\Omega$
Vetor de forças e tensões prescritas	$\{f_M\}$	$\{f_M\} = \sum_{elem} \int_{\Omega^e} [N_d]^T \{\bar{b}\} d\Omega + \sum_{elem} \int_{\Gamma^e_\sigma} [N_d]^T \{\bar{t}\} d\Gamma$
Vetor de fluxo prescrito	$\{f_V\}$	$\{f_V\} = \sum_{elem} - \int_{\Gamma^e_v} [N_p]^T \{\bar{v}_n\} d\Gamma$

Fonte: FERNANDES, 2009.

Nas expressões apresentadas, o termo  $[B]$  representa a matriz das derivadas das funções de forma para cada problema específico. Sendo  $[B_d]$  para os deslocamentos e  $[B_p]$  para a poropressão. Essa matriz é definida como  $[B] = [\nabla][N]$ , onde  $[\nabla]$  é uma matriz de operadores diferenciais associadas ao tipo de análise e  $[N]$  a matriz das funções de forma de cada problema.

A matriz  $[D']$  representa a matriz constitutiva do problema mecânico em termos de tensões efetivas. Sendo  $[D]$  a matriz em termos de tensões totais. O vetor  $\{\alpha\}$  refere-se às contribuições do coeficiente de Biot-Willis nas direções normais. Por exemplo, no caso tridimensional, esse vetor assume a forma

$$\{\alpha\} = [\alpha \ \alpha \ \alpha \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (3.33)$$

Por fim,  $[I]$  é a matriz identidade e os vetores  $\{\bar{b}\}$ ,  $\{\bar{t}\}$  e  $\{\bar{v}_n\}$  representam as forças de corpo, os carregamentos externos (tensões) e os fluxos normais às superfícies, respectivamente.

O sistema de equações e seus termos foram apresentados de forma simplificada nesta seção. Maiores detalhes são descritos no trabalho de Fernandes (2009) e também são apresentados no Apêndice A deste trabalho.

### ▪ Formulação Elastoplástica

A consideração de modelos elastoplásticos na formulação conduz a um sistema de equações diferente daquele apresentado nas Eqs. (3.31) e (3.32). Na formulação elástica, a matriz de rigidez do problema mecânico ( $K_{MM}$ ) foi obtida considerando uma relação constitutiva constante e na consideração de plasticidade, essa relação pode sofrer modificações quando o limite de escoamento do material é atingido.

Dessa forma, o primeiro termo do lado esquerdo da Eq. (3.27) deve ser mantido no formato

$$\sum_{n=1}^{n_{\text{ele}}} \left( \int_{\Omega_e} \sigma'_{ji} w_j d\Omega \right) = \int_{\Omega} \sigma'_{ji} w_j d\Omega = \int_{\Omega} [\nabla]^T [w] \{\sigma'\} d\Omega = \int_{\Omega} [B]^T \{\sigma'\} d\Omega \quad (3.34)$$

resultando em

$$\int_{\Omega} [B]^T \{\sigma'\} d\Omega - [K_{MF}] \{p\} = \{f_M\} \quad (3.35)$$

$$[K_{MF}]^T \{\dot{d}\} + [C_{FF}] \{\dot{p}\} + [K_{FF}] \{p\} = \{f_V\} \quad (3.36)$$

Esse sistema de equações permite a consideração de relações constitutivas que não necessariamente são lineares, como os modelos elastoplásticos. Sua solução requer a utilização de técnicas numéricas de integração espacial, temporal e alguma estratégia para a formulação da matriz de rigidez elastoplástica, quando este tipo modelo for utilizado.

### 3.4 Integração Numérica

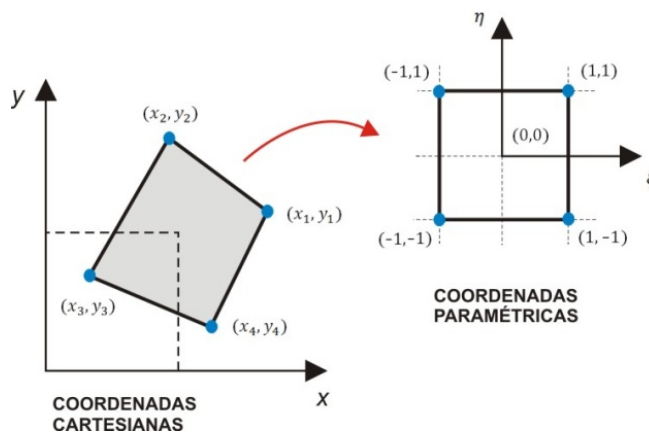
Para o processo de integração numérica das equações, são descritos nesta seção as estratégias de integração no espaço e no tempo.

#### 3.4.1 Integração no Espaço

A Tabela 3.1 apresenta as expressões para montar cada matriz do sistema de equações do problema acoplado. Pode-se observar que é necessário avaliar a integral analítica dentro de cada elemento e esse procedimento dificulta a implementação computacional do método. Um método clássico para substituir essa integração analítica no espaço é a integração numérica de Gauss. Essa estratégia consiste em substituir a integração analítica por um somatório ponderado da função a ser integrada. Esse somatório é avaliado em pontos específicos, denominados pontos de Gauss e as ponderações são chamadas pesos de Gauss.

O procedimento da integração de Gauss é feito em um domínio paramétrico em que as coordenadas dos elementos variam entre -1 e 1, podendo ainda apresentar características regulares ou irregulares (Figura 3.3).

**Figura 3.3 – Elemento finito paramétrico.**



Fonte: Autor, 2012.

A relação entre o espaço de coordenadas locais e o espaço paramétrico é definida como *Jacobiano* da transformação. Ele representa um fator de escala entre os dois espaços. O passo inicial para a integração no espaço é a mudança das coordenadas de integração, conforme a equação

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy dx \Rightarrow I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) |J| d\eta d\xi \quad (3.37)$$

Em seguida, a integração no espaço paramétrico é substituída por um somatório em pontos específicos que são multiplicados por pesos determinados, de acordo com

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) |J| d\eta d\xi = \sum_{\eta=\eta_1}^{\eta_n} \sum_{\xi=\xi_1}^{\xi_n} w_g f(\xi, \eta) |J| \quad (3.38)$$

onde  $w_g$  nessa equação, são os pesos de Gauss para o ponto  $(\xi, \eta)$ . Em diversos livros de elementos finitos podem ser encontradas tabelas com as coordenadas e respectivos pesos utilizados na integração gaussiana.

A Equação (3.38) explica como a integração analítica presente nas equações da Tabela 3.1 são substituídas por somatórios em pontos específicos. O procedimento de integração gaussiana foi descrito para o caso 2D, mas ele pode ser simplificado para um caso unidimensional ou extrapolado para o caso tridimensional. Esse método oferece uma boa precisão e se apresenta com uma metodologia de fácil implementação computacional, por isso tem sido utilizado na maioria dos métodos numéricos que utilizam integração espacial. Maiores detalhes do método de integração de Gauss e de outros métodos podem ser encontrados, por exemplo, em Bathe (1996).

### 3.4.2 Integração no Tempo

A Equação (3.36) do sistema de equações do problema acoplado apresenta termos com derivadas dos deslocamentos e poropressão nodais em relação ao tempo. Essa dependência temporal existe porque essa equação governa o problema de fluxo. A solução para a variação

no tempo pode ser obtida pela integração direta do tempo. Seguindo o procedimento descrito por Cook *et al.* (2001), a integração temporal pode ser realizada utilizando a equação

$$\{T\}_{n+1} = \{T\}_n + \Delta t \left\{ (1 - \beta) \{\dot{T}\}_n + \beta \{\dot{T}\}_{n+1} \right\} \quad (3.39)$$

onde  $\{T\}$  é um vetor associado a uma variável qualquer que precisa ser integrada,  $\Delta t$  é o intervalo de tempo entre os passos de análise  $n$  e  $n + 1$  e  $\beta$  um escalar que define um método específico. Essa equação resulta da aplicação de diferenças finitas, do qual a obtenção da derivada se baseia em informações do passo anterior.

A Equação (3.39) pode ainda ser organizada e reescrita como

$$(1 - \beta) \{\dot{T}\}_n + \beta \{\dot{T}\}_{n+1} = \frac{\{T\}_{n+1} - \{T\}_n}{\Delta t} \quad (3.40)$$

Como a relação é linear para as variáveis associadas ao fluxo, admite-se que as matrizes  $[K_{MF}]$ ,  $[C_{FF}]$  e  $[K_{FF}]$  da Eq. (3.36) não variam no tempo. Dessa forma, em dois instantes de tempo diferentes, denotados por  $n$  e  $n + 1$ , essa equação continua válida, ou seja,

$$[K_{MF}]^T \{\dot{d}\}_n + [C_{FF}] \{\dot{p}\}_n + [K_{FF}] \{p\}_n = \{f_V\}_n \quad (3.41)$$

$$[K_{MF}]^T \{\dot{d}\}_{n+1} + [C_{FF}] \{\dot{p}\}_{n+1} + [K_{FF}] \{p\}_{n+1} = \{f_V\}_{n+1} \quad (3.42)$$

Multiplicando a primeira equação por  $(1 - \beta)$  e a segunda por  $(\beta)$ , e em seguida somando os termos de cada equação, tem-se que

$$\begin{aligned} (1 - \beta) [K_{MF}]^T \{\dot{d}\}_n + (1 - \beta) [C_{FF}] \{\dot{p}\}_n + (1 - \beta) [K_{FF}] \{p\}_n + \\ + \beta [K_{MF}]^T \{\dot{d}\}_{n+1} + \beta [C_{FF}] \{\dot{p}\}_{n+1} + \beta [K_{FF}] \{p\}_{n+1} \\ = (1 - \beta) \{f_V\}_n + \beta \{f_V\}_{n+1} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Combinando-se os termos da Eq. (3.43) e utilizando a Eq. (3.40), essa equação pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
& [K_{MF}]^T \left( \frac{\{d\}_{n+1} - \{d\}_n}{\Delta t} \right) + [C_{FF}] \left( \frac{\{p\}_{n+1} - \{p\}_n}{\Delta t} \right) + \\
& + [K_{FF}]((1 - \beta)\{p\}_n + \beta\{p\}_{n+1}) \\
& = (1 - \beta)\{f_V\}_n + \beta\{f_V\}_{n+1}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Isolando-se as informações de cada instante na equação tem-se

$$\begin{aligned}
& [K_{MF}]^T \{d\}_{n+1} + ([C_{FF}] + \Delta t \beta [K_{FF}]) \{p\}_{n+1} = \\
& [K_{MF}]^T \{d\}_n + ([C_{FF}] - \Delta t(1 - \beta)[K_{FF}]) \{p\}_n + \Delta t(1 - \beta)\{f_V\}_n \\
& + \Delta t \beta \{f_V\}_{n+1}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

A Equação (3.45) apresenta as informações no instante  $n + 1$  como função das informações no instante anterior. Admitindo que a solução do sistema formado pelas Eqs. (3.35) e (3.36) seja válido em qualquer instante de tempo, assume-se o instante  $n + 1$  como o espaço de tempo em que o sistema será resolvido. Assim, substitui-se a Eq. (3.36) pela equação discretizada (3.45), resultando em

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} [B]^T \{\sigma'\} d\Omega - [K_{MF}] \{p\}_{n+1} = \{f_M\} \\
& [K_{MF}]^T \{d\}_{n+1} + ([C_{FF}] + \Delta t \beta [K_{FF}]) \{p\}_{n+1} \\
& = [K_{MF}]^T \{d\}_n + ([C_{FF}] - \Delta t(1 - \beta)[K_{FF}]) \{p\}_n + \Delta t(1 - \beta)\{f_V\}_n + \Delta t \beta \{f_V\}_{n+1}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Para solução desse sistema de equações ainda é necessária a construção da matriz elastoplástica, que apresenta dependência do nível de tensão, e a consideração de condições iniciais relativas ao instante  $n$ .

### 3.5 Formulação da Matriz Elastoplástica

Considerando a natureza elastoplástica do material, tem-se um sistema de equações não lineares quando o nível de tensão mobiliza o critério de plastificação. Resolver esse sistema consiste em encontrar os deslocamentos e poropressão no instante  $n + 1$  que atendam as equações, conforme

$$\mathbf{f} = \begin{cases} f_1(\{d\}_{n+1}, \{p\}_{n+1}) \\ f_2(\{d\}_{n+1}, \{p\}_{n+1}) \end{cases} = \mathbf{0} \quad (3.48)$$

Admitindo a não linearidade envolvida, sua solução não é direta e a estratégia consiste em estimar  $\{d\}_{n+1}^*$  e  $\{p\}_{n+1}^*$  na tentativa de encontrar a solução. Porém, não existem garantias de que essas estimativas satisfaçam o sistema, ou seja,

$$\mathbf{f}(\{d\}_{n+1}^*, \{p\}_{n+1}^*) \neq \mathbf{0} \quad (3.49)$$

Para que a igualdade seja atendida, essas estimativas são ajustadas através dos vetores de correção  $\{\Delta d\}_{n+1}^*$  e  $\{\Delta p\}_{n+1}^*$ , de forma que

$$\mathbf{f}(\{d\}_{n+1}^* + \{\Delta d\}_{n+1}^*, \{p\}_{n+1}^* + \{\Delta p\}_{n+1}^*) = \mathbf{0} \quad (3.50)$$

Baseando-se na linearização da solução, utiliza-se o método iterativo de Newton-Raphson para solução do sistema de equações não lineares. Esse processo inicia com a expansão em Série de Taylor em torno de um ponto tentativa, conforme equação

$$\mathbf{f}(\{d\}_{n+1}^*, \{p\}_{n+1}^*) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \{d\}} \Big|_{\{d\}_{n+1}^*, \{p\}_{n+1}^*} \{\Delta d\}_{n+1}^* + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \{p\}} \Big|_{\{d\}_{n+1}^*, \{p\}_{n+1}^*} \{\Delta p\}_{n+1}^* + \dots = \mathbf{0} \quad (3.51)$$

Porém, determinar as correções a partir da Eq. (3.51) pode ser tão complicado quanto estimar os vetores  $\{d\}_{n+1}$  e  $\{p\}_{n+1}$  que atendam às Eqs. (3.48). Uma estratégia é truncar essa



série até os termos lineares em  $\Delta d_{n+1}^*$  e  $\Delta p_{n+1}^*$ . Fazendo isso, os vetores corrigidos  $\{d\}_{n+1}^* + \{\Delta d\}_{n+1}^*$  e  $\{p\}_{n+1}^* + \{\Delta p\}_{n+1}^*$ , mesmo não satisfazendo o sistema de equações não lineares, definem uma aproximação para a solução do mesmo.

Para atender o sistema de equações a partir da série truncada é necessário utilizar um processo iterativo ao longo de cada instante de tempo até que a convergência do sistema seja atingida. Portanto, a solução do sistema de equações não lineares (3.48) consiste em estimar uma solução inicial e, através de um processo iterativo, calcular vetores de correções até que a solução do sistema seja encontrada.

Utilizando o processo iterativo, a Eq. (3.51) pode ser escrita no formato

$$\begin{aligned} \frac{\partial\{f\}}{\partial\{d\}} \Big|_{\{d\}_{n+1}^{*(k-1)}, \{p\}_{n+1}^{*(k-1)}} \{\Delta d\}_{n+1}^{*(k)} + \frac{\partial\{f\}}{\partial\{p\}} \Big|_{\{d\}_{n+1}^{*(k-1)}, \{p\}_{n+1}^{*(k-1)}} \{\Delta p\}_{n+1}^{*(k)} \\ = - \left\{ f \left( \{d\}_{n+1}^{*(k-1)}, \{p\}_{n+1}^{*(k-1)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Nota-se que a cada solução do sistema serão encontradas as informações da iteração  $k$  com base em informações da iteração anterior,  $k - 1$ . Ao término de cada iteração faz-se a atualização dos deslocamentos e poropressões na forma

$$\{d\}_{n+1}^{*(k)} = \{d\}_{n+1}^{*(k-1)} + \{\Delta d\}_{n+1}^{*(k)} \quad (3.53)$$

$$\{p\}_{n+1}^{*(k)} = \{p\}_{n+1}^{*(k-1)} + \{\Delta p\}_{n+1}^{*(k)}$$

Para a primeira iteração é conveniente assumir

$$\{d\}_{n+1}^{*(0)} = \{d\}_n \quad (3.54)$$

$$\{p\}_{n+1}^{*(0)} = \{p\}_n$$

O processo iterativo termina quando o critério de convergência adotado é atingido. Em geral, os critérios estão baseados na pequena variação entre os vetores de correção (definido por uma tolerância) entre duas iterações consecutivas.

O sistema de equações que deve ser resolvido pode ser explicitado substituindo as Eqs. (3.46) e (3.47) na Eq. (3.52), o que resulta em

$$\frac{\partial}{\partial \{d\}} \left( \int_{\Omega} [B]^T \{\sigma'\}_{n+1}^{* (k)} d\Omega \right) \Bigg|_{\{d\}_{n+1}^{* (k-1)}} \{\Delta d\}_{n+1}^{* (k)} - [K_{MF}] \{\Delta p\}_{n+1}^{* (k)} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} &= - \int_{\Omega} [B]^T \{\sigma'\}_{n+1}^{* (k)} d\Omega + \{p\}_{n+1}^{* (k-1)} [K_{MF}] + \{f_M\} \\ & [K_{MF}]^T \{\Delta d\}_{n+1}^{* (k)} + ([C_{FF}] + \Delta t \beta [K_{FF}]) \{\Delta p\}_{n+1}^{* (k)} \\ &= -[K_{MF}]^T \{d\}_{n+1}^{* (k-1)} - ([C_{FF}] + \Delta t \beta [K_{FF}]) \{p\}_{n+1}^{* (k-1)} + \dots \quad (3.56) \\ &+ [K_{MF}]^T \{d\}_n^{* (k-1)} + ([C_{FF}] - \Delta t (1 - \beta) [K_{FF}]) \{p\}_n^{* (k-1)} + \dots \\ &+ \Delta t (1 - \beta) \{f_V\}_n^{(k-1)} + \Delta t \beta \{f_V\}_{n+1}^{(k-1)} \end{aligned}$$

Utilizando a regra da cadeia, o termo em que aparece o operador integral na Eq. (3.55) pode ser substituído pela matriz mecânica elastoplástica, conforme desenvolvimento

$$\int_{\Omega} [B]^T \frac{\partial \{\sigma'\}_{n+1}^{* (k)}}{\partial \{\varepsilon\}} \Bigg|_{\{\varepsilon\}_{n+1}^{* (k)}} \frac{\partial \{\varepsilon\}_{n+1}^{* (k)}}{\partial \{d\}} \Bigg|_{\{d\}_{n+1}^{* (k-1)}} d\Omega = \quad (3.57)$$

$$\int_{\Omega} [B]^T \frac{\partial \{\sigma'\}_{n+1}^{* (k)}}{\partial \{\varepsilon\}} \Bigg|_{\{\varepsilon\}_{n+1}^{* (k-1)}} [B] d\Omega = \int_{\Omega} [B]^T [D]_{n+1}^{ep (k)} [B] d\Omega = [K_{MM}]_{n+1}^{ep (k)}$$

Substituindo a Eq. (3.57) na Eq. (3.55) e organizando as equações resultantes em um formato matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} [K_{MM}]_{n+1}^{ep} & -[K_{MF}] \\ [K_{MF}]^T & [C_{FF}] + \Delta t \beta [K_{FF}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta d\}_{n+1}^{*(k)} \\ \{\Delta p\}_{n+1}^{*(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1n+1}^{(k,k-1)} \\ F_{2n,n+1}^{(k-1)} \end{Bmatrix} \quad (3.58)$$

onde

$$F_1 = - \int_{\Omega} [B]^T \{\sigma'\}_{n+1}^{*(k)} d\Omega + [K_{MF}] \{p\}_{n+1}^{*(k-1)} + \{f_M\} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} F_2 = & -[K_{MF}]^T \{d\}_{n+1}^{*(k-1)} - ([C_{FF}] + \Delta t \beta [K_{FF}]) \{p\}_{n+1}^{*(k-1)} + \dots \\ & + [K_{MF}]^T \{d\}_n^{*(k-1)} + ([C_{FF}] - \Delta t(1 - \beta)[K_{FF}]) \{p\}_n^{*(k-1)} + \dots \\ & + \Delta t(1 - \beta) \{f_V\}_n^{(k-1)} + \Delta t \beta \{f_V\}_{n+1}^{(k-1)} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Esse é o sistema de equações que deve ser resolvido para o problema acoplado fluxo-deformação considerando o comportamento elastoplástico. Dois espaços de tempo aparecem nas equações, um deles associado à discretização temporal, denotado por  $n$ , e o outro associado ao processo iterativo, denotado por  $k$ . As informações relativas ao instante de tempo anterior, ditas condições iniciais em cada passo de análise, são mantidas constantes ao longo do processo iterativo de cada passo e somente atualizadas quando a convergência é atingida.

No primeiro instante de integração das equações e na primeira iteração os valores de  $\{d\}_{n+1}^{*(k-1)}$  e  $\{p\}_{n+1}^{*(k-1)}$  podem ser estimados como idênticos aos vetores do instante anterior ( $\{d\}_n^{*(k-1)}$ ,  $\{p\}_n^{*(k-1)}$ ), denominados condições iniciais. Uma estratégia para determinação dessas condições é apresentada na seção seguinte.

### 3.6 Condições Iniciais para Deslocamento e Poropressão

O estado de tensão inicial é importante em análise geotécnica porque sua magnitude é usualmente da mesma ordem das tensões induzidas pela aplicação do carregamento. Para modelagem de materiais não lineares, as condições iniciais são fundamentais, pois em qualquer fase do carregamento a rigidez irá sempre depender no nível de tensão. Isso é

evidente em modelos elastoplásticos, onde o critério de escoamento é definido em termos de tensões (NAYLOR, 1987).

A geração das condições iniciais em modelagem numérica é um das etapas mais importantes da simulação. Esse estágio é responsável pelo estado de tensões iniciais e pode influenciar toda a análise. No caso de relações constitutivas elastoplásticas, o modelo pode iniciar a análise já em estado plástico dependendo dos níveis iniciais de tensão.

Atualmente existem trabalhos dedicados à geração dessas condições iniciais. Em algumas situações, existe um programa de análise e outro programa totalmente dedicado à geração das condições iniciais. Alguns programas simulam o processo de formação das rochas, com camadas sendo depositadas ao longo de tempo, apenas com o objetivo de gerar um estado inicial de tensões equilibrado.

Diferentes estratégias podem ser utilizadas para considerar um estado inicial de tensões na análise. A mais simples é iniciar o modelo considerando esse estado nulo e o simulador precisará iterar algumas vezes para atingir a convergência nos primeiros passos. Outra estratégia é receber esse estado de tensões como *input*. Nesse caso, esse estágio inicial pode ser o resultado de outro programa. É muito comum em análises de tensões em maciços, por exemplo, considerar inicialmente apenas forças de gravidade para geração de um estado de tensões iniciais auto-equilibrado. Neste trabalho são consideradas duas estratégias.

#### ▪ **Geração das condições iniciais com função rampa**

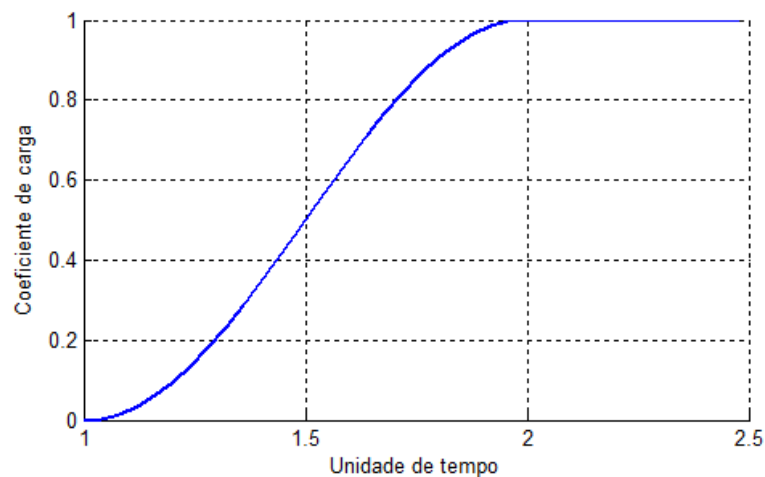
Esta abordagem é mais moderna e consiste em iniciar com estado de tensão nulo e usar uma função de carregamento tipo “rampa” para aplicar gradativamente o carregamento nos instantes iniciais da análise.

Para uso da função rampa é necessário apenas definir os instantes inicial ( $t_i$ ) e final ( $t_f$ ) que essa função deve atuar e o intervalo do fator ( $v_f, v_i$ ) que ela deve iniciar e concluir. O fator  $f$  para cada instante é definido como

$$f(t) = \frac{(vf - vi)}{2 \cos\left(\pi \frac{(t - ti)}{(tf - ti)} - 1\right)} + \frac{(vi + vf)}{2} \quad (3.61)$$

Para cada instante de tempo  $t$  durante a análise essa função é consultada e retorna um escalar dentro do intervalo informado pelo usuário, retornando o limite inferior e superior para valores de  $t$  que extrapolam esse intervalo. Esse fator é multiplicado por todas as forças nodais no modelo e funciona como um coeficiente de carga. Como exemplo, na Figura 3.4 é ilustrado o uso da função rampa entre os instantes 0 e 2 segundos com coeficiente multiplicador de carga variando entre 0 e 1. Isso indica que o carregamento total será aplicado somente depois de 2 segundos de simulação.

