

**LUCIANA CORREIA LAURINDO MARTINS VIEIRA**

**ESTUDO DE ALGORITMOS DE  
INTEGRAÇÃO ELEMENTO POR  
ELEMENTO PARA ANÁLISE DINÂMICA  
NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil

**MACEIÓ**

**Fevereiro/2004**

**LUCIANA CORREIA LAURINDO MARTINS VIEIRA**

**ESTUDO DE ALGORITMOS DE  
INTEGRAÇÃO ELEMENTO POR  
ELEMENTO PARA ANÁLISE DINÂMICA  
NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil

Área de concentração: *Estruturas*

Orientador: Prof. Dr. Adeildo Soares Ramos Júnior

**MACEIÓ**

**Fevereiro/2004**

Vieira, Luciana Correia Laurindo Martins

Estudo de algoritmos de integração elemento por elemento para análise dinâmica não linear de estruturas. Maceió, 2004. 101p.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Alagoas. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

1. Análise dinâmica 2. Análise não linear 3. Algoritmos de integração 4. Elemento por elemento. I. Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. II-Título



Universidade Federal de Alagoas – UFAL  
 Centro de Tecnologia – CTEC  
 Programa de Pós-Graduação de Engenharia Civil – PPGEC  
 Campus A. C. Simões  
 Tabuleiro do Martins – CEP 57072-970 – Maceió – Alagoas  
 Tel: (82) 2141277 – Fax: (82) 2141625  
 E-mail: ppgec@ctec.ufal.br



### ATA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL/ESTRUTURAS

Em sessão pública, às quinze horas e vinte minutos do dia vinte do mês de fevereiro do ano de dois mil e quatro, na Sala de Aula do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, foi iniciada a defesa da dissertação de mestrado da aluna **LUCIANA CORREIA LAURINDO MARTINS VIEIRA** tendo como tema: **“ESTUDO DE ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO ELEMENTO POR ELEMENTO PARA ANÁLISE DINÂMICA NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS”**, como requisito parcial para obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL**, na área de concentração de **ESTRUTURAS**. A Banca Examinadora foi constituída pelos seguintes membros: Prof. Dr. Adeildo Soares Ramos Júnior (Orientador-UFAL), Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages (UFAL), Prof. Dr. Raul Rosas e Silva (PUC/RJ) e Prof. Dr. Isaiás Quaresma Masetti (CENPES/Petrobras). A candidata fez a apresentação da dissertação em 50 (cinquenta) minutos. A defesa foi encerrada às dezenove horas. Após o encerramento da defesa, em reunião confidencial, a Banca Examinadora, com base no Regimento Interno, decidiu por **APROVAR** a dissertação de mestrado, sem restrição.

Em 20 de fevereiro de 2004,

Prof. Dr. Adeildo Soares Ramos Júnior (Orientador)

Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages

Prof. Dr. Raul Rosas e Silva

Prof. Dr. Isaiás Quaresma Masetti

Prof. Dr. Severino Pereira Cavalcanti Marques  
 Coordenador do PPGEC/UFAL

*A meu pai, Ricardo,  
minha mãe, Nininha,  
e meu irmão, Guilherme.*

## **Agradecimentos**

A minha família, por tudo. Amor, incentivo, paciência, dedicação, solidariedade, vida.

Ao Prof. Dr. Adeildo Soares Ramos Júnior, pela orientação, confiança e amizade desenvolvidas nesses anos.

Ao Prof. Dr. Eduardo Nobre Lages, pelas suas contribuições a este trabalho.

Aos Engenheiros Isaías Quaresma Masetti e Rogério Diniz Machado pelo apoio e incentivo durante o período da graduação e do mestrado.

A todos os meus amigos, professores e colegas, pois com cada um de vocês ganhei ensinamentos que permitiram esta conquista.

À Universidade Federal de Alagoas – UFAL, pela minha formação e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, pelo auxílio financeiro.

Finalmente, a Deus, que nos permite viver para alcançar conquistas como esta.

## Sumário

<b>Agradecimentos .....</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Figuras .....</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Tabelas .....</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Símbolos.....</b>	<b>xiv</b>
<b>Lista de Abreviaturas .....</b>	<b>xviii</b>
<b>Resumo .....</b>	<b>xix</b>
<b>Abstract .....</b>	<b>xx</b>
<b>Capítulo 1 .....</b>	<b>1</b>
<b>1. Introdução.....</b>	<b>1</b>
1.1. RELEVÂNCIA DO TEMA .....	1
1.2. OBJETIVOS.....	3
1.3. ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO .....	3
1.4. NOTAÇÃO UTILIZADA .....	4
<b>Capítulo 2 .....</b>	<b>5</b>
<b>2. Introdução à Dinâmica de Estruturas.....</b>	<b>5</b>
2.1. INTRODUÇÃO .....	5
2.2. ABORDAGEM GERAL SOBRE DINÂMICA DE ESTRUTURAS .....	5
2.3. DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL.....	6
2.3.1. <i>Formulação em deslocamentos do Método dos Elementos Finitos</i> .....	8
2.3.2. <i>Considerações sobre análises lineares e não lineares</i> .....	11
2.4. DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL.....	12
2.4.1. <i>Métodos Modais</i> .....	12
2.4.2. <i>Métodos Diretos</i> .....	12
<b>Capítulo 3 .....</b>	<b>14</b>
<b>3. Algoritmos de integração para dinâmica não linear .....</b>	<b>14</b>
3.1. INTRODUÇÃO .....	14

3.2.	ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO NO TEMPO .....	14
3.3.	ALGORITMOS EXPLÍCITOS .....	16
3.3.1.	<i>Algoritmo da diferença central</i> .....	17
3.4.	ALGORITMOS IMPLÍCITOS .....	19
3.4.1.	<i>Técnicas de solução de sistemas não lineares</i> .....	20
3.4.2.	<i>Algoritmos da família Newmark</i> .....	27
3.5.	TÉCNICA ELEMENTO POR ELEMENTO .....	31
3.5.1.	<i>Formulação elemento por elemento em algoritmos explícitos</i> .....	33
3.5.2.	<i>Formulação elemento por elemento em algoritmos implícitos</i> .....	33
3.6.	MEDIDAS DE ERRO EM ANÁLISE DINÂMICA .....	39
<b>Capítulo 4</b>	<b>.....</b>	<b>43</b>
<b>4.</b>	<b>Exemplos e Aplicações .....</b>	<b>43</b>
4.1.	INTRODUÇÃO .....	43
4.2.	APLICAÇÃO LINEAR: SISTEMA MASSA-MOLA .....	44
4.3.	VIGA ENGASTADA.....	51
4.4.	CABO TRACIONADO .....	57
4.4.1.	<i>Obtenção da configuração estática</i> .....	58
4.4.2.	<i>Influência do refinamento da malha de elementos finitos</i> .....	64
4.5.	PÊNULOS .....	66
4.5.1.	<i>Pêndulo Triplo</i> .....	67
4.5.2.	<i>Pêndulo Quintuplo</i> .....	75
<b>5.</b>	<b>Conclusões.....</b>	<b>84</b>
5.1.	CONCLUSÕES, COMENTÁRIOS E SUGESTÕES .....	84
<b>Referências bibliográficas</b>	<b>.....</b>	<b>87</b>
<b>Apêndice A</b>	<b>.....</b>	<b>89</b>
<b>A</b>	<b>Exemplo numérico de multiplicação de matriz-vetor e vetor- matriz-vetor elemento por elemento .....</b>	<b>89</b>
A.1	DESCRIÇÃO DO EXEMPLO.....	89
A.1.1	<i>Multiplicação matriz-vetor elemento por elemento</i> .....	91
A.1.2	<i>Multiplicação vetor-matriz-vetor elemento por elemento</i> .....	93
<b>Apêndice B</b>	<b>.....</b>	<b>95</b>
<b>B</b>	<b>Formulação utilizada do elemento de barra.....</b>	<b>95</b>
B.1	ELEMENTO DE BARRA.....	95
<b>Apêndice C</b>	<b>.....</b>	<b>99</b>



<b>C</b>	<b>Solução estática para a viga engastada sujeita a momento concentrado (exemplo 4.3)</b> .....	<b>99</b>
C.1	DESLOCAMENTO VERTICAL DA EXTREMIDADE DIREITA .....	99
C.2	MOMENTO DE REFERÊNCIA .....	100

## Lista de Figuras

Figura 1.1 – (a) Lançamento de estacas torpedo (âncoras para estrutura <i>offshore</i> ); (b) Estrutura flutuante submetida aos efeitos da natureza. ....	1
Figura 2.1 – Idéia básica do Método dos Elementos Finitos. ....	7
Figura 3.1 – Algoritmo do Método das Diferenças Centrais. ....	18
Figura 3.2 – Estratégia do Método dos Gradientes Conjugados. ....	24
Figura 3.3 – Algoritmo do Método dos Gradientes Conjugados Não Linear. ....	27
Figura 3.4 – Algoritmo de Newmark versão deslocamento. ....	31
Figura 3.5 – Algoritmo do Método dos Gradientes Conjugados Linear. ....	35
Figura 4.1 – Sistema massa-mola. ....	44
Figura 4.2 – História de deslocamento do grau de liberdade 1 para $\Delta t = 0,7s$ . ....	46
Figura 4.3 – História de deslocamento do grau de liberdade 1 para $\Delta t = 0,6s$ . ....	46
Figura 4.4 – História de deslocamento do grau de liberdade 1 para $\Delta t = 0,4s$ . ....	47
Figura 4.5 – História de deslocamento do grau de liberdade 1 para $\Delta t = 0,01s$ . ....	47
Figura 4.6 – Representação gráfica dos valores dos erros relativos em cada intervalo de tempo analisado. ....	48
Figura 4.7 – Representação gráfica dos tempos de simulação para cada intervalo de tempo analisado. ....	49
Figura 4.8 – Representação gráfica das médias de iterações por intervalo de tempo para cada intervalo de tempo analisado. ....	50
Figura 4.9 – (a) Desenho esquemático e (b) discretização da viga analisada. ....	51
Figura 4.10 – Curva de aplicação da força momento. ....	52
Figura 4.11 – Máximas freqüências do sistema ao longo da análise. ....	52
Figura 4.12 – Deslocamento vertical da extremidade direita da viga para $\Delta t = 1 \cdot 10^{-2} s$ . ....	53
Figura 4.13 – Deslocamento vertical da extremidade esquerda da viga para (a) $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ e (b) $\Delta t = 1,45 \cdot 10^{-4} s$ ; Detalhe do deslocamento vertical da extremidade esquerda da viga para (c) $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ e (d) $\Delta t = 1,45 \cdot 10^{-4} s$ . ....	54
Figura 4.14 – Representação gráfica dos valores dos erros relativos em cada intervalo de tempo analisado. ....	55
Figura 4.15 – Representação gráfica dos tempos de simulação para cada intervalo de tempo analisado. ....	56
Figura 4.16 – Representação gráfica das médias de iterações por intervalo de tempo para cada intervalo de tempo analisado. ....	57
Figura 4.17 – Desenho esquemático da malha de elementos finitos. ....	58
Figura 4.18 – Curva de aplicação do peso próprio. ....	59
Figura 4.19 – História de deslocamentos verticais do nó central. ....	60
Figura 4.20 – Detalhe dos deslocamentos verticais do nó central. ....	60
Figura 4.21 – Deformada do cabo no tempo final de análise. ....	61

Figura 4.22 – Detalhe da deformada no nó central.....	62
Figura 4.23 – Etapas da análise.....	62
Figura 4.24 – (a) Tempos de simulação; (b) Média de iterações por intervalo de tempo. .....	63
Figura 4.25 – (a) Deslocamentos verticais do nó central para o algoritmo NR – PCG; (b) Detalhe dos deslocamentos verticais do nó central.....	65
Figura 4.26 – Desenho esquemático da malha de elementos finitos.....	67
Figura 4.27 – História das máximas frequências para o pêndulo triplo.....	67
Figura 4.28 – História das mínimas frequências para o pêndulo triplo.....	68
Figura 4.29 – Etapas da análise do pêndulo triplo.....	69
Figura 4.30 – Deslocamento horizontal na extremidade direita para $\Delta t = 0,01s$ .....	70
Figura 4.31 – Deslocamento vertical na extremidade direita para $\Delta t = 0,01s$ .....	70
Figura 4.32 – Comparação entre as respostas obtidas com o algoritmo NR - CG para dois intervalos de tempo.....	71
Figura 4.33 – Detalhe da comparação entre as respostas obtidas com o algoritmo NR - CG para dois intervalos de tempo.....	71
Figura 4.34 – Representação gráfica dos valores dos erros relativos em cada intervalo de tempo analisado.....	72
Figura 4.35 – Representação gráfica dos tempos de simulação para cada intervalo de tempo analisado.....	73
Figura 4.36 – Representação gráfica das médias de iterações por intervalo de tempo para cada intervalo de tempo analisado.....	74
Figura 4.37 – Etapas da análise do pêndulo quádruplo.....	75
Figura 4.38 – (a) e (b) Deslocamentos horizontal e vertical na extremidade direita para $\Delta t = 0,01s$ ; (c) e (d) Deslocamentos horizontal e vertical na extremidade direita para $\Delta t = 0,001s$ .....	76
Figura 4.39 – (a) e (b) Deslocamentos horizontal e vertical na extremidade direita para $\Delta t = 0,0001s$ .....	77
Figura 4.40 – História no tempo da máximas frequências.....	77
Figura 4.41 – História no tempo da mínimas frequências.....	78
Figura 4.42 – Representação gráfica dos tempos de simulação para cada intervalo de tempo analisado.....	79
Figura 4.43 – Representação gráfica das médias de iterações por intervalo de tempo para cada intervalo de tempo analisado.....	80
Figura 4.44 – (a), (c) e (e) Erros em energia para $\Delta t = 0,01s$ , $\Delta t = 0,001s$ e $\Delta t = 0,0001s$ ; (b), (d) e (f) Detalhes dos gráficos (a) (c) e (e).....	81
Figura 4.45 – Deslocamento horizontal na extremidade direita para $\Delta t = 0,01s$ , usando o algoritmo NR - Método direto.....	83
Figura 4.46 – Deslocamento vertical na extremidade direita para $\Delta t = 0,01s$ , usando o algoritmo NR - Método direto.....	83
Figura A. 1 – Estrutura de molas conectadas em série.....	89
Figura A. 2 – Numeração dos elementos.....	89
Figura B. 1 – Elemento de barra.....	95

Figura B. 2 – Geração do vetor de forças internas de matriz de rigidez do elemento de barra. ....	98
Figura C. 1 – Desenho esquemático do modelo. ....	99
Figura C. 2 – Configuração genérica. ....	100
Figura C. 3 – Configuração de referência. ....	101

## Lista de Tabelas

Tabela 3.1 – Métodos da família Newmark.....	28
Tabela 4.1 – Nomenclatura simplificada para os algoritmos estudados.....	44
Tabela 4.2 – Propriedades do sistema massa-mola.....	44
Tabela 4.3 – Condições iniciais do sistema massa-mola.....	45
Tabela 4.4 – Valores dos intervalos de tempo.....	45
Tabela 4.5 – Valores dos erros relativos em cada intervalo de tempo analisado.....	48
Tabela 4.6 – Valores dos tempos de simulação (s) para cada intervalo de tempo analisado.....	49
Tabela 4.7 – Valores das médias de iterações por intervalo de tempo para cada intervalo de tempo analisado.....	50
Tabela 4.8 – Propriedades físicas e geométricas da viga.....	51
Tabela 4.9 – Valores dos intervalos de tempo.....	53
Tabela 4.10 – Valores dos erros relativos em cada intervalo de tempo analisado.....	55
Tabela 4.11 – Valores dos tempos de simulação (s) para cada intervalo de tempo analisado.....	56
Tabela 4.12 – Valores das médias de iterações por intervalo de tempo para cada intervalo de tempo analisado.....	57
Tabela 4.13 – Propriedades físicas e geométricas do cabo.....	58
Tabela 4.14 – Valores dos intervalos de tempo.....	59
Tabela 4.15 – Tempos de simulação e médias de iterações por intervalo de tempo.....	63
Tabela 4.16 – Freqüências máximas.....	64
Tabela 4.17 – Valores críticos de intervalo de tempo.....	65
Tabela 4.18 – Análise geral do desempenho dos algoritmos iterativos.....	65
Tabela 4.19 – Máximo número de condição da matriz efetiva.....	66
Tabela 4.20 – Valores dos erros relativos em cada intervalo de tempo analisado.....	72
Tabela 4.21 – Valores dos tempos de análise (s) para cada intervalo de tempo analisado.....	73
Tabela 4.22 – Valores das médias de iterações por intervalo de tempo para cada intervalo de tempo analisado.....	74
Tabela 4.23 – Comparação entre implementações para o algoritmo NR-CG.....	74
Tabela 4.24 – Valores dos tempos de análise para cada intervalo de tempo analisado.....	79
Tabela 4.25 – Valores das médias de iterações por intervalo de tempo para cada intervalo de tempo analisado.....	80
Tabela 4.26 – Valores das médias de iterações por intervalo de tempo para cada.....	82
Tabela A. 1 – Valores das rigidezes dos elementos.....	90

## Lista de Símbolos

$A$	Área da seção transversal
$\mathbf{B}$	Matriz que relaciona deslocamentos nodais e deformações
$c$	Velocidade de propagação da onda
$\mathbf{C}$	Matriz de amortecimento
$\mathbf{C}_e$	Matriz de amortecimento
$\mathbf{C}_t$	Matriz de amortecimento tangente
$e^{\text{energ}}$	Erro para o critério em energia
$e^{\text{força}}$	Valor do erro para o critério de força
$e^{\text{rel}}$	Erro relativo
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal
$f(\mathbf{x})$	Função contínua
$\mathbf{f}_B(\mathbf{u})$	Vetor de forças de volume
$\mathbf{f}_C(\mathbf{u})$	Vetor de cargas concentradas
$\mathbf{f}_S(\mathbf{u})$	Vetor de forças de superfície
$\bar{\mathbf{F}}$	Vetor de forças efetivo
$\mathbf{F}_{\text{ext}}$	Vetor de forças externas
$\mathbf{F}_{\text{int}}$	Vetor de forças internas
$\mathbf{F}_{\text{ref}}$	Vetor de forças de referência para cálculo do erro usando o critério de força

<b>G</b>	Módulo de elasticidade transversal
<b><math>\mathbf{g}(\mathbf{x})</math></b>	Gradiente de $f(\mathbf{x})$
<b><math>\mathbf{H}^k</math></b>	Hessiana da função $f(\mathbf{x})$
<b>I</b>	Momento de inércia
<b>J</b>	Momento de inércia polar
<b><math>\mathbf{K}</math></b>	Matriz de rigidez
<b><math>\overline{\mathbf{K}}</math></b>	Matriz de rigidez efetiva na versão deslocamento da formulação
<b><math>\overline{\overline{\mathbf{K}}}</math></b>	Matriz de rigidez efetiva na versão aceleração da formulação
<b><math>\mathbf{K}_e</math></b>	Matriz de rigidez do elemento
<b><math>\mathbf{K}_t</math></b>	Matriz de rigidez tangente
<b>k</b>	Curvatura
<b>L</b>	Comprimento do elemento
<b><math>\mathbf{L}_e</math></b>	Matriz booleana de conectividade
<b><math>\mathbf{M}</math></b>	Matriz de massa da estrutura
<b><math>M_o</math></b>	Momento de referência
<b>n<sub>glb</sub></b>	Número de graus de liberdade do modelo
<b><math>\mathbf{N}</math></b>	Matriz das funções de interpolação
<b><math>\mathbf{p}</math></b>	Direção da busca linear
<b><math>\mathbf{p}_e</math></b>	Coordenadas não nulas do vetor $\hat{\mathbf{p}}_e$
<b><math>\hat{\mathbf{p}}_e</math></b>	Vetor $\mathbf{p}$ sendo anuladas as posições dos graus de liberdade que não estão conectados ao elemento $e$
<b><math>\mathbf{P}</math></b>	Matriz de pré-condicionamento
<b><math>\mathbf{R}</math></b>	Vetor de forças desequilibradas ( $\mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$ )
<b><math>\mathbf{R}_e</math></b>	Vetor de forças desequilibradas local do elemento

$\hat{\mathbf{R}}_e$	Vetor de forças desequilibradas do elemento, expandida para o sistema global
$t$	Valor do tempo corrente
$T_m$	Menor período do sistema de elementos finitos com $m$ graus de liberdade
$T$	Energia cinética
$\mathbf{u}$	Vetor de deslocamentos nodais
$\dot{\mathbf{u}}$	Vetor de velocidades nodais
$\ddot{\mathbf{u}}$	Vetor de acelerações nodais
$\bar{\mathbf{u}}$	Campo de deslocamentos no interior do elemento
$\dot{\bar{\mathbf{u}}}$	Vetor de velocidades no interior do elemento
$\ddot{\bar{\mathbf{u}}}$	Vetor de acelerações no interior do elemento
$\tilde{\mathbf{u}}$	Preditor de deslocamento do algoritmo de Newmark
$\tilde{\dot{\mathbf{u}}}$	Preditor de velocidade do algoritmo de Newmark
$\mathbf{u}_0$	Vetor com as condições iniciais para deslocamento
$\mathbf{v}_0$	Vetor com as condições iniciais para velocidades
$W_{\text{ext}}$	Trabalho das forças externas
$W_{\text{int}}$	Trabalho das forças internas
$\alpha$	Escalar que minimiza $f(\mathbf{u} + \alpha\mathbf{p})$ .
$\beta$	Escalar que define a nova direção de busca / parâmetro do algoritmo de Newmark
$\gamma$	Parâmetro do algoritmo de Newmark
$\delta\bar{\mathbf{u}}$	Vetor de deslocamentos virtuais
$\delta W_{\text{externo}}$	Trabalho virtual das forças externas
$\delta W_{\text{interno}}$	Trabalho virtual das forças internas



$\delta\boldsymbol{\varepsilon}$	Vetor de deformações virtuais
$\Delta t$	Valor do intervalo de tempo
$\Delta t_{cr}$	Valor do intervalo de tempo crítico para o MDC
$\Delta\mathbf{u}$	Incremento de deslocamento
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Campo de deformações
$\rho$	Densidade mássica do material
$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$	Tensor de tensões
$\chi_n$	Variável $\chi$ no tempo $n \cdot \Delta t$
$\chi_{n+1}^k$	Variável $\chi$ no tempo $(n+1)\Delta t$ , na iteração $k$
$\omega_{max}$	Máxima frequência da estrutura

## Lista de Abreviaturas

CG	Método dos Gradientes Conjugados
ExE	Elemento por Elemento
MEF	Método dos Elementos Finitos
MDC	Método das Diferenças Centrais
MDF	Método das Diferenças Finitas
NLCG	Método dos Gradientes Conjugados Não Linear
NR	Método de Newton-Raphson
nelem	Número de elementos do modelo de elementos finitos
PCG	Método dos Gradientes Conjugados Pré-condicionados
PTV	Princípio dos Trabalhos Virtuais

## Resumo

A dinâmica de estruturas compreende uma vasta área de atuação visto que as ações da natureza são geralmente variáveis com o tempo. Análises de aeronaves, estruturas *offshore*, estruturas sujeitas a terremotos, entre outras, devem ser realizadas considerando também os efeitos inerciais, que têm papel importante na performance e segurança dessas estruturas. A análise do comportamento dinâmico dessas estruturas é bastante complexa em virtude das diversas não linearidades que podem estar presentes. Atualmente, essas análises são realizadas utilizando-se algoritmos numéricos computacionais para discretização espacial e temporal, exigindo, em geral, grandes esforços computacionais. Com o advento dos *clusters* de computadores na década de 90, o emprego de algoritmos numéricos paralelos utilizando a técnica elemento por elemento tem se difundido e se mostrado eficiente na solução desses problemas. Nesse contexto, este trabalho está direcionado ao estudo de algoritmos de integração no tempo para problemas de dinâmica não linear de estruturas pelo método dos elementos finitos, que possibilitem seu uso futuro em arquiteturas computacionais paralelas. Os principais algoritmos para dinâmica não linear de estruturas são revisados, assim como as alternativas de implementação através da utilização da técnica elemento por elemento. Em seguida, utilizando-se o programa computacional MATLAB, implementam-se alguns desses algoritmos e avaliam-se suas características através de exemplos ilustrativos. Observam-se, nesses exemplos, características como custo computacional, número de iterações e qualidade das respostas geradas para problemas quase estáticos e dinâmicos não lineares considerando-se diversos níveis de discretização espacial e temporal.

**Palavras-Chave:** *Análise dinâmica, Análise não linear, Algoritmos de integração, Elemento por elemento*

## Abstract

The topic of structural dynamics involves an ample actuation field since the most of nature actions are time dependent. The analyses of structures in aerospace engineering, offshore engineering, civil engineering and others might be realized including the inertial effects since they have important role in reliability and safety of them. Due to the various nonlinearities that can be present in the dynamic analysis, the preview of the dynamic behavior of a structure can become a complex task. That analysis is generally executed using computational numeric algorithms improved for spatial and temporal discretization where computational requirements are excessive. Techniques based on element-by-element concept have gained recognition due to its increasing efficiency caused by the recent development of parallel computers. This work is focused on time integration algorithms for nonlinear dynamic problems formulated by the finite element approach. Besides, the considered algorithms have been prepared to be used, in the future, on parallel computational architectures. The main algorithms for nonlinear structural dynamics and alternatives of implementation of the element-by-element techniques are studied. The software MATLAB has been used for implementation of some algorithms, whose features are analyzed by examples. Some characteristics – as computational cost, number of iterations and solutions quality – are observed for nonlinear quasistatic and dynamic problems, adopting several spatial and temporal discretization levels.

**Key-words:** *Dynamic analyses, Nonlinear analyses, Integration methods, Element-by-element.*

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1. Relevância do tema

Os modelos físicos e matemáticos utilizados na engenharia buscam sempre representar, de forma mais fiel possível, os eventos que ocorrem na natureza. O interesse pela dinâmica de estruturas sempre esteve presente no contexto da engenharia, visto que na natureza as ações aplicadas às estruturas são geralmente variáveis com o tempo. Quando possível, utilizam-se modelos independentes do tempo, ditos estáticos, para representar algum dado fenômeno. Porém, em casos como aeronaves, estruturas *offshore*, terremotos e muitos outros, as ações variantes com o tempo têm papel principal na performance e segurança da estrutura. A Figura 1.1 ilustra alguns dos casos acima citados.

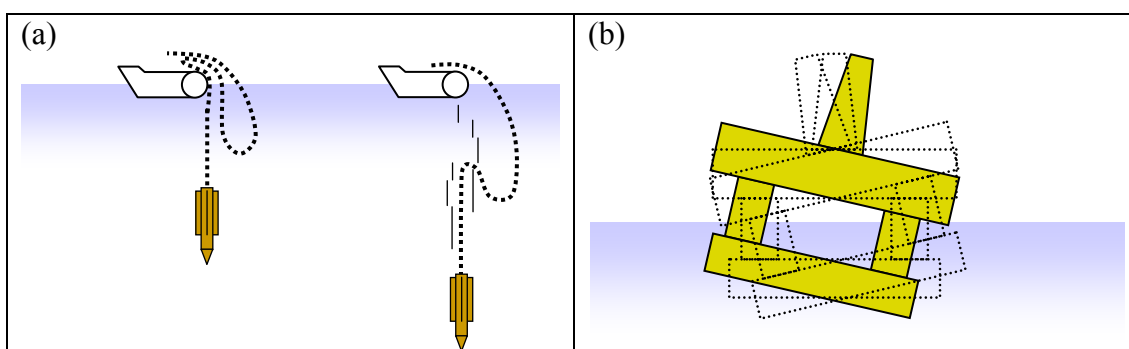


Figura 1.1 – (a) Lançamento de estacas torpedo (âncoras para estrutura *offshore*); (b) Estrutura flutuante submetida aos efeitos da natureza.

Especialmente a partir da última metade do século passado, os recursos computacionais passaram a integrar, de forma mais viável, o rol de ferramentas para a solução de problemas de dinâmica estrutural, alavancando os desenvolvimentos nessa área da engenharia. Mesmo passadas algumas décadas e considerando a incrível

velocidade com que a tecnologia da informação tem se desenvolvido, as soluções de muitos problemas de dinâmica de estruturas são limitadas pelo custo computacional exigido.

Devido à variedade de fenômenos incluídos no estudo de dinâmica de estruturas, usa-se classificá-los em problemas quase estáticos, de dinâmica estrutural e de propagação de onda. Essas classes são definidas de acordo com a participação maior ou menor de altas e baixas frequências na resposta da estrutura. Nesta dissertação o foco dos estudos está direcionado para os problemas quase estáticos e de dinâmica estrutural, problemas onde as frequências de excitação são da ordem de grandeza das frequências naturais mais baixas da estrutura.

Para obtenção das respostas da estrutura, especialmente em problemas não lineares, faz-se necessário o uso de técnicas computacionais para integração no tempo. Várias opções estão disponíveis na literatura, possuindo, cada uma, particularidades que as tornam mais adequadas a certos tipos de problemas. De um modo geral, esses algoritmos são classificados em algoritmos implícitos e explícitos.

A formulação dos algoritmos explícitos é, em geral, mais adequada aos problemas de propagação de onda, pois apresentam baixo custo computacional por intervalo de tempo. Porém, essa formulação apresenta uma restrição para o intervalo de tempo, baseada nas frequências naturais mais altas da estrutura, penalizando o seu desempenho em problemas regidos pelas baixas frequências. Em geral, para que esses algoritmos apresentem a performance desejada, exige-se a solução de um sistema diagonal de equações (desacoplado), em cada passo de tempo. Para os problemas quase estáticos e de dinâmica estrutural, os algoritmos ditos implícitos apresentam melhor performance que os explícitos (COOK e outros, 1989). Essa constatação deve-se especialmente ao fato de que nesses casos há maior interesse na integração das frequências mais baixas, permitindo, para os algoritmos implícitos, o uso de intervalos de tempo maiores. Porém, tradicionalmente, o uso de algoritmos implícitos implica na necessidade da montagem das matrizes globais do sistema estrutural, demandando mais memória para armazenamento de dados durante a análise. Outra característica comum nesses algoritmos é a construção da matriz de rigidez tangente da estrutura, que para problemas não lineares podem apresentar dificuldades para geração, a exemplo dos problemas de contato e dos que envolvem o atrito.

As situações que envolvem análises numéricas de grande porte podem ter seu tempo de análise reduzido através de aplicações realizadas em paralelo. Em especial, ao se tratar de algoritmos de integração, a utilização de técnicas elemento por elemento se destaca para esse tipo aplicação. Essas técnicas tiram partido da independência dos cálculos realizados no nível do elemento, o que permite a sua paralelização e economia de memória.

Justifica-se assim a proposta de se estudar estratégias para alterações em algoritmos de integração, embutindo neles algumas características particulares das técnicas elemento por elemento, como a economia de memória e uma estrutura que facilite a futura paralelização do código computacional.

## **1.2. Objetivos**

Esta dissertação tem como objetivos estudar estratégias elemento por elemento para algoritmos de integração no tempo; implementar algumas estratégias em algoritmos não lineares de integração; e avaliação do comportamento desses algoritmos diante de casos de análises dinâmicas e quase estáticas de estruturas.

Busca-se gerar conhecimento acerca do comportamento dos algoritmos combinados com as estratégias elemento por elemento, visando o futuro uso destes em ambientes de computação paralela.

## **1.3. Estrutura da dissertação**

Esta dissertação está organizada em cinco capítulos mais dois apêndices. O primeiro capítulo, de introdução, contém a relevância do tema abordado, onde justifica-se o interesse pela análise dinâmica de estruturas, em especial pelo estudo de algoritmos de integração. Ainda nesse capítulo, apresentam-se os objetivos da dissertação e uma breve descrição da sua estrutura e conteúdo.

No segundo capítulo é introduzido o tema de dinâmica de estruturas. Apresenta-se a discretização espacial, através da formulação em deslocamentos do Método dos Elementos Finitos, e de forma sucinta aborda-se a discretização temporal, introduzindo-se o tema principal do trabalho.

