



**Universidade Federal de Alagoas**  
**Centro de Tecnologia**  
**Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil**

Cidade Universitária – Campus A. C. Simões  
Tabuleiro do Martins – CEP 57072-970 – Maceió – Alagoas



**DANIEL ALMEIDA TENÓRIO**

***CONTRIBUIÇÃO À ANÁLISE DE LAJES NERVURADAS EM PAVIMENTOS DE  
GARAGEM***

MACEIÓ  
2011

**DANIEL ALMEIDA TENÓRIO**

***CONTRIBUIÇÃO À ANÁLISE DE LAJES NERVURADAS EM PAVIMENTOS DE  
GARAGEM***

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de concentração: Estruturas

Orientador: **Prof. Dr. Paulo César Correia Gomes**

Co-Orientador: **Prof. Dr. Jean Marie Désir**

MACEIÓ  
2011

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

**Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale**

T312c      Tenório, Daniel Almeida.  
              Contribuição à análise de lajes nervuradas em pavimentos de garagem /  
Daniel Almeida Tenório. – 2011.  
              119 f. : il. grafs. tabs.

Orientador: Paulo César Correia Gomes.  
Co- Orientador: Jean Marie Désir.  
Dissertação (mestrado em Engenharia Civil : Estruturas) – Universidade  
Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2011.

Bibliografia: f. 118-119.

1. Engenharia civil. 2. Método dos elementos finitos. 3. Grelha. 4. Laje  
nervurada unidirecional. 5. Laje nervurada bidirecional. I. Título.

CDU: 624.041/.042



Universidade Federal de Alagoas – UFAL  
Unidade Acadêmica Centro de Tecnologia – CTEC  
Programa de Pós-Graduação de Engenharia Civil – PPGEC



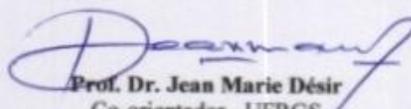
**CONTRIBUIÇÃO À ANÁLISE DE LAJES NERVURADAS EM  
PAVIMENTOS DE GARAGEM**

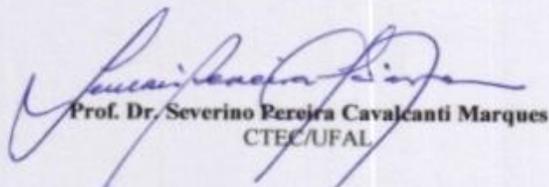
**DANIEL ALMEIDA TENÓRIO**

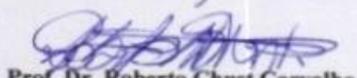
Dissertação submetida à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas e aprovada no dia 29 do mês de setembro do ano de 2011.

Banca Examinadora:

  
Prof. Dr. Paulo César Correia Gomes  
Orientador – CTEC/UFAL

  
Prof. Dr. Jean Marie Désir  
Co-orientador - UFRGS

  
Prof. Dr. Severino Pereira Cavalcanti Marques  
CTEC/UFAL

  
Prof. Dr. Roberto Chust Carvalho  
UFSCAR

Campus A. C. Simões, Av. Lourival de Melo Mota, S/N  
Tabuleiro do Martins – CEP 57072-970 – Maceió – Alagoas  
Tel/Fax: (82) 3214-1863  
E-mail: [ppgec@ctec.ufal.br](mailto:ppgec@ctec.ufal.br)  
Homepage: [www.ctec.ufal.br/posgraduacao/ppgec](http://www.ctec.ufal.br/posgraduacao/ppgec)

## AGRADECIMENTOS

Inicialmente agradeço a Deus por ter guiado minha vida e ter permitido este sonho.

Aos meus amados pais, Antônio Thomaz Tenório Fabrício e Dagmar de Almeida Goes Tenório Fabrício, exemplos de perseverança, trabalho, honestidade e amor. Ao meu irmão amado Thiago de Almeida Tenório, pelos inumeráveis conselhos e apoio nos momentos complicados.

Ao Prof. Dr. Paulo Cesar Correia Gomes pela orientação zelosa e pelo conhecimento transmitido durante todo o trabalho que, sem dúvida, estarão comigo por toda a vida. Sempre disposto e de bom ânimo para me aconselhar, minimizava minhas dificuldades, mostrando-me soluções, levando-me a persistir na caminhada respaldada em seu conhecimento e apoio, imprescindíveis a conclusão deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Jean Marie Désir pelo companheirismo e orientação zelosa, que enriqueceu o trabalho e tornou possível seu término com segurança.

Com carinho, ao Eng. Edward Louis de Mendonça Uchôa pela minha iniciação profissional e pelas inúmeras sugestões e ideias desprendidas durante o desenvolvimento do trabalho.

A todos os professores e docentes da UFRGS pela força e conhecimentos transmitidos durante minha breve passagem, em especial, à Prof.<sup>a</sup> Virgínia Maria Rosito d'Avila, ao Prof. Guillermo Juan Creus, ao Prof. João Ricardo Masuero e a Paulete Fridman Schwetz.

Agradeço a todos os professores da UFAL pelo excelente ensino durante a graduação e pós-graduação, em especial aos professores Severino Pereira Cavalcanti Marques, Aline da Silva Ramos Barboza, Wayne Santos de Assis e Roberto Barbosa dos Santos, pelas contribuições diretas ao trabalho.

Um agradecimento especial ao David Figueiredo, Rafael Marques e todos que de alguma forma ajudaram no desenvolvimento deste trabalho.

## RESUMO

Este trabalho está voltado para alguns pontos em aberto sobre verificações de serviço e dimensionamento das lajes nervuradas moldadas no local. O objetivo deste trabalho foi estudar e elucidar duas recomendações das normas brasileiras que apresentam valores diferentes das normas internacionais. A primeira diz respeito ao carregamento acidental para pavimentos garagem recomendado pela norma brasileira, onde não existe recomendação do uso de carregamentos concentrados, sendo o mesmo recomendado em normas internacionais. A segunda está relacionada às diferentes recomendações existentes entre a norma brasileira e as normas internacionais, no que tange ao cálculo da flexão da mesa das lajes nervuradas.

Para atender aos objetivos deste trabalho, algumas simulações numéricas de pavimentos contendo uma única laje nervurada, lançadas como lajes nervuradas unidirecionais e bidirecionais, foram feitas, utilizando o método dos elementos finitos e grelha através de programas de análises específicos. O foco da análise estrutural, voltou-se para a determinação dos momentos fletores máximos atuantes nas mesas das lajes nervuradas e as flechas.

As respostas dessas simulações mostraram que, para pavimentos garagem, considerando os carregamentos dos veículos atuais é necessária a consideração de carregamento acidental de cargas concentradas (veículos). Como a utilização em projetos estruturais dos carregamentos de cargas concentradas é um processo lento e complicado, foram definidos valores de carregamentos distribuídos que fornecessem flechas e momentos máximos nas nervuras iguais aos gerados, utilizando o carregamento acidental de cargas concentradas. Sobre as análises da flexão na mesa das lajes nervuradas, chegou-se a algumas recomendações, sendo parte destas em igualdade com a norma brasileira, outras com as normas internacionais e algumas diferentes em relação a todas as normas.

*Palavras Chave: Método dos Elementos Finitos. Grelha. Laje nervurada unidirecional. Laje nervurada bidirecional.*

## ABSTRACT

This work is turned to a structural element with a large number of scientific studies, waffle slab. The aim of this study was to elucidate two recommendations of the Brazilian codes that have different values of international codes. The first concerns the accidental loading to garage floor recommended by the Brazilian code, where there is not recommending the use of concentrated loads, the same being recommended by international codes. The second is related to the different recommendations between the Brazilian code and international codes regarding the calculation of the bending of the table of waffle slabs.

To meet the objectives of this work, some numerical simulations of floors containing a single waffle slab, modeled as one-way waffle slab and two-way waffle slab, were made using the finite element method and grillage analysis using specific software. The focus of structural analysis turned to determining the maximum bending moments acting on the flange of waffle slabs and arrows.

The answers to these simulations showed that for garage floors, it is important to consider concentrated loads (vehicles). As utilization in structural designs of concentrated loads is a process slow and complicated, were defined values of distributed loads to provide arrows and moments in the ribs equal to those generated by the concentrated loads. On the analysis of bending on the table of waffle slabs, some recommendations were found, some of these one being equal to the Brazilian code, and other to international codes and some different compared to all codes.

*Keywords: Finite Element Method. Grillage. One-way Waffle Slab. Two-way Waffle Slab.*

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Estrutura da laje nervurada moldada in loco .....	1
Figura 2 - Moldes plásticos para execução de lajes nervuradas e esquema de escoramento. ....	6
Figura 3 - Laje pré-moldada treliçada. ....	7
Figura 4 - Estrutura das nervuras da LNU e LNB.....	7
Figura 5 - Laje nervurada em duas direções, LNB.....	8
Figura 6 - Laje nervurada em uma direção, LNU. ....	8
Figura 7 - Elástica da laje nervurada e mesa. ....	11
Figura 8 - Distribuição das cargas concentradas. ....	14
Figura 9 - Elemento infinitesimal de placa. ....	17
Figura 10 - Estrutura de uma casca. ....	22
Figura 11 - Grelha equivalente de um pavimento. ....	25
Figura 12 - Seção transversal do elemento que representa as nervuras na grelha equivalente. ....	27
Figura 13 - Seção transversal do elemento que representa as vigas do pavimento na grelha .....	28
Figura 14 - Geometria e malhas de elementos finitos. ....	30
Figura 15 - Elementos de uma laje nervurada ortotrópica. ....	34
Figura 16 - Estrutura básica dos modelos de cálculo dos exemplos. ....	37
Figura 17 - Ilustração geométrica dos EMLNUB e disposição das cargas concentradas (medidas em cm). ....	40
Figura 18 - Ilustração geométrica dos cortes dos EMLNUB. ....	41
Figura 19 - Esquema das medidas geométricas dos veículos tipos. ....	46
Figura 20 - Geometria básica das lajes ensaiadas e área de aplicação da carga concentrada, em cm. ....	49
Figura 21 - Distribuição das tensões para o modelo numérico S4R - 10%. ....	51
Figura 22 - Determinação das flechas para $f_{ck}$ igual a: 20 MPa, 30 MPa, 40 MPa.....	54
Figura 23 - Modelo 65x65 com nervura de borda.....	56
Figura 24 - Modelo 65x65 sem nervura de borda. ....	57
Figura 25 - Estrutura geométrica e modelo de cálculo da viga-T, usados no pré-dimensionamento. ....	62
Figura 26 - Estrutura do modelo da viga.....	70
Figura 27 - Flechas para o $\lambda$ de 1,5, para o QC de 850 kgf e para o QD.....	74
Figura 28 - Razão entre as flechas para o $\lambda$ de 1,5, para o QC de 850 kgf com o QD. ....	75
Figura 29 - Flechas para o $\lambda$ de 1,5, para o QC de 650 kgf e para o QD.....	76
Figura 30 - Razão entre as flechas para o $\lambda$ de 1,5, para o QC de 650 kgf com o QD. ....	77
Figura 31 - Flechas para o $\lambda$ de 1,5, para o QC de 450 kgf e para o QD.....	78
Figura 32 - Razão entre as flechas para o $\lambda$ de 1,5, para o QC de 450 kgf com o QD. ....	79
Figura 33 - Flecha para o $\lambda$ de 1,0, 1,5 e 2,0, com DNS de 130 cm. ....	80
Figura 34 - Razão das flechas para o $\lambda$ 1,0, 1,5 e 2,0, com DNS de 130 cm.....	81
Figura 35 - Valores corrigidos do QD com elementos finitos tridimensionais, para $\lambda$ da 1,0, 1,5 e 2,0.....	83
Figura 36 - $q-850$ para $LY$ de 4m a 12m e $\lambda$ de 2,0. ....	84
Figura 37 - $q-850$ para $LY$ de 4m a 12m e $\lambda$ de 1,0 a 3,0.....	85
Figura 38 - Momentos $M_1$ , flexão da mesa no sentido das nervuras transversais. ....	88

Figura 39 - Momento M2, flexão da mesa no sentido das nervuras principais.....	90
Figura 40 - Áreas de aço devido aos momentos M1-850 e M1-QD. ....	92
Figura 41 - Áreas de aço devido aos momentos M1-650 e M1-QD. ....	93
Figura 42 - Áreas de aço devido aos momentos M1-450 e M1-QD. ....	94
Figura 43 - Áreas de aço devido aos momentos M2-850 e M2-QD. ....	95
Figura 44 - Áreas de aço devido aos momentos M2-650 e M2-QD. ....	96
Figura 45 - Áreas de aço devido aos momentos M2-450 e M2-QD. ....	97

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores de carregamentos em garagens e áreas de tráfego de veículos. ....	14
Tabela 2 - Prescrições de carregamento. ....	14
Tabela 3 - Valor da carga distribuída para pavimentos do tipo garagem e estacionamento. ....	15
Tabela 4 - Dados geométricos dos exemplos (em cm), parte 1.....	42
Tabela 5 – Dados geométricos dos exemplos (em cm), parte 2. ....	43
Tabela 6 - Dados geométricos dos exemplos (em cm), parte 3.....	44
Tabela 7 - Dados geométricos dos exemplos (em cm), parte 4.....	45
Tabela 8 - Medidas Geométricas e cargas dos veículos tipos. ....	47
Tabela 9 - Valores das cargas concentradas usadas nos exemplos. ....	47
Tabela 10 - Características geométricas das lajes ensaiadas por ABDUL-WAHAB e KHALIL .....	49
Tabela 11 - Características físicas das lajes ensaiadas por ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000)..	49
Tabela 12 - Valores das flechas em cm, para os modelos numéricos e o experimental.....	50
Tabela 13 - Resultados para os modelos 65x65 e 65x130, para lambdas 1,0, 1,5 e 2,0.....	52
Tabela 14 - Razão das flechas dos modelos 65x65, 65x195, 80x80 e 80x195 para diferentes valores de fck .....	55
Tabela 15 - Razão das áreas de aço dos modelos 65x65, 65x195, 80x80 e 80x195 para diferentes valores de fck.....	55
Tabela 16 - Razão das áreas de aço dos modelos 65x65, 65x195, 80x80 e 80x195 para diferentes valores de fck.....	56
Tabela 17 - Flechas para os modelos simplesmente apoiados. ....	57
Tabela 18 - Flechas para os modelos engastados. ....	58
Tabela 19 - Momentos máximos das mesas para os apoios do tipo engaste e simplesmente .....	58
Tabela 20 - Razão das flechas, momentos e áreas de aço geradas pelos QC de 850 kgf, pela de 450 kgf e pela de 650 kgf.....	59
Tabela 21 - Constantes multiplicativas para as flechas referentes às cargas veiculares.....	60
Tabela 22 - Constantes multiplicativas para os momentos nas mesas referentes às cargas veiculares.....	60
Tabela 23 - Constantes multiplicativas para as áreas de aço das mesas referentes às cargas veiculares.....	60
Tabela 24 – Valores das flechas para a viga. ....	70
Tabela 25 - Valores corrigidos dos QD com elementos finitos tridimensionais, para lambda 1,0, 1,5 e 2,0.....	82
Tabela 26 - Valores corrigidos do QD com elementos finitos tridimensionais, para lambda de 1,0, 1,5, 2,0 e 3,0.....	86
Tabela 27 - Valores corrigidos das cargas distribuídas com EG, para lambda de 1,5. ....	86
Tabela 28 - Momentos nas nervuras, para as qc-850 e para as cargas concentradas de 850 kfg, para lambda de 1,5 .....	87
Tabela 29 - Recomendação de armadura mínima para as mesas das lajes nervuradas para pavimentos garagem.....	98
Tabela 30 - Valores corrigidos dos QD (q-c), para lambda de 1,0, 1,5, 2,0 e 3,0.....	101
Tabela 31 - Armadura mínima corrigida para a mesa. ....	102

## LISTA DE SIGLAS

DNP	Distância entre eixo de nervuras principais
DNS	Distância entre eixo de nervuras secundárias
EFT	Elemento finito tridimensional
EG	Elemento de grelha
EMLNUB	Exemplo modelado com laje nervurada unidirecional e bidirecional
IBC	International Building Code
LNB	Laje nervurada bidirecional
LNU	Laje nervurada unidirecional
MEF	Método dos elementos finitos
MDF	Método das diferenças finitas
PP	Peso próprio
QC	Carregamento acidental de carga concentrada
QD	Carregamento acidental de carga distribuída
QNS	Quantidade de nervuras secundárias

## SUMÁRIO

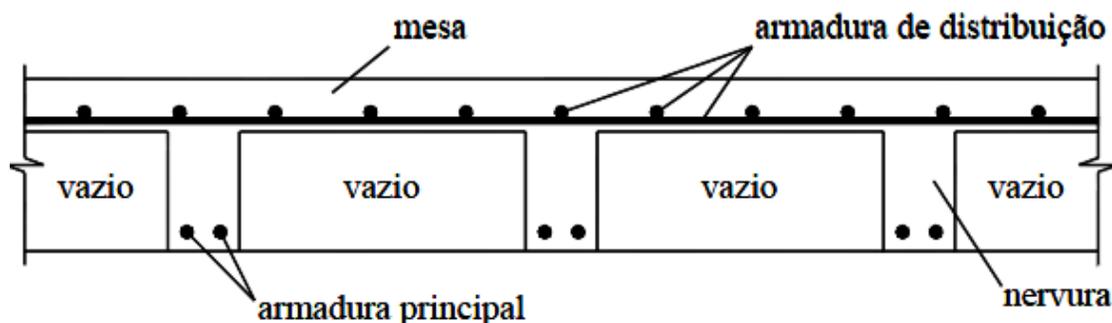
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>Justificativa.....</b>	<b>2</b>
<b>1.2</b>	<b>Objetivos .....</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>5</b>
<b>2.1</b>	<b>Lajes .....</b>	<b>5</b>
2.1.1	Lajes Nervuradas .....	5
<b>2.2</b>	<b>Princípios Gerais de Cálculo.....</b>	<b>15</b>
2.2.1	Teoria de Kirchhoff .....	17
2.2.2	Teoria das Cascas .....	21
2.2.3	Processos de Cálculo .....	23
<b>3</b>	<b>DETERMINAÇÃO, VALIDAÇÃO E PRÉ-DIMENSIONAMENTO DOS MODELOS.....</b>	<b>37</b>
<b>3.1</b>	<b>Geometria e Carregamento dos Modelos .....</b>	<b>38</b>
<b>3.2</b>	<b>Validação dos Modelos .....</b>	<b>48</b>
<b>3.3</b>	<b>Pré-dimensionamento .....</b>	<b>61</b>
<b>3.4</b>	<b>Validação do Pré-dimensionamento.....</b>	<b>69</b>
<b>4</b>	<b>APLICAÇÕES E ANÁLISE DOS RESULTADOS .....</b>	<b>71</b>
<b>4.1</b>	<b>Flechas, Elemento Finito Tridimensional .....</b>	<b>72</b>
<b>4.2</b>	<b>Flechas, Elemento de Grelha .....</b>	<b>86</b>
<b>4.3</b>	<b>Momentos e Áreas de Aço para as Mesas .....</b>	<b>87</b>
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>99</b>
<b>5.1</b>	<b>Sobre as Análises das Flechas .....</b>	<b>100</b>
<b>5.2</b>	<b>Sobre as Análises das Mesas .....</b>	<b>102</b>
<b>5.3</b>	<b>Propostas de Trabalhos Futuros .....</b>	<b>103</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>104</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Na atualidade, é muito comum encontrar em edifícios vãos livres relativamente grandes, principalmente nos pavimentos de garagem e áreas de lazer. Para isso faz-se necessário o uso de lajes mais espessas, que proporcionam uma maior rigidez à flexão e reduzem as flechas no meio do vão, porém eleva de forma considerável o consumo de concreto, aço e o peso próprio.

As lajes nervuradas moldadas no local vêm sendo usadas em grande escala em tais situações, por serem economicamente mais viáveis que as maciças, quando se projetam vãos em torno de quatro metros em diante (Dantas e Nascimento (2009)). Isso decorre do fato de elas apresentarem, na região tracionada, vazios intercalados por nervuras (Figura 1) que proporcionam menor consumo de concreto e aço e menor peso da laje, e, por conseguinte, da estrutura.

Figura 1 - Estrutura da laje nervurada moldada in loco.



Fonte: (SILVA, 2005).

Portanto, é comum em garagens o uso de lajes nervuradas, justamente porque as dimensões das lajes devem ser maiores e livres de colunas para garantir a facilidade de deslocamento, manobra e estacionamento dos veículos.

São nas lajes de garagens que também ocorrem as maiores cargas acidentais provenientes de diferentes tipos de veículos. Os carregamentos acidentais para garagem são recomendados por normas, porém cada norma considera de forma diferente a aplicação de carga acidental.

A norma Brasileira NBR 6120:1980, em se tratando de cargas para análise de pavimentos de garagem, não apresenta nenhuma especificação de cargas concentradas transmitidas pelo contato dos pneus de um veículo com a laje, referindo-se, apenas, a cargas distribuídas por área para todo o pavimento. Já o EuroCode 1:2002 e o International

Building Code 2006 (IBC (2006)) apresentam os valores do peso do veículo que deve ser aplicado no pavimento, em quatro pequenas áreas que representam o contato dos pneus com o piso.

A não consideração pela NBR 6120:1980 de cargas concentradas provenientes do uso de veículos em pavimentos de garagens pode comprometer o dimensionamento das lajes nervuradas, gerando elementos que comprometem a segurança nos estados limites.

Outro aspecto relevante quando se trata de lajes nervuradas é o dimensionamento estrutural das mesas, onde se considera uma distância limite entre eixo de nervuras para o qual se dispensa o cálculo a flexão na mesa, bastando adotar uma armadura mínima.

Com relação a esse aspecto, a NBR 6118:2003 recomenda o uso de armadura mínima na mesa quando a distância entre eixo de nervuras for menor ou igual a 65 cm, e para distâncias maiores que 65 cm e menores ou igual a 110 cm, recomenda-se dimensionar a armadura. Já as normas espanhola (EHE (1999)) e alemã (DIN 1045 (apud Leonhart e Monning, 1977)) recomendam que, para distância entre nervuras de 100 cm e 70 cm, respectivamente, não é necessário dimensionar; basta usar uma malha de aço como armação da mesa.

Dentro desse contexto, o trabalho desenvolveu exemplos de lajes nervuradas e analisou a flexão da mesa, verificando a distância limite entre eixo de nervura que dispense a análise de flexão da mesa, tanto para carregamento acidental de cargas distribuídas como concentradas, tendo como variável de controle a armadura mínima recomendada pela NBR 6118:2003.

Outra análise do trabalho visou comparar o comportamento global (flechas) das lajes nervuradas, sob carga concentrada (carga veicular representada pelo contato dos pneus com o piso) e carregamento distribuído (carregamento acidental de carga distribuída para pavimentos garagem recomendada pela NBR 6120:1980). A partir dessas comparações entre flechas geradas pelo carregamento acidental de carga distribuída (QD) em relação às geradas pelo carregamento acidental de cargas concentradas (QC), definiram-se valores de QD que fornecessem a mesma flecha que as geradas pelo QC.

## **1.1 Justificativa**

Considerando que as lajes nervuradas em garagens estão sendo bastante comuns nas edificações e que o uso de veículos mais pesados está sendo bastante utilizado pela

sociedade atual, como é o caso das caminhonetes cabine dupla que pesam em torno de 2,1 tf e podem suportar até 1,0 tf de carga adicional, faz-se necessário avaliar e analisar recomendações normativas antigas, como é o caso da NBR 6120:1980, que trata do carregamento de lajes de garagem para veículos de até 2,5 tf de carga máxima.

Outro fato é que a NBR 6118:2003, mesmo sendo uma norma nova, traz, em relação ao dimensionamento das mesas das lajes nervuradas, recomendações conservadoras em relação a recomendações de normas internacionais. Dentro desse contexto, dois pontos básicos serão focos de estudo deste trabalho.

O primeiro está relacionado com o carregamento acidental para pavimentos de garagem segundo a ótica da norma brasileira NBR 6120:1980, que não aconselha o uso de carregamentos concentrados, ao contrário de outras normas internacionais (EuroCode 1:2002 e IBC (2006)). Além disso, o carregamento acidental distribuído recomendado pela NBR 6120:1980 trata de veículos de até 2,5 tf de peso máximo, sendo que atualmente temos como fato usual os veículos chegarem até 3,1 tf de peso máximo.

O segundo ponto está relacionado com a norma NBR 6118:2003 referente ao cálculo relacionado à flexão da mesa das lajes nervuradas, que dispensa o cálculo da flexão e recomenda a colocação de uma armadura mínima, quando a distância entre eixos de nervuras da laje for menor que 65 cm, diferentemente de outras normas internacionais (EHE (1999) e DIN 1045) que recomendam distância maior entre eixos de nervuras para que se possa dispensar o cálculo da flexão na mesa.

Dessa forma o trabalho buscou compreender essas recomendações diferenciadas existentes nessas duas normas brasileiras, em relação às recomendações de normas internacionais, visando contribuir para um dimensionamento mais adequado das lajes nervuradas.

## **1.2 Objetivos**

Este trabalho tem como objetivo principal contribuir para a análise das lajes nervuradas moldadas no local em pavimentos de garagem. No que tange as recomendações das normas nacionais e internacionais para análise da flexão da mesa das lajes nervuradas, e dos carregamentos acidentais a serem utilizados nos pavimentos de garagem, seja de carga distribuída ou concentrada.

Para atender ao objetivo principal, outros específicos foram necessários, como:

- a) Estudar as diversas recomendações existentes na bibliografia, nacional e internacional, referentes às considerações geométricas e de carregamentos para análise global (flechas) e local (flexão da mesa e suas respectivas quantias de armadura) das lajes nervuradas;
- b) Estudar as teorias usuais de cálculo das lajes nervuradas, para entender melhor o seu comportamento estrutural;
- c) Determinar o esquema estrutural de exemplos, para os estudos da flexão das mesas e flechas;
- d) Estabelecer os critérios, propriedades físicas e mecânicas para aproximar o modelo numérico de análise do real comportamento da estrutura em estudo;
- e) Determinar, com a ajuda de softwares de análise estruturais, as solicitações dos modelos considerados.

## **2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Neste capítulo, são abordados os tipos de lajes nervuradas e seus elementos básicos, bem como seu funcionamento estrutural e carregamentos, tendo por fim uma exposição dos procedimentos e técnicas de cálculos utilizadas atualmente para a análise e o dimensionamento das lajes.

### **2.1 Lajes**

As lajes são elementos estruturais geralmente utilizados em edifícios residenciais, comerciais e industriais, pontes, reservatórios, escadas, obras de contenção de terra, pavimentos rígidos de rodovias, aeroportos, dentre outros. No caso particular de edifícios de concreto armado, existem diversos métodos construtivos com ampla aceitação no mercado da construção civil, como lajes maciças e nervuradas.

Sobre o comportamento das lajes na estrutura global dos edifícios, elas recebem as ações verticais, perpendiculares à superfície média, e as transmitem para os apoios. Essa situação confere à laje o comportamento de placa. Outra função das lajes, em edifícios usuais, é atuar como diafragmas horizontais rígidos, distribuindo as ações horizontais entre os diversos pilares da estrutura. Nessas circunstâncias, a laje sofre ações ao longo de seu plano médio, comportando-se como chapa. Conclui-se, portanto, que as lajes têm dupla função estrutural: a de placa e a de chapa, ou seja, suportam cargas verticais à sua superfície, e também cargas paralelas ao seu plano geométrico.

Os métodos construtivos de lajes mais utilizados são a laje maciça e nervurada, sendo que a nervurada apresenta diversas variações construtivas, dependendo seu uso dos custos operacionais e dimensões dos vãos.

#### **2.1.1 Lajes Nervuradas**

Segundo o item 14.7.7 da NBR 6118:2003, as lajes nervuradas são lajes moldadas no local ou com nervuras pré-moldadas, cuja zona de tração é constituída por nervuras entre as quais pode ser colocado material inerte.

O conceito de laje nervurada pode ser descrito de uma forma relativamente simples. Quando se têm vãos de 4 m ou mais, as lajes maciças apresentam pequena região de concreto comprimido, havendo, portanto, muito concreto abaixo da linha neutra na região tracionada, cuja contribuição no dimensionamento à flexão é desprezada, o que acaba não

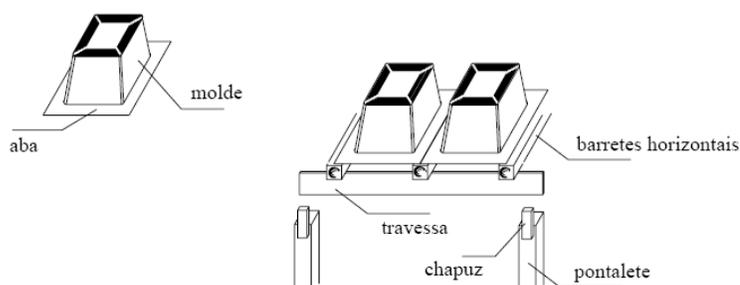
ajudando na resistência à flexão, mas aumenta consideravelmente o peso próprio (PP) da laje. Em virtude desse fato, nada mais racional do que substituí-lo por material inerte ou simplesmente deixar o vazio, gerando um modelo de laje mais econômico e eficiente, denominado de laje nervurada.

Dentro desse contexto de economia e eficiência, procura-se com a solução da laje nervurada diminuir o consumo de concreto, aço, e aumentar a rigidez à flexão. Além disso, as técnicas de cimbramento aplicadas em lajes nervuradas visam diminuir o custo de fôrmas, evitando a confecção do molde de todas as nervuras.

Nas lajes nervuradas, esse inconveniente é superado, por exemplo, com a utilização de moldes reaproveitáveis. Nesse caso, são usados moldes de plástico reforçado, que suporta não só o peso do concreto fresco, mas também o peso da armadura, de equipamentos e de homens andando sobre sua superfície.

Assim, o molde serve de fôrma, sendo necessário apenas o uso de travessas e pontaletes para montar o escoramento do mesmo (cimbramento), como mostra a Figura 2. As arestas dos moldes (cubetas), que ficam em contato com o concreto, têm formato arredondado. O corpo do molde plástico tem o formato tronco cônico para facilitar a desforma.

Figura 2 - Moldes plásticos para execução de lajes nervuradas e esquema de escoramento.

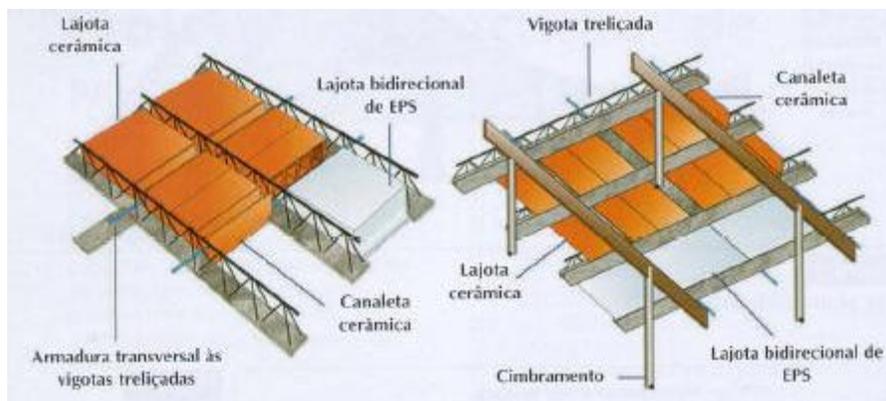


Fonte: (CARVALHO E FIGUEIREDO FILHO, 2003).

Outro método bastante utilizado, mas que apresenta limitações para grandes vãos, diz respeito às lajes nervuradas com nervuras pré-moldadas, como mostra a Figura 3. Nessas lajes pré-moldadas, as nervuras são compostas de vigotas pré-moldadas, que dispensam o uso do tabuleiro da fôrma tradicional. Essas vigotas são capazes de suportar seu PP e as ações de construção, necessitando apenas de cimbramentos intermediários. Além das

vigotas, essas lajes são constituídas de elementos de enchimento, que são colocados sobre os elementos pré-moldados, e também de concreto moldado no local (Pinheiro, 2007).

Figura 3 - Laje pré-moldada treliçada.



Fonte: (CARVALHO et al. 2005).

Sobre a execução, as lajes nervuradas são executadas no local da obra. Para isso, é usado um sistema de fôrmas e de escoramentos apropriados. As fôrmas são encontradas no mercado em polipropileno, fibra de vidro ou em metal, com dimensões moduladas (Pinheiro, 2007). As Lajes nervuradas são classificadas em dois tipos: Lajes Nervuradas Bidirecionais (LNB) e Unidirecionais (LNU), conforme indicado na Figura 4.

Figura 4 - Estrutura das nervuras da LNU e LNB.



Fonte: (IMPACTO PROTENSÃO).

As LNB (Figura 5) são usadas quando a relação entre os lados não é superior a dois, o que faz com que haja uma diminuição dos esforços e uma distribuição das ações em todo o seu contorno. As nervuras (longarinas) são paralelas às direções das bordas de contorno, ortogonais entre si, e apresentam uma mesma distância entre eixo para as duas direções. Alguns casos em que não se segue essa regra são encontrados em bibliografia mais antiga,

embora certamente as vantagens estruturais obtidas não compensem as dificuldades encontradas na execução desse tipo de estrutura (Carvalho e Figueiredo Filho, 2003).

Figura 5 - Laje nervurada em duas direções, LNB.



Fonte: (IMPACTO PROTENSÃO).

Já as LNU (Figura 6) apresentam um sistema de nervuras diferentes das LNB, havendo nervuras principais e secundárias: as principais são na direção do menor vão, e as secundárias na direção do maior vão. As distâncias entre eixos de nervuras são diferentes entre as duas direções, sendo maiores para as nervuras secundárias e menores para as nervuras principais. Quando as distâncias entre eixos de nervuras são iguais para as duas direções, a laje nervurada deixa de ser unidirecional e passa a ser bidirecional.

Figura 6 - Laje nervurada em uma direção, LNU.



Fonte: (IMPACTO PROTENSÃO).

No que confere a um comparativo de consumos de aço e concreto entre LNU e LNB, Tenório et al. (2009) apresentaram um estudo mostrando que as LNU são mais econômicas que as LNB, para situações onde a relação entre o maior pelo menor lado é maior ou igual a 1,4.

Sobre o processo de análise das lajes nervuradas, alguns pontos são importantes, como a definição dos carregamentos atuantes, sejam eles concentrados ou distribuídos, e em sequência o dimensionamento dos elementos da laje: nervuras e mesas, sendo a mesa dimensionada apenas para valores em que a distância entre nervuras principais ultrapassa um determinado valor limite.

#### 2.1.1.1 Mesa

Sobre recomendações a respeito da mesa das lajes nervuradas, alguns pontos são mencionados nas literaturas técnicas e normas, como o pré-dimensionamento e a consideração ou não do cálculo da flexão da mesa:

- Pré-dimensionamento – É abordado para todas as informações geométricas da laje nervurada: espessura da mesa, largura da nervura e altura da laje.
- Flexão da mesa – Basicamente apresentam-se distâncias entre eixos de nervuras, para os quais se pode dispensar o cálculo de flexão da mesa, e para valores superiores quando é obrigada a sua consideração.

