

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CAMPUS DO SERTÃO
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

SIRLANDRO RODRIGUES DE AMORIM

Quatro Aplicações da Álgebra Linear na Engenharia

Delmiro Gouveia - AL
01 de dezembro de 2017

SIRLANDRO RODRIGUES DE AMORIM

Quatro Aplicações da Álgebra Linear na Engenharia

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado do Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas – Campus do Sertão, como parte dos requisitos para obtenção do título de bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Me. Rodrigo Fernandes de Moura Melo

Delmiro Gouveia - AL
01 de dezembro de 2017

A524q Amorim, Sirlandro Rodrigues de
Quatro aplicações da álgebra linear na engenharia / Sirlandro
Rodrigues de Amorim. - 2017.
60f. : il.

Monografia (Engenharia Civil) – Universidade Federal de
Alagoas, Delmiro Gouveia, 2017.

Orientador: Prof. Rodrigo Fernandes de Moura Melo.

1. Álgebra Linear 2. Aplicação. 3. Engenharia.

CDU 512.64

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do Campus Sertão/
UFAL – Delmiro Gouveia

Folha de Aprovação

AUTOR: SIRLANDRO RODRIGUES DE AMORIM

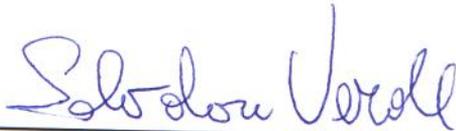
Quatro Aplicações da Álgebra Linear na Engenharia

Este trabalho de conclusão de curso foi julgado adequado para obtenção do título de Engenheiro Civil e aprovado em sua forma final pelo professor orientador e pelo Colegiado do Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas – Campus do Sertão em 01 de dezembro de 2017.



RODRIGO FERNANDES DE MOURA MELO (Orientador)

Banca Examinadora:



SALVATORE VERDE (Examinador Interno)



CARLOS EDUARDO MÜLLER (Examinador Externo)

Ao meu pai, que em sua grandiosa
manifestação de desejo e alegria pela vida
transformou minha visão sobre o ser humano.

AGRADECIMENTOS

A Deus, primeiramente, por ter me abençoado com verdadeiros amigos e por me permitir acordar todos os dias sabendo que não estou só.

À minha mãe, Irene Martins Rodrigues, por tudo que representa para mim, pelo amor, carinho e compreensão nos momentos difíceis.

À minha querida noiva, Bruna Cristine Santos Lima, por estar ao meu lado dando o apoio e o amor dos quais precisei e pela paciência que teve durante esses anos.

Ao meu primo-irmão-amigo, Jaílson Rodrigues Pereira, por jamais me negar ajuda e por ter sido uma grande inspiração em minha vida.

Ao meu amigão, Rodrigo Januário de Melo, pela nossa parceria, por ter me motivado quando precisei.

À Universidade Federal de Alagoas, por ter possibilitado esta realização e a todos os meus professores. Em especial, ao meu orientador, Me. Rodrigo Fernandes de Moura Melo, por todo apoio, ensinamentos, dedicação e paciência.

Enfim, agradeço aos meus professores da escola, Antônio Júnior, Ana Márcia, Ana Vilma e Poliana, pela contribuição em minha construção como pessoa.

“Tenho a impressão de ter sido uma criança brincando à beira-mar, divertindo-me em descobrir uma pedrinha mais lisa ou uma concha mais bonita que as outras, enquanto o imenso oceano da verdade continua misterioso diante de meus olhos”.

(Isaac Newton)

RESUMO

AMORIM, S. R. (2017). Quatro Aplicações da Álgebra Linear na Engenharia. (Monografia de Graduação) – Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas, Delmiro Gouveia, 2017.

Este trabalho é direcionado, principalmente, aos estudantes de Engenharia e tem como foco principal apresentar aplicações da Álgebra Linear nesse campo, com o intuito de motivar os graduandos em Engenharia, relacionando a teoria com a realidade dos problemas que, certamente, enfrentarão no exercer das suas atividades profissionais. Neste contexto, são apresentadas quatro aplicações. A primeira delas trata de circuitos elétricos básicos, onde é mostrado que é possível determinar as tensões e as correntes elétricas de um circuito por meio da resolução de um sistema linear, conteúdo básico da disciplina de Álgebra Linear. A segunda aplicação utiliza os conceitos sobre transformações lineares para determinar o posicionamento de um braço robótico no plano e que, para este fim, é necessário utilizar composição de matrizes de rotação e translação em eixos definidos. A terceira aplicação envolve sistemas de equações lineares de primeira ordem para descrever as equações de posição e velocidade de um sistema de uma mola presa à parede com uma partícula de massa m em sua extremidade. Para se chegar a tais equações não foi considerada a presença de atrito e de outras forças externas. Utilizando a Segunda Lei de Newton juntamente com a Lei de Hooke para a mola, foi possível chegar a uma equação linear de segunda ordem para o posicionamento da partícula e, em seguida, foi possível resolver o problema por meio de um sistema de equações de primeira ordem que forneceu, simultaneamente, as equações de velocidade e deslocamento dos sistema da mola. Devido à natureza senoidal da solução encontrada o sistema mecânico da mola é conhecido como oscilador harmônico simples. A quarta aplicação, ainda relacionada a sistemas de equações lineares de primeira ordem, trata do deslocamento dos andares de um edifício devido a um terremoto. Para tal, foi utilizada a problematização envolvendo um terremoto e seu impacto sobre um prédio com n andares, usando-se conceitos de Mecânica Newtoniana, como a Segunda Lei de Newton e a Lei de Hooke. Para a Modelagem Matemática, utilizou-se como base um sistema de n equações diferenciais de segunda ordem, em que cada equação do sistema descreve/modela o efeito do abalo sísmico no n -ésimo andar de um edifício.

Palavras – Chave: Aplicação; Engenharia; Álgebra Linear.

ABSTRACT

AMORIM, S. R. (2017). Quatro Aplicações da Álgebra Linear na Engenharia. (Monografia de Graduação) – Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas, Delmiro Gouveia, 2017.

This work is mainly directed to Engineering students and has like main focus to present applications of Linear Algebra in this field, with the purpose of motivating Engineering graduates, relating the theory with the reality of the problems that will certainly face in the exercise of their professional activities. In this context, four applications are presented. The first one deals with basic electrical circuits, where it is shown that it is possible to determine the voltages and electrical currents of a circuit by solving a linear system, basic content of the Linear Algebra discipline. The second application uses the concepts in linear transformations to determine the positioning of a robotic arm in the plane and that, for this purpose, it is necessary to use composition of rotational and translational matrices in defined axes. The third application involves systems of first order linear equations to describe the equations of position and velocity of a system of a spring attached to a wall with a particle of mass m at its end. To get such equations it was not considered presence of friction and other external forces. Using Newton Second Law with Hooke Law for the spring, it was possible to arrive at a second order linear equation for the positioning of the particle and then it was possible to solve the problem by means of a system of first order equations which have provided, simultaneously, equations of velocity and displacement of the spring system. As a consequence of the sinusoidal nature of the solution found, the mechanical system of the spring is known as a simple harmonic oscillator. The fourth application, still related to systems of linear equations of the first order, deals with the displacement of the floors of a building because an earthquake. For that, a problem was used involving an earthquake and its impact on a n floors building, using concepts of Newtonian Mechanics, like Newton's Second Law and Hooke's Law. For Mathematical Modeling, it was used as basis a system of n second order differential equations, where each system equation's describes / models the effect of the seismic shock on the n th floor of a building.

Keywords: Application; Engineering; Linear algebra.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1: Representação de um circuito simples

FIGURA 2: Circuito com quantidades físicas estabelecidas

FIGURA 3: Sentido das correntes nas malhas

FIGURA 4: Esquema de articulações

FIGURA 5: Posição inicial (a); Posição final (b)

FIGURA 6: Rotação de um vetor

FIGURA 7: Translação na direção do vetor t

FIGURA 8: Plano xy adaptado

FIGURA 9: Rotação e translação (a); Translação e rotação (b)

FIGURA 10: Braço em posição inicial (a); Braço em posição final e indicação dos eixos (b)

FIGURA 11: Transformação do referencial A^0 para o referencial A^2

FIGURA 12: Posição inicial do braço robótico

FIGURA 13: Mola em posição de equilíbrio

FIGURA 14: Esquema de forças

FIGURA 15: Comparação de edifício com isolamento e com base fixa

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Considerações Iniciais	12
1.2	Justificativa	13
1.3	Objetivo Geral.....	13
1.4	Objetivos Específicos	14
2	CIRCUITOS ELÉTRICOS.....	15
2.1	Método de Gauss – Jordan	15
2.2	Circuitos Elétricos.....	19
2.3	Determinando as correntes pelo método de Gauss-Jordan	23
3	POSICIONAMENTO DE UM BRAÇO ROBÓTICO	25
3.1	Transformações Lineares.....	26
3.1.1	<i>Transformações Lineares e Matrizes.....</i>	<i>27</i>
3.1.2	<i>Composição de Transformações.....</i>	<i>28</i>
3.2	Rotação no Plano	28
3.3	Translação no Plano	30
3.3.1	<i>O Plano xy Adaptado.....</i>	<i>31</i>
3.4	Aplicação do Braço Robótico no Plano	33
4	APLICAÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM.....	39
4.1	Equação Diferencial Ordinária Linear de Primeira Ordem	39
4.1.1	<i>Discussão da Solução de Equações Lineares e Não-Lineares</i>	<i>40</i>
4.2	Equações Lineares de Ordem Mais Alta	41
4.3	Sistemas de Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem	41

4.4	Autovalores e Autovetores.....	42
4.5	O Oscilador Harmônico Simples.....	50
4.6	O Deslocamento dos Andares de um Edifício Devido a um Terremoto	54
4.6.1	<i>Frequências Naturais de Vibração.....</i>	<i>54</i>
5	CONCLUSÃO	59
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Iniciais

O estudo da álgebra linear, apresentada como disciplina obrigatória em diversos cursos universitários como Matemática, Física e Engenharias, geralmente é de difícil assimilação pelos estudantes.

Ao iniciar um curso como Engenharia Civil, o aluno procura relacionar os conteúdos curriculares às suas aplicações práticas para, assim, entender a importância desse estudo. Porém, quando o assunto é álgebra linear, é notável o alto índice de desinteresse e a alta taxa de reprovação dos alunos de graduação. Por ser uma disciplina muito abstrata, sua didática dedica-se quase que inteiramente a explicações e demonstrações do ponto de vista geral, muitas vezes deixando de lado suas aplicações.