O terceiro capítulo possui todo o conteúdo explorado acerca de algoritmos de integração. Inicia-se revisando as classes de algoritmos, apresentando-se os mais

tradicionais, e descrevem-se brevemente algumas técnicas de solução de sistemas não lineares, usadas nos algoritmos estudados. Aborda-se a técnica elemento por elemento, descrevendo suas características e sua formulação, e introduzindo-a nos algoritmos antes apresentados. Finalizando esse capítulo, encontra-se uma descrição de algumas medidas de erros utilizadas para critérios de convergência e quantificação da qualidade das respostas obtidas pelos métodos implementados.

No quarto capítulo, apresentam-se exemplos onde são utilizadas as implementações dos algoritmos estudados. São abordados casos lineares e não lineares, e de dinâmica estrutural e quase estáticos. Avalia-se a qualidade das respostas geradas, o tempo gasto pelos algoritmos, número de iterações, comentando-se os resultados encontrados.

As conclusões e sugestões para trabalhos futuros estão descritas no quinto capítulo deste trabalho. Esse capítulo é seguido pela lista de referências utilizadas no decorrer do trabalho, organizadas em ordem alfabética.

Para complementar o conteúdo do trabalho, apresentam-se dois apêndices. O apêndice A aborda as operações passíveis de serem realizadas elemento por elemento, executando-as passo a passo para esclarecer em quais etapas a técnica é aplicada. Por fim, o apêndice B descreve a geração das matrizes de massa e rigidez e do vetor de forças internas para o elemento de barra bidimensional, usado nos exemplos explorados.

#### **1.4. Notação utilizada**

Nesta dissertação adota-se a notação matricial, utilizando-se o negrito para representar vetores, tensores e matrizes. As letras maiúsculas simbolizam as matrizes e as minúsculas os vetores e tensores.

Para representar o valor de uma variável em um determinado intervalo de tempo, utilizam-se índices subscritos que indicam o intervalo de tempo corrente. No caso de processos iterativos, o valor da variável em cada iteração é indicado por índices sobrescritos contendo o valor da iteração corrente.



## Capítulo 2

### Introdução à Dinâmica de Estruturas

#### 2.1. Introdução

Este é um capítulo introdutório onde se apresenta a dinâmica de estruturas como o estudo da formulação e da solução de equações diferenciais parciais onde o tempo e o espaço são variáveis.

Adota-se o processo de semidiscretização, realizando-se inicialmente a discretização espacial através do Método dos Elementos Finitos. Descreve-se a formulação em deslocamentos desse método, gerando um novo sistema de equações, porém equações diferenciais ordinárias no tempo.

Ao final, de forma sucinta, trata-se do tema da discretização temporal, descrevendo os principais tipos de métodos de integração no tempo, introduzindo o tema principal do trabalho que é abordado no próximo capítulo.

#### 2.2. Abordagem geral sobre dinâmica de estruturas

A formulação matemática utilizada em dinâmica de estruturas é baseada em equações diferenciais parciais hiperbólicas, tendo como variáveis o tempo e o espaço. A obtenção dessas equações diferenciais depende de uma modelagem física e matemática do fenômeno de interesse. O modelo é, portanto, uma tentativa de se simular, através de equações ou sistemas de equações, o fenômeno observado.

Existem procedimentos formalizados para sistematizar a obtenção das equações diferenciais que regem o comportamento do sistema. Dois deles são bastante usados, o equilíbrio direto de forças e os métodos energéticos, cujos procedimentos podem ser encontrados na literatura (COOK e outros, 1989).

Nos itens 2.3 e 2.4 estão apresentados métodos para solução das equações diferenciais que regem o fenômeno em estudo. Porém, a escolha dos métodos mais

apropriados depende da natureza do problema, incluindo os tipos das ações e as propriedades do sistema estrutural. Dentro do contexto da análise dinâmica, a depender das frequências de excitação e da correspondente resposta da estrutura, classificam-se as análises em problema de propagação de onda, de dinâmica estrutural ou quase estático (COOK e outros, 1989). É importante observar que essa é uma divisão criada para facilitar os estudos dos diversos fenômenos físicos existentes em dinâmica das estruturas. Na natureza, o que se observa é uma combinação desses casos gerando a resposta do sistema. A observação e o bom senso do engenheiro é que indicará qual dos casos é mais predominante na análise a ser realizada.

Nos casos em que o carregamento e a resposta da estrutura são ricos em altas frequências, os efeitos das ondas de tensão são do interesse da engenharia. Esses são os chamados problemas de propagação de onda que geralmente ocorrem nas situações de impacto, cargas explosivas, mudanças bruscas de condição de contorno e outros. O tempo de análise é usualmente curto, se restringido ao tempo que uma onda transversal leva para percorrer a estrutura (COOK e outros, 1989).

Os problemas de dinâmica estrutural, também denominados inerciais, têm as respostas governadas por modos de baixas frequências. São os problemas onde os efeitos da inércia são importantes, mas o foco da análise está direcionado para as conseqüências de cargas tipo harmônicas, rampas, ou seja, cujas frequências estejam na faixa das mais baixas frequências naturais da estrutura. O tempo de análise, nesses casos, é bem maior do que nos problemas de propagação de onda (COOK outros, 1989).

Os efeitos inerciais no caso de problemas quase estáticos são bastante reduzidos devido às baixas frequências de excitação. Se conveniente, pode-se desprezar esses efeitos e realizar uma análise estática nesse caso, simplificando o processo de solução. COOK e outros (1989) limitam essas análises aos casos em que as frequências de excitação são menores que um terço das menores frequências naturais da estrutura.

### **2.3. Discretização espacial**

Para solucionar as equações diferenciais parciais geradas pela modelagem e obter a resposta do sistema, usa-se aproximar os campos contínuos no espaço por variáveis discretas, através de técnicas de aproximação como, por exemplo, o Método dos Elementos Finitos ou o Método das Diferenças Finitas. Esse processo de discretização

no espaço independente do tempo é dito semidiscretização (HUGHES & BELYTSCHKO, 1983; ZIENKIEWICZ & MORGAN, 1983). Neste trabalho adota-se o Método dos Elementos Finitos como a alternativa para discretização espacial.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um dos Métodos dos Resíduos Ponderados, tendo como base a forma fraca do Método de Galerkin, que do ponto de vista da mecânica corresponde ao princípio dos deslocamentos virtuais. Consiste basicamente em dividir o domínio em sub-regiões, ditas elementos, cujo comportamento é conhecido, conectadas por alguns pontos, os nós, através dos quais interagem entre si, como apresentado na Figura 2.1.

A solução de um problema, através da formulação em deslocamentos do Método dos Elementos Finitos, pode ser sistematizada através das etapas a seguir:

1. Divide-se o domínio do problema em subdomínios denominados elementos finitos, conectados entre si através de um número finito de pontos denominados pontos nodais ou nós.
2. Aproxima-se a distribuição da variável cuja solução é procurada por uma função particular, função de interpolação.
3. Relaciona-se o valor da variável nos nós de cada elemento com as suas propriedades e geometria, dando origem ao sistema de equações do elemento.
4. Associam-se as equações dos elementos considerando suas conexões através dos pontos nodais. Tem-se um sistema global de equações para o problema.
5. Induz-se no contorno os valores conhecidos da variável do problema (introdução das condições de contorno).
6. Resolve-se o sistema de equações global, obtendo-se os valores da variável do problema nos nós.

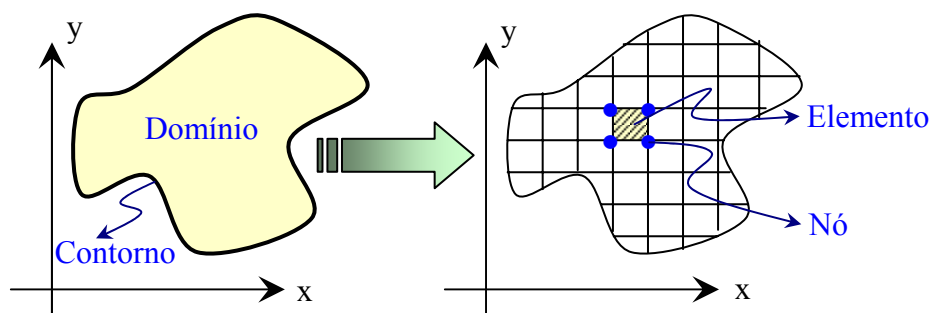


Figura 2.1 – Idéia básica do Método dos Elementos Finitos.

### 2.3.1. Formulação em deslocamentos do Método dos Elementos Finitos

Como comentado anteriormente, o domínio do problema é subdividido em uma série de elementos finitos. O comportamento de cada elemento é aproximado por funções de interpolação. Tais funções devem ser escolhidas de modo a garantir a continuidade de todo meio discretizado. A qualidade da solução aproximada depende do grau de refinamento das funções de interpolação e da malha de elementos finitos.

A formulação em deslocamentos do método dos elementos finitos supõe que no interior do elemento o valor dos deslocamentos e das deformações seja dado de uma forma pré-estabelecida, em função dos deslocamentos nodais. O campo de deslocamentos em cada elemento é aproximado por:

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\mathbf{u}, \quad (2.1)$$

onde  $\bar{\mathbf{u}}$  é o campo de deslocamentos no interior do elemento que é função do tempo e do espaço;  $\mathbf{N}$  é a matriz das funções de interpolação, função apenas do espaço e  $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamentos nodais, função apenas do tempo.

No caso de análise dinâmica, a discretização estende-se às derivadas do campo de deslocamento. Têm-se:

$$\bar{\dot{\mathbf{u}}} = \mathbf{N}\dot{\mathbf{u}} \quad e \quad (2.2)$$

$$\bar{\ddot{\mathbf{u}}} = \mathbf{N}\ddot{\mathbf{u}} \quad (2.3)$$

onde  $\bar{\dot{\mathbf{u}}}$  é o vetor de velocidades no interior do elemento;  $\bar{\ddot{\mathbf{u}}}$  é o vetor de acelerações no interior do elemento;  $\dot{\mathbf{u}}$  é o vetor de velocidades nodais e  $\ddot{\mathbf{u}}$  é o vetor de acelerações nodais.

O campo de deformações em cada elemento está relacionado com os deslocamentos nodais através da relação:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (2.4)$$

onde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é o campo de deformações e  $\mathbf{B}$  é a matriz que relaciona deslocamentos nodais e deformações.

Para um corpo deformável em equilíbrio, o Princípio dos Trabalhos Virtuais estabelece, em cada instante de tempo, a igualdade entre o trabalho das forças internas e das forças externas durante o desenvolvimento de um campo de deslocamentos virtuais, compatível com os vínculos externos e a continuidade do corpo (COOK e outros, 1989).

As forças internas de um corpo em equilíbrio podem ser obtidas a partir do estado de tensões e das forças inerciais presentes em cada ponto. Ao campo de deslocamentos virtuais corresponde um estado de deformação virtual associado. O trabalho das forças internas é dado por:

$$\delta W_{\text{interno}} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) dV + \int_V \delta \bar{\mathbf{u}}^T \rho \bar{\mathbf{u}} dV, \quad (2.5)$$

sendo  $\delta W_{\text{interno}}$  o trabalho virtual das forças internas;  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  o vetor de deformações virtuais;  $\delta \bar{\mathbf{u}}$  o vetor de deslocamentos virtuais;  $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})$  o tensor de tensões, função das deformações e das taxas de deformações e  $\rho$  a densidade mássica do material.

O trabalho das forças externas é dado por:

$$\delta W_{\text{externo}} = \int_V \delta \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{f}_B(\mathbf{u}) dV + \int_S \delta \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{f}_S(\mathbf{u}) dS + \sum \delta \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{f}_C(\mathbf{u}), \quad (2.6)$$

sendo  $\delta W_{\text{externo}}$  o trabalho virtual das forças externas;  $\mathbf{f}_B(\mathbf{u})$  o vetor de forças de volume; o  $\mathbf{f}_S(\mathbf{u})$  o vetor de forças de superfície e  $\mathbf{f}_C(\mathbf{u})$  o vetor de cargas concentradas.

No Método dos Elementos Finitos, para atender a condição de equilíbrio em todo o domínio, faz-se o somatório da contribuição de cada elemento. Portanto, considerando que as forças externas sejam representadas pelas forças nodais resultantes dos carregamentos e fazendo o trabalho das forças externas igual ao trabalho das forças internas, tem-se a equação obtida pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais:

$$\sum_{i=1}^{nelem} \int_{V_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) dV + \sum_{i=1}^{nelem} \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \ddot{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{nelem} \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_B dV + \sum_{i=1}^{nelem} \int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_S dS + \sum_{i=1}^{nelem} \mathbf{f}_C, \quad (2.7)$$

onde  $nelem$  é o número de elementos do modelo de elementos finitos e  $\rho$  é a densidade mássica do material.

A equação ( 2.7 ) pode ser resumida na forma apresentada na equação ( 2.8 ):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{f}_{ext}(\mathbf{u}). \quad (2.8)$$

As ações externas estão apresentadas como dependentes dos deslocamentos, porém neste trabalho essa dependência não é considerada. No item 2.3.2 são feitas algumas observações a respeito de fontes de não linearidades, incluindo o caso acima citado. A equação ( 2.8 ) torna-se então:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{f}_{ext}. \quad (2.9)$$

Na equação ( 2.10 ) apresenta-se a matriz de massa do modelo, que representa uma discretização da distribuição contínua de massa da estrutura.

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{nelem} \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV, \quad (2.10)$$

O vetor de forças internas, função dos deslocamentos e velocidades nodais, é representado por:

$$\mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \sum_{i=1}^{nelem} \int_{V_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) dV. \quad (2.11)$$

Em particular, se a linearidade é assumida com relação aos deslocamentos e velocidades, a equação ( 2.11 ) toma a forma clássica:

$$\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \sum_{i=1}^{\text{nelem}} \mathbf{K}_e \mathbf{u} + \mathbf{C}_e \dot{\mathbf{u}}, \quad (2.12)$$

onde  $\mathbf{K}_e$  é a matriz de rigidez do elemento e  $\mathbf{C}_e$  a matriz de amortecimento.

Na equação ( 2.13 ) apresenta-se a parcela correspondente às ações externas, função apenas do tempo.

$$\mathbf{f}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{\text{nelem}} \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_B \, dV + \sum_{i=1}^{\text{nelem}} \int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_S \, dS + \sum_{i=1}^{\text{nelem}} \mathbf{f}_C. \quad (2.13)$$

A equação ( 2.8 ) ou ( 2.9 ), conhecida por equação de movimento, foi resultado de uma discretização no espaço, porém, para completar o processo de solução, esse novo sistema deve ser resolvido. No item 2.4, algumas técnicas de integração no tempo são apresentadas.

### 2.3.2. Considerações sobre análises lineares e não lineares

Na natureza, os fenômenos são em geral não lineares. Há casos, porém, em que a influência das fontes de não linearidades não é relevante para a análise. Nesses casos, a análise linear é geralmente utilizada devido a sua simplicidade para formulação e implementação.

Neste trabalho, objetiva-se abordar problemas de natureza não linear, portanto, a formulação utilizada permite a inclusão de não linearidades, porém, restritas ao vetor de forças internas. Fenômenos como não linearidade física (do material), geométrica, geradas por problemas de contato, atrito, interação fluido-estrutura e outros podem ser abordados pela formulação apresentada.

Cargas externas dependentes da geometria, também denominadas cargas seguidoras, não estão no âmbito deste trabalho. Esse tipo de não linearidade é causa de alterações no sistema de equações como a perda da simetria das matrizes do sistema (BELYTSCHKO & HUGHES, 1983), condição não tratada pelos algoritmos apresentados.

## 2.4. Discretização temporal

Após ter partido de um sistema de equações diferenciais parciais e ter sido utilizada a técnica de discretização no espaço por elementos finitos, obteve-se um novo sistema de equações, porém, um sistema de equações diferenciais ordinárias. O problema a ser abordado tornou-se, portanto, um problema de valor inicial apenas, representado pela solução da equação ( 2.8 ).

Há vários métodos para obtenção da resposta dinâmica após um processo de semidiscretização, como o realizado no item anterior. Esses métodos podem ser divididos em duas principais categorias, os métodos modais e os métodos diretos.

### 2.4.1. Métodos Modais

O Método da Superposição Modal consiste em transformar as equações de equilíbrio expressas em coordenadas físicas em novas equações expressas em coordenadas generalizadas (BATHE, 1996; COOK e outros, 1989), usualmente os modos naturais de vibração da estrutura. Nessas coordenadas as equações tornam-se desacopladas, podendo ser resolvidas separadamente, se não houver amortecimento, ou se este for ortogonal, como ocorre com o amortecimento de Rayleigh. Esse método se restringe aos casos de dinâmica linear de estruturas e se todos os modos forem integrados, a resposta obtida não possui aproximações.

### 2.4.2. Métodos Diretos

Os métodos diretos são aplicados a problemas lineares ou não lineares e consistem na obtenção da solução aproximada da equação de movimento em determinados instantes de tempo discretos. WEAVER e JOHNSTON (1987) visualizam as técnicas numéricas utilizadas para tal objetivo como um tipo de aproximação por diferenças finitas. COOK e outros (1989) também apresentam essa abordagem para definição dos métodos diretos.

Uma abordagem mais moderna sobre esse tema é dada por ZIENKIEWICZ e MORGAN (1983) que apresentam o procedimento para discretização no tempo como uma aplicação da técnica de Resíduos Ponderados, onde, a depender da escolha das funções de ponderação, recai-se no método das diferenças finitas ou no método dos elementos finitos. No último caso, procede-se de forma semelhante à realizada na



discretização espacial, usando-se, neste caso, elementos finitos lineares para representar o domínio do tempo.

Em ambas abordagens, conhecendo-se as equações governantes e as condições iniciais, obtém-se a solução para o final do primeiro incremento de tempo, ou elemento de tempo. Repete-se o procedimento para os demais incrementos, adotando-se a solução anterior como condição inicial do passo seguinte.

## Capítulo 3

### Algoritmos de integração para dinâmica não linear

#### 3.1. Introdução

Apresenta-se nos itens que seguem uma revisão dos principais tipos de algoritmos, suas classificações, formulações e estratégias de solução para os sistemas de equações gerados pelas formulações. Dentre os métodos explícitos, apresenta-se o algoritmo do Método das Diferenças Centrais, enquanto que na classe de métodos implícitos, apresenta-se a Regra Trapezoidal, ambos membros da família Newmark de algoritmos de integração.

Após a revisão dos algoritmos acima citados, abordam-se os conceitos da técnica elemento por elemento, aplicando-a as alternativas anteriormente apresentadas.

Ao final, apresentam-se algumas alternativas para medidas de erros, utilizadas como critério de convergência ou para verificação da qualidade da resposta gerada pelos algoritmos.

#### 3.2. Algoritmos de integração no tempo

Como abordado nos capítulos anteriores, a análise dinâmica é regida por equações diferenciais parciais. O uso da semidiscretização por elementos finitos permite transformar o sistema de equações diferenciais parciais em um problema de valor inicial apenas. O sistema de equações para análise não linear de estruturas resultante de uma discretização no espaço por elementos finitos está apresentado na equação ( 2.9 ), cujas condições iniciais estão expressas em:

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \text{ e} \tag{3.1}$$

$$\dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0. \quad (3.2)$$

Os algoritmos de integração, aqui abordados, são métodos diretos de discretização no tempo, consistindo em obter de forma aproximada o valor das variáveis em questão (os deslocamentos e suas derivadas) em determinados intervalos de tempo. A equação de movimento ( 3.3 ) expressa o equilíbrio estático para um determinado instante de tempo:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}_n, \dot{\mathbf{u}}_n) = \mathbf{f}_{\text{ext}_n}. \quad (3.3)$$

Nos métodos diretos o espaço de tempo foi dividido em intervalos ditos  $\Delta t$  e o subscrito  $n$  existente na equação ( 3.3 ) identifica o tempo  $n \cdot \Delta t$ .

Vários métodos diretos para integração das equações de movimento foram desenvolvidos, porém a escolha do método mais adequado depende principalmente do tipo de análise dinâmica que se deseja realizar.

Comumente classificam-se os diversos algoritmos em dois principais grupos, os algoritmos explícitos e os algoritmos implícitos. Neste trabalho, utiliza-se a definição de COOK e outros (1989) e BATHE (1996) para a classificação dos algoritmos de integração no tempo.

Os algoritmos explícitos são aqueles em que as variáveis no intervalo de tempo seguinte são determinadas apenas em função das variáveis obtidas nos intervalos de tempo passados. Essa definição pode ser expressa pela relação funcional:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{u}_n, \dot{\mathbf{u}}_n, \ddot{\mathbf{u}}_n, \mathbf{u}_{n-1}, \dots) \quad (3.4)$$

Nos algoritmos implícitos o valor da incógnita base no intervalo de tempo  $n+1$  é dependente do seu próprio valor, além da história ao longo dos tempos passados. Essa definição pode ser resumida na relação:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n+1}, \dot{\mathbf{u}}_{n+1}, \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}, \mathbf{u}_n, \dots). \quad (3.5)$$

Nos itens a seguir apresenta-se uma descrição mais detalhada das características de cada classe de algoritmos de integração.

### **3.3. Algoritmos explícitos**

Como apresentado no item 3.2, a principal característica das técnicas de integração explícitas é o fato da solução no tempo  $t + \Delta t$  ser obtida considerando-se as condições de equilíbrio do tempo  $t$ . Outras características importantes dessa formulação foram apresentadas por COOK e outros (1989) e BATHE (1996) e estão citadas nos parágrafos seguintes.

Tradicionalmente os algoritmos explícitos apresentam baixo custo computacional por intervalo de tempo, pois o sistema de equações gerado pela formulação é geralmente desacoplado. Não há portanto a necessidade de processos iterativos para obtenção da solução no passo de tempo  $t + \Delta t$ . Porém esse desacoplamento está condicionado ao fato das matrizes de massa e de amortecimento serem diagonais. Essa restrição, em alguns tipos de problemas, representa um sério obstáculo para uso dos algoritmos explícitos, já que a sua não observância implica em custos maiores por intervalo de tempo.

O desacoplamento anteriormente citado permite que os cálculos sejam feitos no nível do elemento, sem a montagem de matrizes globais do sistema. Essa característica além de ser bastante vantajosa nos casos de problemas de grande porte, já que representa uma importante economia de memória computacional, torna a implementação desses algoritmos mais simples do que os implícitos.

Quanto à estabilidade, os algoritmos explícitos apresentam uma restrição ao valor de incremento de tempo máximo usado para cada análise. Essa estabilidade condicional, garantida para problemas lineares, pode levar a pequenos valores para o intervalo de tempo. O valor crítico para  $\Delta t$  é inversamente proporcional à máxima frequência natural do sistema discreto, independente do tipo de solicitação aplicada à estrutura. Portanto, em problemas quase estáticos ou de dinâmica estrutural, os métodos explícitos tornam-se pouco eficazes já que o  $\Delta t$  crítico é bem menor que o necessário para uma integração razoavelmente precisa dos modos solicitados. Em problemas de propagação de onda, o  $\Delta t$  necessário para uma precisa integração das frequências

existentes na resposta do sistema é equivalente (ou menor) ao necessário para a garantia da estabilidade. Nesses casos os algoritmos explícitos tornam-se mais adequados.

Em problemas não lineares, o valor crítico para o intervalo de tempo é variável com o tempo, já que é atrelado às frequências naturais do sistema que se modificam ao longo da análise (ZIENKIEWICZ e MORGAN, 1983).

### 3.3.1. Algoritmo da diferença central

O Método da Diferença Central está entre os mais populares algoritmos explícitos usados em mecânica computacional. Sua formulação é baseada em aproximações por diferenças centrais para as velocidades e acelerações (COOK e outros, 1989):

$$\dot{\mathbf{u}}_n = \frac{1}{2 \cdot \Delta t} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n-1}) \quad \text{e} \quad (3.6)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_n = \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{u}_{n+1} - 2 \cdot \mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n-1}). \quad (3.7)$$

Essas expressões são geradas por uma interpolação quadrática no tempo para os vetores de deslocamento entre os instantes de tempo  $t$  e  $t + \Delta t$ .

A manipulação das relações ( 3.6 ) e ( 3.7 ) em conjunto com a equação de movimento gera o algoritmo apresentado na Figura 3.1. Alguns autores, a depender de como se procede a manipulação das equações, apresentam diferentes variantes do Método da Diferença Central. O algoritmo implementado neste trabalho (Figura 3.1) tem a forma da variante 1 apresentada por KRYSL e BELYTSCHKO (1998).

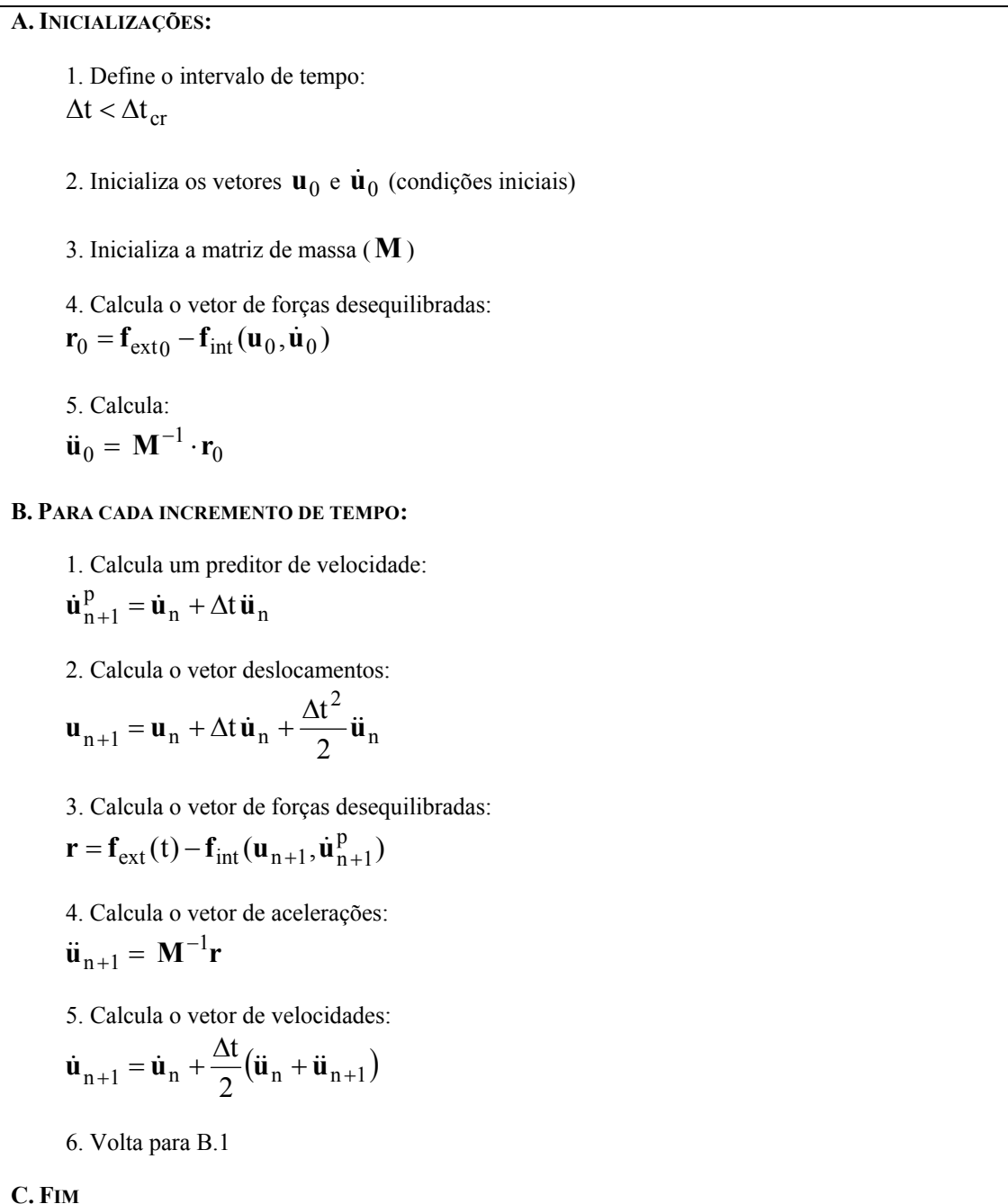


Figura 3.1 – Algoritmo do Método das Diferenças Centrais.

No algoritmo acima apresentado, observa-se que se a matriz de massa for diagonal, não é preciso uma técnica especializada para solução do sistema de equações lineares, já que este se torna desacoplado. É tradicional o uso de matrizes de massa diagonais em algoritmos explícitos, evitando-se a solução do sistema de equações em cada incremento de tempo. A diagonalização dessas matrizes torna o custo

computacional por intervalo de tempo, para esses algoritmos, consideravelmente menor que para os algoritmos implícitos.

Como mencionado anteriormente, o Método das Diferenças Centrais é condicionalmente estável, exigindo valores de intervalos de tempo relativamente pequenos. BATHE (1996) mostra que para o Método das Diferenças Centrais o valor crítico para o intervalo de tempo ( $\Delta t_{cr}$ ), o qual não deve ser ultrapassado, é dado por:

$$\Delta t_{cr} = \frac{T_m}{\pi}, \quad (3.8)$$

onde  $T_m$  é o menor período do sistema de elementos finitos com  $m$  graus de liberdade.

Em problemas de propagação de onda, casos de melhor performance dos métodos explícitos, é comum o aparecimento de altas frequências que não têm relação com a natureza física do problema, sendo causadas por erros provenientes do uso de ferramentas numéricas. O Método das Diferenças Centrais aqui apresentado não possui mecanismos para dissipação dessas frequências.

### 3.4. Algoritmos implícitos

A principal característica dos algoritmos implícitos, já citada anteriormente, reside no fato do valor da incógnita base no intervalo de tempo  $n + 1$  ser dependente do seu próprio valor, além da história ao longo dos tempos passados (COOK e outros, 1989). Essa dependência gera um sistema não linear de equações representado por:

$$\Phi(\mathbf{x}_{n+1}) = \mathbf{0}, \quad (3.9)$$

onde  $\mathbf{x}_{n+1}$  é a variável independente.

A solução do sistema ( 3.9 ) para cada passo de tempo representa a principal desvantagem dos algoritmos implícitos. Esse processo implica em um alto custo computacional por instante de tempo em comparação com os algoritmos explícitos. Outra consequência é a necessidade de montagem das matrizes globais do problema, gerando um maior uso de memória computacional, o que pode provocar a inviabilidade do algoritmo em problemas de grande porte.

Embora existam essas desvantagens, os algoritmos implícitos tornaram-se populares em análises dinâmicas. Características como a estabilidade incondicional, presente na maioria dos algoritmos implícitos, os tornam competitivos e, para certos tipos de problemas, mais adequados que os algoritmos explícitos.

Em problemas lineares a estabilidade incondicional permite a livre escolha do valor do incremento de tempo, ficando este apenas limitado pelos critérios de precisão (COOK e outros, 1989). Nos casos em que o valor de  $\Delta t$  máximo para garantia da estabilidade é bem menor que o necessário para precisão desejada, os algoritmos implícitos apresentam-se vantajosos em relação aos explícitos. Essas são geralmente situações de análises quase estáticas ou de dinâmica estrutural, onde as baixas frequências envolvidas no problema permitem valores de incremento de tempo relativamente altos para uma razoável precisão. Porém, mesmo nesses casos, quando a análise envolve não linearidades, a estabilidade dos algoritmos implícitos não fica garantida *a priori*, mas estes têm a tendência de serem mais estáveis que os explícitos, gerando menos dificuldades para a obtenção da resposta do sistema.

Quanto ao uso e à implementação, nos casos lineares, os algoritmos implícitos não oferecem maiores dificuldades que os explícitos, porém, ao se tratar de problemas não lineares, a busca do equilíbrio em cada instante de tempo passa a exigir técnicas mais elaboradas para solução de sistemas não lineares (COOK e outros, 1989 e SUBBARAJ e DOKAINISH, 1989).