**Figura 3.4 – Função rampa utilizada para aplicação do carregamento.**



Fonte: Autor, 2012.

Essa estratégia pode ser utilizada em substituição à estratégia de solução do problema não drenado, principalmente quando a teoria da plasticidade é utilizada. Caso contrário, seria necessário fazer a consideração das equações de plasticidade ainda na solução do problema não drenado, exceto para os casos ainda em regime elástico. Outra grande vantagem é que essa estratégia oferece maior garantia de estabilidade numérica no início da análise, sendo mais recomendada.

▪ **Geração das condições iniciais resolvendo um problema não drenado**

Nesse caso, admite-se inicialmente um sistema saturado sob condições não drenadas. Esse problema é resolvido como se fosse um problema puramente mecânico, porém com uma correção na matriz constitutiva para levar em consideração a presença do fluido. Em seguida, os resultados obtidos desse problema são utilizados para encontrar o estado inicial de poropressão. Essa abordagem é descrita por Naylor (1987) e é a mesma utilizada nos trabalhos de Ferreira (1996), Silva (2005) e Fernandes (2009).

Em termos de tensões totais, as tensões e deformações para o caso elástico-linear estão relacionadas pela matriz constitutiva  $[D]$  conforme

$$[\sigma] = [D][\varepsilon] \quad (3.62)$$

Pelo princípio das tensões efetivas, a tensão total pode ser decomposta em duas parcelas, uma referente às tensões efetivas e outra em relação às pressões de poro. Admite-se que cada uma das tensões se relaciona com as deformações através de uma matriz constitutiva específica, ou seja,

$$[\sigma'] = [D'][\varepsilon] \quad (3.63)$$

$$[p] = [D_f][\varepsilon] \quad (3.64)$$

Substituindo-se as Eqs. (3.63) e (3.64) em (3.62) tem-se

$$[D'][\varepsilon] - \{\alpha\}[D_f][\varepsilon] = [D][\varepsilon] \quad (3.65)$$

e, dessa forma, a matriz constitutiva em termos de tensões totais passa a ser

$$[D] = [D'] - \{\alpha\}[D_f] \quad (3.66)$$

A matriz constitutiva que relaciona as poropressões e deformações pode ser obtida pela Eq. (2.48) admitindo a situação não drenada do meio. Como não é permitida a saída da água, não existe variação da quantidade de água, ou seja,

$$\zeta = \alpha \varepsilon_{kk} + \frac{1}{Q} p = 0 \quad (3.67)$$

$$p = -\alpha Q \varepsilon_{kk} \quad (3.68)$$

Em termos matriciais, a Eq. (3.68) pode ser expressa como

$$[p] = -\{\alpha\}Q\{m\}^T[\varepsilon] \quad (3.69)$$

onde  $\{m\}$  é um vetor que faz o ajuste para considerar apenas as tensões normais.

Como  $[D_f]$  foi admitida ser a matriz constitutiva entre as poropressões e as deformações, pode-se explicitar essa matriz observando a Eq. (3.69), conforme

$$[D_f] = -\{\alpha\}Q\{m\}^T \quad (3.70)$$

Substituindo a Eq. (3.70) em (3.66) tem-se

$$[D] = [D'] + \alpha^2 Q \{m\} \{m\}^T \quad (3.71)$$

ou seja, a matriz constitutiva em termos de tensões totais é obtida somando a matriz constitutiva efetiva com uma contribuição devido à existência do fluido.

A geração da condição inicial é feita seguindo as etapas:

- 1) Resolve o problema puramente mecânico usando a Eq. (3.71) para cálculo da matriz constitutiva. Como resultado tem-se os deslocamentos iniciais e, conseqüentemente, as deformações.
- 2) As deformações encontradas na etapa anterior são utilizadas para geração da poropressão inicial através da Eq. (3.69).

Pelas expressões apresentadas percebe-se que um meio poroelástico sob condição não drenada apresenta uma maior rigidez que um meio elástico. Isso significa que os deslocamentos no caso poroelástico não drenado serão menores comparados aos deslocamentos do meio elástico com o mesmo carregamento.

Por fim, registra-se que o problema mecânico resolvido para geração das condições iniciais apresenta os mesmos carregamentos mecânicos utilizados na análise transiente do problema poromecânico, e que esse carregamento é aplicado totalmente no início da análise. Essa estratégia de geração das condições iniciais é pouco usual nos dias atuais quando é possível gerar esse estado através de um carregamento crescente no tempo (estratégia da função rampa).

### **3.7 Acoplamento entre o Problema Mecânico e de Fluxo**

Os fenômenos que ocorrem na natureza não acontecem isoladamente dentro de sistemas bem definidos. Na realidade, resultam da interação simultânea de diversos problemas, porém é prática comum estudar os fenômenos como problemas isolados. Essas hipóteses são assumidas muitas vezes pela pequena contribuição que um determinado fenômeno causa no outro ou em função da complexidade envolvida na modelagem multifísica. Contudo, quando se pretende analisar os fenômenos de forma acoplada, equações que relacionam esses fenômenos devem estar presentes na formulação. Dadvand (2007) classifica o acoplamento em função do nível de interação entre os fenômenos, podendo ocorrer de forma fraca ou forte.



**Acoplamento Fraco** – É também denominado de acoplamento em um único sentido, pois apenas um dos fenômenos depende do outro. Um exemplo desse tipo de acoplamento acontece em uma análise termo-mecânica sob regime elástico, envolvendo as variáveis temperatura e deslocamento. Nesse tipo de problema o deslocamento do corpo sofre alterações devido ao gradiente térmico, mas a variação na temperatura devido ao deslocamento pode ser desprezada.

**Acoplamento Forte** – Acontece quando o acoplamento ocorre nos dois sentidos. A principal característica está associada à dependência existente entre os fenômenos envolvidos. A consideração da não linearidade física em uma análise termo-mecânica, por exemplo, requer que o acoplamento seja forte. Isso é necessário porque as deformações plásticas no material resultam em um aquecimento que provocam alterações na temperatura, influenciando os deslocamentos.

Nas equações formuladas pela teoria de Biot é possível identificar acoplamentos nos dois sentidos: *acoplamento do sólido para o fluido* (quando uma alteração na aplicação da tensão produz uma alteração na pressão do fluido) e *acoplamento fluido para o sólido* (quando uma alteração na pressão do fluido produz uma alteração no volume do material). Pela classificação inicial apresentada, o acoplamento proposto por Biot pode ser considerado forte. Outra classificação está associada à estratégia utilizada para resolver o problema acoplado.

### 3.7.1 Estratégias para Solução de Problemas Acoplados

Diferentes estratégias podem ser utilizadas para resolver um problema acoplado. Settari e Walter (1999) apresentaram quatro estratégias para tratar esses problemas.

- **Desacoplado** – Nesta estratégia, resolve-se o problema de fluxo totalmente desacoplado do problema mecânico. Os resultados do problema de fluxo, como a poropressão no tempo, são utilizados para obter a resposta transiente do problema mecânico (deslocamentos e deformações no tempo). Um exemplo dessa estratégia para o caso unidimensional seria utilizar os resultados de poropressão através da teoria de Terzaghi e corrigir a tensão efetiva em um problema de elasticidade.

- **Acoplamento Explícito** – Nesta abordagem são utilizados dois simuladores independentes (fluxo e mecânico) que são executados defasados de  $\Delta t$  (incremento de tempo). A ideia central consiste em encontrar as respostas de um dos sistemas e enviar ao outro simulador, que calcula as incógnitas no seu domínio e retorna esses resultados para o simulador inicial, continuando esse ciclo de troca de informações no tempo. Esse caso é considerado um caso especial do acoplamento iterativo.
- **Acoplamento Iterativo** – Neste tipo de acoplamento também são utilizados dois simuladores. Contudo, diferentemente da estratégia explícita, a cada passo de tempo, são feitas iterações até garantir a convergência da solução. Assim existem duas iterações: iterações no tempo e iterações de convergência. Respeitando essas imposições, a solução iterativa pode retornar resultados idênticos aos da estratégia totalmente acoplada.
- **Totalmente Acoplado** – Nesta estratégia de acoplamento o sistema de equações que envolve os dois problemas é resolvido em um único passo. No caso elástico, uma única matriz é construída e não existem iterações de convergência para cada incremento de tempo. No caso elastoplástico, por exemplo, mesmo sendo totalmente acoplado, é necessário fazer iterações de convergência dentro de cada incremento de tempo.

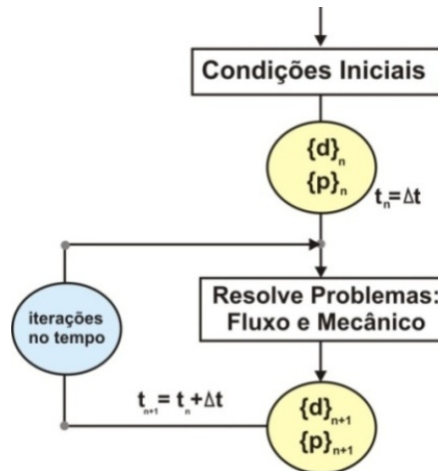
As estratégias discutidas por Settari e Walter (1999) estavam associadas a simuladores de reservatórios de petróleo e no caso do problema de fluxo envolviam parâmetros como saturação, permeabilidade, etc. No presente trabalho o acoplamento entre o problema de fluxo e o problema mecânico acontece apenas através das tensões atuantes (tensões efetivas e poropressões). Neste trabalho é utilizada apenas a estratégia totalmente acoplada.

### **Totalmente Acoplado**

Este tipo de acoplamento é também denominado de acoplamento implícito, e pode ser considerada a estratégia de acoplamento mais forte por combinar as equações diferenciais de cada problema e resolvê-las simultaneamente. Quando o modelo constitutivo adotado é elástico, o sistema de equações é resolvido uma única vez por incremento de tempo. Quando o

modelo é elastoplástico, por exemplo, para cada passo de tempo é necessário iterar até que a convergência seja atingida. A Figura 3.5 ilustra um fluxograma das etapas desta estratégia.

**Figura 3.5 – Fluxograma para a estratégia totalmente acoplada.**



Fonte: Autor, 2012.

Nota-se que a solução do problema é realizada em apenas um módulo e a iteração ilustrada na figura se refere à iteração no tempo. Algumas vantagens e desvantagens dessa estratégia são apresentadas por Pereira (2007) e são descritas na Tabela 3.2.

**Tabela 3.2 - Vantagens e desvantagens da estratégia totalmente acoplada.**

Vantagens	Desvantagens
<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Apenas uma matriz global é construída para resolver o sistema de equações;</li> <li>▪ Não são necessárias iterações entre os modelos mecânico e de fluxo;</li> <li>▪ Essa estratégia permite resolver problemas com alto grau de acoplamento.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Essa abordagem acarreta em um alto custo computacional relacionado a espaço de memória ocupado;</li> <li>▪ Dificuldade quando se necessita alterar o modelo de fluxo;</li> <li>▪ Em geral utiliza-se a mesma malha.</li> </ul>

Fonte: Autor, 2012 adaptado de PEREIRA, 2007.

A próxima seção apresenta detalhes sobre a implementação computacional realizada. É apresentado o diagrama UML atual do PORO e o fluxo principal do programa para o caso de uma simulação poro-elastoplástica.

### 3.8 Implementação Computacional

Nesta seção são descritos em maiores detalhes os aspectos de implementação computacional deste trabalho. São apresentados, por exemplo, o diagrama UML da versão atual do sistema PORO com a incorporação das novas classes. Além disso, é ilustrado um pseudo-código indicando o fluxo do programa para o caso poro-elastoplástico.

Como foi descrito no início deste trabalho, o sistema PORO teve início com o trabalho de Sena (2008), foi expandido em seguida por Fernandes (2009) e sofreu mais uma expansão com a conclusão deste trabalho. Desde a versão inicial, o código fonte foi escrito na linguagem C++, baseando-se em Programação Orientada a Objetos (POO).

A Programação Orientada a Objetos é um paradigma de programação muito utilizado no desenvolvimento de sistemas computacionais devido suas características de modularidade e reusabilidade. Nesse modelo de programação utilizam-se os conceitos de classes, objetos, atributos, métodos, herança, etc. Um objeto é uma instância de uma classe. Ele pode possuir atributos e métodos que definem seu comportamento.

Outro conceito de POO que merece destaque é a herança. Esse mecanismo permite que uma classe menor, denominada subclasse, possa estender uma classe maior, denominada superclasse, aproveitando seus métodos e atributos. Isso pode ser observado no diagrama UML (*Unified Modeling Language*) que será apresentado.

Um diagrama UML é uma forma de apresentar a estrutura de um código indicando como as classes estão relacionadas. Com base nesse diagrama é possível identificar as relações de herança e dependência entre as classes.

#### 3.8.1 Diagrama UML do PORO

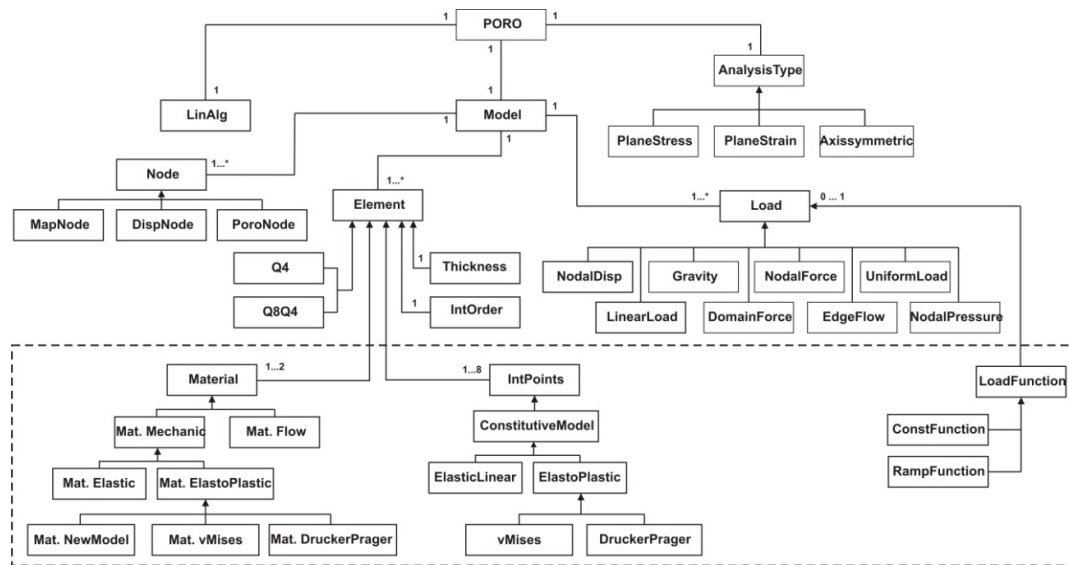
Na Figura 3.6 são apresentadas as principais classes da nova versão do PORO. A região tracejada destaca as classes que foram criadas e incorporadas.

As grandes alterações e contribuições estão na criação de uma classe material e uma classe para os modelos constitutivos (que está associada a uma classe de ponto de integração). Essas classes são atributos de um objeto do tipo `Element`.

Com a possibilidade de simulações elastoplásticas do ponto de vista mecânico, cada ponto de integração deve possuir o mesmo conjunto de parâmetros e esse conjunto deve ser único para cada ponto. No caso de plasticidade, por exemplo, é possível que apenas alguns pontos de integração do mesmo elemento ultrapassem o limite elástico, pois isso depende do estado de tensão que cada ponto está submetido.

Dessa forma, ao criar um objeto do tipo Element, são criados objetos do tipo IntPoints (Pontos de integração). Cada objeto desse tipo possui um atributo que é um objeto da classe ConstitutiveModel, que representa a abstração para o modelo constitutivo. O mesmo raciocínio pode ser empregado para a classe Material, que faz a abstração para o tipo de material associado ao elemento. Toda essa estruturação de classes está baseada na organização das classes do programa de análise estrutural FEMOOP (MARTHA *et al.*, 1996).

**Figura 3.6 – Diagrama UML do PORO.**



Fonte: Autor, 2012.

Cria-se também uma classe para controlar o carregamento aplicado, seja de forças ou de fluxo. Para essa superclasse são estendidas as subclasses para função constante e função rampa. Com isso é possível iniciar a simulação e indicar o instante de tempo que o carregamento deve atuar e qual deve ser a sua intensidade.

Com essa nova estrutura torna-se possível a criação de outros modelos constitutivos e seu rápido acoplamento na estrutura geral do programa. Para criação de um novo modelo constitutivo elastoplástico, por exemplo, é necessário apenas estender mais uma subclasse de `ElastoPlastic`. A Figura 3.7 ilustra os principais métodos dessa classe.

**Figura 3.7 – Principais métodos da classe `ElastoPlastic`.**

```
class ElastoPlastic : public cModel
{
    ClosestPoint();
    ModifyConstitutiveMatrix();
    ComputeMatrixA();
    CalculaInvariantesJ2();
    CalculaHydroStress();

    YieldingCriterion() = 0;
    ComputeElastoplasticParameters() = 0;
};
```

Fonte: Autor, 2012.

Quando um estado de tensão conduz a um ponto fora da superfície de plastificação é necessário fazer esse ponto retornar à superfície. Computacionalmente, esse retorno é feito através de uma estratégia computacional e que na maioria das vezes desencadeia um processo iterativo. Existem diversas estratégias para fazer essa correção e retorno à superfície de escoamento, e neste trabalho adotou-se a estratégia `ClosestPoint`, descrita em seções anteriores.

Os dois últimos métodos que aparecem na figura recebem uma denominação especial na programação orientada a objetos. Eles são denominados métodos virtuais puros e isso indica que qualquer subclasse estendida da classe `ElastoPlastic` deve obrigatoriamente possuir esses métodos sendo os demais automaticamente herdados da superclasse. Os métodos virtuais é o que diferencia cada modelo constitutivo.

Em `YieldingCriterion` tem-se o método de escoamento que o modelo constitutivo utiliza. Esse método é responsável por avaliar se um determinado estado de tensão ultrapassou o limite elástico. O método `ComputeElastoplasticParameters` é o responsável por calcular o vetor de fluxo do modelo, quantificando as alterações que serão realizadas na matriz constitutiva de cada elemento.

### 3.8.2 Fluxo geral de uma simulação poro-elastoplástica

Com a possibilidade de simular fenômenos acoplados e com diferentes modelos constitutivos, essa nova versão do sistema permite a simulação independente do problema puramente mecânico (elástico e elastoplástico) e do problema acoplado poro-mecânico (elástico e elastoplástico). Essa indicação é feita no arquivo de entrada quando o usuário escolhe os problemas que devem ser simulados e o modelo constitutivo que deve ser adotado. Essa funcionalidade facilitou a validação dos módulos individuais utilizando problemas cuja solução é facilmente encontrada.

O fluxo principal da simulação poro-elastoplástica difere substancialmente do caso puramente elástico. No caso elástico, é construída uma única matriz de rigidez e as iterações que ocorrem estão relacionadas ao problema transiente. Uma parcela do vetor de constantes depende do incremento de tempo utilizado e das informações do instante anterior.

No caso poro-elastoplástico existe o incremento no tempo, e para cada incremento também existe um segundo processo iterativo devido a não linearidade do problema. Esse segundo processo iterativo ocorre até o modelo convergir ou quando o número máximo de iterações é atingido. Quando o número máximo de iterações é atingido, o simulador interrompe a análise e é necessário alterar os parâmetros para uma nova tentativa. Contudo, uma estratégia simples de ser implementada é uma adaptação dinâmica do incremento. Quando o limite de iterações for atingido, o incremento é reduzido e essa etapa da análise reiniciada. Esse processo se repete até que a convergência seja obtida.

Contudo, na montagem da matriz de rigidez do problema mecânico, cada ponto de integração é submetido a uma análise para verificar se houve plastificação e quando isso ocorre, mais um processo iterativo local é desencadeado, dessa vez associado ao algoritmo `ClosestPoint`. Dessa forma, para cada instante de tempo a matriz de rigidez é novamente calculada, elevando substancialmente o tempo de processamento, quando comparado ao caso poro-elástico. A Figura 3.8 descreve de a sequência dos métodos na simulação poro-elastoplástica.

**Figura 3.8 – Fluxo principal para o caso poro-elastoplástico.**

```

//Carrega matrizes que não são alterados no tempo
Load_Kmf_in_Kglb();

//Iteração nos steps
Loop para os diferentes incrementos de tempo -----

//Monta matriz que depende do incremento de tempo
Load_Cff_and_Kff_in_Kglb(theta,dt);

//Iteração nos incrementos de tempo simulação
Loop nos incrementos de tempo real da simulação -----

//Iteração de convergência devido a linearização
Processo Iterativo devido a expansão em série de Taylor -----

//Calcula carregamento com base na função carregamento
LoadForceVectorTimeDependent(t);
ComputeFlowVectorForInitialConditions(u0,p0,theta,dt,t);

//Calcula vetor de forças internas
MountIntForceVector();

//Calcula matriz tangente
ComputeMechanicTangentMatrix();

//Contribuição devido a expansão em Taylor
ComputeForceAndFlowVectorOnTime(u1,p1,dt);

//Resolve o sistema de equações
MKL_SolveLinearSystem(Nglb,Kglb,Fglb,dxglb);

//Verifica erro
ComputeError()

//Atualiza informações iniciais
Update_Disp_Poro()

//Verifica convergência
VerifyConvergence()

//Atualiza alpha e Ep0 nos pontos de integração
UpdateIntegrationPoints();

```

Fonte: Autor, 2012.



## 4 VERIFICAÇÕES E DISCUSSÕES

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos obtidos com a versão do sistema PORO após as modificações que tornaram possível o uso de modelos elastoplásticos. A incorporação de novas classes para essas considerações acarretaram em diversas mudanças no código-fonte.

Para avaliar os resultados obtidos com a nova versão do sistema PORO, são realizados testes com exemplos presentes na literatura, entre os quais alguns mais simples e outros mais complexos. A nova reestruturação de classes torna possível a simulação desacoplada de alguns problemas, como comentado anteriormente. Isso significa que usando o mesmo arquivo de entrada é possível realizar uma simulação elástica, elastoplástica, poro-elástica e poro-elastoplástica.

Apenas o algoritmo principal que conduz a solução do sistema difere em cada módulo, sendo o restante do código compartilhado nas demais simulações. Para verificação da implementação é utilizada a solução analítica para a coluna poro-elástica, a solução numérica poro-elastoplástica obtida com um *software* comercial Abaqus (arquivo de entrada descrito no Anexo B), uma solução numérica elastoplástica puramente mecânica obtida com o *software* FEMOOP (MARTHA *et al.*, 1996) e a solução do problema bidimensional de Schiffman para o caso elástico.

### 4.1 Coluna Poro-Elástica

O exemplo da coluna poro-elástica representa uma simplificação da teoria de Biot para o caso unidimensional, conduzindo aos mesmos resultados obtidos com a Teoria de Terzaghi. O modelo é caracterizado por uma coluna totalmente saturada com lados e base impermeáveis. Um carregamento uniformemente distribuído é aplicado no topo da coluna e à medida que o excesso de poropressão é dissipado, o esqueleto mecânico da coluna vai absorvendo as tensões.

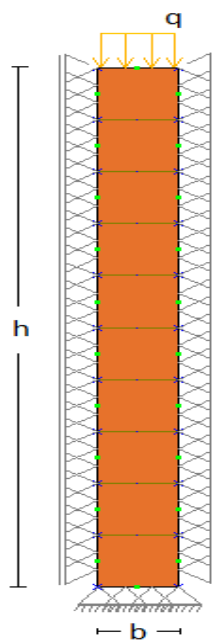
Para esta simulação consideram-se a análise em estado plano de deformação (EPD) e uma malha de elementos finitos com 10 elementos paramétricos regularmente distribuídos e 53 nós. Para cada elemento, oito nós são utilizados para interpolação do campo de

deslocamentos e apenas quatro para poropressão. Esses elementos podem ser denominados Q8Q4 e essa estratégia garante a estabilidade na solução do sistema de equações.

A combinação da mesma base de interpolação para poropressão e deslocamento irá produzir oscilação na poropressão e instabilidade numérica, pois viola a condição de estabilidade de Babuska-Brezzi. Essa condição sugere que, usando o método de Galerkin, diferentes ordens de interpolação sejam utilizadas para poropressão e deslocamento (WAN, 2002).

A Figura 4.1 ilustra a malha e as condições de contorno utilizadas e a Tabela 4.1 apresenta os valores utilizados na modelagem da coluna.

**Figura 4.1 – Malha utilizada e condições de contorno utilizadas.**



#### CONDIÇÕES DE CONTORNO:

- A. Na superfície superior da camada, tem-se uma tensão normal  $q$  de compressão e poropressão nula, caracterizando uma superfície permeável.
- B. Deslocamento horizontal restrito e fluxo nulo nas faces laterais, indicando superfície impermeável.
- C. Deslocamentos vertical e horizontal restritos e fluxo nulo na base, indicando superfície impermeável.
- D. O carregamento é aplicado através de uma função rampa, sendo o carregamento totalmente aplicado em 0,01 segundos
- E. Coluna saturada e fluido incompressível.

Fonte: Autor - Adaptada de FERNANDES, 2009.