Seguem algumas bibliografias com suas respectivas recomendações para as mesas das lajes nervuradas:

- NBR 6118:2003:

Conforme a NBR 6118:2003, a espessura da mesa, quando não houver tubulações horizontais embutidas, deve ser maior ou igual a  $1/15$  da distância entre nervuras e não menor que 3 cm.

O valor mínimo absoluto deve ser de 4 cm, quando existirem tubulações embutidas de diâmetro máximo de 12,5 mm.

Para o projeto das lajes nervuradas, obedece-se às seguintes condições:

- a) Para lajes com espaçamento entre eixos de nervuras menor ou igual a 65 cm, pode ser dispensada a verificação da flexão da mesa;
- b) Para lajes com espaçamento entre eixos de nervuras entre 65 cm e 110 cm, exige-se a verificação da flexão da mesa;
- c) Para lajes nervuradas com espaçamento entre eixos de nervuras maior que 110 cm, a mesa deve ser projetada como laje maciça, apoiada na grelha de vigas, respeitando-se os seus limites mínimos de espessura.

- EHE (1999):

A norma espanhola, EHE (1999), faz menção simplificada a respeito do cálculo referente à flexão da mesa, dispensando a verificação da mesma para distância entre eixo de nervuras de até 100 cm, diferente da NBR 6118:2003 que recomenda 65 cm.

Segundo Silva (2005), existem diversas recomendações dessa norma a respeito das lajes nervuradas:

a) Distância entre os centros das nervuras:  $a \leq 1$  m; como valor de referência, recomendam-se 80 cm nas duas direções.

b) Espessura mínima da mesa:  $h_f \geq \begin{cases} 3 \text{ cm} \\ 1/15 \text{ da maior distância entre nervuras} \\ 5 \text{ cm se houver ações concentradas} \end{cases}$

c) Altura mínima total:  $h \geq \begin{cases} 15 \text{ cm} \\ 1/30 \text{ do maior vão} \end{cases}$

d) Largura das nervuras:  $b_w \geq \begin{cases} 10 \text{ cm} \\ h/3, \text{ onde } h \text{ é a altura total da laje} \\ 1/7 \text{ da maior distância entre nervuras} \\ h_n / 4, \text{ onde } h_n \text{ é a altura da nervura} \end{cases}$

- Leonhart e Monning (1977):

Segundo Leonhart e Monning (1977), as lajes nervuradas devem ter distância livre entre nervuras ( $w$ ) no máximo igual a 100 cm, e a espessura da mesa deve ser maior ou igual a 5 cm, e não menor que  $w/15$ . O cálculo da mesa é desconsiderado; recomendam-se 3 a 4 barras finas por metro ou uma malha com poucas barras finas longitudinais, pois se considera seu comportamento como um arco abatido atirantado. Logo, as barras de aço terão a função de tirante e seu uso pode ser tanto na parte inferior quanto na parte superior da mesa.

- DIN 1045:

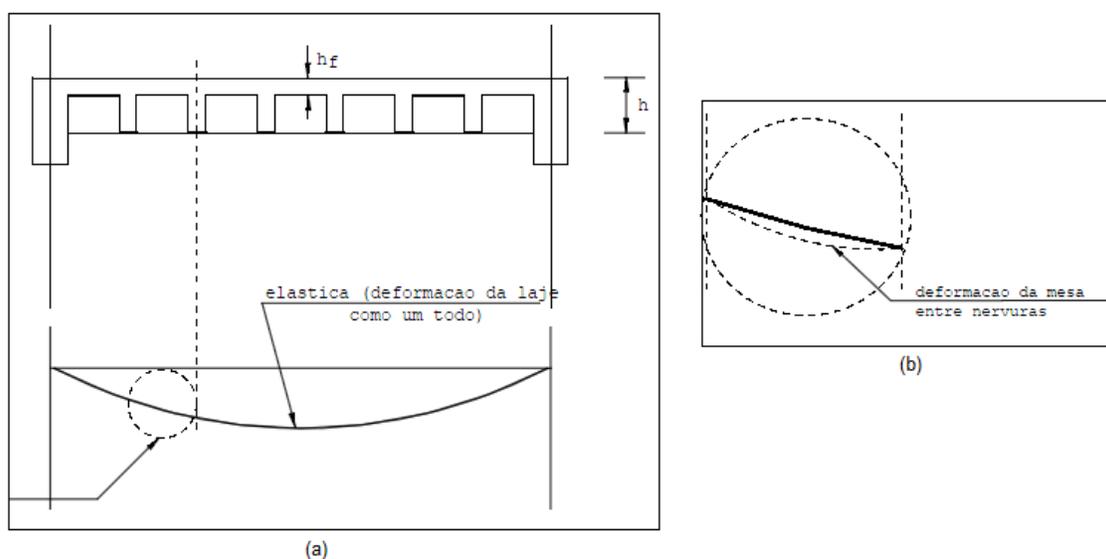
Segundo a DIN 1045 (apud Leonhart e Monning, 1977), as lajes nervuradas devem ter distância livre entre nervuras ( $w$ ) no máximo igual a 70 cm, e a espessura da mesa deve ser maior ou igual a 5 cm, e não menor que  $w/10$ . O cálculo da mesa é desconsiderado; recomendam-se 3 a 4 barras finas por metro ou uma malha com poucas barras finas longitudinais, pois se considera seu comportamento como um arco abatido atirantado. Logo

as barras de aço terão a função de tirante e seu uso pode ser tanto na parte inferior quanto na parte superior da mesa.

- Bocchi e Giongo (2007):

Segundo Bocchi e Giongo (2007), a laje nervurada, quando submetida à ação uniformemente distribuída, deforma-se, apresentando uma superfície deformada semelhante à apresentada pela Figura 7a. Como as nervuras se deformam de modo diferente, a mesa da laje apresenta uma elástica semelhante à da Figura 7b.

Figura 7 - Elástica da laje nervurada e mesa.



Fonte: (BOCCHI e GIONGO, 2007).

Considera-se a mesa como um conjunto de lajes maciças, contínuas, apoiadas elasticamente nas nervuras. Nessa condição, a determinação dos esforços solicitantes torna-se muito complexa, principalmente quando os painéis têm grandes dimensões. Admitindo-se a continuidade dos painéis, pode-se considerar a ação do momento fletor negativo nos respectivos apoios e, conseqüentemente, armadura para absorver as tensões de tração provocadas pela ação do momento fletor.

Outra consideração admite que a continuidade não é condição de equilíbrio para os painéis, portanto, pode-se desprezá-la, em face da ordem de grandeza dos momentos fletores, permitindo-se, com isso, o aparecimento de fissuras, as quais não prejudicam a utilização e durabilidade das lajes nervuradas.

Contudo, os momentos fletores positivos atuantes nos painéis devem ser absorvidos por armadura adequada posicionada na mesa. Essa armadura deve ser calculada considerando os painéis como lajes maciças, com os lados apoiados nas nervuras.

- NBR 6118:1978:

Segundo a NBR 6118:1978, a resistência da mesa à flexão deverá ser verificada sempre que a distância livre entre nervuras superar 50 cm ou houver carga concentrada no painel entre nervuras.

Fica evidente que todas as recomendações normativas e literárias supracitadas apresentam valores diferentes para a distância entre eixo das nervuras para o qual se pode dispensar o cálculo da flexão da mesa.

#### 2.1.1.2 Tipos de Carregamento Acidental

Sobre os carregamentos acidentais recomendados pelas normas, estes são de dois tipos: os concentrados e os distribuídos. Os concentrados são recomendados para situações em que cargas concentradas relevantes atuam na estrutura, como é o caso dos pavimentos garagem, onde o contato dos pneus do veículo com o piso gera tal situação.

As cargas distribuídas são aconselhadas para pavimentos em que as mesmas representem bem o real comportamento da estrutura, mesmo sabendo que a maioria das solicitações acidentais na estrutura é de certa forma concentrada: pessoas, móveis, acessórios entre outros. Mas essas solicitações, por serem de baixa intensidade, ficam bem representadas por certos valores de cargas distribuídas.

De forma geral, as recomendações das cargas são feitas pelo tipo de uso do pavimento. Se, por exemplo, tratar-se de um pavimento tipo, utiliza-se apenas, como carga acidental, uma carga distribuída por unidade de área para todo o pavimento. Caso se trate de um pavimento garagem, a recomendação é de utilizar tanto a carga concentrada como a distribuída. Existem algumas exceções nas bibliografias sobre essa recomendação para pavimentos garagem, como é o caso da NBR 6120:1980, que recomenda apenas a carga distribuída.

Seguem algumas normas e suas respectivas recomendações de cargas para pavimentos garagem:

- Eurocode 1:2002:

O EuroCode 1:2002 faz algumas recomendações para a análise de pavimentos garagens, para que sejam considerados os efeitos localizados provenientes das cargas veiculares, que são transmitidos ao pavimento pelo contato do pneu com o piso. Apresenta-se uma tabela do EuroCode 1:2002, **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, indicando valores de cargas concentradas (carga concentrada em uma região, que representa a área de contato do pneu do veículo com o piso do pavimento), e a Figura 8 com a forma geométrica da distribuição das cargas concentradas.

Essas recomendações feitas pelo EuroCode 1:2002 são para serem utilizadas nas análises dos esforços solicitantes e dimensionamento dos elementos estruturais: vigas, nervuras, mesa, e qualquer outro elemento que esteja sendo solicitado pelas cargas localizadas. A disposição das cargas concentradas deve ser de forma tal que gere a situação mais desfavorável para a estrutura.

Tabela 1 - Valores de carregamentos em garagens e áreas de tráfego de veículos.

Categorias de áreas de tráfego	$q_k$ [kN/m <sup>2</sup> ]	$Q_k$ [kN]
Categoria F Peso total do veículo: $\leq 30$ kN	$q_k$	$Q_k$
Categoria G $30 \text{ kN} < \text{peso total do veículo} \leq 160$ kN	5,0	$Q_k$

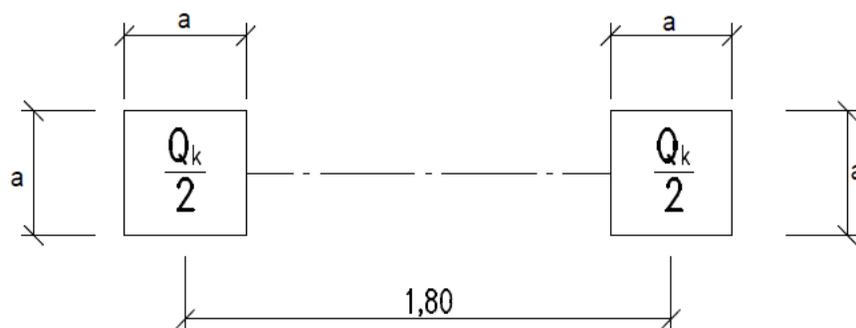
NOTA 1 Para a categoria F.  $q_k$ , selecionado com valores variando de 1,5 a 2,5 kN/m<sup>2</sup> e  $Q_k$  pode ser selecionado com valores variando de 10 a 20 kN.

NOTA 2 Para a categoria G.  $Q_k$ , pode ser selecionado com valores variando de 40 a 90 kN.

Nota:  $q_k$  é planejado para determinação de efeitos gerais e  $Q_k$  para efeitos locais.

Fonte: (EUROCODE 1:2002).

Figura 8 - Distribuição das cargas concentradas.



Nota: Para a categoria F, a largura da superfície quadrada é 100 mm e para categoria G, a largura da superfície quadrada é de 200 mm.

Fonte: (EUROCODE 1:2002).

- International Building Code 2006:

O International Building Code 2006, à semelhança com o EuroCode 1:2002, faz algumas recomendações para a análise de pavimentos garagens, para que se considerem os efeitos localizados provenientes das cargas veiculares atuantes nos pavimentos. Segue na sequência uma tabela do mesmo, Tabela 2, que apresenta os valores dessas cargas atuantes para cada pneu, bem como a área de contato desses pneus com o piso onde deve-se distribuir essa carga.

Tabela 2 - Prescrições de carregamento.

OCUPAÇÃO OU USO	UNIFORME (psf --- kN/m <sup>2</sup> )	CONCENTRADO (lbs.)
17. Garagens (apenas veículos de passageiros)	40 --- 1,916	Nota a
Caminhões e ônibus	Ver seção 1607.6	

Para SI: 1 polegada = 25.4 mm, 1 polegada quadrada = 645.16 mm<sup>2</sup>,  
 1 pé quadrado = 0.0929 m<sup>2</sup>,  
 1 libra por pé quadrado = 0.0479 kN/m<sup>2</sup>, 1 libra = 0.004448 kN,  
 1 libra por pé cubico = 16 kg/m<sup>3</sup>

Nota a:

Chãos em garagens ou porções de edifícios usadas para o armazenamento de automóveis serão projetados para as cargas uniformemente distribuídas da tabela 1607.1 ou as cargas concentradas seguintes: (1) para garagens restringidas a veículos que não acomodam mais de nove passageiros, 3,000 libras (13,344 kN) agirão em uma área de 4.5 polegadas (11,43cm) por 4.5 polegadas (11,43cm); (2) para estruturas de

estacionamento mecânicas sem laje ou cobertura que são usadas para armazenar veículos de passageiros unicamente, 2,250 libras por roda.

Fonte: (IBC (2006)).

- NBR 6120:1980:

A NBR 6120:1980 trata dos pesos específicos dos materiais bem como dos carregamentos a serem considerados nos pavimentos das edificações, a depender do seu uso. Para pavimentos do tipo garagem, ela recomenda apenas carregamentos distribuídos (Tabela 3) a serem utilizados na análise e dimensionamento do mesmo.

Tabela 3 - Valor da carga distribuída para pavimentos do tipo garagem e estacionamento.

Tipo de uso	Forma de carregamento	Unid.: kN/m <sup>2</sup>
18 Garagens e estacionamentos	Para veículos de passageiros ou semelhantes com carga máxima de 25 kN por veículo. Valores de $\phi$ indicados em 2.2.1.6	3

Fonte: (NBR 6120:1980).

Essa norma recomenda o uso de um coeficiente de impacto, para majorar o valor do carregamento distribuído, que for utilizado na análise de pavimentos garagem e estacionamento, como mostrado a seguir:

O valor do coeficiente  $\phi$ , de majoração das cargas acidentais a serem consideradas no projeto de garagens e estacionamentos deve ser determinado do seguinte modo: sendo  $l$  o vão de uma viga ou o vão menor de uma laje; sendo  $l_0 = 3m$  para o caso das lajes e  $l_0 = 5m$  para o caso das vigas, tem-se:

a)  $\phi = 1,00$  .....quando  $l \geq l_0$

b)  $\phi = l_0/l \leq 1,43$ .....quando  $l \leq l_0$

## 2.2 Princípios Gerais de Cálculo

Os processos usualmente empregados para calcular os esforços solicitantes e os deslocamentos transversais em lajes, na sua maioria, se baseiam na teoria clássica das placas delgadas ou, ainda, na Teoria de Kirchhoff (Silva, 2005).

Segundo Timoshenko e Woinowsky (1959), a teoria das placas delgadas interpreta bem o comportamento de placas que apresentam relação entre a espessura e o menor vão entre  $1/5$  e  $1/100$ ; placas cuja relação se encaixa nesses limites têm espessura considerada pequena para efeito de cálculo. Lajes usuais de edifícios apresentam a relação entre a altura e o menor vão variando entre  $1/40$  e  $1/60$ , costumeiramente; portanto, a Teoria de Kirchhoff é adequada para análise do comportamento das mesmas.

Na Teoria de Kirchhoff, os deslocamentos transversais são subestimados, pois não se leva em conta a fissuração do concreto. Esse método baseia-se na análise do comportamento do elemento sob ações de serviço e concreto íntegro (não fissurado), ou seja, admite-se comportamento elástico linear para os materiais.

Dentre os processos de cálculo que se baseiam nessa teoria, podem-se destacar o método das diferenças finitas (MDF), o método dos elementos finitos (MEF) e o tradicional processo de resolução de placas elásticas por meio de séries. Esses três processos, mais o processo de grelha equivalente (Analogia de Grelha), são os mais utilizados na análise das lajes dos edifícios de concreto armado.

As lajes nervuradas armadas em duas direções têm sido analisadas como lajes maciças, determinando-se os esforços e os deslocamentos transversais mediante a utilização de tabelas de lajes elaboradas a partir do emprego da teoria das placas delgadas; essa metodologia consta em diversas bibliografias e também encontra respaldo na NBR 6118:2003.

Entretanto, essa simplificação não é adequada, tendo em vista que, em razão de as nervuras apresentarem pequena rigidez à torção, diferentemente das lajes maciças, os esforços solicitantes obtidos, considerando o cálculo como laje maciça, resultam bastante aquém dos reais. Assim, é recomendado que essas lajes sejam analisadas empregando-se outros processos de cálculo, como o MEF, conforme comenta Stramandinoli (2003).

Stramandinoli (2003) utilizou o MEF na modelagem de algumas lajes nervuradas, através da discretização da mesa e das nervuras, usando elementos de casca. Sendo utilizado, pareceu apresentar resultados mais próximos dos reais, pois considera a estrutura como um todo, diferentemente da analogia de grelha, por exemplo, onde a capa de concreto da laje é considerada como parte da viga T, portanto, desconectadas entre si, permitindo um deslocamento relativo que não corresponde bem à realidade.

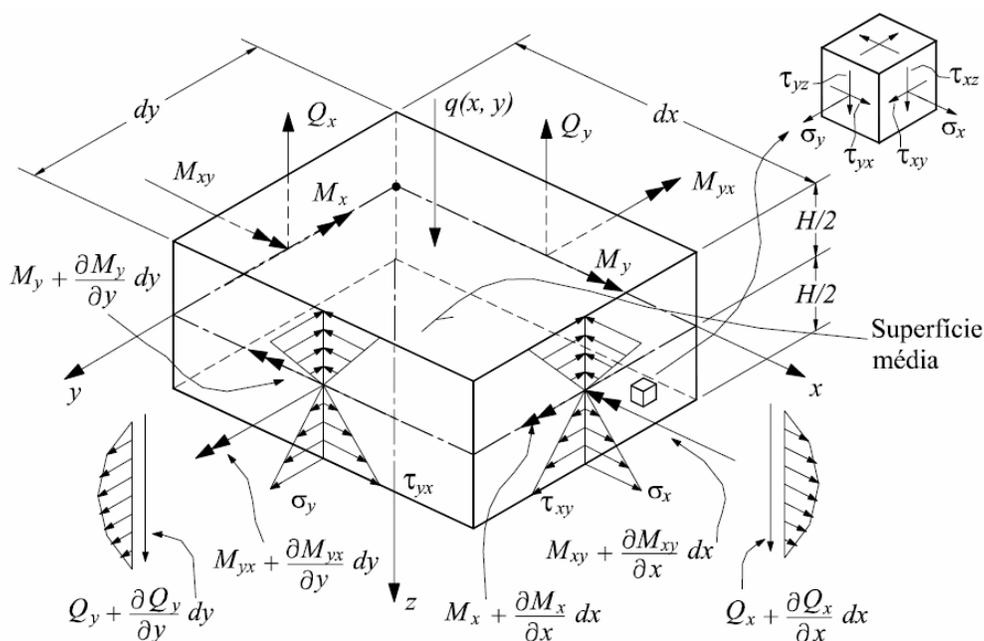
As placas e as cascas são corpos sólidos tridimensionais que apresentam a particularidade de serem sólidos limitados por duas superfícies, sendo a distância entre eles a espessura, cuja dimensão é muito menor que a das superfícies. As placas são limitadas por superfícies planas e as cascas por superfícies de curvatura constante ou variável.

Nos próximos tópicos deste capítulo, serão apresentadas as hipóteses simplificadoras nas quais se baseiam a teoria das placas delgadas (Teoria de Kirchhoff), e um breve histórico da teoria das cascas. Posteriormente serão apresentados os métodos de cálculo que usam essas teorias.

### 2.2.1 Teoria de Kirchhoff

Segundo (Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1959), a Teoria de Kirchhoff baseia-se nas equações de equilíbrio de um elemento infinitesimal de placa (Figura 9) e nas relações de compatibilidade das deformações do mesmo.

Figura 9 - Elemento infinitesimal de placa.



Fonte: (<http://www.grante.ufsc.br/mendonca/c2.pdf>).

Dentre as vantagens do uso da teoria das placas está o conhecimento dos valores das grandezas (esforços, tensões, deformações, deslocamentos, etc.) em cada ponto do interior da placa, e como maior desvantagem têm-se as consideráveis dificuldades analíticas para

obtenção da solução, especialmente quando a geometria, as ações e as condições de contorno são complexas.

A teoria das placas delgadas sob pequenas deformações baseia-se nas seguintes hipóteses simplificadoras:

- A placa pode ser representada por seu plano médio (ou superfície média);
- O material da placa é linear e elástico (obedece à lei de Hooke), homogêneo e isotrópico;
- A placa é inicialmente plana;
- A espessura da placa é pequena em relação às outras dimensões, menor que 1/10 do menor vão;
- As deformações angulares da superfície média são pequenas comparadas à unidade;
- Os deslocamentos dos pontos da superfície média são pequenos comparados com a espessura da placa;
- As ações dinâmicas ou estáticas são aplicadas perpendicularmente à superfície da placa;
- As retas normais à superfície média permanecem normais e retas após as deformações, ou seja, desprezam-se as deformações por força cortante (hipótese de Kirchhoff, similar à de Bernoulli-Navier no estudo da flexão de vigas).

O concreto armado não é um material homogêneo, pois é constituído de barras de aço (armadura) e concreto, porém, para fins práticos e simplificação de cálculo, ele é assim admitido.

A propriedade da elasticidade refere-se ao fato de que o elemento estrutural feito desse material volta à sua forma inicial quando é retirada a ação que nele atua.

Material isotrópico é aquele que tem as mesmas propriedades em qualquer que seja a direção observada, ao contrário do material ortótropo que tem propriedades diferentes em duas direções ortogonais.

Diz-se que um material é linearmente elástico (ou linear fisicamente) quando a relação entre tensões e deformações se mantém linear; portanto, no caso do concreto, não se leva em conta a fissuração.

A consideração de pequenos deslocamentos e elasticidade linear permite efetuar os cálculos usando o princípio da superposição de efeitos, ou seja, admite-se a linearidade geométrica, que é verificada, na prática, na maioria dos casos; quando há linearidade

geométrica, os esforços solicitantes, e conseqüentemente as tensões, não são afetados pelo estado de deformação da estrutura.

Essas simplificações estão de acordo com a NBR 6118:2003, que estabelece que as equações de equilíbrio possam ser determinadas com base na geometria indeformada da estrutura (teoria de 1ª ordem), exceto nos casos em que os deslocamentos alterem significativamente os esforços solicitantes.

Para facilitar o emprego das condições de contorno na resolução do problema de determinação de esforços, consideram-se, na maioria das vezes, outras simplificações, tais como:

- A ação das placas nas vigas de contorno se faz somente por forças verticais, não havendo transmissão de momentos para as vigas;
- As ações das placas nas vigas são uniformemente distribuídas e não há transmissão de força diretamente para os pilares; a ação nas placas vai para as vigas e daí para os pilares;
- As vigas de contorno são indeslocáveis na direção vertical;
- A rotação das placas no contorno é livre (apoio simples) ou totalmente impedida (engastada).

A equação diferencial da linha elástica de uma viga:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{m(x)}{E * I} \quad (2.1)$$

Pode ser expressa em função de uma ação  $p(x)$ , carga distribuída por unidade de comprimento, aplicada pela expressão:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p(x)}{E * I} \quad (2.2)$$

A equação diferencial correspondente a uma placa, por sua vez, é mais complicada, pois deve incluir termos para os momentos nas direções x e y, assim como os momentos torsores que também estão presentes nas placas:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial_x \partial_y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q(x, y) \quad (2.3)$$

A equação (2.3) é a equação diferencial de equilíbrio das placas, obtida por equilíbrio de forças verticais e de momentos fletores em um elemento infinitesimal de placa. É importante ressaltar que essa equação independe de a placa estar em regime elástico ou plástico, do coeficiente de Poisson e do fato de a placa ser isótropa ou ortótropa.

Observa-se ainda que essa equação relaciona apenas os momentos (momentos fletores e o torsor) com a ação  $q(x, y)$  aplicada. É também interessante relacionar os deslocamentos com a ação.

As expressões que relacionam os momentos com as curvaturas da placa são:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.4)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.5)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.6)$$

Onde  $D$  é a rigidez à flexão da placa:

$$D = \frac{E * H^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.7)$$

$E$  é o módulo de deformação longitudinal do material;

$H$  é a espessura da placa;

$\nu$  é o coeficiente de Poisson.

As expressões que relacionam as forças cortantes com as curvaturas da placa são:

$$Q_x = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (2.8)$$

$$Q_y = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (2.9)$$

Substituindo-se as expressões (2.4), (2.5) e (2.6) na expressão (2.3), chega-se à equação diferencial de Lagrange (também conhecida como equação diferencial

fundamental das placas), em coordenadas cartesianas retangulares, a qual relaciona deslocamentos com ação ( $q(x, y)$ ) na placa:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \quad (2.10)$$

Integrando essa equação diferencial, de acordo com as condições de contorno do problema, obtém-se a função  $w = w(x, y)$  da superfície média deformada, a partir da qual, utilizando as equações (2.4) a (2.9), determinam-se os esforços solicitantes (momentos fletores, torçores e forças cortantes).

A equação das placas delgadas resolve por completo o problema da placa, podendo apresentar qualquer forma, ação e repousando num contorno de apoios quaisquer. Entretanto, normalmente não é fácil encontrar uma função  $w = w(x, y)$  que, simultaneamente, satisfaça a equação diferencial de Lagrange e atenda às condições de contorno.

A solução exata obtida pela integração direta da equação de Lagrange é restrita a alguns poucos casos de formas de placas, cargas e condições de apoio; a grande maioria dos formatos de placas, incluindo as placas retangulares e as poligonais, os mais utilizados em estruturas de concreto armado, não possuem solução pela integração direta dessa equação, o que faz com que esse processo tenha pouca finalidade prática. Por tal, o mesmo é aplicado para soluções aproximadas, por intermédio de alguns métodos: MEF, MDF, Séries simples e duplas, e Grelha equivalente.

### 2.2.2 Teoria das Cascas

Segundo Lima Junior (2006), define-se por casca o elemento estrutural curvo dotado de uma dimensão significativamente pequena, em relação às outras duas dimensões e aos raios principais de curvatura, além de submetido aos efeitos de flexão e membrana. O efeito de flexão é semelhante ao sofrido por uma placa, enquanto a parcela de membrana está ligada a deformações do plano médio da casca nessa mesma superfície. O local dos pontos equidistantes das duas superfícies que delimitam a casca é chamado de superfície média, sobre a qual são feitas as principais suposições e análises.

Segundo Ventsel e Krauthammer (2001), o termo casca é aplicado para corpos envoltos por duas superfícies curvas, onde a distância entre as superfícies é pequena em comparação com outras dimensões do corpo.

O local dos pontos que apresentam a mesma distância, à parte das duas superfícies curvas, define a superfície média da casca. O comprimento do segmento, que é perpendicular às duas superfícies curvas, é chamado de espessura da casca, e é denotado por  $h$ . A geometria de uma casca é inteiramente definida especificando-se a forma da superfície média e espessura da casca em cada ponto. Em quase totalidade, as aplicações estruturais de cascas são para espessura constante.

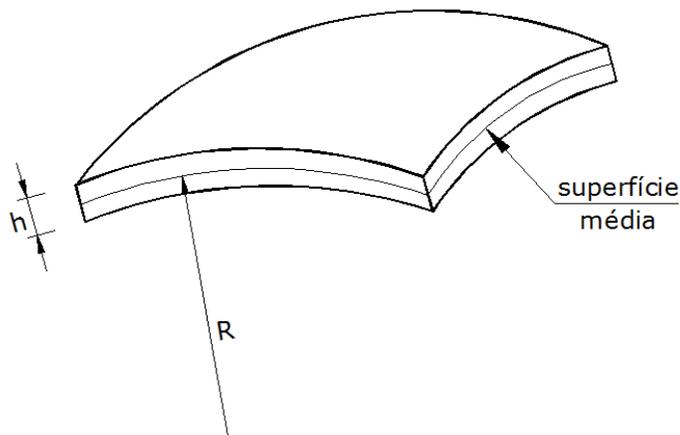
As cascas têm todas as características de placas, com um adicional, a curvatura. A curvatura pode ser escolhida como a classificação primária de uma casca, porque o comportamento de uma casca carregada é principalmente governado pela curvatura.

A curvatura de uma casca pode ser definida, em uma direção coordenada  $i$ , como sendo:

$$K_i = \frac{1}{R_i} \quad (2.11)$$

Sendo  $R_i$  o raio de curvatura da superfície média da casca referente à direção  $i$ .

Figura 10 - Estrutura de uma casca.



Fonte: (VENTSEL e KRAUTHAMMER, 2001).

Dependendo da curvatura da superfície, as cascas são divididas em cilíndricas (circular e não circular), cônicas, esféricas, elipsoidais, paraboloides, toroidais e cascas

paraboloides hiperbólicos. Por outro lado, uma placa pode ser considerada como um caso especial de uma casca que não tem curvatura; conseqüentemente, cascas são as vezes referenciadas como placas curvas.

Existem duas diferentes classes de cascas: casca grossa e casca fina. Uma casca é chamada fina se o máximo valor da razão  $h/R$  pode ser negligenciado em comparação com a unidade. Para uma precisão de engenharia, uma casca pode ser considerada como fina se a inequação (2.12) é satisfeita.

$$\frac{h}{R} \leq \frac{1}{20} \quad (2.12)$$

Conseqüentemente, casca para a qual a inequação (2.12) é violada é referenciada, como casca grossa. Para um grande número de aplicações práticas, as espessuras das cascas ficam entre os valores mostrados na inequação (2.13):

$$\frac{1}{1000} \leq \frac{h}{R} \leq \frac{1}{20} \quad (2.13)$$

Por tal, esse intervalo de valores encaixa-se como cascas finas, daí porque a teoria de casca fina é de grande importância nas estruturas de casca.

Nota-se, também, que a inequação (2.13) define muito simplesmente o limite entre casca fina e grossa. Na realidade, ela depende também de outros parâmetros geométricos, das características de suas condições de contorno, da suavidade das variações das cargas externas sobre a superfície da casca, etc.

### 2.2.3 Processos de Cálculo

A solução do problema de placas pela integração direta da equação de Lagrange é limitada a um número relativamente pequeno de geometria de placas, de carregamentos e condições de contorno. Se essas condições forem mais complexas, a análise torna-se muito difícil e em muitos casos impraticável.

Entretanto, a partir dessa equação, pode-se montar outro tipo de modelo que permita a determinação dos esforços solicitantes e deslocamentos transversais de placas. Dentre os processos que se baseiam na equação diferencial de Lagrange, podem-se destacar o MDF, o MEF e o tradicional processo de resolução de placas elásticas por meio de séries trigonométricas (séries de Fourier). Esses três processos, mais o processo de Analogia de

Grelha, são os mais utilizados na análise das lajes que compõem os pavimentos de edificações.

Para se analisar as lajes nervuradas de pavimentos com maior precisão dos resultados, pode-se usar a teoria das cascas finas. Essas análises, comumente feitas através do MDF ou do MEF, também podem ser aplicadas em processos de cálculos que não usam métodos numéricos; ao invés, usam soluções clássicas das equações diferenciais que regem o problema, considerando o domínio como contínuo e aplicando uma rigidez equivalente, distinta, para as duas direções das nervuras, transformando a laje nervurada em uma laje maciça. Vale expor que essas soluções clássicas das equações se dão para alguns problemas específicos.

Os métodos numéricos (MDF, MEF, entre outros) trabalham transformando o domínio contínuo do problema em um domínio discreto, representado por elementos. Os elementos podem ser de três tipos geométricos: elemento unidimensional (barras), elemento de superfície (placas e cascas) e elemento tridimensional. O elemento tridimensional, por considerar a estrutura tridimensionalmente, tende a respostas mais próximas do real comportamento da estrutura analisada.

Na sequência, apresentam-se o processo de grelha e o MEF, pois foram eles utilizados na resolução dos exemplos deste trabalho, além de serem os mais difundidos entre os projetistas estruturais na análise estrutural. Também apresenta-se o tradicional método de resolução de placas através de séries trigonométricas, por ter grande cunho acadêmico e apresentar de forma geral respostas consistentes.

#### 2.2.3.1 Processo de Grelha

Segundo Silva (2005), o processo de grelha equivalente ou analogia de grelha foi utilizado inicialmente por Marcus em 1932, para calcular os esforços solicitantes em placas com bordas indeslocáveis verticalmente. O procedimento consiste em substituir a placa (laje) por uma malha equivalente de vigas (grelha equivalente), a qual, para efeito de cálculo, passa a representar a placa. No caso de pavimentos de edifícios compostos por lajes maciças, com ou sem vigas, ou por lajes nervuradas, pode-se usar o mesmo procedimento.

Dividindo uma laje ou mesmo um pavimento em um número adequado de elementos (barras da grelha equivalente), é possível obter soluções para praticamente qualquer

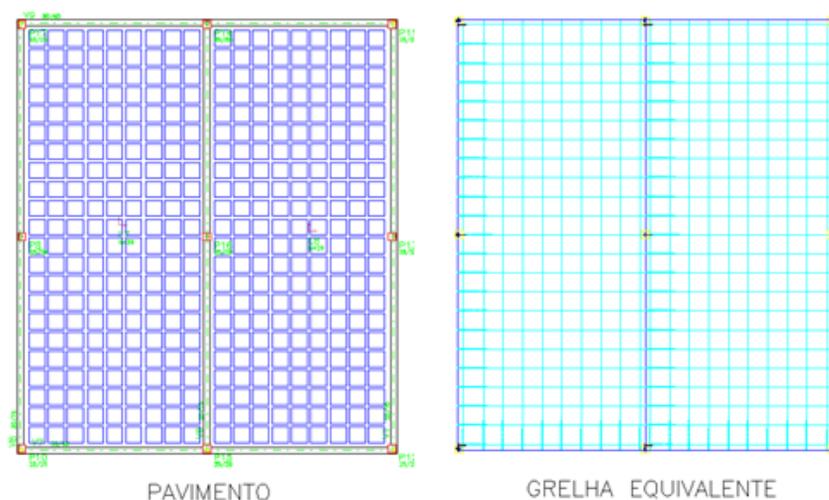
geometria definida; esse processo possibilita que se faça a análise integrada do pavimento, levando-se em consideração a influência da flexibilidade dos apoios e da rigidez à torção, tanto das lajes como das vigas, sendo ainda possível incluir na análise a não linearidade física do concreto armado.

