

JOÃO GILBERTO TEIXEIRA SILVA

CONTRIBUIÇÃO AO PROJETO DE ELEMENTOS ESTRUTURAIS DE  
CONCRETO ARMADO COM DESCONTINUIDADES ATRAVÉS DO  
MODELO DE PAINÉIS ENRIJECIDOS.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

**MACEIÓ**  
**2004**

JOÃO GILBERTO TEIXEIRA SILVA

CONTRIBUIÇÃO AO PROJETO DE ELEMENTOS ESTRUTURAIS DE  
CONCRETO ARMADO COM DESCONTINUIDADES ATRAVÉS DO  
MODELO DE PAINÉIS ENRIJECIDOS.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia Civil da  
Universidade Federal de Alagoas como  
requisito parcial para a obtenção do título de  
Mestre em Engenharia Civil.

Área de concentração: *Estruturas*

Orientador: Prof. Doutor Severino Pereira  
Cavalcanti Marques.

MACEIÓ  
2004

SILVA, João Gilberto Teixeira  
Contribuição ao projeto de elementos estruturais de concreto armado com  
descontinuidades através do Modelo dos Painéis Enrijecidos. Maceió, 2004. 103 p

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Alagoas. Programa de Pós -  
Graduação em Engenharia Civil.

1. Painéis 2. Enrijecidos

Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia Civil



**Dedico este trabalho a meu pai João  
Rosendo Silva, ao meu filho João Vítor e a  
todos o meus familiares.**

**Agradeço especialmente à Simone por ter  
estado ao meu lado nesses dois últimos anos.**

## **Agradecimentos**

Agradeço a Deus pela vida e por ter conseguido terminar este trabalho.

Ao professor Dr Severino Pereira Cavalcante Marques pela orientação e dedicação.

A meu pai e minha esposa pelo apoio e incentivo.

À FAPEAL que financiou este trabalho.

Aos amigos do PPGEC que me ajudaram direto e indiretamente neste trabalho.

## Sumário

<b>Agradecimentos</b> .....	<b>vi</b>
<b>Lista de Figuras</b> .....	<b>x</b>
<b>Lista de Tabelas</b> .....	<b>xiii</b>
<b>Lista de Símbolos</b> .....	<b>xiv</b>
<b>Resumo</b> .....	<b>xxii</b>
<b>Abstract</b> .....	<b>xxiii</b>
<b>Capítulo 1</b> .....	<b>1</b>
<b>1. Introdução</b> .....	<b>1</b>
1.1. Considerações iniciais .....	1
1.2. Objetivos e relevância .....	4
1.3. Estrutura da dissertação .....	4
<b>Capítulo 2</b> .....	<b>6</b>
<b>2. Aspectos gerais do Método dos Painéis Enrijecidos</b> .....	<b>6</b>
2.1. Descrição geral do método .....	6
2.2. Base teórica do MPE .....	9
2.3. Contribuição do trabalho e sua situação no contexto geral .....	10
<b>Capítulo 3</b> .....	<b>11</b>
<b>3. Enrijecedores</b> .....	<b>11</b>
3.1 Introdução .....	11
3.2. Matriz de rigidez do enrijecedor .....	11
3.3 Relações constitutivas .....	19
3.3.1 Enrijecedor tracionado com concreto não fissurado .....	19
3.3.2. Enrijecedor tracionado com concreto fissurado e sem escoamento da armadura .....	20
3.3.3. Enrijecedor tracionado com concreto fissurado e armadura escoando .	21
3.3.4. Enrijecedor comprimido sem esmagamento do concreto e sem escoamento da armadura .....	22

3.3.5. Enrijecedor comprimido com esmagamento do concreto e sem escoamento da armadura .....	23
3.3.6. Enrijecedor comprimido sem esmagamento do concreto e com escoamento da armadura .....	24
3.4 Dimensionamento das armaduras dos enrijecedores .....	27
<b>Capítulo 4 .....</b>	<b>28</b>
<b>4. Painéis .....</b>	<b>28</b>
4.1. Introdução .....	28
4.2. Matriz de rigidez do painel .....	29
4.2.1. Relações de equilíbrio .....	29
4.2.2. Energia Potencial Complementar do painel .....	33
4.2.3. Determinação da rigidez do painel .....	35
4.3. Dimensionamento das armaduras dos painéis .....	37
4.4. Relação tensão - deformação não linear do painel .....	41
4.4.1. Relações constitutivas dos materiais.....	41
4.4.2. Capacidade de transmissão de tensão através das fissuras .....	42
4.4.3. Procedimentos para obtenção da tensão de cisalhamento do painel na análise não linear .....	47
<b>Capítulo 5 .....</b>	<b>49</b>
<b>5. Aspectos da Análise Estrutural .....</b>	<b>49</b>
5.1. Considerações iniciais .....	49
5.1.1. Transformações de coordenadas para os enrijecedores .....	49
5.1.2. Transformações de coordenadas para os painéis .....	52
5.2 Formulação da análise não linear .....	54
5.2.1. Estratégia de controle da análise .....	54
5.2.2. Sistematização dos procedimentos da análise .....	57
5.2.3. Atualização da matriz de rigidez dos elementos .....	60
<b>Capítulo 6 .....</b>	<b>63</b>
<b>6. Exemplos Numéricos.....</b>	<b>63</b>
6.1. Considerações iniciais .....	63
6.2. Caso de uma viga de seção T dotada de abertura retangular na alma .....	63
6.2.1. Dimensionamento e análise comparativa das armaduras .....	64