No item a seguir, apresentam-se os métodos de solução de sistemas não lineares utilizados neste trabalho.

### 3.4.1. Técnicas de solução de sistemas não lineares

Na formulação em elementos finitos para dinâmica das estruturas, as variáveis em questão no sistema de equações ( 3.9 ) são aceleração, velocidade e deslocamento nodais no tempo  $n + 1$ . Porém apenas uma dessas variáveis é independente. Dessa forma, manipulando-se as relações de dependência, que serão tratadas posteriormente, tanto o deslocamento como a aceleração podem ser escolhidos. O sistema de equações não lineares ( 3.9 ) torna-se então:

$$\Phi(\mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{u}_{n+1}) + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}_{n+1}, \dot{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{u}_{n+1})) - \mathbf{f}_{\text{ext}_{n+1}}, \quad (3.10)$$



se a formulação for na versão deslocamento, ou, analogamente,

$$\Phi(\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}_{n+1}(\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}), \dot{\mathbf{u}}_{n+1}(\ddot{\mathbf{u}}_{n+1})) - \mathbf{f}_{\text{ext}_{n+1}}, \quad (3.11)$$

se a formulação for na versão aceleração.

Neste trabalho o Método de Newton-Raphson e Gradientes Conjugados Não Linear (PAPADRAKAKIS e GHIONIS, 1986) são utilizados na obtenção da solução do sistema não linear (3.9).

- **Método de Newton-Raphson**

Inicialmente aborda-se a formulação do Método de Newton-Raphson, cuja idéia básica é aproximar o sistema não linear em série de Taylor e o utilizar um processo iterativo para obter uma solução dentro de uma tolerância admitida.

Aproximando-se o sistema  $\Phi(\mathbf{u}_{n+1})$ , para a primeira ordem, tem-se:

$$\Phi(\mathbf{u}_{n+1}^{k+1}) \approx \Phi(\mathbf{u}_{n+1}^k) + \left. \frac{\partial \Phi(\mathbf{u}_{n+1})}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \right|_{\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1}^k} (\mathbf{u}_{n+1}^{k+1} - \mathbf{u}_{n+1}^k) = \mathbf{0}, \quad (3.12)$$

onde

$$\Phi(\mathbf{u}_{n+1}^k) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^k + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}_{n+1}^k, \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^k) - \mathbf{f}_{\text{ext}_{n+1}} \mathbf{e} \quad (3.13)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi(\mathbf{u}_{n+1})}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \right|_{\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1}^k} = \mathbf{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^k}{\partial \mathbf{u}_{n+1}^k} + \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^k} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^k}{\partial \mathbf{u}_{n+1}^k} + \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}^k}. \quad (3.14)$$

Nessas equações, o índice inferior indica o instante de tempo  $n+1$ , enquanto que o índice superior indica a  $k$ -ésima iteração.

Neste caso, utiliza-se como variável independente o deslocamento. Analogamente, para aceleração, obtém-se:

$$\Phi(\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{k+1}) \approx \Phi(\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^k) + \left. \frac{\partial \Phi(\ddot{\mathbf{u}}_{n+1})}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}} \right|_{\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^k} (\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{k+1} - \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^k) = \mathbf{0}, \quad (3.15)$$

onde

$$\Phi(\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^k) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^k + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}_{n+1}^k, \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^k) - \mathbf{f}_{\text{ext}_{n+1}} \quad \text{e} \quad (3.16)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi(\ddot{\mathbf{u}}_{n+1})}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}} \right|_{\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^k} = \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^k} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^k}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^k} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}^k} \frac{\partial \mathbf{u}_{n+1}^k}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^k}. \quad (3.17)$$

O sistema linearizado é tradicionalmente denominado **sistema efetivo** e representado por:

$$\overline{\mathbf{K}}_{n+1}^k \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k = \bar{\mathbf{f}}_{n+1}^k \quad \text{ou} \quad (3.18)$$

$$\overline{\overline{\mathbf{K}}}_{n+1}^k \Delta \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^k = \bar{\mathbf{f}}_{n+1}^k, \quad (3.19)$$

sendo

$$\overline{\mathbf{K}}_{n+1}^k = \left. \frac{\partial \Phi(\mathbf{u}_{n+1})}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \right|_{\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1}^k}, \quad (3.20)$$

$$\overline{\overline{\mathbf{K}}}_{n+1}^k = \left. \frac{\partial \Phi(\ddot{\mathbf{u}}_{n+1})}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}} \right|_{\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^k} \quad \text{e} \quad (3.21)$$

$$\bar{\mathbf{f}}_{n+1}^k = \mathbf{f}_{\text{ext}_{n+1}} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^k - \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}_{n+1}^k, \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^k). \quad (3.22)$$

onde,  $\overline{\mathbf{K}}_{n+1}^k$  é a matriz de rigidez efetiva na versão deslocamento da formulação,  $\overline{\overline{\mathbf{K}}}_{n+1}^k$  é a matriz de rigidez efetiva na versão aceleração e  $\bar{\mathbf{f}}_{n+1}^k$  é o vetor de forças efetivo.

Nas equações ( 3.14 ) e ( 3.17 ), o termo  $\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}^k}$  representa a variação das forças internas com os deslocamentos, sendo geralmente denominado de matriz de rigidez tangente ( $\mathbf{Kt}_{n+1}^k$ ). Da mesma forma, o termo  $\frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}}{\partial \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^k}$  representa a variação das forças internas com as velocidades, sendo portanto denominado matriz de amortecimento tangente ( $\mathbf{Ct}_{n+1}^k$ ). No caso de análise linear, as matrizes de rigidez e amortecimento tangentes permanecem constantes. A denominação “tangente” para essas matrizes perde o sentido, passando assim a serem representadas respectivamente por  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{C}$ . A matriz de rigidez efetiva passa a ser expressa na seguinte forma:

$$\overline{\mathbf{Kt}}_{n+1}^k = \mathbf{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^k}{\partial \mathbf{u}_{n+1}^k} + \mathbf{C} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^k}{\partial \mathbf{u}_{n+1}^k} + \mathbf{K} \quad \text{ou} \quad (3.23)$$

$$\overline{\overline{\mathbf{Kt}}}_{n+1}^k = \mathbf{M} + \mathbf{C} \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^k}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^k} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}_{n+1}^k}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^k}. \quad (3.24)$$

- **Método dos Gradientes Conjugados Não Linear**

O Método dos Gradientes Conjugados pode ser visto como um problema de minimização de uma função contínua  $f(\mathbf{x})$  cujo gradiente possa ser calculado (PAPADRAKAKIS e GHIONIS, 1986). O vetor  $\mathbf{x}$  que minimiza essa função equivale ao vetor solução do sistema não linear de equações:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (3.25)$$

onde  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  é o gradiente de  $f(\mathbf{x})$ , que, considerando a formulação em elementos finitos para dinâmica das estruturas, toma a forma:

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{u}_{n+1}) + \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}_{n+1}, \dot{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{u}_{n+1})) - \mathbf{F}_{\text{ext}_{n+1}}. \quad (3.26)$$

Nas equações seguintes deste item omitem-se os subscritos que indicam o tempo  $n + 1$  para tornar a notação mais leve.

A estratégia para minimização da função escalar consiste na busca sucessiva de mínimos em dadas direções. A Figura 3.2 ilustra as etapas desse processo.

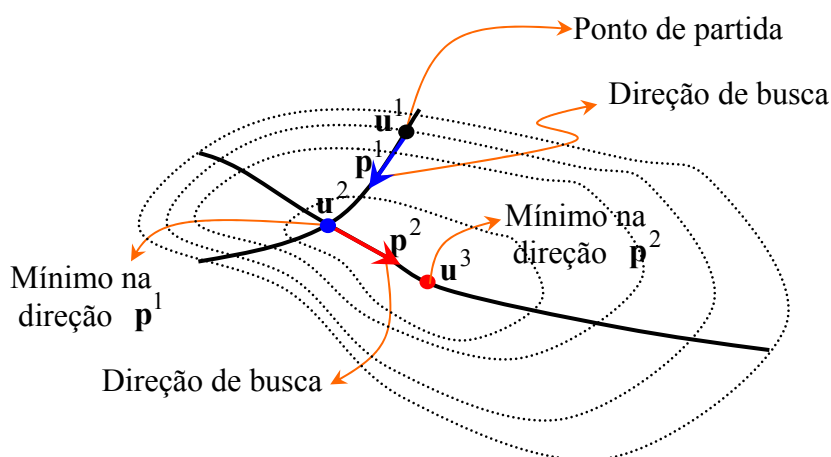


Figura 3.2 – Estratégia do Método dos Gradientes Conjugados.

A trajetória na qual se realiza a busca pelo mínimo é dada pela linha que passa por  $u^k$  e percorre a direção  $p^k$ :

$$u^{k+1} = u^k + \alpha^k p^k, \quad (3.27)$$

sendo  $\alpha^k$  o escalar que leva o ponto  $u^k$  ao mínimo de  $f(x)$  na direção  $p^k$ , ou seja, que minimiza  $f(u^k + \alpha^k p^k)$ .

No Método dos Gradientes Conjugados, o vetor direção de busca  $p^{k+1}$  é expresso por:

$$p^{k+1} = -g^{k+1} + \beta^k p^k, \quad (3.28)$$

sendo  $\beta^k$  um escalar que define a nova direção de busca e  $\mathbf{g}^{k+1} = \mathbf{g}(\mathbf{u}^{k+1})$ . SHEWCHUK (1994) apresenta em seu trabalho uma descrição detalhada das características do Método dos Gradientes Conjugados.

Alguns autores apresentam sugestões para valores de  $\beta^k$ , cuja melhor escolha permanece como alvo de investigações. PAPADRAKAKIS e GHIONIS (1986) fazem comparações entre as expressões de Fletcher-Reeves, Polak-Ribière e Soreson. Neste trabalho opta-se pela expressão sugerida por SORENSON (1969), dada por:

$$\beta^k = \frac{\mathbf{g}^{k+1\text{T}}(\mathbf{g}^{k+1} - \mathbf{g}^k)}{\mathbf{p}^{k\text{T}}(\mathbf{g}^{k+1} - \mathbf{g}^k)}, \quad (3.29)$$

Definida a direção de busca, o mínimo na trajetória ( 3.27 ) é obtido buscando-se anular a derivada direcional da função escalar  $f(\mathbf{x})$ , ou seja:

$$\frac{\partial f(\mathbf{u}^{k+1})}{\partial \alpha} = \frac{\partial f(\mathbf{u}^{k+1})}{\partial \mathbf{u}^{k+1}} \frac{\partial \mathbf{u}^{k+1}}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{ou} \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{u}^{k+1})}{\partial \alpha} = \mathbf{g}(\mathbf{u}^{k+1})\text{T} \mathbf{p}^k = 0. \quad (3.31)$$

Substituindo o valor de  $\mathbf{u}^{k+1}$  em ( 3.31 ), tem-se a seguinte equação:

$$\mathbf{p}^{k\text{T}} \mathbf{g}(\mathbf{u}^k + \alpha^k \mathbf{p}^k) = 0. \quad (3.32)$$

Observa-se na equação ( 3.32 ) que não há uma expressão explícita para  $\alpha^k$ , ou seja, uma solução analítica da equação não linear acima descrita. Neste trabalho, opta-se inicialmente por utilizar uma ferramenta numérica para cálculo de zero de função e, como uma segunda alternativa, por adotar uma aproximação linear da função gradiente, obtém-se uma expressão explícita para  $\alpha^k$ .

No primeiro caso, utilizam-se técnicas de ordem zero para determinação de zero de função. A técnica utilizada consiste em uma combinação dos métodos da bisseção,

secante e interpolação quadrática inversa (MATLAB, 2000), encontrando o zero de uma função de uma variável, dentro de um intervalo no qual a função muda de sinal. Caso o intervalo não seja conhecido, o próprio algoritmo se encarrega de encontrá-lo. Neste caso, conhece-se um ponto de partida próximo do qual um intervalo válido é investigado.

Observa-se que, ao se calcular o zero da função ( 3.32 ), não é necessária a montagem da matriz de rigidez do problema, já que essa equação envolve apenas o cálculo do gradiente, dado na equação de movimento ( 3.26 ).

No segundo caso, a função gradiente na direção  $\mathbf{p}^k$  é aproximada por:

$$\mathbf{g}(\alpha) \approx \mathbf{g}(0) + \left. \frac{d\mathbf{g}(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \alpha \quad \text{ou} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{g}(\alpha) \approx \mathbf{g}(0) + \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\alpha)}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^k} \cdot \left. \frac{d\mathbf{u}^k}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \alpha, \quad (3.34)$$

o que resulta em:

$$\alpha^k = - \frac{\mathbf{p}^{kT} \mathbf{g}^k}{\mathbf{p}^{kT} \mathbf{H}^k \mathbf{p}^k}, \quad (3.35)$$

onde  $\mathbf{H}^k$  é a hessiana da função  $f(\mathbf{x})$  avaliada em  $\mathbf{u}^k$ , ou seja,

$$\mathbf{H}^k = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{g}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}^2} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^k}. \quad (3.36)$$

Observa-se que nesse segundo caso é necessária a determinação da hessiana de  $f(\mathbf{x})$ , que em termos de dinâmica estrutural significa a montagem da matriz de rigidez efetiva, apresentada na equação ( 3.20 ).

Na Figura 3.3 apresenta-se o algoritmo do Método dos Gradientes Conjugados Não Linear.

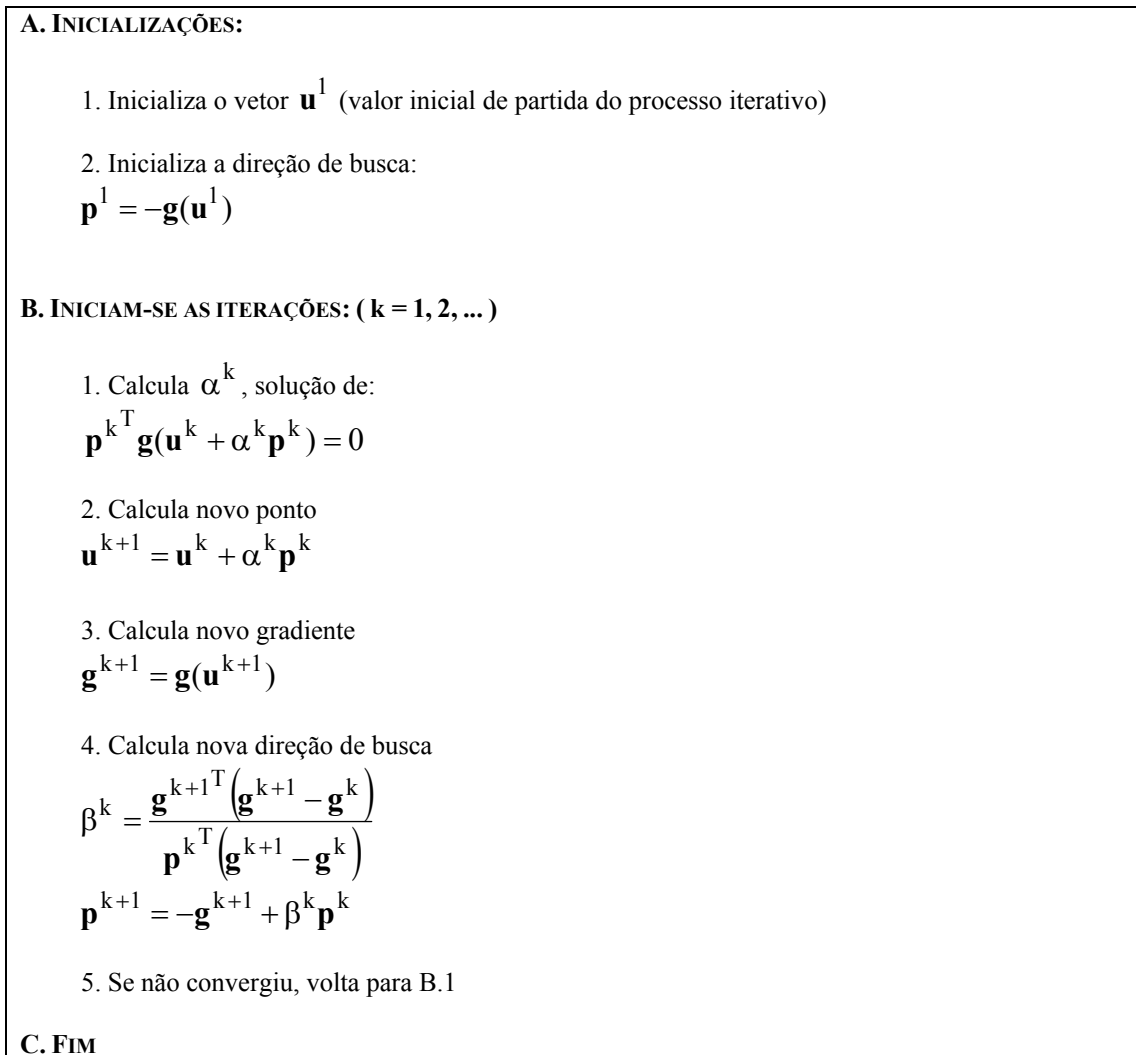


Figura 3.3 – Algoritmo do Método dos Gradientes Conjugados Não Linear.

Observa-se que o passo **B.5** na Figura 3.3 consiste em realizar um teste de convergência, cujo critério é abordado no item 3.6 que trata das medias de erros utilizadas neste trabalho.

### 3.4.2. Algoritmos da família Newmark

Dentre as famílias de algoritmos de integração, a família Newmark (NEWMARK, 1959) possui os mais populares algoritmos de integração. Consiste basicamente em expressar as velocidades e deslocamentos segundo aproximações por diferenças finitas no domínio do tempo, dadas por:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1-2\beta)\ddot{\mathbf{u}}_n + 2\beta\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}] \quad \text{e} \quad (3.37)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t [(1-\gamma)\ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}], \quad (3.38)$$

Os parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$  determinam propriedades de estabilidade e precisão dos métodos. HUGHES (1987) apresenta uma análise de estabilidade para os métodos da família Newmark, para problemas lineares, colocando que se

$$2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2}, \quad (3.39)$$

os algoritmos são incondicionalmente estáveis.

Muitos métodos conhecidos podem ser gerados a partir de particularizações das expressões ( 3.37 ) e ( 3.38 ). A Tabela 3.1 apresenta alguns desses métodos e suas características. Outras informações sobre cada método em particular podem ser encontradas em literaturas tradicionais como HUGHES (1987), COOK e outros (1989), BATHE (1996) entre outros. Neste trabalho adota-se a Regra Trapezoidal devido à sua estabilidade incondicional, garantida para análises lineares.

Tabela 3.1 – Métodos da família Newmark.

MÉTODO	TIPO	$\beta$	$\gamma$	CONDIÇÃO DE ESTABILIDADE	ORDEM DE PRECISÃO
Aceleração Média (Regra Trapezoidal)	implícito	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	Incondicional	2
Aceleração Linear	implícito	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	condicional	2
Fox-Goodwin	implícito	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	condicional	2
Diferença Central	explícito	0	$\frac{1}{2}$	condicional	2

As equações ( 3.37 ) e ( 3.38 ) em conjunto com a equação de equilíbrio ( 2.9 ) , representada também pelo sistema não linear ( 3.9 ) , formam um sistema com três equações e três incógnitas (  $\mathbf{u}_{n+1}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}$  ), considerando que os estados nos tempos



passados são conhecidos. Várias são as estratégias para a solução desse sistema, sendo as versões aceleração e deslocamento as mais tradicionais.

Na versão aceleração, como esta é considerada a variável independente, utilizam-se as equações ( 3.37 ) e ( 3.38 ) tal como foram apresentadas:

$$\mathbf{u}_{n+1}(\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}) = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1-2\beta)\ddot{\mathbf{u}}_n + 2\beta\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}] \mathbf{e} \quad (3.40)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1}(\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}) = \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t [(1-\gamma)\ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}]. \quad (3.41)$$

Utilizando-se a versão da linearização do sistema não linear ( 3.9 ) que considera a aceleração como variável independente, equação ( 3.15 ), substituem-se as equações ( 3.40 ) e ( 3.41 ) na expressão da matriz efetiva ( 3.17 ), obtendo-se:

$$\overline{\mathbf{K}}_{n+1}^k = \beta \cdot \Delta t^2 \cdot \mathbf{K} \mathbf{t}_{n+1}^k + \gamma \cdot \Delta t \cdot \mathbf{C} \mathbf{t}_{n+1}^k + \mathbf{M}. \quad (3.42)$$

Observa-se que se for utilizado o Método das Diferenças Centrais ( $\beta = 0$ ) e as matrizes de massa e amortecimento forem diagonais, o sistema efetivo perde o seu acoplamento.

Quando a estratégia considerada admite o deslocamento como variável independente, obtêm-se expressões de velocidade e aceleração em função do deslocamento através da manipulação das equações ( 3.40 ) e ( 3.41 ), resultando em:

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{u}_{n+1}) = \tilde{\mathbf{u}}_{n+1} + \frac{\gamma}{\beta \cdot \Delta t} (\mathbf{u}_{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}) \mathbf{e} \quad (3.43)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}(\mathbf{u}_{n+1}) = \frac{1}{\beta \cdot \Delta t^2} (\mathbf{u}_{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}), \quad (3.44)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{u}}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \cdot (1-2\beta) \cdot \ddot{\mathbf{u}}_n \mathbf{e} \quad (3.45)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t \cdot (1 - \gamma) \cdot \ddot{\mathbf{u}}_n. \quad (3.46)$$

Substituindo-se as equações ( 3.43 ) e ( 3.44 ) na expressão da matriz efetiva ( 3.14 ), obtém-se:

$$\bar{\mathbf{K}}_{n+1}^k = \mathbf{K}\mathbf{t}_{n+1}^k + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C}\mathbf{t}_{n+1}^k + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M}. \quad (3.47)$$

O algoritmo implementado neste trabalho utiliza esta última versão e está apresentado na Figura 3.4.

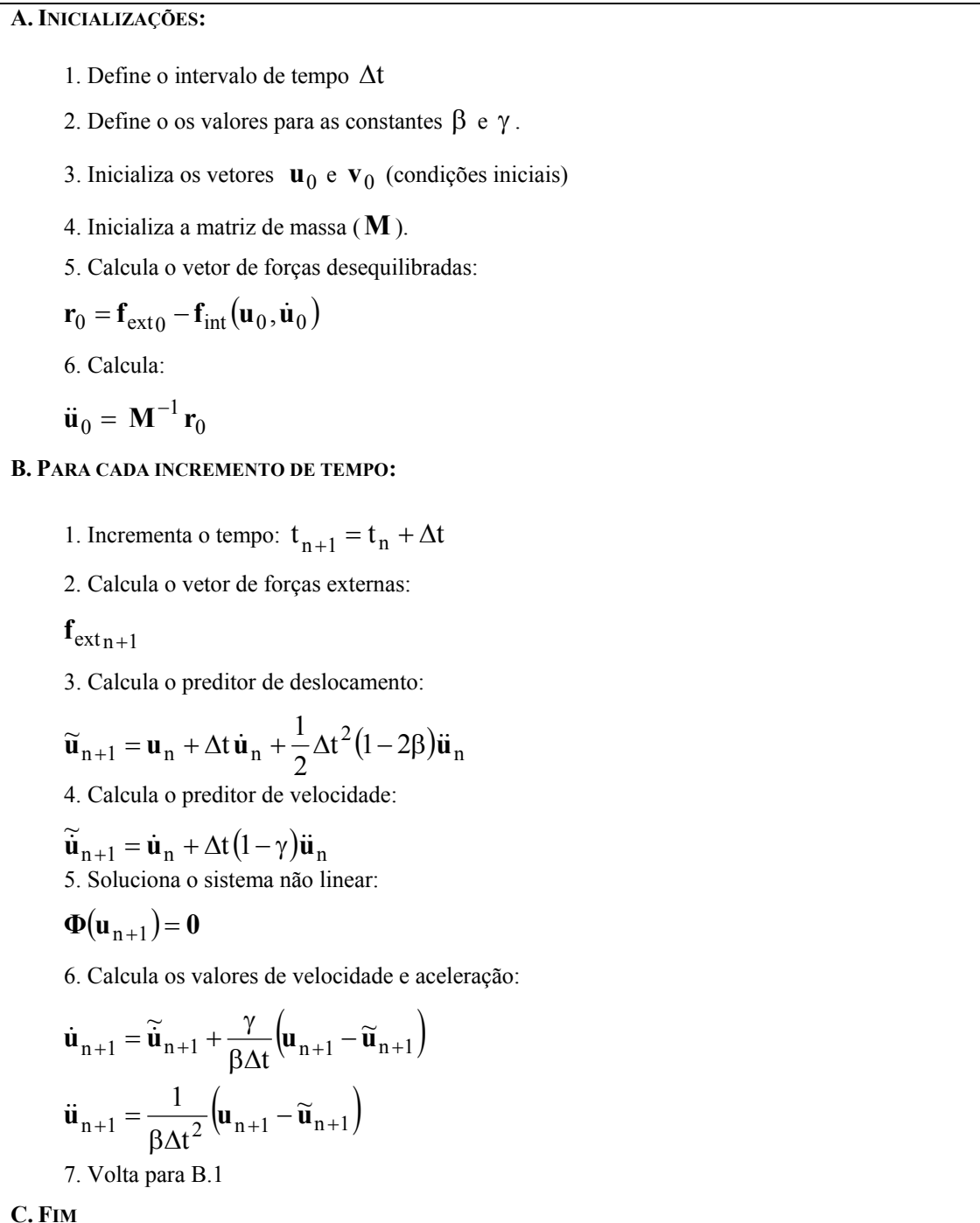


Figura 3.4 – Algoritmo de Newmark versão deslocamento.

### 3.5. Técnica elemento por elemento

Problemas formulados através do Método dos Elementos Finitos recaem na solução de um sistema de equações ordinárias, linear ou não linear, a depender do problema tratado. Em análise dinâmica de estruturas, o uso de algoritmos explícitos, com matrizes de massa e amortecimento diagonais, gera um desacoplamento do sistema

de equações, evitando-se a montagem das matrizes e dos vetores globais da estrutura. Essa é a principal característica da técnica elemento por elemento, a obtenção da solução do sistema de equações sem que tenham sido montados os vetores e matrizes globais da estrutura. Observa-se que essa característica proporciona uma razoável economia de memória computacional em problemas de larga escala, pois evita redundância de armazenamento de informações, tornando-se uma das principais vantagens da técnica (JOUGLARD e COUTINHO, 1998).

Os métodos elemento por elemento foram introduzidos por HUGHES e outros (1983) e ORTIZ e outros (1983) e posteriormente vários outros autores fizeram contribuições ao tema como BELYTSCHKO (1984), WINGET e HUGHES (1985), WATHEN (1989), entre outros. HUGHES e outros (1983) elaboraram uma técnica que, através de aproximações, evita a inversão das matrizes globais da solução do sistema de equações efetivo em problemas lineares onde a matriz de massa é diagonal.

À medida que mais pesquisadores passaram a utilizar essa técnica, abordagens diferentes foram dadas, mas todas visando a obtenção da solução do sistema de equações (lineares ou não lineares) gerado pela formulação em elementos finitos sem a montagem das matrizes e vetores globais. Em geral, tem-se por objetivo transformar operações que envolvam as soluções desses sistemas em produtos de matrizes por vetores e produtos escalares entre vetores comuns nos cálculos locais dos elementos.

Nos métodos implícitos, a solução do sistema de equações não lineares acoplado apresenta-se como a principal barreira à técnica elemento por elemento. A escolha do método de solução desse sistema passa a ser um importante fator, facilitando ou dificultado o uso da técnica. Quando o sistema de equações não lineares é linearizado (solução pelo método de Newton-Raphson), recai-se na solução de um sistema de equações lineares em cada passo do processo iterativo. Uma das alternativas para esse caso é utilizar um algoritmo iterativo para solução do sistema de equações lineares, como, por exemplo, o método dos gradientes conjugados, já que nas suas operações dominam os produtos de matrizes por vetores e produtos escalares entre vetores. Uma outra alternativa à essa é a otimização do método dos gradientes conjugados não linear. Cada uma dessas técnicas será detalhada a seguir.

### 3.5.1. Formulação elemento por elemento em algoritmos explícitos

Nos algoritmos explícitos, poucas alterações são necessárias para a aplicação da técnica elemento por elemento. Nesses algoritmos necessita-se apenas da montagem do vetor de forças desequilibradas:

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{f}_{\text{ext}_{n+1}} - \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}_{n+1}, \dot{\mathbf{u}}_{n+1}), \quad (3.48)$$

que pode ser gerado a partir de contribuições individuais de cada elemento,

$$\mathbf{r}_{n+1} = \sum_{e=1}^{\text{nelem}} \hat{\mathbf{r}}_{e_{n+1}}, \quad (3.49)$$

onde  $\hat{\mathbf{r}}_e$  é o vetor de forças desequilibradas do elemento, expandida para o sistema global, sendo dado por:

$$\hat{\mathbf{r}}_e = \mathbf{L}_e^T \mathbf{r}_e, \quad (3.50)$$

onde  $\mathbf{L}_e$  é a matriz de incidência cinemática do elemento e  $\mathbf{r}_e$  o vetor de forças desequilibradas local do elemento, com dimensão  $\text{nglb}_{\text{local}} \times 1$ . O símbolo  $\text{nglb}$  significa o número de graus de liberdade, ora global, da estrutura, ora local, do elemento individualmente.

Essas alterações são realizadas no itens **A.4** e **B.3** do algoritmo do Método das Diferenças Centrais apresentado na Figura 3.1.

### 3.5.2. Formulação elemento por elemento em algoritmos implícitos

Devido à solução do sistema de equações não lineares em cada passo de tempo, o uso da técnica elemento por elemento requer algumas alterações na estrutura tradicionalmente utilizada no caso dos algoritmos implícitos. Apresentam-se neste item algumas estratégias aplicadas ao algoritmo de Newmark, sem que haja perda de generalidade.

Para solução do sistema não linear, gerado pela formulação em elementos finitos, consideram-se o Método de Newton-Raphson e o Método dos Gradientes Conjugados Não Linear, ambos abordados no item 3.4.1. Como cada método tem suas características particulares, estratégias diferentes são usadas em cada um.

- **Método de Newton-Raphson**

No Método de Newton-Raphson a principal dificuldade para o uso direto da técnica elemento por elemento é a solução do sistema linearizado acoplado em cada incremento de tempo, ou seja, a solução do sistema efetivo:

$$\bar{\mathbf{K}}_{n+1}^k \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k = \bar{\mathbf{f}}_{n+1}^k. \quad (3.51)$$

Torna-se necessário o uso de técnicas de solução de sistemas lineares que sejam adaptáveis à técnica elemento por elemento. O uso do Método dos Gradientes Conjugados para sistemas lineares apresenta-se como uma alternativa viável para esse fim. A Figura 3.5 apresenta o algoritmo desse método. Nesta figura foram omitidos os índices que indicam o tempo  $n + 1$  com o objetivo de simplificar a notação.