Considera-se que as ações distribuídas atuantes na laje se dividem entre os elementos da grelha equivalente de acordo com a área de influência de cada elemento; as ações podem ser consideradas uniformemente distribuídas ao longo dos elementos ou então concentradas nos nós. No caso de existirem ações concentradas atuantes na laje, estas devem ser aplicadas aos nós da malha; quando a posição dessas ações não coincidir com um nó, deve-se adequar a malha ou adotar valores equivalentes da ação nos nós mais próximos.

A rigidez à torção, assim como à flexão, é tratada como concentrada nos elementos correspondentes da grelha equivalente. Conforme Hambly (1976), as rigidezes das barras da grelha equivalente devem ser tais que, ao carregar a estrutura real e a da grelha equivalente, obtenham-se o mesmo estado de deformação e os mesmos esforços nas duas estruturas.

A Figura 11 mostra um pavimento em concreto armado composto por duas lajes nervuradas, cinco vigas e nove pilares, e a grelha equivalente utilizada para representá-lo. Os elementos que aparecem em traço mais espesso na grelha equivalente representam as vigas, enquanto os demais indicam os elementos da laje (nervura e capa).

Figura 11 - Grelha equivalente de um pavimento.



Fonte: (AUTOR, 2011).

Para aplicar o processo de grelha equivalente na análise das lajes nervuradas, é preciso que as nervuras e as vigas sejam substituídas por elementos estruturais de barras exatamente nos seus eixos, obtendo-se, assim, uma grelha equivalente que passa a representar o pavimento. As características geométricas que devem ser consideradas para as barras da grelha equivalente são de dois tipos: as do elemento que representa as nervuras e as do elemento que representa as vigas; normalmente adota-se a seção em forma de “T” para o elemento que representa as nervuras, e retangular para aquele que representa as vigas do pavimento.

Para o cálculo das características geométricas do elemento que representa as nervuras no estágio I, e desprezando a presença da armadura longitudinal, com base na Figura 12, podem-se utilizar as expressões apresentadas a seguir:

- Momento de inércia à flexão:

$$I_f = \frac{(b_f - b_w) * h_f^3}{12} + \frac{b_w * h^3}{12} + (b_f - b_w) * h_f * \left( y_{cg} - \frac{h_f}{2} \right)^2 + b_w * h * \left( y_{cg} - \frac{h}{2} \right)^2 \quad (2.14)$$

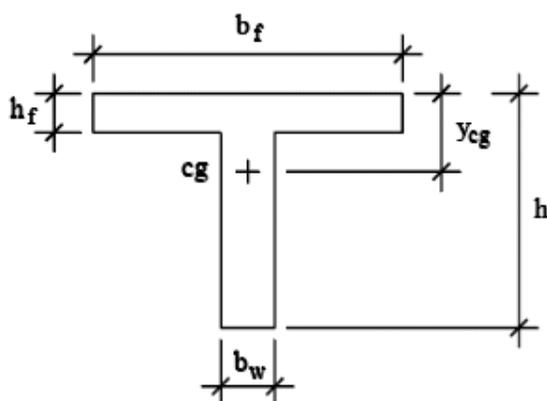
- Momento de inércia à torção:

$$I_t = \frac{b_f * h_f^3}{3} + \frac{(h - h_f) * b_w^3}{3} \quad (2.15)$$

- Área da seção transversal:

$$A = (b_f * h_f) + (h - h_f) * b_w \quad (2.16)$$

Figura 12 - Seção transversal do elemento que representa as nervuras na grelha equivalente.



Fonte: (SILVA, 2005).

Para o cálculo das características geométricas do elemento que representa as vigas do pavimento, por sua vez, no estágio I, desprezando a presença da armadura longitudinal e não levando em conta a contribuição da laje adjacente, o que poderia configurar, dependendo da posição, uma viga de seção transversal em forma de “T” ou em forma de “L” invertido (meio “T”), com base na Figura 13, podem-se utilizar as expressões apresentadas a seguir:

- Momento de inércia à flexão:

$$I_f = \frac{b * h^3}{12} \quad (2.17)$$

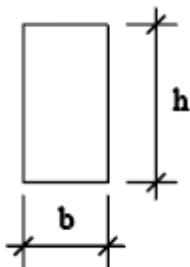
- Momento de inércia à torção:

$$I_t = \frac{h * b^3}{3} \quad (2.18)$$

- Área da seção transversal:

$$A = b * h \quad (2.19)$$

Figura 13 - Seção transversal do elemento que representa as vigas do pavimento na grelha equivalente.



Fonte: (SILVA, 2005).

Como indica Carvalho (1994), no estágio II, pode-se considerar o valor da inércia à torção do elemento que representa as vigas do pavimento como sendo 10% daquele dado pela Resistência dos Materiais; Sussekind (1985), por sua vez, recomenda considerar 20%. Assim:

$$I_t = \frac{h * b^3}{30} \text{ segundo Carvalho (1994);} \quad (2.20)$$

$$I_t = \frac{h * b^3}{15} \text{ segundo Sussekind (1985).} \quad (2.21)$$

Os valores do módulo de deformação longitudinal à compressão do concreto,  $E_{cs}$ , do módulo de deformação transversal do concreto,  $G_c$ , e do coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) relativo às deformações elásticas, também necessárias para a análise da grelha equivalente, podem ser determinados a partir das recomendações dadas pela NBR 6118:2003. Assim:

$$E_{cs} = 4760 * \sqrt{f_{ck}}, \text{ com } E_{cs} \text{ e } f_{ck} \text{ dados em MPa;} \quad (2.22)$$

$$G_c = 0,4 * E_{cs} = 1904 * \sqrt{f_{ck}}, \text{ com } G_c \text{ e } f_{ck} \text{ dados em MPa;} \quad (2.23)$$

$$\nu = 0,2. \quad (2.24)$$

### 2.2.3.2 Método dos Elementos Finitos (MEF)

Segundo Rezende (1990), o método dos elementos finitos pode ser definido como um procedimento geral de discretização de problemas contínuos, delineados por expressões definidas matematicamente. O processo de discretização é feito de acordo com o seguinte

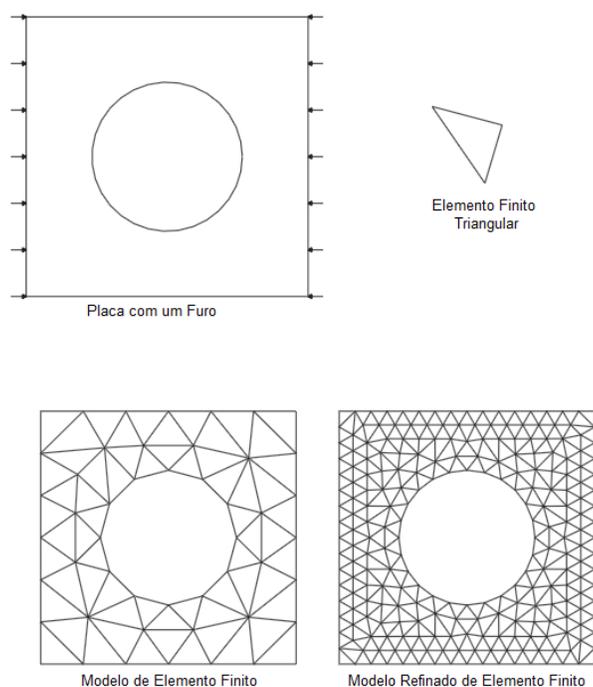
princípio: o meio contínuo é dividido em um número finito de partes (elementos), cujo comportamento se especifica em função de um número finito de parâmetros.

O método dos elementos finitos é uma modificação do método aproximado de RAYLEIGH – RITZ, em que o domínio de integração do problema é subdividido em regiões de dimensão finitas denominadas elementos finitos, ou seja, o problema contínuo é discretizado. A vantagem é que, dessa forma, podem-se utilizar funções mais simples, polinômios de grau baixo, para descrever a solução aproximada dentro de cada região ou elemento. Para melhorar a precisão da solução, pode-se aumentar o número de elementos ao invés de aumentar-se o grau dos polinômios utilizados (LA ROVERE, 2001, apud Stramandinoli, 2003).

Segundo Fish e Belytschko (2007), muitos fenômenos em engenharia e ciências podem ser descritos em termos de equações diferenciais parciais. Em geral, solucionar essas equações por meio de métodos analíticos clássicos para geometrias arbitrárias é quase impossível. O MEF é uma aproximação numérica com a qual essas equações diferenciais parciais podem ser resolvidas de modo aproximado. Do ponto de vista de engenharia, MEF é um método para resolver problemas como análise de tensões, transferência de calor, escoamento de fluidos e eletromagnetismo, por simulações de computador.

A idéia básica do MEF é dividir o corpo em elementos finitos, muitas vezes chamados apenas de elementos, conectados por nós, e obter uma solução aproximada como mostra a Figura 14. Esta é chamada de malha de elementos finitos e o processo para sua construção é conhecido como geração de malha.

Figura 14 – Geometria e malhas de elementos finitos.



Fonte: (FISH e BELYTCHKO, 2007).

O MEF provê uma metodologia sistemática com a qual a solução pode ser determinada por meio de um programa de computador. Para problemas lineares, a solução é determinada pela solução de um sistema de equações lineares; o número de incógnitas (para análise do comportamento estrutural, são os deslocamentos nodais) é igual ao número nodal.

O método dos elementos finitos segue os seguintes cinco passos:

1. Pré-processamento: subdivisão do domínio do problema em elementos finitos;
2. Formulação dos elementos: desenvolvimento de equações para os elementos;
3. Montagem: obtenção do sistema global de equações para os elementos;
4. Resolução das equações;
5. Pós-processamento: definição de valores de interesse, assim como tensões e deformações, e a obtenção da visualização das respostas.

O primeiro passo, a subdivisão do domínio do problema de engenharia em elementos finitos é auxiliada por computadores, onde é feita uma geração automática de malha. O passo 2, a descrição do comportamento de cada elemento, geralmente exige o

desenvolvimento das equações diferenciais parciais para o problema e a sua formulação fraca.

A formulação forte do problema consiste nas equações de governo, e das condições de contorno para um sistema físico. As condições de contorno são duas: as naturais (relacionadas com as prescrições de força, por exemplo, pressão da água nas paredes de um reservatório) e as essenciais (prescrições de deslocamentos, tal como o engaste em uma viga onde o deslocamento é nulo).

As equações de governo são geralmente equações diferenciais parciais, as quais, para problemas unidimensionais, tornam-se equações diferenciais ordinárias. A formulação fraca são essas equações em uma forma integral, que é necessária para formular o MEF.

Para o desenvolvimento do MEF, existem três pontos distintos que são combinados para chegar até as equações discretas (sistema de equações), que em seguida são resolvidas por um algoritmo computacional. Esses pontos são:

- Formulação forte, que consiste nas equações de governo para o modelo e nas condições de contorno (essas também são necessárias para qualquer outro método);
- Formulação fraca;
- Funções de aproximação.

As funções de aproximação são combinadas com a formulação fraca de modo a serem obtidas as formulações de elementos finitos discretas. A equação diferencial que rege o problema é obtida a partir do equilíbrio das forças internas, em um elemento infinitesimal do corpo. A equação diferencial de gerência do problema só é resolvida com a definição das condições de contorno.

Para desenvolver as equações de elementos finitos, as equações diferenciais parciais (equação de governo do problema junto com as equações das condições de contorno) precisam ser reformuladas em uma forma integral, chamada de formulação fraca.

A formulação fraca é desenvolvida, inicialmente, pela multiplicação da equação de governo e das condições de contorno naturais por uma função arbitrária  $w$ , e pela integração sobre os seus domínios de ação. A função  $w$  é chamada de função peso, sendo a mesma uma função arbitrária. A função peso pode ser pensada como uma função que força uma solução: tudo o que for multiplicado por ela é forçado a ser zero por sua arbitrariedade.

Outra função importante no desenvolvimento do MEF é a solução tentativa que, para problemas estruturais, representa uma solução para os deslocamentos nodais do corpo discretizado. As funções de aproximação mais comum são as polinomiais que são aplicadas para a função peso e solução tentativa. As funções de aproximação são desenvolvidas inicialmente em nível dos elementos em uma forma matricial, sendo possível expandi-las para uma forma matricial para todo o corpo.

Tendo sido desenvolvidas as funções de aproximação para a solução tentativa e a função peso, aplicam-se as mesmas na formulação fraca, sendo a integração feita sobre os domínios específicos dos elementos, para que a integral sobre todo o domínio do corpo seja feita pela soma das integrais sobre os domínios dos elementos. A integral, nos domínios dos elementos, é resolvida por algum processo de integração numérica, tal como quadratura de Gauss.

Após algumas manipulações matriciais, chega-se à equação (2.25) que rege o problema linear:

$$\bar{F} = \bar{K} * \bar{d} \quad (2.25)$$

$\bar{F}$  é a matriz das forças externas.

$\bar{K}$  é a matriz de rigidez global.

$\bar{d}$  é a matriz de deslocamento nodal.

### 2.2.3.3 Processo de resolução de lajes nervuradas por séries

Conforme Abdul-Wahab e Khalil (2000), lajes nervuradas são geralmente consideradas por consistirem de uma combinação entre uma placa de mesa plana, e um sistema de vigas paralelas igualmente espaçadas, ou grelhas, que podem ser dispostas em conjuntos ortogonais ou oblíquos com interseções monolíticas. Na análise de estruturas desse tipo, são feitos os habituais pressupostos da teoria clássica de flexão de placas isotrópicas. Além disso, supõe-se que:

- O número das nervuras é grande o suficiente, cinco ou mais, para a estrutura real ser substituída por uma idealizada com propriedades contínuas;
- O plano neutro em cada direção coincide com o centroide da secção plena na direção correspondente;

- A área da mesa da placa é ampliada por um fator  $1/(1-\nu^2)$  para permitir a influência do coeficiente de Poisson.

Para uma placa ortotrópica sob uma dada carga distribuída e para condições de contorno conhecidas, as deformações, momentos e cortantes são determinados pela integração da equação diferencial (Timoshenko e Woinowsky-Krieger, 1959):

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y) \quad (2.26)$$

Essa equação fica idêntica à equação (2.10), quando:  $D_x = H = D_y = D$ , que é a equação de Kirchhoff para placas elásticas isotrópicas.

Onde  $D_x$  e  $D_y$  são as rigidezes a flexão; e  $2H$  é a rigidez a torção total que é a soma das rigidezes a torção na direção-x e direção-y,  $D_{xy}$  e  $D_{yx}$ , e das rigidezes acopladas,  $D_1$  e  $D_2$ , que rerepresentam a contribuição da flexão para a torção da mesa. Assim temos:

$$2H = (D_{xy} + D_{yx} + D_1 + D_2) \quad (2.27)$$

O termo de rigidez a torção  $2H$  também pode ser escrito na forma descrita por Bares e Massonnet (1966 apud Abdul-Wahab e Khalil, 2000):

$$2H = 2\alpha \sqrt{D_x D_y} \quad (2.28)$$

Onde:

$$\alpha = \frac{D_{xy} + D_{yx} + D_1 + D_2}{2\sqrt{D_x D_y}} \quad (2.29)$$

O valor de  $\alpha$  tem o limite superior igual à unidade para uma laje isotrópica, onde  $D_x = H = D_y$ , e um limite inferior de zero para um grelha com os membros sem rigidez a torção, por tal  $H = 0$ . Porém, para casos onde a rigidez a torção é alta e a rigidez a flexão é baixa, por exemplo, para a mesa das lajes nervuradas, temos:  $H^2 > (D_x D_y)$ , portanto,  $\alpha > 1$ .

Para aplicações práticas, Bares e Massonnet (1966 apud Abdul-Wahab e Khalil, 2000) e Cusens e Pama (1975 apud Abdul-Wahab e Khalil, 2000) sugeriram que:

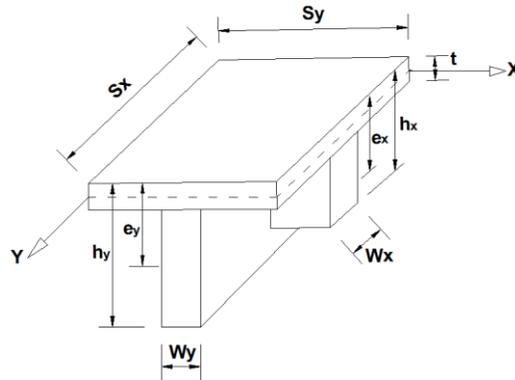
$$D_x = \frac{EI_{sx}}{S_x} \quad (2.30)$$

$$D_y = \frac{EI_{sy}}{S_y} \quad (2.31)$$

Onde  $I_{sx}$  e  $I_{sy}$  são os momentos de inércia da seção com respeito ao eixo neutro nas direções x e y respectivamente; e  $S_x$  e  $S_y$  são os espaçamentos das nervuras.

Cusens e Pama (1975 apud Abdul-Wahab e Khalil, 2000) desenvolveram a seguinte expressão alternativa (equação (2.32)) para o cálculo da rigidez a torção total ( $2H$ ) no tocante a lajes nervuradas ortotrópicas ou tabuleiro de pontes (Figura 15):

Figura 15 - Elementos de uma laje nervurada ortotrópica.



Fonte: (AUTOR, 2011).

$$2H = B_{xy} + B_{yx} + \frac{Et^3}{6(1-\nu^2)} + \frac{\nu E}{2} \frac{W_x W_y}{S_x S_y} (h_y - t) \cdot \quad (2.32)$$

$$\left[ (h_y - t) \{ (h_y - t) - (e_x + e_y) \} + \frac{(h_y - t)^2}{3} \right]$$

Onde  $B_{xy}$  e  $B_{yx}$  são as rigidezes individuais das nervuras transversais e longitudinais; e  $Et^3/6(1-\nu^2)$  é a rigidez a torção total da laje. As rigidezes  $B_{xy}$  e  $B_{yx}$  são dadas como:

$$B_{xy} = \frac{Gk W_x^3 (h_x - t)}{S_x} \text{ para } W_x < (h_x - t) \quad (2.33)$$

$$B_{yx} = \frac{Gk W_y^3 (h_y - t)}{S_x} \text{ para } W_y < (h_y - t) \quad (2.34)$$

Em uma análise aproximada, o quarto termo é usualmente negligenciado. Deve-se notar que para todos os itens acima, estes aplicam-se somente no campo do comportamento elástico.

Em uma solução mais generalizada, Kennedy e Iyengar (1982 apud Abdul-Wahab e Khalil, 2000) apresentaram fórmulas para flexão, acoplando a rigidez a torção de lajes nervuradas de concreto com formas não ortogonais, para estágios anterior e posterior à fissuração do concreto. Antes da fissuração, o momento de inércia da seção-T de concreto armado transformado é usado no cálculo das rigidezes a torção e flexão. Após a fissuração, a profundidade do eixo neutro para a seção fissurada é determinada antes do cálculo do momento de inércia da seção fissurada transformada.

Em Kennedy e Iyengar (1982 apud Abdul-Wahab e Khalil, 2000), o parâmetro de torção  $\alpha$  é assumido para permanecer o mesmo de antes da fissuração do concreto. Assim, o coeficiente  $\alpha$  pode ser calculado como na equação (2.29), usando as rigidezes a flexão e torção anteriores à fissuração. Para uma laje nervurada ortogonal, um procedimento foi proposto para determinar o valor exato das rigidezes usando a equação (2.32). Embora a concordância tenha sido relatada, entre a teoria e resultados de testes para as rigidezes, Kennedy e Iyengar notaram que as estimativas teóricas das rigidezes foram consistentemente inferiores aos obtidos a partir de experimentos.

Em Timoshenko e Krieger-Woinowsky (1959), encontram-se soluções (da equação (2.26)) para lajes nervuradas retangulares com algumas condições de contorno e carregamento. Uma solução simples é para a placa simplesmente apoiada em todos os lados, quando a flecha é determinada a partir da equação (2.26), levando em consideração as condições de contorno, tendo a equação da flecha como:

$$w = \frac{1}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}}{D_x \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2H \left(\frac{mn}{ab}\right)^2 + D_y \left(\frac{n}{b}\right)^4} \text{ para } m, n = 1, 3, 5, \dots \quad (2.35)$$

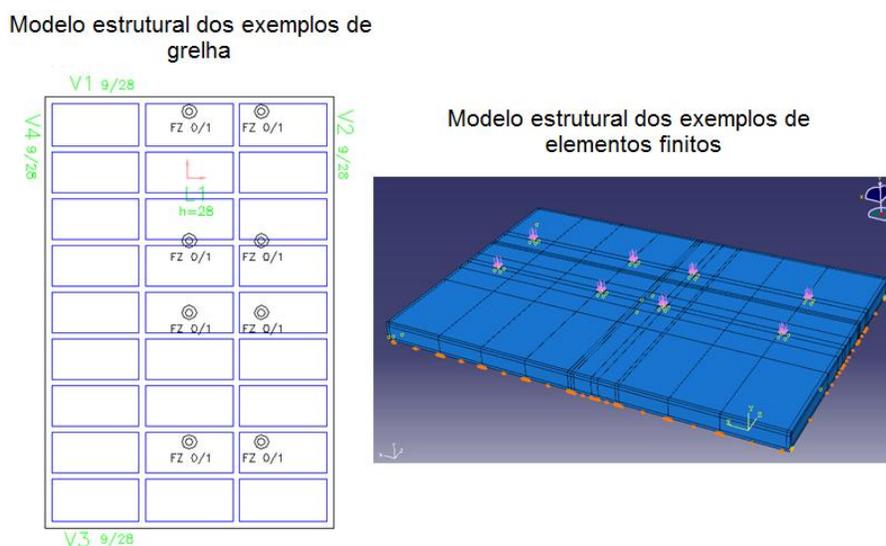
A carga uniforme distribuída  $P_{mn}$ , de intensidade  $P$ , distribuída sobre um retângulo com lados medindo  $2c$  e  $2d$  (o centro desse retângulo é um ponto com  $x = x_r, y = y_r$ ), é dada por:

$$P_{mn} = \frac{16P}{\pi^2} \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x_r}{a} \sin \frac{m\pi c}{a} \sin \frac{m\pi y_r}{b} \sin \frac{m\pi d}{b} \quad (2.36)$$

### 3 DETERMINAÇÃO, VALIDAÇÃO E PRÉ-DIMENSIONAMENTO DOS MODELOS

Para atender aos objetivos deste trabalho, algumas simulações numéricas de pavimentos contendo uma única laje nervurada, lançadas como LNU e LNB, foram feitas utilizando modelos de grelha e de elementos finitos (Figura 16) através de programas de análises específicos, tendo, como foco da análise estrutural, a determinação dos momentos fletores máximos atuantes nas mesas e as flechas.

Figura 16 - Estrutura básica dos modelos de cálculo dos exemplos.



Fonte: (AUTOR, 2011).

Sobre a análise da flexão da mesa, houve a busca dos valores limites entre eixos de nervuras para os quais se pode dispensar a análise de flexão da mesa, considerando as análises sob QD e QC, tendo como variável de controle para verificar esse limite a armadura mínima recomendada pela NBR 6118:2003 na Tabela 19.1 da mesma.

A análise das flechas teve dois pontos de interesse. O primeiro ponto visou comparar as flechas geradas pelos QD recomendado pela NBR 6120:1980 com as flechas geradas pelo QC. O segundo ponto buscou definir valores de QD que fornecessem flechas iguais às geradas pelo QC e, dessa forma, fosse obtida uma análise com QD que oferecesse valores próximos a uma análise feita com QC, para cálculo das flechas e momentos nas nervuras. contribuindo, com isso, no desenvolvimento dos projetos estruturais de lajes nervuradas.

Uma análise que usa QC é complexa e demorada se comparada com uma análise que utiliza QD.

Cada exemplo simulado foi modelado como LNU e LNB. Por praticidade foi estabelecida a abreviação EMLNUB, que significa: exemplo modelado como LNU e LNB. Antes da modelagem de cada exemplo é feito um pré-dimensionamento, para estabelecer a altura da laje por intermédio do conhecimento prévio das outras dimensões e do carregamento solicitante, possibilitando a elaboração de exemplos onde os elementos estruturais têm capacidade de carga condizente com os esforços atuantes.

O pré-dimensionamento tem sua formulação baseada nas recomendações indicadas pela NBR 6118:2003 para o cálculo de vigas no estágio II (consideração do início da fissuração do concreto).

Os exemplos que usaram em sua modelagem elementos finitos foram modelados com o programa Abaqus por dispor de grande variedade de elementos e análises, além de serem difundidos seu uso e credibilidade na comunidade acadêmica. Sobre os exemplos modelados por grelha, foi utilizado o programa TQS versão 15, por ser amplamente utilizado e de credibilidade já difundida pela classe: projetistas e professores.

Nos subcapítulos seguintes, serão mostrados a geometria dos modelos e os carregamentos aplicados, bem como a sequência de cálculo adotado no pré-dimensionamento.

### **3.1 Geometria e Carregamento dos Modelos**

O desenvolvimento e análise dos EMLNUB, ou seja, o processo de construção dos modelos de cálculo e das análises dos esforços e deslocamentos, foram feitos após o pré-dimensionamento, ou seja, após a definição das alturas das lajes.

Ao todo foram sete exemplos, cada um apresentando única e distinta distância entre eixo das nervuras principais (DNP), sendo essas distâncias em centímetros iguais a: 50, 60, 65, 70, 80, 90 e 100.

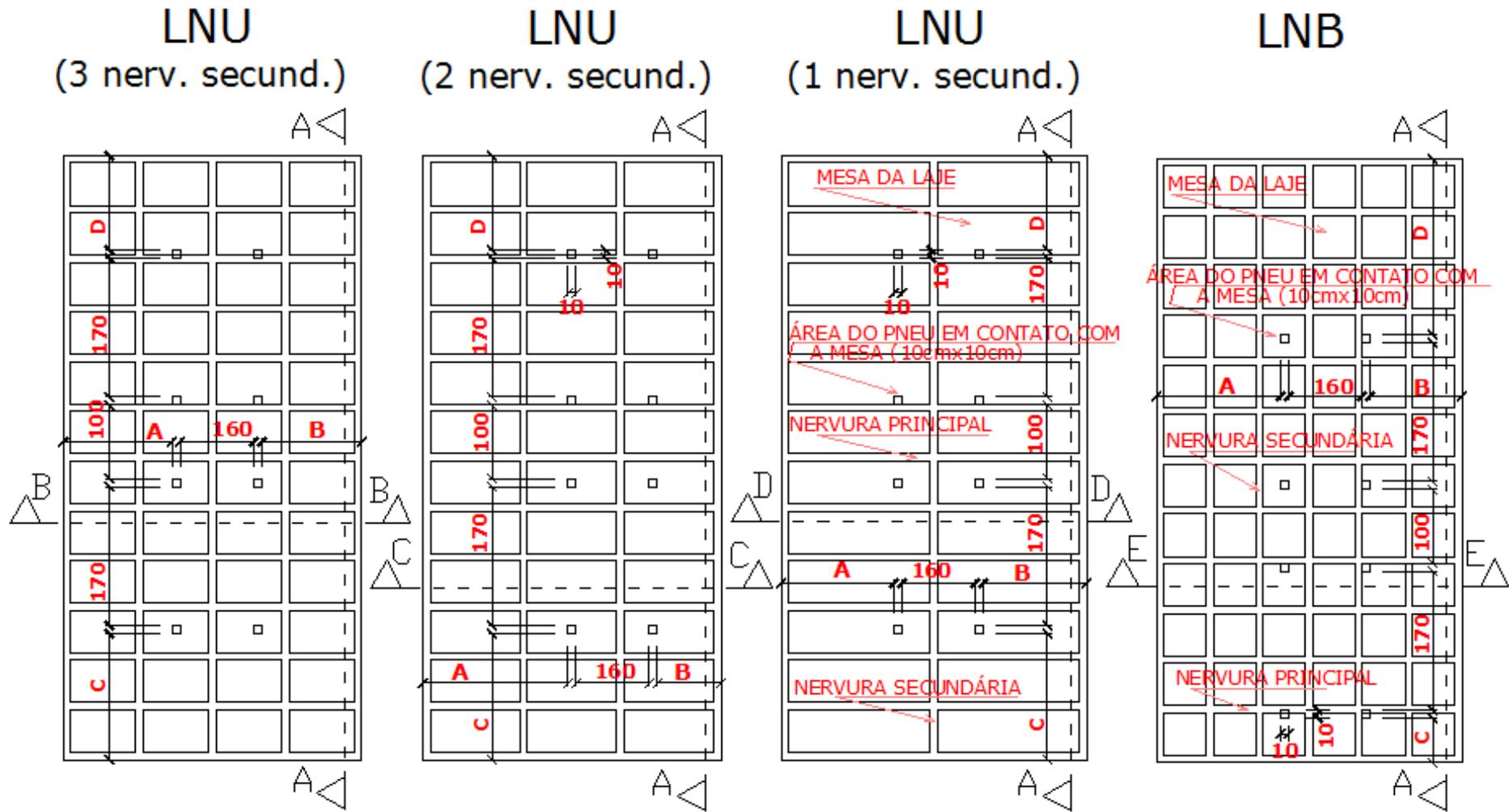
Nos exemplos, para cada DNP foi variado a QNS. para os modelos com LNU as quantidades de nervuras secundárias (QNS) foram: 1, 2 e 3. Para os modelos como LNB, a QNS foi definida pela igualdade da distância entre o eixo das nervuras secundárias e a distância entre o eixo das nervuras principais.

Sobre os carregamentos, foram considerados o PP e cargas acidentais. As cargas acidentais consideradas foram duas: um carregamento distribuído, QD, e um concentrado, QC. O QD foi o especificado na NBR 6120:1980 para pavimentos de garagem, e o QC foi definido através das especificações de veículos usados no mercado brasileiro: tipo compacto, modelo sedam e o modelo caminhonete.

O QC, que é representado pelo contato dos pneus dos veículos com o piso da laje, foram dispostos de forma que gerasse a situação mais desfavorável para a estrutura.

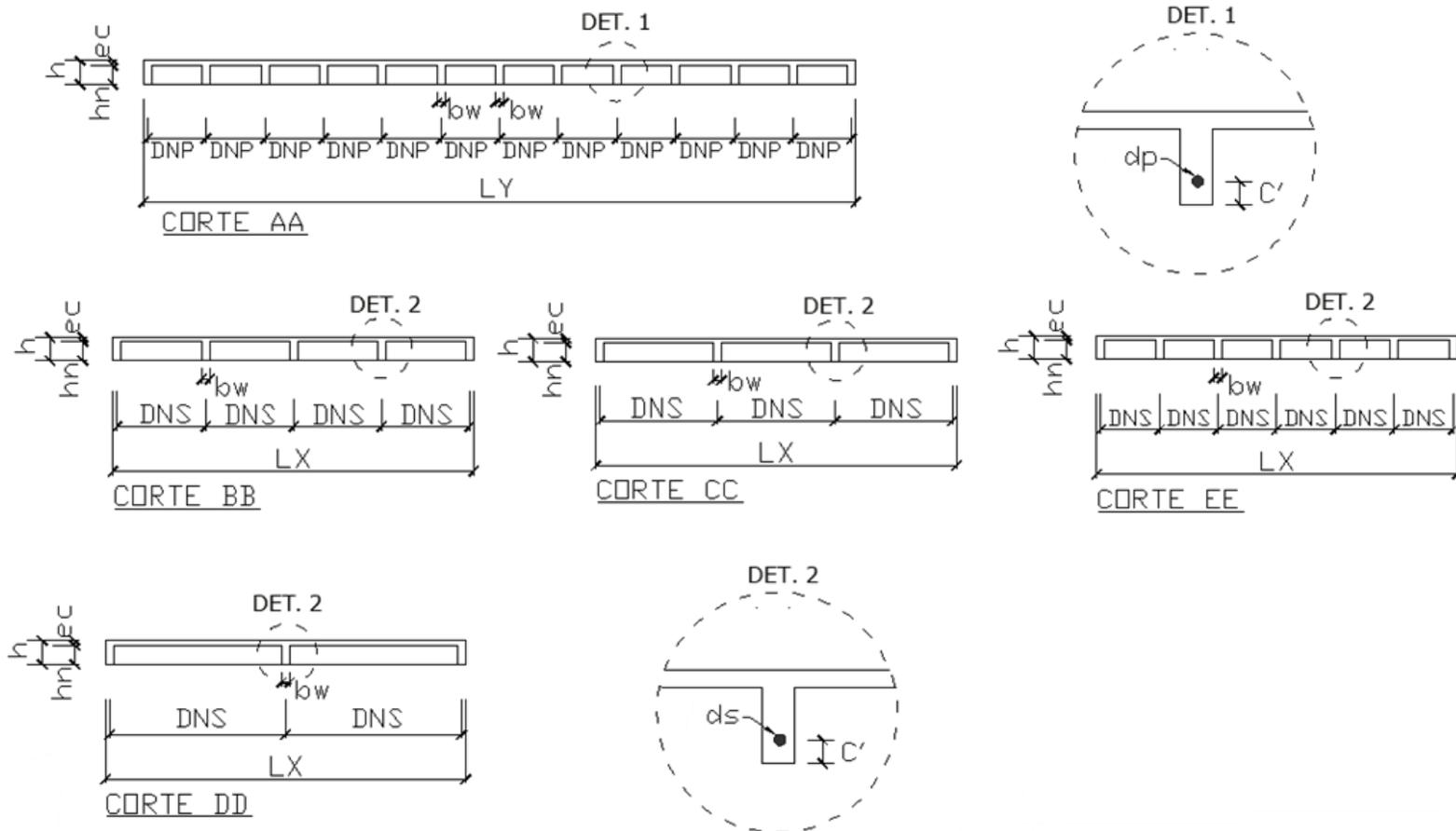
A seguir a Figura 17 mostra a geometria e a disposição das cargas concentradas dos exemplos, e a Figura 18 mostra os cortes da geometria. Todas as informações geométricas dos exemplos encontram-se divididas nas Tabelas 4, 5, 6 e 7.

Figura 17 - Ilustração geométrica dos EMLNUB e disposição das cargas concentradas (medidas em cm).



Fonte: (AUTOR, 2011).

Figura 18 - Ilustração geométrica dos cortes dos EMLNUB.



Fonte: (AUTOR, 2011).

Sendo:

$A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  as distâncias das cargas concentradas as arestas da laje;  $h$  a altura da laje;  $hn$  a altura da nervura;  $ec$  a espessura da mesa;  $bw$  a largura da nervura;  $DNP$  a distância entre eixos das nervuras principais;  $DNS$  a distância entre eixos das nervuras secundárias;  $LX$  o menor lado da laje;  $LY$  o maior lado da laje;  $C'$  a distância entre o centro da armadura e a base inferior da nervura;  $ds$  o diâmetro do ferro da nervura secundária;  $dp$  o diâmetro do ferro da nervura principal.

Tabela 4 - Dados geométricos dos exemplos (em cm), parte 1.