**Tabela 4.1 – Valores utilizados para a coluna.**

CONSTANTE	VALOR
$h$	1,0 m
$b$	0,1 m
$q$	10 MPa
$E$	$10^4$ MPa
$\nu$	0,0
$1/Q$	$10^{-20}$
$\alpha$	1,0
$k$	$10^{-4} m^2/MPa.s$
$\Delta t$	0,01 s

Fonte: Autor, 2012.

A solução analítica para o recalque no topo da coluna e a variação do excesso de poropressão na base da coluna é descrita no trabalho de Siqueira (1995) e também apresentada e discutida por Fernandes (2009). Para uma unidade de tempo  $t$ , tem-se a poropressão variando na forma

$$\bar{u}_0 = \frac{2p_0}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\sin(\beta_n h)}{\beta_n} e^{-c\beta_n^2 t} \cos[\beta_n (h - z)] \right\} \quad (4.1)$$

onde  $z$  representa a distância vertical do ponto de aplicação do carregamento até o ponto de interesse e  $p_0$  a poropressão inicial. Os coeficientes  $c$  e  $\beta_n$  são definidos como

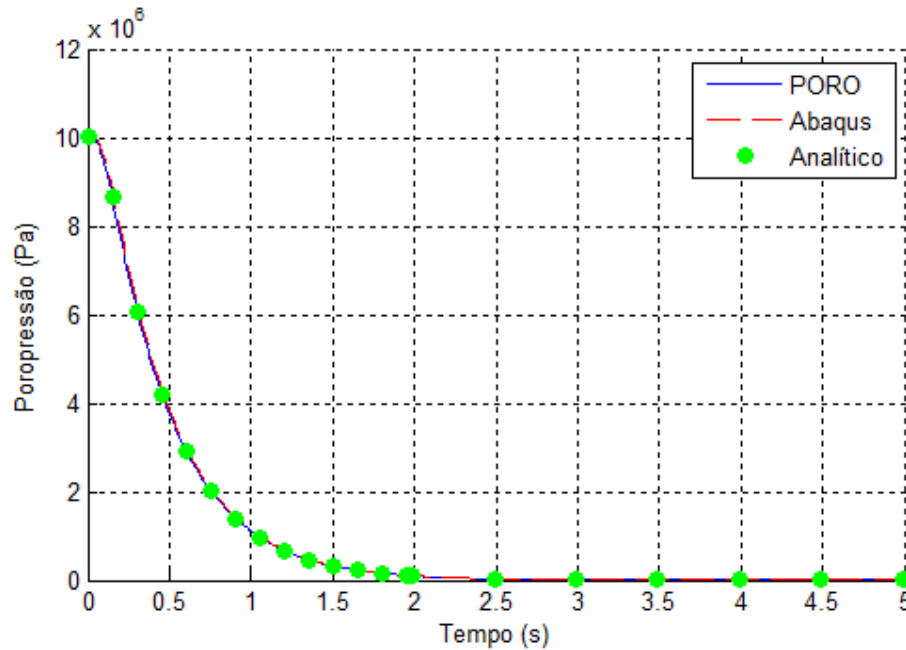
$$c = \frac{k}{\frac{\alpha^2(1-2\nu)}{2G(1-\nu)} + \frac{1}{Q}} \quad (4.2)$$

$$\beta_n = \frac{(2n+1)\pi}{2h} \quad (4.3)$$

A solução para o recalque no topo da coluna obedece a equação

$$\bar{p} = \frac{1 - 2\nu}{2G(1 - \nu)} \left\{ qh - \alpha \frac{2p_0}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2} e^{-c\beta_n^2 t} \right\} \quad (4.4)$$

Figura 4.2 – Variação da poropressão na base da coluna.



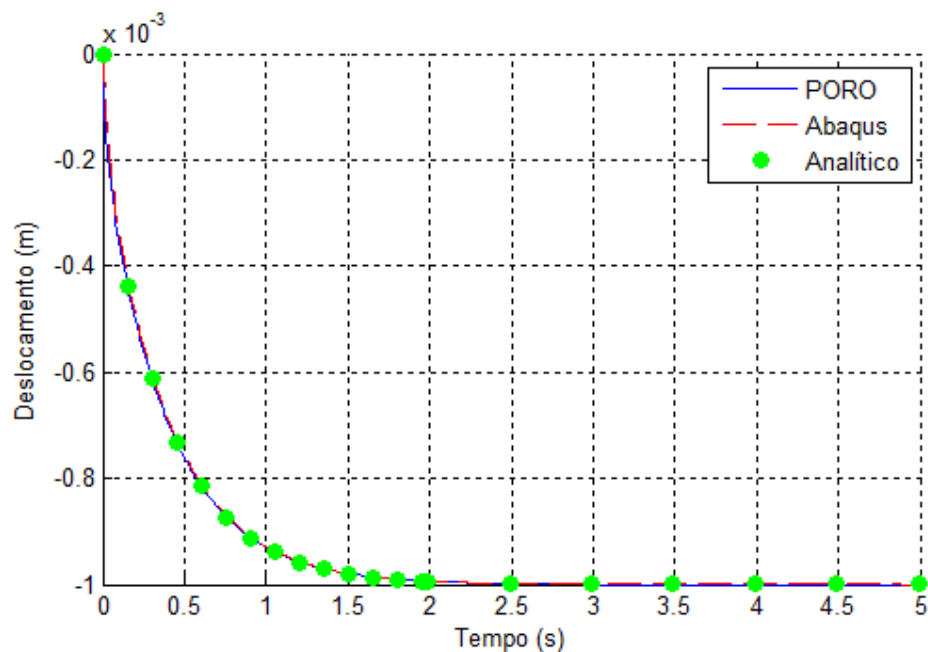
Fonte: Autor, 2012.

Na Figura 4.2 é apresentada a variação da poropressão na base da coluna através da solução analítica e de simulações realizadas com a versão do sistema PORO modificada e com o *software* de elementos finitos Abaqus. Nota-se uma boa aderência das curvas obtidas através de simulações em relação à curva obtida analiticamente.

Inicialmente, todo o excesso de tensão devido ao carregamento é transferido para a poropressão, provocando o excesso de poropressão na coluna. Com a saída do fluido através dos vazios, gradativamente esse excesso de poropressão é transferido para o esqueleto mecânico da coluna, aumentando a tensão efetiva. Isso ocorre até que todo o excesso de poropressão seja dissipado e, depois desse instante, apenas o esqueleto mecânico é responsável por absorver todas as tensões. Depois de toda essa transferência de tensões, a coluna tem um comportamento puramente mecânico e a resposta obtida para o deslocamento no topo deve ser a mesma obtida para o caso elástico.

A Figura 4.3 apresenta os resultados obtidos para o deslocamento (recalque) no topo da coluna. De maneira análoga à história anterior, tem-se o aumento gradativo do deslocamento com a dissipação do excesso de poropressão. Como o problema é unidimensional e possui coeficiente de Poisson nulo, o deslocamento final para a coluna elástica pode ser encontrado de forma analítica, resultando em  $1\text{ mm}$ , o mesmo obtido com a simulação poro-elástica no PORO e Abaqus.

**Figura 4.3 – Deslocamento vertical (recalque) na coluna.**



Fonte: Autor, 2012.

#### 4.1.1 Estratégias para solução da condição inicial

Na condição anterior, no instante inicial, toda a tensão provocada pelo carregamento é transferida inicialmente para a poropressão e só depois transferida para o esqueleto mecânico com a saída do fluido. Esse comportamento ocorre em função dos parâmetros utilizados e do modo de aplicação do carregamento. Neste trabalho três estratégias para aplicação do carregamento são avaliadas.

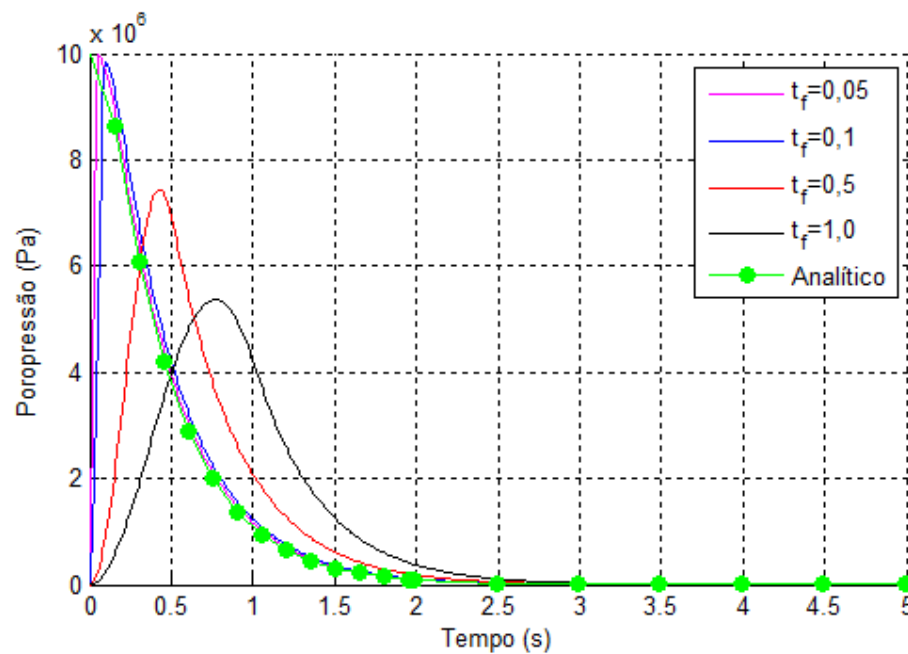
**Impondo deslocamento e poropressão nula no instante inicial** – Neste caso, os valores iniciais dos deslocamentos e poropressões nodais são admitidos nulos e no instante seguinte são atualizados em função do carregamento aplicado.

**Solução do problema não drenado** – Neste caso, os problemas mecânico e de fluxo são resolvidos separadamente. A matriz de rigidez do mecânico é alterada para considerar a presença do fluido e os resultados obtidos com a solução desse problema mecânico são utilizados para gerar uma distribuição inicial de poropressão.

**Utilização de uma função rampa para o carregamento** – Nesta estratégia nenhum problema é resolvido inicialmente. Apenas o carregamento é aplicado lentamente baseando-se em uma função cosseno tipo rampa.

A Figura 4.4 apresenta os resultados obtidos para o caso da coluna poro-elástica utilizando a função rampa com diferentes intervalos de aplicação.

**Figura 4.4 – Função rampa utilizada para aplicação do carregamento.**



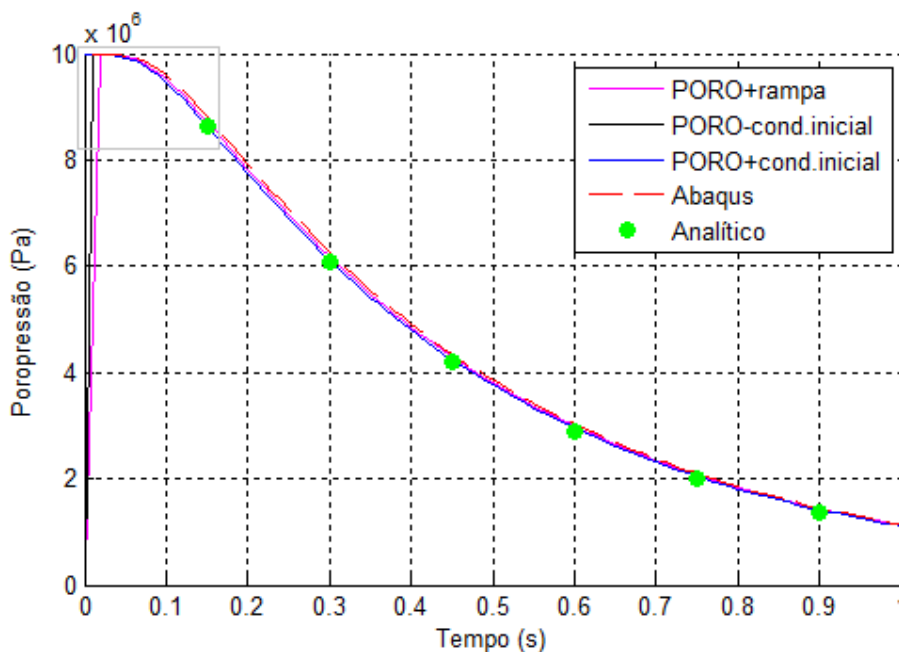
Fonte: Autor, 2012.

No mesmo gráfico é apresentada a curva obtida com a solução analítica para facilitar a comparação. Nota-se que todas as curvas tendem ao mesmo resultado, mas nos instantes iniciais a curva pode apresentar grande diferença, sendo essa diferença proporcional ao intervalo de tempo utilizado. Uma maneira de aproximar as curvas utilizando a função rampa

é prescrever um pequeno intervalo de aplicação da função carregamento. Isso pode ser observado quando se utiliza o intervalo de tempo de aplicação de 0,05 s.

Como discutido anteriormente, diferentes estratégias podem ser utilizadas para geração da condição inicial. O gráfico apresentado na Figura 4.5 descreve a variação da poropressão na base da coluna ao longo do tempo através de diferentes estratégias para consideração da condição inicial. A curva descrita como *PORO+rampa* representa o resultado obtido utilizando a função rampa, *PORO-cond.inicial* prescreve como nulo o deslocamento e poropressão inicial, *PORO+cond.inicial* faz uso da solução do problema não drenado, a curva descrita como *Abaqus* é obtida resolvendo um problema inicial poro-elástico com fluxo zero induzindo a geração de uma poropressão inicial e por fim, a solução *Analítica*, assume que toda a tensão devido o carregamento é convertida em excesso de poropressão no instante inicial.

**Figura 4.5 – Poropressão para diferentes estratégias de condição inicial.**

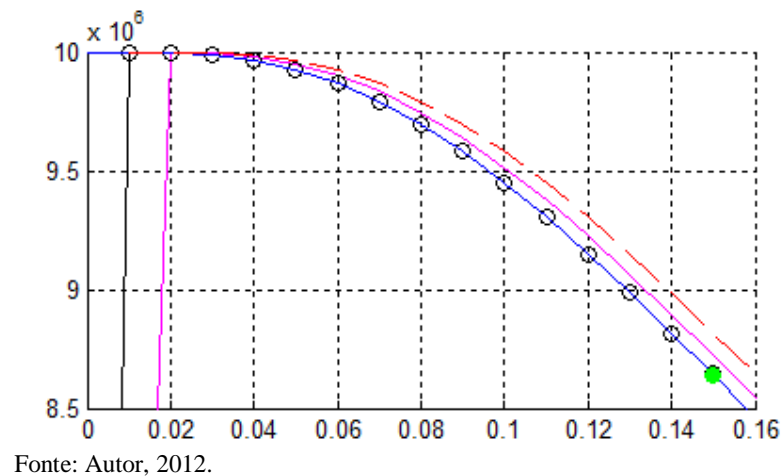


Fonte: Autor, 2012.

Para o caso da coluna, nota-se uma pequena diferença entre as curvas quando as diferentes estratégias são utilizadas. Mas ao analisar esse gráfico em maiores detalhes, sobretudo nos instantes iniciais, nota-se a influência da condição inicial para o problema. A

Figura 4.6 apresenta em destaque os instantes iniciais, sendo possível notar que nos casos da função rampa e prescrição nula das variáveis de estado, a poropressão é inicialmente nula e somente nos instantes seguintes é atualizada com os resultados da solução do sistema em função do nível de carregamento aplicado.

**Figura 4.6 – Poropressão inicial para diferentes estratégias de condição inicial.**



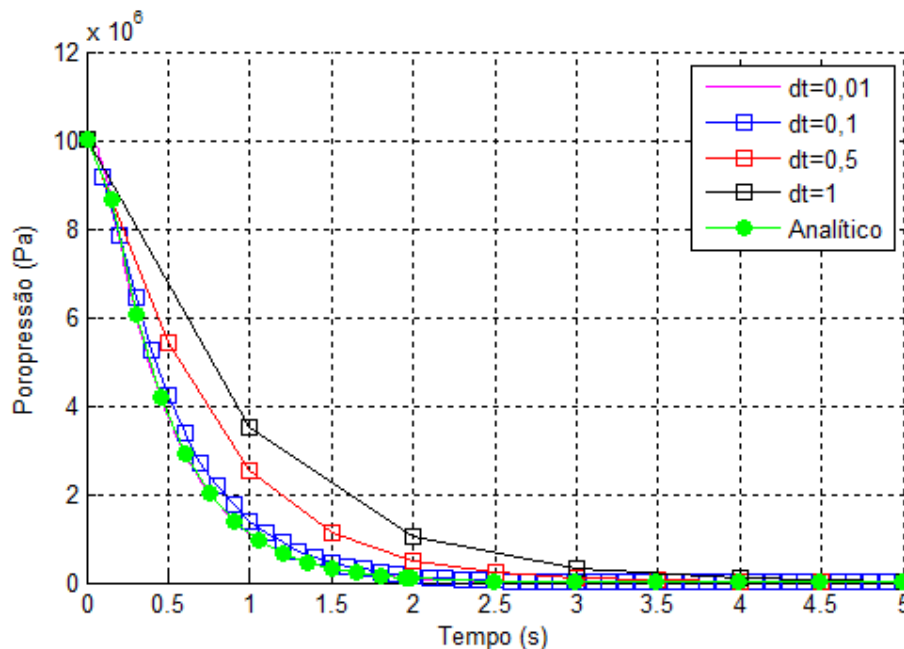
#### 4.1.2 Influência do incremento de tempo

Além da condição inicial, o incremento de tempo utilizado para integração ( $dt$ ) apresenta grande influência na curva do histórico de resposta. A

Figura 4.7 apresenta os resultados para a poropressão na base da coluna ao longo do tempo utilizando diferentes incrementos de tempo. Entre as simulações realizadas, a curva que apresenta maior aderência com o resultado analítico é obtida com  $dt = 0,01$  e a curva que mais se afastou é obtida com intervalos de tempo maiores. É importante destacar que a definição do  $dt$  impacta diretamente no tempo de processamento.



Figura 4.7 – Variação da poropressão na base da coluna para diferentes  $dt$ .



Fonte: Autor, 2012.

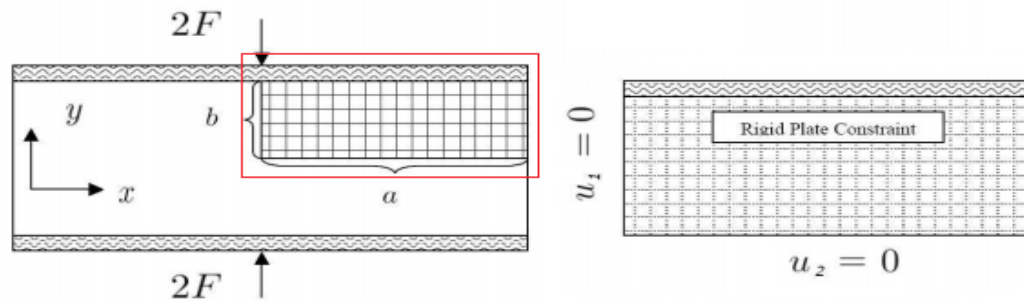
Nos casos apresentados para discussão acerca da influência da condição inicial e do intervalo de tempo utilizado, são ilustrados os resultados da variação da poropressão na base da coluna. Resultados similares são obtidos para o deslocamento no topo (recalque).

## 4.2 Exemplo bidimensional de Mandel

Nesta seção é apresentado o exemplo bidimensional de Mandel para o caso elástico como mais uma estratégia de verificação do código. Além de simular o fluxo bidimensional, este exemplo é importante porque possui solução analítica apresentada por Mandel em 1953 e descrita no trabalho de Phillips e Wheeler (2007).

O modelo consiste em um meio com extensão  $2a$  na direção  $x$ ,  $2b$  na direção  $y$  e infinita na direção  $z$ , conforme é apresentado na Figura 4.8. O meio é comprimido entre duas placas rígidas e no instante  $t = 0$  uma força de magnitude  $2F$  é aplicada no topo e na base do conjunto. Assume-se que as placas são rígidas e com isso os deslocamentos verticais no topo e na base são iguais. Admite-se ainda que em  $x = 0$  e  $x = 2a$  a superfície é drenada e que o excesso de poropressão é nulo nesses contornos e que o deslocamento é restrito nas direções  $x$  e  $y$  em  $x = 0$  e  $y = 0$ .

**Figura 4.8 – Modelo bidimensional de Mandel.**



Fonte: PHILLIPS; WHEELER, 2007.

O problema é analisado em estado plano de deformação e a malha é discretizada em elementos uniformes totalizando 400 elementos e 1281 nós. Devido à dupla simetria do problema, e para reduzir o esforço computacional, apenas  $\frac{1}{4}$  do modelo é simulado. Os parâmetros utilizados são resumidos na Tabela 4.2.

**Tabela 4.2 – Valores utilizados para o problema de Mandel.**

CONSTANTE	VALOR
$G$	760 MPa
$\nu$	0,2
$\nu_u$	0,5
$\kappa$	$10^{-10}$ darcy
$\alpha$	0,92
$1/Q$	$10^{-20}$
$B$	1,0

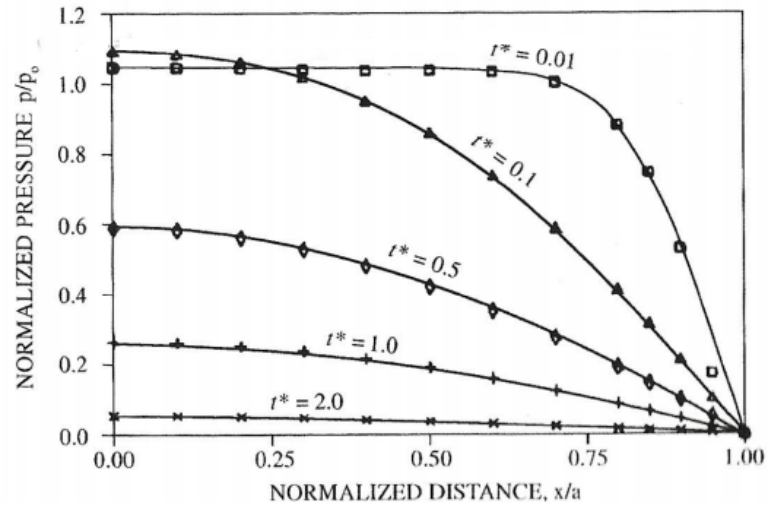
Fonte: Autor, 2012.

A Figura 4.9 apresenta os resultados analíticos para diferentes instantes de tempo para o problema de Mandel, apresentados por Wang (2000). Nota-se que nos instantes iniciais o excesso de poropressão é superior à poropressão induzida pela tensão aplicada, o que demonstra a importância da análise acoplada dos fenômenos fluxo e deformação.

Os resultados numéricos obtidos com o PORO são apresentados na Figura 4.10, onde se observa uma boa concordância entre as respostas. As pequenas diferenças encontradas

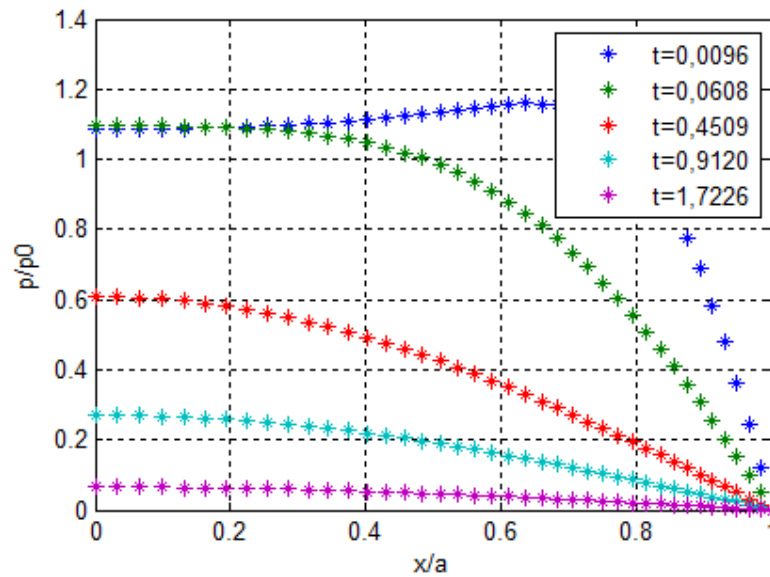
podem ser creditadas à estratégia de integração temporal utilizada e ao grau de refinamento da malha de elementos finitos.

**Figura 4.9 – Solução analítica para o exemplo de Mandel.**



Fonte: Wang, 2000.

**Figura 4.10 – Resultado numérico obtido com o PORO.**



Fonte: Autor, 2012.

### 4.3 Coluna Poro-Elastoplástica

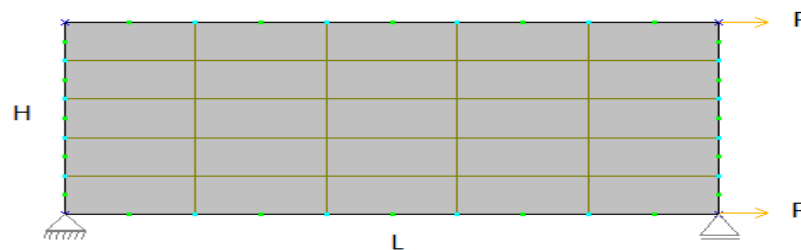
Nesta seção são apresentados os resultados obtidos para a coluna considerando a teoria da plasticidade. Para fins de comparação, utiliza-se a mesma coluna do caso poro-elástico e dessa forma é possível comparar diretamente a influência que a consideração do modelo elastoplástico pode apresentar.