Dando foco aos cursos de Engenharia, é de grande importância apresentar aos alunos os grandes avanços provindos da aplicação da álgebra linear. Com a informática e o desenvolvimento de programas cada vez mais sofisticados, vários modelos lineares possibilitaram algumas aplicações dos conteúdos da disciplina na modelagem matemática de problemas e situações concretas em engenharia como: (POFFO, 2011)

- Equações lineares em decisões gerenciais;
- Circuitos eletrônicos e exploração de petróleo;
- Álgebra matricial em computação gráfica;
- Determinantes em cálculo de áreas de volumes de sólidos poliédricos;
- Espaços vetoriais em sistemas de controle;
- Autovalores e autovetores em sistemas dinâmicos, entre outros;

Neste trabalho, serão apresentadas 4 (quatro) aplicações da álgebra linear na Engenharia, de forma bastante didática. São elas:

- Circuitos Elétricos;
- Posicionamento de um braço robótico;
- Aplicação de Sistemas de Equações Diferenciais de Primeira Ordem:
 - O oscilador harmônico simples
 - O deslocamento dos andares de um edifício devido a um terremoto.

1.2 Justificativa

Todo profissional da área de engenharia deve procurar soluções para problemas que surgem ao exercer a profissão. Para isso, é necessário saber utilizar a melhor ferramenta que viabilize seu trabalho e tomar decisões que otimizem, conjuntamente, tempo e recursos.

Dessa forma, é preciso que tal profissional tenha uma boa base acadêmica. Porém, uma pesquisa do Sistema de Transparência da UFF (Universidade Federal Fluminense) aponta uma alta taxa de reprovação em disciplinas como Cálculo diferencial e integral, Geometria Analítica, Física e Álgebra Linear, sendo esta última uma das que mais reprovam e retêm alunos nos cursos de graduação.

Estudar Álgebra Linear não é uma tarefa fácil, requer muito esforço do aluno e é um grande desafio, pois é costume o conteúdo ser apresentado de modo abstrato deixando de lado as aplicações. Essa deficiência na exposição acaba muitas vezes desmotivando o discente, que se dedica a disciplina apenas para cumprir a grade curricular.

1.3 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho consiste em motivarmos graduandos em engenharia a se dedicarem ao estudo da Álgebra Linear, através da exposição de quatro aplicações dessa disciplina às Engenharias, a saber: circuitos elétricos,

posicionamento de um braço robótico, o oscilador harmônico simples e modelo de deslocamento de andares de um edifício por meio de sistemas de equações diferenciais.

1.4 Objetivos Específicos

Tendo como foco a formação de profissionais, os objetivos específicos deste trabalho são:

- Mostrar a relação da Álgebra Linear com disciplinas da grade curricular por meio das aplicações.
- Situar o aluno na disciplina e apontar a relação direta com a profissão de engenheiro; e
- Contribuir para a melhoria do índice de aprovação dos alunos de engenharia nesta disciplina;

Este trabalho encontra-se organizado de modo que o discente não precise recorrer o tempo todo a um livro de Álgebra Linear. Em cada capítulo, encontra-se uma breve exposição dos conteúdos de Álgebra Linear necessários ao entendimento da aplicação correspondente.

No Capítulo 2 discutimos circuitos elétricos e sua relação com a solução de sistemas lineares. Inicialmente são apresentados alguns conceitos sobre sistemas lineares. Em seguida é feita uma abordagem sobre circuitos elétricos e sobre as leis que descrevem seu comportamento, finalizando o capítulo com a resolução de um circuito. No Capítulo 3 discutimos sobre o deslocamento de um braço robótico e sua relação com transformações lineares. Inicialmente é apresentado um modelo de braço robótico e, em sequência, toda a conceituação necessária sobre transformações lineares para o estudo do posicionamento no braço robótico no plano. Como complemento, no final do capítulo é apresentado o estudo do posicionamento do braço robótico no espaço. No Capítulo 4 discutimos sobre o oscilador harmônico simples e sobre um modelo de deslocamento de andares de um edifício por meio de sistemas de equações diferenciais. Para isso, o capítulo começa com o estudo necessário sobre equações diferenciais ordinárias e sistemas de equações diferenciais, finalizando com as aplicações.

2 CIRCUITOS ELÉTRICOS

2.1 Método de Gauss – Jordan

Um sistema de equações lineares é dito na forma aumentada quando na sua forma matricial aparecem apenas os coeficientes das variáveis na mesma posição em que estas são apresentadas. Tomando como exemplo o sistema linear abaixo

$$x + y + 2z = 9$$

$$2x + 4y - 3z = 1$$

$$3x + 6y - 5z = 0$$

sua forma aumentada é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Uma matriz está na forma escalonada quando atende aos seguintes critérios:

1. Se uma linha não consistir só de zeros, então o primeiro número não-nulo da linha é 1, que recebe o nome de líder ou pivô;
2. Caso haja linhas de zeros, estas devem ficar juntas na parte inferior da matriz;
3. Em duas linhas sucessivas que não contenham apenas zeros, o líder da linha inferior deve ficar posicionado mais à direita que o líder superior;
4. Para que a matriz fique na forma escalonada reduzida por linhas, é necessário que cada coluna que contenha um líder tenha zeros nas demais entradas. Neste último caso, sendo o sistema consistente, a solução fica evidente (KOLMAN, 2011).

O método de Gauss-Jordan é um método de escalonamento que consiste em aplicar operações elementares (multiplicar uma linha por um escalar não-nulo, substituir uma linha por ela somada a outra ou trocar duas linhas de posição) às

linhas da matriz aumentada de um sistema, até que ela esteja na forma escalonada reduzida (ANTON, HOWARD, 2001).

Para escalonar uma matriz basta aplicar operações elementares sobre as linhas. As operações visam à colocação dos líderes e às entradas de zeros. Assim, deve-se multiplicar uma linha inteira por uma constante não-nula, trocar duas linhas entre si ou ainda somar múltiplos convenientes de uma linha a outra.

Sabe-se da Álgebra Linear que ao aplicarmos as operações elementares às linhas da matriz aumentada, o conjunto solução do sistema correspondente não é alterado.

EXEMPLOS

Ex.1: Encontre a solução do sistema abaixo

$$x + y + 3z = 0$$

$$x - 2y + z = 3$$

$$3x + 5y - z = -2$$

Colocando a matriz na forma aumentada tem-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & -1 & -2 \end{array} \right]$$

1) Multiplicar a linha 1 por -1 e somar à linha 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -1 & -2 \end{array} \right]$$

2) Multiplicar a linha 1 por -3 e somar à linha 3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -10 & -2 \end{array} \right]$$

3) Dividir a linha 3 por 2 e trocar com a linha 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \end{array} \right]$$

4) Multiplicar a linha 2 por 3 e somar à linha 3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -17 & 0 \end{array} \right]$$

5) Dividir a linha 3 por -17

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

6) Multiplicar a linha 2 por -1 e somar à linha 1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

7) Multiplicar a linha 3 por 5 e por -8 e somar às linhas 2 e 3, respectivamente

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Logo, o conjunto solução é $\{x, y, z\} = \{1, -1, 0\}$.

Ex. 2: Encontre a solução do sistema abaixo

$$x + 2y + z = 2$$

$$x - y - 2z = 8$$

$$2x + y - z = 10$$

Colocando a matriz na forma aumentada, tem-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 10 \end{array} \right]$$

1) Trocar a linha dois pela linha 3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & -2 & 8 \end{array} \right]$$

2) Multiplicar a linha 1 por -2 e depois por -1 e somar às linhas 2 e 3, respectivamente

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \end{array} \right]$$

3) Dividir as linhas 2 e 3 por -3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

4) Multiplicar a linha 2 por -1 e somar à linha 3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

5) Multiplicar a linha 2 por -2 e somar à linha 1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Conjunto solução $\{x = 6 + z; y = -2 - z; z\}, \forall z \in \mathbb{R}$

Ex. 3: Encontre a solução do sistema

$$x - 3y = 3$$

$$2x - 6y = 1$$

A matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 2 & -6 & 1 \end{array} \right]$$

1) Multiplicar a linha 1 por -2 e somar à linha 2

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{array} \right]$$

Conjunto solução = \emptyset .

Sempre que em um sistema linear o número de equações e de incógnitas é igual, a existência de solução única é determinada pela dependência linear entre as linhas da matriz T formada pelos coeficientes do sistema.

No Ex. 1, as três linhas de T são linearmente independentes e o sistema possui solução única. Quando as linha de T não são linearmente independentes o sistema pode possuir infinitas soluções (Ex.2) ou não possuir solução (Ex.3).

2.2 Circuitos Elétricos

Um circuito elétrico é composto, basicamente, por geradores e resistores. Os geradores criam correntes elétricas que têm suas magnitudes limitadas pelos resistores (Figura 1).

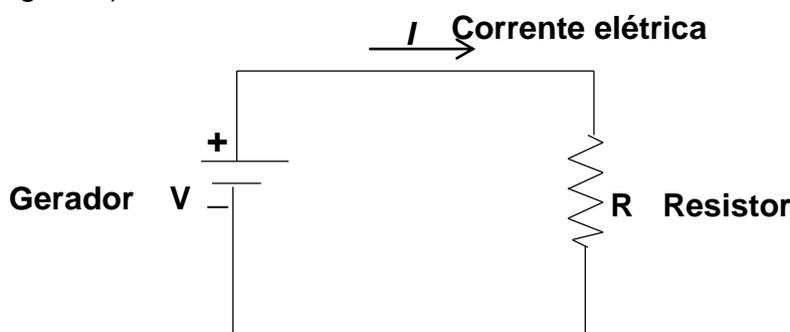


Figura 1: Representação de um circuito simples
FONTE: autor

Os circuitos elétricos possuem três quantidades físicas básicas: o potencial elétrico V (em volts = V), a resistência R (em ohms = Ω) e a corrente elétrica I (em ampères = A).

Um exemplo básico de gerador é uma bateria, que mantém uma diferença de potencial constante entre seus dois terminais.

O resistor é responsável por gerar uma queda de potencial ao resistir a intensidade da corrente elétrica. Essa energia pode ser dissipada, por exemplo, de forma térmico-luminosa, como no caso das lâmpadas, ou de forma térmica como no caso de um chuveiro elétrico (SERWAY, 2011).

Os resistores podem ser posicionados em série ou em paralelo. Quando a corrente elétrica é contínua nos resistores então estes estão em série; quando há divisão de corrente, então estão em paralelo (HALLIDAY, 2011).

Uma das maiores necessidades para montagem de um circuito ou para sua avaliação é descobrir qual a corrente elétrica em cada trecho do circuito, assim como as quedas de potencial. As intensidades de corrente e as quedas de tensão podem ser tanto positivas quanto negativas, isso vai depender do fluxo da corrente no circuito, sendo este governado por três princípios básicos:

1. **A Lei de Ohm:** A diferença de potencial através de um resistor é o produto da corrente que passa por ele e a resistência; ou seja

$$V = RI$$

2. **A Lei de Corrente de Kirchhoff:** Em qualquer junção ou nó (ponto de ramificação) em um circuito onde a corrente pode se dividir, a soma das correntes que chegam no nó devem ser iguais a soma das correntes que saem do nó.

$$I = I_1 + I_2$$

3. **A Lei das malhas ou Lei de Voltagem de Kirchhoff:** Ao percorrer qualquer malha fechada, a soma algébrica das variações no potencial ao longo da malha deve ser igual a zero (TIPLER, PAUL ALLEN, 1993).

Com essas informações, é possível determinar as correntes I_1, I_2 e I_3 do circuito mostrado na (Figura 2).