DNP	LX				LY				A				B			
	LNU C/ 1 NERV. SECND.	LNU C/ 2 NERV. SECND.	LNU C/ 3 NERV. SECND.	LNB	LNU C/ 1 NERV. SECND.	LNU C/ 2 NERV. SECND.	LNU C/ 3 NERV. SECND.	LNB	LNU C/ 1 NERV. SECND.	LNU C/ 2 NERV. SECND.	LNU C/ 3 NERV. SECND.	LNB	LNU C/ 1 NERV. SECND.	LNU C/ 2 NERV. SECND.	LNU C/ 3 NERV. SECND.	LNB
50	399				600				75	35	75	60	155	195	155	170
60												65				165
65												68				163
70												70				160
80												35				195
90												75				155
100												399				X

Fonte: (AUTOR, 2011).

Tabela 5 – Dados geométricos dos exemplos (em cm), parte 2.

DN P	C				D				DNS				bw			
	LNU C/1 NERV. SECN D.	LNU C/2 NERV. SECN D.	LNU C/3 NERV. SECN D.	LN B	LNU C/1 NERV. SECN D.	LNU C/ 2 NERV. SECND .	LNU C/3 NERV. SECN D.	LNB	LNU C/ 1 NERV. SECND.	LNU C/ 2 NERV. SECND.	LNU C/ 3 NERV. SECND.	LNB	LNU C/ 1 NERV. SECND.	LNU C/ 2 NERV. SECND.	LNU C/ 3 NERV. SECN D.	LNB
50	90				40				195	130	98	50	9			
60	85				45							60				
65	195				115							65				
70	80				50							70				
80	115				15							80				
90	70				60							90				
100	65	X	65		65		X	65		126	X	100	9	X	9	

Fonte: (AUTOR, 2011).

Tabela 6 - Dados geométricos dos exemplos (em cm), parte 3.

DN P	H				hn				ec				C'			
	LNU C/1 NERV. SECN D.	LNU C/2 NERV. SECN D.	LNU C/3 NERV. SECN D.	LN B	LNU C/1 NERV. SECN D.	LNU C/ 2 NERV. SECND .	LNU C/ 3 NERV. SECND.	LNB	LNU C/ 1 NERV. SECND.	LNU C/ 2 NERV. SECND.	LNU C/ 3 NERV. SECND.	LNB	LNU C/ 1 NERV. SECND .	LNU C/ 2 NERV. SECND .	LNU C/ 3 NERV. SECND .	LNB
50	28				23				5				4			
60																
65																
70																
80					22				6							
90																
100	28	X	28		21	X	21		7	X	7		4	X	4	

Fonte: (AUTOR, 2011).

Os valores das alturas das lajes ( $h$ ) obtidos pelo pré-dimensionamento ficaram entre 25,5 cm e 28 cm. Para simplificar o processo da modelagem foi adotada uma única altura para todos os exemplos, conforme mostrado na Tabela 6.

Tabela 7 - Dados geométricos dos exemplos (em cm), parte 4.

DN P	ds				dp			
	LNU C/1 NERV. SECN D.	LNU C/2 NERV. SECN D.	LNU C/3 NERV. SECN D.	LN B	LNU C/1 NERV. SECN D.	LNU C/ 2 NERV. SECND .	LNU C/ 3 NERV. SECND.	LNB
50	0,8				1,76			
60								
65								
70								
80								
90								
100	0,8		X	0,8	1,76		X	1,76

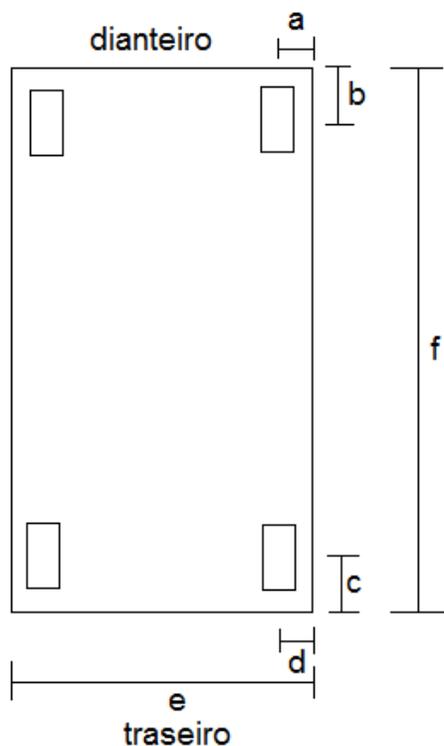
Fonte: (AUTOR, 2011).

Pode-se observar que a quantidade de exemplos foram sete, para os modelos com LNU o QNS foi igual a 1, 2 e 3, com exceção do exemplo com DNP de 100 cm, onde se teve os modelos com LNU com o QNS igual a 1 e 2.

Portanto, a quantidade total de modelos foi de vinte e sete, onde cada modelo apresentou como carregamento o PP e duas cargas acidentais (representação das cargas veiculares). Essas cargas acidentais foram aplicadas de forma alternada com o PP, portanto, em cada modelo foram feitas duas análises, uma para o QD, e outra para o QC, logo a quantidade total de simulações foram de cinquenta e quatro.

As cargas concentradas foram feitas pelo uso de três tipos diferentes de veículos (veículos tipos), os quais representam os modelos usuais do mercado brasileiro: o tipo compacto, o sedam e a caminhonete. A seguir na Figura 19 encontra-se a ilustração geométrica dos automóveis, e na Tabela 8, apresenta-se os dados geométricos e de carga dos mesmos.

Figura 19 - Esquema das medidas geométricas dos veículos tipos.



Fonte: (AUTOR, 2011).

Tabela 8 - Medidas Geométricas e cargas dos veículos tipos.

Tipo dos veículos	compacto	sedam	caminhonete
Peso eixo dianteiro total (kgf)	900	1280	1675
Peso eixo traseiro total (kgf)	860	910	1335
Peso em ordem de marcha (kgf)	1300	1710	2010
Peso bruto total (kgf)	1760	2190	3010
a (cm)	8	9	9
b (cm)	80	80	80
c (cm)	70	90	120
d (cm)	8	9	9
e (cm)	180	185	180
f (cm)	425	480	526

Obs.: Sobre os pesos expostos nesta tabela: Peso eixo dianteiro total, maior peso que ao eixo dianteiro do veículo pode ser solicitado; Peso eixo traseiro total, maior peso que ao eixo traseiro do veículo pode ser solicitado; Peso em ordem de marcha, peso do veículo com os fluidos necessários para seu funcionamento; peso bruto total, peso em ordem de marcha mais passageiros e compartimentos de carga em uso total.

Fonte: (AUTOR, 2011).

Esses dados foram utilizados para montar a estrutura geométrica e as intensidades das cargas, referente à solicitação veicular transmitida ao pavimento pelo contato do pneu com o piso, que é justamente, o QC. Nesse caso, o valor dos QC utilizados nas simulações foram metade do “Peso Eixo dianteiro total”, como mostrado na Tabela 9.

Tabela 9 - Valores das cargas concentradas usadas nos exemplos.

Tipo dos veículos	compacto	sedam	caminhonete
Carga no pneu (kg)	450	650	850

Fonte: (AUTOR, 2011).

A distribuição dos veículos tipos foi localizada de forma que gerasse a situação mais desfavorável para a estrutura, tanto para a análise das mesas como para a análise das flechas.

Todas as informações sobre as cargas e geometria dos veículos foram obtidas pelo manual dos veículos ou com o setor técnico responsável das empresas. Sendo consultados as seguintes empresas: Ford, Toyota, Chevrolet e Wolkswagen.

### **3.2 Validação dos Modelos**

Para se definir quais as características do modelo, que fornecessem resultados mais próximos do real comportamento da estrutura, e reduzissem a quantidade de simulações, foram feitas análises buscando responder algumas considerações:

- a. Qual o melhor tipo de elemento finito para as simulações: o elemento tridimensional ou o elemento de casca?
- b. Qual o melhor refinamento para os elementos, de forma que a simulação seja rápida e as respostas fornecidas sejam boas? Ou seja, se as respostas forem comparadas com uma análise experimental, as mesmas forneçam valores próximos a estas.
- c. Qual a geometria e características do modelo, e quais suas condições de contorno de forma que as respostas sejam as mais abrangentes possíveis? Ou seja, as conclusões obtidas com as simulações possam ser aplicadas a qualquer estrutura convencional de lajes nervuradas.
- d. Existe alguma relação linear entre os dados analisados para os modelos com cargas concentradas?

As indagações “a” e “b” foram respondidas através da modelagem numérica (utilizando o Abaqus) de um modelo experimental de uma das lajes nervuradas ensaiadas por ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000), onde, nas Tabelas 10 e 11 encontram-se os dados geométricos e físicos dos modelos experimentais, respectivamente, e na Figura 20, mostra-se a ilustração geométrica.

O modelo simulado numericamente foi o modelo experimental S1, onde foram comparados os valores de flechas do modelo experimental com o do numérico. Sobre as cargas, foram usados nas simulações numéricas os valores de 10 KN e 20 KN, pois, para esses níveis de carga, o comportamento das lajes ensaiadas ainda era linear. Essas cargas foram aplicadas numa determinada área centrada na laje, conforme exposto na Figura 20.

Tabela 10 - Características geométricas das lajes ensaiadas por ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000).

Laje	Vazios	$a_1$ (cm)	$h_f$ (cm)	$b_w$ (cm)	$h$ (cm)	$h/h_f$	$a_1/l$
S1	11 X 11	13,6	2,0	5,2	9,5	4,75	0,0907
S2	9 X 9	16,7	2,0	5,2	9,5	4,75	0,1113
S3	7 X 7	21,4	2,0	5,2	9,5	4,75	0,1427
S4	5 X 5	30	2,0	5,2	9,5	4,75	0,2000
S5	9 X 9	16,7	2,0	5,2	12,5	6,25	0,1113
S6	9 X 9	16,7	2,0	4,7	6,5	3,25	0,1113

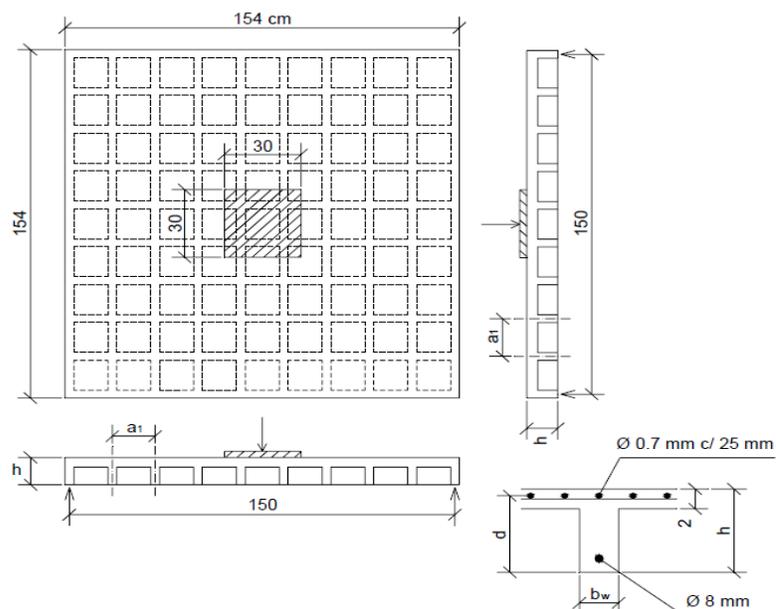
Fonte: (ABDUL-WAHAB e KHALIL, 2000).

Tabela 11 - Características físicas das lajes ensaiadas por ABDUL-WAHAB e KHALIL (2000).

Laje	$f_{ck}$ (MPa)	$E_{cs}$ (KN/cm <sup>2</sup> )	$G_c$ (KN/cm <sup>2</sup> )	$P_{fissuração}$ (KN)	$P_{última}$ (KN)
S1	31,3	2663,05	399,46	30	105
S2	32,0	2692,66	403,90	20	81
S3	31,4	2667,30	400,10	20	65
S4	28,9	2558,92	383,84	20	48
S5	29,9	2602,81	390,42	40	120
S6	29,1	2567,75	385,16	20	48

Fonte: (ABDUL-WAHAB e KHALIL, 2000).

Figura 20 - Geometria básica das lajes ensaiadas e área de aplicação da carga concentrada, em cm.



Fonte: (ABDUL-WAHAB e KHALIL, 2000).

Na Tabela 12 apresentam-se os valores das flechas para os modelos numéricos e experimentais (modelo experimental S1). Nessa tabela, estão expostos os valores para o modelo usando elementos de casca (S4R) e elementos tridimensionais (C3D20). Cada modelo, foi feito com quatro tamanhos de elementos: 1,36 cm (10% do vão), 2,72 cm (20% do vão), 4,08 cm (30% do vão) e 5,44 cm (40% do vão), sendo o vão a distância entre eixo das nervuras.

Na Tabela 12, observa-se que o tipo de elemento que apresenta resultados mais próximos do valor experimental é o tridimensional, e que os elementos com os tamanhos iguais a 10% do vão apresentam bons resultados, se comparados com o experimental. Seus valores não distam mais que 2% dos valores das flechas geradas pelos elementos com tamanhos iguais a 20% do vão, o que demonstra que os valores das flechas já estão em uma parte assintótica pouco crescente, portanto o custo benefício que se teria ao diminuir ainda mais o tamanho do elemento seria desprezível. Portanto o elemento usado nos exemplos foram os tridimensionais e as suas arestas foram limitadas a 10% do vão, DNP.

Tabela 12 - Valores das flechas em cm, para os modelos numéricos e o experimental.

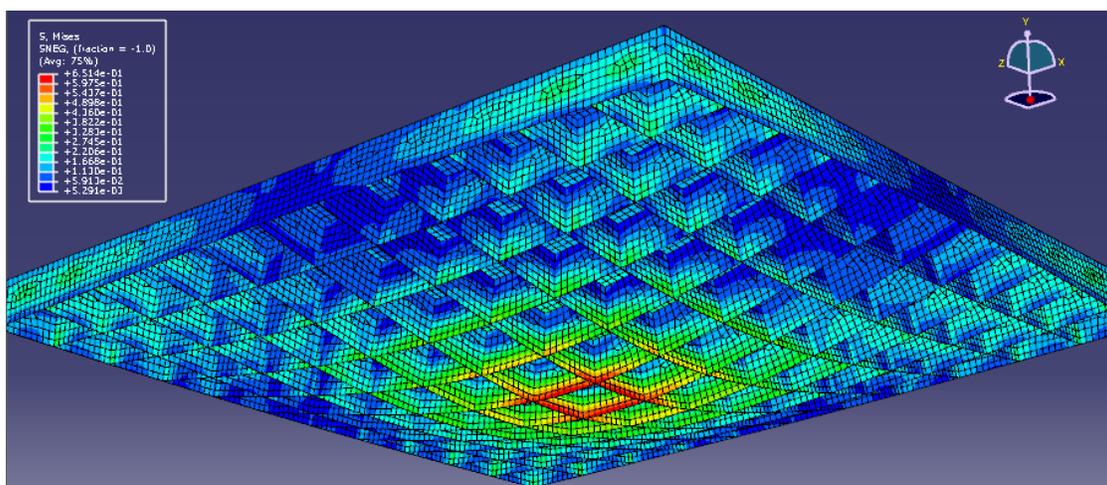
Carga	Exp.	S4R - 10%	S4R - 20%	S4R - 30%	S4R - 40%	C3D20 - 10%	C3D20 - 20%	C3D20 - 30%	C3D20 - 40%
10KN	0,014	-0,0255	-0,0257	-0,0258	-0,0279	-0,0145	-0,0143	-0,0141	-0,0139
20KN	0,028	-0,0473	-0,0475	-0,0477	-0,0516	-0,0277	-0,0273	-0,0269	-0,0265

Obs.: Os modelos que utilizaram os elementos de casca foram: S4R-10%, S4R-20%, S4R-30% e S4R-40%; os modelos que utilizaram os elementos tridimensionais foram: C3D20-10%, C3D20-20%, C3D20-30% e C3D20-40%. Os termos 10%, 20%, 30% e 40%, expostos nos finais das legendas dos modelos, representam o tamanho do elemento utilizado no modelo em relação ao comprimento do vão (sendo o vão a distância entre eixos das nervuras).

Fonte: (AUTOR, 2011).

Também observa-se que a distribuição de tensões (Figura 21) está suave (sem pontos angulosos), o que demonstra que o refinamento da malha está adequado.

Figura 21 - Distribuição das tensões para o modelo numérico S4R - 10%.



Fonte: (AUTOR, 2011).

Em resposta a indagação “c” foi necessário esclarecer os seguintes pontos: geometria dos modelos, variação do fck e condições de contorno, a seguir tem-se esses três pontos, respectivamente:

#### c.1 - Geometria dos modelos:

Buscou-se que a geometria dos modelos abrangesse tanto a análise do comportamento geral das lajes nervuradas (flechas), como a análise do comportamento localizado (momento positivo máximo nas mesas e cálculo da armadura de aço para as mesmas), de forma que os resultados encontrados para esses modelos pudessem ser usados como recomendação para a análise de qualquer laje nervurada de pavimentos garagem convencional.

A estrutura dos modelos para os exemplos foi definida, buscando dimensões geométricas que se verificam com frequência na construção civil. Para tal, foi adotado, como estrutura básica para todos os exemplos, um pavimento de uma única laje nervurada, com o maior lado medindo 6 metros, e com o lambda (relação entre o comprimento do maior vão e o do menor vão da laje) de: 1,0, 1,5 e 2,0. Todos os modelos a serem mencionados neste texto são representados por uma legenda que consta de dois números separados pela letra x, sendo que o primeiro número representa a DNP e o segundo a DNS.

Simulações foram feitas para verificar a necessidade, ou não, de usar os modelos com os três valores de lambda para todas as análises. Para essas simulações, foram utilizados dois modelos do exemplo com DNP de 65 cm, sendo eles o: 65x65 e o 65x130, como exposto na Tabela 13.

Tabela 13 - Resultados para os modelos 65x65 e 65x130, para lambdas 1,0, 1,5 e 2,0.

DNPxDNS	65x65			65x130			
	Lambda	1,0	1,5	2,0	1,0	1,5	2,0
Flecha-QC(cm)		-0,042	-0,064	-0,074	-0,045	-0,071	-0,088
Flecha-QD (cm)		-0,023	-0,043	-0,058	-0,023	-0,045	-0,065
Flecha-QC/Flecha-QD		1,795	1,473	1,289	1,922	1,575	1,351
M1-QC (KN*m/m)		-1,856	-1,861	-1,857	-2,104	-2,200	-2,235
M2-QC (KN*m/m)		-1,950	-1,926	-1,885	-1,962	-1,935	-1,895
M1-QD (KN*m/m)		-0,072	-0,092	-0,103	-0,092	-0,126	-0,148
M2-QD (KN*m/m)		-0,142	-0,143	-0,126	-0,137	-0,141	-0,130
A1-QC (cm <sup>2</sup> /m)		1,653	1,658	1,654	1,896	1,992	2,026
A2-QC (cm <sup>2</sup> /m)		1,744	1,721	1,682	1,756	1,729	1,690
A1-QD (cm <sup>2</sup> /m)		0,060	0,076	0,085	0,077	0,104	0,123
A2-QD (cm <sup>2</sup> /m)		0,118	0,119	0,104	0,114	0,117	0,108
A-min (cm <sup>2</sup> /m)		0,865	0,865	0,865	0,865	0,865	0,865

Fonte: (AUTOR, 2011).

- Flecha-QC representa a flecha que foi gerada com o uso do QC, sendo essa carga concentrada de 1 tf;
- Flecha-QD representa a flecha que foi gerada com o uso do QD, conforme o recomendado pela NBR 6120:1980 para carga acidental a ser aplicada na análise de pavimentos de garagem;
- M1-QC representa o momento máximo na mesa na direção do seu menor lado, ou seja, esse momento flexiona a mesa na direção do maior lado da laje. Nessa situação, a carga acidental é representada por cargas concentradas com valor de 1 tf para cada pneu;
- M2-QC tem o mesmo significado do M1-QC, sendo que a sua atuação é na direção ortogonal à atuação do M1-QC;
- M1-QD tem o mesmo significado do M1-QC, sendo que a carga acidental é representada por um carregamento distribuído por unidade de área (carregamento recomendado pela NBR 6120:1980 para pavimentos de garagem);
- M2-QD tem o mesmo significado do M1-QD, sendo que a sua atuação é na direção ortogonal à atuação do M1-QD;
- A1-QC representa a área de aço para a mesa calculada para o momento M1-QC;
- A2-QC representa a área de aço para a mesa calculada para o momento M2-QC;
- A1-QD representa a área de aço para a mesa calculada para o momento M1-QD;

- A2-QD representa a área de aço para a mesa calculada para o momento M2-QD;
- A-min representa a armadura mínima para a mesa conforme as recomendações da NBR 6118:2003.

Na Tabela 13, apresentam-se três informações básicas: flecha, momento na mesa e a respectiva área de aço associado a esse momento. Para as áreas de aço, que é o foco na análise das mesas, fica evidente que as áreas provenientes das cargas concentradas não sofrem influência do  $\lambda$ , enquanto as relacionadas às cargas distribuídas sofrem influência com a variação do  $\lambda$ , mas esse fato será ignorado, pois seus valores são bem menores que o valor da armadura mínima (A-min) recomendada pela NBR 6118:2003. Portanto, os exemplos para analisar o comportamento das mesas serão apenas para o  $\lambda$  de 1,5, pois os resultados para o mesmo podem ser aplicados para qualquer outro  $\lambda$ .

Para as flechas, fica claro que elas sofrem influência direta da variação do  $\lambda$ , pois a razão entre a flecha devido à carga concentrada e a flecha proporcionada pela carga distribuída para cada caso de  $\lambda$  apresenta valores diferenciados, motivo pelo qual será necessário para a análise das flechas que os exemplos tenham a variação do  $\lambda$ .

Por tal, para as análises do trabalho, foram feitos mais quatorze exemplos, sete com  $\lambda$  de 1,0 e sete com  $\lambda$  de 2,0. Dessa forma, foram feitos para cada um desses exemplos um único modelo, que foram: 50x130, 60x130, 65x130, 70x130, 80x130, 90x130 e 100x130. Apresentando para todos esses modelos adicionais a DNS de 130 cm, pois o mesmo apresenta a maior diferença entre as flechas geradas pela carga concentrada em relação às cargas distribuídas. A geometria e a distribuição das cargas concentradas desses modelos adicionais são as mesmas das mostradas no item 3.1, tendo de diferente apenas o comprimento  $LX$  da laje, onde, para os modelos com  $\lambda$  de 1,0, o  $LX$  vale 6 m, enquanto, para os modelos com  $\lambda$  de 2,0, o  $LX$  vale 3 m. Portanto, devido à necessidade de se simular mais quatorze modelos, a quantidade total foi de quarenta e um modelos simulados, sendo sete modelos para o  $\lambda$  de 1,0 e sete para o  $\lambda$  de 2,0, e vinte e sete modelos para o  $\lambda$  de 1,5.

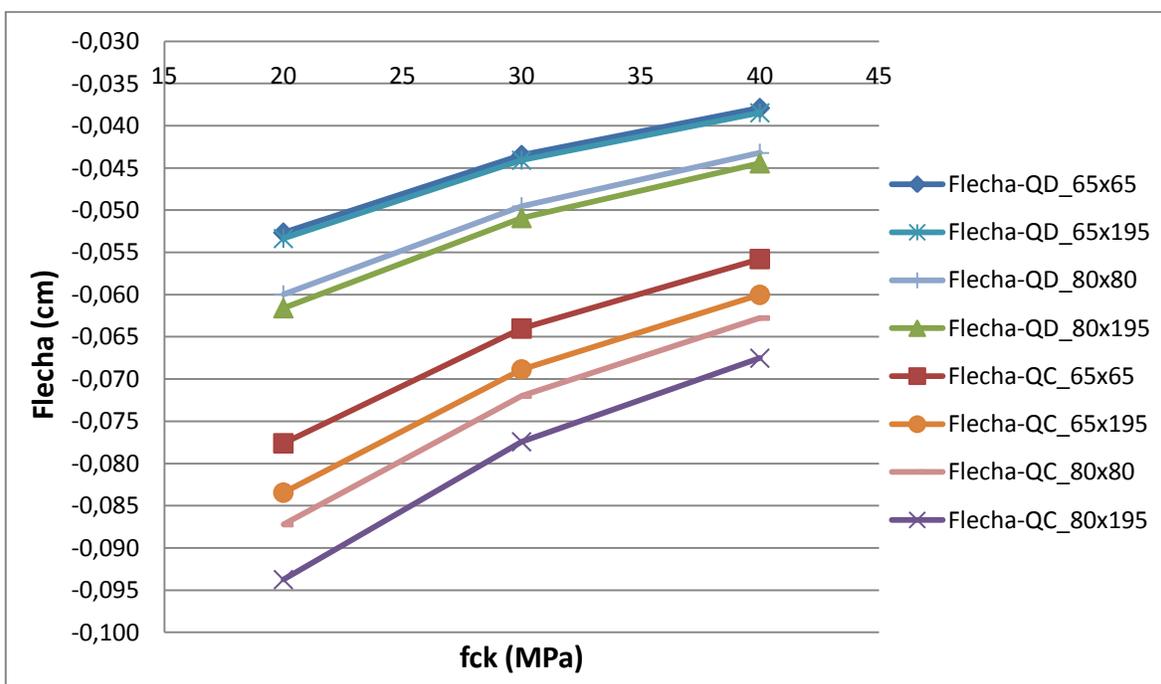
#### c.2 - Variação do $f_{ck}$ :

Outro ponto analisado foi o comportamento das flechas, dos momentos na mesa e suas respectivas áreas de aço, quando se varia o  $f_{ck}$ . Para tal, foram analisados alguns

modelos tendo o DNP de 65 cm e 80 cm. Os exemplos foram: 65x65, 65x195, 80x80 e 80x195, cada um deles analisado com os seguintes valores de fck: 20 MPa, 30 MPa e 40 MPa.

Na Figura 22, encontram-se os valores das flechas para os quatro modelos. Sobre a legenda, o trecho inicial, que vai até o traço underline (  ), representa a que tipo de carga a flecha está associada (mesmo critério usado na Tabela 13), e o trecho posterior ao underline representa a que modelo essa flecha está associada. Essa definição também é aplicada nas legendas das figuras que mostram os momentos e as áreas de aço. Nesta figura percebe-se um comportamento igual para todos os modelos, os quais apresentam flechas menores para o maior valor de fck e flechas maiores para o menor valor de fck, fato que já era esperado, pois, quanto maior o fck, maior a rigidez da laje e menores serão as flechas.

Figura 22 - Determinação das flechas para fck igual a: 20 MPa, 30 MPa, 40 MPa.



Fonte: (AUTOR, 2011).

Na Tabela 14, encontra-se a razão entre a flecha gerada pela carga concentrada e a flecha gerada a partir da carga distribuída. O intuito da análise das flechas é para corrigir a carga distribuída, para que a mesma gere flechas idênticas às fornecidas pelas cargas concentradas, portanto a razão entre as flechas é um indicador para essa análise.

Percebe-se que a razão das flechas não varia com o fck, portanto apenas um valor de fck (30 MPa) nos exemplos será suficiente para a análise das flechas. Como se trata de

análises elásticas lineares, esse é o comportamento esperado, pois, na matriz de rigidez, o valor do módulo de elasticidade (calculado por intermédio do fck) é uma constante multiplicativa da mesma.

Tabela 14 - Razão das flechas dos modelos 65x65, 65x195, 80x80 e 80x195 para diferentes valores de fck.

DNPxDNS	65x65	65x195	80x80	80x195
Flecha-QC(fck 20 MPa)/ Flecha-QD (fck 20 MPa)	1,47388	1,56401	1,45391	1,52175
Flecha-QC(fck 30 MPa)/ Flecha-QD (fck 30 MPa)	1,47285	1,56158	1,45308	1,52042
Flecha-QC(fck 40 MPa)/ Flecha-QD (fck 40 MPa)	1,47177	1,56018	1,45234	1,51935

Fonte: (AUTOR, 2011).

A Tabela 15 e a Tabela 16 apresentam os valores das divisões entre as áreas de aço proporcionadas pelas cargas concentradas e as áreas de aço provenientes das cargas distribuídas. Na Tabela 15, têm-se as divisões entre os valores das áreas de aço para os modelos com fck de 20 MPa e os de 30 MPa, e na Tabela 16 as divisões entre os modelos com fck de 40 MPa e os de 30 MPa.

Fica evidente a pouca variabilidade das razões entre os três valores de fck. Portanto, assim como na análise das flechas, será adotado um único valor de fck (30 MPa) para a análise das áreas de aço nas mesas, ou seja, as áreas de aço para as mesas praticamente não sofrem influência do valor do fck.

Tabela 15 - Razão das áreas de aço dos modelos 65x65, 65x195, 80x80 e 80x195 para diferentes valores de fck.

DNPxDNS	65x65	65x195	80x80	80x195
A1-QC (fck 20 MPa)/ A1-QC (fck 30 MPa)	1,046	1,062	1,030	1,034
A2-QC (fck 20 MPa)/ A2-QC (fck 30 MPa)	1,048	1,051	1,031	1,030
A1-QD (fck 20 Mpa)/ A1-QD (fck 30 Mpa)/	0,993	0,998	0,993	0,995
A2-QD (fck 20 Mpa)/ A2-QD (fck 30 Mpa)/	0,992	0,991	0,992	0,989

Fonte: (AUTOR, 2011).

Tabela 16 - Razão das áreas de aço dos modelos 65x65, 65x195, 80x80 e 80x195 para diferentes valores de  $f_{ck}$ .

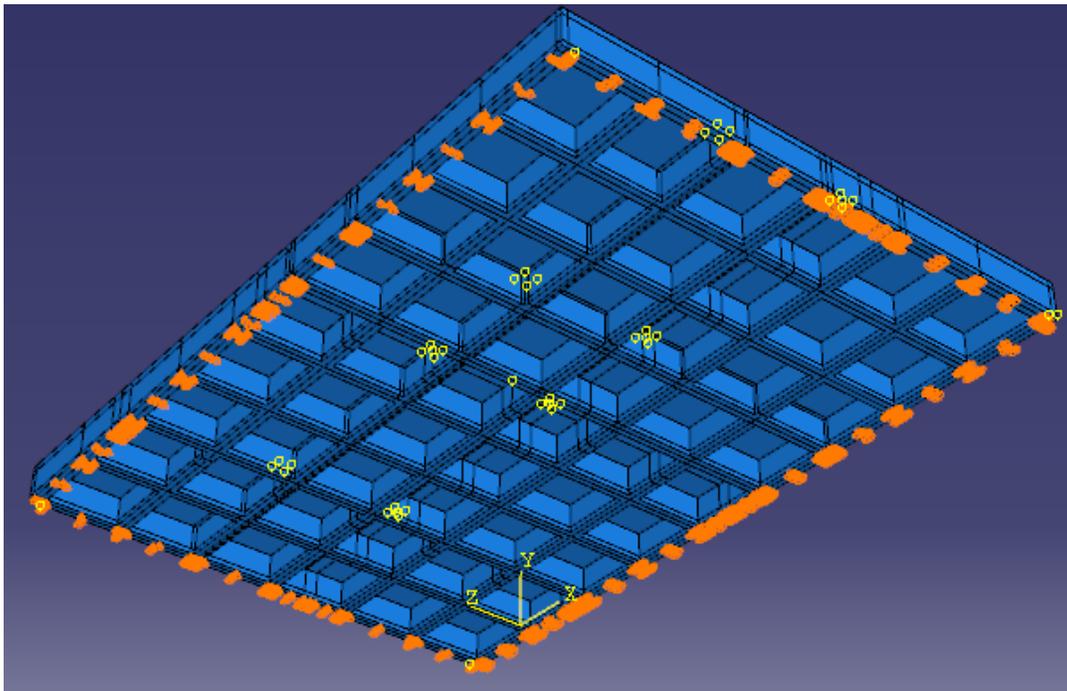
DNPxDNS	65x65	65x195	80x80	80x195
A1-QC ( $f_{ck}$ 40 MPa)/ A1-QC ( $f_{ck}$ 30 MPa)	0,980	0,974	0,986	0,985
A2-QC ( $f_{ck}$ 40 MPa)/ A2-QC ( $f_{ck}$ 30 MPa)	0,979	0,978	0,986	0,987
A1-QD ( $f_{ck}$ 40 Mpa)/ A1-QD ( $f_{ck}$ 30 Mpa)/	1,004	1,004	1,005	1,002
A2-QD ( $f_{ck}$ 40 Mpa)/ A2-QD ( $f_{ck}$ 30 Mpa)/	1,006	1,006	1,007	1,006

Fonte: (AUTOR, 2011).

### c.3 Condições de contorno:

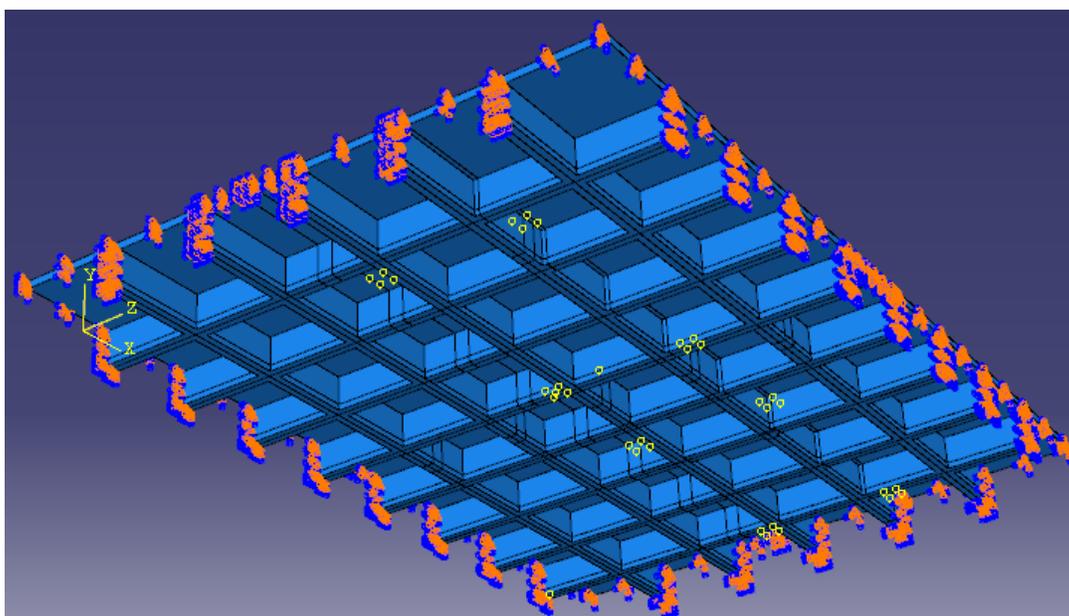
Também foi analisado o comportamento dos resultados para duas condições de contorno: apoiado e engastado, tendo sido feitos para cada uma das condições de contorno dois modelos, um com nervura de borda (Figura 23) e o outro sem a nervura de borda (Figura 24).

Figura 23 - Modelo 65x65 com nervura de borda.



Fonte: (AUTOR, 2011).

Figura 24 - Modelo 65x65 sem nervura de borda.



Fonte: (AUTOR, 2011).