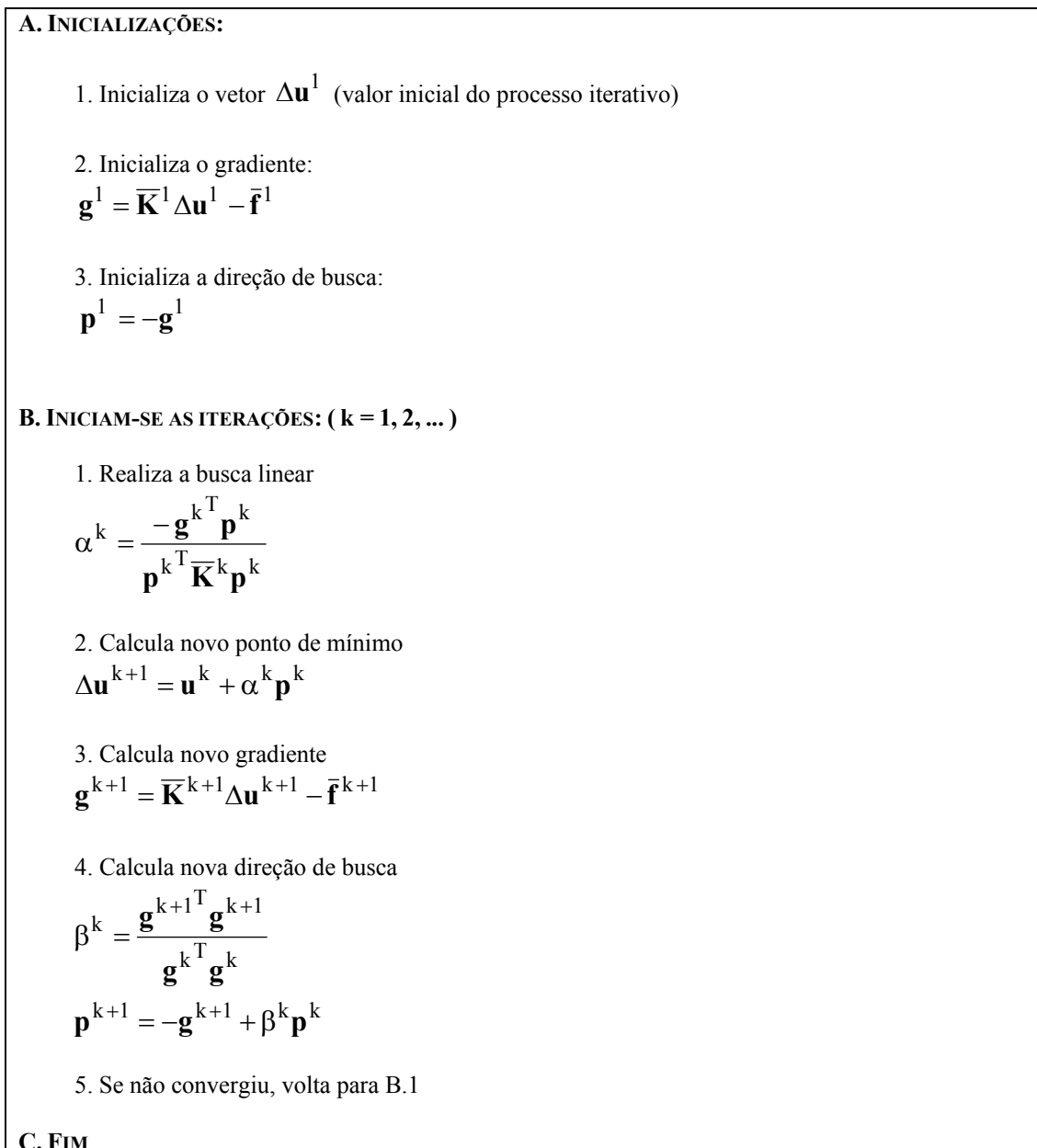


Figura 3.5 – Algoritmo do Método dos Gradientes Conjugados Linear

Assim como na Figura 3.3, o passo **B.5** da Figura 3.5 consiste em realizar um teste de convergência, cujo critério é abordado no item 3.6 que trata das medias de erros utilizadas neste trabalho.

A expressão para cálculo da direção de busca é a sugerida por FLETCHER AND REEVES (1964).

Observa-se que as operações realizadas durante a solução iterativa do sistema envolve apenas produtos matriz-vetor ou vetor-vetor. Os itens **A.2** e **B.3** da Figura 3.5

apresentam a formação semelhante ao apresentado para os métodos explícitos. O item B.1 apresenta uma multiplicação vetor-matriz-vetor, dada por:

$$\text{aux}^k = \mathbf{p}^k \mathbf{T} \bar{\mathbf{K}}^k \mathbf{p}^k, \quad (3.52)$$

sendo  $\text{aux}^k$  um escalar auxiliar, correspondente ao denominador de  $\alpha^k$ .

A matriz efetiva  $\bar{\mathbf{K}}^k$  pode ser expressa como um somatório das contribuições de cada elemento, ou seja:

$$\bar{\mathbf{K}}^k = \sum_{e=1}^{\text{nelem}} \hat{\mathbf{K}}_e^k, \quad (3.53)$$

onde  $\hat{\mathbf{K}}_e^k$  é a matriz efetiva do elemento, expandida para o sistema global, sendo dada por:

$$\hat{\mathbf{K}}_e^k = \mathbf{L}_e^T \bar{\mathbf{K}}_e^k \mathbf{L}_e, \quad (3.54)$$

onde  $\bar{\mathbf{K}}_e^k$  é a matriz efetiva local do elemento, com dimensão  $n_{\text{glb}_{\text{local}}} \times n_{\text{glb}_{\text{local}}}$ .

O produto (3.52), omitindo-se os sobrescritos  $k$  para simplificar a notação, pode ser então escrito como:

$$\text{aux} = \mathbf{p}^T \sum_{e=1}^{\text{nelem}} \hat{\mathbf{K}}_e \mathbf{p} \quad \text{ou} \quad (3.55)$$

$$\text{aux} = \sum_{e=1}^{\text{nelem}} \hat{\mathbf{p}}_e^T \hat{\mathbf{K}}_e \hat{\mathbf{p}}_e \quad (3.56)$$

onde  $\hat{\mathbf{p}}_e$  corresponde ao vetor  $\mathbf{p}$  tendo anuladas as posições dos graus de liberdade que não estão conectados ao elemento  $e$ .

Não é necessário armazenar a matriz  $\hat{\mathbf{K}}_e^k$  que tem a mesma dimensão da matriz global. Uma alternativa ao produto (3.56) é:



$$\text{aux} = \sum_{e=1}^{\text{nelem}} \mathbf{p}_e^T \bar{\mathbf{K}}_e \mathbf{p}_e \quad (3.57)$$

onde  $\mathbf{p}_e$  corresponde apenas aos elementos não nulos do vetor  $\hat{\mathbf{p}}_e$ , tendo a dimensão  $n_{\text{glb}_{\text{local}}} \times 1$ , e  $\bar{\mathbf{K}}_e$  a matriz de rigidez do elemento.

O Apêndice A apresenta um exemplo numérico de multiplicação matriz-vetor e vetor-matriz-vetor elemento por elemento, aplicado a um sistema de molas.

Uma forma alternativa bastante popular do Método dos Gradientes Conjugados é o uso de pré-condicionadores, que aumentam significativamente a eficiência do método (PAPADRAKAKIS e DRACOPOULOS, 1991).

Basicamente o Método dos Gradientes Conjugados Pré-Condicionados (PCG) consiste em resolver o sistema de equações ( 3.18 ) transformado em:

$$\mathbf{P}^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{n+1}^k \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k = \mathbf{P}^{-1} \bar{\mathbf{F}}_{n+1}^k, \quad (3.58)$$

sendo  $\mathbf{P}$  a matriz de pré-condicionamento. Essa matriz deve ser tal que o número de condição do produto  $\mathbf{P}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{n+1}^k$  seja o mais próximo possível da unidade, assim, quanto mais semelhante a matriz  $\mathbf{P}$  for de  $\bar{\mathbf{K}}_{n+1}^k$ , mais próximo da unidade será o número de condição do produto acima citado. Outra característica necessária é que um sistema linear cuja matriz de coeficientes é  $\mathbf{P}$  deve precisar de poucas iterações para ser resolvido. Sendo assim, a escolha da matriz de pré-condicionamento deve satisfazer, na medida do possível, essas condições. Ao contrário da matriz efetiva, a montagem da matriz de pré-condicionamento como um somatório de contribuições de cada elemento não é tão natural.

Vários autores, como PAPADRAKAKIS e DRACOPOULOS (1991), abordam o tema pré-condicionamento e técnicas elemento por elemento. Neste trabalho essa estratégia não é tratada. Utiliza-se o método PCG, na sua formatação tradicional, ou seja, montando-se as matrizes globais do sistema, assim como o método direto de solução de sistemas lineares, apenas para fins de comparação com o Método dos

Gradientes Conjugados sem pré-condicionamento. A matriz de preconditionamento utilizada é uma matriz diagonal, formada pela diagonal da matriz  $\bar{\mathbf{K}}_{n+1}^k$ .

- **Método dos Gradientes Conjugados Não Linear**

Uma segunda alternativa à solução do sistema de equações não lineares resultante da formulação é o uso do Método dos Gradientes Conjugados Não Linear (NLCG), como abordado no item 3.4.1.

Neste caso, as alterações são bastante semelhantes às realizadas no tópico anterior, quando se utiliza a forma linear do Método dos Gradientes Conjugados.

Considerando o conteúdo da Figura 3.3, que descreve o algoritmo do NLCG, observa-se que os itens **A.2**, **B.1** e **B.3** podem ser calculados elemento por elemento.

Nos itens **A.2** e **B.3** são realizadas avaliações do vetor gradiente, que são montados de forma semelhante ao vetor resíduo nos algoritmos explícitos.

A depender de como é realizada a busca linear, o item **B.1** pode apresentar o cálculo do gradiente (como feito nos itens **A.2** e **B.3**) e a multiplicação deste pelo vetor direção de busca, ou seja, avaliação da expressão:

$$\mathbf{p}^{kT} \mathbf{g}(\mathbf{u}^k + \alpha^k \mathbf{p}^k) = 0, \quad (3.59)$$

ou pode apresentar as mesmas operações da versão linear do Método dos Gradientes Conjugados:

$$\alpha = -\frac{\mathbf{p}^{kT} \mathbf{g}^k}{\mathbf{p}^{kT} \mathbf{H}^k \mathbf{p}^k}, \quad (3.60)$$

na qual o denominador pode ser calculado elemento por elemento, tal como mostrado no tópico anterior.

A realização da busca linear através da solução da equação ( 3.59 ) tem a vantagem de ser necessário apenas calcular o gradiente da função  $f(\mathbf{x})$  durante todo o processo.

As demais operações do método não envolvem matrizes e podem ser realizadas com os vetores no sistema global, sem grande perda de memória.

### 3.6. Medidas de erro em análise dinâmica

Devido ao uso de um processo iterativo para solução do sistema não linear de equações, torna-se necessária a definição de um critério de convergência. Este critério tem a finalidade de julgar se os erros gerados pela resposta estão dentro de uma faixa aceitável ou não, ou seja, dentro de uma tolerância admitida. Para tanto, é necessária uma medida dos erros gerados pela resposta após cada iteração.

BELYTSCHKO e HUGHES (1983) sugerem um critério baseado no vetor de forças desequilibradas, no qual a norma desse vetor deve ser menor que uma dada fração da norma de um vetor de forças de referência:

$$\left\| \mathbf{f}_{\text{ext}_{n+1}}^k - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^k - \mathbf{f}_{\text{int}_{n+1}}^k \right\| \leq e_{n+1}^{\text{força}} \cdot \left\| \mathbf{f}_{\text{ref}_{n+1}} \right\|, \quad (3.61)$$

onde  $e_n^{\text{força}}$  é o valor da tolerância admitida para esse critério e  $\left\| \mathbf{f}_{\text{ref}_{n+1}} \right\|$  é a norma do vetor de forças de referência.

COOK e outros (1989) definem que o vetor de forças de referência é dado por:

$$\left\| \mathbf{f}_{\text{ref}_{n+1}} \right\| = \left\| \mathbf{f}_{\text{ext}_{n+1}} \right\|. \quad (3.62)$$

Porém, da forma como acima apresentado, é necessário garantir que o vetor de forças externas não seja nulo. Assim, para considerar os casos em que não há aplicação de cargas externas, neste trabalho utiliza-se a seguinte adaptação do vetor de forças de referência sugerido por BELYTSCHKO e HUGHES (1983):

$$\left\| \mathbf{f}_{\text{ref}_{n+1}} \right\| = \left\| \mathbf{f}_{\text{int}_n} \right\| + \left\| \mathbf{f}_{\text{ext}_{n+1}} \right\|. \quad (3.63)$$

Além de necessitar de um critério de convergência, é preciso também avaliar a qualidade da resposta gerada pelo algoritmo, já que, em sua maioria, as análises dinâmicas não lineares não têm resposta analítica.

Uma alternativa é o uso da equação ( 3.61 ), sendo o erro dado pelo valor de  $e_n^{\text{força}}$ . Porém, como o critério de convergência utiliza essa condição, os erros obtidos assim seriam sempre da ordem de grandeza da tolerância admitida, mascarando a real qualidade da resposta.

COOK e outros (1989) sugerem, como forma de medida de qualidade da resposta em problemas não lineares, a checagem do balanço energético em cada instante de tempo, dado por:

$$W_{\text{int}_{n+1}} + T_{n+1} = W_{\text{ext}_{n+1}}. \quad (3.64)$$

onde  $W_{\text{int}_{n+1}}$  é o trabalho das forças internas,  $T_{n+1}$  é a energia cinética e  $W_{\text{ext}_{n+1}}$  é o trabalho das forças externas.

Essa igualdade expressa que o trabalho das forças externas é convertido parte em energia cinética e parte em trabalho das forças internas que pode conter energia potencial elástica armazenada e energia dissipada por algum agente plástico ou viscoso.

O erro, nesse caso, seria dado por:

$$\left| W_{\text{int}_n} + T_n - W_{\text{ext}_n} \right| \leq e_n^{\text{energ}} \cdot \left( W_{\text{int}_n} + T_n + W_{\text{ext}_n} \right), \quad (3.65)$$

adaptação da expressão sugerida por COOK e outros (1989), representando a relação entre o erro em energia (lado esquerdo da equação) e a energia total do sistema (lado direito da equação).

O trabalho interno é dado por:

$$W_{\text{int}_{n+1}} = W_{\text{int}_n} + \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \dot{W}_{\text{int}_n} dt, \quad (3.66)$$

sendo

$$\dot{W}_{\text{int}_n} = \dot{\mathbf{u}}_n^T \mathbf{f}_{\text{int}_n}. \quad (3.67)$$

Aproximando-se a integral através da regra trapezoidal, tem-se:

$$W_{\text{int}_{n+1}} = W_{\text{int}_n} + \frac{\Delta t}{2} \left( \dot{\mathbf{u}}_n^T \mathbf{f}_{\text{int}_n} + \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^T \mathbf{f}_{\text{int}_{n+1}} \right). \quad (3.68)$$

O trabalho externo é obtido de forma análoga ao trabalho interno, sendo, portanto:

$$W_{\text{ext}_{n+1}} = W_{\text{ext}_n} + \frac{\Delta t}{2} \left( \dot{\mathbf{u}}_n^T \mathbf{f}_{\text{ext}_n} + \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^T \mathbf{f}_{\text{ext}_{n+1}} \right). \quad (3.69)$$

A energia cinética é calculada através da seguinte expressão:

$$T_n = \frac{1}{2} \left( \dot{\mathbf{u}}_n^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}_n \right). \quad (3.70)$$

Para algoritmos explícitos o erro  $e_n^{\text{energ}}$  não deve ultrapassar o valor 0,05, já que isso gera instabilidades no algoritmo. No caso dos implícitos essa medida de erro apresenta a mesma dificuldade, para medir a qualidade da resposta, que a medida  $e_n^{\text{força}}$ , em força, apresenta. Opta-se então por uma medida relativa, para a qual é necessária uma resposta considerada precisa o suficiente para que seja usada como base de comparação.

O erro relativo é então definido como:

$$e_n^{\text{rel}} = \frac{\left\| \mathbf{u}_n^{\text{ref}} - \mathbf{u}_n \right\|}{\max(\mathbf{u}_n^{\text{ref}})}, \quad (3.71)$$

onde  $\max(\mathbf{u}_n^{\text{ref}})$  representa a chamada norma do máximo de um vetor coluna (BOLDRINI et al, 1980).

A resposta analítica é tomada como base nos casos lineares, quando possível. Nos casos não lineares, avalia-se uma faixa de valores provável para o  $\Delta t_{\text{cr}}$  do método das Diferenças Centrais, então obtém-se uma resposta com um  $\Delta t$  bem menor que o

crítico. Nos exemplos deste trabalho são indicados os intervalos de tempo usados nas simulações base.

Usa-se  $\|e^{rel}\|$  como uma medida global da qualidade da resposta de um dado algoritmo para fins de comparação.

## Capítulo 4

### Exemplos e Aplicações

#### 4.1. Introdução

Neste capítulo apresentam-se quatro exemplos que ilustram algumas características dos algoritmos estudados. O primeiro utiliza um sistema massa-mola para validação das implementações realizadas, comparando-se com a solução por superposição modal do sistema. O segundo exemplo apresenta o desempenho dos algoritmos no caso em que se utiliza um elemento de pórtico tridimensional, para simular uma viga engastada sujeita a grandes deslocamentos. O terceiro apresenta uma análise quase estática de um cabo horizontal, apoiado nas extremidades, onde se observa o comportamento dos algoritmos na obtenção de uma configuração estática e diante de três discretizações da malha de elementos finitos. O último exemplo trata de uma análise dinâmica, não linear, onde se avaliam as respostas dos algoritmos para um cabo que pendula por alguns segundos. São usadas duas discretizações, três e cinco elementos, analisando-se as respostas para cada uma.

Nesses exemplos, avaliam-se duas estratégias: solução do sistema não linear usando o método de Newton-Raphson em conjunto com o método dos gradientes conjugados para solução do sistema linearizado e solução do sistema não linear usando o método dos gradientes conjugados não linear, sendo a busca linear ora realizada analiticamente, ora iterativamente. Utilizam-se algumas formatações tradicionais, como o uso do método direto e gradientes conjugados pré-condicionados para solução do sistema linearizado, para fins de comparação com as três anteriormente citadas. Além desses, utiliza-se o Método das Diferenças Centrais, explícito, como alternativa aos implícitos.

Nesses exemplos, os algoritmos estudados são identificados através de uma nomenclatura simplificada que está apresentada na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Nomenclatura simplificada para os algoritmos estudados.

Solução do sistema não linear usando Newton-Raphson com solução do sistema linearizado pelo método direto.	NR - Método direto
Solução do sistema não linear usando Newton-Raphson com solução do sistema linearizado pelo método dos gradientes conjugados pré-condicionados.	NR - PCG
Solução do sistema não linear usando Newton-Raphson com solução do sistema linearizado pelo método dos gradientes conjugados (convencional).	NR - CG
Solução do sistema não linear usando gradientes conjugados com busca linear realizada iterativamente.	NLCG - Busca linear iterativa
Solução do sistema não linear usando gradientes conjugados com busca linear realizada analiticamente.	NLCG - Busca linear analítica
Método das diferenças centrais	Diferença central

Em todos os exemplos aqui apresentados utiliza-se um computador com processador Pentium IV, 2 Gigahertz com 256 Megabytes de memória RAM.

## 4.2. Aplicação linear: sistema massa-mola

Trata-se de um caso de vibração livre de um sistema massa-mola com dois graus de liberdade. O seu objetivo principal é a aferição dos algoritmos estudados, para um caso simples de análise linear.

O sistema discreto está apresentado na Figura 4.1.

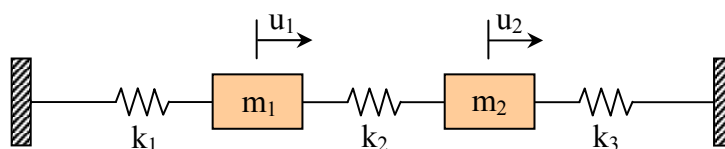


Figura 4.1 – Sistema massa-mola.

A Tabela 4.2 apresenta as propriedades do sistema utilizado neste exemplo.

Tabela 4.2 – Propriedades do sistema massa-mola.

RIGIDEZES		MASSAS	
$k_1 =$	1	$m_1 =$	1
$k_2 =$	10	$m_2 =$	1
$k_3 =$	1		

O tempo de análise é de 84 segundos, sujeito às condições iniciais indicadas na Tabela 4.3.



Tabela 4.3 – Condições iniciais do sistema massa-mola.

$u_1(0) =$	0
$\dot{u}_1(0) =$	1
$u_2(0) =$	0
$\dot{u}_2(0) =$	0

A máxima frequência do sistema é de 4,58 rad/s, o que limita o valor do incremento de tempo para o Método das Diferenças Centrais em: 0,4364s. Opta-se por observar a resposta obtida em quatro intervalos de tempo, sendo dois maiores que o crítico para o MDC e dois menores que este. Os valores adotados estão apresentados na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Valores dos intervalos de tempo.

$\Delta t_1 =$	0,7 s
$\Delta t_2 =$	0,6 s
$\Delta t_3 =$	0,4 s
$\Delta t_4 =$	0,01 s

As Figuras 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5 apresentam a história de deslocamentos do grau de liberdade 1 obtida pela integração numérica através dos algoritmos estudados, para os valores de intervalo de tempo acima mencionados, em comparação com a solução gerada pelo método da superposição modal, que neste exemplo, por se ter utilizado todos os modos de vibração do sistema, é referenciado como sendo a resposta analítica.

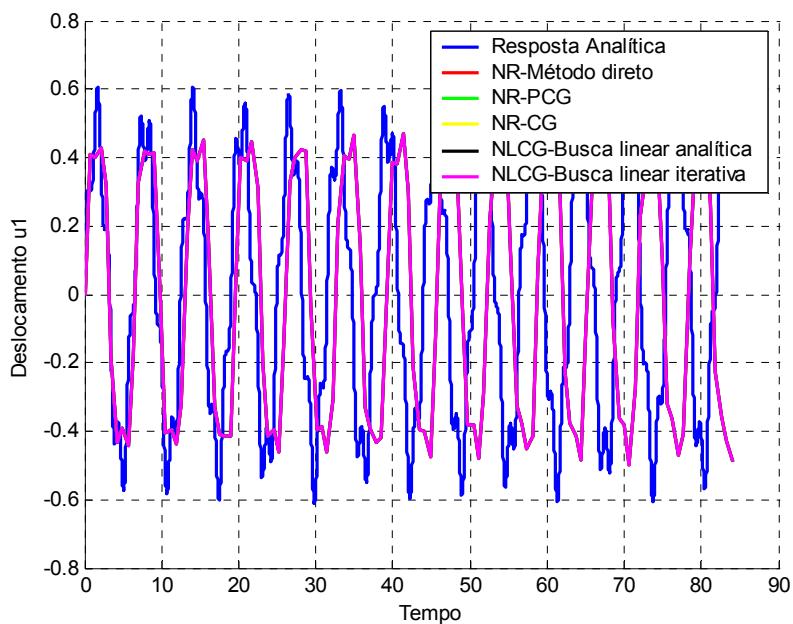


Figura 4.2 – História de deslocamento do grau de liberdade 1 para  $\Delta t = 0,7s$  .

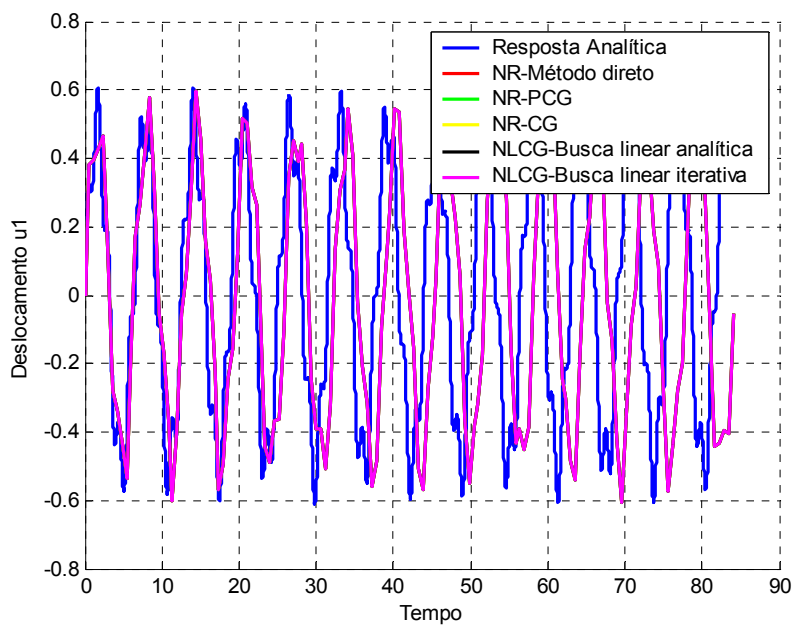


Figura 4.3 – História de deslocamento do grau de liberdade 1 para  $\Delta t = 0,6s$  .

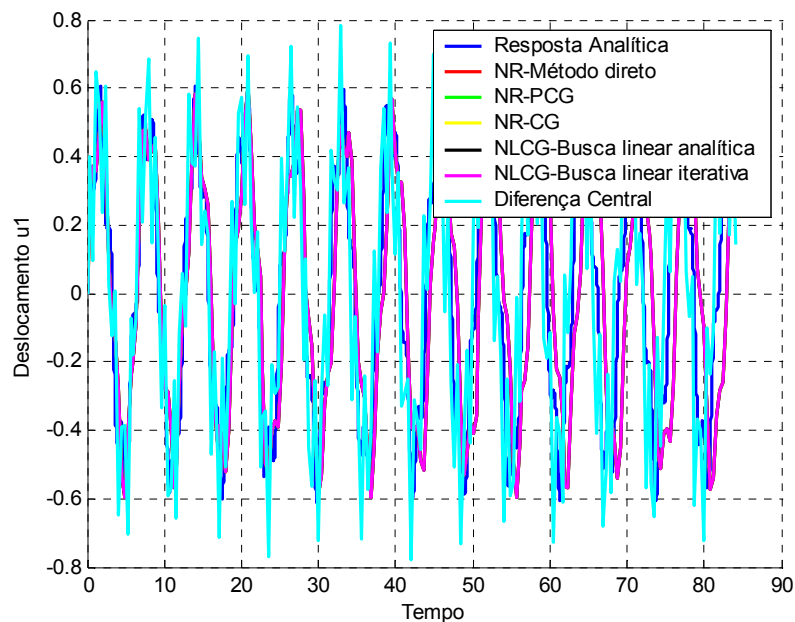


Figura 4.4 – História de deslocamento do grau de liberdade 1 para  $\Delta t = 0,4s$  .

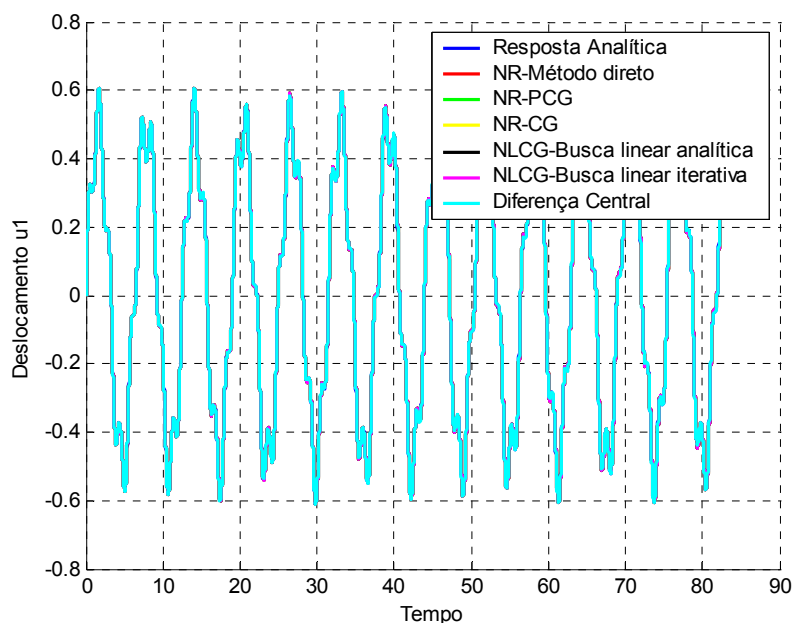


Figura 4.5 – História de deslocamento do grau de liberdade 1 para  $\Delta t = 0,01s$  .

Observando-se estas quatro figuras, não é possível distinguir as soluções geradas pelos algoritmos implícitos estudados. De fato, neste exemplo, esses algoritmos apresentaram a mesma solução.

As Figuras 4.2 e 4.3 não apresentam a solução gerada pelo Método das Diferenças Centrais pois este divergiu durante o processo de solução, comportamento

esperado para algoritmos explícitos quando o intervalo de tempo não obedece à condição de estabilidade ( $\Delta t \leq \Delta t_{cr}$ ).

Para facilitar a observação da qualidade da resposta gerada pelos algoritmos, apresenta-se graficamente, na Figura 4.6, os erros relativos para os quatro intervalos de tempo analisados. A Tabela 4.5 apresenta os valores numéricos correspondentes à Figura 4.6.

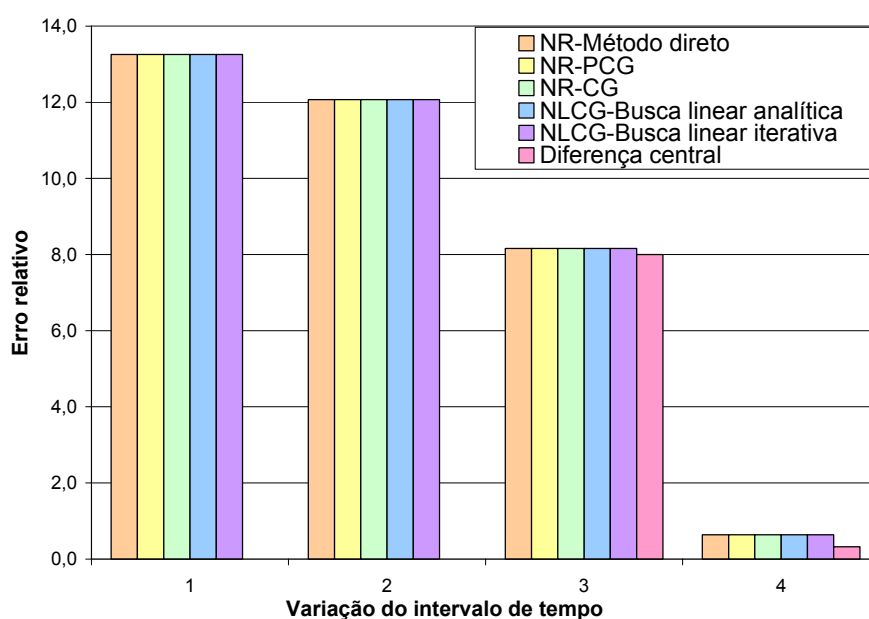


Figura 4.6 – Representação gráfica dos valores dos erros relativos em cada intervalo de tempo analisado.

Tabela 4.5 – Valores dos erros relativos em cada intervalo de tempo analisado.

ERRO RELATIVO À SOLUÇÃO POR SUPERPOSIÇÃO MODAL				
ALGORITMO UTILIZADO	$\Delta t_1$	$\Delta t_2$	$\Delta t_3$	$\Delta t_4$
NR - Método direto	13,26	12,07	8,16	0,64
NR - PCG	13,26	12,07	8,16	0,64
NR - CG	13,26	12,07	8,16	0,64
NLCG - Busca linear analítica	13,26	12,07	8,16	0,64
NLCG - Busca linear iterativa	13,26	12,07	8,16	0,64
Diferença central	-	-	8,00	0,32

- O algoritmo divergiu.

Observa-se o crescimento do erro a medida que o valor do  $\Delta t$  é maior. Esse comportamento constata o fato de que apesar da estabilidade dos algoritmos implícitos,

nestes casos o valor do intervalo de tempo fica a critério da precisão necessária para os objetivos da análise realizada.

Um fator importante na análise dos algoritmos é o tempo gasto para simulação. Na Figura 4.7 e na Tabela 4.6 apresentam-se, graficamente e numericamente, os valores obtidos em cada algoritmo para cada intervalo de tempo.