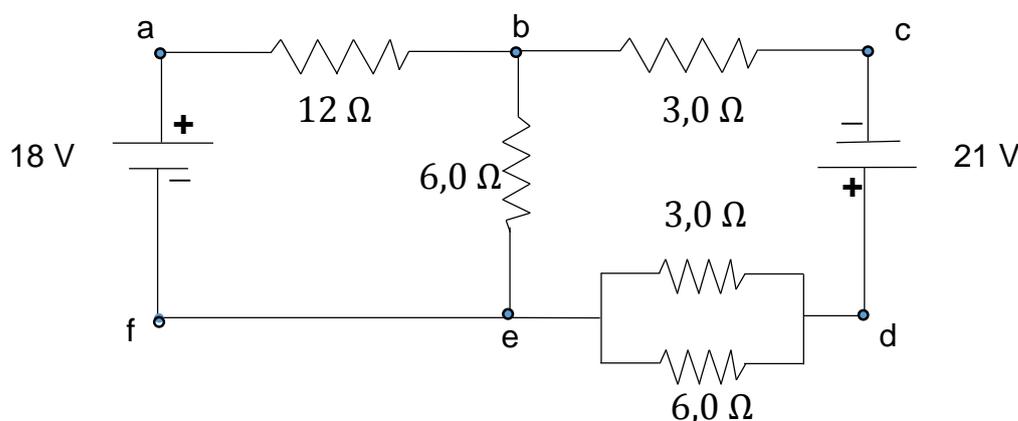


Figura 2: Circuito com quantidades físicas estabelecidas

FONTE: Tipler, Paul Allen, 1993.

Este circuito apresenta dois resistores em paralelo que podem ser substituídos por uma resistência equivalente R_{eq} , onde

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Assim:

$$R_{eq} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \Omega$$

É necessário admitir um sentido para a corrente e identificar cada corrente no ramo. Caso a corrente resulte em um valor negativo, significa que o fluxo é o oposto ao tomado inicialmente. Estas correntes nos ramos podem ser identificadas aplicando-se a lei dos nós na junção b ou e, juntamente com a lei das malhas duas vezes.

O circuito pode ser redesenhado (Figura 3) para as correntes e seus sentidos na malha.

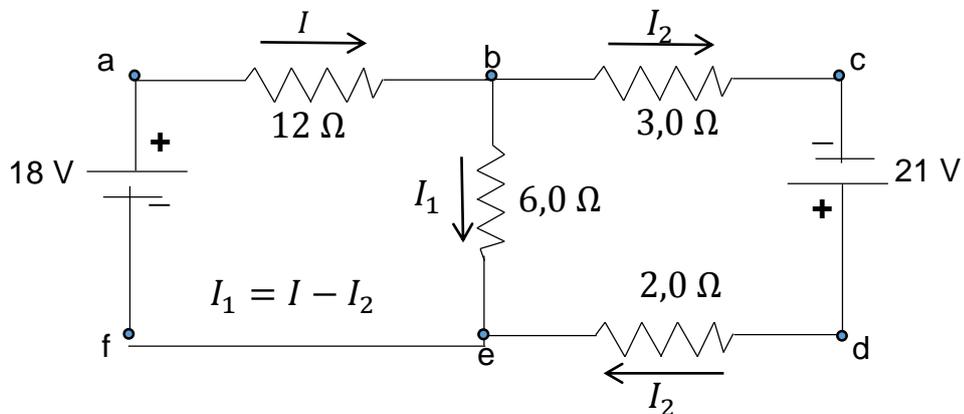


Figura 3: Sentido das correntes nas malhas

FONTE: Tipler, Paul Allen, 1993.

Aplicando a lei dos nós em b, tem-se:

$$I = I_1 + I_2$$

Aplicando a lei das malhas em *abefa* obtém-se uma equação que envolve I e I_1 .

$$18 V - (12 \Omega)I - (6,0 \Omega)I_1 = 0$$

Aplicando a lei das malhas em *bcdeb* obtém-se outra equação que envolve I_1 e I_2 .

$$-(3,0 \Omega)I_2 + 21 V - (2,0 \Omega)I_2 + (6,0 \Omega)I_1 = 0$$

Agora é necessário resolver o sistema de equações lineares para determinar as correntes.

$$I = I_1 + I_2 \quad (i)$$

$$18 - 12I - 6I_1 = 0 \quad (ii)$$

$$21 - 5I_2 + 6I_1 = 0 \quad (iii)$$

Dividindo a equação (ii) por 6:

$$I = I_1 + I_2 \quad (i)$$

$$3 - 2I - I_1 = 0 \quad (ii)$$

$$21 - 5I_2 + 6I_1 = 0 \quad (iii)$$

A matriz aumentada para este sistema é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -5 & 21 \end{array} \right]$$

Esse sistema é consistente, possui solução única, pois apresenta o número de equações igual ao número de incógnitas e a matriz dos coeficientes possuem linhas linearmente independentes.

De modo geral, ao se deparar com um sistema como esse, um estudante deve utilizar algum método para resolução de sistemas lineares. Dentre alguns deles estão o método de Gauss-Jordan, a regra de Cramer, a retro-substituição e métodos computacionais. Aqui, o sistema será resolvido pelo método de Gauss-Jordan,

representado o sistema na forma matricial e encontrando a solução por meio de escalonamento.

2.3 Determinando as correntes pelo método de Gauss-Jordan

O sistema inicial é dado por:

$$I - I_1 - I_2 = 0$$

$$-2I - I_1 + 0I_2 = -3$$

$$0I + 6I_1 - 5I_2 = -21$$

Representando na forma aumentada, tem-se:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -5 & -21 \end{array} \right]$$

Passo 1: multiplicar a primeira linha por 2 e somar o resultado à linha 2.

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & -5 & -21 \end{array} \right]$$

Passo 2: multiplicar a linha 2 por 2 e somar o resultado à linha 3.

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -9 & -27 \end{array} \right]$$

Passo 3: multiplicar a linha 3 por $\frac{-1}{9}$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Passo 4: multiplicar a linha 3 por 1 e somar à primeira e depois por 2 e somar à segunda.

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Passo 5: multiplicar a linha 2 por $\frac{-1}{3}$ e manter, depois somar o resultado à linha 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Assim, tem-se $I = 2,0A$, $I_1 = -1,0A$ e $I_2 = 3,0 A$. Como a corrente I_1 resultou em valor negativo, o seu sentido na malha é o oposto do indicado inicialmente.

Utilizando $V = R_{eq} \cdot I_2$, pode-se determinar a queda de potencial na combinação em paralelo formada pelos resistores de resistência de $3,0 \Omega$ e $6,0 \Omega$. Assim:

$$V = 2 \cdot 3 = 6,0 \text{ Volts}$$

Fazendo $I_2 = I_3 + I_4$, tem-se para o resistor de $3,0 \Omega$:

$$6 = 3 \cdot I_3$$

$$I_3 = 2 A$$

E para o resistor de $6,0 \Omega$:

$$6 = 6 \cdot I_4$$

$$I_4 = 1,0 A$$

Nota-se a importância da utilização de um sistema de equações lineares, assunto básico da disciplina de Álgebra Linear.

O circuito apresentado possui apenas 3 malhas, porém existem circuitos com inúmeras malhas, o que gera uma grande quantidade de equações com n variáveis.

Caso os sistemas lineares sejam muito grandes, dificultado o cálculo à mão, é fácil implementar tais sistemas em programas específicos como, por exemplo, o MatLab, que já possui algoritmos prontos para resolver esse tipo de problema.

3 POSICIONAMENTO DE UM BRAÇO ROBÓTICO

Um braço robótico é um dispositivo dotado de articulações (Figura 4) programado para executar atividades com inúmeras finalidades e destinado, principalmente, a substituir a atividade física do homem nas tarefas repetitivas, perigosas e que muitas vezes exigem precisão e cuidado redobrados (ALMEIDA, 2015)

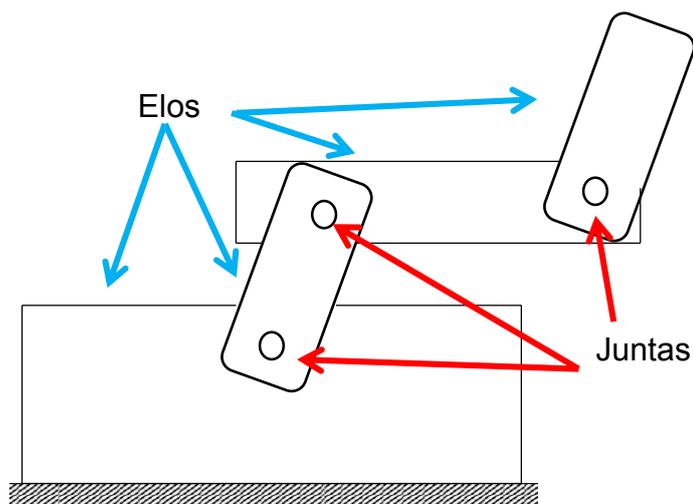


Figura 4: Esquema de articulações
FONTE: Autor

Nesta aplicação da Álgebra Linear, será possível entender como se dá a dinâmica de um braço robótico levando-se em consideração apenas as suas variações de posição no plano e no espaço por meio da descrição matemática.

Inicialmente, considere a representação no plano de um braço robótico com apenas dois graus de liberdade (Figura 5-a).

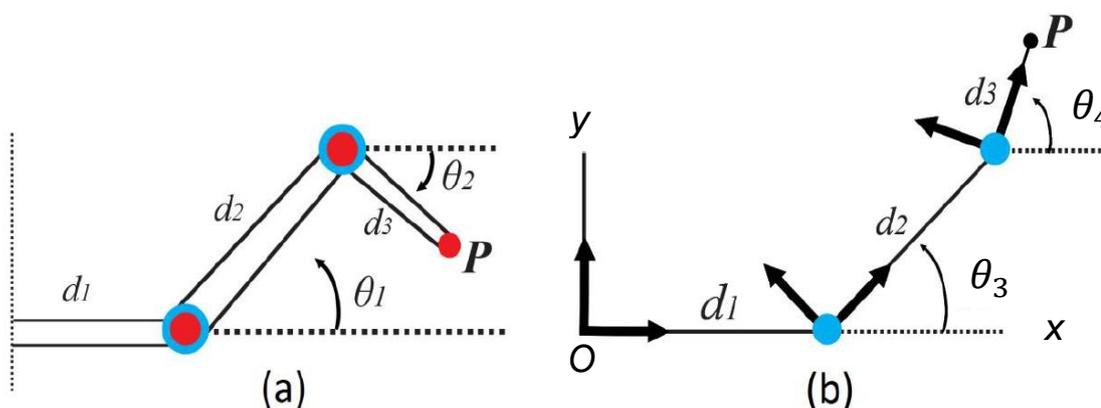


Figura 5: Posição inicial (a); Posição final (b)
FONTE: ALMEIDA, 2015 (adaptado)

Nessa representação estão indicados os comprimentos d_1 , d_2 e d_3 dos elos, e os ângulos da posição inicial do braço com base no ponto P. Ao executar um movimento no plano, obtém-se uma nova configuração como mostra o esquema da (Figura 5-b). Como efeito desse movimento, o ponto P, de coordenadas iniciais (x_0, y_0) , agora apresenta coordenadas (x_1, y_1) .