Na Tabela 17 e na Tabela 18, apresentam-se os valores das flechas para os modelos apoiados e engastados respectivamente. Nessas tabelas também se apresentam as razões entre as flechas geradas pelas cargas concentradas e as flechas originadas pela carga distribuída. Percebe-se pouca diferença entre as razões das flechas, entre os modelos com nervuras de borda em relação aos modelos sem as nervuras de borda.

Ficou evidente que as maiores razões ocorreram nos modelos com nervura de borda, indicando que, na correção das cargas distribuídas, para se igualar a flecha gerada pela carga distribuída com a flecha gerada pela carga concentrada, os valores serão maiores para os modelos com nervura de borda, motivo pelo qual o modelo com a nervura de borda simplesmente apoiada foi adotada para análise das flechas dos exemplos.

Tabela 17 - Flechas para os modelos simplesmente apoiados.

Modelo	Sem nervura de borda	Com nervura de borda
Flecha-QC	-0,06314	-0,06401
Flecha-QD	-0,0453	-0,04347
Flecha-QC/Flecha-QD	1,39	1,47

Fonte: (AUTOR, 2011).

Tabela 18 - Flechas para os modelos engastados.

Modelo	Sem nervura de borda	Com nervura de borda
Flecha-QC	-0,06314	-0,06401
Flecha-QD	-0,0453	-0,04347
Flecha-QC/Flecha-QD	1,39	1,47

Fonte: (AUTOR, 2011).

Na Tabela 19, apresentam-se os momentos nas mesas gerados pela carga distribuída, pela carga concentrada e o M-min, que é o momento que gera uma área de aço igual à armadura mínima para a mesa. Percebe-se que os momentos relacionados à carga concentrada praticamente não variaram, tanto a depender do tipo de apoio bem como da existência ou não da nervura de borda.

Os momentos gerados pela carga distribuída (Tabela 19) apresentam certa oscilação, a depender do tipo de apoio e se o modelo apresenta ou não a nervura de borda. Mas esses momentos apresentam magnitude inferior ao M-min, portanto os mesmos serão desconsiderados, pois as áreas de aço geradas por esses momentos serão inferiores às da armadura mínima recomendada pela NBR 6118:2003.

Tabela 19 - Momentos máximos das mesas para os apoios do tipo engaste e simplesmente apoiado, com e sem nervura de borda.

Modelo	Sem nervura – Apoio simples	Com nervura – Apoio simples	Sem nervura – Engastado	Com nervura – Engastado
M1-QC (KN*m/m)	-1,8566	-1,8612	-1,8364	-1,8408
M2-QC (KN*m/m)	-1,9110	-1,9264	-1,8822	-1,8927
M1-QD (KN*m/m)	-0,0895	-0,0917	-0,0717	-0,0759
M2-QD (KN*m/m)	-0,1334	-0,1430	-0,1078	-0,1161
M-min (KN*m/m)	-1,0100	-1,0100	-1,0100	-1,0100

Fonte: (AUTOR, 2011).

Pelo que foi supracitado sobre os momentos apresentados na Tabela 19, e como quaisquer dos modelos analisados serviriam para a análise dos momentos nas mesas, adotou-se o para os exemplos o mesmo modelo usado para análise das flechas, para otimizar a quantidade de modelos a serem usados nas análises.

A indagação “d” que teve como objetivo descobrir se existe alguma relação linear entre os dados analisados para os modelos com as cargas concentradas. Pois, se existir, será possível reduzir a quantidade de simulações, bastando, apenas, simular para um dos três valores da carga veicular, tendo em vista que os outros dois serão obtidos pela multiplicação de uma constante.

Essa indagação foi respondida com a simulação de oito modelos, quatro modelos com a DNP igual a 65 cm, e quatro com a DNP igual a 90 cm. Os modelos foram: 65x65, 65x97, 65x130, 65x195, 90x90, 90x97, 90x130 e 90x195.

As análises dos modelos foram feitas para três valores dos QC: 850 kgf, 650 kgf e 450 kgf, conforme já exposto no subcapítulo 3.1. A verificação da linearidade, se deu pela razão dos dados para cada modelo: flecha, momento máximo na mesa e área de aço (calculado para o momento máximo na mesa). A razão dos dados foi feita tomando cada valor gerado pela carga de 850 kgf e o dividindo pelo valor gerado pela de 650 kgf e pela de 450 kgf.

Na Tabela 20, encontram-se as razões entre as flechas, momentos e áreas de aço, respectivamente. Para todos os casos, fica evidente a pouca variabilidade entre as razões, o que demonstra uma relação linear entre os mesmos. Essa relação linear é na verdade uma constante que independe do modelo adotado.

Por isso, nas análises foi utilizado apenas um valor do QC, que foi o de 850 kgf, por ser esse o maior entre os três, portanto a situação mais desfavorável para as lajes.

Tabela 20 - Razão das flechas, momentos e áreas de aço geradas pelos QC de 850 kgf, pela de 450 kgf e pela de 650 kgf.

DNPxDNS	65x65	65x97	65x130	65x195	90x90	90x97	90x130	90x195
Flecha-850/flecha-450	1,367	1,395	1,388	1,417	1,382	1,385	1,380	1,404
Flecha-850/flecha-650	1,155	1,166	1,163	1,173	1,161	1,162	1,160	1,168
M1-850/M1-450	1,846	1,846	1,842	1,846	1,816	1,814	1,810	1,806
M1-850/M1-650	1,297	1,297	1,296	1,297	1,290	1,289	1,288	1,287
M2-850/M2-450	1,822	1,825	1,822	1,831	1,785	1,785	1,783	1,786
M2-850/M2-650	1,291	1,292	1,291	1,293	1,282	1,282	1,281	1,282
A1_850/A1_450	1,904	1,911	1,911	1,918	1,866	1,865	1,865	1,853
A1_850/A1_650	1,318	1,320	1,321	1,323	1,308	1,308	1,308	1,304
A2_850/A2_450	1,882	1,883	1,880	1,893	1,836	1,836	1,834	1,834
A2_850/A2_650	1,313	1,313	1,312	1,316	1,300	1,300	1,300	1,300

Fonte: (AUTOR, 2011).

- A1-850, A1-650, A1-450, A2-850, A2-650 e A2-450 são as áreas de aço referentes aos momentos: M1-850, M1-650, M1-450, M2-850, M2-650 e M2-450, respectivamente.

Essas relações lineares entre os dados são coerentes, pois trata-se de modelos idênticos com variações apenas na intensidade das cargas concentradas, além de se tratar de análises lineares físicas e geométricas.

As constantes multiplicativas para os dados foram extraídas da Tabela 20. As razões dos dados expostas nessa tabela representam o inverso da constante multiplicativa para cada dado específico: flecha, momento e área de aço.

Para adotar um único valor como constante multiplicativa, fez-se uso da menor razão dentre todos os modelos para o mesmo dado analisado e o inverteu, obtendo-se, dessa forma, a maior constante multiplicativa possível para o dado analisado em questão.

Tabela 21 - Constantes multiplicativas para as flechas referentes às cargas veiculares.

Constante	K-flecha-650	K-flecha-450
Valor da constante	0,865	0,731

Fonte: (AUTOR, 2011).

A flecha gerada pelo QC de 650 kgf (flecha-650) será obtida multiplicando a flecha proveniente do QC de 850 kgf (flecha-850), pela constante K-flecha-650, aplicando-se o mesmo para a flecha gerada pelo QC de 450 kgf (flecha-450), bastando para isso multiplicar pela constante K-flecha-450.

Tabela 22 - Constantes multiplicativas para os momentos nas mesas referentes às cargas veiculares.

Constante	K-M1-650	K-M1-450	K-M2-650	K-M2-450
Valor da constante	0,777	0,553	0,78	0,56

Fonte: (AUTOR, 2011).

Os momentos M1-650 e M1-450 serão obtidos multiplicando o valor do momento M1-850 por: K-M1-650 e por K-M1-450, respectivamente. Para os momentos M2-650 e M2-450, as constantes multiplicativas são K-M2-650 e K-M2-450, respectivamente.

Tabela 23 - Constantes multiplicativas para as áreas de aço das mesas referentes às cargas veiculares.

Constante	K-A1-650	K-A1-450	K-A2-650	K-A2-450
Valor da constante	0,766	0,539	0,769	0,545

Fonte: (AUTOR, 2011).

As áreas de aço A1-650 e A1-450 serão obtidas multiplicando o valor de A1-850 por K-A1-650 e por K-A1-450, respectivamente. Para as áreas de aço A2-650 e A2-450, as constantes multiplicativas são K-A2-650 e K-A2-450, respectivamente.

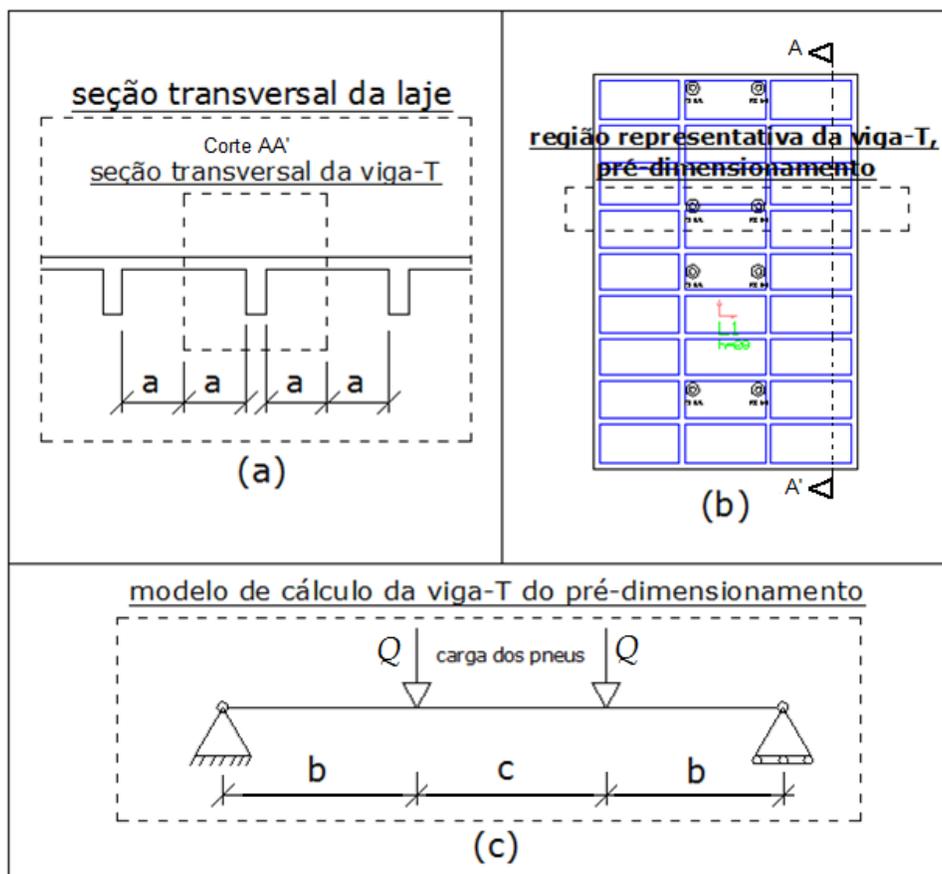
Sobre as três primeiras indagações respondidas nesse subcapítulo, elas definiram o seguinte para os exemplos: O elemento finito que apresenta melhores resultados é o tridimensional com as arestas tendo comprimento igual a dez por cento da DNP. Para a geometria das lajes foi definido o comprimento do maior vão igual a seis metros, e o contorno da laje contendo nervuras simplesmente apoiada. Sobre o  $f_{ck}$  foi definido 30 MPa.

### **3.3 Pré-dimensionamento**

O cálculo do pré-dimensionamento está baseado na determinação da altura de uma viga-T, onde essa altura é utilizada como a altura das lajes dos exemplos, LNU e LNB. O modelo de cálculo usado no pré-dimensionamento é uma porção da laje a ser modelada como LNU (uma viga-T), Figura 25 (b), e a seção transversal (Figura 25 (a)) como um trecho da seção transversal da laje LNU a ser modelada, portanto o modelo de cálculo é como o mostrado na Figura 25 (c).

Cada pré-dimensionamento aplica-se a uma gama de exemplos que apresentam a mesma DNP, portanto as quantidades de pré-dimensionamentos realizados foram de sete, um para cada DNP. Ao término do pré-dimensionamento, além da altura da laje, é encontrada uma armadura de aço para combater a flexão positiva das nervuras principais que também é usada na modelagem dos exemplos. O aço utilizado nas nervuras secundárias dos exemplos é a armadura mínima, conforme critérios expostos na NBR 6118:2003.

Figura 25 - Estrutura geométrica e modelo de cálculo da viga-T, usados no pré-dimensionamento.



Fonte: (AUTOR, 2011).

O pré-dimensionamento é definido por um algoritmo que tem três passos básicos: parâmetros de entrada, processamento e resposta (altura da laje). Como parâmetros de entrada, fornecem-se todas as informações geométricas e físicas da laje: cobrimento, altura da mesa, DNP (que é usado como a largura da mesa colaborante da viga-T), espessura das nervuras, peso específico do concreto,  $f_{ck}$ , módulo de elasticidade, resistência característica do aço ( $f_{yk}$ ), a carga distribuída por metro quadrado devido ao revestimento aplicado na laje, e a carga concentrada (foi utilizado o valor de 850 kgf). Todas essas informações físicas e geométricas seguem as recomendações da NBR 6118:2003, exceto a carga concentrada.

Como incógnita do algoritmo, fica a altura da laje, que é a resposta encontrada através de uma equação de restrição (equação de rigidez equivalente fornecida pela NBR 6118:2003) associada à equação da flecha da viga-T. A rigidez equivalente é usada na equação da flecha associada ao modelo de cálculo, sendo o valor numérico da flecha igual

ao valor máximo permitido pela NBR 6118:2003, Tabela 13.2 da mesma, relacionado à aceitabilidade sensorial, considerando deformações de longa duração, sendo o valor da flecha igual ao comprimento do menor vão dividido por duzentos e cinquenta.

O processo de cálculo segue a seguinte sequência:

1. Encontra-se o momento fletor positivo máximo. O momento encontrado consta de duas partes, uma devido à carga permanente (peso próprio mais o revestimento) e outra devido à carga acidental (carga concentrada), quando se faz a combinação de serviço para os momentos, como definido na NBR 6118:2003, encontrando um valor final para o momento fletor positivo máximo, sendo o mesmo em função da altura útil da laje ( $d$ ).

Cálculo da área da seção transversal:

$$Ast(d) = (d + c)bw + (bf - bw)ec \quad (3.1)$$

Sendo:

$d$  a altura útil da laje;

$c$  a diferença da altura pela altura útil da laje;

$bf$  a largura da mesa colaborante da seção-T;

$bw$  a largura da nervura;

$ec$  a espessura da capa (mesa).

Cálculo da carga distribuída (peso próprio e revestimento):

$$q(d) = Ast(d) \cdot \rho_c + bf \cdot rf \cdot \rho_r \quad (3.2)$$

Sendo:

$\rho_c$  o peso específico do concreto (25 KN/m<sup>3</sup>);

$\rho_r$  o peso específico do revestimento (21 KN/m<sup>3</sup>);

$rf$  a altura do revestimento (4 cm).

Cálculo do momento máximo positivo referente ao carregamento distribuído:

$$M_{mxq}(d) = \frac{q(d) \cdot L^2}{8} \quad (3.3)$$

Sendo:

$L$  o comprimento da viga, que é igual ao comprimento do menor lado da laje.

Cálculo do momento máximo positivo referente ao carregamento concentrado:

$$M_{mxQ} = b \cdot Q \quad (3.4)$$

Sendo:

$b$  conforme o exposto na Figura 3.10 (c);

$Q$  o valor da carga veicular em cada pneu, tendo sido adotado o maior dos três valores (850 kgf).

2. Posteriormente dimensiona-se a viga-T, encontrando a área de aço em função da altura útil, para resistir à tração provocada pelo momento positivo encontrado. Esse dimensionamento é determinado para a linha neutra no estágio I de deformação:

Linha neutra para seção retangular no estágio I (linha neutra na mesa):

$$X_{Ir}(d) = 1,25d \left( 1 - \left( 1 - \frac{1,4(M_{mxq}(d) + M_{mxQ})}{0,425 \cdot b_f \cdot d^2 \cdot f_{cd}} \right)^{0,5} \right) \quad (3.5)$$

Sendo:

$M_{mxq}(d)$  o momento máximo devido ao carregamento distribuído;

$M_{mxQ}$  o momento máximo devido às cargas concentradas;

$f_{cd}$  a resistência de projeto do concreto, ou seja, o  $f_{ck}$  dividido por 1,4.

Linha neutra para a seção T no estágio I (linha neutra na alma):

$$X_{It}(d) = \left( 1 - \left( 1 - \frac{4}{6,25d^2} \left( \frac{1,4(M_{mxq}(d) + M_{mxQ})}{0,272 \cdot b_w \cdot f_{cd}} - \frac{h_f}{0,64b_w} (b_f - b_w)(2d - e_c) \right) \right)^{0,5} \right) \cdot 1,25d \quad (3.6)$$

Área de aço para linha neutra na mesa (seção retangular no estágio I):

$$A_{Isr}(d) = \frac{1,4(M_{mxq}(d) + M_{mxQ})}{f_s(d - 0,4X_{Ir}(d))} \quad (3.7)$$

Sendo:

$f_s$  a tensão de escoamento do aço, que é igual à tensão característica do aço ( $f_{yk}$ ) dividida por 1,15.

Área de aço para linha neutra na alma (seção-T no estágio I):

$$AIst(d) = \frac{fcd}{fs} (0,85(bf - bw)ec + 0,68 \cdot bw \cdot XIIt(d)) \quad (3.8)$$

3. Por conseguinte, encontra-se a linha neutra para o estágio II (em função da  $d$ ), e a utiliza para encontrar o momento de inércia no estágio II:

Cálculo da linha neutra para o estágio II com seção retangular, considerando-se a área de aço calculada com a linha neutra na mesa para o estágio I:

$$XIIIrr(d) = \frac{\alpha \cdot AIsr(d)}{bf} \left( -1 + \left( 1 + \frac{bf \cdot d}{\theta \cdot AIsr(d)} \right)^{0,5} \right) \quad (3.9)$$

Sendo:

$\theta$  a razão entre o módulo de elasticidade do aço ( $Es$ ) e o módulo de elasticidade secante do concreto ( $Ecs$ ).

Cálculo da linha neutra para o estágio II com seção retangular, considerando-se a área de aço calculada com a linha neutra na alma para o estágio I:

$$XIIIrt(d) = \frac{\alpha \cdot AIst(d)}{bf} \left( -1 + \left( 1 + \frac{bf \cdot d}{\theta \cdot AIst(d)} \right)^{0,5} \right) \quad (3.10)$$

Cálculo da linha neutra para o estágio II com seção-T, considerando-se a área de aço calculada com a linha neutra na alma para o estágio I:

$$XIIIIt(d) = \frac{1}{bw} \cdot ((bf - bw)ec + \theta \cdot AIst(d)) \cdot \left( -1 + \left( 1 + \frac{bw((bf - bw)ec^2 + 2 \cdot \theta \cdot AIst(d) \cdot d)}{((bf - bw)ec + \theta \cdot AIst(d))^2} \right)^{0,5} \right) \quad (3.11)$$

Cálculo do momento de inércia para o estágio II, considerando-se a linha neutra para o estágio II na mesa e a área de aço calculada para o estágio I com a linha neutra na mesa:

$$I_{2rr}(d) = \frac{bf \cdot XIIrr(d)^2}{3} + \theta \cdot AIsr(d) \cdot (d - XIIrr(d))^2 \quad (3.12)$$

Cálculo do momento de inércia para o estádio II, considerando-se a linha neutra para o estádio II na mesa e a área de aço calculada para o estádio I com a linha neutra na alma:

$$I_{2rt}(d) = \frac{bf \cdot XIIrt(d)^2}{3} + \theta \cdot AIst(d) \cdot (d - XIIrt(d))^2 \quad (3.13)$$

Cálculo do momento de inércia para o estádio II, considerando-se a linha neutra para o estádio II na alma e a área de aço calculada para o estádio I com a linha neutra na alma:

$$I_{2tt}(d) = \frac{(bf - bw)ec^3}{12} + (bf - bw) \cdot ec \cdot \left( XIItt(d) - \frac{ec}{2} \right)^2 + \frac{bw \cdot XIItt(d)^3}{3} + \theta \cdot AIst(d) \cdot (d - XIItt(d))^2 \quad (3.14)$$

4. O passo seguinte consiste em encontrar o momento de inércia no estádio I e usá-lo para encontrar o momento de fissuração como definido pela NBR 6118:2003:

Centro de gravidade em relação à fibra mais comprimida:

$$Y_{cg}(d) = \frac{(bf - bw) \frac{ec^2}{2} + bw \frac{(d+c)^2}{2}}{Ast(d)} \quad (3.15)$$

Centro de gravidade em relação a fibra mais tracionada:

$$Y_t(d) = d + c - Y_{cg}(d) \quad (3.16)$$

Momento de inércia a flexão para o estádio I:

$$I_c(d) = \frac{(bf - bw)ec^3}{12} + \frac{bw(d+c)^3}{12} + (bf - bw) \cdot ec \cdot \left( Y_{cg}(d) - \frac{ec}{2} \right)^2 + bw \cdot (d+c) \cdot \left( Y_{cg}(d) - \frac{(d+c)}{2} \right)^2 \quad (3.17)$$

Momento de fissuração conforme a NBR 6118:2003

$$Mr(d) = \frac{\alpha \cdot fctm \cdot Ic(d)}{Yt(d)} \quad (3.18)$$

Sendo:

$\alpha$  uma constante que vale 1,2 para seção-T e 1,5 para seção retangular, portanto, o valor usado foi 1,2;  $fctm$  a resistência média a tração do concreto conforme a NBR 6118:2003.

5. Por fim, encontra-se a rigidez equivalente, utilizando-se o momento de fissuração e os momentos de inércia nos estádios I e II, e aplicando-se a rigidez equivalente na equação da flecha, encontra-se a altura útil, à qual se somada a metade da bitola do aço e o cobrimento, para se obter a altura da viga-T, que é a altura a ser usada para a modelagem dos EMLNUB que apresentam o mesmo DNP:

Cálculo da rigidez equivalente no estádio II conforme equação da NBR 6118:2003, considerando-se o momento de inércia para o estádio II, a linha neutra para o estádio II na mesa, e a área de aço calculada para o estádio I com a linha neutra na mesa:

$$E_{Ieqrr}(d) = Ecs \left( \left( \frac{Mr(d)}{Mmxq(d) + 0,6MmxQ} \right)^3 Ic(d) + \left( 1 - \left( \frac{Mr(d)}{Mmxq(d) + 0,6MmxQ} \right)^3 \right) I2rr(d) \right) \quad (3.19)$$

Cálculo da rigidez equivalente no estádio II conforme equação da NBR 6118:2003, considerando-se o momento de inércia para o estádio II, a linha neutra para o estádio II na mesa, e a área de aço calculada para o estádio I com a linha neutra na alma:

$$E_{Ieqrt}(d) = Ecs \left( \left( \frac{Mr(d)}{Mmxq(d) + 0,6MmxQ} \right)^3 Ic(d) + \left( 1 - \left( \frac{Mr(d)}{Mmxq(d) + 0,6MmxQ} \right)^3 \right) I2rt(d) \right) \quad (3.20)$$

Cálculo da rigidez equivalente no estádio II conforme equação da NBR 6118:2003, considerando-se o momento de inércia para o estádio II, a linha neutra para o estádio II na alma, e a área de aço calculada para o estádio I com a linha neutra na alma:

$$E_{Ieqtt}(d) = Ecs \left( \left( \frac{Mr(d)}{Mmxq(d) + 0,6MmxQ} \right)^3 Ic(d) + \left( 1 - \left( \frac{Mr(d)}{Mmxq(d) + 0,6MmxQ} \right)^3 \right) I2tt(d) \right) \quad (3.21)$$

Cálculo do coeficiente para considerar a flecha diferida para a viga, conforme item 17.3.2.1.2 da NBR 6118:2003:

$$\alpha_f(t_0) = 3 - 0,68(0,996)^{t_0} t_0^{0,32} \quad (3.22)$$

Sendo:

$t_0$  o tempo em meses relacionado à atuação das cargas na viga, ou seja, retirada das escoras. Foi adotado para  $t_0$  o valor de 1, portanto o valor de  $\alpha_f$  utilizado para todos os pré-dimensionamentos foi de 2,32.

Cálculo da flecha diferida, considerando-se a rigidez equivalente  $EI_{eqrr}(d)$ :

$$U_{mxrr}(d) = \alpha_f(1) \left( \frac{1}{EI_{eqrr}(d)} \left( \frac{5 \cdot q(d) \cdot L^4}{384} + \frac{2(0,6Q)L^3}{96} \right) \right) \quad (3.23)$$

Cálculo da flecha diferida, considerando-se a rigidez equivalente  $EI_{eqtr}(d)$ :

$$U_{mxrt}(d) = \alpha_f(1) \left( \frac{1}{EI_{eqtr}(d)} \left( \frac{5 \cdot q(d) \cdot L^4}{384} + \frac{2(0,6Q)L^3}{96} \right) \right) \quad (3.24)$$

Cálculo da flecha diferida, considerando-se a rigidez equivalente  $EI_{eqtt}(d)$ :

$$U_{mxtt}(d) = \alpha_f(1) \left( \frac{1}{EI_{eqtt}(d)} \left( \frac{5 \cdot q(d) \cdot L^4}{384} + \frac{2(0,6Q)L^3}{96} \right) \right) \quad (3.25)$$

Por fim, iguala-se a equação da flecha com o valor máximo permitido pela NBR 6118:2003, conforme sua Tabela 13.2 para flecha diferida, considerando-se como tipo de efeito a aceitabilidade sensorial para a razão da limitação como sendo visual, sendo o valor da flecha igual ao comprimento do menor vão dividido por duzentos e cinquenta. Para finalizar, aplica-se um método numérico de zero de função, para obter a altura útil da laje. Definida a altura da laje dos exemplos (EMLNUB) e com a armadura positiva das nervuras principais, procede-se a modelagem do exemplo.

### 3.4 Validação do Pré-dimensionamento

A equação da rigidez equivalente utilizada no pré-dimensionamento foi desenvolvida por Branson (1966 apud Oliveira, 2007), que teve como base para esse trabalho uma bateria de ensaios experimentais de vigas, com diferentes condições de contorno e carregamentos distribuídos. Como os carregamentos usados no pré-dimensionamento deste trabalho foram de carga distribuída (peso próprio e revestimento) e concentrada (carga veicular, QC), procurou-se validar a formulação de Branson para aplicação do mesmo com carga concentrada. A formulação de Branson (equação (3.26)) pode ser escrita tomando como base a NBR 6118:2003.

$$(EI)_{eq} = Ecs \left\{ \left( \frac{Mr}{Ma} \right)^3 I_c + \left[ 1 - \left( \frac{Mr}{Ma} \right)^3 \right] I_{II} \right\} \leq Ecs \cdot I_c \quad (3.26)$$

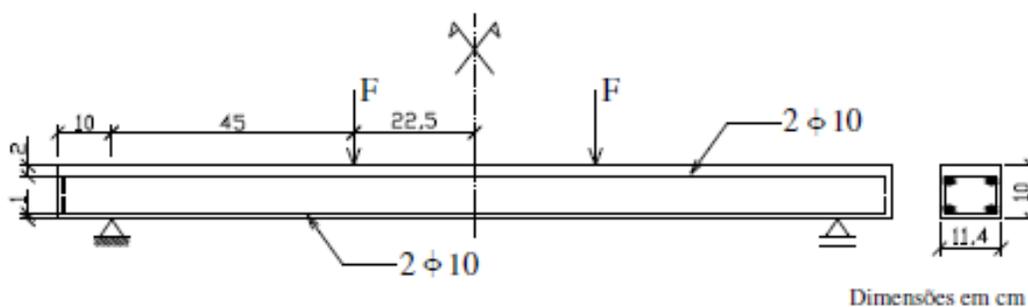
Sendo:

$I_{II}$  o momento de inércia da seção fissurada de concreto no estágio II;

$Ma$  o momento fletor na seção crítica do vão considerado, momento máximo no vão para vigas biapoiadas ou contínuas e momento no apoio para balanços, para a combinação de ações considerada.

Para a validação da formulação de Branson para o pré-dimensionamento, foram comparadas as flechas de um modelo experimental que apresentasse distribuição geométrica das cargas concentradas similares às do pré-dimensionamento (duas cargas concentradas apresentando certa distância entre si e locadas simetricamente na viga), com as flechas calculadas analiticamente para esse modelo experimental, usando a formulação de Branson. O modelo analisado experimentalmente foi feito por Martinelli e Takeya apud Oliveira (2007), Figura 26.

Figura 26 - Estrutura do modelo da viga.



Fonte: (OLIVEIRA, 2007).

Na Tabela 24, encontram-se os valores das flechas experimentais ( $F_{Exp}$ ) e as flechas, calculadas usando a formulação de Branson ( $F_{Bran}$ ), para  $F$  (carga concentrada como exposto na Figura 26), variando de 4 kN a 12 kN, de 2 kN em 2 kN. A formulação de Branson apresentou para todos os valores de  $F$ , flechas superiores (20% em média) as experimentais, mostrando a validade da formulação para esse tipo de distribuição geométrica das cargas concentradas, pois a  $F_{Bran}$  apresentou valores próximos e superiores às  $F_{Exp}$ , o que indica que o pré-dimensionamento tenderá a fornecer alturas um pouco maiores do que o valor exato necessário, oportunizando maior segurança.

Tabela 24 – Valores das flechas para a viga.

F (kN)	$F_{Bran}$ (cm)	$F_{Exp}$ (cm)
4	0,267	0,218
6	0,464	0,363
8	0,641	0,501
10	0,810	0,661
12	0,975	0,807

Fonte: (AUTOR, 2011).

#### 4 APLICAÇÕES E ANÁLISE DOS RESULTADOS

No capítulo anterior foram definidas e validadas as estruturas dos modelos, neste capítulo mostram-se as aplicações e análises dos resultados desses modelos.

As análises desenvolvidas nesse trabalho visam tanto o comportamento geral da laje nervurada através da análise das flechas quanto o comportamento localizado, mediante a análise do momento máximo positivo nas mesas e a determinação das respectivas áreas de aço necessárias para combater esses momentos. Sendo atrelado a essas duas análises um processo comparativo dos resultados obtidos pelas recomendações das normas brasileiras com as recomendações das normas internacionais.

As análises e comparações das flechas, foram feitas através dos modelos com o QD de  $0,3 \text{ tf/m}^2$  (valor definido pela NBR 6120:1980) e com o QC (valores obtidos pelas especificações dos veículos usuais no mercado brasileiro). A partir dessas análises foram definidos valores corrigidos do QD que gerassem flechas iguais aos proporcionados pelos QC. Os QC não são recomendados pelas normas brasileiras, mas são recomendados por normas internacionais.

A respeito das análises das mesas, foram verificadas as áreas de aço necessárias para as mesas devido ao QD de  $0,3 \text{ tf/m}^2$ , e devido aos QC. Sendo esses valores comparados entre si, e também em relação à armadura mínima da norma.

As análises das flechas foram feitas usando dois tipos de elementos: um foi o elemento finito tridimensional (utilizando o programa Abaqus), e o outro o elemento de grelha (usando o programa TQS). As análises feitas com elemento de grelha foram apenas para verificar se com esse elemento os valores corrigidos dos QD apresentariam igualdade com os valores corrigidos dos QD, obtidos pelos modelos com elemento finito tridimensional (EFT). Isso porque, de forma geral, no mercado, os projetistas utilizam elementos de grelha, motivo pelo qual foi preciso verificar se os valores corrigidos dos QD utilizando EFT teriam validade para modelos com elementos de grelha.

As análises dos momentos nas mesas e suas respectivas áreas de aço foram feitas usando apenas EFT, visto que essas análises não são realizadas nos projetos estruturais, pois em sua maioria usam distância entre eixos de nervuras principais inferiores a 65 cm, valor para o qual a NBR 6118:2003 permite desconsiderar a análise e adotar a armadura

mínima, além do que, nas análises por grelha, são modeladas apenas as nervuras, sendo as mesas consideradas pela seção-T associadas às nervuras.

Sobre as legendas apresentadas nas figuras e tabelas deste capítulo, estas apresentam os mesmos significados já expostos no capítulo 3. Tem-se na sequência uma descrição das legendas que ainda não foram mencionadas:

- a. No tocante às legendas referentes às áreas de aço, estas apresentam três legendas com nomenclaturas diferentes das do capítulo 3. São elas: Amin-50-70, Amin-80-90 e Amin-100, representando a área mínima de aço calculada segundo a NBR 6118:2003 para as mesas dos exemplos com a DNP de 50 cm a 70 cm, de 80 cm a 90 cm e 100 cm, respectivamente.
- b. As legendas das figuras apresentam duas partes, que são separadas pelo símbolo do underline; a parte anterior ao underline representa para qual tipo de carga o dado está relacionado (tal como o usado no capítulo 3 no item 3.2 do mesmo), e a parte posterior ao underline refere-se à DNP do modelo do qual o dado foi obtido. Por exemplo: Flecha-QD\_65, a parte anterior ao underline é a sigla QD que indica que o carregamento utilizado foi o 0,3 tf/m<sup>2</sup>, valor recomendado pela NBR 6120:1980, e a parte posterior ao underline refere-se a DNP do modelo, no caso, 65 cm; outro exemplo, Flecha-850\_70, o 850 referisse que o carregamento utilizado foi o QC no valor de 850 kgf, e o 70 diz respeito ao valor em centímetros da DNP do modelo.

Nos subcapítulos seguintes serão apresentados os resultados de flechas, os momentos nas mesas e as respectivas áreas de aço correspondentes a esses momentos.

#### **4.1 Flechas, Elemento Finito Tridimensional**

Neste item serão apresentados os resultados referentes às flechas para os modelos usando os EFT. Como mostrado no capítulo 3, a razão entre as flechas geradas pelos QC em relação às geradas pelo QD sofre variações a depender do  $\lambda$ , por isso foi necessário, para as análises das flechas, ser feita a variação do  $\lambda$ , cujos valores de  $\lambda$  usados foram: 1,0, 1,5 e 2,0.