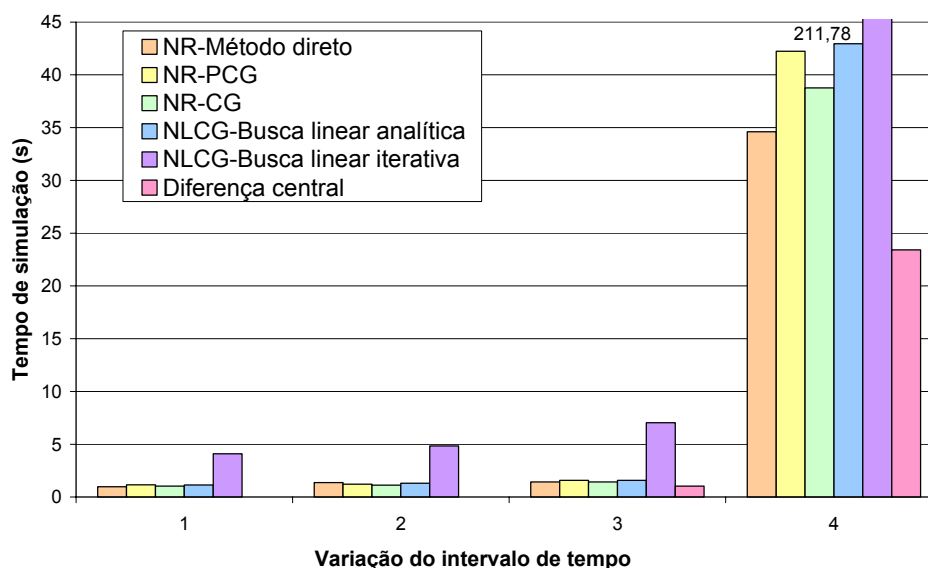


Figura 4.7 – Representação gráfica dos tempos de simulação para cada intervalo de tempo analisado.

Tabela 4.6 – Valores dos tempos de simulação (s) para cada intervalo de tempo analisado.

ALGORITMO UTILIZADO	$\Delta t_1$	$\Delta t_2$	$\Delta t_3$	$\Delta t_4$
NR - Método direto	0,98	1,37	1,42	34,61
NR - PCG	1,16	1,22	1,58	42,24
NR - CG	1,03	1,12	1,43	38,77
NLCG - Busca linear analítica	1,14	1,30	1,58	42,95
NLCG - Busca linear iterativa	4,10	4,84	7,04	211,78
Diferença central	-	-	1,04	23,42

- O algoritmo divergiu.

Observa-se inicialmente o aumento do tempo de análise com a redução do valor do incremento de tempo nos algoritmos estudados, em especial para o NLCG - Busca linear iterativa. Constata-se também que quando a condição de estabilidade do MDC é

satisfeita, seu desempenho, com relação ao tempo de análise, é superior aos demais algoritmos.

Uma outra característica comumente observada na avaliação de algoritmos de integração, que possuem processos iterativos, é a média de iterações por intervalo de tempo. A Figura 4.8 e a Tabela 4.7 apresentam esses valores.

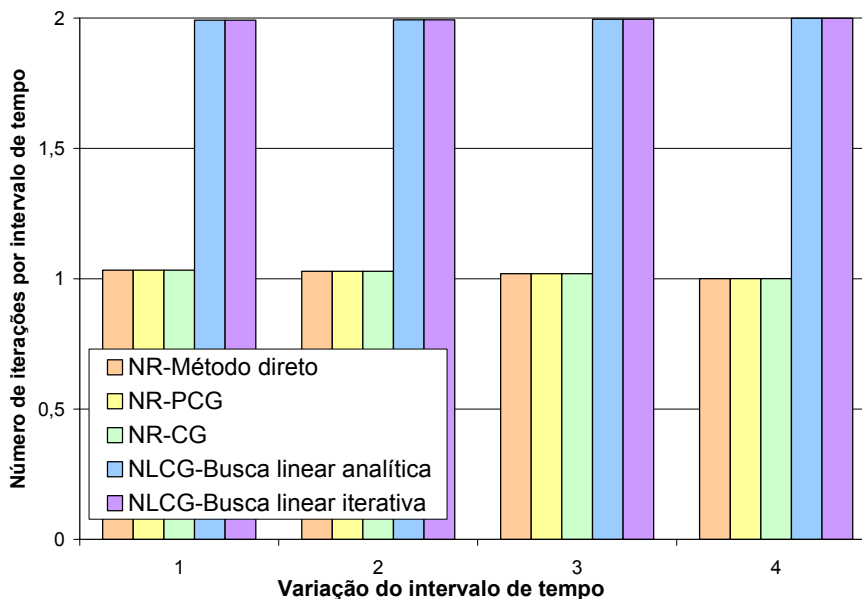


Figura 4.8 – Representação gráfica das médias de iterações por intervalo de tempo para cada intervalo de tempo analisado.

Tabela 4.7 – Valores das médias de iterações por intervalo de tempo para cada intervalo de tempo analisado.

ALGORITMO UTILIZADO	$\Delta t_1$	$\Delta t_2$	$\Delta t_3$	$\Delta t_4$
NR - Método direto	1,03	1,03	1,02	1,00
NR - PCG	1,03	1,03	1,02	1,00
NR - CG	1,03	1,03	1,02	1,00
NLCG - Busca linear analítica	1,99	1,99	2,00	2,00
NLCG - Busca linear iterativa	1,99	1,99	2,00	2,00

Observa-se que devido à linearidade deste exemplo, o número de iterações é muito próximo da unidade, para os algoritmos que usam o Método de Newton-Raphson, pois o sistema linearizado para este exemplo não tem aproximações. Os algoritmos que utilizam o Método dos Gradientes Conjugados Não Linear realizam duas iterações devido às suas aproximações.

### 4.3. Viga engastada

Este exemplo tem por objetivo ilustrar o uso dos algoritmos estudados em problemas não lineares quase estáticos. Trata-se de uma viga engastada na extremidade esquerda, sujeita a uma força momento aplicada na extremidade direita. A Figura 4.9 apresenta o desenho esquemático da viga acima citada e a discretização utilizada.

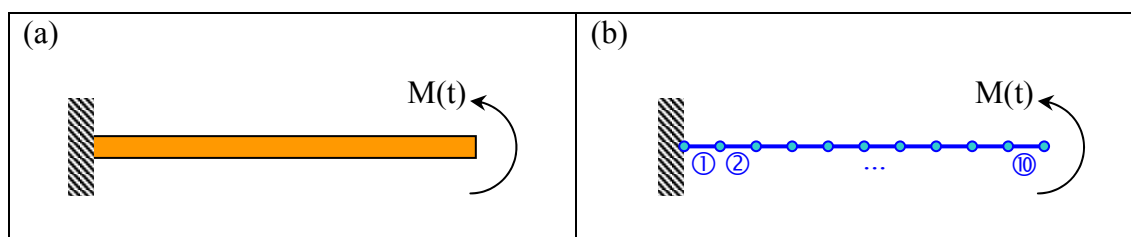


Figura 4.9 – (a) Desenho esquemático e (b) discretização da viga analisada.

O modelo é composto por dez elementos de pórtico tridimensionais, desenvolvidos por PACOSTE e ERIKSSON (1997). As propriedades físicas e geométricas estão apresentadas na Tabela 4.8.

Tabela 4.8 – Propriedades físicas e geométricas da viga.

Comprimento da viga (L)	10 m
Módulo de elasticidade longitudinal (E)	$2,05 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$
Módulo de elasticidade transversal (G)	$E/2$
Momento de inércia (I)	$0,083 \text{ m}^4$
Momento de inércia polar (J)	I
Área da seção transversal (circular) (A)	$1 \text{ m}^2$
Densidade mássica ( $\rho$ )	$7,83 \text{ Mg/m}^3$

A matriz de massa aqui utilizada é diagonalizada, possibilitando as comparações dos resultados com o algoritmo explícito da Diferença Central.

O momento na extremidade é aplicado linearmente com o tempo como apresentado na Figura 4.10. O tempo de aplicação é de 0,5s, o mesmo de duração da análise.

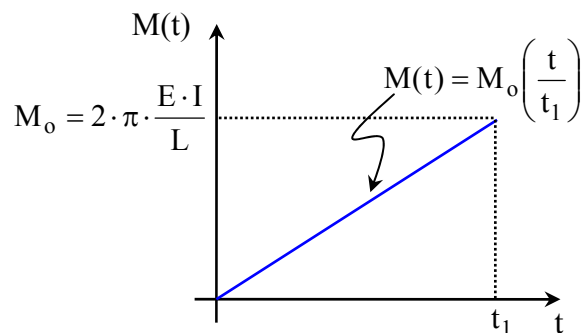


Figura 4.10 – Curva de aplicação da força momento.

O momento de referência  $M_0$  apresentado na Figura 4.10 foi obtido a partir da solução estática do caso abordado neste exemplo. O cálculo desse valor pode ser encontrado no Apêndice C deste trabalho.

Utilizou-se o intervalo de tempo de  $1 \cdot 10^{-5}$  s e o algoritmo NR – Método Direto para obter a solução de referência e se avaliar as máximas freqüências do sistema a fim de se obter o intervalo de tempo crítico para o método da Diferença Central. A Figura 4.11 apresenta a variação das máximas freqüências do sistema ao longo do tempo de análise. O intervalo de tempo crítico encontrado é de  $1,49 \cdot 10^{-4}$  s.

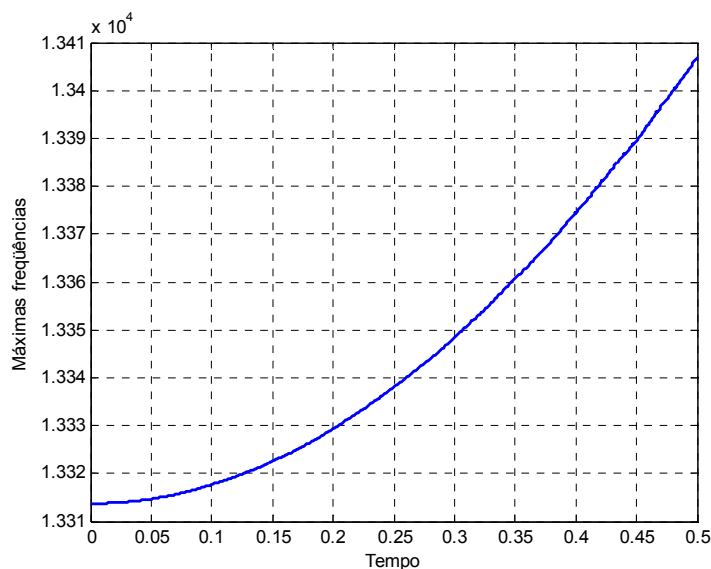


Figura 4.11 – Máximas freqüências do sistema ao longo da análise.

Os intervalos de tempo utilizados nas análises estão apresentados na Tabela 4.9. A tolerância permitida para a solução do sistema não linear é de  $1 \cdot 10^{-8}$ .



Tabela 4.9 – Valores dos intervalos de tempo.

$\Delta t_1 =$	$1 \cdot 10^{-2}$ s
$\Delta t_2 =$	$5 \cdot 10^{-4}$ s
$\Delta t_3 =$	$1,45 \cdot 10^{-4}$

Os resultados das análises são apresentados em gráficos tempo *versus* deslocamento vertical. Apresentam-se, além dos resultados dos algoritmos estudados, a solução de referência e a solução estática para fins de comparação.

Para o primeiro intervalo de tempo os algoritmos NR - Método direto, NLCG - Busca linear iterativa, NLCG - Busca linear analítica e Diferença central divergiram. Apresenta-se na Figura 4.12 a solução obtida para  $\Delta t = 1 \cdot 10^{-2}$  s.

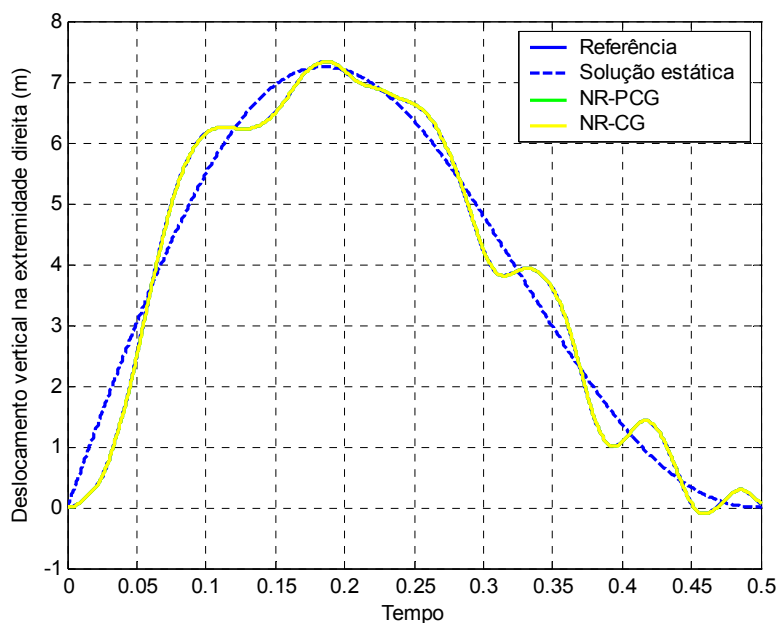


Figura 4.12 – Deslocamento vertical da extremidade direita da viga para  $\Delta t = 1 \cdot 10^{-2}$  s.

A Figura 4.13 apresenta os resultados para os demais intervalos de tempo. Observa-se no detalhe a proximidade das respostas geradas pelos algoritmos, tornando-se difícil distingui-los visualmente na Figura 4.13 (a) e (b).

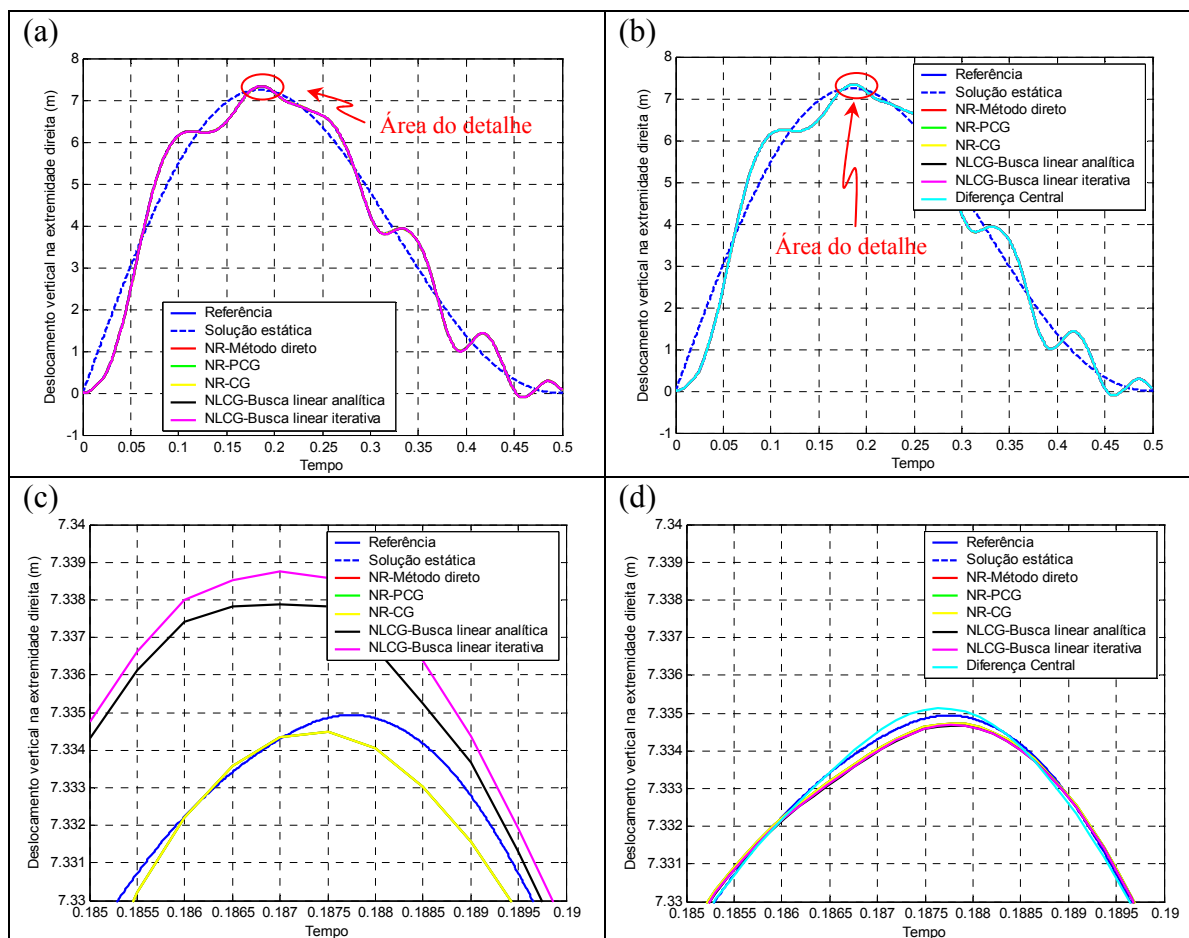


Figura 4.13 – Deslocamento vertical da extremidade esquerda da viga para (a)  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$  e (b)  $\Delta t = 1,45 \cdot 10^{-4}$  s; Detalhe do deslocamento vertical da extremidade esquerda da viga para (c)  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$  e (d)  $\Delta t = 1,45 \cdot 10^{-4}$  s.

Para melhor análise da qualidade das respostas obtidas, apresentam-se na Figura 4.14 e na Tabela 4.10 os erros relativos à resposta gerada com o intervalo de tempo de  $1 \cdot 10^{-5}$  s.

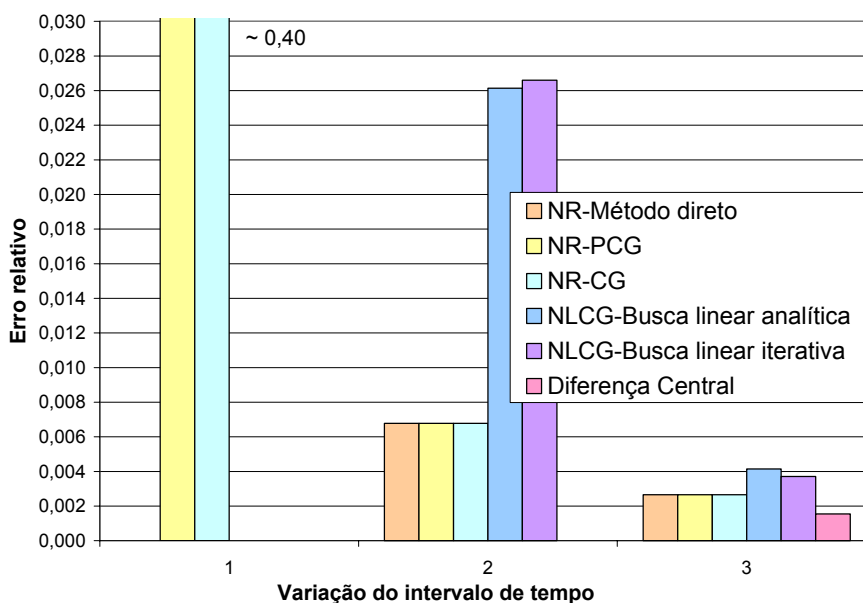


Figura 4.14 – Representação gráfica dos valores dos erros relativos em cada intervalo de tempo analisado.

Tabela 4.10 – Valores dos erros relativos em cada intervalo de tempo analisado.

ERRO RELATIVO À SOLUÇÃO COM $\Delta t = 1 \cdot 10^{-5}$ s			
ALGORITMO UTILIZADO	$\Delta t_1$	$\Delta t_2$	$\Delta t_3$
NR - Método direto	*	0,0068	0,0027
NR - PCG	0,3975	0,0068	0,0027
NR - CG	0,4071	0,0068	0,0027
NLCG - Busca linear analítica	*	0,0261	0,0042
NLCG - Busca linear iterativa	*	0,0266	0,0037
Diferença central	*	*	0,0016

\* O algoritmo divergiu.

O tempo de simulação de cada algoritmo está apresentado na Figura 4.15 e na Tabela 4.11. Observa-se que o grupo de algoritmos que utilizam o Método de Newton-Raphson para solução do sistema não linear apresenta menor tempo de simulação que o grupo que utiliza o Método dos Gradientes Conjugados Não Linear.

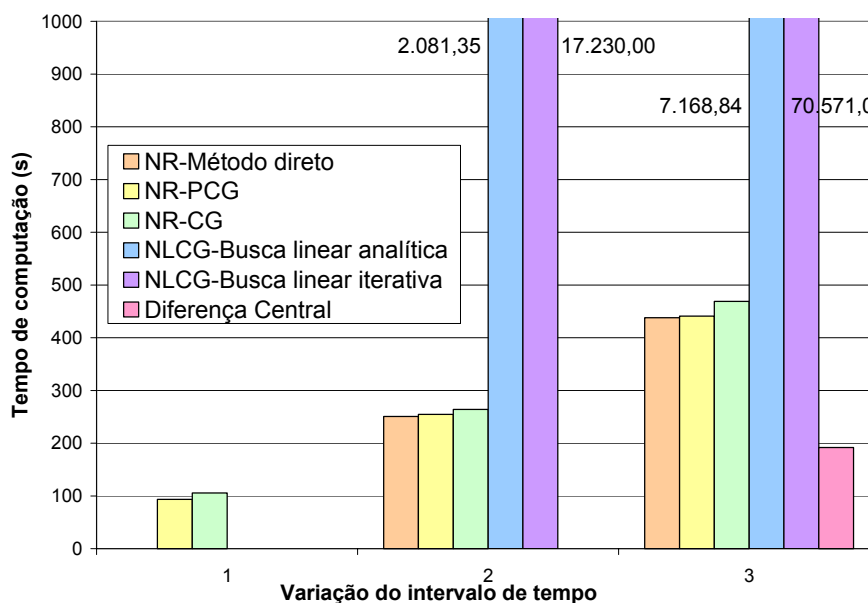


Figura 4.15 – Representação gráfica dos tempos de simulação para cada intervalo de tempo analisado.

Tabela 4.11 – Valores dos tempos de simulação (s) para cada intervalo de tempo analisado.

ALGORITMO UTILIZADO	$\Delta t_1$	$\Delta t_2$	$\Delta t_3$
NR - Método direto	*	250,89	437,97
NR - PCG	93,71	254,90	441,14
NR - CG	105,67	264,30	468,96
NLCG - Busca linear analítica	*	2081,35	7168,84
NLCG - Busca linear iterativa	*	17200,00	70570,98
Diferença central	*	*	192,15

\* O algoritmo divergiu.

Comparando-se a média de iterações por intervalo de tempo, observa-se na Figura 4.16 e na Tabela 4.8 que esse número cai para os algoritmos NR - Método direto, NR - PCG e NR - CG. Porém, para os algoritmos NLCG - Busca linear analítica e NLCG - Busca linear iterativa, a média permanece alta.

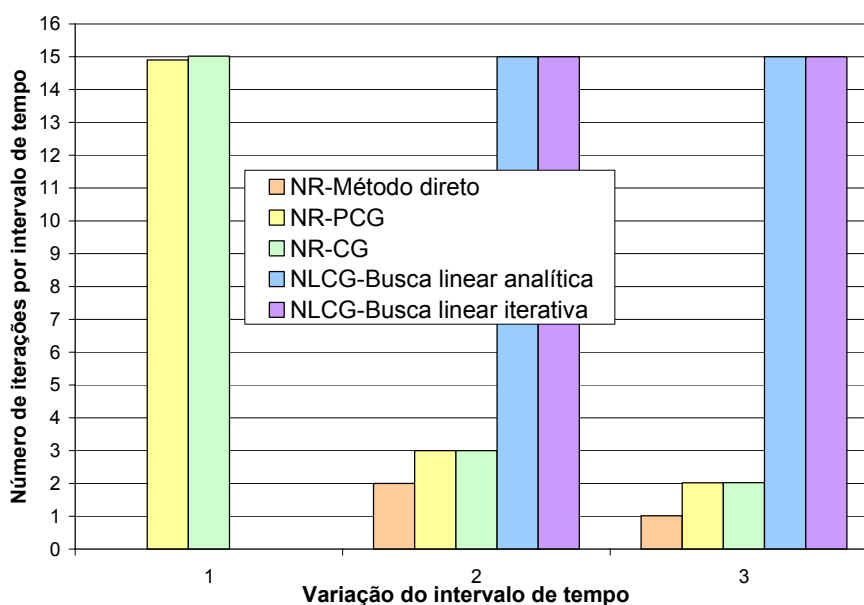


Figura 4.16 – Representação gráfica das médias de iterações por intervalo de tempo para cada intervalo de tempo analisado.

Tabela 4.12 – Valores das médias de iterações por intervalo de tempo para cada intervalo de tempo analisado.

ALGORITMO UTILIZADO	$\Delta t_1$	$\Delta t_2$	$\Delta t_3$
NR - Método direto	*	2,00	1,02
NR - PCG	13,90	2,00	1,02
NR - CG	14,02	2,00	1,03
NLCG - Busca linear analítica	*	15,00	15,00
NLCG - Busca linear iterativa	*	15,00	15,00

\* O algoritmo divergiu.

#### 4.4. Cabo tracionado

Este exemplo trata do caso de um cabo, inicialmente tracionado e na posição horizontal, tendo as extremidades esquerda e direita presas e seu peso próprio aplicado gradualmente de forma que o carregamento seja quase estático. A matriz de massa utilizada é diagonal, possibilitando comparações das respostas obtidas pelos algoritmos implícitos e o explícito (método da diferença central). O objetivo deste exemplo é verificar a performance desses métodos na obtenção da configuração estática não linear de cabos para 3 níveis de discretização da malha.

A Figura 4.17 apresenta a malha de elementos finitos utilizada e a Tabela 4.13, as propriedades físicas e geométricas do cabo.



Figura 4.17 – Desenho esquemático da malha de elementos finitos.

Tabela 4.13 – Propriedades físicas e geométricas do cabo.

Comprimento do cabo	500 m
Diâmetro*	0,214 m
Área da seção transversal (circular)*	$\frac{\pi \cdot D^2}{4} \text{ m}^2$
Peso específico linear*	3,1977 kN/m
Peso específico linear submerso*	2,7742 kN/m
Módulo de elasticidade longitudinal*	$3,907 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^2$
Tensão inicial	$10^4 \text{ kN/m}^2$

\* Dados obtidos em SILVEIRA (2001).

Observa-se que neste exemplo as propriedades físicas e geométricas utilizadas se referem a um tipo de linha de ancoragem utilizada nos exemplos de SILVEIRA (2001). Por se tratar de um caso de cabo que geralmente está submerso quando solicitado, utilizou-se o valor do seu peso submerso, ao invés do seu peso ao ar.

#### 4.4.1. Obtenção da configuração estática

Nesta análise utiliza-se a malha de 12 elementos finitos de treliça, cuja configuração inicial está apresentada na Figura 4.17. O peso próprio foi aplicado linearmente até um dado instante de tempo, a partir do qual seu valor permanece constante. Inicialmente, avalia-se qual o tempo necessário de aplicação do carregamento para que se obtenha uma configuração quase estática. A menor frequência da estrutura tem valor de 0,2082 rad/s, levando a um período de 30,2s. Adota-se um tempo de 1000s para aplicação do peso próprio, bem superior ao maior período natural da estrutura, e mais 200s para observação da configuração da estrutura sem aumento do carregamento, totalizando 1200s de análise. A Figura 4.10 ilustra a aplicação do peso próprio.

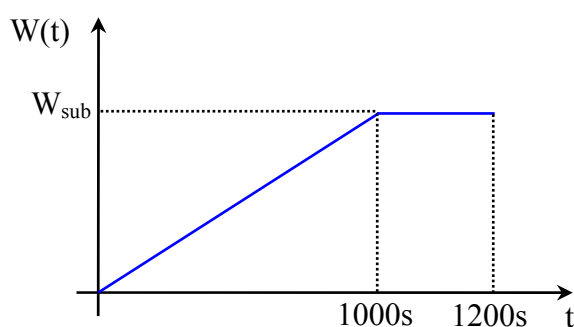


Figura 4.18 – Curva de aplicação do peso próprio.

Para execução do algoritmo da Diferença Central, é necessária uma avaliação das máximas frequências do modelo. A maior frequência registrada é de 9,88 rad/s, levando a um valor crítico de intervalo de tempo de 0,2024s. Opta-se por executar uma análise de referência, além das análises com cada algoritmo, com um intervalo de tempo no valor de 0,01s. Devido ao pequeno valor do intervalo de tempo para análise de referência, utiliza-se o Método da Diferença Central na sua execução.

Os valores de intervalo de tempo utilizados em cada algoritmo estão apresentados na Tabela 4.14.

Tabela 4.14 – Valores dos intervalos de tempo.

ALGORITMO UTILIZADO	$\Delta t$ (s)
NR – Método direto	8,0
NR – PCG	8,0
NR – CG	8,0
NLCG – Busca linear analítica	8,0
NLCG – Busca linear iterativa	8,0
Diferença Central	0,2
Diferença Central - referência	0,01

A história de deslocamentos verticais do nó central, obtida pelos algoritmos estudados, está apresentada na Figura 4.19.

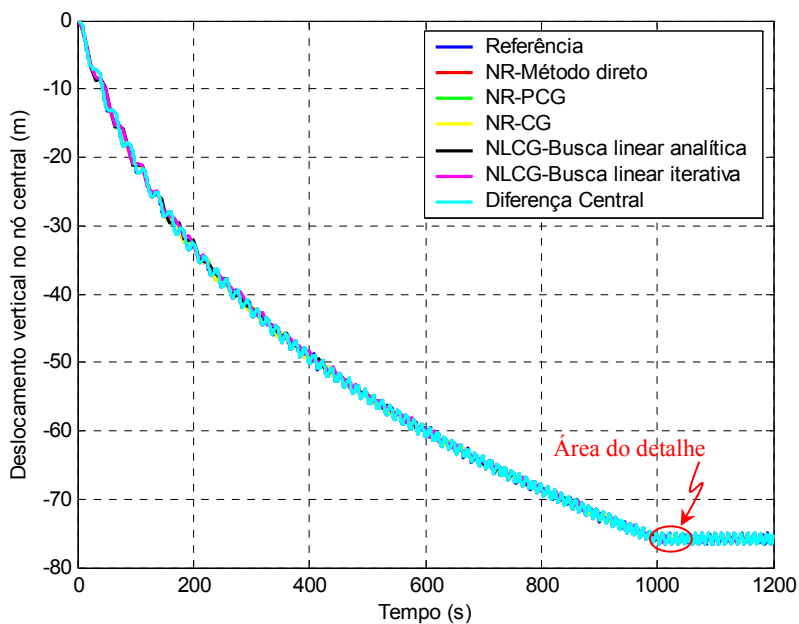


Figura 4.19 – História de deslocamentos verticais do nó central.

Para melhor visualização dos resultados, apresenta-se na Figura 4.20, um detalhe dos deslocamentos em um intervalo de tempo após a aplicação total do peso próprio.

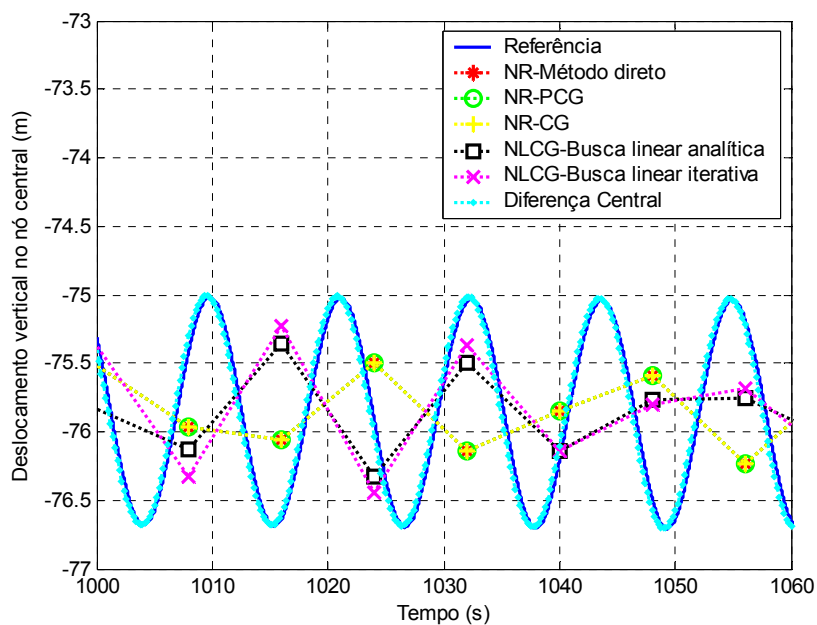


Figura 4.20 – Detalhe dos deslocamentos verticais do nó central.