O problema consiste em determinar as novas coordenadas de P e veremos que, para isso, é necessário conhecimento de conteúdos específicos da Álgebra linear, como transformações lineares, mais especificamente as combinações das transformações de rotação e translação, que geram os elementos para construção de uma matriz M, responsável pela obtenção das novas coordenadas.

3.1 Transformações Lineares

Uma transformação linear é uma função da forma $T: R^n \rightarrow R^m$ que leva ou aplica R^n em R^m e que deve satisfazer a seguintes condições:

- 1) $T(v + w) = T(v) + T(w)$;
- 2) $T(kv) = kT(v)$ para qualquer escalar k .

Ex. 1: A transformação $T: R^2 \rightarrow R^3$ dada por:

$$T(x) = T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 3x_1 + x_2, -4x_1 - 2x_2)$$

é uma transformação linear uma vez que:

- 1) $T(x + y) = T(x) + T(y)$
 $T(x) + T(y) = (x_1 + x_2, 3x_1 + x_2, -4x_1 - 2x_2) + (y_1 + y_2, 3y_1 + y_2, -4y_1 - 2y_2)$
 $T(x + y) = (x_1 + y_1 + x_2 + y_2, 3x_1 + 3y_1 + x_2 + y_2, -4x_1 - 4y_1 - 2x_2 - 2y_2)$
- 2) $T(kx) = kT(x)$
 $= (kx_1 + kx_2, 3kx_1 + kx_2, -4kx_1 - 2kx_2) = k(x_1 + x_2, 3x_1 + x_2, -4x_1 - 2x_2)$

Em particular

$$T(1, 3) = (1 + 3, 3 \cdot 1 + 3, -4 \cdot 1 - 2 \cdot 3) = (4, 6, -10)$$

e ainda $T(0,0) = (0,0,0)$.

É fácil mostrar que toda transformação linear sempre leva a origem do R^n na origem do R^m , conforme verificamos no exemplo acima. Dito de outro modo, se uma aplicação $T: R^n \rightarrow R^m$ é tal que $T(0) \neq 0$, então T não é linear.

3.1.1 Transformações Lineares e Matrizes

Toda matriz $A_{m \times n}$ induz uma transformação linear $T: R^n \rightarrow R^m$. Basta definir $T(x) = Ax$; onde o vetor x é identificado com uma matriz coluna com n linhas. Assim, por exemplo, considere a matriz A e o vetor x abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

então A induz a transformação matricial $T: R^3 \rightarrow R^2$ dada por $x \rightarrow Ax$

$$A(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y + 3z \\ x + 2y \end{bmatrix} = (2x + y + 3z, x + 2y)$$

De modo recíproco, toda transformação linear $T: R^n \rightarrow R^m$ pode ser representada de forma matricial, isto é, sempre existe uma matriz $A_{m \times n}$ tal que $T(x) = Ax$. A matriz que representa a transformação linear do exemplo 1 é:

$$T(x) = T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 3x_1 + x_2, -4x_1 - 2x_2)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

3.1.2 Composição de Transformações

Dadas duas transformações:

$$T_1 = R^n \rightarrow R^m$$

e

$$T_2 = R^m \rightarrow R^k$$

e suas respectivas matrizes A_1 e A_2 , isto é:

$$T_1(v) = A_1v$$

$$T_2(w) = A_2w$$

A composição $T_3 = T_2 \circ T_1$, de T_1 com T_2 , é tal que:

$$T_3 = T_2 \circ T_1 = R^n \rightarrow R^k$$

onde,

$$T_3 = (A_1 \cdot A_2)v, \quad \forall v \in R^n$$

Assim, a matriz que representa T_3 é o produto das matrizes que representam T_2 e T_1 , nessa ordem (ANTON, HOWARD, 2001).

3.2 Rotação no Plano

A transformação linear que gira um vetor em R^2 por um ângulo fixado θ é chamada de rotação.

Com o auxílio da (Figura 6), não é difícil encontrar a matriz de rotação em R^2 .

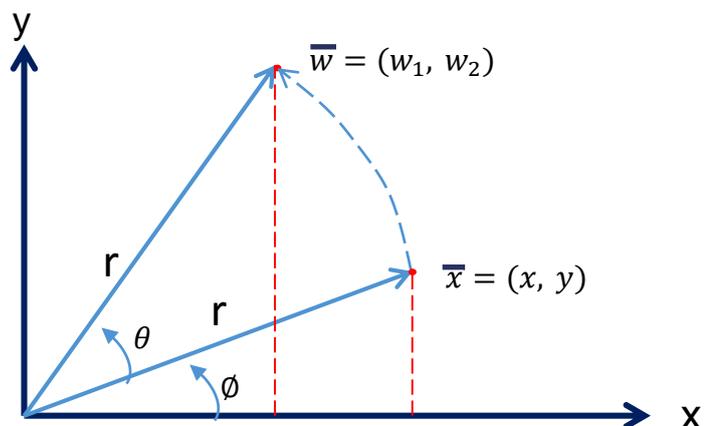


Figura 6: Rotação de um vetor

FONTE: Autor

Considere o operador que gira o vetor no sentido anti-horário por um ângulo positivo θ fixado. A relação de \mathbf{x} com $\mathbf{w} = T(\mathbf{x})$, vem das relações:

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$

e

$$\begin{aligned} w_1 &= r \cos(\theta + \phi) \\ w_2 &= r \sin(\theta + \phi) \end{aligned}$$

da trigonometria

$$\begin{aligned} w_1 &= r \cos \phi \cos \theta - r \sin \phi \sin \theta \\ w_2 &= r \sin \phi \cos \theta + r \cos \phi \sin \theta \end{aligned}$$

fazendo

$$w_1 = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$w_2 = x \sin \theta + y \cos \theta$$

A matriz de transformação em R^2 é, portanto:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

e

$$T(v) = T(x, y) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

3.3 Translação no Plano

Seja o ponto P da (Figura 7), a translação deste ponto na direção do vetor não-nulo t é dada por:

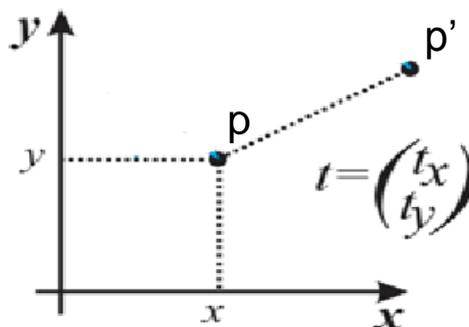


Figura 7: Translação na direção do vetor t

FONTE: ALMEIDA, 2015 (adaptado)

$$p' = p + t$$

em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

Ou ainda,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

Observe que a translação não é uma transformação linear, pois $T(0) \neq 0$.

$$T(0) = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

Esse resultado não preserva a origem como nas transformações lineares.

Porém, é possível adaptar a translação para que se possa representa-la como uma matriz. É o que faremos na próxima seção.

3.3.1 O Plano xy Adaptado

Observe a (Figura 8). Identifique o ponto $(x,y) \in R^2$ com o ponto $(x, y, 1)$ no plano $z = 1$ em R^3 .

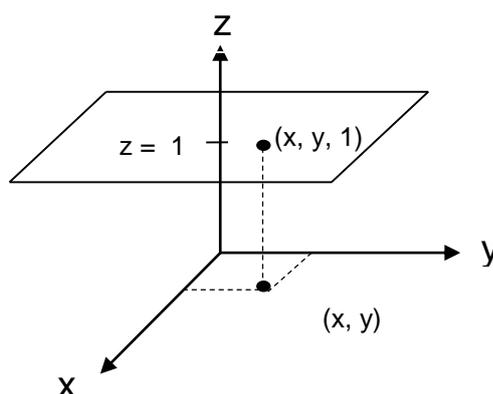


Figura 8: Plano xy adaptado

FONTE: Autor

Considere no plano $z = 1$ as operações

$$(x_1, y_1, 1) + (x_2, y_2, 1) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 1)$$

e

$$k(x, y, 1) = (kx, ky, 1), \quad k \in R$$

É imediato verificar que o plano $z = 1$ com as operações acima definidas é um espaço vetorial que a partir de agora denotaremos por S . Note que $(0, 0, 1)$ é o vetor nulo de S .

Fixado um vetor $t=(t_1, t_2, 1)$ não-nulo em S , considere agora a transformação $T: S \rightarrow S$, dada por

$$T(x, y, 1) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_1 \\ y + t_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Essa transformação é equivalente a translação no plano e não é linear, pois

$$T(0, 0, 1) = (t_1, t_2, 1) \neq (0, 0, 1)$$

Contudo $T: S \rightarrow S$ pode ser representada de forma matricial do seguinte modo

$$T(x, y, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por outro lado toda transformação linear $F: R^2 \rightarrow R^2$ no plano, com representação matricial

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Está associada a transformação linear $F: S \rightarrow S$ dada por

$$F(x, y, 1) = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Em particular, a rotação no plano está associada à transformação $F: S \rightarrow S$, dada por:

$$R(x, y, 1) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

O motivo para fazermos todas essas identificações é que através delas podemos representar a composição de uma translação $T: S \rightarrow S$ com uma aplicação linear $F: S \rightarrow S$ como um produto de matrizes.

Assim, por exemplo a composição de uma rotação no plano com uma translação no plano $T \circ R: S \rightarrow S$, é dada por:

$$T_{oR}(x, y, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & t_1 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

É necessário observar que a ordem da composição é importante. Isto é $RoT \neq ToR$. A (Figura 9-a) e (Figura 9-b), abaixo, ilustram essa diferença

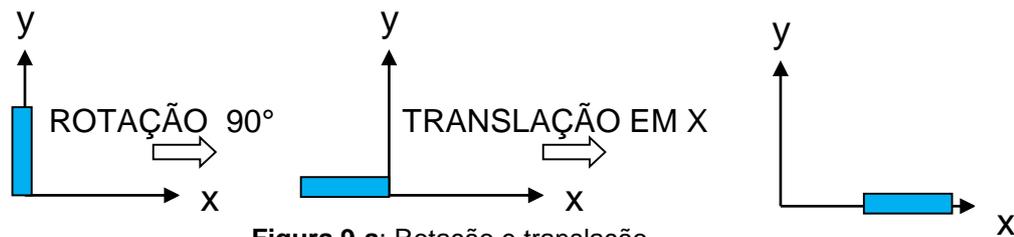


Figura 9-a: Rotação e translação

FONTE: Autor

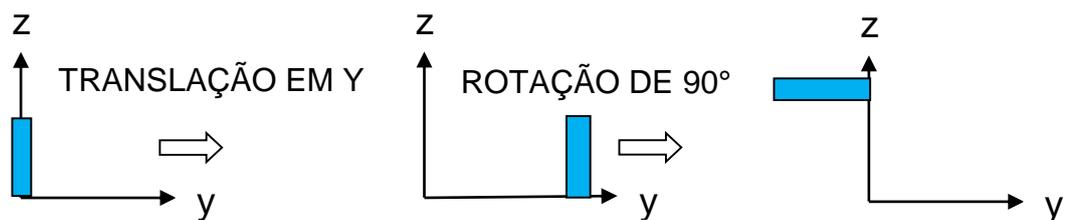


Figura 9-b: Translação e Rotação

FONTE: Autor

3.4 Aplicação do Braço Robótico no Plano

Segundo GATTAS, 2013 *apud* ALMEIDA, 2015, é mais intuitivo considerar as transformações ocorrendo num sistema de eixos, chamados de eixos locais, que rodam e transladam, e não nos objetos.