Para os exemplos com o  $\lambda$  de 1,5 foi feita uma bateria de exemplos completa, ou seja, a DNP variando de 50 cm a 100 cm, e para cada uma dessas DNP foi variada a QNS entre: 1, 2, 3 que são os casos de LNU e também para o caso com DNP igual a DNS, ou seja, LNB. Nos exemplos com  $\lambda$  de 1,0 e 2,0, foi usada apenas uma QNS para

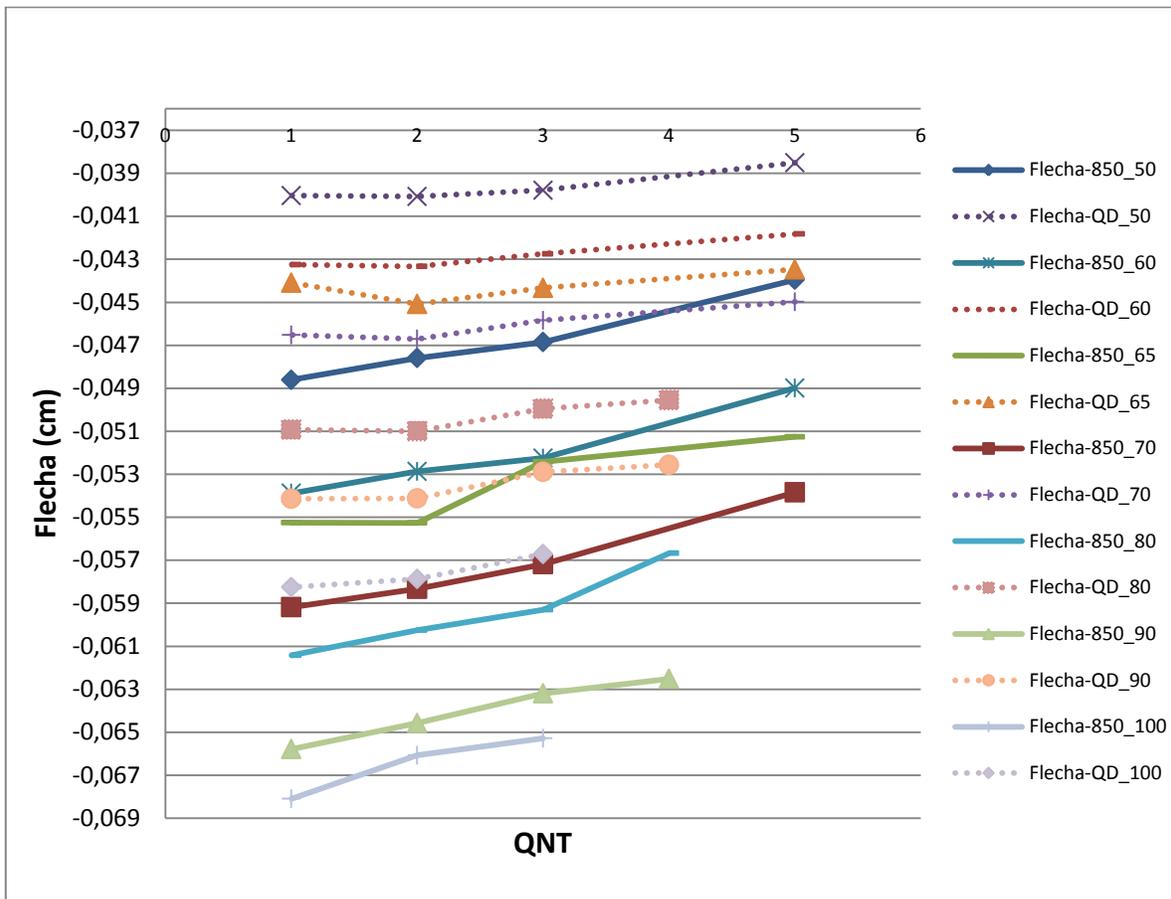
cada DNP, com o objetivo de diminuir a quantidade de exemplos. Essa QNS dos modelos com lambda de 1,0 e 2,0 foi definida analisando-se as flechas dos exemplos com lambda de 1,5, onde foi verificado, para cada DNP, qual a QNS que propiciava a maior razão entre as flechas geradas pelo QC em relação as geradas pelo QD, e essa QNS foi adotada. Para todos os casos, a maior razão aconteceu quando se tinham duas nervuras secundárias, o que motivou a adoção dessa quantidade.

A Figura 4.1 mostra os resultados das flechas para os modelos com o lambda de 1,5, para o QC de 850 kgf e também para o QD. Os valores das flechas apresentam uma mesma tendência para todos os modelos. À medida que são adicionadas nervuras secundárias, a flecha da laje diminui, devido ao ganho de rigidez que proporciona um comportamento bidirecional da laje, ou seja, uma melhor distribuição dos esforços nas duas direções.

Para todos os casos com QD, o comportamento das lajes fica o mesmo tanto para os exemplos com uma como com duas nervuras secundárias, tendo as nervuras secundárias efetividade na diminuição das flechas para três nervuras em diante; para uma e duas nervuras secundárias, as flechas praticamente ficam estabilizadas. Para os casos com QC, à medida que são adicionadas nervuras secundárias, a tendência de diminuição das flechas é praticamente a mesma, ou seja, ao adicionar nervuras secundárias na laje, de imediato diminuem-se as flechas.

Como observação principal da Figura 27, têm-se os modelos com QD apresentando flechas menores que as geradas com QC, como era esperado, pois a carga total sobre a laje devido ao QD é 105% da soma de todas as cargas concentradas do QC (6,8 tf, oito cargas concentradas de 0,85 tf cada), e como a QC foi distribuído procurando a região central da laje, ou seja, a situação mais desfavorável para a estrutura, era esperado que a mesma apresentasse flechas maiores. Essa situação mostra que o carregamento distribuído recomendado pela NBR 6120:1980 não fornece comportamento equivalente à situação em que o carregamento da laje de garagem seja composto apenas por veículos do tipo caminhonete, que é justamente o carregamento de cargas concentradas de 850 kgf, como era esperado, pois a própria NBR 6120:1980 recomenda o QD de 0,3 tf/m<sup>2</sup> para veículos de carga máxima de 2,5 tf, enquanto o QC de 850 kgf está associado a veículos de carga máxima de 3,1 tf.

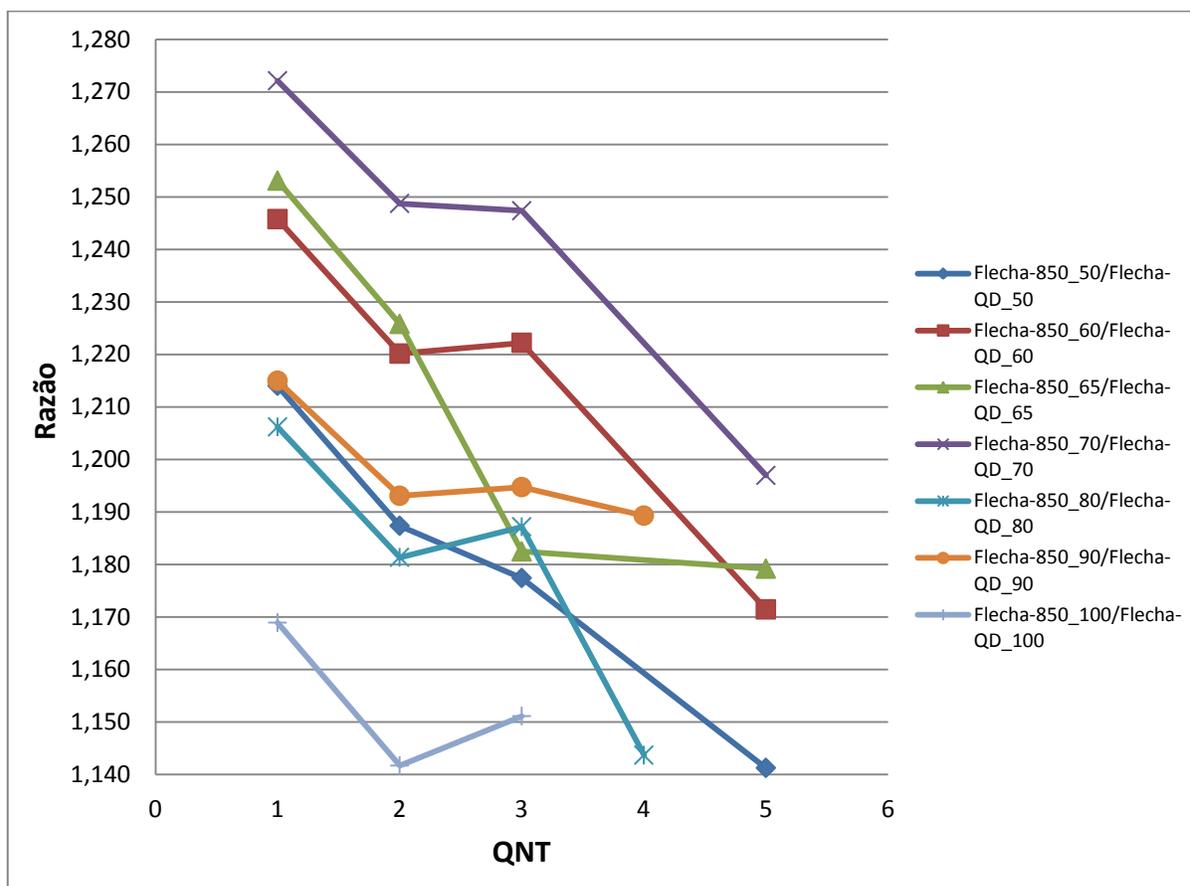
Figura 27 - Flechas para o lambda de 1,5, para o QC de 850 kgf e para o QD.



Fonte: (AUTOR, 2011).

Na Figura 28, apresentam-se as razões entre os valores das flechas para os modelos com o lambda de 1,5. Entre os casos com QC de 850 kgf e os casos com QD, percebe-se praticamente um mesmo comportamento para todas as razões, e uma variação entre 1,14 e 1,28 no tocante aos valores das mesmas, ou seja, os modelos com QC geram flechas maiores que os com QD. Percebe-se, também, que a razão diminui à medida que a QNS é aumentada; isso ocorre pelo motivo de, para o QC, as flechas proporcionalmente diminuirão mais do que para o QD quando a QNS é aumentada.

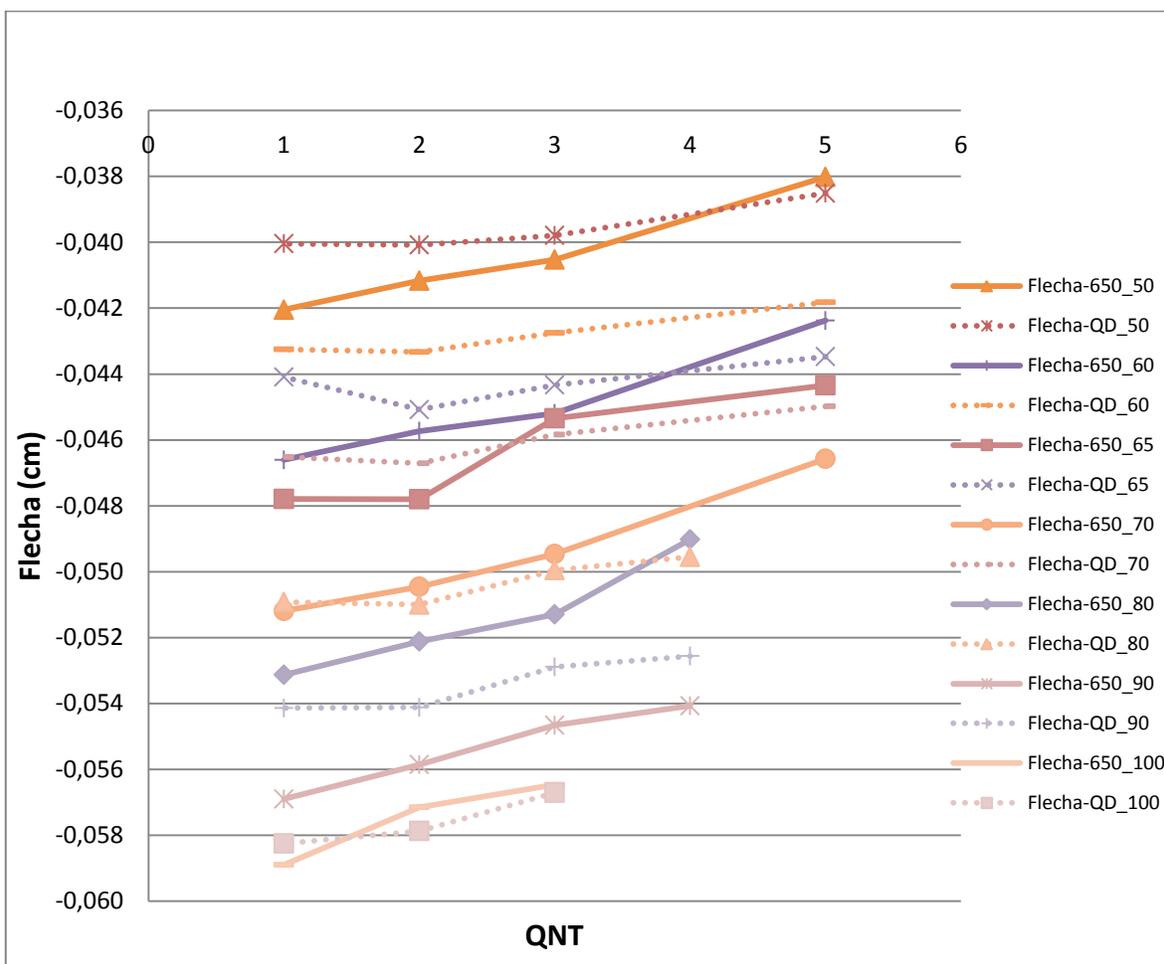
Figura 28 - Razão entre as flechas para o lambda de 1,5, para o QC de 850 kgf com o QD.



Fonte: (AUTOR, 2011).

A Figura 29 mostra os resultados das flechas para os modelos com o lambda de 1,5, para o carregamento de QC de 650 kgf e para o QD. O comportamento das flechas geradas pelos modelos com o QC de 650 kgf é idêntico ao gerado pelo QC de 850 kgf, ou seja, à medida que a quantidade de nervuras secundárias é aumentada, as flechas diminuem gradativamente. Um ponto relevante é que, para os modelos bidirecionais, em sua maioria, houve uma inversão ou uma aproximação das flechas geradas pelos modelos com QD em relação aos modelos com QC de 650 kgf, ou seja, as flechas geradas pelos modelos bidirecionais com o QD ficaram maiores que as geradas com o QC de 650 kgf.

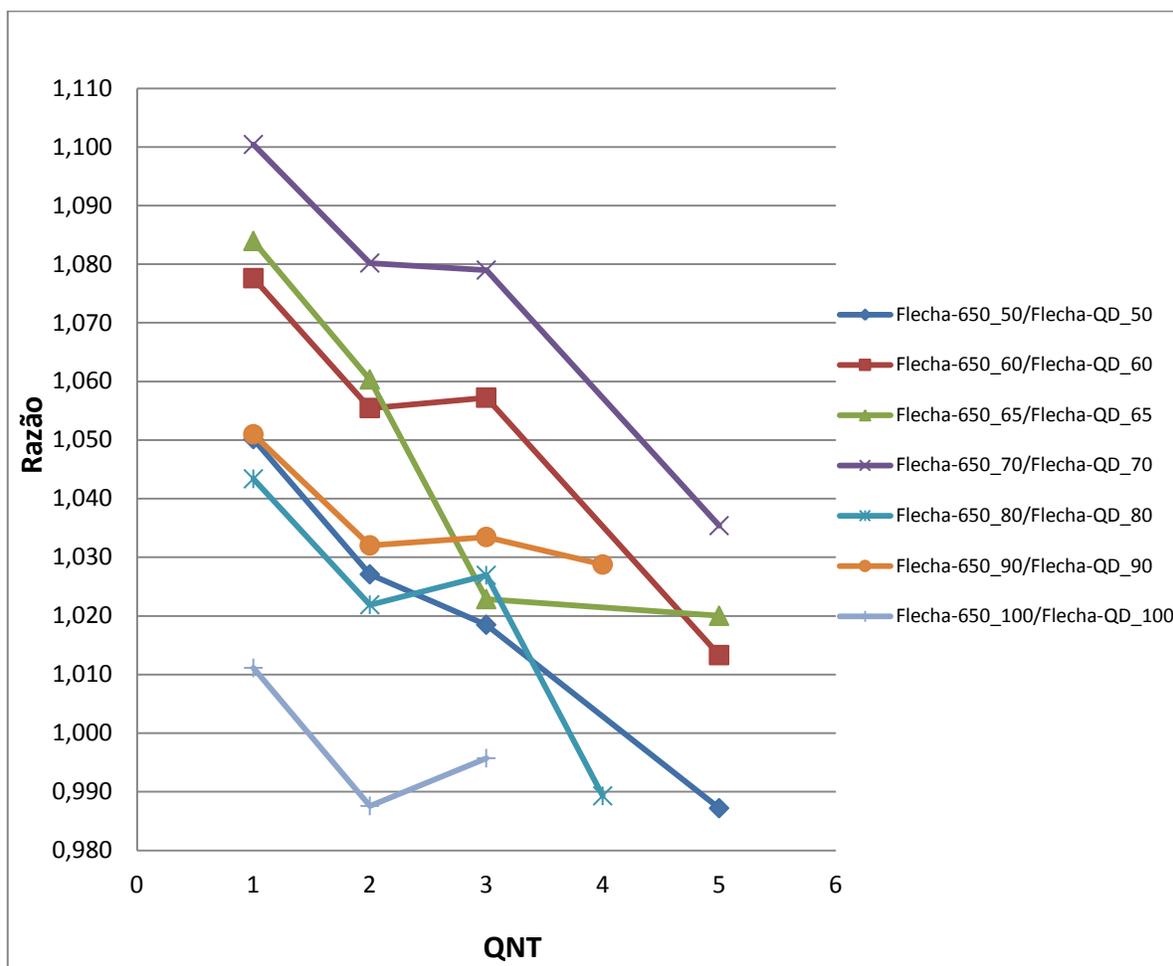
Figura 29 - Flechas para o lambda de 1,5, para o QC de 650 kgf e para o QD.



Fonte: (AUTOR, 2011).

Na Figura 30, apresentam-se as razões entre os valores das flechas para os modelos com o lambda de 1,5. Entre os casos com QC de 650 kgf e os casos com QD, percebe-se praticamente um mesmo comportamento para todas as razões, e uma variação entre 0,98 e 1,10 entre os valores das mesmas, ou seja, os modelos com QC geraram flechas maiores ou iguais às com QD. Como as razões ficaram muito próximas da unidade, fica evidente que o QD tem uma razoável representação das cargas acidentais para situações de pavimentos garagem onde o tipo do veículo utilizado é o sedam, ou seja, carga concentrada de 650 kgf.

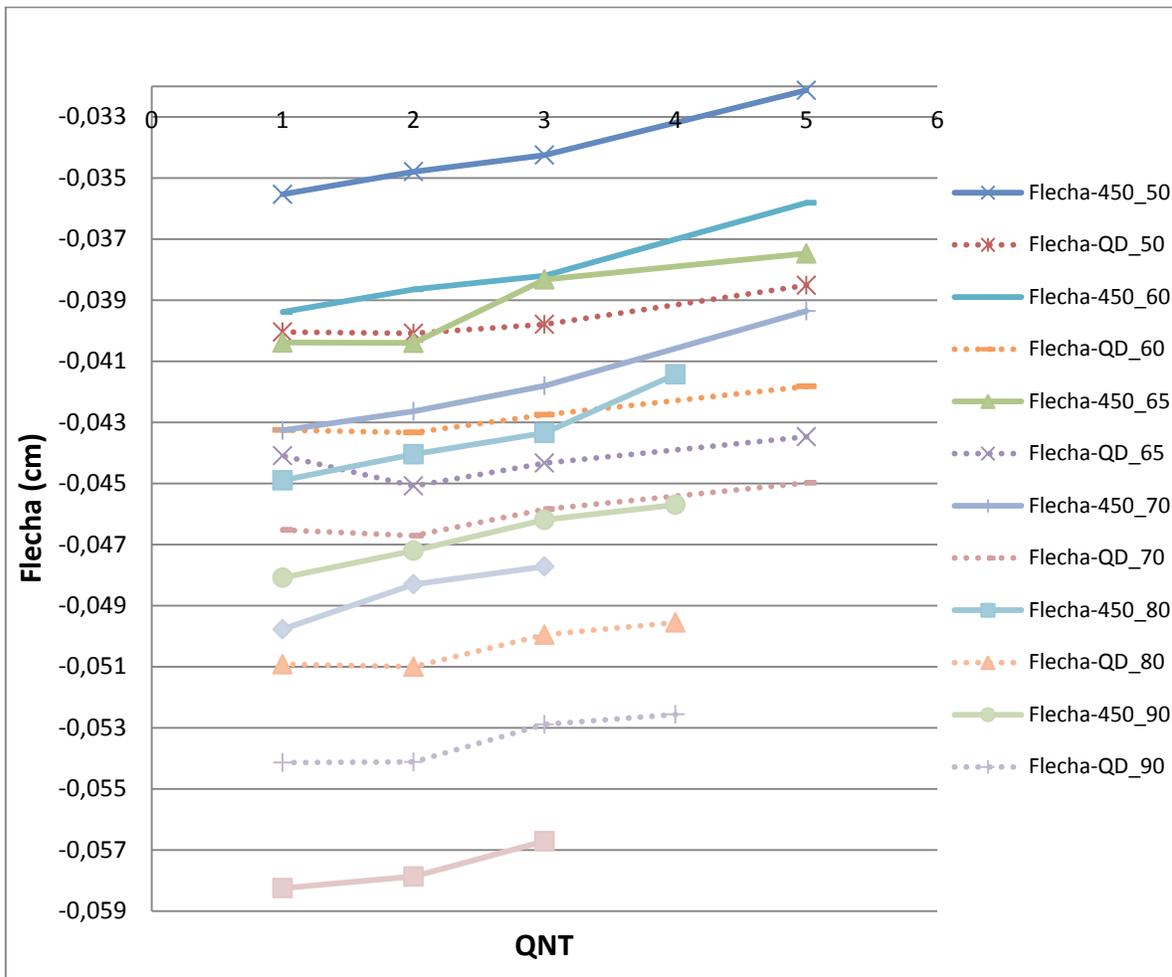
Figura 30 - Razão entre as flechas para o lambda de 1,5, para o QC de 650 kgf com o QD.



Fonte: (AUTOR, 2011).

A Figura 31 mostra os resultados das flechas para os modelos com o lambda de 1,5, para o QC de 450 kgf e para o QD. O comportamento das flechas geradas pelos modelos com QC de 450 kgf é idêntico ao gerado pelo QC de 650 kgf e o de 850 kgf, ou seja, à medida que a quantidade de nervuras secundárias é aumentada, as flechas diminuem gradativamente. Como observação principal, tem-se que, para todos os modelos, as flechas geradas pelo QD apresentaram-se maiores que as geradas para os modelos com QC.

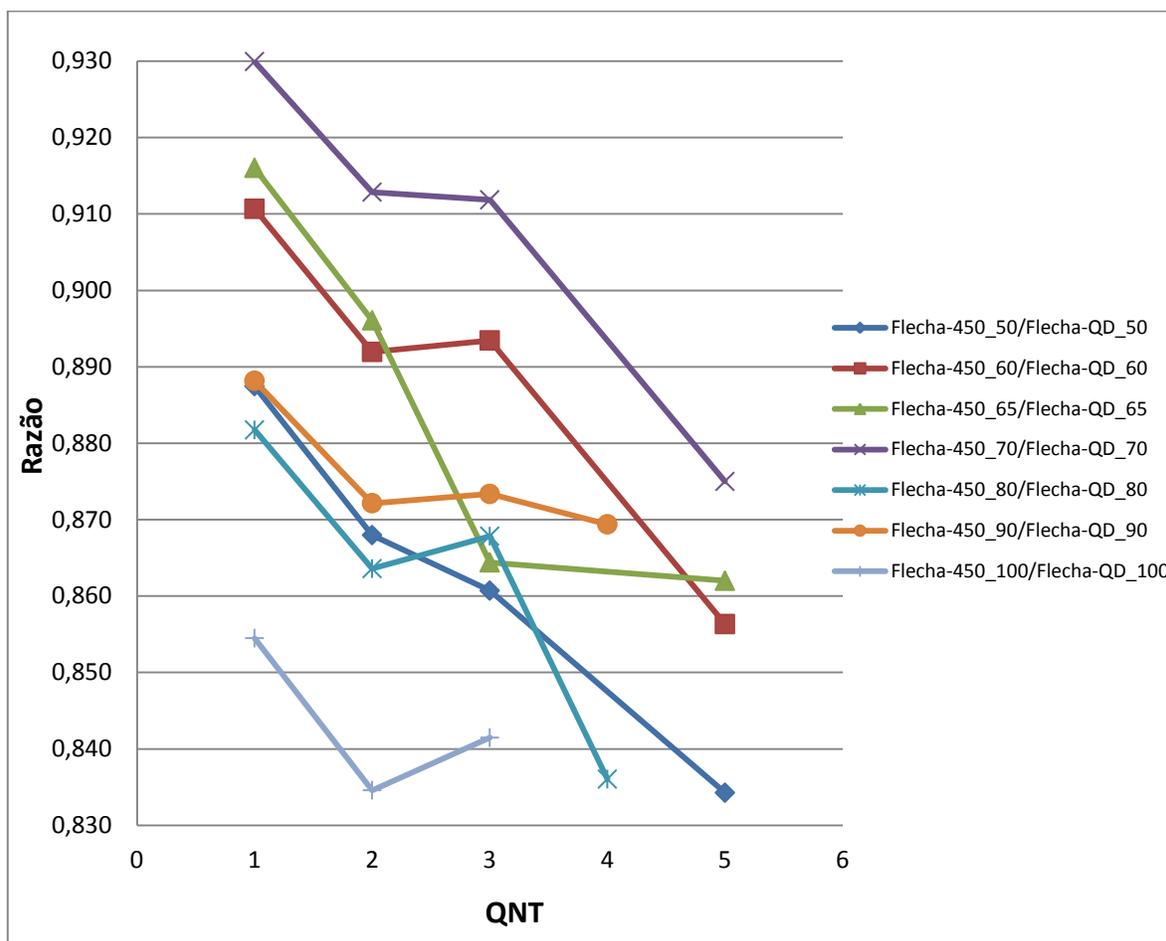
Figura 31 - Flechas para o lambda de 1,5, para o QC de 450 kgf e para o QD.



Fonte: (AUTOR, 2011).

Na Figura 32, apresentam-se as razões entre os valores das flechas para os modelos com o lambda de 1,5. Entre os casos com QC de 450 kgf e os casos com QD, percebe-se praticamente um mesmo comportamento para todas as razões e uma variação entre 0,83 e 0,93 entre os valores das mesmas, ou seja, os modelos com QC geraram flechas menores que as com QD. Como as razões ficaram menores que a unidade entre 7% e 17%, pode-se afirmar que o QD faz uma boa representação das cargas acidentais para situações de pavimentos garagem onde o tipo do veículo utilizado é o compacto, ou seja, carga concentrada de 450 kgf.

Figura 32 - Razão entre as flechas para o lambda de 1,5, para o QC de 450 kgf com o QD.

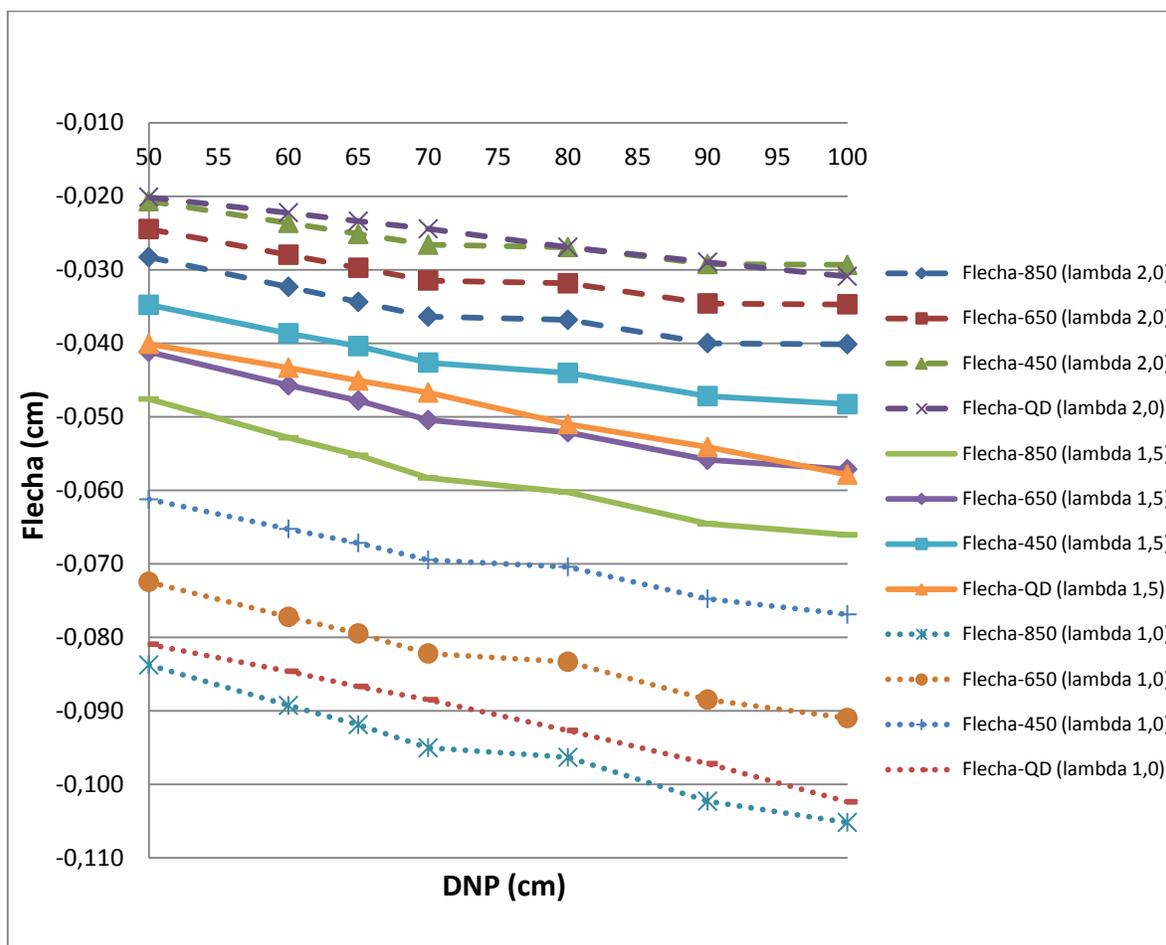


Fonte: (AUTOR, 2011).

Na Figura 33, apresentam-se as flechas para os três valores de lambda (1,0, 1,5 e 2,0) e consideram-se os três tipos de QC (850 kgf, 650 kgf e 450 kgf) além do QD, para os modelos com DNP, variando de 50 cm a 100 cm, e com a QNT constante e igual a dois. Fica evidente que, para os três casos de lambda, as flechas apresentaram o mesmo comportamento, ou seja, à medida que se aumentou a DNP, houve aumento das flechas de forma geral.

Percebe-se que, quando o lambda aumenta, as flechas diminuem, o que é plausível, pois o vão efetivo da laje diminui e como a flecha é diretamente proporcional ao vão, esse é o comportamento esperado.

Figura 33 - Flecha para o lambda de 1,0, 1,5 e 2,0, com DNS de 130 cm.

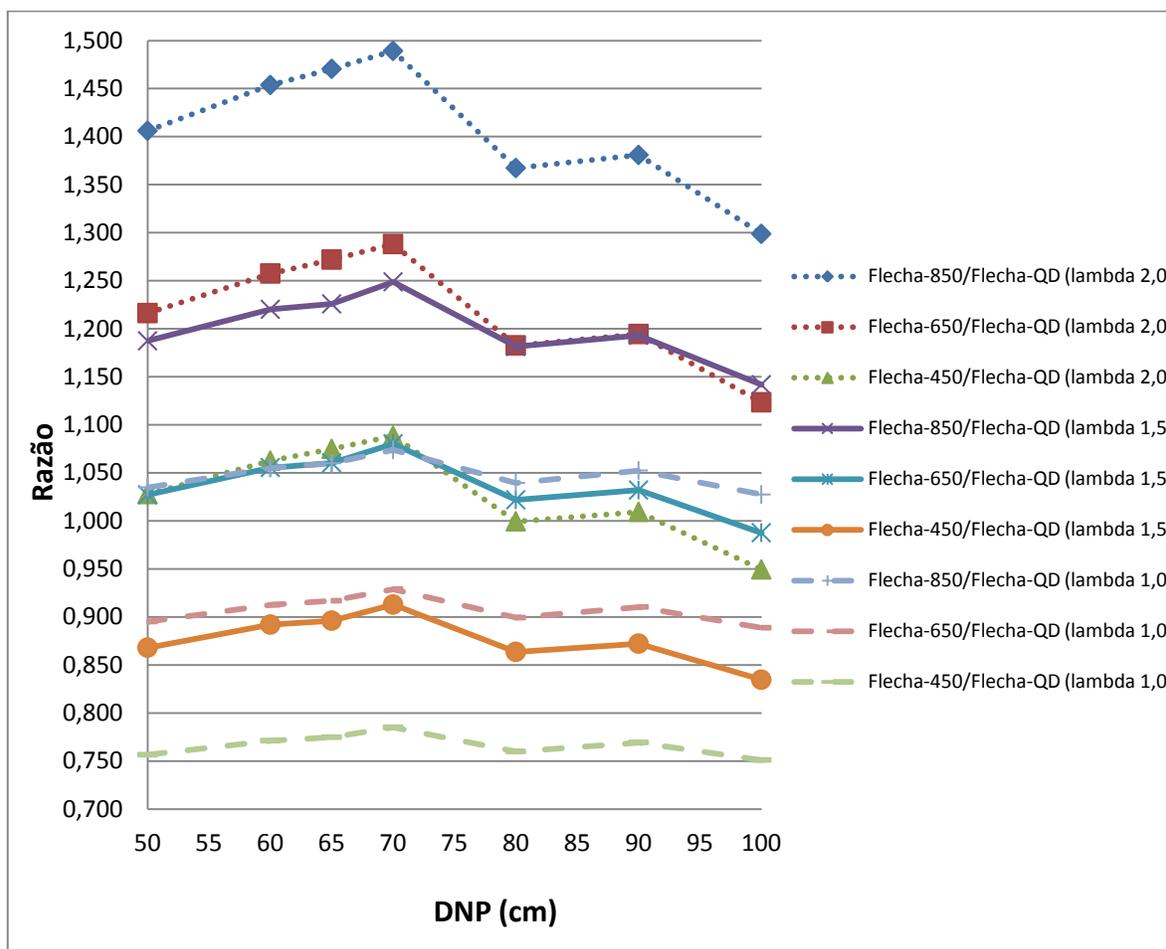


Fonte: (AUTOR, 2011).

A Figura 34 apresenta as razões entre as flechas geradas pelo QC e as geradas pelo QD. Foram considerados os três valores dos lambdas, 1,0, 1,5 e 2,0, e também os três valores do QC bem como o QD, para os modelos com DNP, variando de 50 cm a 100 cm, e com a QNS constante e igual a dois. Fica evidente que, para os três casos de lambda, as razões apresentaram o mesmo comportamento, ou seja, a razão cresceu entre as DNP de 50 cm a 70 cm e para valores das DNP maiores a razão decaiu, o que demonstra certo indício de que existe uma relação entre as flechas para modelos com lambdas diferentes.