Com a possibilidade de analisar os problemas separadamente, antes de fazer a verificação do caso poro-elastoplástico, são realizados testes com o módulo puramente mecânico elastoplástico e os resultados comparados com os resultados de outros *softwares* de elementos finitos, tais como Abaqus e FEMOOP.

Inicialmente é simulado o caso de uma malha com um único elemento e submetido a um esforço de tração uniforme. Os resultados são idênticos aos apresentados por outras implementações de elementos finitos e também com o resultado analítico. Neste caso, a solução analítica é facilmente calculada pois o problema é simplificado para o caso unidimensional e apenas com esforços axiais.

A etapa seguinte é a verificação de um caso bidimensional de uma barra submetida a cargas concentradas. O problema é admitido em estado plano de deformações e é comparado com os resultados do *software* FEMOOP. Neste exemplo, a barra é considerada elastoplástica com os modelos de von Mises e Drucker-Prager. A Figura 4.11 ilustra a malha de elementos finitos utilizada e a Tabela 4.3 apresenta os valores dos parâmetros que são utilizados.

**Figura 4.11 – Modelo numérico de uma barra submetida a esforços de tração.**



Fonte: Autor, 2012.

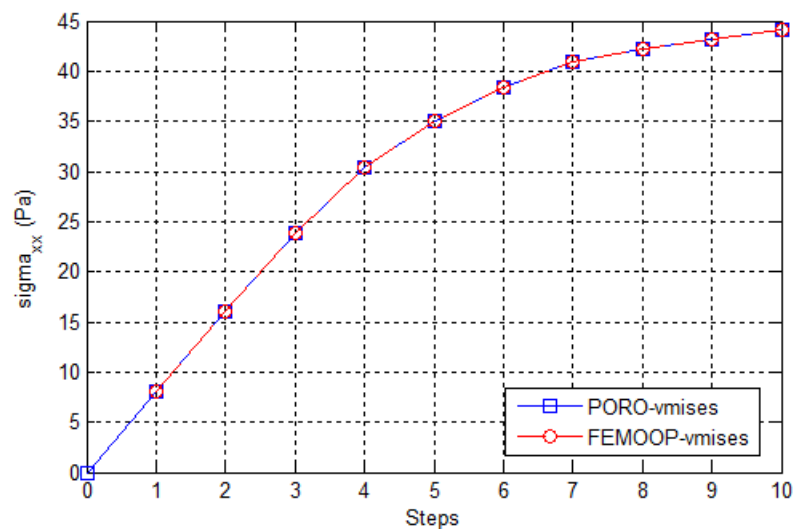
Tabela 4.3 – Valores utilizados para a barra submetida a um esforço de tração.

CONSTANTE	VALOR
$F$	50 N
$L$	10 m
$H$ (altura)	4 m
$Q8$	integração 8x8
$E$	200000 Pa
$\nu$	0,0
$\Delta u$	0,00025m
<b>von Mises</b>	
$\sigma_y$	50 Pa
$H$	20000 Pa
<b>Drucker-Prager</b>	
$c$	20
$\varphi$	38°
$H$	0

Fonte: Autor, 2012.

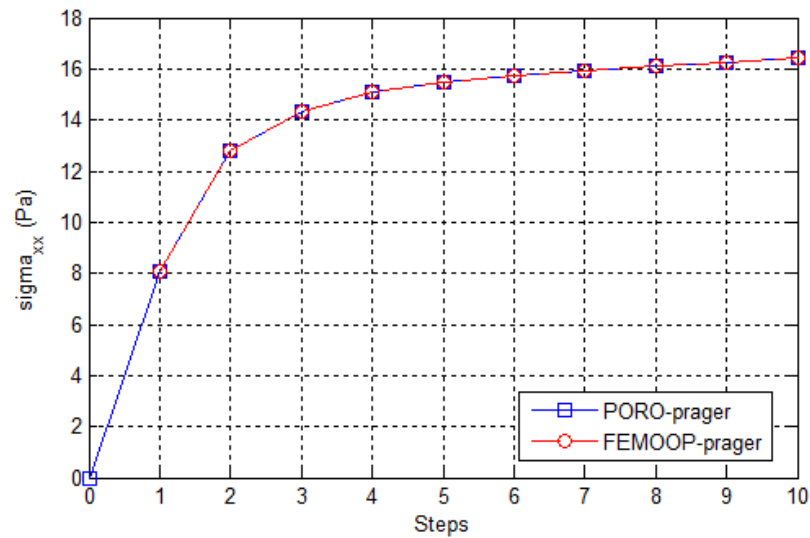
A Figura 4.12 apresenta a variação de  $\sigma_{xx}$  ao longo dos incrementos de deslocamento considerando o modelo de von Mises com endurecimento isotrópico. O ponto em observação é o da extremidade superior direita do modelo. Na Figura 4.13 é apresentado os resultados considerando o modelo de Drucker-Prager sem endurecimento.

Figura 4.12 – Variação de considerando o modelo de von Mises.



Fonte: Autor, 2012.

Figura 4.13 – Variação de  $\sigma_{xx}$  considerando o modelo de Drucker-Prager.

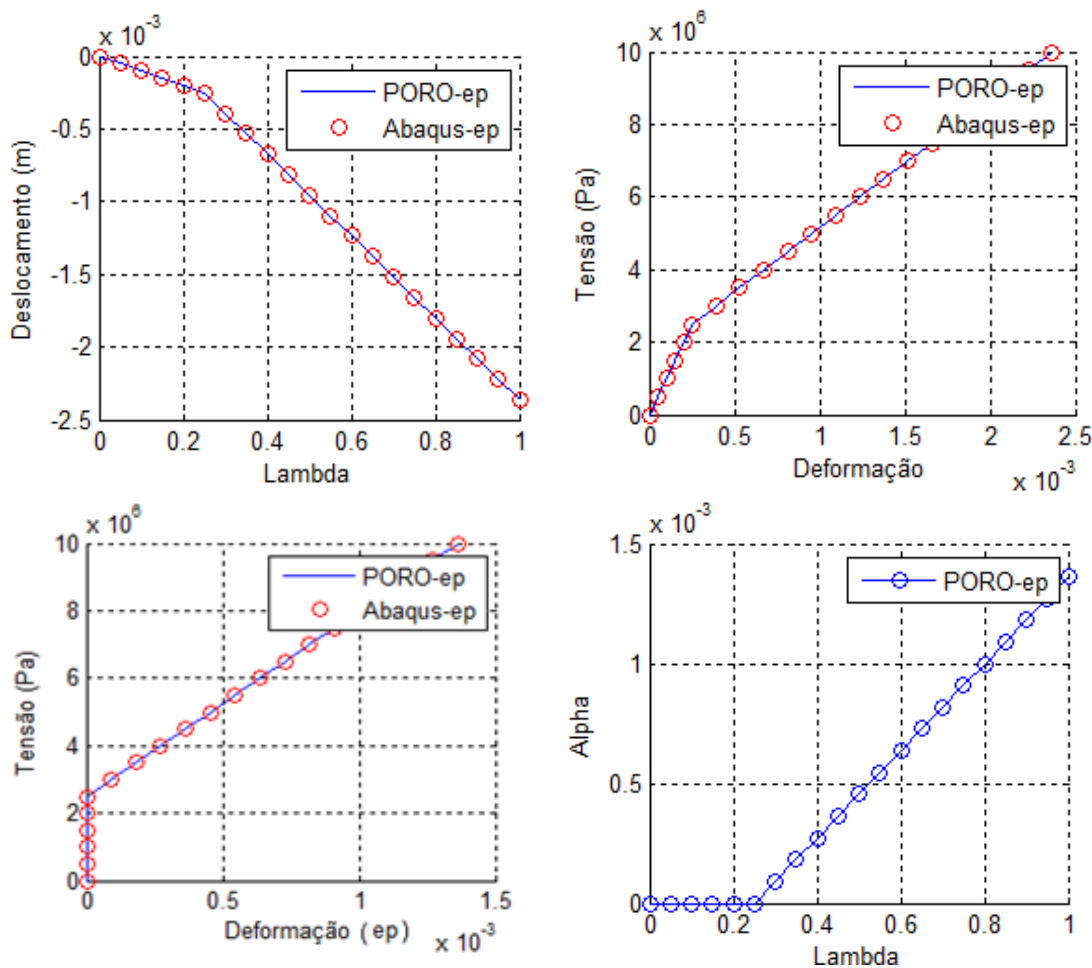


Fonte: Autor, 2012.

Outro exemplo considerando o problema puramente mecânico elastoplástico é analisado. A mesma coluna do exemplo inicial é simulada considerando apenas o problema mecânico elasto-plástico. Um indicador para verificação da implementação é analisar os deslocamentos finais da coluna, que devem ser os mesmos obtidos com o caso poro-elastoplástico da coluna, pois quando o excesso de poropressão for dissipado o problema se torna apenas mecânico.

Neste caso é considerado o modelo de von Mises com  $\sigma_y = 2,5 \times 10^6$  e  $H = 5 \times 10^8$ . Os outros parâmetros que caracterizam a coluna podem ser encontrados na Tabela 4.1. A Figura 4.14 apresenta os resultados obtidos para deslocamento, tensão, deformação e parâmetro de endurecimento obtidos com o PORO e com o *software* Abaqus. A estratégia baseada no controle de carregamento é utilizada neste exemplo e são realizados 20 incrementos até que todo carregamento esteja aplicado.

Figura 4.14 – Resultados para o caso da coluna elastoplástica.



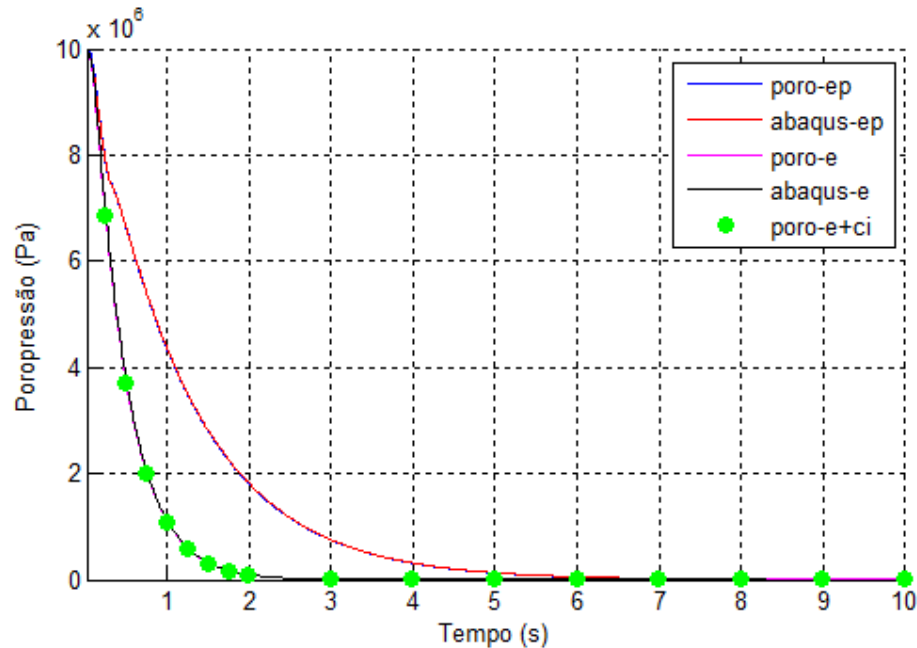
Fonte: Autor, 2012.

Após a conclusão dos testes com o módulo mecânico isoladamente, são feitas simulações considerando a coluna poro-elastoplástica. A Figura 4.15 apresenta os resultados poro-elásticos e poro-elastoplásticos para a variação da poropressão na base da coluna. Em todos os casos, nota-se que a poropressão inicialmente assume toda a tensão provocada pelo carregamento e ao longo do tempo esse excesso de poropressão é convertido em tensões efetivas até que todo o excesso seja nulo.

No gráfico são apresentados os resultados obtidos para a coluna poro-elástica e poro-elastoplástica com o PORO e Abaqus, além da solução poro-elástica analítica. Como pode ser observado, no caso elastoplástico, o excesso de poropressão é transferido mais lentamente que no caso elástico, sendo coerente com os parâmetros do modelo. Quando o limite de

escoamento é atingido, a matriz de rigidez no caso poro-elastoplástico é alterada, tornando-se mais flexível. Em relação ao deslocamento, quando comparam-se os dois casos em um mesmo instante de tempo, observam-se maiores deslocamentos para o caso poro-elastoplástico, causados pela redução de rigidez da estrutura com a plastificação de algumas regiões.

**Figura 4.15 –Poropressão na base da coluna poro-elastoplástica.**

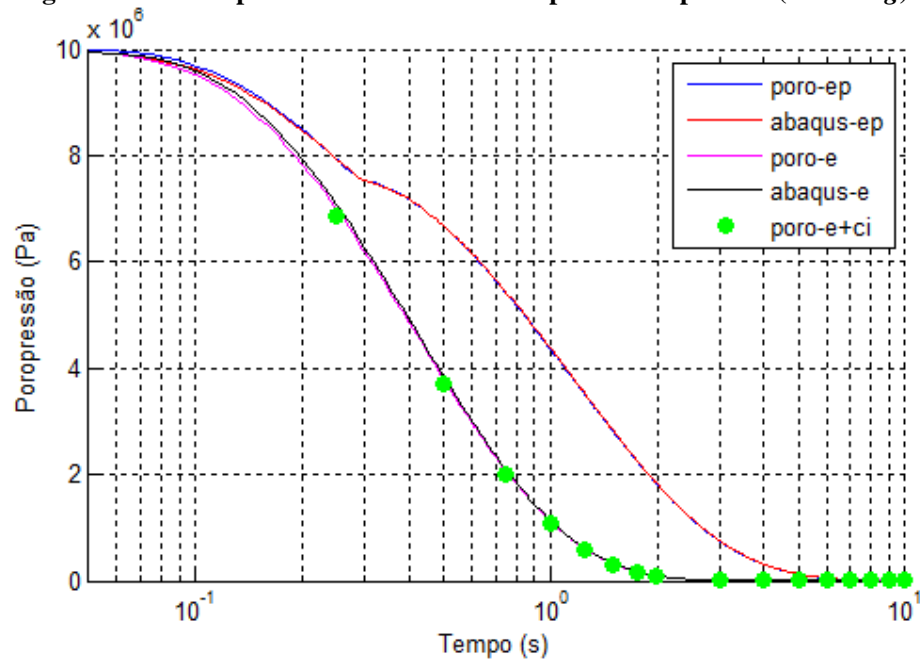


Fonte: Autor, 2012.

Nesses resultados apresentados, fez-se uso da função rampa para aplicação lenta e não instantânea do carregamento. Assim, utilizam-se pequenos incrementos de tempo no início da simulação e depois esses incrementos são ampliados. Essa possibilidade de definir intervalos de tempo com incrementos diferentes é incorporada nesta versão do PORO e possibilita reduzir o tempo em algumas simulações. Na Figura 4.16 e na Figura 4.17 são apresentados os resultados com o tempo na escala logarítmica para poropressão e deslocamento.

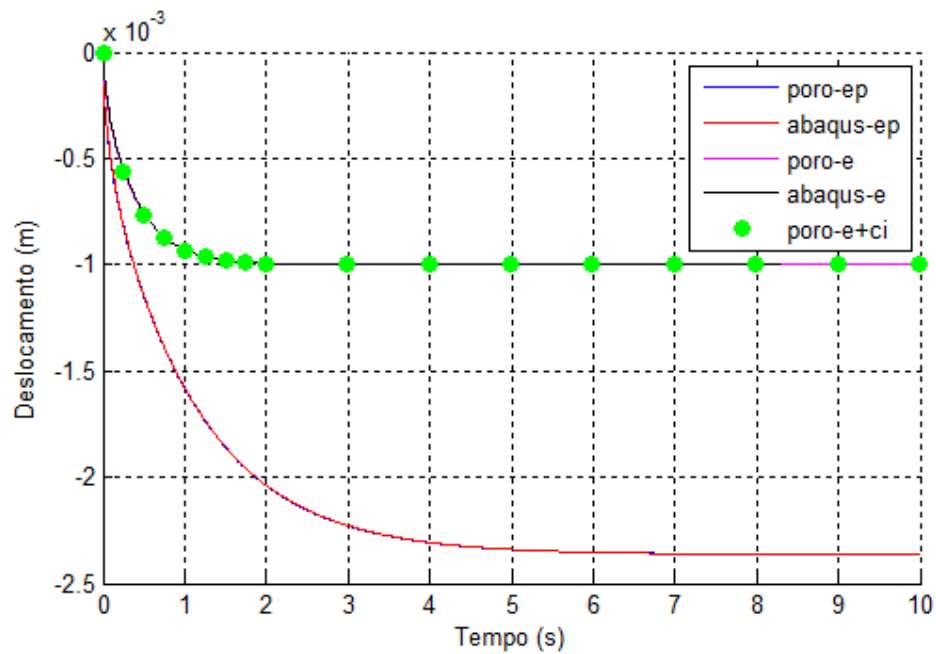


Figura 4.16 – Poropressão na base da coluna poro-elastoplástica (escala log).



Fonte: Autor, 2012.

Figura 4.17 – Deslocamento no topo da coluna poro-elastoplástica.



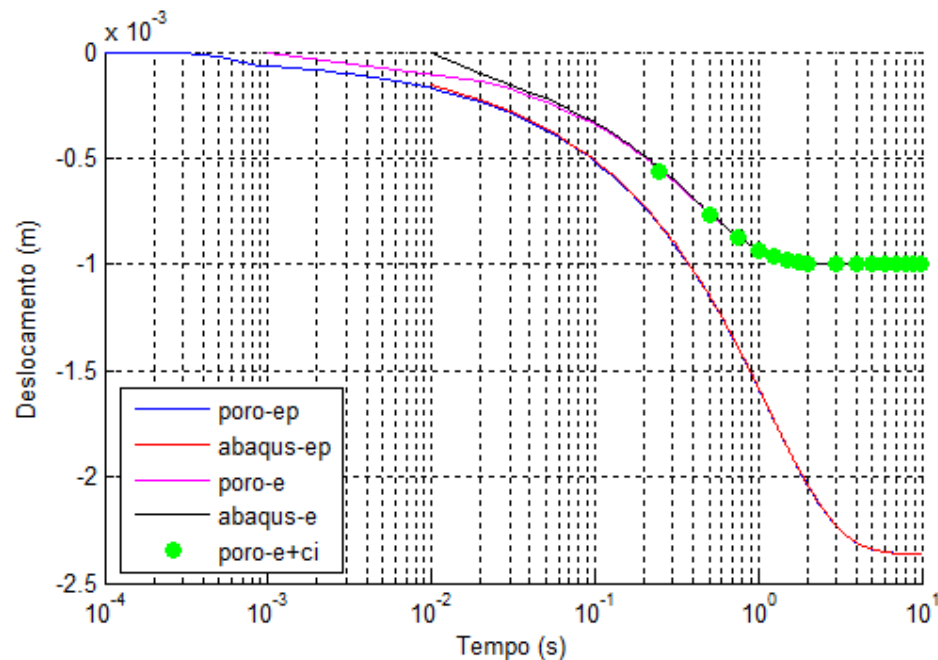
Fonte: Autor, 2012.

A Figura 4.18 apresenta os resultados para o deslocamento na escala logarítmica. Nesse gráfico é possível observar a discordância dos resultados no início da simulação. Essas

diferenças estão associadas à estratégia de condição inicial utilizada e o tamanho dos incrementos de tempo no início da simulação.

Para o caso elástico é utilizado  $dt = 0,01$  s constante ao longo de toda a simulação. Para o caso elastoplástico o incremento inicial é de 0,0001 s devido a função carregamento que é utilizada. No instante 0,001 s todo o carregamento é aplicado e em seguida o incremento sofre variações até ficar constante até o final da análise em 0,1 s.

**Figura 4.18 – Deslocamento no topo da coluna poro-elastoplástica (escala log).**

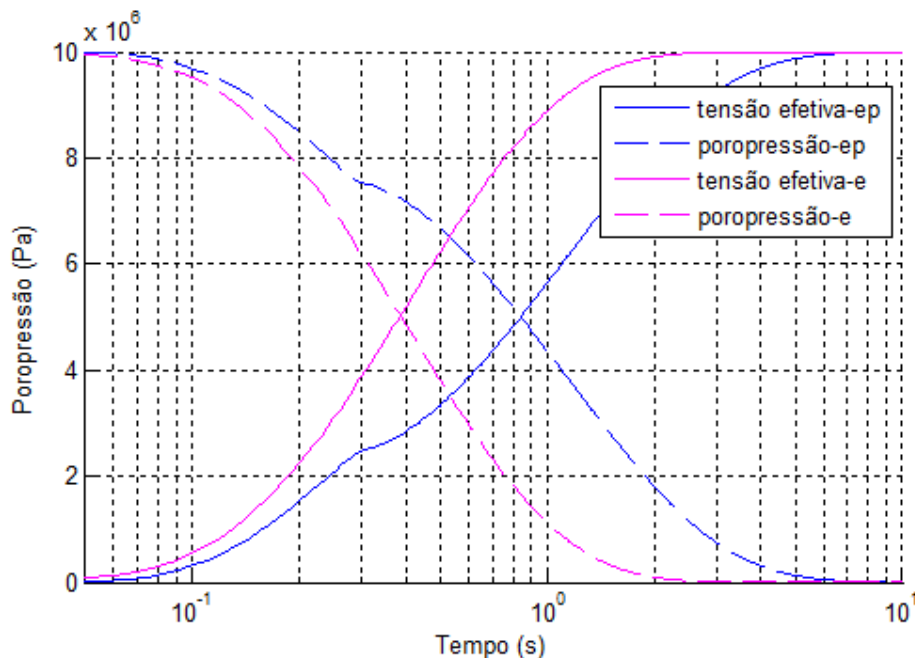


Fonte: Autor, 2012.

É importante destacar a influência da permeabilidade na simulação. Esse parâmetro controla o fluxo no topo da coluna e quanto menor seu valor, mais lento é o processo de adensamento. No caso da coluna, o valor adotado para permeabilidade é flexível ( $10^{-4} \text{ m}^2/\text{MPa}\cdot\text{s}$ ) e permite uma rápida dissipação do excesso de poropressão. Mas esse valor é dependente das condições de compactação do solo, índice de vazios, etc. No presente caso, não é considerada a variação da permeabilidade ao longo da simulação. Mas essa consideração é recomendável porque à medida que a coluna deforma, o índice de vazios é reduzido e a permeabilidade é reduzida.

Um dos princípios apresentados por Terzaghi em sua dedução é a conservação das tensões totais. Na formulação, Terzaghi assumiu que todo o excesso de poropressão era convertido em tensão efetiva, de tal modo que as tensões totais permanecem inalteradas. A Figura 4.19 apresenta a evolução da tensão efetiva ( $\sigma_{yy}$ ) e poropressão na base da coluna poro-elástica e elastoplástica com o tempo em escala log, em que é possível observar a conservação da tensão total.

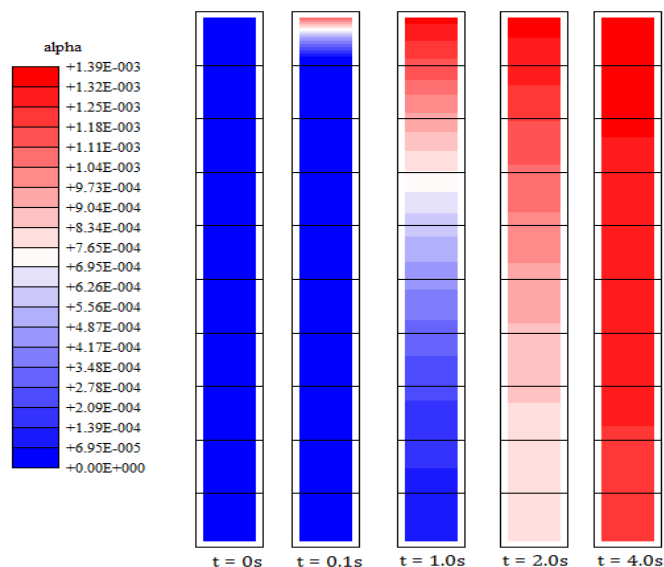
**Figura 4.19 – Tensão efetiva e poropressão na base da coluna.**



Fonte: Autor, 2012.

Quando o excesso de poropressão é transferido para a coluna e transformado em aumento de tensão efetiva, as tensões começam a aumentar no sentido do topo para a base. Quando esse aumento conduz a tensões maiores que os limites de escoamento, tem-se início o processo de plastificação dos pontos de integração nesse mesmo sentido. Isso pode ser observado na Figura 4.20, em que pode ser observada a evolução do parâmetro de endurecimento ( $\alpha$ ) ao longo do tempo. Esse parâmetro quando nulo indica que o regime é elástico e quando não nulo indica plastificação. Pode-se observar que todos os pontos de integração atingem o limite de escoamento.