Para entendermos a construção a seguir, é suficiente considerarmos um braço robótico com três juntas. A ideia geral é que os eixos locais estão originalmente coincidentes com os eixos globais. A cada transformação de rotação e translação, o eixo local muda de posição.

Como mostra a Figura 10-b, é necessário definir três sistemas referenciais para o estudo das coordenadas. O primeiro deles, que se manterá fixo, é o sistema

do antebraço, que está fixado à parede e por esse motivo será o sistema de coordenadas global; o segundo está localizado na junta P1, encontro do antebraço com o braço, e o terceiro está localizado na junta P2, encontro do braço com a mão.

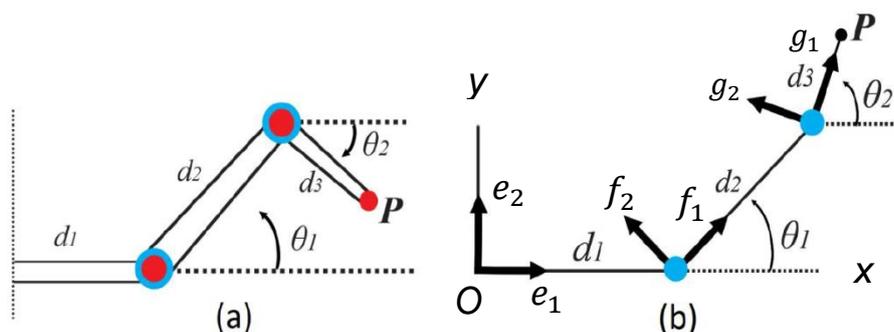


Figura 10: (a) braço em posição inicial (b) braço em posição final e indicação dos eixos

FONTE: ALMEIDA, 2015 (adaptado)

O foco desta aplicação está em executar as transformações de translação e de rotação e encontrar a matriz de transformação M , que é responsável por levar o sistema global no terceiro sistema.

Como dito anteriormente, o sistema adotado como global foi o do antebraço. Denominemos este sistema por $\{A^0\}$. Onde e_1 e e_2 são os vetores da base canônica do \mathbb{R}^2 , com origem no ponto O (Figura 5-b).

Chamemos de d_1 o comprimento do braço e de θ_1 o ângulo que o antebraço faz com o eixo determinado por e_1 . Seja $A^1 = \{f_1, f_2\}$ o sistema local obtido da rotação do sistema A^0 pelo ângulo θ_1 seguida da translação na direção de e_1 por um comprimento d_1 .

Começando pela transformação de rotação, a matriz que a representa é

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Em seguida, a matriz de translação na direção de $d_1 e_1$ é dada por:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Já vimos o porquê desta ordem. A composição de T_1 com R_1 é dada por:

$$T_1 \circ R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\text{sen } \theta_1 & 0 \\ \text{sen } \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\text{sen } \theta_1 & d_1 \\ \text{sen } \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Chamemos agora de d_2 o comprimento do antebraço e θ_2 o ângulo que mão faz com o eixo determinado por f_1 .

Seja $A^2 = \{g_1, g_2\}$ o sistema local obtido da rotação do sistema A^1 pelo ângulo θ_2 seguida da translação, na direção de f_1 , por um comprimento d_2 .

Procedendo como anteriormente, a matriz que representa a rotação é

$$R_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\text{sen } \theta_2 & 0 \\ \text{sen } \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Enquanto que a matriz que representa a translação é

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A composição $T_2 \circ R_2$ é representada por:

$$T_2 \circ R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\text{sen } \theta_2 & 0 \\ \text{sen } \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\text{sen } \theta_2 & d_2 \\ \text{sen } \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota-se que houve duas transformações sucessivas partindo do referencial global até o sistema local da mão. Agora imagine que uma transformação que leva o referencial A^0 ao referencial $\{A^2\}$ como mostra a (Figura 11) abaixo.

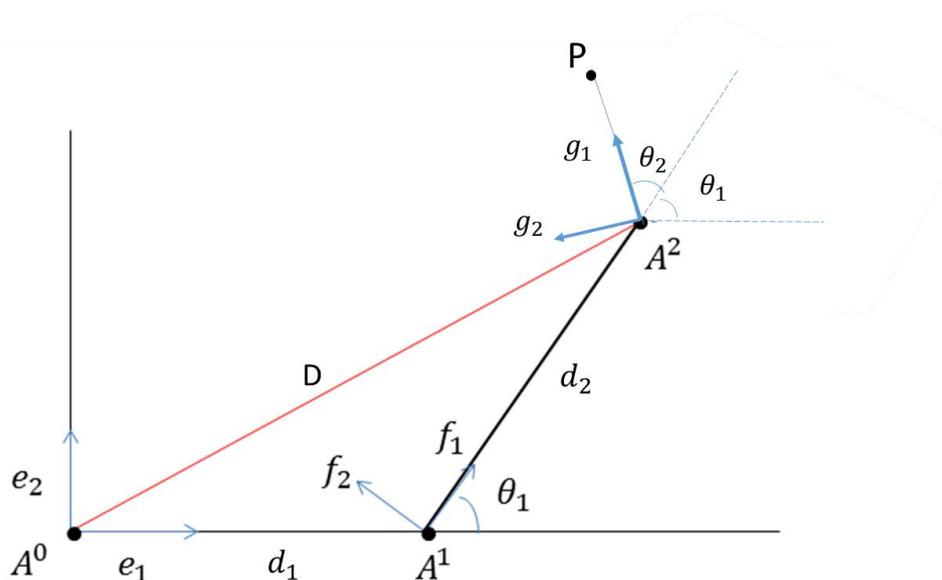


Figura 11: Transformação do referencial A^0 para o referencial A^2

FONTE: Autor

Para levar A^0 até A^2 é necessário rotacionar e depois transladar, nessa ordem, por uma matriz do tipo

$$ToR = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & d_1 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & d_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nessa matriz, o ângulo θ que o referencial A^0 deve ser rotacionado para ficar paralelo ao referencial A^2 é $\theta_1 + \theta_2$.

Além disso, note que as coordenadas do vetor translação $t = (t_1, t_2)$ para a transformação ToR são

$$t_1 = d_1 + d_2 \cos \theta_1$$

$$t_2 = d_2 \text{sen } \theta_1$$

Então a matriz de transformação do referencial A^0 para o referencial A^2 pode ser reescrita como

$$ToR = \begin{bmatrix} \cos (\theta_1 + \theta_2) & -\text{sen } (\theta_1 + \theta_2) & d_1 + d_2 \cos \theta_1 \\ \text{sen } (\theta_1 + \theta_2) & \cos (\theta_1 + \theta_2) & d_2 \text{sen } \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reduzindo essa matriz a um produto temos

$$T_{0R} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\text{sen } \theta_1 & d_1 \\ \text{sen } \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\text{sen } \theta_2 & d_2 \\ \text{sen } \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T_1 \circ R_1 \cdot T_2 \circ R_2$$

Observe a ordem que este produto deve ser realizado para obtermos a matriz final.

Considere agora o referencial local A^3 , obtido ao translataremos o referencial A^2 para o ponto P sem girá-lo. O ponto P está localizado no sistema local A^2 com coordenadas $(d_3, 0)$. É necessário, agora, apenas transladar de A^2 para P por meio da seguinte matriz (o ângulo de rotação é nulo)

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então, a matriz de transformação geral, M, é dada por

$$M = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\text{sen } \theta_1 & d_1 \\ \text{sen } \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\text{sen } \theta_2 & d_2 \\ \text{sen } \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Em particular, para encontrarmos as coordenadas do ponto P no referencial A^0 é necessário aplicar a matriz M ao vetor $(0, 0, 1)$, origem de A^0 . Então o ponto em análise pode ser expresso por

$$P = M \cdot (0, 0, 1)$$

ou seja,

$$P = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\text{sen } \theta_1 & d_1 \\ \text{sen } \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\text{sen } \theta_2 & d_2 \\ \text{sen } \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Realizando esse produto chegamos a

$$P = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) & d_1 + d_2 \cos \theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)d_3 \\ \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & d_2 \text{sen} \theta_1 + \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)d_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ex. 1: Seja a posição inicial do braço robótico dada pela (Figura 12), onde $d_1 = 20 \text{ cm}$, $d_2 = 30 \text{ cm}$, $d_3 = 14 \text{ cm}$, $\theta_1 = 60^\circ$ e $\theta_2 = -90^\circ$. **a)** Determinar as coordenadas do ponto P para esta configuração em relação ao sistema global e **b)** para $\theta_1 = 45^\circ$ e $\theta_2 = 45^\circ$.

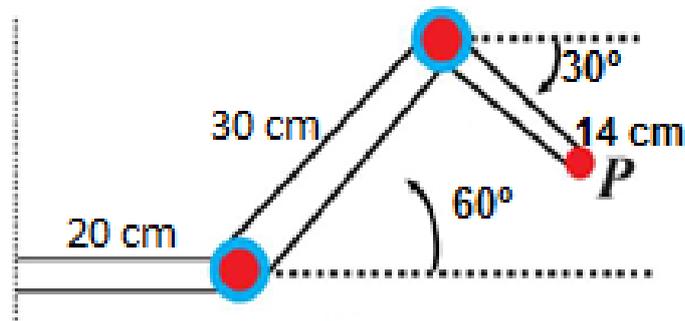


Figura 12: Posição inicial do braço robótico

FONTE: Autor

a) O ponto P é obtido diretamente pela inserção direta dos valores fornecidos

$$P = \begin{bmatrix} \cos(-30) & -\text{sen}(-30) & 20 + 30 \cos 60 + \cos(-30)14 \\ \text{sen}(-30) & \cos(-30) & 30 \text{sen} 60 + \text{sen}(-30)14 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 47,12 \\ 19 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) O ponto P é obtido diretamente pela inserção direta dos valores fornecidos

$$P = \begin{bmatrix} \cos(90) & -\text{sen}(90) & 20 + 30 \cos 45 + \cos(90)14 \\ \text{sen}(90) & \cos(90) & 30 \text{sen} 45 + \text{sen}(90)14 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 41,2 \\ 3,2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4 APLICAÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Uma equação diferencial é uma expressão da forma

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

onde $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de n variáveis e $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a uma função n -vezes diferenciável.