Apesar do carregamento ser aplicado lentamente, a estrutura apresenta oscilações ao final da análise (Figura 4.20). Este fato é decorrente da falta de amortecimento no modelo estudado.

Observa-se (Figura 4.20) que os algoritmos implícitos não integram corretamente as maiores freqüências da estrutura, porém, obtêm resposta satisfatória considerando que o objetivo é encontrar uma configuração estática para o cabo.

Apresenta-se na Figura 4.21 a deformada do cabo para todas as análises realizadas.

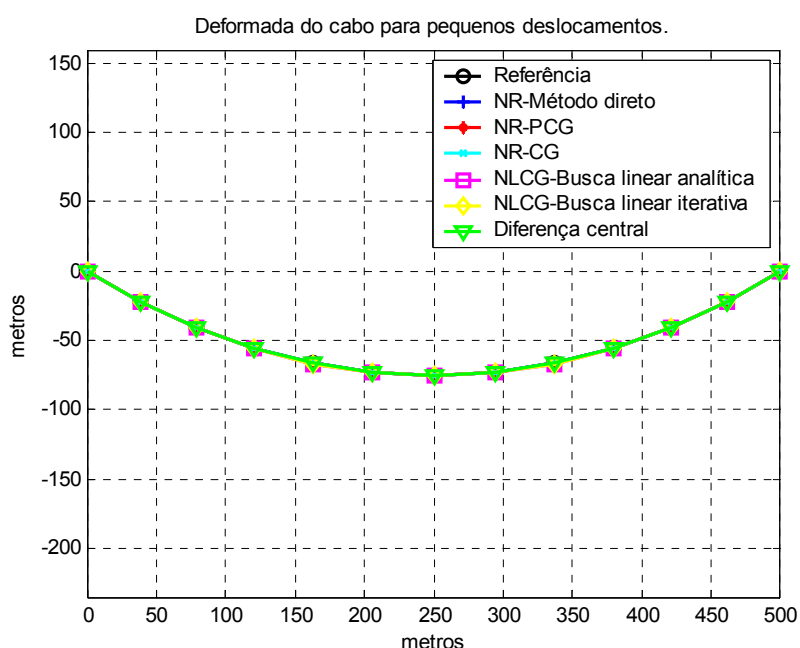


Figura 4.21 – Deformada do cabo no tempo final de análise.

A proximidade das soluções dificulta a visualização de cada uma individualmente. Portanto, apresenta-se na Figura 4.22 um detalhe da deformada no nó central, onde pode-se distinguir as soluções dos algoritmos NR - CG, NLCG - Busca linear iterativa, NLCG - Busca linear analítica e Diferença Central, além da análise de referência. As soluções dos algoritmos NR - Método direto e NR - PCG estão encobertas pela solução do algoritmo NR - CG. Observa-se que os deslocamentos estão em torno de 75,5m enquanto que as diferenças entre as deformadas são menores que 50cm, ou seja, menores que 0,66% do deslocamento total nesse nó.

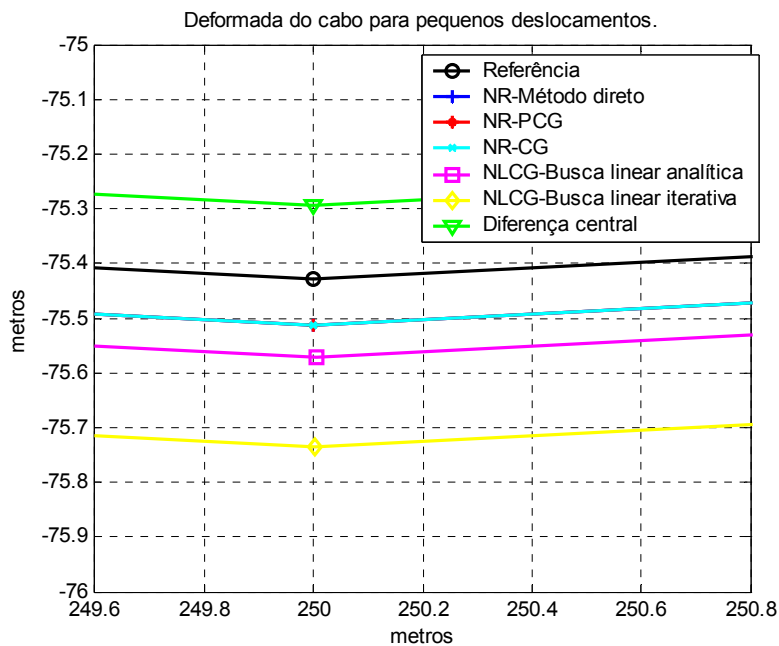


Figura 4.22 – Detalhe da deformada no nó central.

A Figura 4.23 apresenta algumas deformadas do decorrer da análise e a deformada final.

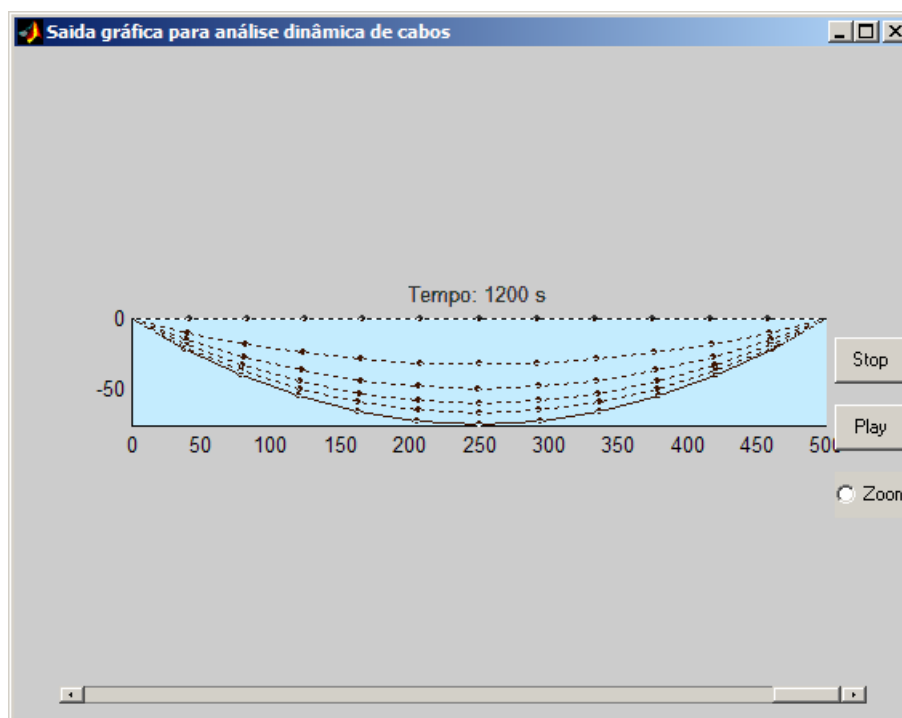


Figura 4.23 – Etapas da análise.

Os tempos de simulação e as médias de iterações por intervalo de tempo de cada algoritmo estão apresentados na Figura 4.24.

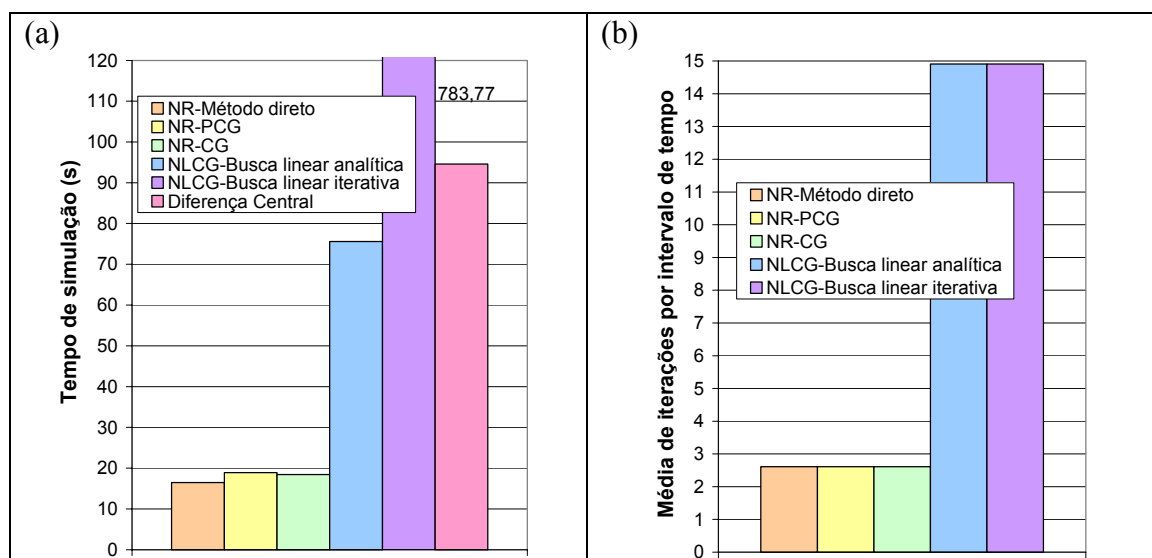


Figura 4.24 – (a) Tempos de simulação; (b) Média de iterações por intervalo de tempo.

Observa-se que os algoritmos implícitos que usam o método de Newton-Raphson para solução do sistema não linear apresentam tempo de simulação bem inferior que os demais algoritmos, incluindo-se o Método da Diferença Central. Este último só foi ultrapassado pelo algoritmo NLCG - Busca linear iterativa.

Observando-se a Figura 4.24 (b), a média de iterações por intervalo de tempo dos algoritmos que usam Gradientes Conjugados Não Linear apresenta-se bem superior aos demais algoritmos implícitos, justificando o maior tempo gasto por esses métodos.

Os valores numéricos dos tempos de simulação e médias de iterações, representados graficamente na Figura 4.24, estão apresentados na Tabela 4.15.

Tabela 4.15 – Tempos de simulação e médias de iterações por intervalo de tempo.

ALGORITMO UTILIZADO	TEMPOS (S)	MÉDIAS DAS ITERAÇÕES
NR – Método direto	16,46	2,61
NR – PCG	18,89	2,61
NR – CG	18,46	2,61
NLCG – Busca linear analítica	75,61	14,91
NLCG – Busca linear iterativa	783,77	14,91
Diferença Central	94,58	-

#### 4.4.2. Influência do refinamento da malha de elementos finitos

Após analisar uma malha com 12 elementos, avalia-se qual o desempenho dos algoritmos NR - PCG e NR - CG, em relação ao NR - Método direto, diante do aumento do número de elementos do modelo. Comparam-se os resultados para as malhas de 12, 120 e 480 elementos.

Com a alteração da malha as frequências máximas do modelo foram alteradas. COOK e outros (1989) apresentam uma forma de cálculo estimado da máxima frequência da estrutura, baseado na velocidade de propagação da onda no elemento linear, como apresentado na equação:

$$\omega_{\max} = \frac{2c}{L}, \quad (4.1)$$

onde

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (4.2)$$

sendo  $c$  a velocidade de propagação da onda,  $L$  o comprimento do elemento,  $E$  o módulo de elasticidade longitudinal e  $\rho$  a densidade do material. COOK e outros (1989) mostram que a máxima frequência para um modelo formado por elementos finitos é limitada pela máxima frequência individual dos elementos que a constituem. Apresentam-se na Tabela 4.16 as frequências estimadas da forma acima citada, além dos valores obtidos através do cálculo numérico das frequências naturais. Observam-se poucas diferenças entre as duas formas utilizadas.

Tabela 4.16 – Frequências máximas.

Método	12 elem.	120 elem.	480 elem.
Autovalores	9,88	99,66	398,66
Estimativa analítica	9,97	99,65	398,58

O refinamento da malha de elementos finitos gera mudanças na ordem de grandeza das frequências, o que altera o valor máximo para o incremento de tempo do

algoritmo da diferença central. A Tabela 4.17 apresenta os valores críticos para o intervalo de tempo do Método da Diferença Central.

Tabela 4.17 – Valores críticos de intervalo de tempo.

	12 elem.	120 elem.	480 elem.
$\Delta t_{cr}$ (s)	$2,02 \cdot 10^{-1}$	$2,0 \cdot 10^{-2}$	$5,02 \cdot 10^{-3}$

O valor do intervalo de tempo utilizado nos algoritmos implícitos para a malha de 12 elementos permanece o mesmo, 8s. A Figura 4.25 apresenta os deslocamentos verticais do nó central gerados pelo algoritmo NR - PCG para as três malhas avaliadas.

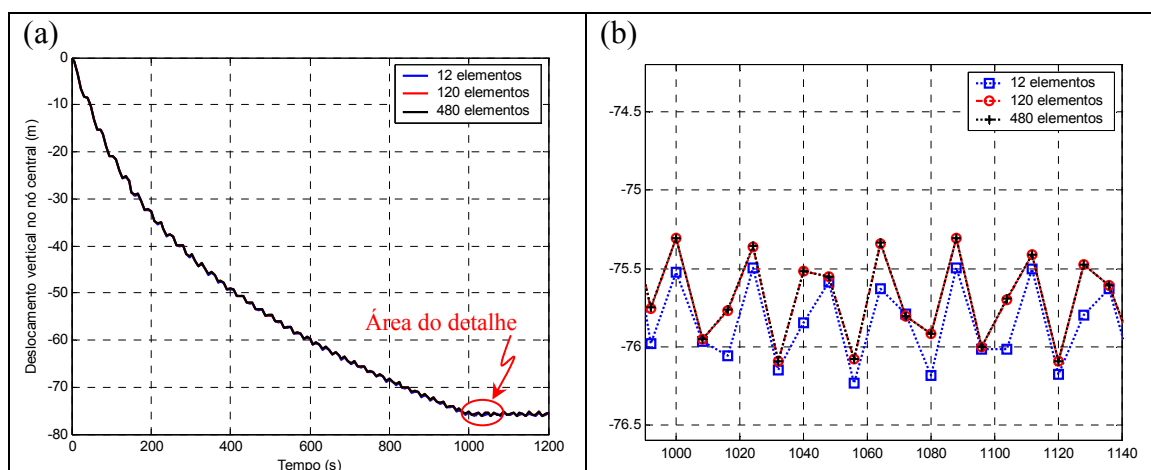


Figura 4.25 – (a) Deslocamentos verticais do nó central para o algoritmo NR – PCG; (b) Detalhe dos deslocamentos verticais do nó central.

A Tabela 4.18 apresenta os tempos de simulação e médias de iterações por intervalo de tempo para as algoritmos iterativos.

Tabela 4.18 – Análise geral do desempenho dos algoritmos iterativos.

ALGORITMO UTILIZADO	TEMPOS (s)		MÉDIAS	
	120 elem.	480 elem.	120 elem.	480 elem.
NR – Método direto	169,33	731,30	2,92	3,23
NR – PCG	234,74	1774,1	2,92	3,23
NR – CG	284,87	*	3,77	*

\* O algoritmo divergiu.

JOUGLARD e COUTINHO (1998) classificam como problemas de grande porte aqueles com mais de 100000 elementos. Assim sendo, apesar do aumento do sistema,

de 22 para 958 equações, ou de 12 para 480 elementos, o problema não é caracterizado ainda como de grande porte, o que justifica o fato do método direto apresentar-se mais eficiente que os iterativos neste exemplo.

Um outro fato que se observa é a divergência do algoritmo dos Gradientes Conjugados sem condicionamento. Apresenta-se na Tabela 4.19 o máximo número de condição das matrizes efetivas para cada malha, indicando o grau de condicionamento em cada caso.

Tabela 4.19 – Máximo número de condição da matriz efetiva.

	12 elem.	120 elem.	480 elem.
$N_{\text{cond}}$	415,05	4204,0	670000,0

Quanto mais próximo da unidade estiver o valor do número de condição, melhor é o seu condicionamento. Observa-se que o alto valor de  $N_{\text{cond}}$  aliado à falta do uso do condicionador, para 480 elementos, levou à divergência do algoritmo NR - CG. Nessas condições, o algoritmo dos Gradientes Conjugados Pré-Condicionados apresenta-se mais eficiente e robusto que o método tradicional.

#### 4.5. Pêndulos

Este é um exemplo no qual um cabo, cujo único carregamento é seu próprio peso, é posicionado inicialmente em uma configuração parabólica tendo sua extremidade direita solta no instante inicial da análise.

A matriz de massa utilizada é diagonal, fazendo o cabo comportar-se como um pêndulo composto por  $n$  hastes. O objetivo deste exemplo é avaliar o comportamento dos algoritmos estudados diante de problemas dinâmicos com elevado grau de não linearidade.

A Figura 4.17 apresenta as malhas de elementos finitos utilizadas, com a indicação da numeração dos elementos e dos graus de liberdade livres. As propriedades físicas e geométricas do cabo estão apresentadas na Tabela 4.13, sendo neste caso o valor do comprimento  $L$  igual a 10m.

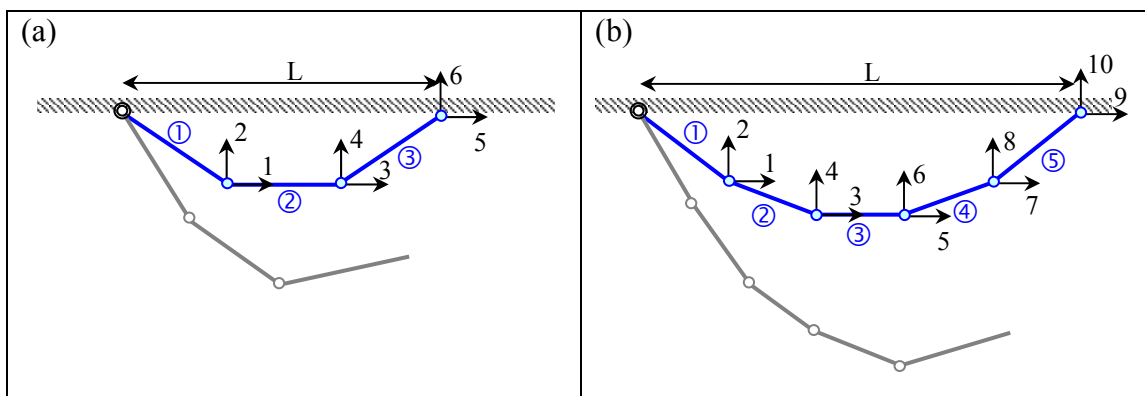


Figura 4.26 – Desenho esquemático da malha de elementos finitos.

#### 4.5.1. Pêndulo Triplo

Inicialmente analisa-se a malha com três elementos finitos, utilizando-se o algoritmo NR - Método direto para avaliar as máximas freqüências do sistema, verificando-se qual o valor crítico de  $\Delta t$  para o Método das Diferenças Centrais. O histórico de máximas freqüências assim obtido está apresentado na Figura 4.27, para  $\Delta t = 0,01s$ . A tolerância admitida nos algoritmos que utilizam um processo iterativo para solução do sistema não linear é de  $10^{-6}$ .

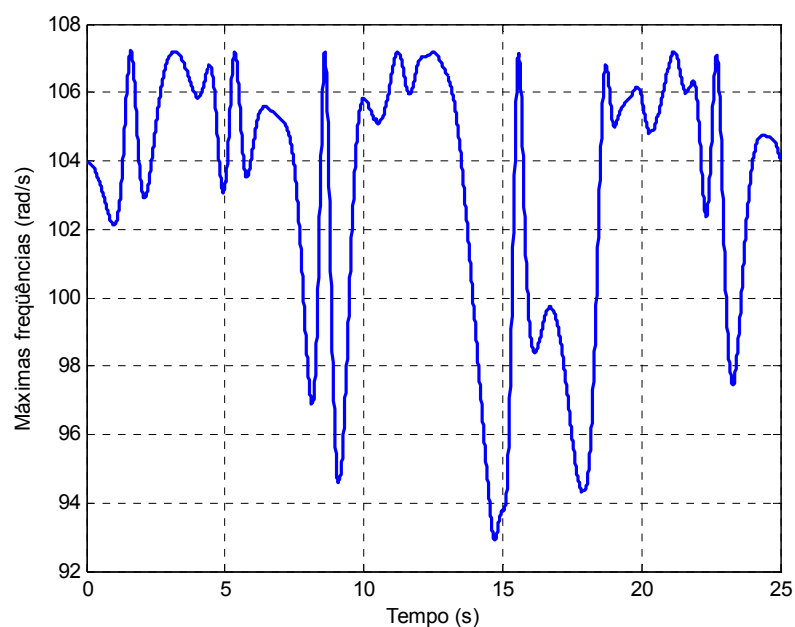


Figura 4.27 – História das máximas freqüências para o pêndulo triplo.

O maior valor entre as máximas freqüências foi de 107,2 rad/s, levando a um valor máximo de 0,0187s para o incremento de tempo do Método das Diferenças Centrais. Avaliam-se então os valores de intervalos de tempo iguais a 0,01s e 0,001s.

A fim de se avaliar o grau de não linearidade do problema, apresenta-se também, na Figura 4.28 a variação das mínimas freqüências do sistema com o tempo.

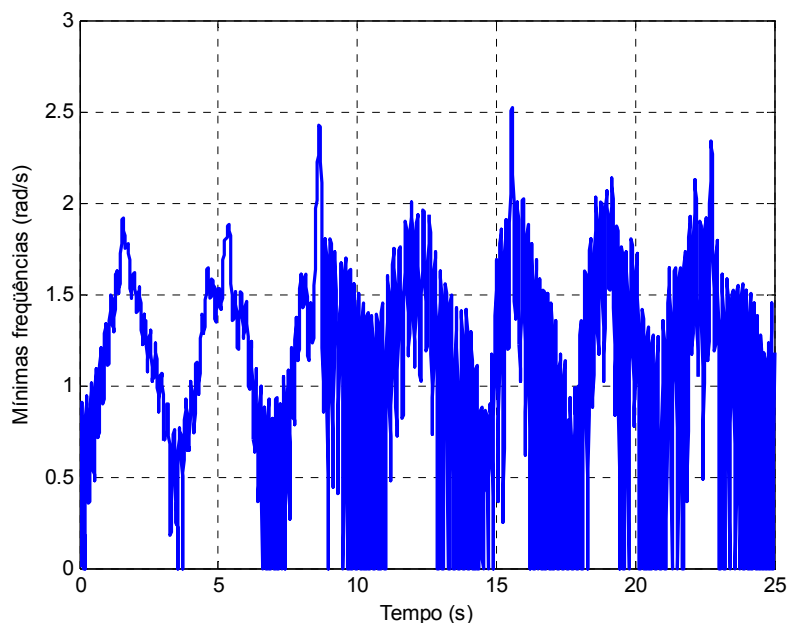


Figura 4.28 – História das mínimas freqüências para o pêndulo triplo.

Observa-se grande variação de freqüências em curtos intervalos de tempo, indicando que este é um problema com alto grau de não linearidade.

As respostas geradas com os valores de incremento de tempo, antes apresentados, são comparadas com a solução obtida pelo MDC para um intervalo de tempo de 0,0001s, considerada como referência.

A Figura 4.29 apresenta a resposta da análise realizada com o algoritmo NR - Método direto para  $\Delta t = 0,01s$  em alguns instantes de tempo iniciais.



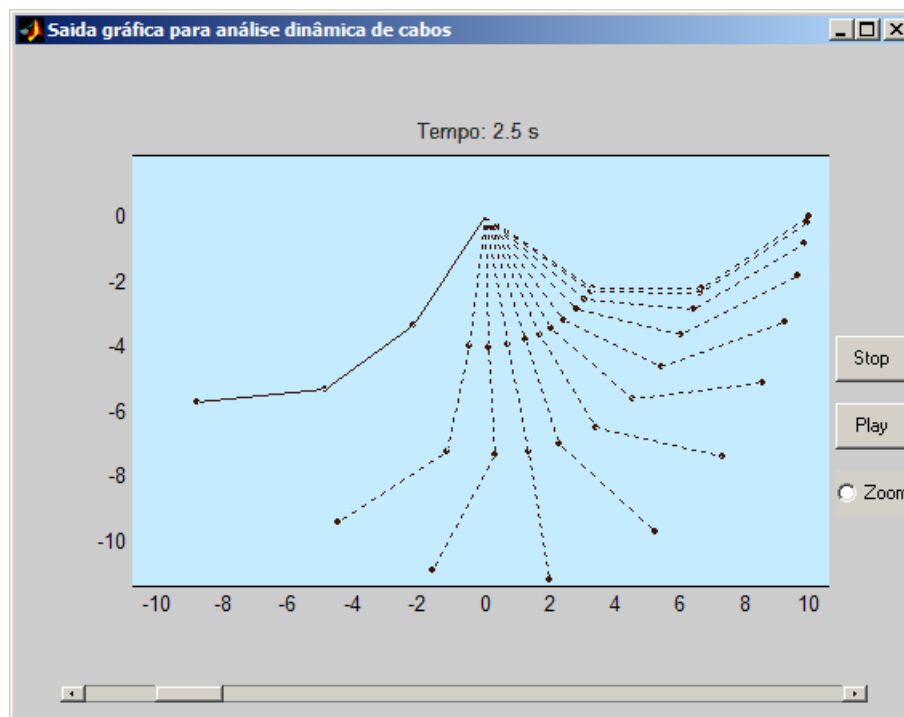


Figura 4.29 – Etapas da análise do pêndulo triplo.

Esta resposta pode ser melhor avaliada através da observação do histórico de deslocamentos nos nós no modelo. Observa-se nas Figuras 4.28 e 4.29 os deslocamentos horizontal e vertical do nó extremo da direita.

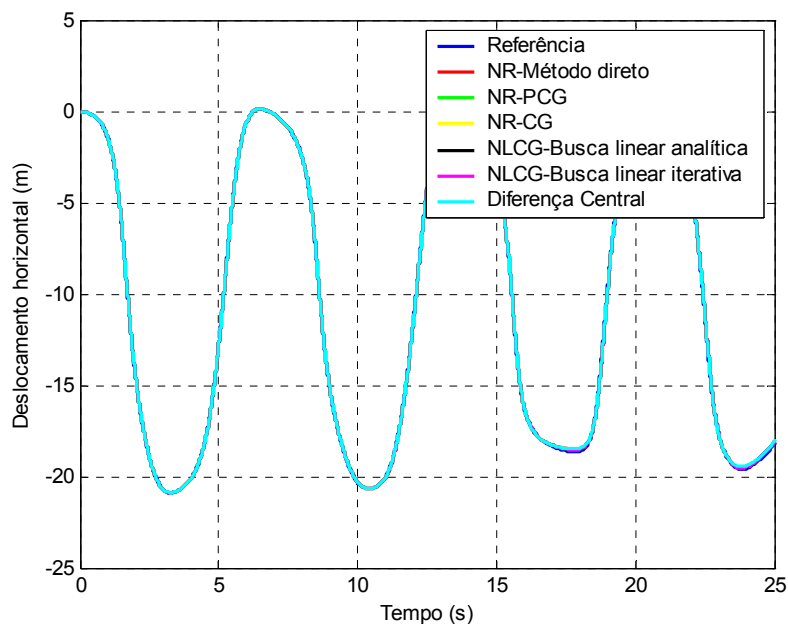


Figura 4.30 – Deslocamento horizontal na extremidade direita para  $\Delta t = 0,01s$ .

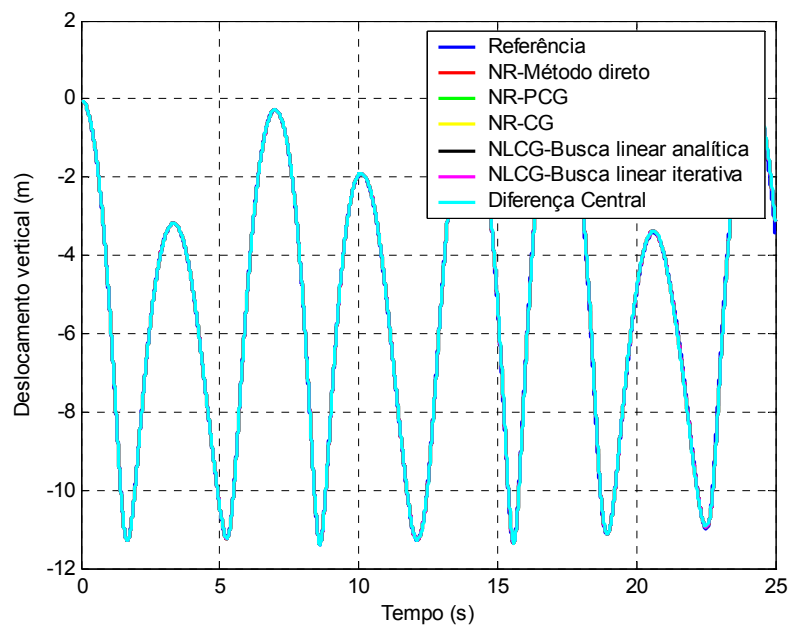


Figura 4.31 – Deslocamento vertical na extremidade direita para  $\Delta t = 0,01s$ .

Observa-se a coerência entre os resultados, de forma que não se distingue facilmente as respostas de cada algoritmo.

Executam-se novamente as simulações com os diversos algoritmos estudados, porém com o segundo intervalo de tempo, de valor  $0,001s$ . Comparando-se os resultados do algoritmo NR - CG para os dois valores de intervalo de tempo, observa-se

na Figura 4.32 e no detalhe apresentado na Figura 4.33 que a redução do intervalo de tempo aproximou a resposta obtida da solução de referência.

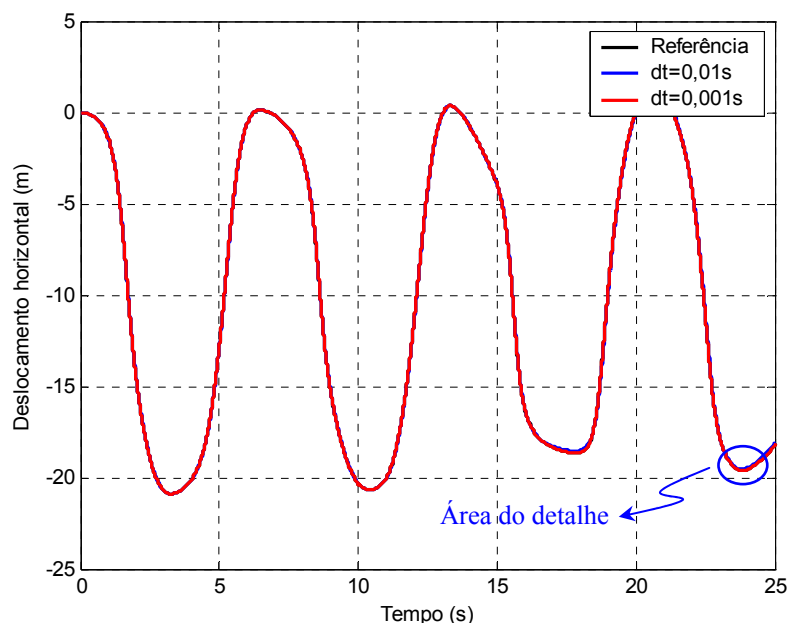


Figura 4.32 – Comparação entre as respostas obtidas com o algoritmo NR - CG para dois intervalos de tempo.