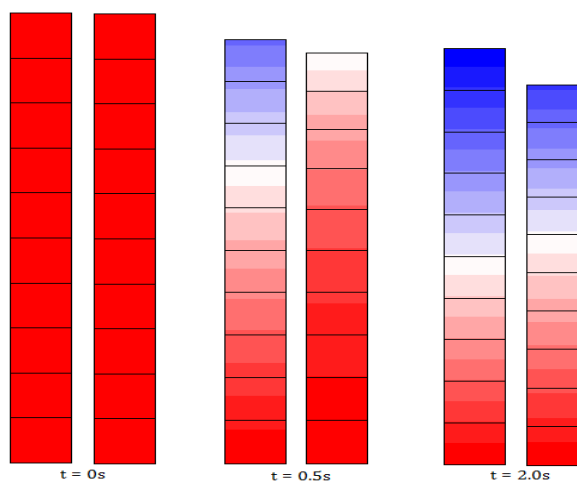
**Figura 4.20 – Evolução do parâmetro de endurecimento ao longo do tempo.**



Fonte: Autor, 2012.

Com a plastificação dos pontos de integração, tem-se uma matriz de rigidez mais flexível e isso resulta em maiores deslocamentos. A Figura 4.21 ilustra a configuração deformada da coluna em alguns instantes de tempo para o caso poro-elástico e poro-elastoplástico, sendo possível observar a diferença de deslocamento em cada instante.

**Figura 4.21 – Deslocamento vertical do topo da coluna.**

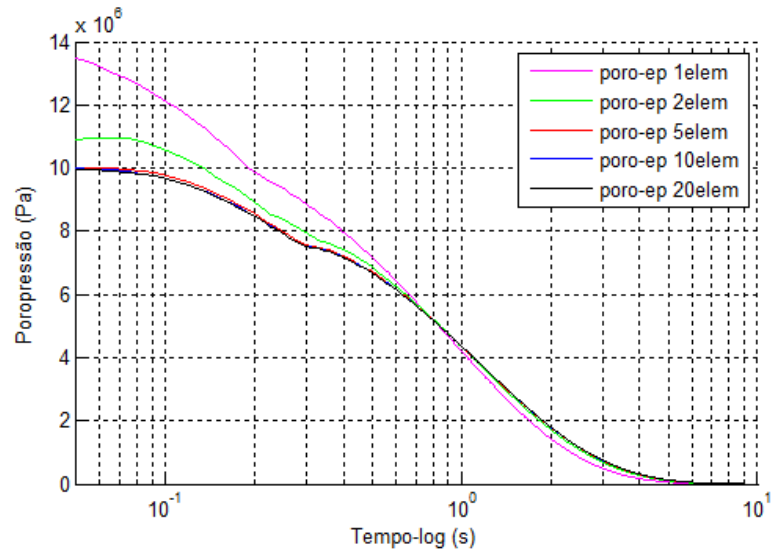


Fonte: Autor, 2012.

Ainda relativo à coluna poro-elastoplástica, são realizados testes com diferentes discretizações da malha de elementos finitos para avaliação da convergência dos resultados. A

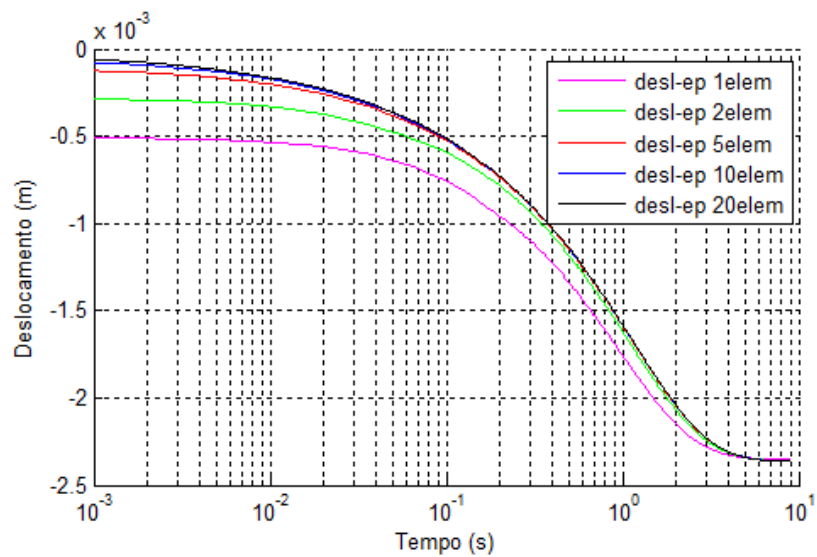
Figura 4.22 e a Figura 4.23 apresentam os gráficos de poropressão na base e deslocamento no topo da coluna.

**Figura 4.22 – Poropressão para malhas com diferentes níveis de discretização.**



Fonte: Autor, 2012.

**Figura 4.23 – Deslocamento para malhas com diferentes níveis de discretização.**

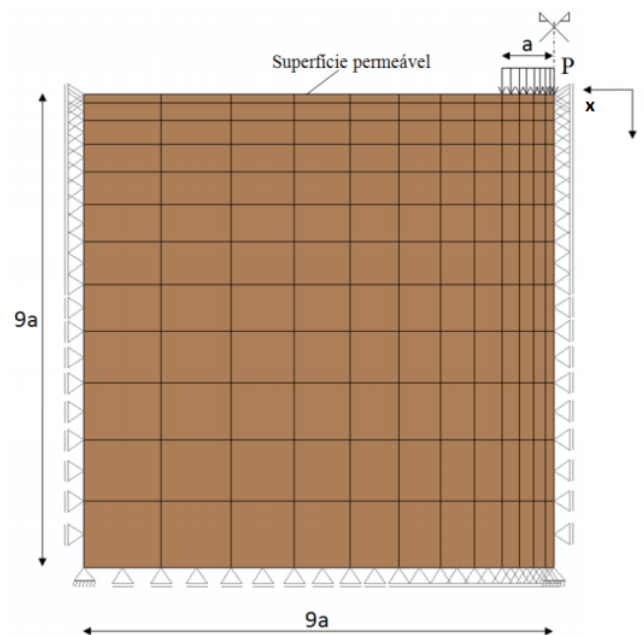


Fonte: Autor, 2012.

#### 4.4 Adensamento Bidimensional

Neste exemplo é analisado um problema de adensamento bidimensional em que uma camada de argila totalmente saturada é submetida a um carregamento superficial. O problema é modelado como um plano semi-infinito em estado plano de deformação e admite-se que o carregamento atua no centro da camada. O malha de elementos finitos possui 144 elementos e 481 nós. O carregamento é aplicado em uma faixa de largura  $2a$  no centro da camada de argila (Figura 4.24).

**Figura 4.24 – Malha de elementos finitos utilizada.**



Fonte: Fernandes, 2009.

Esse problema foi proposto por Schiffman *et al.* (1969) e tem sido utilizado para validação de diversas implementações computacionais, a exemplo de Fernandes (2009), que apresentou e discutiu os resultados obtidos com sua implementação. Além de apresentar os resultados elásticos, nesta seção também são apresentados os resultados obtidos considerando o modelo poro-elastoplástico.

Os valores dos parâmetros utilizados para modelagem do problema são apresentados na Tabela 4.4 e para o problema elástico os valores são os mesmos apresentados por Fernandes (2009).

Tabela 4.4 – Valores dos parâmetros para o exemplo de bidimensional.

CONSTANTE	VALOR
$P$	100 $KPa$
$a$	1 $m$
$G$	5 $MPa$
$\nu$	0.0
$k$	$2 \times 10^{-7} m^2/Pa.s$
$1/Q$	$10^{-20}$
<b>von Mises</b>	
$\sigma_y$	60000 $Pa$
$H$	500000 $Pa$

Fonte: Autor, 2012.

Na tabela também são apresentados os valores da tensão de escoamento e do módulo de endurecimento para o caso poro-elastoplástico. Neste exemplo é utilizado o modelo de von Mises apenas para ilustrar como a poropressão e tensão são influenciadas pelo modelo constitutivo adotado.

Schiffman *et al.* (1969) consideraram como condições iniciais o deslocamento nulo no instante inicial e uma distribuição de poropressão média em função da profundidade e distância ao centro de carga, conforme a equação

$$p_0 = \frac{P}{\pi} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{x+a}{z} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{x-a}{z} \right) \right], \quad z > 0, \quad |x| < \infty \quad (4.5)$$

onde  $x$  representa a distância horizontal até o centro de carga e  $z$  representa a distância vertical até o centro de carga. Os resultados numéricos são apresentados em função de um Fator de Tempo, definido como

$$T = \frac{2Gk}{a^2 \gamma_w} t \quad (4.6)$$

em que  $G$  é o módulo de elasticidade transversal,  $k$  o coeficiente de permeabilidade,  $\gamma_w$  o peso específico da água e  $t$  a unidade de tempo de processamento.

A Figura 4.25 apresenta os resultados numéricos obtidos para a variação das tensões e poropressão, considerando o modelo poro-elástico e poro-elastoplástico para o problema abordado por Schiffman no ponto  $x/a = 0$  e  $z/a = 0,5$ . As tensões apresentadas no gráfico são as tensões octaédricas e a poropressão normalizada, conforme equações

$$\sigma_v = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3} \quad (4.7)$$

$$\bar{p} = \frac{p}{p_0} \quad (4.8)$$

Na Figura 4.26 são apresentados os resultados analíticos obtidos por Schiffman para o caso elástico. Nota-se uma boa concordância entre os resultados elásticos, mas algumas observações em relação aos resultados numéricos merecem destaque. Para os resultados obtidos são utilizados incrementos de tempo diferentes para cada intervalo e caso (linear e não linear), conforme Tabela 4.5.

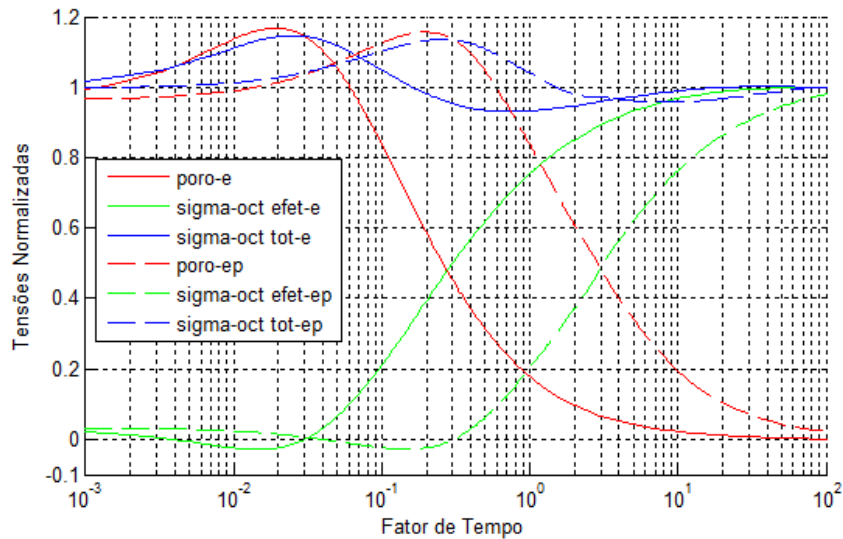
**Tabela 4.5 – Incrementos de tempo ( $dt$ ) utilizados para as simulações.**

PORO-ELÁSTICO	PORO-ELASTOPLÁSTICO
$t = 10^{-4}, 0 < t < 5 \cdot 10^{-2}$	$t = 10^{-5}, 0 < t < 10^{-4}$
$t = 5 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-2} < t < 1$	$t = 10^{-4}, 10^{-4} < t < 10^{-1}$
$t = 10^{-3}, 1 < t < 100$	$t = 5 \cdot 10^{-4}, 10^{-1} < t < 1$
	$t = 10^{-3}, 1 < t < 10$
	$t = 10^{-2}, 10 < t < 100$

Fonte: Autor, 2012.

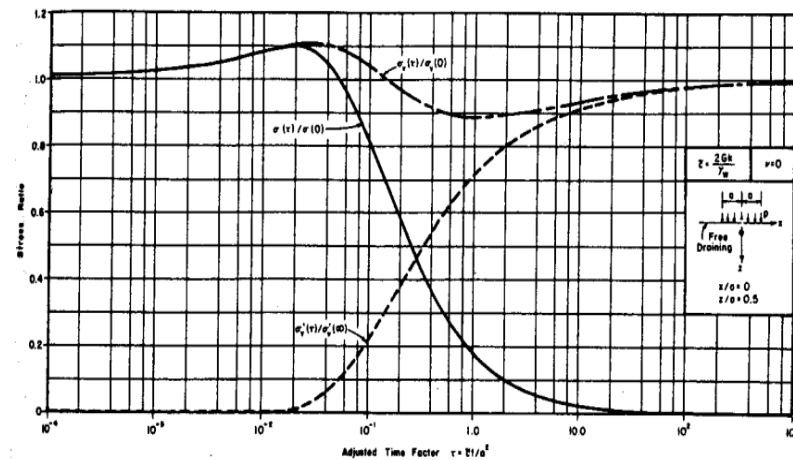


**Figura 4.25 – Resultados numéricos obtidos para o problema bidimensional.**



Fonte: Autor, 2012.

**Figura 4.26 – Tensões e poropressão para o problema de Schiffman.**



Fonte: SCHIFFMAN et al, 1969.

Os resultados analíticos do caso elástico para poropressão e tensão total apresentaram valores máximos pouco superiores a 1,1, conforme gráfico. Nos resultados numéricos os valores máximos são superiores a 1,1 e inferiores a 1,2. Para acelerar a simulação numérica, são utilizados grandes incrementos de tempo e com valores variáveis ao longo do tempo. Essa escolha para acelerar a simulação resulta nessas pequenas diferenças. O mesmo argumento pode ser admitido para explicar a região em que a poropressão excede o valor da tensão total.

Testes com intervalos regulares e menores foram realizados e foi possível observar esse comportamento.

No caso do resultado elástico é importante ressaltar que ele é obtido admitindo um modelo constitutivo elastoplástico com tensão de plastificação elevada. Ou seja, são utilizadas as mesmas rotinas computacionais do caso elastoplástico e o modelo é forçado ao caso elástico pela tensão de escoamento elevada.

Para o caso elastoplástico, podem-se discutir os aspectos qualitativos sobre os resultados, pois não existe solução analítica disponível. Como seria previsto, a maior flexibilidade da estrutura após plastificação resulta em uma redução na taxa de variação da poropressão. O uso de modelos elastoplásticos requer um maior tempo de simulação, pois o excesso de poropressão é dissipado mais lentamente. Mesmo o modelo sendo elastoplástico é possível observar um comportamento análogo ao elástico, porém transladado em função da plastificação.

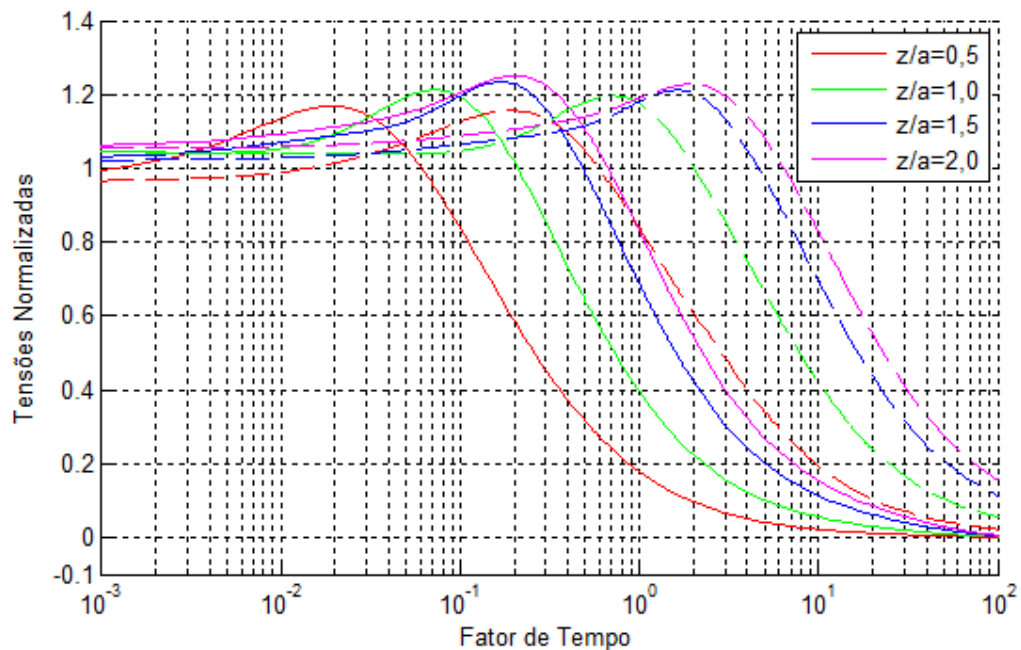
Para o caso elástico, utilizam-se as condições iniciais propostas por Schiffman para o deslocamento e poropressão. No caso poro-elastoplástico, é utilizada a estratégia da função rampa para aplicação gradativa do carregamento para evitar o surgimento de tensões de plastificação nos instantes iniciais de simulação, pois no estágio atual o cálculo das condições iniciais não faz a verificação de limite de plasticidade.

Uma análise mais detalhada do gráfico pode associar o crescimento da poropressão acima do valor inicial ao efeito Mandel-Cryer (CRYER, 1963). Nos instantes iniciais, na região próxima a superfície permeável, a poropressão é rapidamente dissipada provocando deformações e um aumento nas tensões total e efetiva. Contudo, em regiões mais profundas, nesses instantes iniciais não existe dissipação da poropressão instantânea e dessa forma não surgem deformações.

A camada não permeável provoca um confinamento e o fluxo tem que ser invertido para que ocorra a dissipação somente pela camada permeável. Isso provoca um aumento da poropressão acima do valor inicial, provocando um aumento da tensão total para compatibilizar a equação das tensões. Pois nesse instante não existe deformação e por isso não

pode haver aumento da tensão efetiva. Esse comportamento pode ser observado no gráfico apresentado na Figura 4.25. Pode-se concluir que quanto maior a profundidade, maior será a altura de drenagem que o fluido deverá percorrer. Isso significa que as tensões de poropressão acima do valor inicial crescem com a profundidade até uma região específica, em seguida isso é invertido, conforme é apresentado na Figura 4. 27.

**Figura 4.27 – Poropressão normalizada para diferentes profundidades.**



Fonte: Autor, 2012.

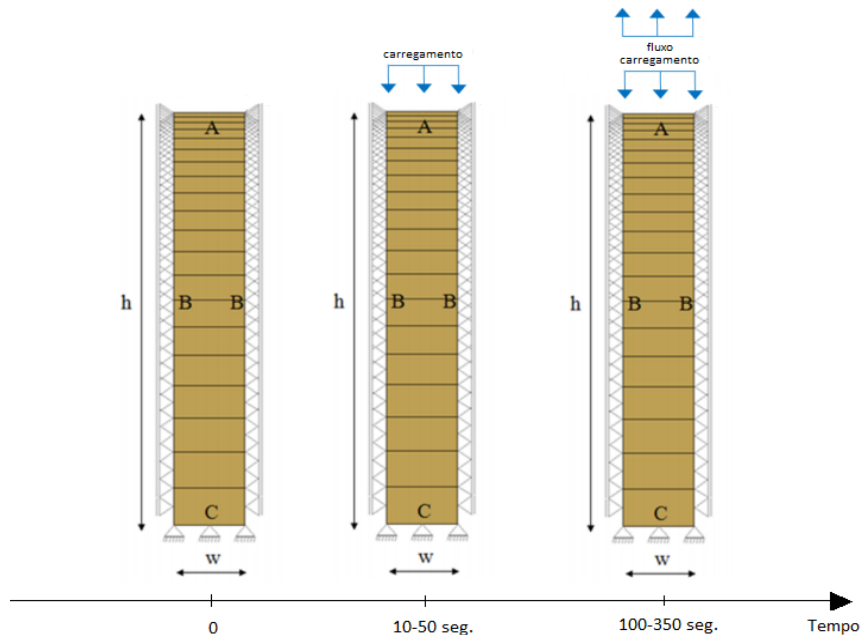
#### 4.5 Coluna com carregamento e fluxo prescrito

Neste exemplo é apresentado o caso de uma coluna sujeita a carregamentos de diferentes naturezas. O modelo é uma abstração de uma coluna preenchida com material granular e totalmente saturada. A malha de elementos finitos utilizada é composta de 103 nós e 20 elementos Q8Q4 (8 nós para deslocamento e 4 para poropressão).

O exemplo é ilustrativo e pode ser comparado com a fase primária de exploração de um poço de petróleo em que inicialmente não há fluxo, e o peso das camadas gera um estado de tensão no maciço. Em seguida, o poço é colocado em produção e através de válvulas a vazão é controlada, como descrito a seguir.

Inicialmente a coluna é submetida a esforços de compressão através de um carregamento distribuído no topo. Esse carregamento é aplicado lentamente através de uma função rampa entre os instantes 10 e 50 segundos e é mantido constante após esse instante. Durante esse período o modelo apresenta seu contorno (faces A, B e C) impermeável, impossibilitando a saída do fluxo e ocasionando um aumento positivo do excesso de poropressão. Quando a simulação atinge 100 segundos, um fluxo prescrito é adicionado ao topo da coluna e a face A torna-se permeável. Esse fluxo também é aplicado através de uma função rampa e tem como objetivo reduzir o excesso de poropressão causado pelo carregamento. A Figura 4.28 apresenta o modelo utilizado neste exemplo e os instantes em que o carregamento e fluxo são aplicados.

**Figura 4.28 – Coluna submetida a um carregamento e fluxo prescrito.**



Fonte: Adaptada de Fernandes, 2009.

São realizadas duas simulações, uma delas considerando o modelo elástico e outra o modelo elastoplástico (utilizando o modelo de von Mises) para o problema mecânico. A Tabela 4.6 apresenta os valores dos parâmetros utilizados na modelagem.

Tabela 4.6 – Parâmetros para o caso da coluna com carregamento e fluxo.

CONSTANTE	VALOR
$P$ (carregamento)	$10^4 MPa$
$Q$ (fluxo)	$+0,01 m^3/s$
$h$	$6,0 m$
$w$	$1,0 m$
$k$	$2 \times 10^{-11} m^2/Pa.s$
$1/Q$	$3,33 \times 10^{-16}$
$\alpha$	$1,00$
$E$	$1,44 \times 10^4 MPa$
$\nu$	$0,2$
$\Delta t$	$0,1 s$
$\theta$	$1,0$
$\sigma_y$	$5 \times 10^3 MPa$
$H$	$1,44 \times 10^{-8}$

Fonte: Autor, 2012.

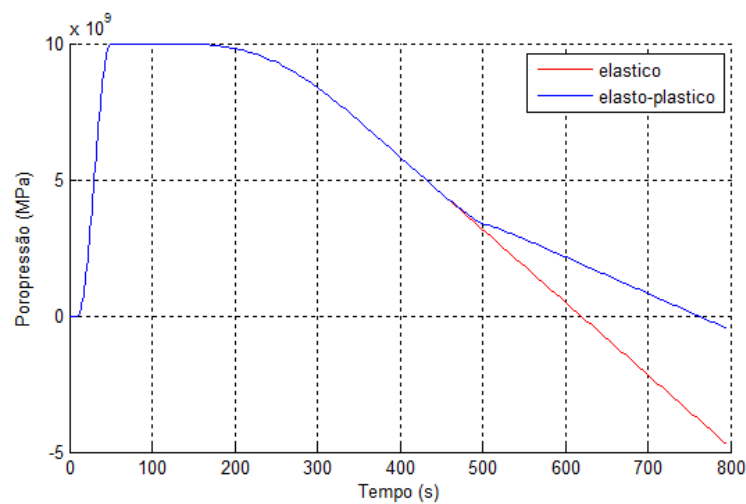
Com a aplicação do carregamento no topo da coluna e o contorno impermeável, não existe deformação na estrutura mecânica da coluna e toda tensão provocada pelo carregamento é transferida para o fluido que está na coluna. O carregamento obedece a uma função rampa que inicia no instante 10 s e aplica todo o carregamento em 50 s.

Dessa forma, não existe acréscimo de tensão efetiva ou de poro para  $t < 10 s$  e após esse instante tem-se um aumento gradativo do excesso de poropressão de acordo com a função rampa que é aplicada no carregamento. Na Figura 4.29 e Figura 4.30 são ilustrados o comportamento da poropressão e tensão vertical para um ponto no topo da coluna. Nota-se que a poropressão cresce de acordo com a função rampa e a tensão permanece nula porque não existe fluxo no interior da coluna e pelo baixo valor do coeficiente de armazenamento específico ( $1/Q \ll 1$ ).

Ao atingir o instante  $t = 50 s$  todo o carregamento é aplicado e seu valor é mantido constante. Depois desse instante e antes da aplicação do fluxo prescrito, não existe variação

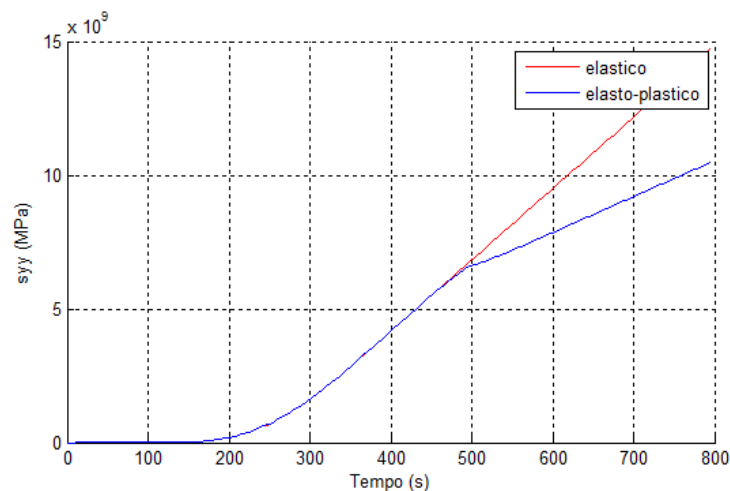
da poropressão e a tensão vertical ( $s_{yy}$ ) também permanece nula. Para  $t \geq 100$  s, o fluxo no topo da coluna assume valor não nulo e cresce obedecendo a função rampa do fluxo. A partir desse instante inicia um processo de transferência do excesso de poropressão para a estrutura mecânica da coluna, resultando em um aumento gradativo da tensão vertical ( $s_{yy}$ ). A prescrição do fluxo também obedece à função carregamento e dessa forma o comportamento da poropressão e tensão também segue esse comportamento, que pode ser observado nos gráficos citados anteriormente.