Como exemplo, as seguintes equações diferenciais

$$\frac{dy}{dt} + y = 2$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + f(t) \frac{dy}{dt} + G(t)y = 1;$$

Observe que as equações poderiam ser reescritas na forma

$$y' + y - 2 = 0 \tag{1}$$

$$y'' + f(t)y' + G(t)y - 1 = 0 \tag{2}$$

A ordem de uma equação diferencial ordinária é dada pela derivada de ordem mais alta que aparece na equação. Assim, a equação (1) é dita de primeira ordem e a equação (2) é dita de segunda ordem (BOYCE, 2006).

4.1 Equação Diferencial Ordinária Linear de Primeira Ordem

Uma equação diferencial de primeira ordem, em geral, é expressa da seguinte forma:

$$y' + f(t)y = h(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Tal equação é dita homogênea se $h(t) = 0$ para qualquer t pertencente ao intervalo $\alpha < t < \beta$. Se $h(t) \neq 0$, então a equação é não-homogênea.

Qualquer função diferenciável $y = u(t)$ que satisfaça essa equação para todo t em algum intervalo é uma solução da equação nesse intervalo. Para encontrar tais funções, caso existam, é necessário desenvolver métodos para encontrá-las. Porém, não existe um método geral para encontrar tais soluções, pois não existe método geral para uma função f arbitrária, sendo necessário desenvolver métodos específicos para cada subclasse de equações de primeira ordem, como as equações lineares, as equações separáveis e as equações exatas (GOMES, 2013)

4.1.1 Discussão da Solução de Equações Lineares e Não-Lineares

As observações entre equações lineares e não-lineares são descritas por dois Teoremas:

TEOREMA 1: Se as funções p e g são contínuas em um intervalo aberto $I: a < t < b$ contendo o ponto $t = t_0$, então existe uma única função $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação diferencial

$$y' + p(t)y = g(t) \quad (3)$$

para cada t em I e que também satisfaz a condição inicial

$$y(t_0) = y_0 \quad (4)$$

Esse teorema afirma que para um valor inicial dado o problema tem solução (3) e apenas uma única solução (4). A importância desse teorema está no fato de que ele afirma existir uma solução para qualquer intervalo I , dado o ponto inicial t_0 com os coeficientes p e g contínuos. Se há pontos em que pelo menos uma dessas funções é descontínua, então a solução pode ser descontínua ou deixar de existir.

EXEMPLO 1: Usar o Teorema 1 para encontrar um intervalo no qual o problema de valor inicial tem uma única solução

$$ty' + 2y = 4t^2 \quad (5)$$

$$y(1) = 2 \quad (6)$$

É necessário dividir toda equação a equação (5) por t para deixá-la na forma $y' + p(t)y = g(t)$

$$y' + (2/t)y = 4t$$

Assim, tem-se $p(t) = \frac{2}{t}$ e $g(t) = 4t$. Logo \mathbf{g} é contínua para todo t e \mathbf{p} contínua para $t \neq 0$. Combinando os intervalos, o Teorema 1 garante que há uma única solução no intervalo $0 < t < \infty$ (TREVISAN, 2010).

4.2 Equações Lineares de Ordem Mais Alta

Equações diferenciais lineares de ordem n são expressas pela forma geral

$$P_n(t) \frac{d^n y}{dt^n} + P_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + P_1(t) \frac{dy}{dt} + P_0(t)y = G(t) \quad (7)$$

TEOREMA 2: Se as funções P_1, P_2, \dots, P_n e G são contínuas em um intervalo I , então existe exatamente uma solução $y = \phi(t)$ da equação diferencial (7) que também satisfaz as condições iniciais $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0, \dots, y^{n-1}(t_0) = y_0^{n-1}$, sendo t_0 qualquer ponto do intervalo I .

4.3 Sistemas de Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

A forma de montagem e resolução de sistemas de equações diferenciais é bastante semelhante à estrutura dos sistemas de equações lineares básicos, mudando apenas o tipo de equação que passa a ser diferencial como apresentado na forma geral (GOMES, 2013)

$$\begin{aligned} x'_1 &= p_{11}(t)x_1 + \dots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ &\vdots \\ x'_n &= p_{n1}(t)x_1 + \dots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{aligned} \quad (8)$$

O sistema (8) pode ser apresentado usando a notação matricial considerando cada equação como componente de um vetor, na forma

$$x' = P(t)x + g(t) \quad (9)$$

Um vetor $x = \phi(t)$ é solução da equação (9) se seus componentes satisfazem o sistema (1).

Aqui é necessário considerar que P e g são contínuas em um intervalo $a < t < b$, ou seja, as funções escalares dessas matrizes são contínuas neste intervalo.

Considere a partir de agora que $g(t) = 0$, isto é, que o sistema é homogêneo. Neste caso, a equação (9) assume a forma

$$x' = P(t)x \quad (10)$$

As soluções do sistema (10) são dadas da seguinte forma

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \dots, x^{(k)}(t) = \begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \\ \vdots \\ x_{nk}(t) \end{pmatrix}, \dots \quad (11)$$

É possível mostrar que a combinação linear dessas soluções ainda é solução de (11). Mais precisamente, temos o

TEOREMA 3: O princípio da superposição afirma que se as funções vetoriais $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ são soluções do sistema (11) então a combinação linear $c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)}$ também é solução para todo valor das constantes c_1 e c_2 .

4.4 Autovalores e Autovetores

Se A é uma matriz $n \times n$, então um vetor não-nulo x em \mathbb{R}^2 , é chamado um autovetor de A se Ax é um múltiplo escalar de x , ou seja

$$Ax = \lambda x \quad (12)$$

para algum escalar λ . O escalar λ é chamado um autovalor de A e dizemos que x é um autovetor associado a λ . Um autovetor tem a capacidade de comprimir ou esticar um vetor em \mathbb{R}^3 ou \mathbb{R}^2 , mantendo a origem.

Para encontrar os autovalores de uma matriz A de tamanho $n \times n$ nós reescrevemos $Ax = \lambda x$ como

$$Ax = \lambda Ix \quad (13)$$

onde I é a matriz identidade de ordem n . De outra forma, pode-se escrever

$$(\lambda I - A)x = 0 \quad (14)$$

Esta equação tem solução não-nula se, e somente se,

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad (15)$$

Esta equação é a equação característica de A ; os escalares que satisfazem essa equação são os autovalores de A .

Quando expandido, o determinante $\det(\lambda I - A)$ é um polinômio p em λ que é chamado o polinômio característico de A .

Pode ser mostrado que A é uma matriz $n \times n$, então o polinômio característico de A tem grau n e o coeficiente de λ^n é 1, ou seja, o polinômio característico $p(x)$ de uma matriz $n \times n$ é da forma

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_n \quad (16)$$

Pelo teorema fundamental da álgebra segue que a equação característica

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_n = 0 \quad (17)$$

Tem no máximo, n soluções distintas, de modo que uma matriz $n \times n$ tem, no máximo, n autovalores distintos.

EXEMPLO 1: O valor de $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é um autovetor de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

correspondendo ao autovalor $\lambda = 3$, pois

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3x$$

EXEMPLO 2: Encontre os autovalores de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de A é

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 + 17\lambda - 4$$

Os autovalores de A , portanto, satisfazem a equação cúbica

$$\lambda^3 - \lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0$$

que tem solução

$$\lambda = 4, \quad \lambda = 2 + \sqrt{3} \quad e \quad \lambda = 2 - \sqrt{3}$$

Os autovetores de A associados a um autovalor de λ são os vetores não-nulos x que satisfazem $Ax = \lambda x$. Os autovetores associados a λ são os vetores não-nulos do espaço-solução de $(\lambda I - A)x = 0$. Este espaço é chamado de autoespaço de A associado a λ .

EXEMPLO 3: Encontre bases para os autoespaços de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

A equação característica da matriz A é $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$ ou, em forma fatorada, $(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$; assim os autovalores de A são $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$ e portanto temos dois autoespaços de A .

Por definição,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

é um autovetor de A associado a λ se, e somente se, x é uma solução não-trivial de $(\lambda I - A)x = 0$, ou seja, de

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Se $\lambda = 2$, então (18) é dado por

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo esse sistema obtemos

$$x_1 = -s, \quad x_2 = t, \quad x_3 = s$$

Assim, os autovetores de A associados a $\lambda = 2$ são os vetores não-nulos da forma

$$x = \begin{bmatrix} -s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

São linearmente independentes, estes valores formam uma base do autoespaço associado a $\lambda = 2$.

Se $\lambda = 1$, então (08) é dado por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo este sistema obtemos

$$x_1 = -2s, \quad x_2 = s, \quad x_3 = s$$

Assim, os autovetores associados a $\lambda = 1$ são os vetores não-nulos da forma

$$\begin{bmatrix} -2s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e portanto } \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é uma base do autoespaço associado a $\lambda = 1$.

EXEMPLO 2. Considere a equação na forma matricial

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} x \quad (19)$$

Seja A a matriz dos coeficientes da Eq.(19). Uma forma prática para resolver esta equação é por meio dos autovalores e autovetores dessa matriz. Começando pelos autovalores temos $\det(A - \lambda I) = 0$. Assim,

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

Calculando esse determinante e igualando a zero temos o polinômio característico

$$(1 - \lambda)(1 - \lambda) - 4 = 0$$

As raízes que satisfazem essa equação são os autovalores $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$.

O próximo passo é encontrar os autovetores associados a esses autovalores pela relação $Ax = \lambda x$.

Para $\lambda_1 = -1$, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Expressando de outra forma

$$x_2 = -2x_1$$

$$2x_2 = -4x_1$$

Uma equação é um múltiplo escalar da outra, temos infinitas soluções para este caso. Fazendo $x_1 = 1$, resulta em $x_2 = -2$. Logo, o autovetor, que chamaremos de B_1 , associado ao autovalor $\lambda_1 = -1$ é

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 3$, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Expressando de outra forma

$$x_2 = 2x_1$$

$$x_2 = 4x_1$$

Novamente, uma equação é um múltiplo escalar da outra, temos infinitas soluções para este caso. Fazendo $x_1 = 1$, resulta em $x_2 = 2$. Logo, o autovetor, que chamaremos de B_2 , associado ao autovalor $\lambda_2 = 3$ é

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Temos do Cálculo diferencial que a Eq. 06 é do tipo

$$x' = ax$$

ou seja, a derivada da função x é a própria função x multiplicada por um coeficiente a . Uma função com essa característica é a função $y = e^u$, cuja derivada é $y' = u'e^u$.

Assim, a solução da Eq. 06 é dada por

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = e^{\lambda_1 t} B_1 + e^{\lambda_2 t} B_2$$

Substituindo os valores encontrados

$$x'_1 = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x'_2 = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

De acordo com o TEOREMA 3

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} = c_1 x^{(1)}(t) + c_2 x^{(2)}(t)$$

também é solução da Eq. (19).