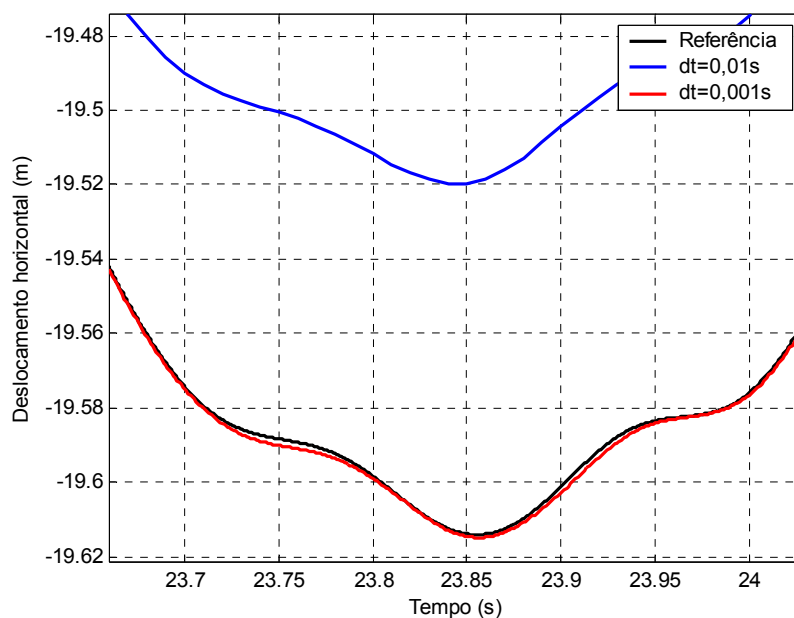


Figura 4.33 – Detalhe da comparação entre as respostas obtidas com o algoritmo NR - CG para dois intervalos de tempo.

A Figura 4.34 e a Tabela 4.5 apresentam os erros relativos para os algoritmos estudados, para cada intervalo de tempo utilizado. Observa-se a razoável redução nos erros com a diminuição do  $\Delta t$ , demonstrando a convergência dos vários algoritmos para uma única resposta.

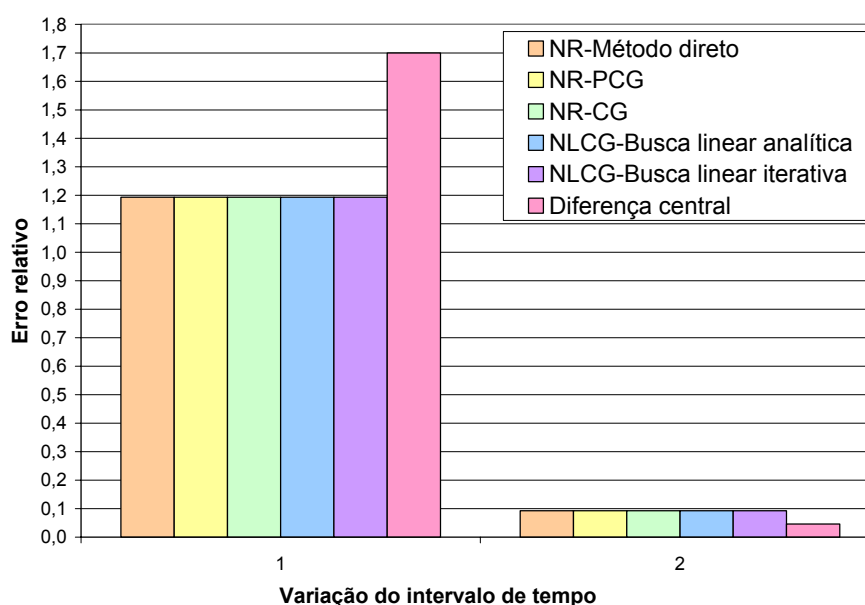


Figura 4.34 – Representação gráfica dos valores dos erros relativos em cada intervalo de tempo analisado.

Tabela 4.20 – Valores dos erros relativos em cada intervalo de tempo analisado.

ERRO RELATIVO À SOLUÇÃO COM $\Delta t = 0,0001$ s		
ALGORITMO UTILIZADO	$\Delta t_1$	$\Delta t_2$
NR - Método direto	1,19	0,09
NR - PCG	1,19	0,09
NR - CG	1,19	0,09
NLCG - Busca linear analítica	1,19	0,09
NLCG - Busca linear iterativa	1,19	0,09
Diferença Central	1,70	0,05

Um importante fator observado é o tempo de análise gasto pelos algoritmos, que são apresentados graficamente na Figura 4.35 e numericamente na Tabela 4.21. Observa-se o natural aumento do tempo de análise com a redução do intervalo de tempo, para cada algoritmo. Entre os algoritmos, o grupo que utiliza o método de Newton-Raphson para solução do sistema não linear permanece mais eficiente que o grupo que utiliza o Método dos Gradientes Conjugados Não Linear.

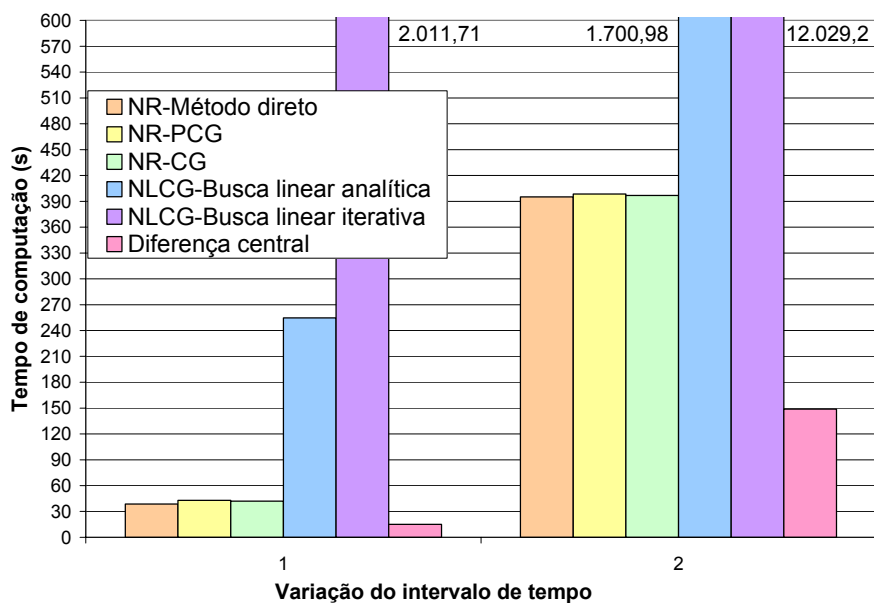


Figura 4.35 – Representação gráfica dos tempos de simulação para cada intervalo de tempo analisado.

Tabela 4.21 – Valores dos tempos de análise (s) para cada intervalo de tempo analisado.

ALGORITMO UTILIZADO	$\Delta t_1$	$\Delta t_2$
NR - Método direto	38,61	395,13
NR - PCG	43,04	398,46
NR - CG	42,07	396,78
NLCG - Busca linear analítica	254,64	1700,98
NLCG - Busca linear iterativa	2011,71	12029,20
Diferença Central	15,15	148,74

- O algoritmo não foi executado.

A Figura 4.36 e a Tabela 4.22 apresentam esses resultados, onde observa-se a redução da média com a diminuição do intervalo de tempo.

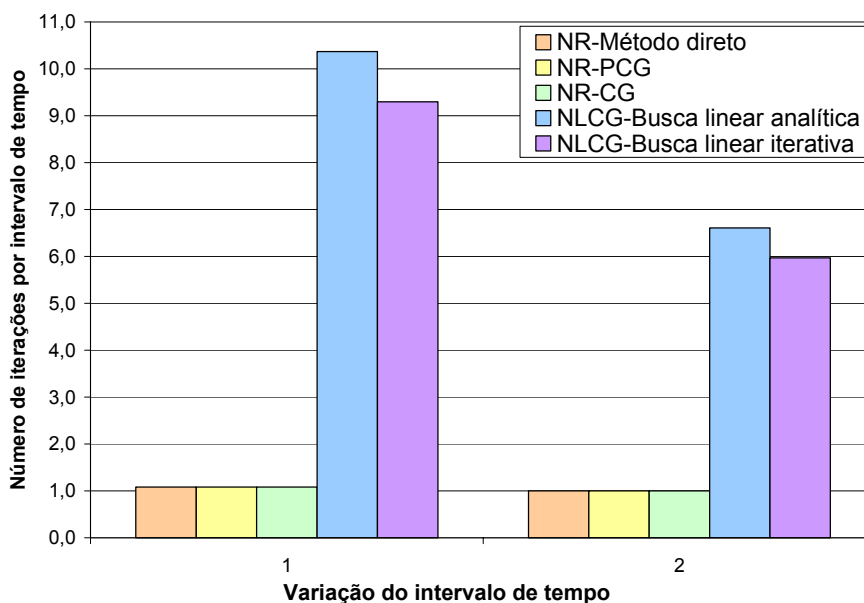


Figura 4.36 – Representação gráfica das médias de iterações por intervalo de tempo para cada intervalo de tempo analisado.

Tabela 4.22 – Valores das médias de iterações por intervalo de tempo para cada intervalo de tempo analisado.

ALGORITMO UTILIZADO	$\Delta t_1$	$\Delta t_2$
NR - Método direto	1,08	1,00
NR - PCG	1,08	1,00
NR - CG	1,08	1,00
NLCG - Busca linear analítica	10,37	6,61
NLCG - Busca linear iterativa	9,30	5,97

- O algoritmo não foi executado.

Utilizando-se este modelo de cabo com três elementos finitos, e o algoritmo NR-CG, realiza-se uma comparação entre a implementação do Método dos Gradientes Conjugados que utiliza as matrizes globais e a implementação elemento por elemento desse método.

A Tabela 4.23 apresenta uma comparação dos tempos de análise que cada implementação utiliza.

Tabela 4.23 – Comparação entre implementações para o algoritmo NR-CG.

IMPLEMENTAÇÃO UTILIZADA	TEMPO
NR – CG (global)	41,64
NR – CG (ExE)	56,58

Por se tratarem do mesmo algoritmo, as implementações apresentam soluções idênticas, ou seja, o erro relativo entre elas é nulo. As diferenças surgem apenas na quantidade de memória utilizada durante o processamento e no tempo de execução. A implementação ExE executa *loops* a mais do que a implementação que utiliza as matrizes globais. Nesses *loops*, necessários sempre que forem executadas operações do tipo multiplicação vetor-matriz, realizam-se serialmente processos que poderiam ser executados paralelamente.

#### 4.5.2. Pêndulo Quíntuplo

Avalia-se também um cabo discretizado com cinco elementos, formando um pêndulo quíntuplo. Neste caso, a estrutura tem as configurações apresentadas na Figura 4.37 nos instantes iniciais da simulação.

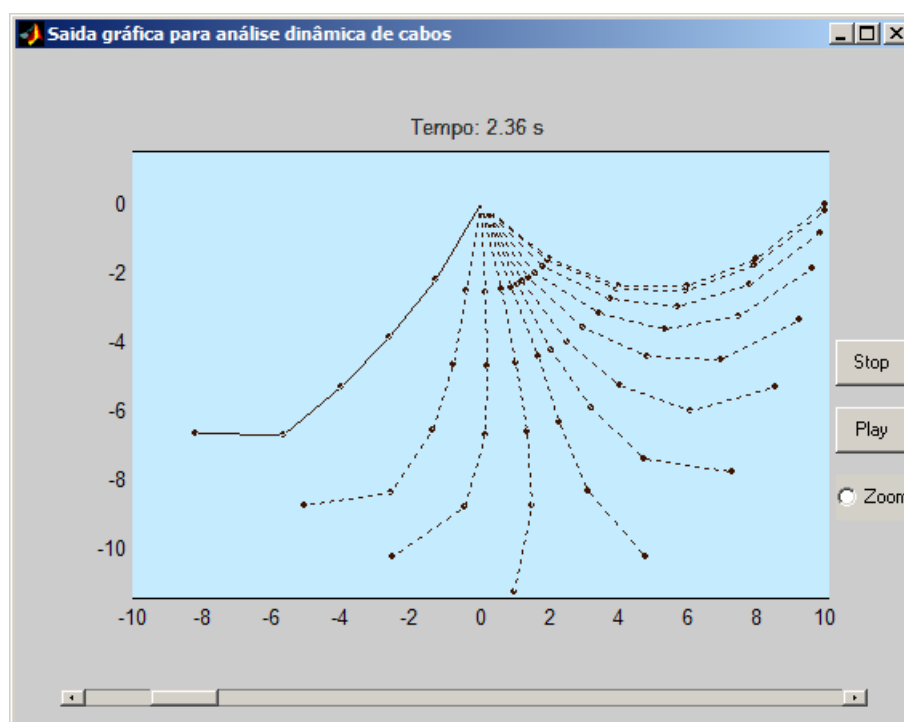


Figura 4.37 – Etapas da análise do pêndulo quíntuplo.

Na Figura 4.38 apresentam-se os deslocamentos vertical e horizontal na extremidade direita do cabo, para os dois intervalos avaliados. Observa-se que, para essa discretização e esses valores de incrementos de tempo, os algoritmos não convergem para uma única solução, resultado diferente do obtido para três elementos.

Neste caso, admite-se a mesma tolerância ( $10^{-6}$ ) do caso com três elementos para os algoritmos que utilizam um processo iterativo para solução do sistema não linear.

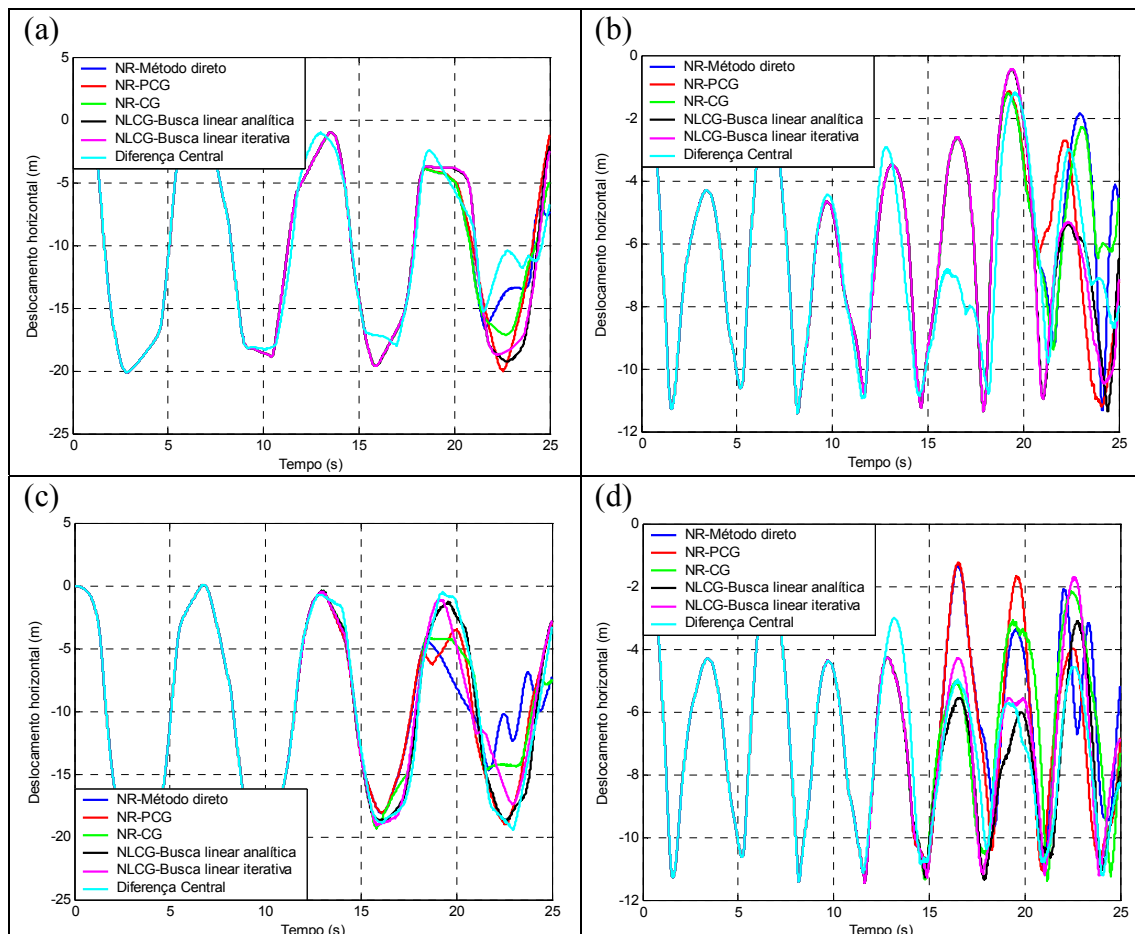


Figura 4.38 – (a) e (b) Deslocamentos horizontal e vertical na extremidade direita para  $\Delta t = 0,01s$ ; (c) e (d) Deslocamentos horizontal e vertical na extremidade direita para  $\Delta t = 0,001s$ .

Realiza-se um teste com os algoritmos NR - Método direto e Diferença central com um intervalo de tempo menor que os dois anteriores e de valor  $\Delta t = 0,0001s$ . O resultado obtido está apresentado na Figura 4.39.



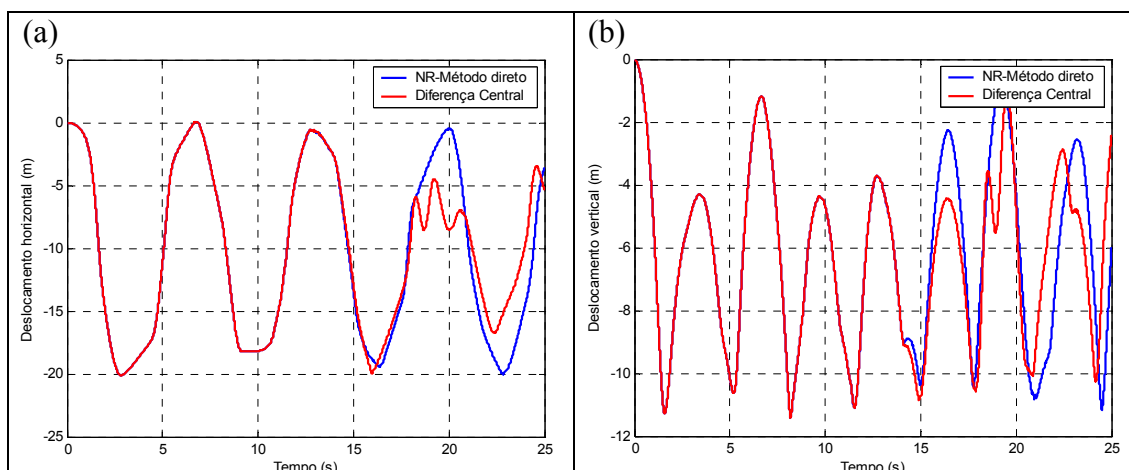


Figura 4.39 – (a) e (b) Deslocamentos horizontal e vertical na extremidade direita para  $\Delta t = 0,0001s$ .

Constata-se que, mesmo utilizando-se o intervalo de tempo pequeno, as respostas continuam apresentando discordância, principalmente nos últimos 10s de simulação.

Observando o histórico de máximas freqüências para esta última discretização, Figura 4.40, tem-se que a maior freqüência registrada tem valor de 187,5 rad/s. Esse histórico registra maiores variações das máximas freqüências e um aumento de cerca de 75% na maior freqüência em relação à malha de três elementos.

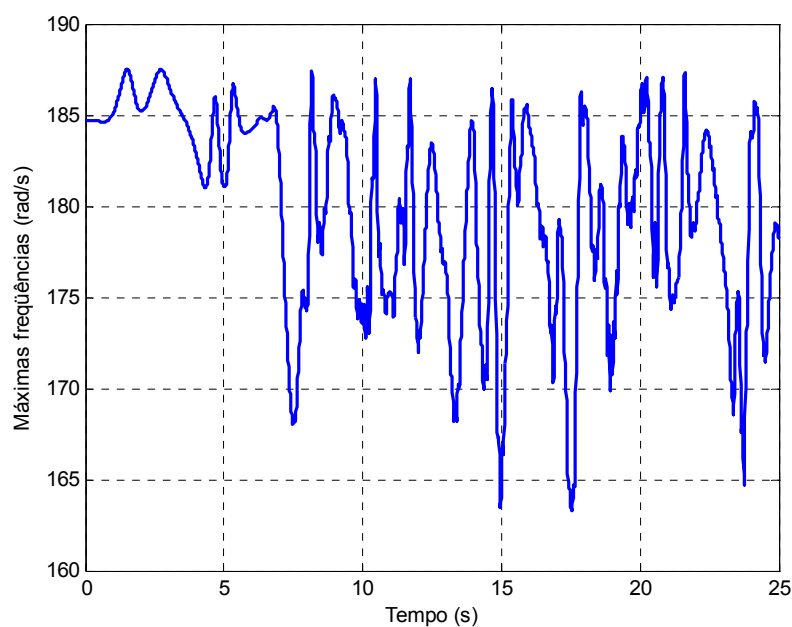


Figura 4.40 – História no tempo da máximas freqüências.

Apresenta-se também o histórico de mínimas frequências, onde observa-se o aumento da variabilidade dos valores em relação ao caso do pêndulo triplo, indicando um maior nível de não linearidade deste caso.

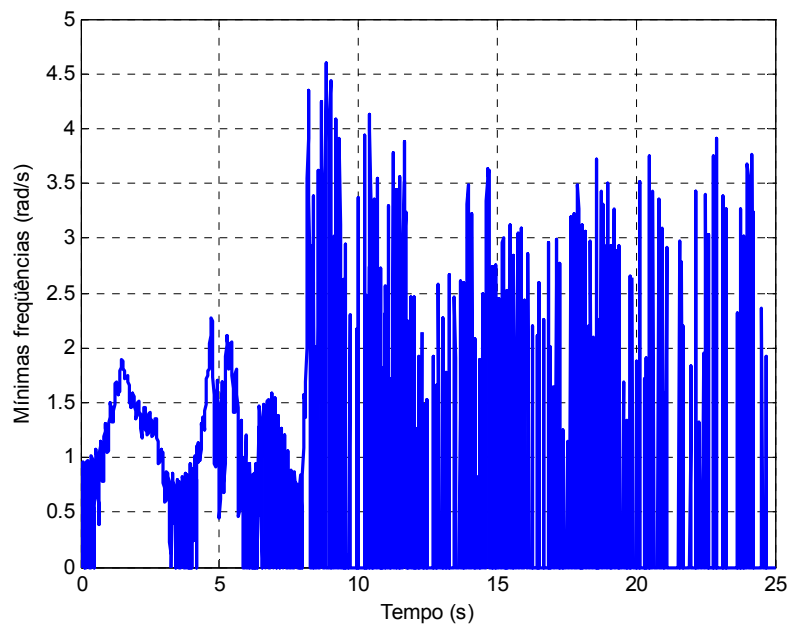


Figura 4.41 – História no tempo da mínimas frequências.

Os tempos de análise neste segundo caso foram maiores que no primeiro e estão apresentados na Figura 4.42 e na Tabela 4.24.

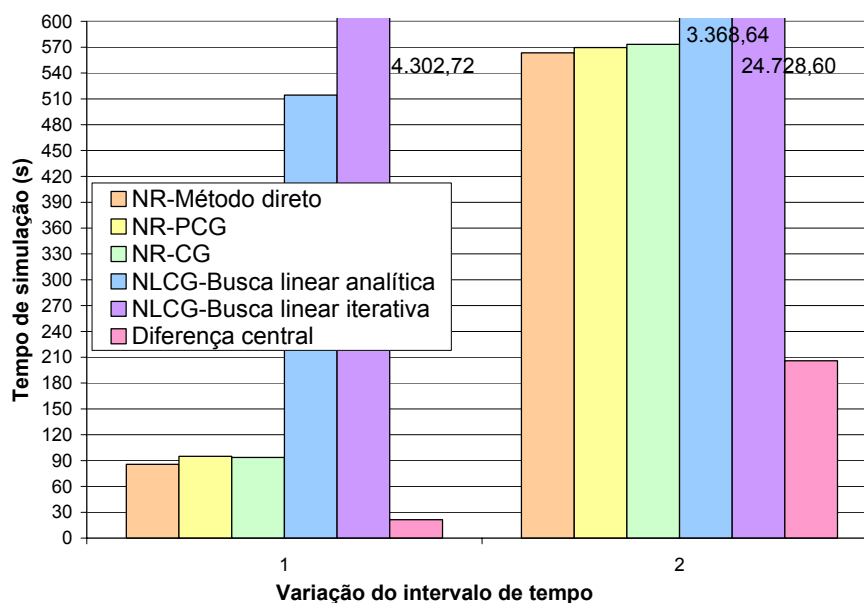


Figura 4.42 – Representação gráfica dos tempos de simulação para cada intervalo de tempo analisado.

Tabela 4.24 – Valores dos tempos de análise para cada intervalo de tempo analisado.

ALGORITMO UTILIZADO	$\Delta t_1$	$\Delta t_2$
NR – Método direto	85,75	563,47
NR – PCG	95,07	569,57
NR – CG	93,75	573,24
NLCG – Busca linear analítica	514,50	3368,64
NLCG – Busca linear iterativa	4302,72	24728,60
Diferença central	21,42	205,91

Observa-se também um aumento na média de iterações por intervalo de tempo em comparação com a malha de três elementos. Os resultados estão apresentados na Figura 4.43 e na Tabela 4.25.

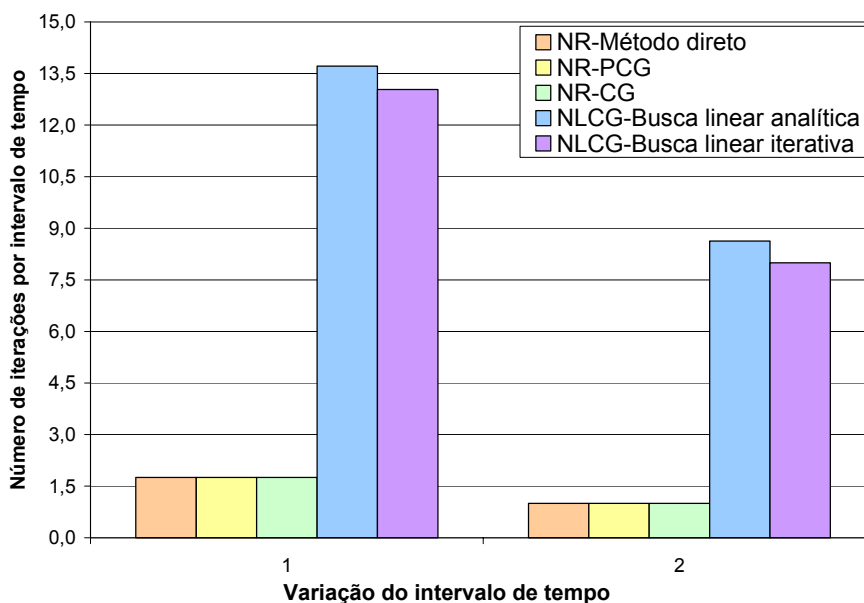


Figura 4.43 – Representação gráfica das médias de iterações por intervalo de tempo para cada intervalo de tempo analisado.

Tabela 4.25 – Valores das médias de iterações por intervalo de tempo para cada intervalo de tempo analisado.

ALGORITMO UTILIZADO	$\Delta t_1$	$\Delta t_2$
NR - Método direto	1,76	1,00
NR - PCG	1,75	1,00
NR - CG	1,76	1,00
NLCG - Busca linear analítica	13,71	8,63
NLCG - Busca linear iterativa	13,03	8,00

Com relação às medidas de erros, para essa malha, não é possível encontrar uma configuração de referência, pois mesmo usando  $\Delta t = 0,0001s$ , as respostas dos algoritmos NR - Método direto e Diferença central não geram respostas coincidentes (Figura 4.39). Como os valores dos intervalos de tempo são bastante pequenos, avaliam-se os erros do algoritmo explícito utilizado, Diferença Central, através da medida do balanço energético. Esses valores estão apresentados na Figura 4.44.

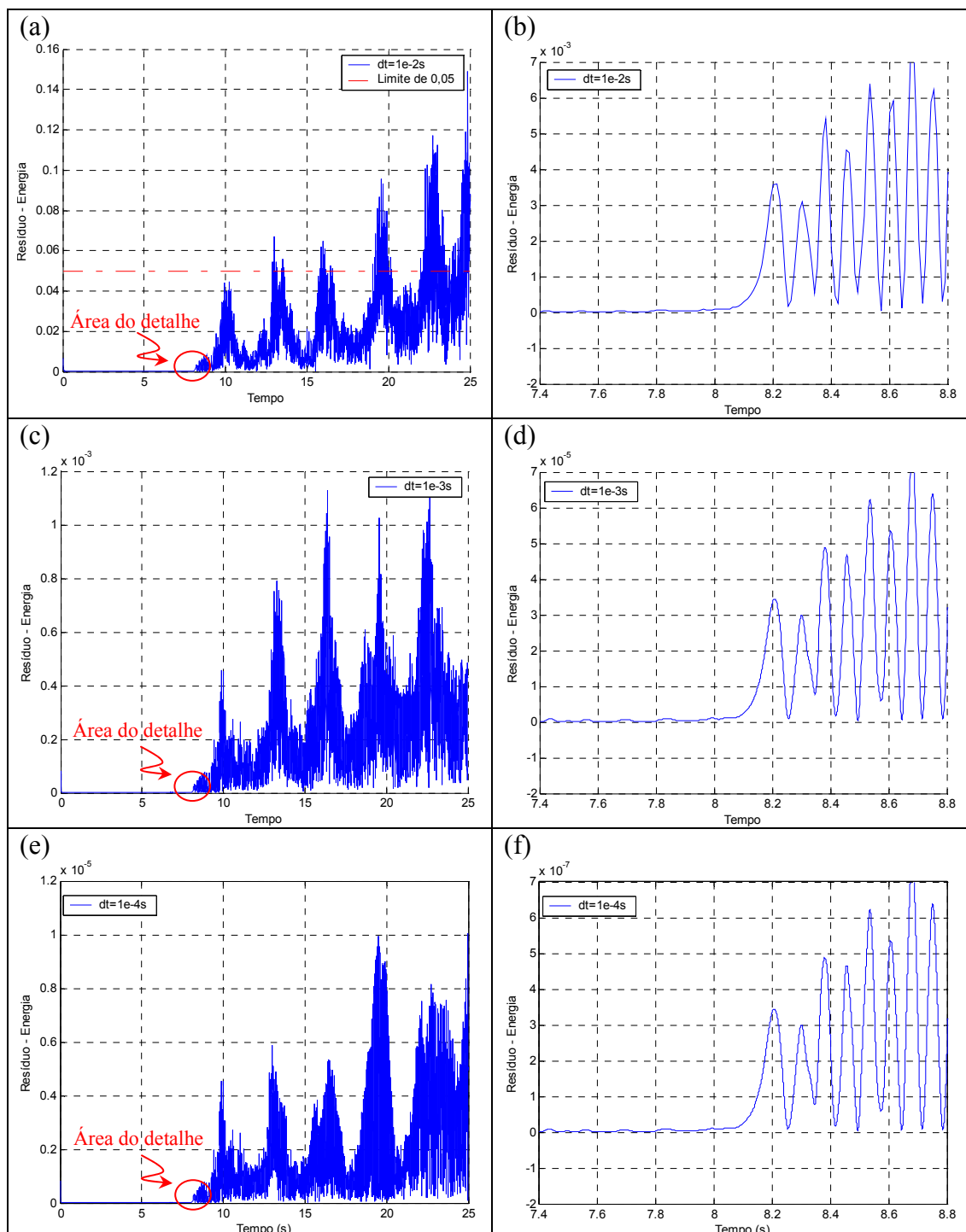


Figura 4.44 – (a), (c) e (e) Erros em energia para  $\Delta t = 0,01s$ ,  $\Delta t = 0,001s$  e  $\Delta t = 0,0001s$ ; (b), (d) e (f) Detalhes dos gráficos (a) (c) e (e).