**Figura 4.29 – Variação da poropressão com aplicação do carregamento e fluxo.**



Fonte: Autor, 2012.

**Figura 4.30 – Variação da tensão  $s_{yy}$  com aplicação do carregamento e fluxo.**

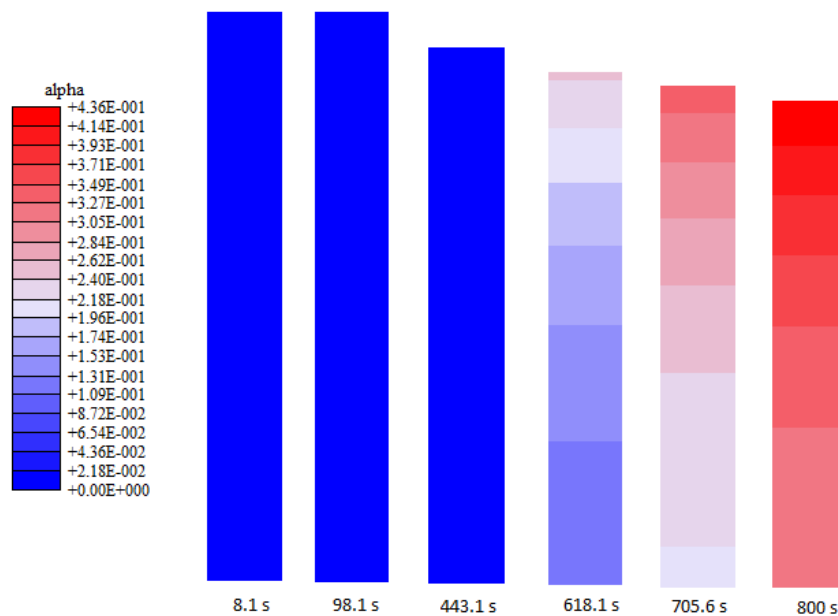


Fonte: Autor, 2012.

O excesso de poropressão cresce com aplicação do carregamento e confinamento da coluna e em seguida decresce com aplicação do fluxo. A tensão vertical se manteve constante no confinamento e cresce com a saída do fluido. A tensão continua a aumentar até que o limite de escoamento é atingido. Quando isso acontece, a estrutura torna-se mais flexível e a transferência do excesso de poropressão para o esqueleto mecânico da coluna sofre uma redução e isso pode ser observado no histórico da poropressão e da tensão ao longo do tempo. Após a plastificação de uma região, para o mesmo instante de tempo, o excesso de poropressão do modelo elasto-plástico é maior que o elástico e para a tensão ocorre o contrário, a tensão vertical do modelo elasto-plástico é menor que o elástico.

Outro efeito interessante é evolução do parâmetro de plastificação ( $\alpha$ ). Como o fluxo acontece no topo da coluna, o excesso de poropressão é mais rapidamente transferido para o esqueleto mecânico nessa região. Assim, as tensões verticais crescem mais rapidamente que as demais regiões e consequente o mesmo acontece com a plastificação do material. Isso pode ser observado na Figura 4.31, em que é ilustrada a evolução do parâmetro de plastificação ( $\alpha$ ) ao longo do tempo.

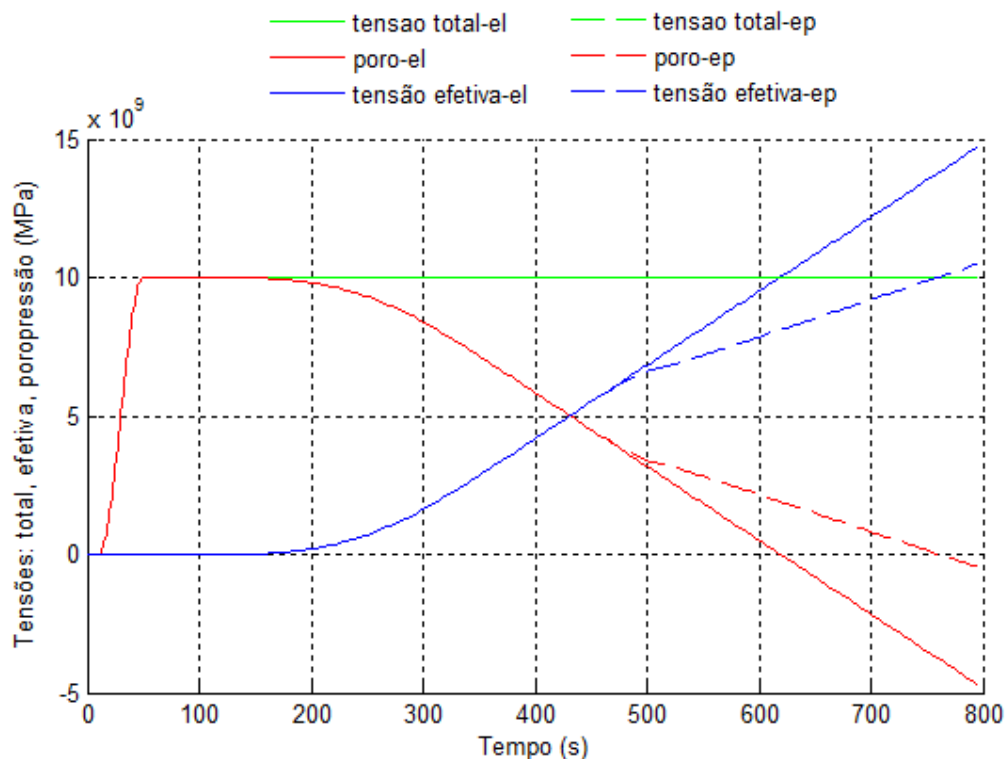
**Figura 4.31 – Parâmetro de endurecimento ( $\alpha$ ) ao longo do tempo.**



Fonte: Autor, 2012.

Independente do modelo constitutivo adotado para o problema mecânico (elástico ou plástico), o princípio das tensões efetivas continua válido. A Figura 4.32 apresenta o histórico das tensões (total, efetiva e poropressão) ao longo do tempo. Inicialmente o excesso de poropressão é nulo porque não existe carregamento, em seguida o excesso de poropressão cresce em função da aplicação do carregamento e se mantém constante quando o carregamento também é constante. Nesses instantes, o excesso de poropressão por convenção é positivo e à medida que ele decresce atinge-se um instante em que o excesso de poropressão é nulo. Isso não significa dizer que não existe fluido na coluna, mas sim que o excesso de poropressão é nulo. Ao continuar o fluxo prescrito, tem-se um contínuo aumento do excesso de poropressão, mas agora no sentido invertido, podendo ser convencionado negativo. Depois desse instante tem-se a tensão efetiva maior que a tensão total em função da não adequação do sinal na equação do princípio das tensões efetivas.

**Figura 4.32 – Variação das tensões ao longo do tempo.**



Fonte: Autor, 2012.

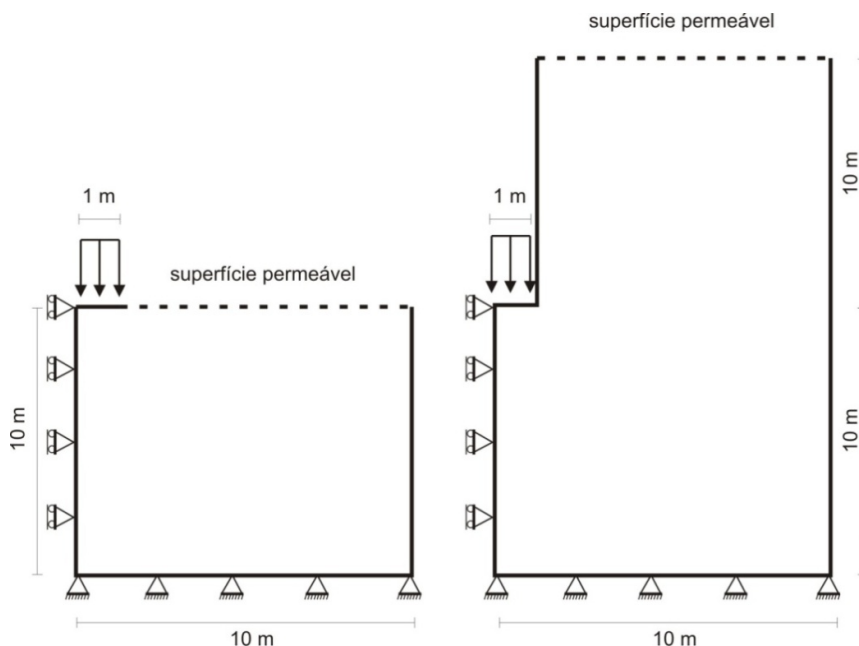


#### 4.6 Considerações poro-mecânicas em fundações

O exemplo abordado nesta seção apresenta a influência da consideração poro-mecânica em fundações rasa e profunda nos instantes iniciais. Não é objetivo aqui discutir e analisar detalhadamente o desenvolvimento das tensões, mas ilustrar como o percurso que o fluido percorre quando o maciço é submetido a um carregamento influencia no desenvolvimento das tensões e deslocamento.

Toma-se como referência o exemplo apresentado no trabalho de Lima Junior (2011), que utiliza um modelo de dano isotrópico em simulações poro-elásticas. No exemplo apresentado nesta seção é analisada a influência do modelo elastoplástico na simulação poro-mecânica acoplada. Para isso, considera-se um carregamento de  $1\text{ MPa}$  aplicado transversalmente em uma faixa de  $1\text{ m}$  em um domínio retangular representando uma fundação rasa e uma fundação profunda, conforme Figura 4.33. São analisadas estruturas de fundação considerando o modelo poro-elástico e poro-elastoplástico, mas apenas os resultados poro-elastoplásticos são apresentados.

**Figura 4.33 – Representação gráfica para uma fundação rasa e profunda.**

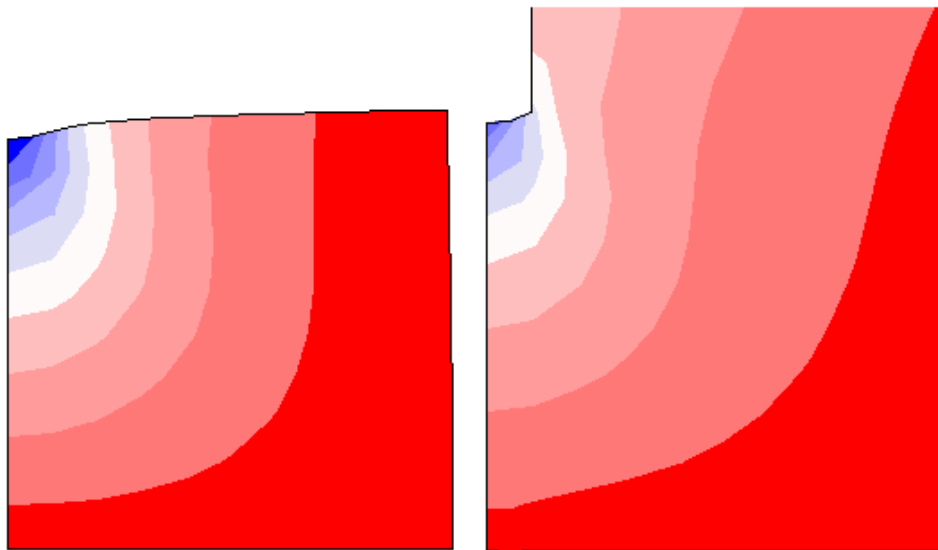


Fonte: Autor - Adaptada de LIMA JUNIOR, 2011.

Inicialmente, tem-se um acréscimo de poropressão provocado pelo carregamento e confinamento do fluido. Ao longo do tempo, o excesso de poropressão é transferido para o esqueleto mecânico da estrutura e o processo de deformações e deslocamentos ocorre ao longo dessa transferência. A velocidade com que esses efeitos são observados está relacionada com a velocidade de saída do fluido, que depende do caminho de percolação.

Como o caminho de percolação para fundação profunda é maior, no modelo que representa a fundação rasa observam-se maiores deslocamentos na região próxima ao carregamento (Figura 4.34). Isso ocorre porque a transferência de tensões entre o excesso de poropressão e as tensões efetivas ocorre mais rapidamente para a fundação rasa comparada à fundação profunda.

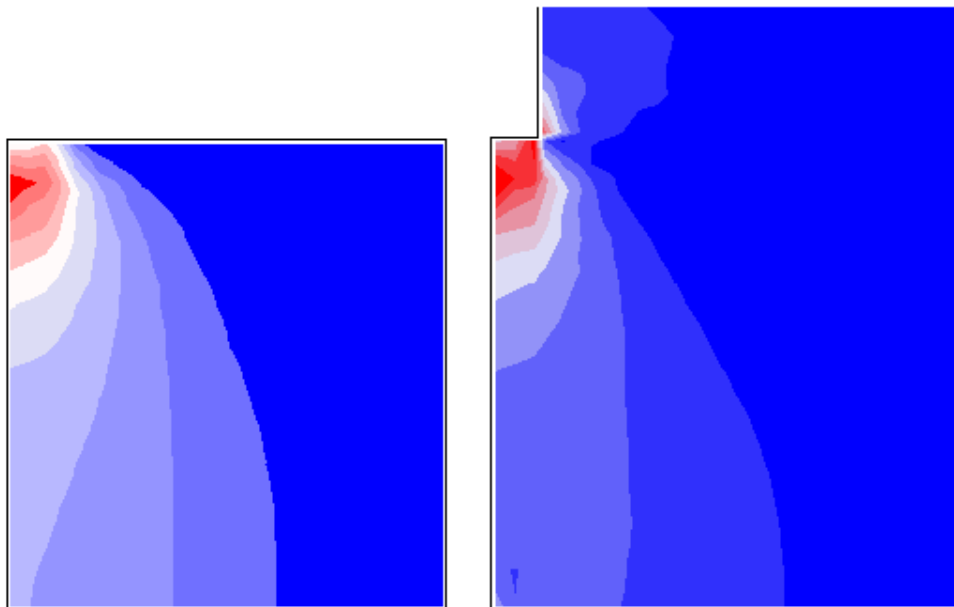
**Figura 4.34 – Distribuição do deslocamento vertical no instante 800s.**



Fonte: Autor, 2012.

Mesmo com maiores deslocamentos ocorrendo na fundação rasa nas proximidades da região carregada, os maiores valores para o parâmetro de endurecimento ocorreram na fundação profunda (Figura 4.35).

**Figura 4.35 – Distribuição do parâmetro de endurecimento no instante 800s.**



Fonte: Autor, 2012.

É válido ressaltar que os resultados expostos neste exemplo não podem ser extrapolados para qualquer exemplo de fundação. Diversas variáveis estão envolvidas (caminho de percolação, carregamento, permeabilidade, etc.) e é necessária uma análise mais detalhada sobre a influência de cada uma delas. O objetivo neste caso é apenas ilustrativo.

## 5 ESTRATÉGIAS DE OTIMIZAÇÃO E PARALELIZAÇÃO

A aplicação de métodos computacionais para o estudo de diversos problemas ou fenômenos da natureza tem crescido nas últimas décadas, principalmente em função da evolução que os sistemas computacionais têm apresentado. Atualmente, com a evolução dos processadores é possível realizar simulações computacionais com malhas de elementos finitos que seriam impraticáveis há alguns anos atrás.

Contudo, mesmo com o estágio avançado em que se encontram os hardwares para processamento (processadores, placas gráficas, etc.) ainda é possível tornar as aplicações numéricas ainda mais rápidas. Esse campo de pesquisa/trabalho consiste em otimizar ao máximo o uso dos recursos computacionais, seja na capacidade de processamento ou de armazenamento de dados. Essa linha de pesquisa é denominada Computação de Alto Desempenho (CAD) ou *High Performance Computing* (HPC) e consiste em usar técnicas que podem desde alterar o código-fonte ou até mesmo propor uma nova solução em hardware, mas sempre com o objetivo de otimizar os recursos e reduzir o custo computacional.

O presente trabalho expande um código de elementos finitos existente que, inicialmente desenvolvido por Sena (2008) e Fernandes (2009), possibilitava a simulação linear do problema poro-elástico. Com o desenvolvimento deste trabalho, torna-se possível o uso de modelos elastoplásticos e isso aumenta consideravelmente o custo computacional em função das estratégias numéricas para solução de problemas não lineares.

Em alguns cenários de simulação poro-elástica e poro-elastoplástica, o tempo de processamento é muito elevado, situação não desejável quando é necessária uma rápida informação. Nesse contexto, este capítulo apresenta e discute algumas estratégias de otimização e paralelização que podem ser aplicadas para reduzir esse tempo. É importante ressaltar que não é objetivo deste trabalho escrever um código computacional extremamente rápido e otimizado, mas sim apresentar alternativas existentes e, para algumas delas, apresentar alguns resultados obtidos com o seu uso.

## 5.1 Principais estratégias para otimização de um simulador

O processo de otimização pode acontecer em dois momentos, e o primeiro deles após a concepção e validação do código. Neste caso, a otimização deve ocorrer em um estágio mais maduro da implementação, onde o fluxo do programa é totalmente conhecido e problemas de erros na lógica do código já não existem ou são mínimos. Assim, é possível dedicar todo o esforço nas estratégias de otimização. Outra abordagem consiste na otimização do código durante a sua concepção, e isso significa que, ao mesmo tempo em que a lógica do programa é construída, o programador deve estar atento para a escolha da melhor estratégia para redução de consumo de tempo e memória. Neste trabalho é adotada a primeira estratégia de otimização.

A primeira etapa no processo de otimização é entender o fluxo principal do programa e a distribuição de tempo em cada método/função. A distribuição de tempo é obtida através de uma **análise de *profiling*** do código, onde podem ser utilizadas diversas ferramentas já disponíveis com esse objetivo. Essa análise permite identificar a região do programa com maior consumo de tempo e, dessa forma, o programador pode concentrar todos os esforços de otimização nessa região. Caso contrário, boas estratégias de otimização podem ser implementadas em regiões com pequeno impacto no tempo total de processamento e a estratégia não terá o resultado esperado.

Identificada a região com maior consumo de tempo, a segunda etapa consiste em escolher a estratégia mais adequada. Uma classificação não muito intuitiva apresenta **estratégias de otimização de código-fonte** e **processamento paralelo** como as duas principais linhas de atuação para otimização de algoritmos numéricos.

As estratégias de otimização são estratégias aplicadas ao código fonte antes ou durante a geração do código *assembly*. Em muitas dessas estratégias é necessária a interferência do programador nesse processo, como no caso do uso de bibliotecas matemáticas otimizadas. Em outros casos, opções automáticas de otimização são suficientes para geração de um programa mais rápido. Destacam-se as *flags* de otimização como opções automáticas de otimização que dependem do compilador. Também se enquadram nessas classes de estratégias o uso de

vetores ao invés de matrizes (vetorização), a eliminação de *loops* desnecessários, entre outras estratégias.

O processamento paralelo é recomendado em regiões que demandam elevado esforço computacional e consiste em dividir o fluxo do programa entre as centrais de processamento disponíveis, podendo ser núcleos (*cores*) ou processadores. De forma simplificada, essa estratégia pode ser aplicada em ambientes de memória distribuída (*cluster* computacional) com o uso dos padrões PVM (*Processing Virtual Machine*) e MPI (*Message Passing Interface*), ambientes de memória compartilhada com os padrões POSIX *Threads* e OpenMP e ambientes híbridos.

O padrão OpenMP foi construído para estratégias de paralelismo baseada no compartilhamento de memória e é utilizado neste trabalho. Ele possui como cenário de aplicação notebooks e desktops comuns que utilizam a geração de processadores *multicore*. Com o uso desse padrão é possível utilizar todos os *cores* presentes no processador e reduzir o tempo de processamento com pequenas alterações no código.

## 5.2 Otimização e paralelização no sistema PORO

Para o caso do PORO, o fluxo do programa e a região com maior consumo de tempo podem não ser bem definidos em função da escolha dos parâmetros do modelo e da estratégia de solução do sistema de equações. No caso poro-elastoplástico, por exemplo, durante a simulação os níveis de tensão podem não ser suficientes para atingir o limite elástico do material e dessa forma a simulação é elástica, sendo a região crítica o método com implementação da solução do sistema de equações. Quando o limite elástico é atingido e as equações da plasticidade são acionadas, o fluxo do programa é alterado e novas funções são acionadas, distribuindo o tempo que estava concentrado em uma região para várias funções/métodos.

Nesse caso, a implementação de alguma estratégia de otimização requer a análise isolada de cada fluxo principal, para que assim seja possível identificar as regiões com maior consumo e quando essas regiões sofrerem modificações, seus ganhos sejam mais facilmente percebidos. Serão apresentados os resultados obtidos com o exemplo unidimensional da coluna poro-elástica e poro-elastoplástica.

### 5.2.1 Caso 1: Simulação poro-elástica

Para entender o fluxo e encontrar a região com maior consumo de tempo é utilizado a ferramenta de *profiling* disponível no programa Visual Studio 2008 ([www.microsoft.com/visualstudio](http://www.microsoft.com/visualstudio)). Para entender a distribuição de tempo entre os métodos, é utilizada como estratégia para solução do sistema de equações uma implementação baseada na fatoração LU.

A análise do perfil do programa indica que o maior consumo de tempo está concentrado na solução do sistema de equações (Figura 5.1). Mesmo existindo trechos de código dedicados à leitura e escrita em arquivos, alocação das estruturas (vetores e matrizes) do modelo, inicialização do modelo, cálculo das condições iniciais e outros, como a simulação é de um problema transiente, alguns trechos de código são iterativamente acionados (atualização do vetor de forças, solução do sistema de equações, etc.) enquanto outros são acionados apenas no início.

Figura 5.1 – *Profiling* para o caso poro-elástico e solver LU.

#### Functions Causing Most Work

Name	Samples	%
_main	333	100,00
_mainCRTStartup	333	100,00
PoroAnalysis::SolveQuasiStaticProblem(void)	329	98,80
PoroAnalysis::SolveProblem(void)	329	98,80
LinAlg::SELSolve(int,double **,double *,double *)	315	94,59

#### Functions Doing Most Individual Work

Name	Samples	%
LinAlg::LUfactor(int,double **,int **)	304	91,29
[ntdll.dll]	10	3,00
LinAlg::LUSolve(int,double **,int *,double *,double *)	4	1,20
LinAlg::MatrixVectorMultiply(int,int,double **,double *,double *)	2	0,60
std::_Max_element<double *>(double *,double *)	1	0,30

Fonte: *Profiling* utilizando Microsoft Visual Studio, 2012.

A distribuição de tempo obtida indica que 94% do tempo de processamento estão sendo consumidos no trecho de código relativo à solução do sistema de equações. O método que possui essa implementação é acionado para cada iteração no tempo para o problema linear.

A primeira camada de otimização utilizada está relacionada com a opção de compilação do programa. Utilizando o compilador Intel, são realizados testes de desempenho com a versão compilada em modo *debug* e *release*. A primeira delas é uma opção utilizada na fase de desenvolvimento do programa, pois o código é automaticamente instrumentado para permitir a depuração do programa em tempo de execução. A segunda opção é utilizada quando se pretende entregar uma versão estável do programa, onde o processo de depuração já não é mais utilizado. Os tempos obtidos para as versões debug e release foram 97,856 e 90,906 segundos, respectivamente (tempos obtidos sem considerar a escrita em arquivos).

A segunda camada de otimização é baseada no uso do padrão OpenMP para paralelização da solução do sistema de equações. Para o presente caso, dentro da estratégia de solução do sistema baseado em fatoração LU, o trecho de código relativo à fatoração LU é o responsável pelo maior consumo. A presença de condições que permitem a interrupção do fluxo dificultaram o uso direto das diretivas do OpenMP nessa região, mas apenas com o uso da diretiva `#pragma omp parallel for` nos *loops* independentes é possível obter ganhos consideráveis.

Mantendo a mesma máquina dos testes anteriores (Intel Pentium Dual Core – 2Gb de RAM), é possível reduzir o tempo de processamento de 90,906 segundos (versão release) para 41,324 segundos. Outras oportunidades de paralelização também são identificadas e exigiriam maiores alterações mais significativas no código-fonte.

A terceira camada analisada e implementada está relacionada ao uso de bibliotecas matemáticas otimizadas. Atualmente, diversas empresas e universidades desenvolvem e disponibilizam implementações otimizadas de vários métodos numéricos (solução de sistemas de equações, operações com vetores e matrizes, etc.). Nos testes são utilizadas algumas funções disponibilizadas na biblioteca MKL (Math Kernel Library) da Intel, que é composta pelos principais e seguintes grupos de rotinas:

- **BLAS.** Funções de operações com vetores e matrizes e é dividida em três grupos: BLAS Level 1 com operações de redução e adição de vetores. BLAS Level 2 e 3 com operações que envolvem matriz e vetor, matriz-matriz e solver para sistemas de equações triangulares.