De forma geral, se $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ são soluções da equação matricial (19) então

$$x = c_1 x^{(1)}(t) + \dots + c_k x^{(k)}(t)$$

também é solução. Suponha agora que $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ são soluções do sistema (19), de ordem n e considere a matriz

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad (20)$$

cujas colunas são os vetores $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$. Sabemos da álgebra linear que as colunas de $X(t)$ são L.I. se, e somente se, $\det X(t) \neq 0$. Esse determinante é chamado de wronskiano das n soluções $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ e expresso por $W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}]$, ou seja,

$$\det X = W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}], \quad (21)$$

Logo, as soluções $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ são linearmente independentes em um ponto se, e somente se, $W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}] \neq 0$ nesse ponto (BOYCE, 2006).

TEOREMA 4: Se as funções vetoriais $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ são soluções do sistema (19) e em cada ponto do intervalo $a < t < b$, $W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}] \neq 0$, então cada solução $x = \phi(t)$ do sistema(19) pode ser expressa como uma combinação linear de $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$

$$\phi(t) = c_1 x^{(1)}(t) + \cdots + c_n x^{(n)}(t) \quad (22)$$

de apenas uma única forma.

Decorre dos teoremas 3 e 4 que para determinarmos *todas* as soluções do sistema (19) num intervalo (a,b) basta encontrarmos n soluções linearmente independentes neste intervalo. Dito de outro modo, o conjunto $\{x^{(1)}, \dots, x^{(n)}\}$ é uma base para o espaço vetorial das soluções do sistema (19) e, sendo assim, qualquer solução se escreve nesta base, de modo único.

Encerramos esta seção observando que toda equação linear homogênea de ordem n está associada a um sistema linear de primeira ordem com n equações. Com efeito, dada a equação

$$\frac{d^n y}{dt^n} + P_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + P_1(t) \frac{dy}{dt} + P_0(t)y = 0 \quad (23)$$

Podemos introduzir as funções x_1, x_2, \dots, x_n , onde

$$x'_1 = x_2$$

$$x'_2 = x_3$$

...

$$x'_{n-1} = x_n$$

(24)

$$x'_n = -P_{n-1}(t)x_n(t) - P_{n-2}(t)x_{n-1}(t) - \dots - P_1(t)x_2(t) + P_0(t)x_1(t)$$

O sistema de equações acima pode ser representado na forma matricial descrita em (24) com

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -p_0(t) & -p_1(t) & -p_2(t) & \dots & -p_{n-2}(t) & -p_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

Desse modo, podemos perceber que y é solução de (23) se, e somente se, $x = (y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ é solução de (24).

Essa associação nos permite restringir o das estudo equações lineares de ordem n ao estudo dos sistemas lineares de primeira ordem com n equações.

4.5 O Oscilador Harmônico Simples

Considere a (Figura 13) a seguir, onde uma mola de massa desprezível está presa a uma parede em uma de suas extremidades e com uma partícula de massa $m > 0$ na outra extremidade. Vamos considerar também que este sistema de mola e partícula fixado à parede só se mova em linha reta e sem atrito. Para esse sistema de coordenadas a posição de equilíbrio encontra-se na origem, ou seja, nesta posição a mola não exerce força sobre a partícula.

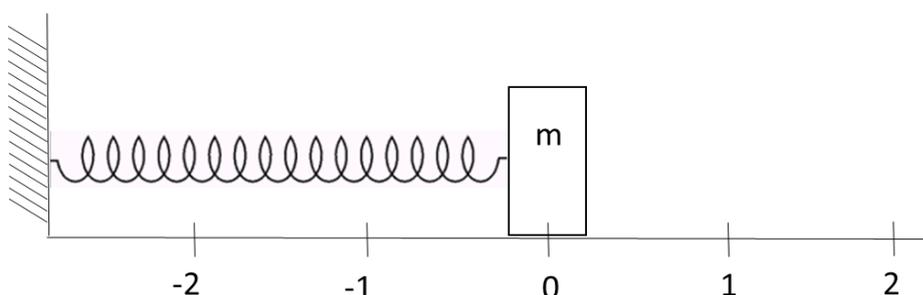


Figura 13: Mola em posição de equilíbrio

FONTE: SERWAY, 2011

Caso haja um pequeno deslocamento da partícula, de modo que não leve ao rompimento da mola, o sistema sairá de equilíbrio e surgirá uma força restauradora que agirá para que o sistema mola e partícula retorne à configuração inicial, devido à reação da mola. Esse fenômeno é explicado pela Lei Hooke, com a força atuando no sentido oposto ao do deslocamento. Se levarmos em conta o atrito, que sempre existe, teremos uma força de resistência ao deslocamento no sentido oposto ao do movimento e que proporcional à velocidade do deslocamento. Outras forças externas podem atuar nesse sistema, como vibrações na parede ou algum campo magnético. Para pequenos deslocamentos, a posição $x(t)$ da partícula sujeita a todas essas forças resulta que $x'(t)$ e $x''(t)$ são, respectivamente, a velocidade e aceleração da partícula no instante t . Pela Segunda Lei de Newton, $F = ma$, a trajetória $x(t)$ da partícula satisfaz a seguinte equação

$$mx''(t) = -kx(t) - \eta x'(t) + F_e(t) \quad (25)$$

Nessa equação, $-kx$ é a reação da mola, em que $k > 0$ é constante de elasticidade da mola e por isso independe do tempo; $\eta \geq 0$ é o coeficiente de atrito do

meio; F_e é alguma força externa que depende do tempo. As equações que descrevem o movimento da partícula são fornecidas pelas soluções desta equação diferencial linear de segunda ordem a coeficientes constantes. Se tivermos qualquer valor inicial de $x(t_0)$ e $x'(t_0)$ em \mathbb{R} existirá apenas uma única solução para essa equação diferencial. Não basta apenas saber a posição inicial da partícula, é necessário saber também a velocidade para relacionar essas duas informações.

Vamos, agora, modificar um pouco a Eq.(25) e reescrevê-la de modo que $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} > 0$, $a = \frac{\eta}{2m} \geq 0$ e $h = \frac{1}{m} F_e$, temos

$$x''(t) + 2ax'(t) + \omega^2 x(t) = h(t) \quad (26)$$

Sem considerar o atrito, a equação que descreve o movimento unidimensional do sistema da mola é dado por

$$x'' + \omega^2 x = 0 \quad (27)$$

que é uma equação diferencial homogênea de segunda ordem com $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

Podemos encontrar a solução da Eq. (27) por tentativa. Para isso, é necessário recorrer ao Cálculo Diferencial e verificar qual função, quando derivada, tem como resultado a própria função. Essa função é a função exponencial.

Denominando $x(t) = e^{pt}$, onde p é constante, temos que $x'(t) = p \cdot e^{pt}$ e que $x''(t) = p^2 \cdot e^{pt}$. Substituindo esses resultados na Eq. (27), obtemos

$$p^2 \cdot e^{pt} + \omega^2 \cdot e^{pt} = 0 \quad (28)$$

Dividindo a Eq. (28) por e^{pt} , chegamos a

$$p = \pm i \cdot \omega \quad (29)$$

Sendo assim, temos duas soluções complexas $x^{(1)} = e^{i\omega t}$ e $x^{(2)} = e^{-i\omega t}$.

A solução geral é dada pela combinação linear dessas soluções encontradas, ou seja

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} \quad (30)$$

Para uma equação de segunda ordem precisamos de duas condições iniciais para encontrar as constantes c_1 e c_2 . Porém, antes de nos preocuparmos com as constantes, é possível trabalhar um pouco mais a Eq. (30). A notação de Euler define que

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \quad (31)$$

Substituindo a Eq. (31) na Eq. (30), observando que $\theta = \omega t$, temos

$$x(t) = c_1 [\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t] + c_2 [\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t] \quad (32)$$

Colocando as constantes em evidência chegamos a

$$x(t) = (c_1 + c_2) \cos \omega t + (c_1 - c_2) i \operatorname{sen} \omega t \quad (33)$$

Os termos entre parênteses na Eq. (33) continuam constantes, então podemos denominar $A = (c_1 + c_2)$ e $B = (c_1 - c_2)$.

$$x(t) = A \cdot \cos \omega t + B \cdot i \operatorname{sen} \omega t \quad (34)$$

Podemos, agora, aplicar as duas condições iniciais, ou seja, $x(0) = x_0$ e $x'(0) = y_0$, é fácil verificar que

$$x(t) = x_0 \cdot \cos \omega t + y_0 \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega t \quad (35)$$

Como vimos nessa seção, está solução é única. Devido à natureza senoidal dessas soluções o sistema mecânico da mola é conhecido como oscilador harmônico simples. Sempre que a velocidade do sistema da mola é nula, o deslocamento máximo, $|x(t)|$, é atingido e recebe o nome de amplitude do movimento. Uma oscilação completa ocorre em um período T , ou seja, $2\pi = \omega T$, portanto,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (36)$$

A frequência F de uma oscilação é o número de ciclos por unidade de tempo, ou seja, é o inverso do período

$$F = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (37)$$

Esse problema apresentado envolve uma equação de segunda ordem e seria mais interessante se pudéssemos obter duas funções, sendo uma para o deslocamento e outra para a velocidade. Isso é possível se encararmos esse problema como uma equação diferencial de primeira ordem no plano, já que possuímos duas condições iniciais. Para isso, vamos introduzir a variável bidimensional (x, y) , em que o escalar x é a posição e o escalar y é a velocidade, ou seja $y = x'$. Desta forma $(x(t), y(t))$ nos informa, simultaneamente, a posição e a velocidade da partícula na extremidade da mola.

Partindo da Eq. (27) e fazendo a mudança de variável, temos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -\omega^2 x(t) \end{cases}$$

Escrevendo em forma vetorial, temos

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (38)$$

Resolvendo esse sistema, podemos conferir que

$$x(t) = x_0 \cdot \cos \omega t + y_0 \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega t$$

e

$$y(t) = -x_0 \omega \cdot \sin \omega t + y_0 \cdot \cos \omega t$$

define a única solução do sistema que satisfaz as condições iniciais , $x(0) = x_0$ e $x'(0) = y_0$. Perceba que esta solução é periódica e que $x'(t) = y(t)$.

4.6 O Deslocamento dos Andares de um Edifício Devido a um Terremoto

Um terremoto é o efeito do deslocamento das placas tectônicas que causa um movimento brusco e repentino no terreno. Grandes perdas podem ocorrer em áreas urbanas, principalmente em construções sem estrutura adequada para resistir aos efeitos de um terremoto (TEIXEIRA, 2008)

É possível desenvolver um modelo físico-matemático baseado na Segunda Lei de Newton da aceleração e na Lei de Hooke, que apresenta o conceito de elasticidade e amortecimento. Além disso, é necessário trabalhar com o conceito de derivadas e equações diferenciais. Esta aplicação descreve o efeito da propagação de um terremoto nos andares de um edifício por meio da solução de um sistema de equações diferenciais.

4.6.1 Frequências Naturais de Vibração

Toda construção apresenta um mínimo de vibração, pois está sujeita a fatores externos como, por exemplo, o vento. Considerando o edifício como um único elemento estrutural rígido, ele apresenta uma frequência de vibração natural.