Observa-se que no caso de  $\Delta t = 0,01s$ , após o oitavo segundo o erro passa a aumentar chegando a ultrapassar o limite de 0,05 citado por COOK e outros (1989) como um limite para estabilidade. O mesmo ocorre para  $\Delta t = 0,001s$  e  $\Delta t = 0,0001s$ ,

porém a ordem de grandeza do resíduo para esses casos é duas e quatro vezes respectivamente menor, não atingindo o limite de erro de 0,05.

O fato de não se obter uma concordância entre as respostas dos diversos algoritmos, para o pêndulo quádruplo, demonstra que este exemplo possui características particulares de não linearidades que devem ser analisadas. Uma possibilidade levantada é este caso apresentar natureza caótica, caracterizando-se pela alta sensibilidade da resposta obtida para mínimas diferenças nas condições iniciais do problema. Essa possibilidade é investigada ao se comparar as respostas obtidas para um mesmo algoritmo, porém com pequenas perturbações nas condições iniciais. As Figuras 4.45 e 4.46 apresentam esta comparação para o caso do algoritmo NR - Método direto, onde observa-se o mesmo fenômeno de discordância de respostas apresentado quando comparados os diferentes algoritmos estudados para condições iniciais idênticas. As condições iniciais utilizadas nessa comparação são apresentadas na Tabela 4.26.

Este trabalho, porém, objetiva o estudo dos algoritmos, não sendo exploradas essas características, ficando esse aspecto como sugestão para outros trabalhos que abordem temas afins.

Tabela 4.26 – Valores das médias de iterações por intervalo de tempo para cada.

CONDIÇÕES INICIAIS NO GRAU DE LIBERDADE VERTICAL NA EXTREMIDADE DIREITA	
$u_0 = 0 \text{ m}$	$v_0 = 0$
$u_0 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$v_0 = 0$
$u_0 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}$	$v_0 = 0$

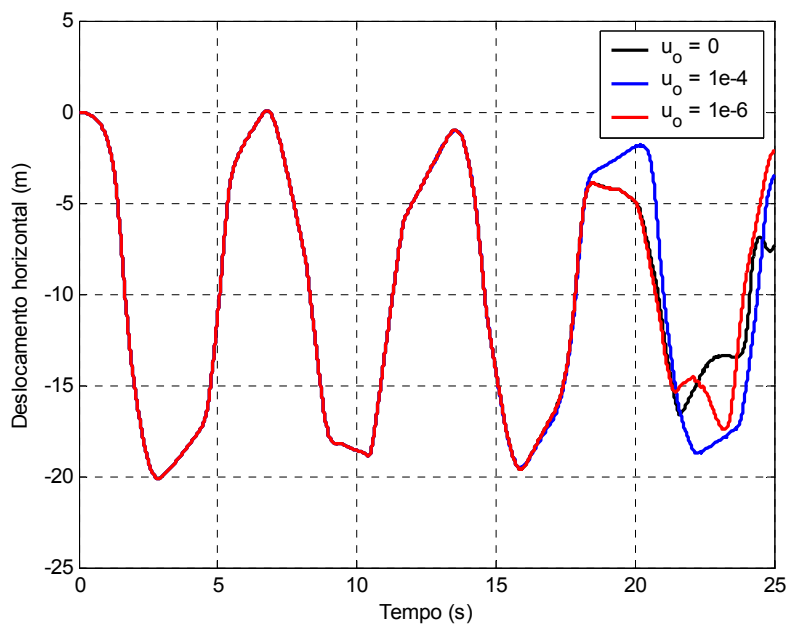


Figura 4.45 – Deslocamento horizontal na extremidade direita para  $\Delta t = 0,01s$ , usando o algoritmo NR - Método direto.

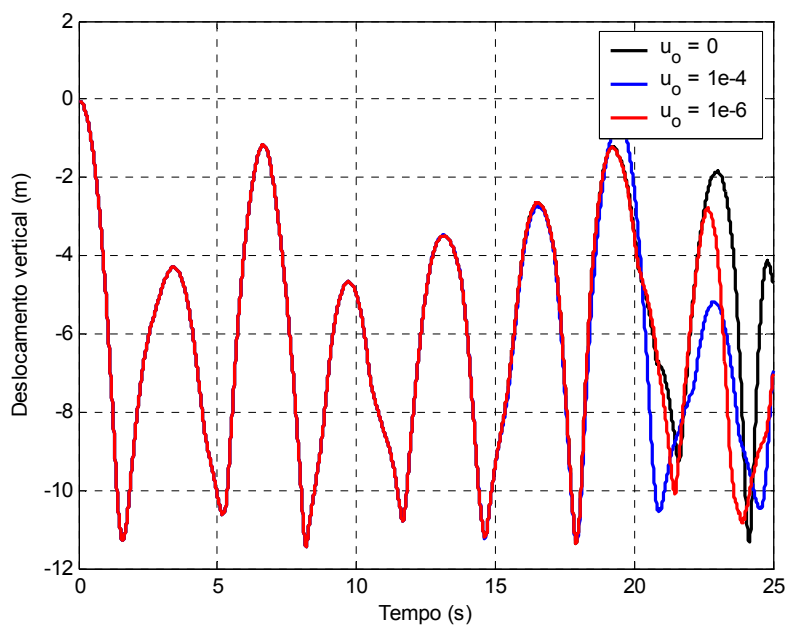


Figura 4.46 – Deslocamento vertical na extremidade direita para  $\Delta t = 0,01s$ , usando o algoritmo NR - Método direto.

# Conclusões

## 5.1. Conclusões, comentários e sugestões

Este trabalho tem como objetivo principal realizar um estudo acerca de algoritmos não lineares de integração no tempo e estratégias elemento por elemento para esses algoritmos, implementando-os e avaliando seus comportamentos diante de casos de análises dinâmicas e quase estáticas de estruturas. No decorrer deste trabalho, apresentam-se resultados demonstrando que esse objetivo é alcançado.

A principal contribuição deste trabalho está na geração de conhecimento acerca desses algoritmos e na sua disponibilização, estando preparados para implementações futuras em ambientes de computação paralela. Os algoritmos implementados apresentam, nos exemplos, comportamento compatível com o descrito pela literatura.

Os exemplos iniciam-se com a apresentação de um caso linear simples, sistema massa-mola, onde as implementações demonstram estarem aferidas para os casos lineares. Em seguida, aborda-se uma simulação não linear de uma viga engastada, cuja modelagem utiliza um elemento de pórtico tridimensional. A matriz de massa aqui utilizada é diagonal, permitindo comparações com os resultados obtidos entre algoritmos implícitos e explícitos. Neste exemplo tem-se um caso de divergência de algoritmos implícitos, fato que pode ocorrer por se tratar de análises não lineares. As respostas geradas apresentam-se coerentes com o problema avaliado.

O terceiro exemplo apresenta um cabo tracionado, modelado por elementos de barra, com matriz de massa concentrada, sujeito a seu peso próprio. Neste exemplo o carregamento é aplicado gradualmente, tratando-se de uma análise quase estática. Constata-se que, para essas classes de análise, os algoritmos implícitos obtêm boa performance em relação aos explícitos. Três discretizações são analisadas, obtendo-se sucesso na definição da configuração estática do cabo. Observa-se que, apesar do aumento do número de equações com o refinamento da malha até 480 elementos, o método direto apresenta-se mais eficiente que os iterativos, neste exemplo. Esse resultado é justificado pelo fato desse problema pertencer ainda à classe dos problemas de pequeno porte, onde os métodos diretos são mais eficientes. Uma outra característica



observada nesse exemplo é a influência do pré-condicionamento na estabilidade do Método dos Gradientes Conjugados, pois ao se analisar a malha com 480 elementos o algoritmo sem preconditionador apresenta divergência. Isso mostra a necessidade da utilização de preconditionadores nas futuras implementações dos algoritmos elemento por elemento.

O último exemplo apresentado consta de uma análise de um cabo que pendula durante alguns segundos. Esta é uma análise dinâmica com alta não linearidade sendo apresentada para dois níveis de discretização.

Usando-se três elementos, os algoritmos apresentam o comportamento esperado, convergindo para uma mesma solução à medida que o incremento de tempo era reduzido. Usando este exemplo, comparam-se duas implementações do algoritmo NR-CG, uma que monta as matrizes globais do sistema e outra elemento por elemento. Consta-se que, apesar de serem o mesmo algoritmo, a implementação seqüencial do algoritmo elemento por elemento no programa MATLAB apresenta maior custo computacional. Nessa implementação necessita-se de mais estruturas do tipo *loops* do que quando se utiliza a matriz global. Como todas as implementações são realizadas no programa MATLAB, é importante observar que esse programa apresenta melhor performance para operações matriciais do que para estruturas de repetição. Ao se substituir multiplicações de matrizes globais por uma série de multiplicações de pequenas matrizes (dos elementos), a performance do programa é comprometida. Sugere-se testar a eficiência dessa implementação em um ambiente de clusters de computadores, realizando paralelamente essas operações elemento por elemento e criação de uma classe de algoritmos de integração para dinâmica de estruturas, contendo as implementações tradicionais e elemento por elemento, nas versões seqüencial e paralela.

No segundo nível de discretização, utilizam-se cinco elementos, formando-se um pêndulo quádruplo. Assim como no primeiro caso, a matriz de massa utilizada foi diagonal. São testados três valores para intervalos de tempo, porém, em todos os casos, as respostas geradas por cada algoritmo, a partir de determinados instantes de tempo, apresentam-se diferentes entre si. A dificuldade em encontrar uma única solução indica que esse problema não linear possui características de um sistema caótico, gerando-se

diferentes soluções a partir de determinado instante em virtude do diferente acúmulo de erros de cada algoritmo.

Por fim, sugere-se o estudo de problemas com outros tipos de não linearidades (física, contato, atrito) e restrições cinemáticas generalizadas, associados a algoritmos elemento por elemento.

## Referências bibliográficas

- BATHE, K.J. (1996) Finite Element Procedures. Prentice-Hall International Editions.
- BELYTSCHKO, T., (1984) An Improved Element-by-Element Semi-Implicit Scheme for Dynamic Problems. Nuclear Engineering and Design, 80, 127-139.
- BELYTSCHKO, T. e HUGHES, T., (1983) Computational Methods in Mechanics – Computational Methods for Transient Analysis, V-1, Elsevier Science Publishers B. V.
- BOLDRINI, J.L.; COSTA, S.I.R.; FIGUEIREDO, V.L. e WETZLER, H.G. (1980) Álgebra Linear, Terceira Edição, Harper & Row do Brasil.
- COOK, R.D.; MALKUS, D.S. e PLESHA, M.E. (1989) Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Third Edition, John Wiley & Sons.
- FLETCHER, R. e REEVES, C.M. (1964) Function minimization by conjugate gradients. Computer J., Vol 6, 149-154.
- HUGHES, T.J.R. (1987) The Finite Element Method – Linear static and dynamic finite element analysis. Prentice-Hall International Editions.
- HUGHES, T.J.R. e BELYTSCHKO, T. (1983) A Précis of Developments in Computational Methods for Transient Analysis. Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, 1033-1041.
- HUGHES, T.J.R., LEVIT, I. e WINGET, J. (1983) An Element-by-Element Solution Algorithm for Problems of Structural and Solid Mechanics. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 36, 241-254.
- JOUGLARD, C.E. e COUTINHO, A.L.G.A. (1998) A comparison of iterative multi-level finite element solvers, Computers & Structures, 69, 655-670.
- KRYSL, P. e BELYTSCHKO, T. (1998) Object-oriented parallelization of explicit structural dynamics with PVM, Computers & Structures, 66, 259-273.
- MATLAB (2000) User's Guide. The MathWorks Inc., Natick, MA, USA.
- NEWMARK, N. M. (1959) A Method of Computation for Structural Dynamics, ASCE Journal of Engineering Mechanics Division, Vol. 85, 67-94.
- ORTIZ, M., PINSKY, P.M. e TAYLOR, R.L. (1983) Unconditionally Stable Element-by-Element Algorithms for Dynamics Problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 36, 223-239.

PACOSTE, C. e ERIKSSON, A. (1997) Beam elements in instability problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 144, 163-197.

PAPADRAKAKIS, M. e DRACOPOULOS, M.C. (1991) Improving the Efficiency of Preconditioning for Iterative Methods. *Computers & Structures*, 41, 1263-1272.

PAPADRAKAKIS, M. e GHIONIS, P. (1986) Conjugate Gradient Algorithms in Nonlinear Structural Analysis Problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 59, 11-27.

SHEWCHUK, J.R. (1994) *An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain*. Edition 1¼, School of Computer Science Carnegie Mellon University Pittsburgh, PA 15213.

SILVEIRA, E.S.S. (2001) *Análise Dinâmica de Linhas de Ancoragem com Adaptação no Tempo e Subciclagem*. Tese de Doutorado, PUC/Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil / Estruturas.

SORENSEN, H.W. (1969) Comparison of some conjugate directions procedures for function minimization, *J. Franklin Inst.* 288 421-442.

SUBBARAJ, K. e DOKAINISH, M.A. (1989) A Survey of Direct Time-Integration Methods in Computational Structural Dynamics – II. Implicit Methods. *Computers & Structures*, Vol. 32 (6), 1387-1401.

WATHEN, A.J., (1989) An Analysis of Some Element-by-Element Techniques. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 74, 271-287.

WEAVER, W.Jr. e JOHNSTON, P.R. (1987) *Structural Dynamics by Finite Elements*, Prentice-Hall, Inc.

WINGET, J.M. e HUGHES, T.J.R. (1985) Solution Algorithms for Nonlinear Transient Heat Conduction Analysis Employing Element-by-Element Iterative Strategies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 52, 711-815.

ZIENKIEWICZ, O.C e MORGAN, K. (1983) *Finite Elements and Aproximations*, John Wiley & Sons.

## Apêndice A

### Exemplo numérico de multiplicação de matriz-vetor e vetor-matriz-vetor elemento por elemento

Para facilitar a compreensão das operações matriciais elemento por elemento exploradas neste trabalho, apresenta-se neste apêndice um exemplo de uma estrutura composta por barras de rigidez  $k_e$ , com o objetivo de realizar as suas operações matriz-vetor e vetor-matriz-vetor explicitamente.

#### A.1 Descrição do exemplo

A estrutura utilizada como exemplo está apresentada na Figura A. 1. Trata-se de três molas conectadas serialmente, sendo a primeira presa na extremidade esquerda.

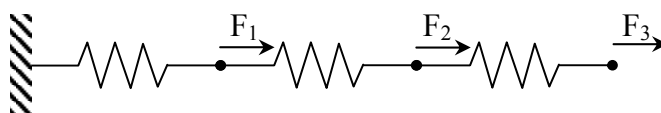


Figura A. 1 – Estrutura de molas conectadas em série.

Os elementos, suas rigidezes e deslocamentos apresentam-se na Figura A. 2.

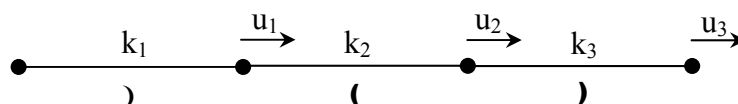


Figura A. 2 – Numeração dos elementos.

A matriz de rigidez de cada elemento é dada por:

$$\mathbf{k}_e = k_e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A. 1})$$

onde  $k_e$  é o valor numérico da cada rigidez e está apresentado na Tabela A. 1 que segue.

Tabela A. 1 – Valores das rigidezes dos elementos.

$k_1$	3
$k_2$	2
$k_3$	4

Em cada nó de cada elemento, aplica-se as seguintes cargas nodais:

$$\mathbf{F}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \end{Bmatrix}, \quad (\text{A. 2})$$

$$\mathbf{F}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -9 \end{Bmatrix} e \quad (\text{A. 3})$$

$$\mathbf{F}_3 = \begin{Bmatrix} 5 \\ 3 \end{Bmatrix}. \quad (\text{A. 4})$$

Para mapear os graus de liberdade locais nos graus de liberdade globais, utiliza-se as seguintes matrizes de incidência para cada elemento:

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A. 5})$$

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} e \quad (\text{A. 6})$$

$$\mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A. 7})$$

A matriz global do sistema é dada segundo uma montagem das matrizes dos elementos mapeadas para as coordenadas globais. Tem-se:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{nelem} \mathbf{L}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{L}_e, \text{ ou seja} \quad (\text{A. 8})$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}. \quad (\text{A. 9})$$

Da mesma forma, o vetor de forças externas é montado a partir da contribuição de cada elemento:

$$\mathbf{F} = \sum_{e=1}^{nelem} \mathbf{L}_e^T \mathbf{F}_e, \text{ ou seja} \quad (\text{A. 10})$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}. \quad (\text{A. 11})$$

O vetor deslocamento solução desse sistema é dado por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} \text{ ou} \quad (\text{A. 12})$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1,33 \\ 0,83 \\ 1,58 \end{bmatrix}. \quad (\text{A. 13})$$

### A.1.1 Multiplicação matriz-vetor elemento por elemento

As parcelas envolvidas na multiplicação elemento por elemento apresentada são o deslocamento e a matriz de rigidez. Portanto é preciso montar o vetor dos deslocamentos correspondentes a cada elemento. Para tal objetivo, definem-se matrizes booleanas que fazem o mapeamento inverso ao apresentado anteriormente, ou seja,

matrizes que mapeiam os graus de liberdade globais nos graus de liberdade locais. Tem-se:

$$\mathbf{Li}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A. 14})$$

$$\mathbf{Li}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e} \quad (\text{A. 15})$$

$$\mathbf{Li}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A. 16})$$

A fim de utilizar as matrizes e vetores dos elementos mapeadas tanto nas coordenadas locais como nas globais, montam-se os vetores de deslocamentos dos elementos nos dois sistemas coordenadas.

Utilizando-se das matrizes de conectividade  $\mathbf{Li}_e$ , obtêm-se os vetores de deslocamentos nodais dos elementos, nas coordenadas locais:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{Li}_1^T \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,33 \end{bmatrix}, \quad (\text{A. 17})$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{Li}_2^T \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1,33 \\ 0,83 \end{bmatrix} \text{ e} \quad (\text{A. 18})$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{Li}_3^T \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0,83 \\ 1,58 \end{bmatrix}. \quad (\text{A. 19})$$

Mapeando-se esses vetores para as coordenadas globais, tem-se:



$$\hat{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{L}_1^T \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1,33 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A. 20})$$

$$\hat{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{L}_2^T \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1,33 \\ 0,83 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e} \quad (\text{A. 21})$$

$$\hat{\mathbf{u}}_3 = \mathbf{L}_3^T \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,83 \\ 1,58 \end{bmatrix}. \quad (\text{A. 22})$$

A primeira alternativa apresentada é realizar o somatório utilizando as matrizes e vetores nas coordenadas globais:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \sum_{e=1}^3 \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{u}}_e = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \mathbf{F}. \quad (\text{A. 23})$$

A segunda alternativa é realizar a operação nas coordenadas locais, necessitando-se fazer o mapeamento em cada parcela do somatório:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \sum_{e=1}^3 \mathbf{L}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \mathbf{F}. \quad (\text{A. 24})$$

Observa-se que neste último caso não é necessário o armazenamento das matrizes, nem dos vetores de deslocamentos dos elementos, nas coordenadas globais.

### A.1.2 Multiplicação vetor-matriz-vetor elemento por elemento

Uma outra operação passível de ser realizada elemento por elemento é a multiplicação vetor-matriz-vetor, realizada durante as iterações do Método dos Gradientes Conjugados entre a direção de busca, vetor  $\mathbf{p}$ , e a hessiana, matriz  $\mathbf{H}$ .

Neste exemplo, apenas para ilustrar o procedimento da operação, são multiplicados o vetor  $\mathbf{u}$  e a matriz  $\mathbf{K}$ . O resultado esperado é então:

$$\mathbf{uKu} = 8,083. \quad (\text{A. 25})$$

Assim como na operação de multiplicação vetor-matriz, apresenta-se primeiro o caso em que o vetor e a matriz estão mapeados para as coordenadas globais:

$$\mathbf{uKu} = \sum_{e=1}^3 \hat{\mathbf{u}}_e \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{u}}_e = 5,333 + 0,5 + 2,25 = 8,083. \quad (\text{A. 26})$$

Neste caso, as parcelas do somatório são escalares, portanto, para utilizar o vetor e a matriz de rigidez dos elementos nas coordenadas locais, não é necessário fazer o mapeamento:

$$\mathbf{uKu} = \sum_{e=1}^3 \mathbf{u}_e \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e = 5,333 + 0,5 + 2,25 = 8,083. \quad (\text{A. 27})$$

## Apêndice B

### Formulação utilizada do elemento de barra

Neste apêndice apresenta-se sucintamente a formulação das matrizes de massa e rigidez e vetor de forças internas do elemento de barra utilizado nos exemplos que envolvem simulações com cabos. Maiores informações podem ser encontradas em literaturas tradicionais que tratam do Método dos Elementos Finitos, como por exemplo COOK e outros (1989).

#### B.1 Elemento de barra

O elemento finito utilizado é um elemento linear de barra (treliça) com quatro graus de liberdade de translação, conforme exposto na Figura A. 1. Este é um elemento simples que apresenta apenas esforço normal.

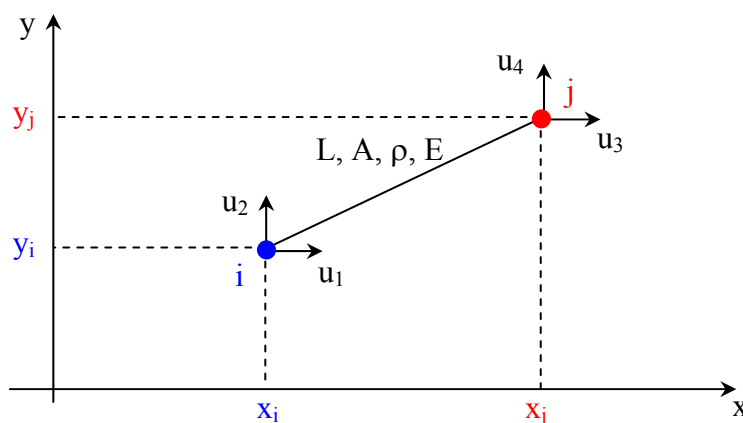


Figura B. 1 – Elemento de barra.

Para a geração da matriz de massa, opta-se por utilizar a matriz concentrada, na qual a massa do elemento é considerada concentrada em partículas nos nós. Sendo assim, a matriz de massa do elemento é diagonal e dada por:

$$\mathbf{M}_e = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B. 1})$$

onde  $m$  é a massa total do elemento.

Para obtenção da matriz de rigidez e vetor de forças internas utiliza-se o *software* Maple, gerando-se a seguinte seqüência de cálculos:

```
> restart;
> with(linalg): with(codegen):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected

Warning, the protected name MathML has been redefined and
unprotected

Comprimento do elemento na configuração final:
> Le := sqrt((xj+u3)-(xi+u1))^2+((yj+u4)-(yi+u2))^2):
Medida de deformação de engenharia:
> eps := (Le-Lo)/Lo:
Energia potencial elástica:
> U := int((sigmao*(eps)+E*(eps)^2)/2)*A,L=0..Lo);
U := ( sigmao (sqrt(xj^2 + 2 xj u3 - 2 xj xi - 2 xj u1 + u3^2 - 2 u3 xi - 2 u3 u1 + xi^2 + 2 xi u1
+ u1^2 + yj^2 + 2 yj u4 - 2 yj yi - 2 yj u2 + u4^2 - 2 u4 yi - 2 u4 u2 + yi^2 + 2 yi u2
+ u2^2) - Lo)/Lo + 1/2 E (sqrt(xj^2 + 2 xj u3 - 2 xj xi - 2 xj u1 + u3^2 - 2 u3 xi - 2 u3 u1
+ xi^2 + 2 xi u1 + u1^2 + yj^2 + 2 yj u4 - 2 yj yi - 2 yj u2 + u4^2 - 2 u4 yi - 2 u4 u2 + yi^2
+ 2 yi u2 + u2^2) - Lo)^2 / Lo^2 ) A Lo

Vetor das forças internas:
> Fint := grad(U, [u1, u2, u3, u4]):
Matriz de rigidez:
> Kt := hessian(U, [u1, u2, u3, u4]):

Geração do código computacional:
> codegen[C] (Fint, optimized):
t1 = xj*xj;
t8 = u3*u3;
t13 = xi*xi;
t16 = u1*u1;
t17 = yj*yj;
t24 = u4*u4;
```

```

t29 = yi*yi;
t32 = u2*u2;
t33 = t1+2.0*xj*u3-2.0*xj*xi-2.0*xj*u1+t8-2.0*u3*xi-2.0*u3*u1
+t13+2.0*xi*u1+t16+t17+2.0*yj*u4-2.0*yj*yi-2.0*yj*u2+t24-2.0*u4*yi-
2.0*u4*u2+t29+2.0*yi*u2+t32;
t34 = sqrt(t33);
t35 = 1/t34;
t36 = sigmao*t35;
t37 = -xj-u3+xi+u1;
t38 = 1/Lo;
t42 = E*(t34-Lo);
t43 = Lo*Lo;
t45 = 1/t43*t35;
t51 = -yj-u4+yi+u2;
Fint[0] = (2.0*t36*t37*t38+2.0*t42*t45*t37)*A*Lo/2.0;
Fint[1] = (2.0*t36*t51*t38+2.0*t42*t45*t51)*A*Lo/2.0;
Fint[2] = (-2.0*t36*t37*t38-2.0*t42*t45*t37)*A*Lo/2.0;
Fint[3] = (-2.0*t36*t51*t38-2.0*t42*t45*t51)*A*Lo/2.0;
> codegen[C] (Kt, optimized) ;
t1 = xj*xj;
t8 = u3*u3;
t13 = xi*xi;
t16 = u1*u1;
t17 = yj*yj;
t24 = u4*u4;
t29 = yi*yi;
t32 = u2*u2;
t33 = t1+2.0*xj*u3-2.0*xj*xi-2.0*xj*u1+t8-2.0*u3*xi-2.0*u3*
u1+t13+2.0*xi*u1+t16+t17+2.0*yj*u4-2.0*yj*yi-2.0*yj*u2+t24-
2.0*u4*yi-2.0*u4*u2+t29+2.0*yi*u2+t32;
t34 = sqrt(t33);
t36 = 1/t34/t33;
t37 = sigmao*t36;
t38 = -xj-u3+xi+u1;
t39 = 4.0*t38*t38;
t40 = 1/Lo;
t44 = 1/t34;
t46 = sigmao*t44*t40;
t48 = E/t33;
t49 = Lo*Lo;
t50 = 1/t49;
t55 = E*(t34-Lo);
t56 = t50*t36;
t61 = t55*t50*t44;
t64 = (-t37*t39*t40/4.0+t46+t48*t39*t50/4.0-t55*t56*t39/4.0+
t61)*A*Lo;
t65 = -yj-u4+yi+u2;
t69 = 2.0*t38*t50;
t72 = t55*t50;
t78 = (-4.0*t37*t65*t40*t38+2.0*t48*t69*t65-
4.0*t72*t36*t65*t38) *A*Lo/4.0;
t79 = -2.0*t38*t40;
t86 = -2.0*t36*t38;
t92 = (-t37*t79*t38/2.0-t46-t48*t69*t38/2.0-t72*t86*t38/2.0-
t61)*A*Lo;
t93 = -2.0*t65*t40;
t98 = -2.0*t36*t65;
t103 = (-2.0*t37*t93*t38-2.0*t48*t69*t65-2.0*t72*t98*t38)*A*
Lo/4.0;

```

```

t104 = 4.0*t65*t65;
t116 = (-t37*t104*t40/4.0+t46+t48*t104*t50/4.0-
t55*t56*t104/4.0+t61)*A*Lo;
t119 = 2.0*t65*t50;
t126 = (-2.0*t37*t79*t65-2.0*t48*t119*t38-
2.0*t72*t86*t65)*A*Lo/4.0;
t138 = (-t37*t93*t65/2.0-t46-t48*t119*t65/2.0-t72*t98*t65/2.0-
t61)*A*Lo;
t148 = (2.0*t37*t93*t38+4.0*t48*t38*t50*t65+2.0*t72*t98*t38)
*A*Lo/4.0;
Kt[0][0] = t64;
Kt[0][1] = t78;
Kt[0][2] = t92;
Kt[0][3] = t103;
Kt[1][0] = t78;
Kt[1][1] = t116;
Kt[1][2] = t126;
Kt[1][3] = t138;
Kt[2][0] = t92;
Kt[2][1] = t126;
Kt[2][2] = t64;
Kt[2][3] = t148;
Kt[3][0] = t103;
Kt[3][1] = t138;
Kt[3][2] = t148;
Kt[3][3] = t116;

```

Figura B. 2 – Geração do vetor de forças internas de matriz de rigidez do elemento de barra.

## Apêndice C

### Solução estática para a viga engastada sujeita a momento concentrado (exemplo 4.3)

Neste apêndice descreve-se a formulação para obtenção da solução estática do caso abordado no exemplo do item 4.3.

#### C.1 Deslocamento vertical da extremidade direita

Como apresentado no exemplo do item 4.3, trata-se de uma viga engastada na extremidade esquerda, sujeita a uma força momento aplicada na extremidade direita (Figura C. 1).



Figura C. 1 – Desenho esquemático do modelo.

Para uma viga sujeita a flexão devido a uma força momento aplicada, sua curvatura pode ser expressa como:

$$k = \frac{1}{R} = \frac{M}{EI}, \quad (\text{C. 1})$$

sendo  $k$  a curvatura;  $R$  o raio de curvatura;  $M$  o momento fletor;  $E$  o módulo de elasticidade e  $I$  o momento de inércia.

Observando-se a Figura C. 2, o deslocamento vertical ( $u_{\text{vert}}$ ) na extremidade direita é dado por:

$$u_{\text{vert}} = R - R \cos \theta. \quad (\text{C. 2})$$

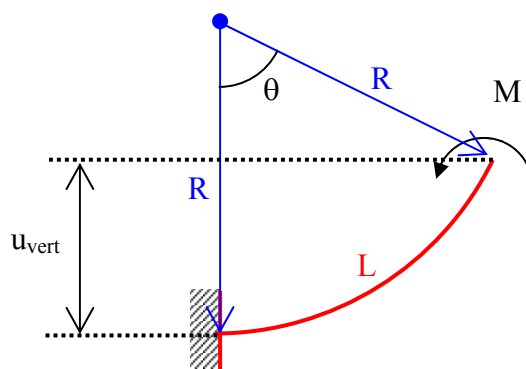


Figura C. 2 – Configuração genérica.

Sabe-se da geometria de figuras planas que a relação entre o raio, o ângulo e o comprimento de um dado arco de círculo é dada por:

$$L = R\theta. \quad (\text{C. 3})$$

Substituindo-se as equações ( C. 1 ) e ( C. 3 ) em ( C. 2 ) e simplificando-se, tem-se que o deslocamento vertical é expresso por:

$$u_{\text{vert}} = \frac{EI}{M} \left( 1 - \cos \left( \frac{LM}{EI} \right) \right). \quad (\text{C. 4})$$

Essa é a expressão utilizada no exemplo do item 4.3 para obtenção da resposta estática apresentada graficamente.

## C.2 Momento de referência

Para obtenção do momento de referência  $M_0$  utilizado no exemplo do item 4.3, considera-se para a viga a configuração apresentada na Figura C. 3.



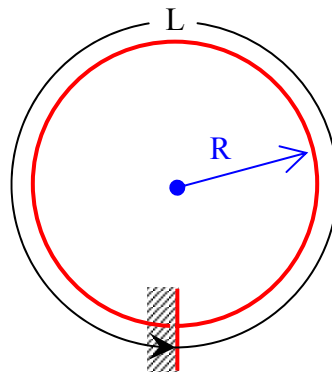


Figura C. 3 – Configuração de referência.

Nessa configuração o comprimento da viga é dado por:

$$L = 2\pi R . \quad ( C. 5 )$$

Assim, substituindo-se o comprimento expresso por ( C. 5 ) em ( C. 1 ), tem-se o momento de referência:

$$M_o = \frac{2\pi EI}{L} . \quad ( C. 6 )$$