- **Sparse BLAS.** Também agrupadas em três grupos possuem funções parecidas com a BLAS, mas utilizam como vantagem a quantidade de zeros presentes nos vetores e matrizes.
- **Lapack.** Agrupam rotinas associadas à solução de sistemas de equações lineares, fatoração e inversão de matrizes, problemas de valor principal.

Essa linha de otimização, que não depende diretamente do programador, tem ganhado grande destaque nos últimos anos. Ela permite o programador dedicar os esforços de otimização ou paralelização apenas nos trechos de código em que a lógica de programação não permite uma otimização automática ou disponível em bibliotecas. Para avaliar os ganhos que podem ser obtidos, são realizados testes de desempenho com as estratégias de solução de sistemas de equações da MKL baseadas em fatoração LU e matrizes esparsas, obtendo-se 34,715 e 29,421 segundos com o uso das respectivas estratégias. A Tabela 5.1 apresenta um resumo das estratégias utilizadas.

**Tabela 5.1 – Distribuição de tempo para o caso elástico.**

<b>Versão do simulador Poro-Elástico</b>	<b>Tempo (s)</b>
<b>1. Versão <i>Debug</i></b> Versão compilada em modo debug e sem nenhuma otimização.	97,856
<b>2. Versão <i>Release</i> – SolveLU</b> Versão compilada com nível de otimização O2 e solução para o sistema de equações baseada na estratégia de fatoração LU.	90,906
<b>3. Versão <i>Release</i> com OpenMP (2 Threads) – SolveLU</b> Versão compilada com nível de otimização O2, solução para o sistema de equações baseada na estratégia de fatoração LU e paralelização de loops com OpenMP.	49,324
<b>4. Versão <i>Release</i> – SolveLU MKL</b> Versão compilada com nível de otimização O2 e solução para o sistema de equações usando a biblioteca MKL com estratégia de fatoração LU.	34,715
<b>5. Versão <i>Release</i> – SolveSparse MKL</b> Versão compilada com nível de otimização O2 e solução para o sistema de equações usando a biblioteca MKL com estratégia de matrizes esparsas.	29,491

Fonte: Autor, 2012.

Nota-se que o uso do OpenMP resulta em ganhos consideráveis, mas apenas o uso da estratégia otimizada para solução do sistema resulta em ganhos ainda maiores (utilizando apenas uma thread). Esses resultados não podem necessariamente ser extrapolados para qualquer outro modelo, mas já indicam as vantagens do uso de bibliotecas otimizadas.

O processo de otimização é cíclico e a função com maior consumo de tempo pode ser deslocada à medida que otimizações são realizadas. No caso analisado, a solução do sistema de equações representava mais de 90% do tempo de processamento e quando é utilizada a estratégia de fatoração LU implementada na biblioteca MKL com apenas uma linha de execução (*thread*), além de reduzir o tempo para 34,715 s, o consumo de tempo em relação ao sistema de equações é reduzido para cerca de 65%, conforme ilustra a nova análise de *profiling* na Figura 5.2. Nota-se que outras regiões do código devem ser analisadas mais detalhadamente para maximizar os ganhos de desempenho.

**Figura 5.2 – Profiling utilizando a estratégia de fatoração LU da MKL.**

Name	Samples	%
_mainCRTStartup	779	100,00
_main	743	95,38
PorosityAnalysis::SolveProblem(int)	742	95,25
PorosityAnalysis::SolveQuasiStaticProblem(int)	742	95,25
LinAlg::MKL_SolveLinearSystem(int,double *,double *,double *)	507	65,08

Fonte: *Profiling* utilizando Microsoft Visual Studio, 2012.

### 5.2.2 Caso 2: Simulação poro-elastoplástica

Nesta seção é discutida a distribuição de tempo entre as rotinas para o caso de uma simulação poro-elastoplástica. Como comentado, quando o limite elástico é atingido, o fluxo do programa é alterado e rotinas associadas à teoria da plasticidade são acionadas, alterando a distribuição de tempo comparada ao caso poro-elástico.

A solução do sistema de equações continua sendo uma das regiões com maior consumo, mas, nesse caso, um processo iterativo dentro de cada incremento de tempo é necessário para garantir a convergência e, para cada iteração, é necessário verificar e modificar a matriz de rigidez do problema mecânico. Esse novo fluxo aumenta o custo computacional e distribui o consumo de tempo entre vários trechos de código.

A Figura 5.3 apresenta a distribuição de tempo obtida com o Visual Studio. O primeiro bloco de informações ilustra a região com maior consumo de tempo e o segundo bloco quais as funções que, individualmente, apresentam maior consumo de tempo.

**Figura 5.3 – Profiling utilizando a estratégia de fatoração LU da MKL.**

### Functions Causing Most Work

Name	Samples	%
_mainCRTStartup	2.582	100,00
_main	2.561	99,19
PorosityAnalysis::SolveProblem(void)	2.558	99,07
PorosityAnalysis::SolveElasticPlasticQuasiStaticProblem2(void)	2.558	99,07
LinAlg::SELSolve(int, double **, double *, double *)	969	37,53

### Functions Doing Most Individual Work

Name	Samples	%
LinAlg::LUfactor(int, double **, int **)	920	35,63
LinAlg::MatrixMatrixMultiply(int, int, int, double **, double **, double **)	556	21,53
[ntdll.dll]	174	6,74
ElasticPlastic::ComputeMatrixA(double *, double **, double, double, double **, double **)	147	5,69
PorosityAnalysis::ComputeMechanicTangentMatrix(void)	141	5,46

Fonte: Profiling utilizando Microsoft Visual Studio, 2012.

Nesse caso nota-se que a solução do sistema de equações ainda é a região do código com maior consumo de tempo, mas o percentual de tempo gasto em processamento nessa região (37%) é muito menor que no caso linear (94%). Como explicado, durante o processo iterativo de convergência em cada incremento de tempo, outras funções também são acionadas e dessa forma o consumo de tempo concentrado em uma região é dividido para outras funções, como é o caso do cálculo da matriz de rigidez tangente, cálculo de uma matriz de rigidez modificada e a multiplicação de matrizes, sendo essa última responsável pelo consumo de mais de 20% do tempo de processamento.

Esse caso poro-elastoplástico é submetido às mesmas alterações que o caso linear e a Tabela 5.2 apresenta em resumo o tempo de processamento consumido em cada simulação. De modo análogo ao caso linear, uma redução no tempo de processamento é obtida com a implementação de cada estratégia otimização.

**Tabela 5.2 – Distribuição de tempo para o caso poro-elástico.**

<b>Versão do simulador Poro-Elástico</b>	<b>Tempo (s)</b>
<b>1. Versão <i>Debug</i></b> Versão compilada em modo debug e sem nenhuma otimização	870,640
<b>2. Versão <i>Release</i> – SolveLU</b> Versão compilada com nível de otimização O2 e solução para o sistema de equações baseada na estratégia de fatoração LU.	485,607
<b>3. Versão <i>Release</i> com OpenMP (2 Threads) – SolveLU</b> Versão compilada com nível de otimização O2, solução para o sistema de equações baseada na estratégia de fatoração LU e paralelização de loops com OpenMP	387,456
<b>4. Versão <i>Release</i> – SolveLU MKL</b> Versão compilada com nível de otimização O2 e solução para o sistema de equações usando a biblioteca MKL com estratégia de fatoração LU.	265,132
<b>5. Versão <i>Release</i> – SolveSparce MKL</b> Versão compilada com nível de otimização O2 e solução para o sistema de equações usando a biblioteca MKL com estratégia de matrizes esparsas.	260,199

Fonte: Autor, 2012.

É importante ressaltar que diversas alterações podem ser feitas no código para deixá-lo ainda mais rápido e otimizado. Contudo, o objetivo deste capítulo é ilustrar o fluxo de processo de otimização, discutir e apresentar ganhos reais que podem ser obtidos com o uso de estratégias de otimização. Fica evidente que, quando se trata de otimização de algoritmos que tratam de cálculos matemáticas comuns, tais como: solução de sistema, multiplicação de matrizes e inversão de matrizes, o uso de bibliotecas matemáticas quase sempre resultará em melhores resultados quando comparado a soluções com implementação manual pelo programador.

## 6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O trabalho apresentado foi construído em oito capítulos em que se procurou abordar de forma didática a evolução da simulação numérica de um problema físico, tendo sido abordado como tema principal o acoplamento dos problemas mecânico e de fluxo. A metodologia abordada procurou resgatar desde as equações analíticas que regem o problema unidimensional e linear até a construção do problema bi-dimensional numérico e não linear. Não foi objetivo construir um programa computacional robusto para simulação não linear de problemas com acoplamento mecânico e fluxo, mas apresentar uma arquitetura de programa, realizar testes com alguns modelos e permitir que novos trabalhos sejam desenvolvidos mais rapidamente com o conteúdo apresentado.

Como discutido ao longo do trabalho, o tema abordado é de grande interesse em diversas áreas da engenharia. No projeto estrutural da fundação de um edifício, na análise de estabilidade de estruturas de contenção, nos campos de exploração de petróleo, etc. Para todas essas áreas o conhecimento do comportamento mecânico do maciço é fundamental para o entendimento dos esforços que essas estruturas estarão submetidas. Contudo, estudar apenas o comportamento mecânico pode não ser suficiente, sendo necessário analisar o período transiente em que o fluxo flui e as tensões são internamente transferidas. Em outros casos, durante o fluxo do fluido, os níveis de tensão do maciço podem ser maiores do que os níveis de tensão quando todo o excesso de poropressão for dissipado, o que justifica o desenvolvimento deste trabalho com o uso de modelos não lineares.

Para validar a implementação realizada foram simulados quatro exemplos de problemas com acoplamento, todos considerando o caso linear e não linear. Entre os exemplos analisados, dois deles são comumente apresentados como forma de validação em outros trabalhos, caso da coluna poro-elástica e do exemplo de Schiffman. Para validação do caso poro-elastoplástico foi construído um modelo da coluna usando o *software* Abaqus e os resultados obtidos foram comparados com os resultados obtidos com a versão do PORO modificada, apresentando boa concordância.

Além disso, a expansão das classes tornou possível a simulação do problema puramente mecânico considerando o caso linear e não linear. Com isso foi possível validar as

alterações no código em função da consideração da teoria da plasticidade utilizado modelos construídos no PORO e FEMOOP. Os resultados obtidos para essas simulações somados aos obtidos no caso das simulações com o Abaqus assegurou a validade do novo código computacional e dessa forma foram simulados outros exemplos poro-mecânico considerando a não linearidade do modelo mecânico.

Em todos os exemplos foi possível identificar a influência da consideração da não linearidade na simulação. Ao atingir o limite elástico e ativar as equações da plasticidade, o fluxo do programa é alterado porque é necessário alterar a matriz de rigidez do problema e realizar um processo iterativo até que a convergência seja atingida em cada incremento de tempo do problema transiente. O custo computacional torna-se mais elevado e a matriz de rigidez torna-se aos poucos mais flexível, reduzindo a velocidade de transferência de tensões entre o maciço e o fluido. Esses comportamentos foram observados em todos os modelos e retratam o comportamento real em modelos dessa natureza.

O aumento no custo computacional justifica a construção do penúltimo capítulo, que apresenta e discute a importância da aplicação de estratégias de otimização em programas computacionais. Os resultados obtidos em cada implementação das estratégias também demonstram que o uso de bibliotecas otimizadas é recomendável em algoritmos que tratam de cálculos numéricos usuais (solução de sistemas, operações com matrizes e vetores, etc.). Usando essas bibliotecas o programador pode se concentrar nas regiões do código em que a lógica de programação não permite otimizações automáticas.

É importante ressaltar que as alterações feitas no código para consideração da teoria da plasticidade e otimização do código representam um passo inicial na concepção de um programa de elementos finitos poro-mecânico não linear. Diversas modificações podem ser feitas para expansão do código e otimização. Recomenda-se, por exemplo, a implementação de modelos constitutivos mais apropriados para solos e o uso de funções de otimização específicas.

Em síntese, esse trabalho apresenta como principais contribuições: O uso de diferentes funções de carregamento para substituição da necessidade de solução de um sistema de equações inicial, expansão das classes para consideração de modelos constitutivos não

lineares, alteração no código para permitir a simulação de problemas isolados (sem acoplamento), implementação e testes com modelos constitutivos não lineares e a descrição e implementação de algumas estratégias de otimização. A seguir são apresentadas algumas propostas para trabalhos futuros.

### **Sugestões para trabalhos futuros**

- Implementação de modelos constitutivos mais apropriados para simulação de problemas de geotecnia (Cam-Clay, Barcelona, etc.).
- Consideração da não linearidade do problema de fluxo fazendo a correção da permeabilidade como função das deformações no meio contínuo.
- Estudo e implementação de outras estratégias para solução de problemas acoplados (acoplamento explícito, acoplamento iterativo e desacoplado).
- Implementação de estratégias de otimização diretamente no código-fonte do programa e uso de MPI para o processamento paralelo.
- Atualização das variáveis de Biot em função das deformações do meio.
- Implementação de estratégias para consideração das condições iniciais.
- Análise mais detalhada com o modelo de Drucker-Prager para estudo do efeito da dilatância no meio.

## REFERÊNCIAS

BATHE, K. J. **Finite element procedures**. New Jersey: Prentice Hall, 1996.

BIOT, M. A. General theory of three-dimensional consolidation. **Journal of Applied Physics**, v. 12, n. 2, p. 155-164, Feb.1941.

BIOT, M. A; WILLIS, D. G. The elastic coefficients of the theory of consolidation. **Journal of Applied Mechanics**, p. 594-601, Dec. 1957.

BORBA, G. L. **Formulação direta do método dos elementos de contorno para tratamento do estado plano da poroelasticidade acoplada**. 1992. 160 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Petróleo) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

CARTER, J. P.; BOOKER, J. R.; SMALL, J. C. The analysis of finite elasto-plastic consolidation. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**. v. 3, p. 107-129, 1979.

CRYER, C. W. A comparison of the three-dimensional consolidation theories of Biot and Terzaghi. **Q J Mechanics Appl Math**, v. 16. n. 4, p. 401-412, Nov. 1962.

DADVAND, P. **A framework for developing finite element codes for multi-disciplinary applications**. 2007. 290 f. Tese (Doutorado) – Universidade Politècnica de Catalunya, Barcelona, 2007.

DAS, B. M. **Fundamentos da engenharia geotécnica**. São Paulo: T. Learning, 2011. Tradução da 6. edição Norte-Americana.

FERNANDES, R. A. **Contribuição à análise fluxo-deformação com base na poromecânica**. 2009. 119 f. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2009.

FERNANDES, R. A. **Resolução da lista de exercícios de métodos matemáticos para engenharia**: notas de exercício do mestrado. Maceió: Universidade Federal de Alagoas, 2010.

FERREIRA, F. H. **Uma implementação numérica para a solução de problemas de poroelasticidade**. 1996. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1996.

FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **Um primeiro curso em elementos finitos**. Tradução de Ricardo Nicolau. Rio de Janeiro: LTC, 2009.



GIBSON, R. E.; ENGLAND, G. L.; HUSSEY, M. J. **The theory of one dimensional consolidation of clays.** *Giotechnique*, v.17, p. 261-273, 1967.

GUTIERREZ, M.; HANSTEEN, H. Fully coupled analysis of reservoir compaction and Subsidence. **Journal, European Petroleum Conference Held.** London, 1994.

IBAÑEZ, J. P. **Modelagem constitutiva para solos com ênfase em solos não saturados.** 2003. 241 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.

INOUE, N. **Um modelo acoplado para fluxo bifásico em meios porosos elastoplásticos.** 2005. 147 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil - Geotecnia) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

KOCHEN, R.; ZAGOTTIS, D. Conceitos básicos da teoria tridimensional do adensamento. **Solos e Rochas**, v. 6, n.2, p. 3-19, ago. 1983.

LEWIS, R. W.; ROBERTS, G. K.; ZIENKIEWICZ, C. A non-linear flow and deformation analysis of consolidated problems. In: INTERNACIONAL CONFERENCE NUMERICAL METHODS IN GEOMECHANICS, 2<sup>nd</sup>. 1976, Belgrade. **Proceedings.** Belgrade, 1976. p. 1106-1118.

MANOHARAN, N.; DASGUPTA, S. P. Consolidation analysis of elasto-plastic soil. **Computers & Structures**, v. 54, n. 6, p. 1005-1021, 1995.

MARTHA, L. F. et al. An OOP class organization for materially nonlinear finite element analysis. In: IBERO-LATIN AMERICAN CONFERENCE OF COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 17<sup>th</sup>, 1996, Pádova. **Proceedings...** Pádova, 1996. p. 229-232.

NAVEIRA, V. P. **Incorporação dos efeitos geomecânicos de compactação e subsidência na simulação de reservatórios de petróleo.** 2008. 122 f. Dissertação (Mestrado em Ciências em Engenharia Civil) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

NAYLOR, D. J. **Computational methods for geotechnical problems.** Swansea:University College of Swansea. Department of Civil Engineering, 1987.

PEREIRA, L. C. **Simulação de fluxo em reservatórios sob efeito da compactação.** 2007. 147 f. Dissertação (Mestrado em Ciências em Engenharia Civil) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

PHILLIPS, P. J.; WHEELER, M. F. Acoupling of mixed and continuous Galerkin finite element methods for poroelasticity I: the continuous in time case. M. F. **Computational Geosciences. Springer Science + Business Media**. v. 11, n. 2, p. 131-144. 2007.

PINTO, C. D. **Curso básico de mecânica dos solos**. São Paulo, Brasil: Oficina de Textos, 2009.

RENDULIC, L. Porenziffer und porenwasserdruck in tonen. **Der Bauingenieur**, v. 17, p. 559-564, 1936.

RICE, J. R.; CLEARY, M. P. Some basic stress diffusion solutions for fluid saturated elastic porous media with compressible constituents. **Reviews of Geophysics and Space Physics**. v. 14, n. 2, p. 227-241, 1976.

SANDHU, R. S.; WILSON, E. L. Finite-element analysis of seepage in elastic media. **ASCE: Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 95, n. 3, p. 641-652, 1969.

SCHIFFMAN, R. L.; CHEN, A. T-F.; JORDAN, J. C. An analysis of consolidation theory. **Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division**, v. 95, n. SM1, p. 295-312, 1969.

SENA, M. C. **Análise linear acoplada fluxo-deformação com base na teoria da poroelasticidade de Biot**. 2008. 119 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Monografia). Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2008.

SETTARI, A.; WALTERS, D. A. Advances in coupled geomechanical and reservoir modeling with applications to reservoir compaction. **SPE Journal**, v. 6, n. 3, p. 334-342, Sept. 2001.

SHAMES, I. H.; COZZARELLI, F.A. **Elastic and inelastic stress analysis**. New York: Prentice-Hall International, 1992.

SILVA, R. M. **Uma metodologia para o tratamento de problemas da mecânica dos sólidos com redefinição de domínio utilizando a técnica de relaxação dinâmica**. 2005. 138 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Alagoas. Maceió, 2005.

SIMO, J. C.; HUGES, T. J. R. **Computational inelasticity**, New York: Springer-Verlag. 1998.

SIQUEIRA, C. A. **Um sistema orientado por objetos para análise numérica da poroelasticidade acoplada pela técnica dos elementos finitos**. 1995. 125 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Petróleo). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.

SOUZA NETO, E. A.; PERIC, D.; OWEN, D. R. J. **Computational methods for plasticity: theory and applications**. Wiley: John Wiley & Sons, 2008.

STEWART, J. **Cálculo**. 4. ed., São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2005. v. 2.

TERZAGHI, K. **Die berechnung der durchlässigkeitsziffer des tones aus dem verlauf der hydrodynamischen spannungserscheinungen**. **Sitz. Akad. Wissen.**, Wien Math. Naturwiss, v. 132, p. 125-138, 1923.

WAN, J. **Stabilized finite element methods for coupled geomechanics and multiphase flow**. 2002. 180 f. Dissertação (Doutorado em Filosofia) – Stanford University Press, Palo Alto, 2002.

WANG, H. F. **Theory of Linear poroelasticity with applications to geomechanics and hydrogeology**. New Jersey: Princeton University Press, 2000.

## APÊNDICE A – Detalhamento das equações acopladas

Nesse apêndice são detalhados os termos presentes nas Eqs. (3.31) e (3.32) de maneira idêntica ao detalhamento apresentado no trabalho de Fernandes (2009). É importante ressaltar que essa descrição não é direcionada para uma análise em particular (estado plano de tensões, deformações ou estado axissimétrico). Por essa razão, as matrizes apresentadas são descritas em detalhes.

### A.1 – Discretização da Equação Governante do Problema Mecânico

Inicialmente resgata-se a equação deduzida no Capítulo 3 para o problema mecânico com um termo de acoplamento do problema de fluxo. A dedução dessa expressão foi apresentada na Eq. (3.27) e é resgatada abaixo.

$$\sum_{n=1}^{n\_ele} \left( \int_{\Omega_e} \sigma_{ji}' w_j d\Omega_e - \int_{\Omega_e} \alpha p w_j \delta_{ij} d\Omega_e \right) = \sum_{n=1}^{n\_ele} \left( \int_{\Omega_e} w \bar{b}_i d\Omega_e + \int_{\Gamma_{\sigma_e}} w \bar{t}_i d\Gamma_{\sigma} \right)$$

Para facilitar o detalhamento dessa equação, essa equação é reescrita de maneira simplificada como

$$\sum_{n=1}^{n\_ele} (M1) - \sum_{n=1}^{n\_ele} (M2) = \sum_{n=1}^{n\_ele} (M3) \quad (A.1)$$

A etapa seguinte é a dedução de cada termo.

#### ▪ Detalhamento do termo M1

O termo M1 é definido como

$$M1 = \int_{\Omega_e} \sigma_{ji}' w_j d\Omega_e \quad (A.2)$$

A relação entre a deformação e a tensão é determinada pelo modelo constitutivo adotado. No problema mecânico, o tensor de tensões efetivas e o tensor de deformações estão relacionados pela equação constitutiva

$$[\sigma'] = [D'][\varepsilon] \quad (\text{A.3})$$

onde  $[D']$  é a matriz constitutiva para as tensões efetivas.

Para o regime de pequenos deslocamentos é válida a Eq. (2.39), em que as deformações são obtidas por derivadas dos deslocamentos. Em formato matricial, o tensor de deformações pode ser escrito como

$$[\varepsilon] = [\nabla][u] \quad (\text{A.4})$$

onde  $[\nabla]$  é um operador diferencial aplicado aos deslocamentos.

O campo de deslocamento no MEF é descrito pela combinação de funções de forma e deslocamentos nodais, conforme

$$\{u\} = [N_d]\{d\} \quad (\text{A.5})$$

Substituindo a Eq. (A.5) na Eq. (A.4), tem-se o tensor deformação escrito em função dos deslocamentos, ou seja,

$$[\varepsilon] = [\nabla][N_d]\{d\} \quad (\text{A.6})$$

O operador diferencial aplicado às funções de forma pode ser substituído pela matriz  $[B]$ . No caso particular que trata dos deslocamentos, tem-se  $[B_d]$ . Essa matriz é também

denominada “matriz das derivadas das funções de forma”. Substituindo essa matriz na Eq. (A.6) e em seguida, substituindo na equação (A.3), tem-se

$$[\sigma'] = [B_d]^T [D'] \{d\} \quad (\text{A.7})$$

Pelo método de Galerkin, tem-se que as funções de ponderações devem ser as mesmas utilizadas para interpolação das variáveis de estado. No caso dos deslocamentos, definidas por  $[N_d]$ . Assim, o termo  $w_j$  pode ser definido como

$$[w_j] = [N_{d,j}] = [\nabla][N_d] = [B_d] \quad (\text{A.8})$$

A substituição das Eqs. (A.7) e (A.8) na Eq. (A.2) resulta em

$$M1 = \int_{\Omega_e} [B_d]^T [D'] [B_d] d\Omega_e \{d_e\} \quad (\text{A.9})$$

Substituindo o somatório presente na Eq. (A.1) define-se

$$\sum_{n=1}^{n_{\text{ele}}} (M1) = \sum_{n=1}^{n_{\text{ele}}} \left( \int_{\Omega_e} [B_d]^T [D'] [B_d] d\Omega_e \{d\} \right) \sum_{n=1}^{n_{\text{ele}}} \{d_e\} \quad (\text{A.10})$$

de onde é definido o produto matricial

$$[K_{MM}] \{d\} = \sum_{n=1}^{n_{\text{ele}}} \left( \int_{\Omega_e} [B_d]^T [D'] [B_d] d\Omega_e \right) \sum_{n=1}^{n_{\text{ele}}} \{d_e\} \quad (\text{A.11})$$

#### ▪ **Detalhamento do termo M2**

O termo M2 é definido como

$$M2 = \int_{\Omega_e} \alpha p w_j \delta_{ij} d\Omega_e \quad (\text{A.12})$$

onde  $\alpha$  deve representar as contribuições de Biot-Willis nas direções normais. Conforme descrito anteriormente, no caso tridimensional, esse vetor assume a forma

$$\{\alpha\} = \{\alpha \ \alpha \ \alpha \ 0 \ 0 \ 0\}^T \quad (\text{A.13})$$

De maneira idêntica ao deslocamento, a poropressão também é aproximada pela combinação de funções de forma e poropressões nodais, conforme a Eq. (3.30). Em formato matricial, essa equação pode ser definida como

$$\{\mathbf{p}\} = [N_p]\{p\} \quad (\text{A.14})$$

onde  $\{\mathbf{p}\}$  são as poropressões e  $\{p\}$  as poropressões nodais.