Percebe-se que as razões oscilam mais para o lambda igual a 2,0, e fica praticamente constante para o lambda igual a 1,0. Outro ponto importante é que as maiores razões foram para o lambda igual a 2,0, e as menores para o lambda igual a 1,0, o que era esperado, pois, à medida que o lambda foi diminuído, a carga total gerada pelo QD aumentou, em contraponto com a carga total gerada pelo QC que ficou invariável.

Figura 34 - Razão das flechas para o lambda 1,0, 1,5 e 2,0, com DNS de 130 cm.



Fonte: (AUTOR, 2011).

Nas figuras anteriores foram mostradas as flechas e as próprias razões entre elas para os casos com QD e QC, quando ficou evidente que a representação das cargas de garagem apenas pelo QD de  $0,3 \text{ tf/m}^2$  não se apresenta condizente com todas as situações, pois a real carga acidental em pavimentos de garagem está relacionada às cargas dos automóveis, que foram representados nos modelos pelo QC (850 kgf, 650 kgf e 450 kgf).

Para o QC de 850 kgf e 650 kgf o QD não forneceu boa aproximação para as flechas, em virtude disso, o dimensionamento da laje feito com esse valor de QD ( $0,3 \text{ tf/m}^2$ ) ficaria aquém da real necessidade da estrutura, levando a problemas patológicos, flechas e fissurações maiores que o previsto. Sendo assim, foi feita uma correção nos valores dos QD para que a mesma tivesse a mesma flecha que os exemplos com QC, Tabela 25. Importante frisar que os valores expostos na Tabela 25 valem para qualquer valor de  $f_{ck}$ .

Tabela 25 - Valores corrigidos dos QD com elementos finitos tridimensionais, para lambda 1,0, 1,5 e 2,0.

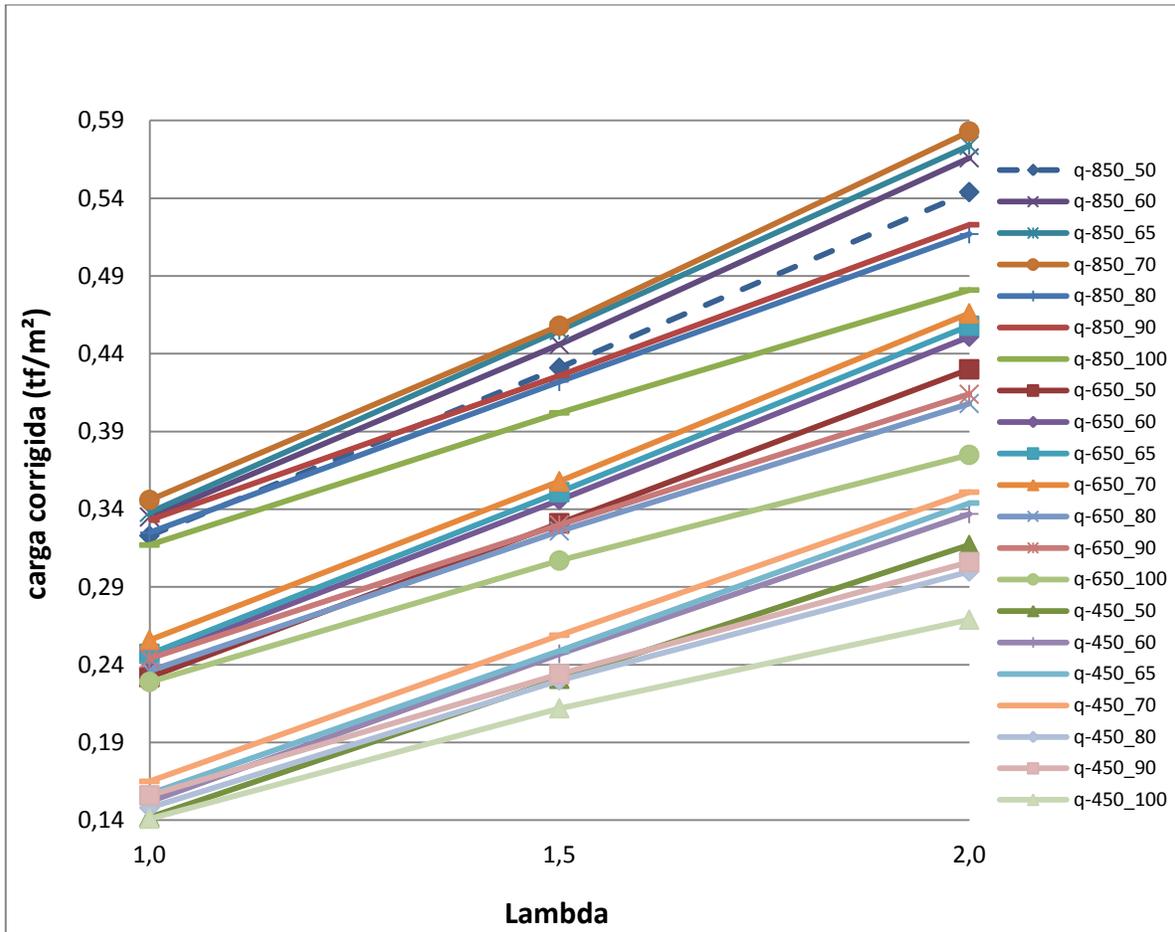
DNP (cm)	50	60	65	70	80	90	100
q-850 (tf/m <sup>2</sup> ) para lambda 1,0	0,323	0,335	0,338	0,346	0,325	0,333	0,317
q-850 (tf/m <sup>2</sup> ) para lambda 1,5	0,431	0,446	0,455	0,458	0,422	0,426	0,402
q-850 (tf/m <sup>2</sup> ) para lambda 2,0	0,544	0,566	0,574	0,583	0,517	0,523	0,481
q-650 (tf/m <sup>2</sup> ) para lambda 1,0	0,232	0,244	0,247	0,256	0,236	0,244	0,229
q-650 (tf/m <sup>2</sup> ) para lambda 1,5	0,331	0,346	0,351	0,358	0,326	0,330	0,307
q-650 (tf/m <sup>2</sup> ) para lambda 2,0	0,430	0,451	0,458	0,466	0,408	0,414	0,375
q-450 (tf/m <sup>2</sup> ) para lambda 1,0	0,142	0,152	0,157	0,165	0,148	0,156	0,141
q-450 (tf/m <sup>2</sup> ) para lambda 1,5	0,231	0,247	0,249	0,259	0,230	0,234	0,212
q-450 (tf/m <sup>2</sup> ) para lambda 2,0	0,317	0,337	0,344	0,351	0,300	0,306	0,269

Fonte: (AUTOR, 2011).

Nessa tabela q-NUM (tf/m<sup>2</sup>), é o QD que provoca a mesma flecha que o QC de valor NUM (kgf).

A Figura 4.9 apresenta os valores corrigidos dos carregamentos acidentais de cargas distribuídas para cada DNP, com o lambda variando de 1,0 a 2,0. Percebe-se a linearidade dos valores à medida que o lambda varia de 1,0 para 1,5, e de 1,5 para 2,0, portanto, para se definir um valor do QD para um lambda intermediário, basta fazer uma regra de três simples. Na Figura 35 q-NUM1\_NUM2 (tf/m<sup>2</sup>), é o QD que provoca a mesma flecha que o QC de valor NUM1 (kgf) e que está associado ao modelo com a DNP de valor NUM2 (cm).

Figura 35 - Valores corrigidos do QD com elementos finitos tridimensionais, para lambda 1,0, 1,5 e 2,0.



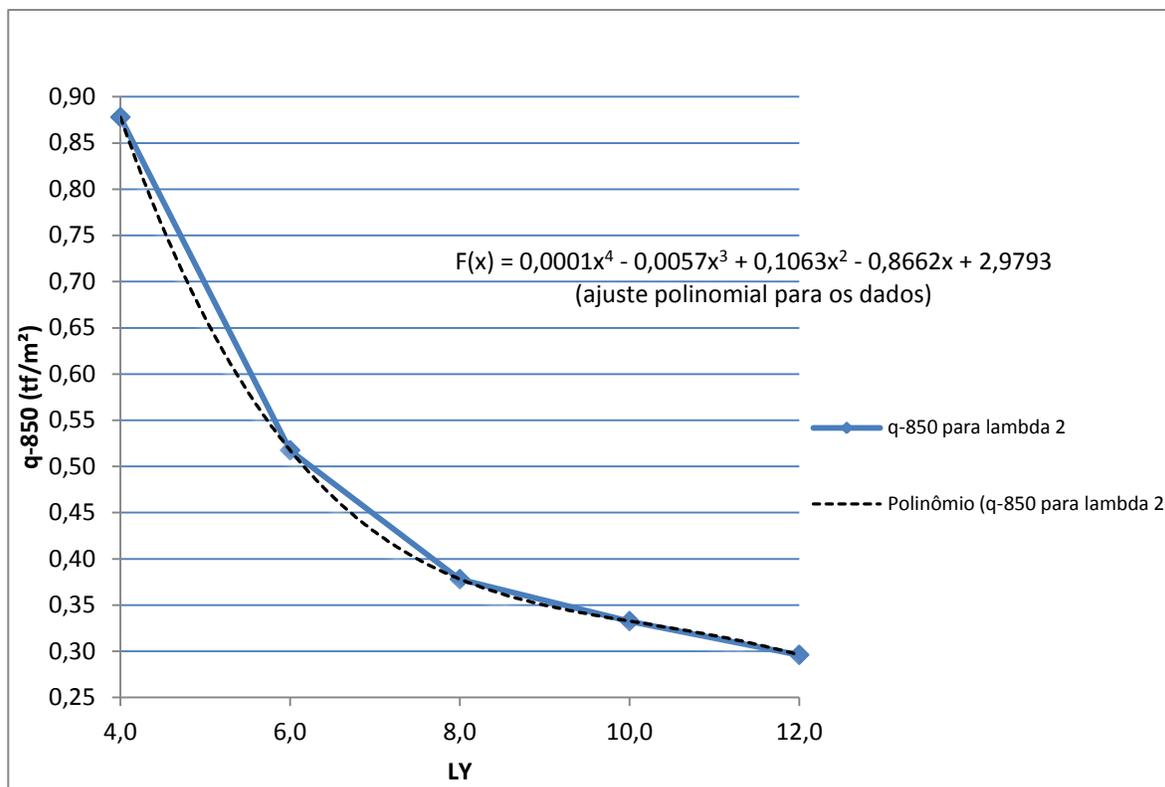
Fonte: (AUTOR, 2011).

Para definir valores do QD corrigido que possam ser utilizados em qualquer laje nervurada, foram feitos alguns modelos adicionais, para verificar se existe variação para o QD a depender do comprimento dos vãos, ou seja, por exemplo, modelos que tenham o mesmo lambda mas apresentem diferentes tamanhos para o maior vão da laje, *LY*. Essas análises foram necessárias, pois todos os exemplos mostrados anteriormente apresentam *LY* constante e igual a 6 m.

Inicialmente foram feitos cinco modelos com o lambda igual a 2, DNP igual a 80 cm e QNS igual a dois, tendo o *LY* variando de 4 m a 12 m de dois em dois metros. Têm-se na Figura 36 os valores do q-850 (representa o QD corrigido para o caso do QC de 850 kgf) para esses modelos, o que permite perceber claramente que os valores sofrem variação a depender do *LY*. Foi definida uma função de ajuste polinomial ( $F(x)$ ) dos dados, para, em

conjunto com o QD corrigidos da Tabela 4.1, obter os QD corrigidos para os valores de  $LY$ , variando de 4 m a 12 m.

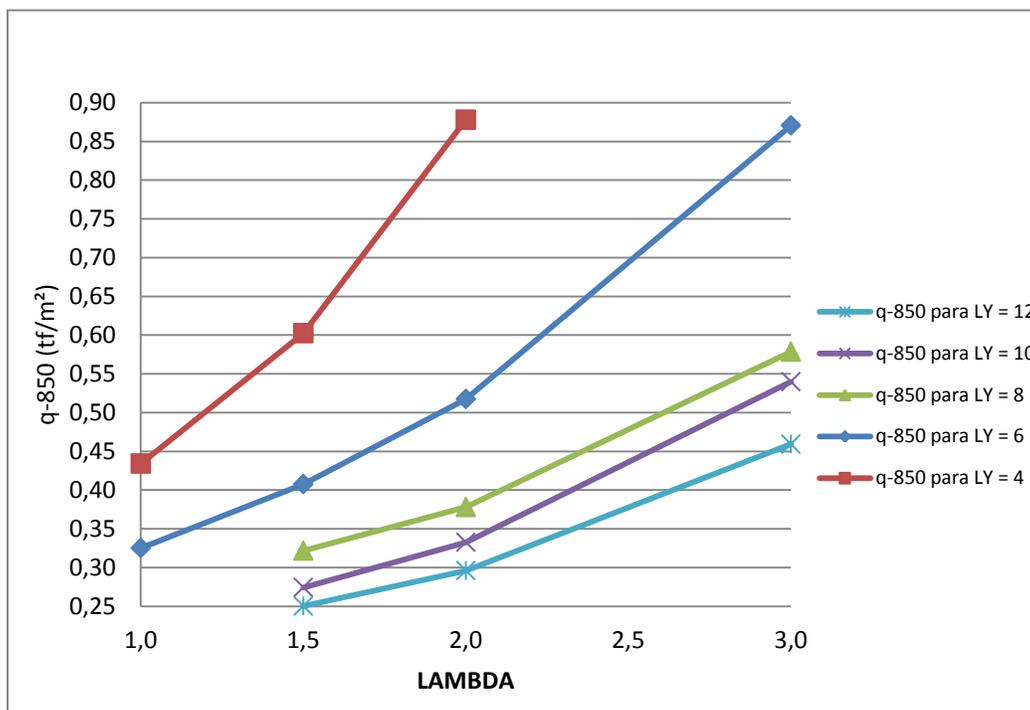
Figura 36 - q-850 para  $LY$  de 4m a 12m e lambda de 2,0.



Fonte: (AUTOR, 2011).

A segunda etapa da verificação do QD corrigido para a variação do  $LY$  com um mesmo  $\lambda$  foi verificar qual era a reta de tendência para cada valor de  $LY$ , conforme exposto na Figura 37. A partir dessas retas de tendências da função de ajuste  $F(x)$  exposta na Figura 36 e dos dados da Tabela 25, foram obtidos os valores do QD corrigido (Tabela 26) que valem para qualquer geometria retangular de laje,  $f_{ck}$  e condições de contorno.

Figura 37 - q-850 para LY de 4m a 12m e lambda de 1,0 a 3,0.



Fonte: (AUTOR, 2011).

Na Tabela 26, percebem-se duas tendências principais dos valores do QD corrigidos. A primeira tendência está relacionada com o LY: à medida que o mesmo diminui, os valores do QD corrigidos aumentam; a segunda tendência está relacionada com o lambda: se o mesmo aumenta, os valores do QD corrigidos também aumentam.

Tabela 26 - Valores corrigidos do QD com elementos finitos tridimensionais, para lambda de 1,0, 1,5, 2,0 e 3,0.

LY (m)	4	6	8	10	12
q-850 (tf/m <sup>2</sup> ) (lambda 1,0)	0,434	0,346	0,265	0,216	0,204
q-850 (tf/m <sup>2</sup> ) (lambda 1,5)	0,602	0,458	0,322	0,274	0,250
q-850 (tf/m <sup>2</sup> ) (lambda 2,0)	0,878	0,583	0,378	0,332	0,296
q-850 (tf/m <sup>2</sup> ) (lambda 3,0)	1,764	0,985	0,559	0,520	0,443
q-650 (tf/m <sup>2</sup> ) (lambda 1,0)	0,320	0,256	0,196	0,160	0,151
q-650 (tf/m <sup>2</sup> ) (lambda 1,5)	0,471	0,358	0,252	0,215	0,196
q-650 (tf/m <sup>2</sup> ) (lambda 2,0)	0,703	0,466	0,303	0,266	0,237
q-650 (tf/m <sup>2</sup> ) (lambda 3,0)	1,448	0,813	0,467	0,432	0,370
q-450 (tf/m <sup>2</sup> ) (lambda 1,0)	0,207	0,165	0,127	0,103	0,098
q-450 (tf/m <sup>2</sup> ) (lambda 1,5)	0,341	0,259	0,182	0,155	0,142
q-450 (tf/m <sup>2</sup> ) (lambda 2,0)	0,661	0,351	0,285	0,250	0,223
q-450 (tf/m <sup>2</sup> ) (lambda 3,0)	1,691	0,647	0,614	0,556	0,484

Fonte: (AUTOR, 2011).

#### 4.2 Flechas, Elemento de Grelha

Neste item serão apresentados os resultados referentes às flechas para alguns exemplos usando elemento de grelha (EG). Esses exemplos foram modelados para o lambda de 1,5, e quando foram comparados os valores do QD corrigidos, calculados usando os EG com os calculados anteriormente usando EFT, foi visando verificar se os QD corrigidos calculados usando EFT podem também ser aplicados em modelos que usam EG.

Na Tabela 27, apresentam-se os valores corrigidos do QD em relação ao QC de 850 kgf para o lambda de 1,5, calculados usando os EG. Percebe-se que todos os valores, com exceção do modelo com a DNP de 100 cm, ficaram com valores dos QD corrigidos inferiores a 0,458 tf/m<sup>2</sup>, que foi o valor máximo encontrado pelo modelo usando EFT, motivos pelo qual os valores sugeridos do QD calculados por intermédio dos modelos usando EFT também podem ser aplicados em modelos que usam EG.

Tabela 27 - Valores corrigidos das cargas distribuídas com EG, para lambda de 1,5.

DNP (cm)	50	60	65	70	80	90	100
q-850 (tf/m <sup>2</sup> )	0,416	0,393	0,417	0,380	0,380	0,436	0,460

Fonte: (AUTOR, 2011).

Além disso, foram analisados também os valores de momentos máximos nas nervuras gerados pelas cargas q-850 (Tabela 27), os quais foram comparados com os momentos gerados pelo QC de 850 kgf para os modelos com EG.

Na Tabela 28, encontram-se os valores dos momentos nas nervuras gerados pelo QC de 850 kgf (Mn-850) e pelos q-850 (Mn-q), além da razão entre elas. A razão entre Mn-850 e Mn-q oscilou de 0,83 a 1,06, ou seja, os momentos gerados utilizando o q-850 foram em média 10% superior ao momento gerado pelo QC de 850 kgf.

Por tal, os valores do QD corrigidos fornecem resultados próximos para as flechas e momentos nas nervuras, quando comparados com o máximo carregamento solicitante em um pavimento garagem, ou seja, QC de 850 kgf.

Tabela 28 - Momentos nas nervuras, para as qc-850 e para as cargas concentradas de 850 kfg, para lambda de 1,5.

DNP (cm)	50	60	65	70	80	90	100
Mn-850 (tf*m)	0,819	0,813	0,940	0,850	1,072	1,416	1,779
Mn-q (tf*m)	0,836	0,915	1,004	1,026	1,146	1,492	1,671
Mn-850/Mn-q	0,979	0,889	0,937	0,828	0,935	0,949	1,064

Obs.: Mn-850 e Mn-q significam: momentos máximos nas nervuras, gerados pelas cargas distribuídas corrigidas e pelas cargas concentradas de 850 kgf, respectivamente.

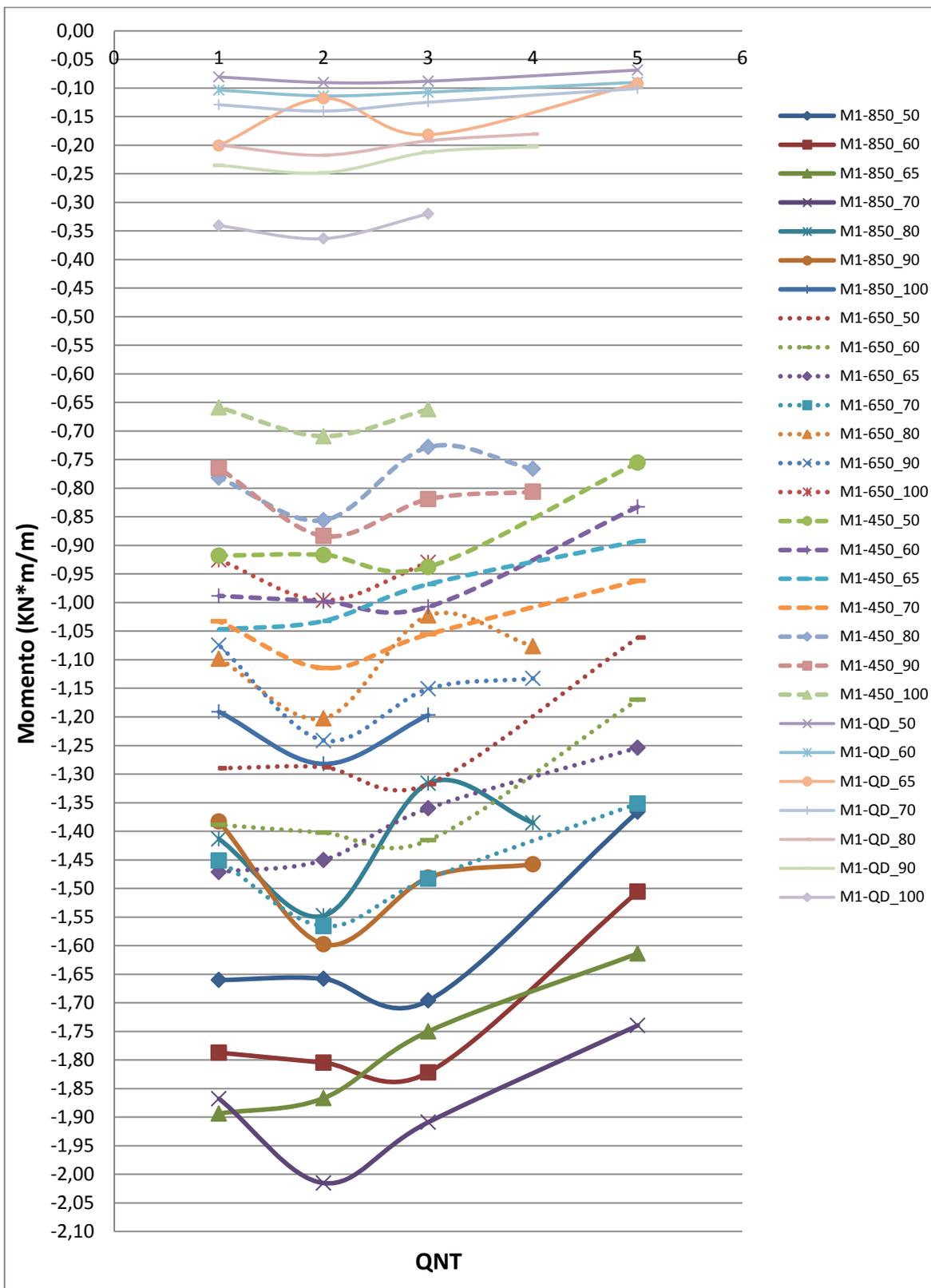
Fonte: (AUTOR, 2011).

### 4.3 Momentos e Áreas de Aço para as Mesas

Nesta seção, analisam-se os momentos máximos nas mesas dos exemplos, apresentando as respectivas áreas de aço associadas a esses momentos. Os valores dos momentos máximos positivos referentes a cada exemplo serão dois, M1 e M2. O momento M1 flexiona a mesa na direção das nervuras secundárias (menor vão da mesa), enquanto o M2 flexiona a mesa no sentido das nervuras principais (maior vão da mesa). As áreas de aço correspondentes aos momentos M1 e M2 serão A1 e A2, respectivamente.

A Figura 38 mostra os momentos M1, cujo comportamento é praticamente constante devido ao QD. Já os momentos devido ao QC apresentam certo aumento dos seus valores para os modelos com a QNS, passando de um para dois, e certa diminuição dos seus valores para os modelos com a QNS de três a cinco, o que mostra o comportamento de apoio entre as nervuras e a mesa, pois, à medida que o maior vão da mesa diminui (devido ao aumento da QNS), fica a mesa com um comportamento bidirecional, logo o momento M1 diminui. Além disso, percebe-se que os valores dos momentos M1 devido ao QC são maiores que os momentos M1 resultantes do QD.

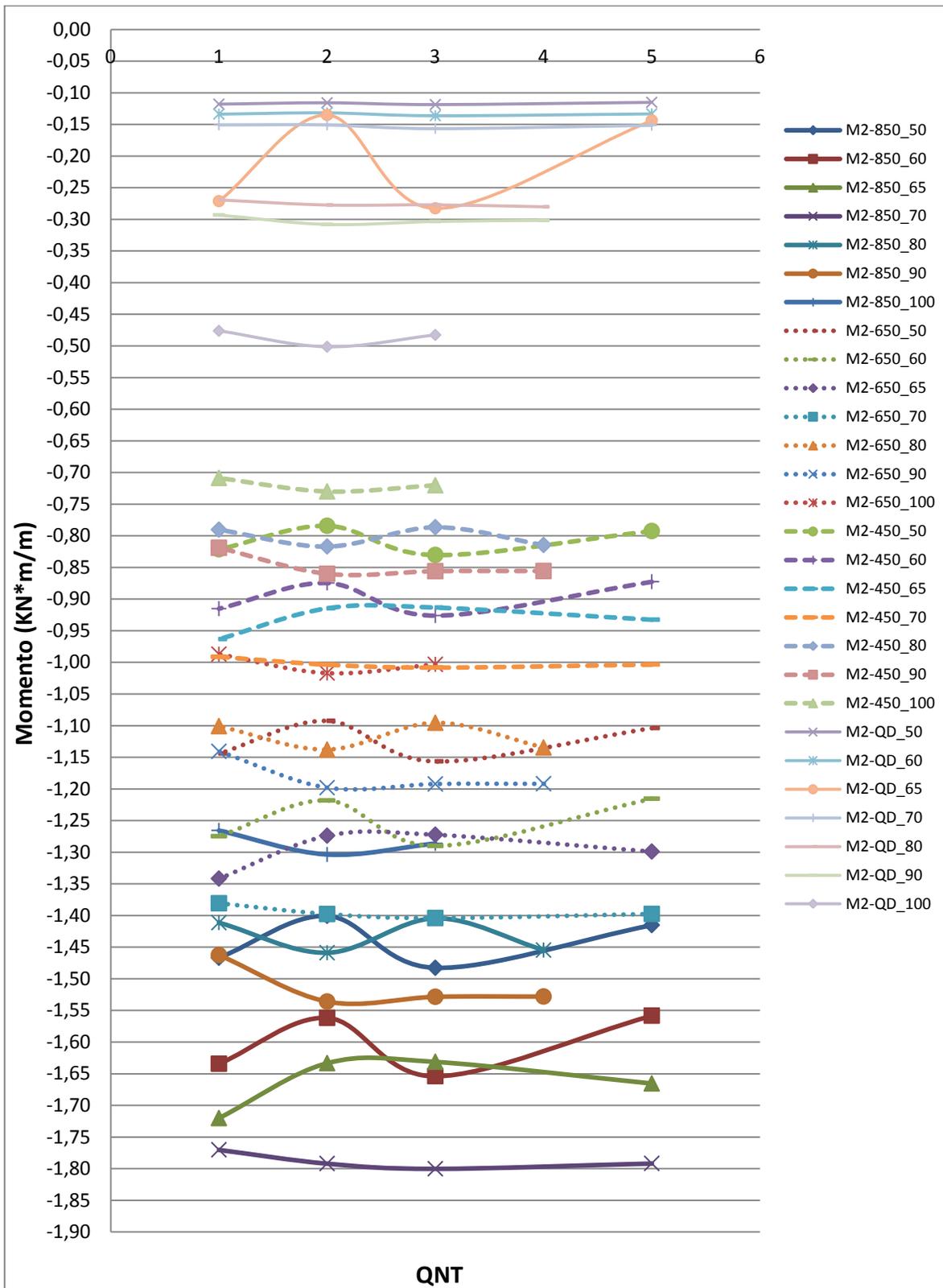
Figura 38 - Momentos M1, flexão da mesa no sentido das nervuras transversais.



Fonte: (AUTOR, 2011).

Na Figura 39, apresentam-se os valores dos momentos M2 dos exemplos, os quais têm de forma geral pouca variabilidade para todos os casos da QNS, independente do modelo em questão e se o mesmo é com QD ou QC. Isso é natural devido ao próprio comportamento unidirecional dos modelos, forçado pelo fato de o QC ser colocado centralizado nas lajes e ao longo do maior vão. Por esse motivo, a influência localizada que acontece para os momentos M1 não ocorre para o momento M2, pois a flexão que gera o momento M2 na mesa, está na direção da maior flexão da laje, razão pela qual o comportamento do momento M2 não está em sua maioria conectado com o comportamento localizado da mesa, mais sim, com o comportamento de flexão da laje. Vale ressaltar que os momentos gerados pelos QD apresentaram valores muito inferiores aos momentos gerados pelos QC.

Figura 39 - Momento M2, flexão da mesa no sentido das nervuras principais.



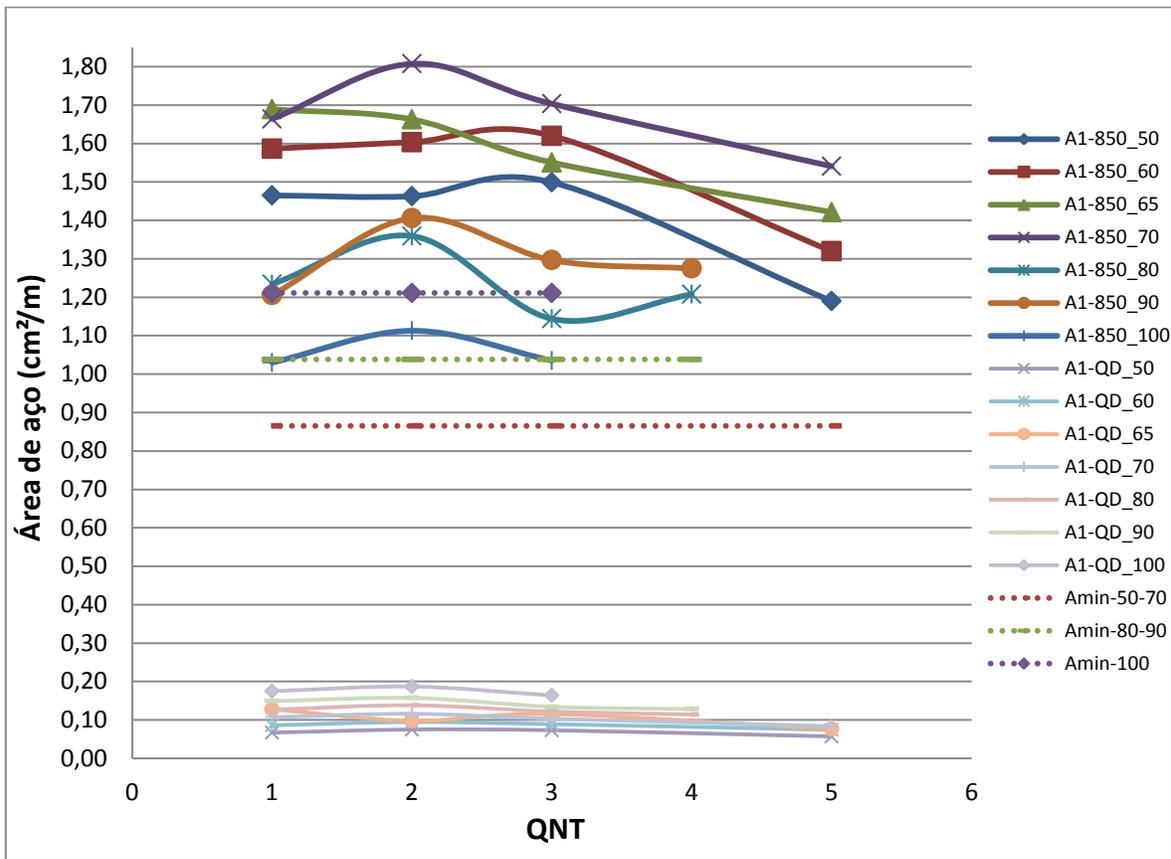
Fonte: (AUTOR, 2011).

Como consideração final sobre os momentos máximos nas mesas apresentados acima, percebeu-se que tanto para o M1 como para o M2, os momentos, devido às cargas concentradas, deram maiores que os proporcionados pelas cargas distribuídas, o que demonstra certa diferença entre o modelo representado com cargas concentradas, QC, e o modelo com cargas distribuídas, QD, para a análise da flexão na mesa de pavimentos tipo garagem.

Na sequência desta seção serão apresentadas as áreas de aço referentes aos momentos gerados pelo QD e pelo QC e as áreas de aço mínimas, que estão associadas com a recomendação de armadura mínima da NBR 6118:2003.

Na Figura 40, apresentam-se as áreas de aço A1-850 e A1-QD, que são as áreas de aço calculadas usando os momentos M1-850 e M1-QD, respectivamente, além das armaduras mínimas. Fica evidente que todas as áreas de aço referentes ao QC de 850 kgf deram armaduras maiores do que as armaduras mínimas respectivas correspondentes a cada modelo; já para as áreas calculadas devido ao QD, seus valores foram menores que os da armadura mínima da NBR 6118:2003.

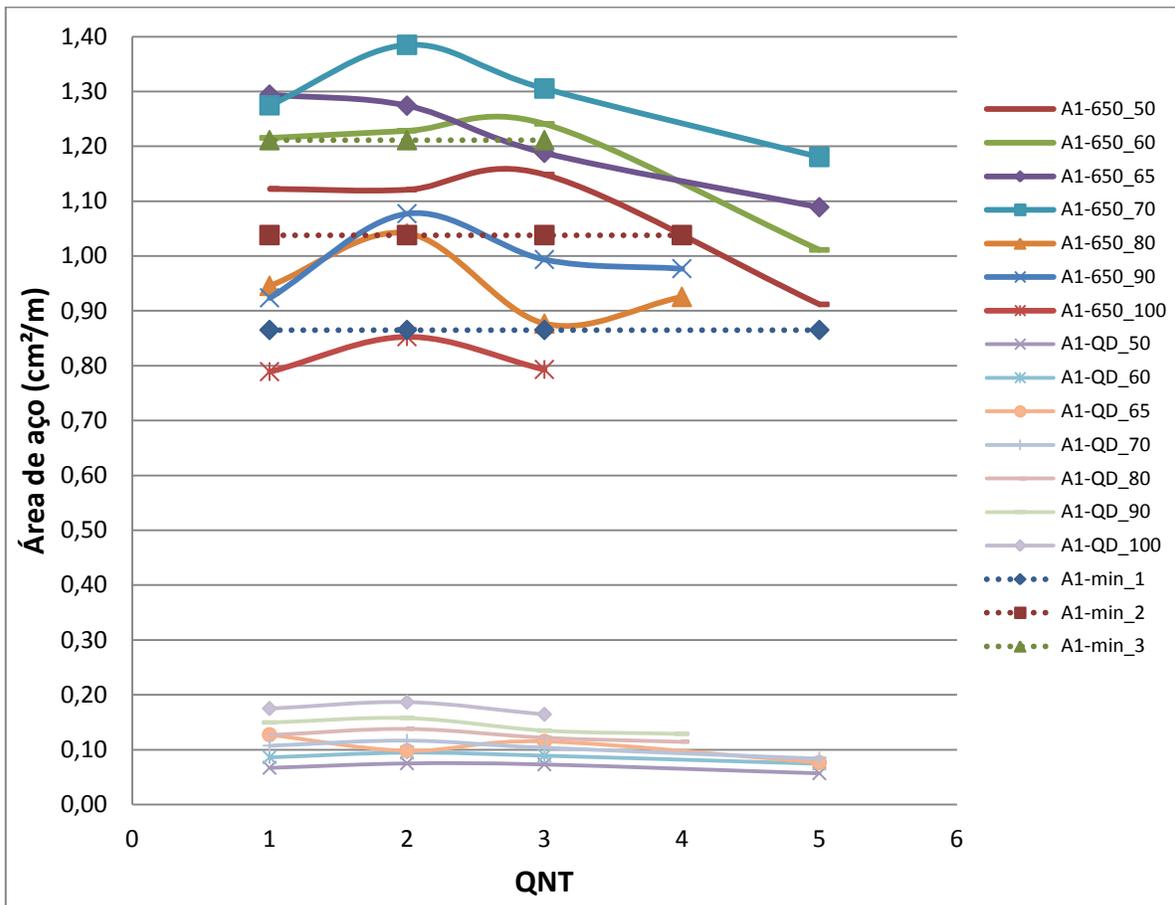
Figura 40 - Áreas de aço devido aos momentos M1-850 e M1-QD.