Quando a frequência das ondas de um terreno é próxima à frequência natural do edifício, então há o fenômeno da ressonância. Tal fenômeno é prejudicial ao edifício por amplificar seu movimento, podendo até causar seu desmoronamento. Quanto mais alto o edifício, maiores os riscos (THOMPSON; TURK, 1997)

Dentre as grandezas físicas mais importantes atuantes em um edifício podemos destacar a velocidade, os deslocamentos e a aceleração. Esta última é a mais preocupante, pois a aceleração é responsável pelo surgimento de forças, como descreve a Segunda Lei de Newton, que podem ser prejudiciais ao edifício.

O deslocamento nos andares de um prédio pode ser determinado pela segunda Lei de Newton, para isso é necessário considerar forças externas atuando em cada andar como se estivessem sendo aplicadas em uma partícula por meio da expressão

$$F = ma \quad (39)$$

onde F é a força externa que atua na horizontal, m é a massa do andar e a é aceleração do deslocamento dos andares.

Supondo que os andares do edifício sejam vinculados por junções elásticas de modo que se comportem semelhante a uma mola, cada vínculo exercerá uma força restauradora quando os andares são deslocados em relação ao outro, ou seja, o efeito mola tende a fazer com que a configuração inicial dos andares seja retomada. Neste caso, a Lei de Hooke, representada por

$$F = -kx \quad (40)$$

pode ser aplicada a cada (i – ésimo) andar de massa m_i para uma constante elástica K_i entre o (i – ésimo) andar e o ($i + 1$) andar, fazendo com que a Lei de Hooke seja expressa por

$$F = -k_i(x_{i+1} - x_i) \quad (41)$$

em que x_i é o deslocamento do andar de número i , como mostra a (Figura 13).

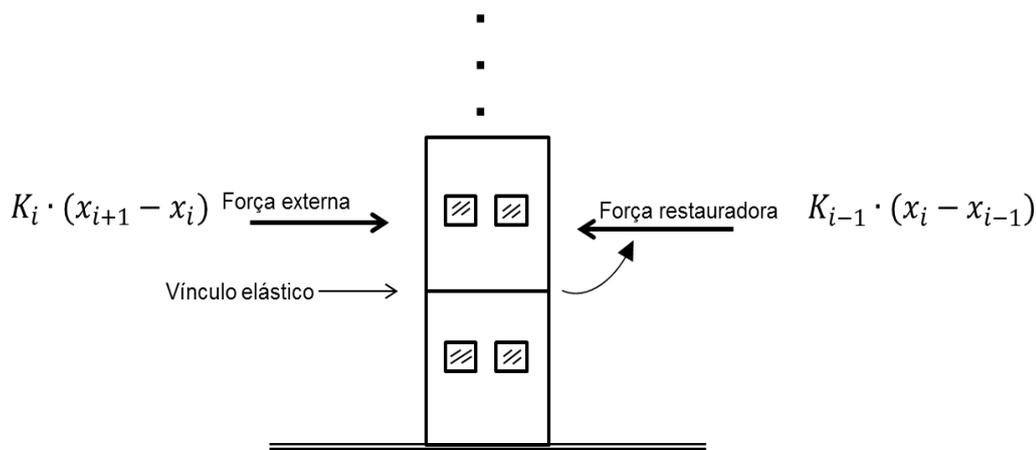


Figura 14: Esquema de forças

FONTE: Autor

Sabemos que a aceleração é a derivada segunda da posição x , então é possível montar um sistema de equações diferenciais. Substituindo a Eq. (41) na Eq. (39)

$$m_n \cdot x_n'' = -k_{n-1} \cdot (x_n - x_{n-1}) \quad (42)$$

Para um edifício de n andares o sistema de equações diferenciais é expresso, de forma geral, da seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \cdot x_1'' = -k_0 \cdot x_1 + k_1 \cdot (x_2 - x_1) \\ m_2 \cdot x_2'' = -k_1 \cdot (x_2 - x_1) + k_2(x_3 - x_2) \\ m_3 \cdot x_3'' = -k_2 \cdot (x_3 - x_2) + k_3(x_4 - x_3) \\ \vdots \\ m_n \cdot x_n'' = -k_{n-1} \cdot (x_n - x_{n-1}) + k_n(x_{n+1} - x_n) \end{array} \right. \quad (43)$$

A Eq. (43) permite que se faça uma avaliação da estabilidade de um edifício durante um terremoto. Para isso, será necessário utilizar os autovetores e autovalores associados a este sistema linear (ZILL, 2003).

Considere um prédio de apenas dois andares no qual cada andar possua uma massa $m = 6000Kg$ e uma força restauradora de $K = 18000 \frac{Kg}{s^2}$.

Nesse caso, teremos um sistema de equações envolvendo apenas duas equações nas variáveis de deslocamento x_1 e x_2 , dos andares $n = 1$ e $n = 2$, respectivamente. Substituindo os valores fornecidos na Eq. 16, temos

$$\begin{aligned} 6000 \cdot x_1'' &= -18000 \cdot x_1 + 18000 \cdot (x_2 - x_1) \\ 6000 \cdot x_2'' &= -18000 \cdot (x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (44)$$

Perceba que o termo $k_2(x_3 - x_2)$ é nulo, pois k_2 e x_3 seriam a força restauradora e deslocamento do andar $n = 3$, que não existe nesse problema.

Reescrevendo os sistema acima de forma simplificada, temos

$$\begin{aligned}x_1'' &= -6x_1 + 3x_2 \\x_2'' &= 3x_1 - 3x_2\end{aligned}\quad (5)$$

Sejam $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ e $y_3 = x_1'$ e $y_4 = x_2'$. Substituindo na Eq. (45) obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem equivalente

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = y_3 \\ y_2' = y_4 \\ y_3' = -6y_1 + 3y_2 \\ y_4' = 3y_1 - 3y_2 \end{array} \right.$$

ou ainda podemos escrever o sistema da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

ou ainda $y' = Ay$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O próximo passo é encontrar os autovalores e autovetores da matriz A, temos

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 - \lambda & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 0 - \lambda & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 - \lambda \end{bmatrix}$$

Resolvendo esse determinante os autovalores e autovetores associados são

$$\lambda_1 = 2,8i \quad e \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0,5i \\ -0,3i \\ -1,6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = -2,8i \quad e \quad B_2 = \begin{bmatrix} -0,5i \\ 0,3i \\ -1,6 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_3 = 1,07i \quad e \quad B_3 = \begin{bmatrix} -0,5i \\ -0,9i \\ 0,6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_4 = 1,07i \quad e \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0,5i \\ 0,9i \\ 0,6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$y^{(1)} = B_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} 0,5i \\ -0,3i \\ -1,6 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2,8it}, \quad y^{(2)} = B_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} -0,5i \\ 0,3i \\ -1,6 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2,8it}$$

$$y^{(3)} = B_3 e^{\lambda_3 t} = \begin{bmatrix} -0,5i \\ -0,9i \\ 0,6 \\ 1 \end{bmatrix} e^{1,07it}, \quad y^{(4)} = B_4 e^{\lambda_4 t} = \begin{bmatrix} 0,5i \\ 0,9i \\ 0,6 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-1,07it}$$

Enfim, a solução geral do sistema diferencial é dada por

$$y(t) = c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)} + c_3 y^{(3)} + c_4 y^{(4)}$$

As variáveis λ e B , são os autovalores e autovetores do problema da vibração livre não amortecida.

Estes parâmetros estão diretamente relacionados com as propriedades físicas do sistema, as frequências naturais não amortecidas e os chamados modos normais ou naturais de vibração (VAROTO, 2014).

É possível minimizar os efeitos da vibração no edifício por meio do isolamento da base com um sistema que possua capacidade de suporte, baixa rigidez horizontal e capacidade de restituição à posição inicial.

A (figura 15) mostra um edifício com base fixa e outro com base isolada para diferentes frequências.

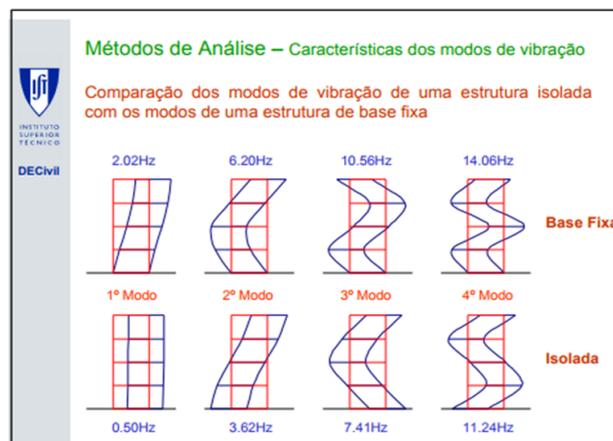


Figura 15: comparação de edifício com isolamento e com base fixa
 FONTE: VAROTO, 2014

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio deste trabalho, observa-se o quão importante é relacionar o conhecimento adquirido ao longo da graduação, de forma geral, com situações reais.

Tratando especialmente da Álgebra Linear, conteúdos como sistemas de equações lineares, equações diferenciais, transformações lineares e diversos outros, encontram aplicações na Engenharia ou na natureza em geral.

O aluno de Engenharia deve entender que sua função como futuro profissional transformador do meio social e ambiental, será desenvolver modelos matemáticos capazes de solucionar problemas reais e que, para isso, deve utilizar-se das ferramentas matemáticas ao seu alcance e trabalhá-las para este fim.

Particularmente, o processo de construção deste trabalho me fez ver, a cada etapa, como os assuntos da Álgebra Linear estão relacionados às disciplinas do curso de Engenharia Civil, seja na disciplina de Teoria das Estruturas, no estudo dos trabalhos virtuais e matriz de rigidez, ou na simplificação de problemas do Cálculo, constantemente foi necessário utilizar da Álgebra Linear.

Neste trabalho foram apresentadas apenas quatro aplicações dentro de inúmeras aplicações da Álgebra Linear. Outros trabalhos, com objetivo similar ao deste, podem ser encontrados na literatura e muitos outros podem ser desenvolvidos para contribuir com a formação de profissionais dentro das Universidades.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, R. **Braço Robótico: Uma Aplicação da Álgebra Linear**, 2015.

BOYCE, W. E. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**, 8ª ed, 2006.

DOERING, C. I. E LOPES, A. O. **Equações Diferenciais Ordinárias**, 2a ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2007.

GOMES, M. **Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias**, 2013.

HALLIDAY, DAVID. **Fundamentos de Física, vol. 3: eletromagnetismo**, 9ª ed, 2012.

KOLMAN, B. **Introdução à Álgebra Linear: com aplicações**, 8ª ed, 2011.

POFFO, J. **Aplicação de álgebra linear na engenharia**. XXXIX Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, p. 9, 2011.

SERWAY, R. A. **Física para Engenheiros e Cientistas, vol. 2: Oscilações, ondas e termodinâmica**, 8ª ed, 2011.

TIPLER, P. A. **Física para Cientistas e Engenheiros: Eletricidade e magnetismo**, vol. 3, 6ª ed, 2006.

TREVISAN, R. G. **Equações Diferenciais**. p. 5103–5107, 2010.

VAROTO, P. P. **Análise Modal de Estruturas**. Universidade de São Paulo. Escola de Engenharia de São Carlos. Departamento de Engenharia Mecânica, 2014.