O termo  $w_j$  é substituído de maneira idêntica ao apresentado anteriormente por

$$[w_j] = [N_{p,j}] = [\nabla][N_p] = [B_p] \quad (\text{A.15})$$

Substituindo as Eqs. (A.13), (A.14) e (A.15) na Eq. (A.12) tem-se

$$M2 = \int_{\Omega_e} [B_p]^T \{\alpha\} [N_p] d\Omega_e \{p_e\} \quad (\text{A.16})$$

Inserindo o somatório presente na Eq. (A.1) permite a definição de

$$\sum_{n=1}^{n_{\text{ele}}} (M2) = \sum_{n=1}^{n_{\text{ele}}} \left( \int_{\Omega_e} [B_p]^T \{\alpha\} [N_p] d\Omega_e \right) \sum_{n=1}^{n_{\text{ele}}} \{p_e\} \quad (\text{A.17})$$

de onde se define

$$[K_{MF}]\{p\} = \sum_{n=1}^{n_{ele}} \left( \int_{\Omega_e} [B_p]^T \{\alpha\} [N_p] d\Omega_e \right) \sum_{n=1}^{n_{ele}} \{p_e\} \quad (A.18)$$

▪ **Detalhamento do termo M3**

O termo M3 é definido como

$$M3 = \int_{\Omega_e} w \bar{b}_i d\Omega_e + \int_{\Gamma_{\sigma_e}} w \bar{t}_i d\Gamma_{\sigma} \quad (A.19)$$

Como a dedução é baseada no Método de Galerkin, a função ponderadora ( $w$ ) é substituída pela função de forma utilizada na interpolação dos deslocamentos ( $N_p$ ). Dessa forma, a Eq. (A.19) pode ser definida como

$$M3 = \int_{\Omega_e} [N_d] \{\bar{b}\} d\Omega_e + \int_{\Gamma_{\sigma_e}} [N_d] \{t\} d\Gamma_{\sigma} \quad (A.20)$$

onde  $\{\bar{b}\}$  é um vetor de forças no domínio e  $\{t\}$  um vetor de prescrição de tensões no contorno. Substituindo a Eq. (A.20) em (A.1), define-se

$$[f_M] = \sum_{n=1}^{n_{ele}} \left( \int_{\Omega_e} [N_p] \{\bar{b}\} d\Omega_e + \int_{\Gamma_{\sigma_e}} [N_p] \{t\} d\Gamma_{\sigma} \right) \quad (A.21)$$

A substituição de cada termo deduzido na Eq. (3.27) resulta na equação do problema mecânico no formato matricial, ou seja,

$$[K_{MM}]\{d\} - [K_{MF}]\{p\} = \{f_M\} \quad (A.22)$$



## A.2 – Discretização da Equação Governante do Problema de Fluxo

A equação para o problema de fluxo com acoplamento de um termo mecânico foi deduzida no Capítulo 3 e sua equação foi definida na Eq. (3.28), descrita abaixo.

$$\sum_{n=1}^{n\_ele} \left( \int_{\Omega_e} w \zeta_{,t} d\Omega + \int_{\Omega_e} k p_{,i} w_{,i} d\Omega \right) = \sum_{n=1}^{n\_ele} \left( - \int_{\Gamma_{ve}} w \bar{v}_n d\Gamma_v \right)$$

A substituição da Eq. (2.48) em (3.28) resulta em

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{n\_ele} \left( \int_{\Omega_e} w \alpha \varepsilon_{kk,t} d\Omega + \int_{\Omega_e} w \frac{1}{Q} p_{,t} d\Omega + \int_{\Omega_e} k p_{,i} w_{,i} d\Omega \right) \\ = - \sum_{n=1}^{n\_ele} \left( \int_{\Gamma_{ve}} w \bar{v}_n d\Gamma_v \right) \end{aligned} \quad (A.23)$$

Com o mesmo processo descrito no problema mecânico, a Eq. (3.27) é reescrita como

$$\sum_{n=1}^{n\_ele} (F1) + \sum_{n=1}^{n\_ele} (F2) + \sum_{n=1}^{n\_ele} (F3) = - \sum_{n=1}^{n\_ele} (F4) \quad (A.24)$$

### ▪ Detalhamento do termo F1

O termo F1 é definido como

$$F1 = \int_{\Omega_e} w \alpha \varepsilon_{kk,t} d\Omega \quad (A.25)$$

Pelo Método de Galerkin, a função ponderadora é substituída pelas funções de forma para as poropressões, resultando  $w = [N_p]$ . As contribuições do coeficiente de Biot-Willis já foram apresentadas anteriormente e são representados pelo vetor  $\{\alpha\}$ .

Definindo-se mais uma vez  $\nabla$  como um operador diferencial, a deformação volumétrica ( $\varepsilon_{kk}$ ) pode ser definida como  $[\nabla]\{u\}$ . Como o termo requer a derivada temporal dessa deformação, isso é aplicado aos deslocamentos, pois  $\nabla$  é apenas um operador. O campo de deslocamentos é aproximado pelos deslocamentos nodais e dessa forma, a derivada do vetor de deslocamento é transferida para o vetor de deslocamentos nodais, o que resulta em

$$\varepsilon_{kk,t} = [\nabla]\{\dot{u}\} = [\nabla][N_d]\{\dot{d}\} = [B_d]\{\dot{d}\} \quad (\text{A.26})$$

Essas considerações aplicadas na Eq. (A.25) resultam em

$$F1 = \int_{\Omega_e} [B_d]^T \{\alpha\} [N_d] d\Omega \{\dot{d}_e\} \quad (\text{A.27})$$

Inserindo o somatório presente na Eq. (A.24) tem-se

$$\sum_{n=1}^{n_{\text{ele}}} (F1) = \sum_{n=1}^{n_{\text{ele}}} \left( \int_{\Omega_e} [N_d]\{\alpha\}[B_d] d\Omega \right) \sum_{n=1}^{n_{\text{ele}}} \{\dot{d}_e\} \quad (\text{A.28})$$

de onde se define

$$[K_{MF}]\{\dot{d}\} = \sum_{n=1}^{n_{\text{ele}}} \left( \int_{\Omega_e} [N_d]\{\alpha\}[B_d] d\Omega \right) \sum_{n=1}^{n_{\text{ele}}} \{\dot{d}_e\} \quad (\text{A.29})$$

#### ▪ Detalhamento do termo F2

O termo F2 é definido como

$$F2 = \int_{\Omega_e} w \frac{1}{Q} p_{,t} d\Omega \quad (\text{A.30})$$

Nesse termo, mais uma vez a função ponderadora é substituída pelas funções de forma que interpolam as poropressões. O termo  $1/Q$  é constante e o termo associado à poropressão é inicialmente escrito pela combinação de funções de forma e poropressões nodais (Eq. (3.30)).

De maneira análoga a descrição anterior, a derivada temporal da poropressão é transferida para as poropressões nodais, conforme equação

$$p_{,t} = [N_p]\{\dot{p}_e\} \quad (\text{A.31})$$

Com essas considerações a Eq. (A.30) pode ser escrita como

$$F2 = \int_{\Omega_e} [N_p]^T \frac{1}{Q} [N_p] d\Omega \{\dot{p}_e\} \quad (\text{A.32})$$

Inserindo o somatório presente na Eq. (A.24), tem-se que

$$\sum_{n=1}^{n_{\text{ele}}} (F2) = \sum_{n=1}^{n_{\text{ele}}} \left( \int_{\Omega_e} [N_p]^T \frac{1}{Q} [N_p] d\Omega \right) \sum_{n=1}^{n_{\text{ele}}} \{\dot{p}_e\} \quad (\text{A.33})$$

de onde se define

$$[C_{FF}]\{\dot{p}\} = \sum_{n=1}^{n_{\text{ele}}} \left( \int_{\Omega_e} [N_p]^T \frac{1}{Q} [N_p] d\Omega \right) \sum_{n=1}^{n_{\text{ele}}} \{\dot{p}_e\} \quad (\text{A.34})$$

▪ **Detalhamento do termo F3**

O termo F3 é definido como

$$F3 = \int_{\Omega_e} k p_{,i} w_{,i} d\Omega \quad (\text{A.35})$$

O parâmetro  $k$  é o parâmetro relacionado à condutividade hidráulica e é representado por um escalar que deve atuar apenas nas direções normais. O parâmetro  $p_i$  e  $w_i$  já foram detalhados na descrição dos termos anteriores. Substituindo todos esses termos na Eq. (A.35) tem-se

$$F3 = \int_{\Omega_e} [B_d]^T k [I] [B_d] d\Omega \{p_e\} \quad (A.36)$$

Substituindo esse termo na Eq. (A.24) tem-se

$$\sum_{n=1}^{n_{ele}} (F3) = \sum_{n=1}^{n_{ele}} \left( \int_{\Omega_e} [B_d]^T k [I] [B_d] d\Omega \{p_e\} \right) \sum_{n=1}^{n_{ele}} \{p_e\} \quad (A.37)$$

de onde se define

$$[K_{FF}]\{p\} = \sum_{n=1}^{n_{ele}} \left( \int_{\Omega_e} [B_d]^T k [I] [B_d] d\Omega \right) \sum_{n=1}^{n_{ele}} \{p_e\} \quad (A.38)$$

#### ▪ **Detalhamento do termo F4**

O termo F4 é definido como

$$F4 = \int_{\Gamma_{ve}} w \bar{v}_n d\Gamma_v \quad (A.39)$$

A função ponderadora é substituída pela função de forma que interpola as poropressões e  $\bar{v}_n$  é substituído pelo vetor de fluxo normal ao contorno, ou seja,

$$F4 = \int_{\Gamma_{ve}} [N_p] \{\bar{v}_n\} d\Gamma_v \quad (A.40)$$

Substituindo esse termo na Eq. (A.24) tem-se o termo

$$\sum_{n=1}^{n\_ele} (F4) = \sum_{n=1}^{n\_ele} \left( \int_{\Gamma_{ve}} [N_p] \{\bar{v}_n\} d\Gamma_v \right) \quad (A.41)$$

de onde se pode definir

$$[f_V] = \sum_{n=1}^{n\_ele} \left( \int_{\Omega_e} [B_d]^T k [I] [B_d] d\Omega \right) \quad (A.42)$$

Substituindo todas as matrizes deduzidas, tem-se o sistema de equações para o problema fluxo-deformação acoplado descrito nas Eqs. (3.31) e (3.32).

$$[K_{MM}]\{d\} - [K_{MF}]\{p\} = \{f_M\}$$

$$[K_{MF}]^T\{\dot{d}\} + [C_{FF}]\{\dot{p}\} + [K_{FF}]\{p\} = \{f_V\}$$

## ANEXO A – Solução Analítica para a Teoria de Terzaghi

Utilizando o Método da Separação de Variáveis, escreve-se a equação diferencial básica do adensamento unidimensional (Eq. 2.18) através do produto das funções  $F$  e  $G$ .

$$p(z, t) = F(z)G(t) \quad (\text{A.1})$$

onde  $F$  é uma função que depende apenas da coordenada espacial  $z$  e  $G$  é uma função que depende apenas da coordenada temporal  $t$ .

Dessa forma, podem-se escrever os termos presentes na Eq. 2.18 como

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = F'' G \qquad \frac{\partial p}{\partial t} = F \dot{G} \quad (\text{A.2})$$

A equação diferencial do adensamento pode ser escrita em função de  $F$  e  $G$ ,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \implies F \dot{G} = c_v F'' G \quad (\text{A.3})$$

ou ainda, isolando cada função em cada lado da igualdade, o que resulta em

$$\frac{\dot{G}}{c_v G} = \frac{F''}{F} = k \quad (\text{A.4})$$

O termo  $k$  é a razão entre as funções dependentes da coordenada espacial  $z$  e temporal  $t$ . A consideração desse termo constante permite a divisão da Eq. A.4 em duas equações diferenciais ordinárias, definidas no sistema de equações

$$\begin{cases} F'' - kF = 0 \\ \dot{G} - c_v kG = 0 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

A etapa seguinte consiste em analisar os valores que essa constante  $k$  pode assumir. Dependendo do sinal  $k$ , têm-se diferentes soluções para a primeira equação.

Adotando  $k = 0$ , tem-se que

$$F'' - kF = 0 \Rightarrow F'' = 0 \Rightarrow F' = A \Rightarrow F = Az + B$$

Aplicando as condições de contorno do problema, tem-se que

$$p(z = 0, t) = 0 \Rightarrow F(0)G(t) = 0 \Rightarrow F(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$p(z = 2H_{dr}, t) = 0 \Rightarrow F(2H_{dr})G(t) = 0 \Rightarrow F(2H_{dr}) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$A = 0; B = 0 \Rightarrow F(z) = 0 \text{ (inviável)}$$

Adotando  $k > 0$ , encontra-se como solução candidata a função

$$F'' - kF = 0 \Rightarrow F'' - \mu^2 F = 0 \Rightarrow F = Ae^{\mu z} + Be^{-\mu z}$$

Aplicando as condições de contorno do problema,

$$p(z = 0, t) = 0 \Rightarrow F(0)G(t) = 0 \Rightarrow F(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0$$

$$\begin{aligned} p(z = 2H_{dr}, t) = 0 &\Rightarrow F(2H_{dr})G(t) = 0 \Rightarrow F(2H_{dr}) = 0 \\ &\Rightarrow Ae^{2\mu H_{dr}} + Be^{-2\mu H_{dr}} = 0 \end{aligned}$$

$$A = 0; B = 0 \Rightarrow F(z) = 0 \text{ (inviável)}$$

Por fim, adota-se  $k < 0$  e o sistema de equações pode ser formatado conforme

$$\begin{cases} F'' + \mu^2 F = 0 \\ \dot{G} + c_v \mu^2 G = 0 \end{cases}$$

De maneira idêntica ao procedimento anterior, resolvem-se as duas equações diferenciais ordinárias desse sistema.

Inicialmente resolve-se a equação  $F'' + \mu^2 F = 0$ . Por se tratar de uma equação diferencial ordinária linear de 2ª ordem homogênea, pode-se representá-la em um formato mais geral, estabelecido como

$$F''(z) + p_1(z)F'(z) + p_0(z)F(z) = 0 \quad (\text{A.6})$$

Analisando essa equação e a primeira equação do sistema proposto, admite-se que  $p_1 = 0$  e  $p_0 = \mu^2$ . Avaliando a equação característica, definida como  $\lambda^2 + p_1\lambda + p_0 = 0$ , tem-se que

$$\lambda^2 + \mu^2 = 0 \quad (\text{A.7})$$

A solução dessa equação corresponde às raízes imaginárias  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , onde

$$\lambda_1 = |\mu|i \quad \lambda_2 = -|\mu|i \quad (\text{A.8})$$

Assim sendo, chega-se à seguinte solução geral para a equação:

$$F(z) = A \cos(|\mu|z) + B \sin(|\mu|z) \quad (\text{A.9})$$

Aplicando-se as mesmas condições de contorno,

$$p(z = 0, t) = 0 \Rightarrow F(0)G(t) = 0 \Rightarrow F(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$p(z = 2H_{dr}, t) = 0 \Rightarrow F(2H_{dr})G(t) = 0 \Rightarrow F(2H_{dr}) = 0$$

$$\Rightarrow B \sin(2|\mu|H_{dr}) = 0$$

Para se obter a solução não trivial ( $B \neq 0$ ), tem-se que,



$$\sin(2|\mu|H_{dr}) = 0 \Rightarrow 2|\mu|H_{dr} = n\pi \quad (\text{A.10})$$

ou ainda,

$$|\mu| = \frac{n\pi}{2H_{dr}} \quad (\text{A.11})$$

onde  $n$  é um número inteiro positivo. Com isso, pode-se determinar a função  $F$  como função de  $n$ , ou seja,

$$F_n(z) = B_n \sin\left(\frac{n\pi z}{2H_{dr}}\right) \quad (\text{A.12})$$

A etapa seguinte é a solução da segunda equação do sistema, definida como  $\dot{G} + c_v\mu^2 G = 0$ . Resolvendo-se essa equação diferencial, tem-se que

$$\ln(G) = -c_v\mu^2 t + C \Rightarrow G(t) = C \exp(-c_v\mu^2 t) \quad (\text{A.13})$$

Ao substituir a Eq. A.11 na Eq. A.13, tem-se a função  $G$  como

$$G(t) = C_n \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \frac{c_v t}{H_{dr}^2}\right] \quad (\text{A.14})$$

Combinando as soluções encontradas para as equações diferenciais, tem-se que

$$p_n(z, t) = F_n(z)G_n(t) \quad (\text{A.15})$$

$$p_n(z, t) = D_n \sin\left(\frac{n\pi z}{2H_{dr}}\right) \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \frac{c_v t}{H_{dr}^2}\right]$$

onde o coeficiente  $D_n$  é gerado pelo produto entre  $B_n$  e  $C_n$ .

Pela validade do Princípio da Superposição, escreve-se a função referente ao excesso de poropressão  $p(z, t)$  como sendo

$$p(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(z, t) \quad (\text{A.16})$$

ou ainda

$$p(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ D_n \sin\left(\frac{n\pi z}{2H_{dr}}\right) \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \frac{c_v t}{H_{dr}^2}\right] \right\} \quad (\text{A.17})$$

onde o coeficiente  $D_n$  pode ser determinado através da imposição da condição inicial,

$$p(z, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi z}{2H_{dr}}\right) = p_0 \quad (\text{A.18})$$

Multiplicando ambos os lados da equação por  $\sin\left(\frac{q\pi z}{2H_{dr}}\right)$ , e integrando em  $z$ ,

$$\int_0^{2H_{dr}} \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi z}{2H_{dr}}\right) \sin\left(\frac{q\pi z}{2H_{dr}}\right) dz = \int_0^{2H_{dr}} p_0 \sin\left(\frac{q\pi z}{2H_{dr}}\right) dz \quad (\text{A.19})$$

onde a integral do lado esquerdo da igualdade é não nula se apenas  $q = n$ .

Dessa forma, tem-se que,

$$\int_0^{2H_{dr}} D_n \left[ \sin\left(\frac{n\pi z}{2H_{dr}}\right) \right]^2 dz = \int_0^{2H_{dr}} p_0 \sin\left(\frac{n\pi z}{2H_{dr}}\right) dz \quad (\text{A.20})$$

ou ainda,

$$D_n H_{dr} = \frac{2p_0 H_{dr}}{\pi n} [1 - (-1)^n] \quad (\text{A.21})$$

evidenciando  $D_n$ ,

$$D_n = \frac{2p_0}{\pi n} [1 - (-1)^n] \quad (\text{A.22})$$

Para que  $D_n$  seja não nulo, deve-se tomar  $n$  como sendo um número ímpar, logo,

$$D_n = \frac{4p_0}{\pi n} \quad \therefore \quad n = 2m + 1$$

Dessa forma, pode-se escrever o excesso de poropressão  $p$  em função da coordenada espacial  $z$  e temporal  $t$ , como

$$p(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{4p_0}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi z}{2H_{dr}}\right) \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \frac{c_v t}{H_{dr}^2}\right] \right\} \quad (\text{A.23})$$

Como  $n$  é ímpar, substitui-se  $n$  por  $2m + 1$ , obtendo-se,

$$p(z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{4p_0}{\pi(2m+1)} \sin\left(\frac{(2m+1)\pi z}{2H_{dr}}\right) \exp\left[-\left[\frac{\pi}{2}(2m+1)\right]^2 \frac{c_v t}{H_{dr}^2}\right] \right\} \quad (\text{A.24})$$

Adotando  $M = \frac{\pi}{2}(2m+1)$  e um fator adimensional de tempo  $T_v$ ,

$$T_v = \frac{c_v t}{H_{dr}^2} \quad (\text{A.25})$$

pode-se reescrever  $p(z, t)$ , obtendo-se,

$$p(z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{2p_0}{M} \sin\left(\frac{Mz}{H_{dr}}\right) \exp(-M^2 T_v) \right] \quad (\text{A.26})$$

## ANEXO B – Arquivo para simulação da coluna no Abaqus

```

*Heading
** Job name: Job-2 Model name: Model-1
** Generated by: Abaqus/CAE 6.10-1
*Preprint, echo=NO, model=NO, history=NO, contact=NO
**
** PARTS
**
*Part, name=Coluna
*Node
  1, 0., 0.
  2, 0.100000001, 0.
  3, 0., 0.100000001
  4, 0.100000001, 0.100000001
  5, 0., 0.200000003
  6, 0.100000001, 0.200000003
  7, 0., 0.300000012
  8, 0.100000001, 0.300000012
  9, 0., 0.400000006
  10, 0.100000001, 0.400000006
  11, 0., 0.5
  12, 0.100000001, 0.5
  13, 0., 0.600000024
  14, 0.100000001, 0.600000024
  15, 0., 0.699999988
  16, 0.100000001, 0.699999988
  17, 0., 0.800000012
  18, 0.100000001, 0.800000012
  19, 0., 0.899999976
  20, 0.100000001, 0.899999976
  21, 0., 1.
  22, 0.100000001, 1.
  23, 0.0500000007, 0.
  24, 0.100000001, 0.0500000007
  25, 0.0500000007, 0.100000001
  26, 0., 0.0500000007
  27, 0.100000001, 0.150000006
  28, 0.0500000007, 0.200000003
  29, 0., 0.150000006
  30, 0.100000001, 0.25
  31, 0.0500000007, 0.300000012
  32, 0., 0.25
  33, 0.100000001, 0.350000024
  34, 0.0500000007, 0.400000006
  35, 0., 0.350000024
  36, 0.100000001, 0.449999988
  37, 0.0500000007, 0.5
  38, 0., 0.449999988
  39, 0.100000001, 0.550000012
  40, 0.0500000007, 0.600000024
  41, 0., 0.550000012
  42, 0.100000001, 0.649999976
  43, 0.0500000007, 0.699999988
  44, 0., 0.649999976
  45, 0.100000001, 0.75
  46, 0.0500000007, 0.800000012
  47, 0., 0.75
  48, 0.100000001, 0.850000024
  49, 0.0500000007, 0.899999976
  50, 0., 0.850000024
  51, 0.100000001, 0.949999988
  52, 0.0500000007, 1.
  53, 0., 0.949999988
*Element, type=CPE8R
  1, 1, 2, 4, 3, 23, 24, 25, 26
  2, 3, 4, 6, 5, 25, 27, 28, 29
  3, 5, 6, 8, 7, 28, 30, 31, 32
  4, 7, 8, 10, 9, 31, 33, 34, 35
  5, 9, 10, 12, 11, 34, 36, 37, 38
*Nset, nset=_PickedSet4, internal, instance=Coluna-1
  1, 2, 23
*Elset, elset=_PickedSet4, internal, instance=Coluna-1
  1,
*Nset, nset=_PickedSet5, internal, instance=Coluna-1
  1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16
  17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 29, 30, 32, 33, 35, 36, 38
  39, 41, 42, 44, 45, 47, 48, 50, 51, 53
*Elset, elset=_PickedSet5, internal, instance=Coluna-1,
generate
  1, 10, 1
*Elset, elset=__PickedSurf6_S3, internal, instance=Coluna-1
  10,
*Surface, type=ELEMENT, name=_PickedSurf6, internal
__PickedSurf6_S3, S3
*End Assembly
**
** MATERIALS
**
*Material, name=Material
*Drucker Prager
0.,1.,0.
*Drucker Prager Hardening
2.5e+06, 0.
5e+06, 0.005
*Elastic
1e+10,0.
** -----
**
** STEP: Step-1
**
*Step, name=Step-1, inc=20
*Static, direct
0.05, 1.,
**
** BOUNDARY CONDITIONS
**
** Name: BC-1 Type: Displacement/Rotation
*Boundary
_PickedSet4, 2, 2
** Name: BC-2 Type: Displacement/Rotation
*Boundary
_PickedSet5, 1, 1
**
** LOADS
**
** Name: Load-1 Type: Surface traction
*Dload, constant resultant=YES
_PickedSurf6, TRVEC, -1e+07, 0., 1., 0.
**
** OUTPUT REQUESTS
**
*Restart, write, frequency=0
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-2
**
*Output, field
*Node Output
U,
*Element Output, directions=YES
LE, PE, PEEQ, PEMAG, S
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-1
**
*Output, field, variable=PRESELECT
**
** HISTORY OUTPUT: H-Output-1
**

```

```
6, 11, 12, 14, 13, 37, 39, 40, 41
7, 13, 14, 16, 15, 40, 42, 43, 44
8, 15, 16, 18, 17, 43, 45, 46, 47
9, 17, 18, 20, 19, 46, 48, 49, 50
10, 19, 20, 22, 21, 49, 51, 52, 53
*Nset, nset=_PickedSet2, internal, generate
1, 53, 1
*Elset, elset=_PickedSet2, internal, generate
1, 10, 1
** Section: Section
*Solid Section, elset=_PickedSet2, material=Material
1,,
*End Part
**
**
** ASSEMBLY
**
*Assembly, name=Assembly
**
*Instance, name=Coluna-1, part=Coluna
*End Instance
**
```

\*Output, history, variable=PRESELECT  
\*End Step