Fonte: (AUTOR, 2011).

Têm-se na sequência a Figura 41 e a Figura 42 que são idênticas à Figura 40, mas, ao invés de apresentarem as áreas de aço A1-850, elas apresentam as áreas A1-650 e A1-450, respectivamente. Para as áreas de aço A1-650, percebe-se que as armaduras mínimas Amin-80-90 e Amin-100 apresentam armaduras maiores que os modelos aos quais estão associadas, ou seja, para os modelos com a DNP entre 80 cm e 100 cm, a armadura mínima recomendada pela NBR 6118:2003 é o suficiente para combater a flexão na mesa para uma carga veicular máxima por pneu de até 650 kgf.

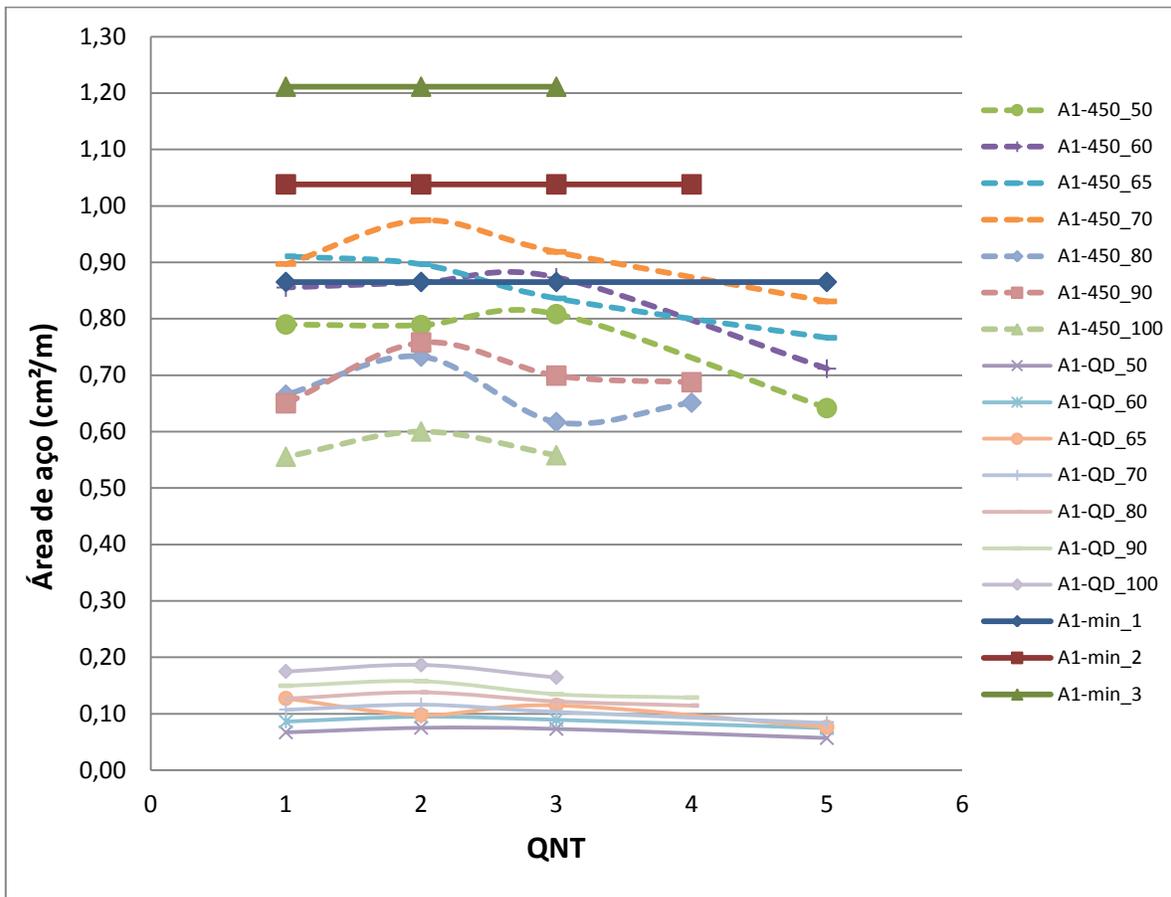
Figura 41 - Áreas de aço devido aos momentos M1-650 e M1-QD.



Fonte: (AUTOR, 2011).

Para as áreas de aço A1-450, percebe-se que, em referência aos modelos com a DNP entre 50 cm e 100 cm (com exceção do modelo com a DNP de 70 cm), a armadura mínima recomendada pela NBR 6118:2003 é o suficiente para combater a flexão na mesa para uma carga veicular máxima por pneu de até 450 kgf, que é o automóvel modelo compacto.

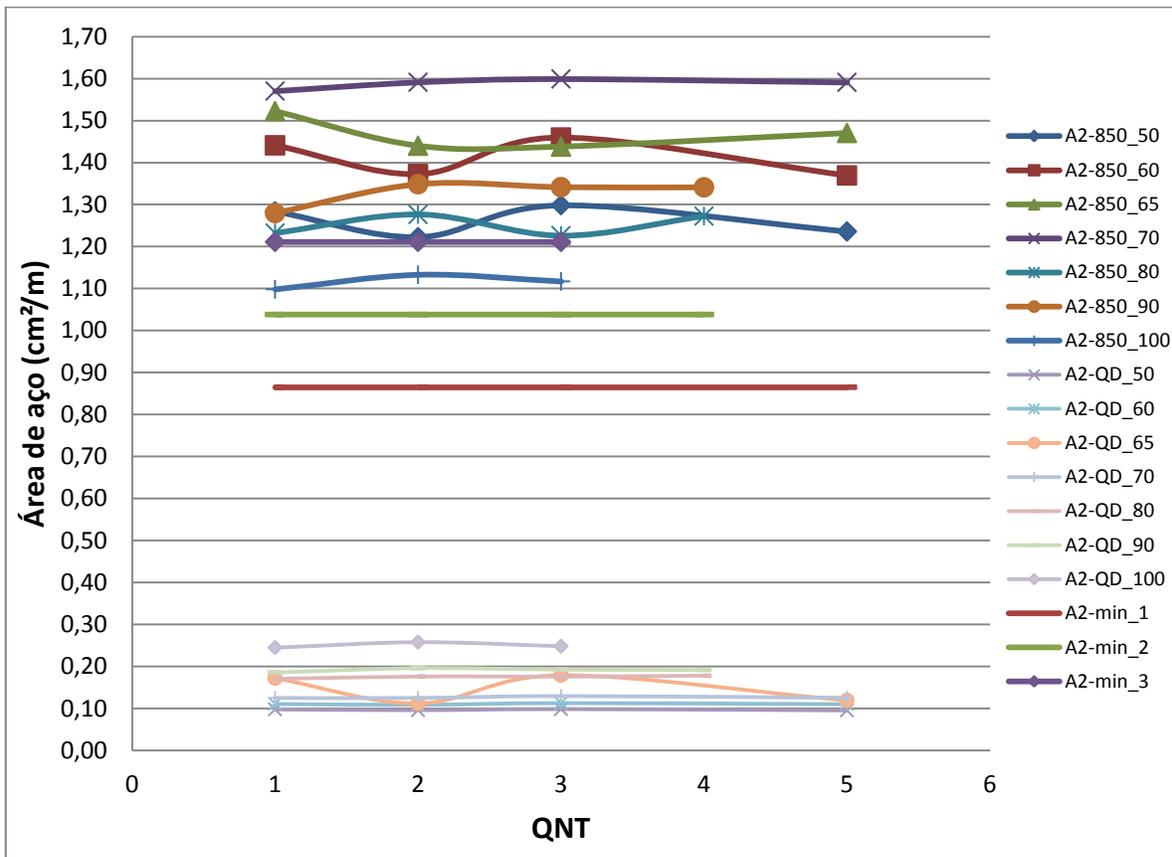
Figura 42 - Áreas de aço devido aos momentos M1-450 e M1-QD.



Fonte: (AUTOR, 2011).

Na Figura 43, apresentam-se as áreas de aço A2-850 e A2-QD, que são as áreas de aço calculadas usando os momentos M2-850 e M2-QD, respectivamente, além das armaduras mínimas. Percebe-se que as áreas de aço referentes aos QC de 850 kgf deram armaduras maiores, do que as armaduras mínimas respectivas a cada modelo, enquanto, para as áreas calculadas devido ao QD, seus valores foram inferiores aos da armadura mínima.

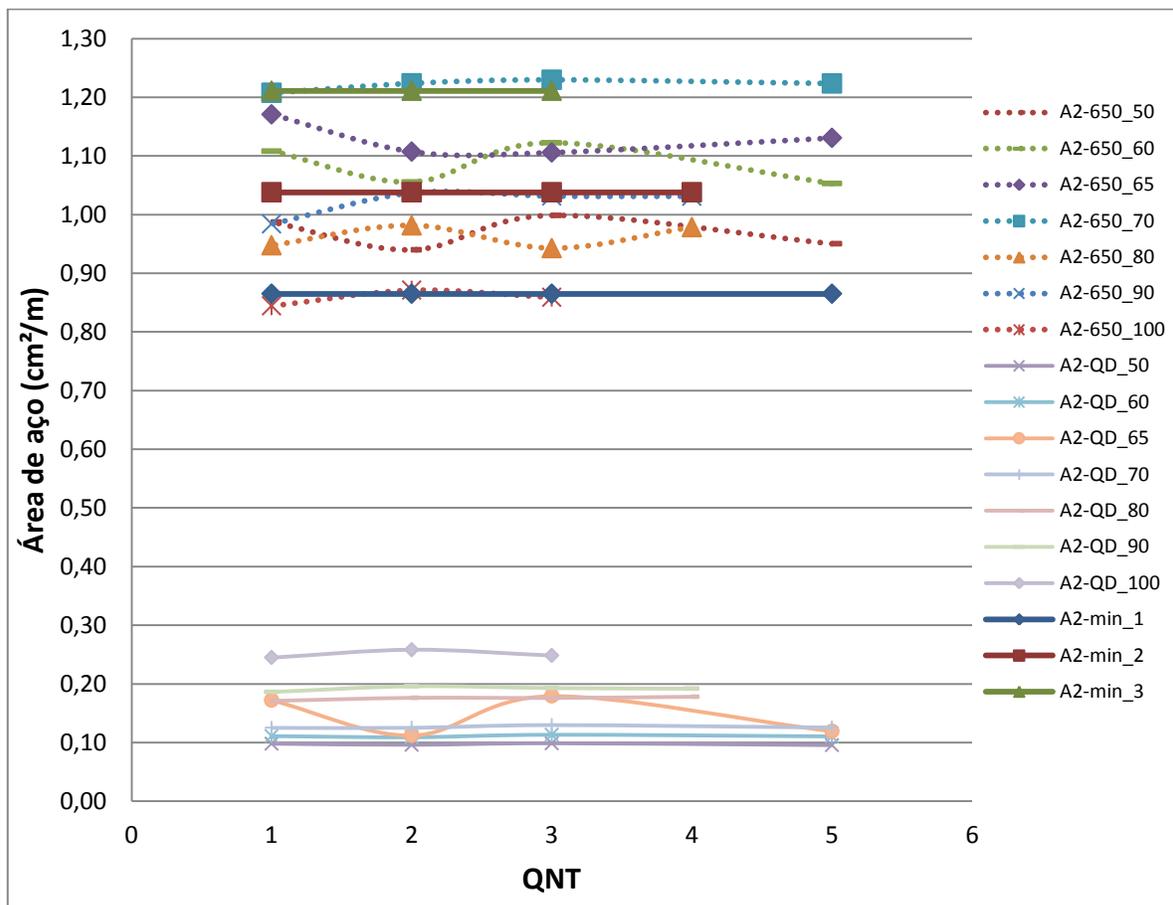
Figura 43 - Áreas de aço devido aos momentos M2-850 e M2-QD.



Fonte: (AUTOR, 2011).

Têm-se na sequência a Figura 44 e a Figura 45 que são idênticas à Figura 43, mas, ao invés de apresentarem as áreas de aço A2-850, elas apresentam as áreas A2-650 e A2-450, respectivamente. Para as áreas de aço A2-650, percebe-se que as armaduras mínimas Amin-80-90 e Amin-100 apresentam armaduras maiores que os modelos aos quais estão associadas, ou seja, para os modelos com a DNP entre 80 cm e 100 cm, a armadura mínima recomendada pela NBR 6118:2003 é suficiente para combater a flexão na mesa para uma carga veicular máxima por pneu de até 650 kgf, que é o automóvel modelo sedam.

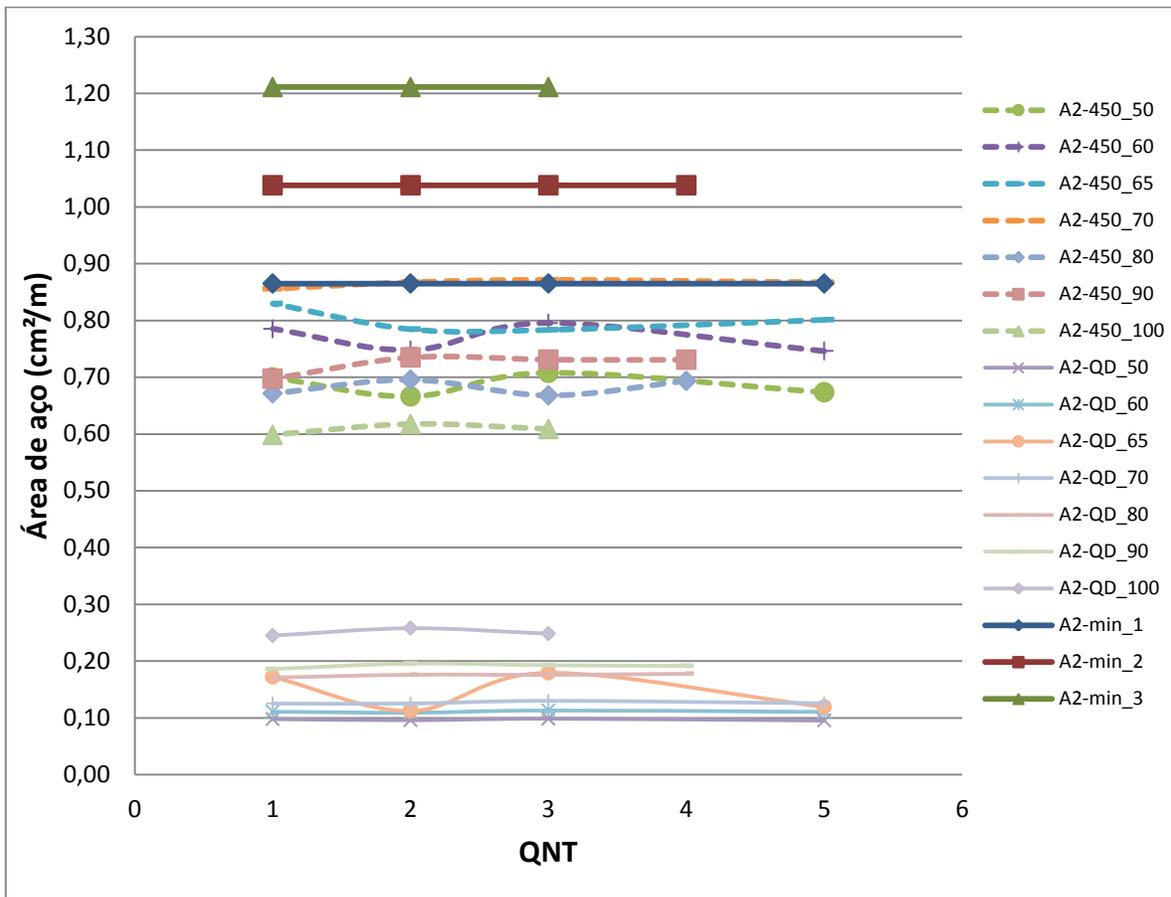
Figura 44 - Áreas de aço devido aos momentos M2-650 e M2-QD.



Fonte: (AUTOR, 2011).

Para as áreas de aço A2-450, percebe-se que todas as armaduras mínimas apresentam boa representação, ou seja, para os modelos com a DNP entre 50 cm e 100 cm, a armadura mínima recomendada pela NBR 6118:2003 é o suficiente para combater a flexão na mesa para uma carga veicular máxima por pneu de até 450 kgf, que é o automóvel modelo compacto.

Figura 45 - Áreas de aço devido aos momentos M2-450 e M2-QD.



Fonte: (AUTOR, 2011).

Foi mostrado que as armaduras A1 e A2, calculadas por intermédio do QC de 850 kgf, 650 kgf e 450 kgf, deram valores, respectivamente, maiores, próximos e menores que os das armaduras mínimas. Como o cálculo das armaduras feitas por intermédio do QC é o que representa com mais proximidade o real comportamento de um pavimento garagem, sugere-se que, sejam utilizadas, como armadura mínima na mesa das lajes nervuradas dos pavimentos garagem, os valores foram mostrados da Figura 40 à Figura 45, resumidos na Tabela 29. Importante ressaltar que os valores expostos na Tabela 29 podem ser aplicados para qualquer valor de lambda e fck.

Tabela 29 - Recomendação de armadura mínima para as mesas das lajes nervuradas para pavimentos garagem.

DNP (cm)	50	60	65	70	80	90	100
A1-850 (cm <sup>2</sup> /m)	1,499	1,620	1,689	1,808	1,359	1,406	1,113
A2-850 (cm <sup>2</sup> /m)	1,298	1,459	1,522	1,599	1,276	1,348	1,133
A1-650 (cm <sup>2</sup> /m)	1,148	1,241	1,294	1,385	1,041	1,077	0,853
A2-650 (cm <sup>2</sup> /m)	0,998	1,122	1,171	1,230	0,981	1,037	0,871
A1-450 (cm <sup>2</sup> /m)	0,808	0,873	0,911	0,974	0,733	0,758	0,600
A2-450 (cm <sup>2</sup> /m)	0,708	0,795	0,830	0,871	0,696	0,735	0,617
Amin (cm <sup>2</sup> /m)	0,865	0,865	0,865	0,865	1,038	1,038	1,211

Fonte: (AUTOR, 2011).

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Atualmente nos projetos estruturais vêm sendo usado em grande escala as lajes nervuradas moldadas no local, por serem economicamente mais viáveis que as maciças, quando se projetam vãos de quatro metros em diante, pois, para esses casos, as lajes nervuradas apresentam grandes rigidezes aliadas a baixo custo da obra.

Num projeto de edifício, existem diversos pavimentos, sendo cada um destinado a um uso específico, como: moradia, garagem, lazer, coberta, entre outros. Nos pavimentos de garagem, é onde ocorrem as maiores cargas acidentais provenientes de diferentes tipos de veículos. Os carregamentos acidentais para garagem são recomendados por normas, porém cada norma considera a aplicação de carga acidental diferente.

Todavia, a NBR 6120:1980, em se tratando de carregamento acidental para análise de pavimentos de garagem, não apresenta nenhuma especificação de cargas concentradas transmitidas pelo contato dos pneus de um veículo com a laje, referindo-se, apenas, a cargas por área distribuída para todo o pavimento. Por outro lado, o EuroCode 1:2002 e o IBC (2006) apresentam os valores do peso do veículo que é aplicado no pavimento, em quatro pequenas áreas que representam o contato dos pneus com o piso.

A não consideração pela NBR 6120:1980 de cargas concentradas provenientes do uso de veículos em pavimentos garagens, como as consideradas pelo EuroCode 1:2002 e IBC (2006), pode gerar um dimensionamento que compromete os estados limites de alguns elementos da estrutura.

Dentro desse contexto, este trabalho teve como objetivo contribuir com a análise a flexão da mesa das lajes nervuradas, verificando a distância limite entre eixo de nervuras principais que dispensa a análise de flexão da mesa, tanto para QC (carga do veículo que é transmitida para o pavimento pelo contato do pneu com o mesmo) como para QD (carga distribuída para pavimentos garagem recomendada pela NBR 6120:1980), tendo como variável de controle a armadura mínima recomendada pela NBR 6118:2003. Outro objetivo foi a verificação do comportamento geral das lajes nervuradas, flechas, sob QC e QD, sendo feita uma comparação entre as flechas geradas pelos QD em relação aos QC, com o intuito de obter o valor numérico para o QD que fornece flecha semelhante à gerada pelo QC.

## 5.1 Sobre as Análises das Flechas

As análises das flechas feitas nos exemplos tiveram como objetivo verificar a extensão da validade da recomendação da NBR 6120:1980 de ter como carga acidental para pavimentos garagem apenas uma carga distribuída de  $0,3 \text{ tf/m}^2$ , pois, na realidade, em sua quase totalidade, o real carregamento acidental de um pavimento tipo garagem é composto por veículos, onde a solicitação é transmitida para a laje através dos contatos dos pneus com a laje, ou seja, são praticamente carregamentos concentrados representados pela área de contato do pneu do automóvel com o piso do pavimento. Importante ressaltar que esse carregamento acidental tem influência direta na análise global do comportamento da laje (flecha), que implica verificações de serviço da laje e, por conseguinte, o próprio dimensionamento das nervuras.

Os exemplos para as análises das flechas foram modelados para três valores de  $\lambda$ : 1,0, 1,5 e 2,0, e para quatro valores de carregamentos acidentais, sendo três deles com cargas concentradas, com valores de: 850 kgf, 650 kgf e 450 kgf, e um de carga distribuída de  $0,3 \text{ tf/m}^2$ . Para os carregamentos concentrados, a representação da carga de veículos diz respeito aos tipos caminhonete, sedam e compacto, respectivamente.

Sobre as flechas analisadas, verificou-se que, para os exemplos com o  $\lambda$  igual a 1,0, o QD forneceu flechas maiores que as geradas para os modelos com o QC de 450 kgf e 650 kgf, mas, para os modelos com os QC de 850 kgf, as flechas geradas pelo QD foram menores. Para o  $\lambda$  de 1,5, o QD só gerou flecha maior para os modelos com o QC de 450 kgf, e para o  $\lambda$  de 2,0, o QD apresentou flecha menor para os modelos com os três valores de QC.

Para os modelos analisados em que o QD apresentou flechas menores que os casos com o QC, fica evidente que o QD precisa ser maior, pois ele gera valores de flechas menores do que realmente a estrutura irá apresentar sob os efeitos das cargas veiculares. Por esse motivo, foram definidos valores do QD ao qual a flecha gerada, devido ao mesmo, iguala-se à flecha gerada pelo caso com o QC.

Os valores corrigidos do QD, para que haja igualdade das flechas geradas entre os modelos com o QD em relação ao QC, podem ser resumidos em três casos: q-850, q-650 e q-450, que estão associados às cargas concentradas de 850 kgf, 650 kgf e 450 kgf,

respectivamente, e cada um desses casos apresenta quatro valores de  $\lambda$ , havendo, para cada valor de  $\lambda$ , cinco valores de  $LY$ , conforme exposto na Tabela 26.

Uma questão primordial deve ser considerada em relação aos QD corrigidos: eles foram definidos considerando que a carga veicular atuante no pavimento é de um único tipo, ou seja, apenas de carros com cargas máximas limitadas por roda de até 450 kgf, ou 650 kgf, ou 850 kgf, mas não foi considerada a atuação deles em conjunto, que é o considerado normal em pavimentos de garagem, onde se estacionam todos os tipos de veículos, sem distinguir locais de estacionamento específico para cada tipo.

Segundo o Departamento Nacional de Trânsito, ou DENATRAN, a frota atual brasileira de veículos do tipo compacto, sedam e caminhonete está aproximadamente em 42 milhões, sendo que destes, 10% são de caminhonetes e os outros 90% estão associados aos veículos com suporte de até nove passageiros incluindo o motorista, que são exatamente os veículos mencionados neste trabalho como sedam e compacto. Tomando isso como premissa, podemos afirmar que é muito baixa a probabilidade de, em um pavimento de garagem, uma determinada laje venha a ter apenas veículos do tipo caminhonete estacionados, e gerando as situações mais desfavoráveis para a estrutura.

Portanto, pode-se recomendar, para uso de forma geral nos pavimentos de garagem, como valor de carregamento acidental, o QD corrigido, associado aos veículos de carga máxima de 650 kgf por roda, ou seja, q-650. Essa carga de 650 kgf por roda também é ilustrativa para as caminhonetes na situação em que as mesmas não estão totalmente carregadas, ou seja, estão apenas com passageiros. Apresenta-se a seguir a Tabela 30 com os valores do QD corrigidos, associados apenas ao QC de 650 kgf (q-c). Os valores apresentam duas tendências de aumento, em que uma está relacionada com a diminuição do  $LY$  e a outra ao aumento do  $\lambda$ , portanto, a utilização nos projetos estruturais dos QD mostrados na Tabela 30 fica a critério da geometria da laje:  $\lambda$  e  $LY$ .

Tabela 30 - Valores corrigidos dos QD (q-c), para  $\lambda$  de 1,0, 1,5, 2,0 e 3,0.

$LY$ (m)	4	6	8	10	12
q-c (tf/m <sup>2</sup> ) ( $\lambda$ 1,0)	0,320	0,256	0,196	0,160	0,151
q-c (tf/m <sup>2</sup> ) ( $\lambda$ 1,5)	0,471	0,358	0,252	0,215	0,196
q-c (tf/m <sup>2</sup> ) ( $\lambda$ 2,0)	0,703	0,466	0,303	0,266	0,237
q-c (tf/m <sup>2</sup> ) ( $\lambda$ 3,0)	1,448	0,813	0,467	0,432	0,370

Fonte: (AUTOR, 2011).

## 5.2 Sobre as Análises das Mesas

Outra análise desenvolvida no trabalho foi a da flexão na mesa das lajes nervuradas, tendo como objetivo verificar recomendações diferenciadas existentes entre a NBR 6118:2003 e recomendações internacionais, como a da norma espanhola EHE (1999) e Leonhardt e Monning (1977). A NBR 6118:2003 recomenda que, para DNP de até 65 cm, não é necessário calcular a flexão na mesa, bastando, apenas, adotar como armadura a própria armadura mínima da mesma, sendo que a EHE (1999) e Leonhardt e Monning (1977) recomendam como a DNP, para a qual se pode dispensar a análise da flexão da mesa e adotar uma armadura mínima para combater essa flexão, como sendo 100 cm e 70 cm, respectivamente.

Em virtude disso, para verificar essas diferentes recomendações associadas à dispensa da análise da flexão da mesa, foram calculados os momentos nas mesas para os exemplos com o  $\lambda$  de 1,5, usados nas análises das flechas, onde esses momentos foram calculados para os três valores do QC e também para o QD de 0,3 tf/m<sup>2</sup>. Após os cálculos desses momentos, foram calculadas as respectivas áreas de aço associadas aos mesmos, quando foi verificado que, para pavimentos do tipo garagem, a dispensa da flexão da mesa e a adoção da armadura mínima recomendada pela NBR 6118:2003 não são suficientes, para combater a flexão independente da DNP, ou seja, com a DNP variando de 50 cm a 100 cm, a armadura mínima da NBR 6118:2003 foi insuficiente. Dessa forma, tem-se na sequência a Tabela 31, que apresenta a armadura mínima corrigida (A<sub>min-c</sub>), sendo essa armadura suficiente para se combater a flexão em pavimentos tipo garagem para a situação mais desfavorável de solicitação das mesas, ou seja, uma caminhonete carregada (carga concentrada de 850 kgf).

Tabela 31 - Armadura mínima corrigida para a mesa.

DNP (cm)	50	60	65	70	80	90	100
A <sub>min-c</sub> (cm <sup>2</sup> /m)	1,499	1,620	1,689	1,808	1,359	1,406	1,113

Fonte: (AUTOR, 2011).

Outro ponto importante sobre a análise da flexão na mesa observada nos exemplos é que, para todos os casos analisados, a armadura de aço gerada, devido ao momento proveniente da carga distribuída de 0,3 tf/m<sup>2</sup>, foi menor do que a armadura mínima. Sabendo que a maior armadura gerada pela carga de 0,3 tf/m<sup>2</sup> nos exemplos foi menor

cinco vezes que a armadura mínima, e como a maior carga acidental recomendada pela NBR 6120:1980 é de  $0,75 \text{ tf/m}^2$ , ou seja, 2,5 vezes maior que a carga distribuída utilizada nos exemplos, portanto, no máximo, se a carga distribuída utilizada fosse de  $0,75 \text{ tf/m}^2$ , a área de aço na mesa gerada aumentaria em torno de 3 vezes, ou seja, a armadura mínima ainda teria valor superior. Portanto, pode-se afirmar que, para qualquer tipo de pavimento, com exceção do pavimento garagem, não há necessidade de calcular a flexão da mesa até a DNP de 100 cm, podendo adotar como armadura de flexão a armadura mínima recomendada pela NBR 6118:2003.

### **5.3 Propostas de Trabalhos Futuros**

Como proposta para trabalhos futuros sugere-se:

- Verificar a variação da armadura da mesa com a proximidade dos apoios;
- Análises do comportamento global dos modelos com alternância de cargas, ou seja, exemplos com mais de uma laje, sendo alternado o carregamento acidental entre elas;
- Verificar qual a distribuição de nervuras mais econômica a depender da geometria da laje, ou seja, qual a DNP e DNS ideal para diferentes valores de  $\lambda$  e comprimento do maior vão;
- Análise do comportamento global para lajes maciças, ou seja, o mesmo estudo feito nesse trabalho para as lajes nervuradas.
- Verificar os efeitos da não consideração dos QC para o dimensionamento das nervuras e vigas, e propor formas de contorna tais situações.

## REFERÊNCIAS

2006 **International Building Code**. IBC (2006).

ABDUL-WAHAB, H. M.; KHALIL, M. H. **Rigidity and Strength of Orthotropic Reinforced Concrete Waffle Slabs**. Journal of Structural Engineering, 2000.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Cargas para o cálculo de estruturas de edificações: NBR 6120:1980**. Rio de Janeiro, 1980.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto de estruturas de concreto: NBR 6118:2003**. Rio de Janeiro, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto e execução de obras de concreto armado: NBR 6118:1978**. Rio de Janeiro, 1978.

BOCCHI, C. F.; GIONGO, J. S. **CONCRETO ARMADO: PROJETO E CONSTRUÇÃO DE LAJES NERVURADAS**. São Carlos, 2007.

CARVALHO, R. C. **Análise não-linear de pavimentos de edifícios de concreto através da analogia de grelha**. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo. São Carlos, 1994.

CARVALHO, R. C.; PARSEKIAN, G. A.; FIGUEIRERO FILHO, J. R.; MACIEL, A. M. **Estado da Arte do Cálculo das Lajes Pré-fabricadas com Vigotas de Concreto**. Encontro Nacional de Pesquisa-Projeto-Produção em Concreto Pré-moldado, 1. 2005, São Carlos.

CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. Disponível em:  
[http://www.fec.unicamp/~almeida/ec802/Laje%20Nervurada/LIVRO2\\_CAP1-laje%20nervurada.pdf](http://www.fec.unicamp/~almeida/ec802/Laje%20Nervurada/LIVRO2_CAP1-laje%20nervurada.pdf). Acesso em: 23 de Junho de 2008.

DANTAS, M. F. C.; NASCIMENTO, S. C. S. **Análise Comparativa entre Sistemas Estruturais Convencionais e Estruturas de Lajes Nervuradas em Edifícios**. Salvador. Universidade Católica do Salvador, 2009.

**EHE-99 : Instrucción para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón estructural**. EHE (1999).

**Eurocode 1: Actions on structures — Part 1-1: General actions — Densities, self-weight, imposed loads for buildings**. Eurocode 1:2002.

HAMBLY, E. C. **Bridge deck behaviour**. London, Chapman and Hall, 1976.

FISH, J.; BELYTSCHKO. T. **A First Course in Finite Elements**. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, England , 2007.

LIMA JUNIOR, E. T. **Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Análise de Cascas Abatidas**. São Carlos. Dissertação de mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2006.

LEONHARDT, F.; MONNING, E. **Construções de concreto**. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1978. v.3.

MENDONÇA, P. T. R. Disponível em: <http://www.grante.ufsc.br/mendonca/c2.pdf>. Acesso em: 25 de Setembro de 2010.

OLIVEIRA, D. M. **Estudo dos Processos Aproximados Utilizados para a Consideração das Não-Linearidades Física e Geométrica na Análise Global das Estruturas de Concreto Armado**. Belo Horizonte. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, 2007.

PINHEIRO, L. M. **Fundamentos do concreto e projeto de edificações**. São Carlos, SP, 2007.

REZENDE, M. N. **Análise de pavimentos de edifícios pelo método dos elementos finitos em microcomputador**. São Carlos. Dissertação de mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1990.

SILVA, M. A. **Projeto e construção de lajes nervuradas de concreto armado**. Dissertação de Mestrado em Construção Civil, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2005.

STRAMANDINOLI, J. S. **Contribuições à Análise de Lajes Nervuradas por Analogia de Grelha**. Florianópolis. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2003.

SUSSEKIND, J. C. **Curso de concreto**. Porto Alegre: Editora Globo, 1985. v.1.

TENÓRIO, D. A.; GOMES, P. C. C.; BARBOZA, A. S. R.; UCHÔA, E. L. M. **Aspectos Técnicos e Econômicos de Lajes Nervuradas Unidirecionais e Bidirecionais**. Congresso Brasileiro do Concreto, 51 . 2009, Curitiba-PR.

TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of Plates and Shells**, 1959.

VENTSEL, E.; KRAUTHAMMER, T. **Thin Plates and Shells**. Pennsylvania State University, 2001.