6.2.2. Diagramas carga-deslocamento para a viga de seção T .....	69
6.2.3. Comparação entre resultados das análises linear e não linear .....	71
6.3. Caso de uma viga parede com reforços verticais .....	74
6.3.1. Dimensionamento e análise comparativa das armaduras .....	75
6.3.2. Diagramas carga-deslocamento para a viga parede .....	83
6.3.3. Comparação entre resultados das análises linear e não linear .....	85
6.4. Caso de uma viga parede com uma grande abertura .....	89
6.4.1. Dimensionamento e análise comparativa das armaduras .....	90
6.4.2. Comparação entre resultados das análises linear e não linear .....	96
<b>Capítulo 7 .....</b>	<b>99</b>
<b>7. Considerações Finais e Sugestões para Trabalhos Futuros .....</b>	<b>99</b>
<b>Referências Bibliográficas .....</b>	<b>102</b>
<b>Bibliografia Complementar.....</b>	<b>103</b>

## Lista de Figuras

Figura 1.1 - Deformação de uma seção localizada em região “B”.....	1
Figura 1.2 - Deformação de uma seção localizada em região “D”.....	2
uras com regiões “B” e “D”.....	3
na estrutura pelo MPE - Hoogenboom (1998).....	7
Figura 2.2 - Esforços atuantes nos painéis e enrijecedores.....	7
Figura 2.3 - Curvas carga-deslocamento das análises linear (a) e não linear (b) .....	8
Figura 2.4 - Exemplos de estruturas que podem ser analisadas e projetadas pelo MPE.....	9
Figura 3.1- Forças e deslocamentos típicos de um enrijecedor .....	13
Figura 3.2 - Esforços normais atuantes em um enrijecedor .....	13
Figura 3.3 - Pontos de integração de Gauss para um enrijecedor .....	18
Figura 3.4 - Relação constitutiva do enrijecedor quando o esmagamento do concreto ocorre depois do escoamento das armaduras .....	26
Figura 3.5 - Relação constitutiva do enrijecedor quando o esmagamento do concreto ocorre antes do escoamento das armaduras .....	26
Figura 4.1- Geometria do painel e tensões atuantes .....	28
Figura 4.2 - Ações e deslocamentos nos pontos nodais do painel .....	28
Figura 4.3 - Relação constitutiva do painel .....	35
Figura 4.4 - Superposição de esforços em um elemento de membrana .....	37
Figura 4.5 - Tensões principais no elemento de membrana em cisalhamento puro ...	39
Figura 4.6 - Equivalência de tensões de tração nas armaduras .....	40
Figura 4.7 - Tensões atuantes em uma seção entre fissuras e ao longo de uma fissura -Vecchio & Collins (1986) .....	43
Figura 4.8 - Tensões devidas ao intertravamento dos agregados -Vecchio & Collins (1986) .....	43
Figura 4.9 - Esquema ilustrativo da área efetiva .....	47
Figura 4.10 - Curva tensão – deformação do painel .....	49
Figura 5.1 - Coordenadas locais de um enrijecedor .....	49

Figura 5.2 - Transformação de coordenadas locais (a) para coordenadas globais (b) de um enrijecedor .....	50
Figura 5.3 - Relação entre as coordenadas locais (a) e as coordenadas globais (b) do painel .....	50
Figura 6.1- Viga de seção T com abertura na alma (medidas em metro) .....	64
Figura 6.2 - Discretização utilizada para a viga de seção T .....	65
Figura 6.3 - Distâncias entre eixos dos enrijecedores (em metros) .....	65
Figura 6.4 - Distribuição e valores dos esforços normais e tensões cisalhantes .....	66
Figura 6.5 - Armaduras da viga de seção T obtida pelo MPE .....	67
Figura 6.6 - Armaduras da viga de seção T utilizadas por Tan <i>et al</i> (1996) .....	67
Figura 6.7 - Nova discretização para a viga de seção T .....	69
Figura 6.8 - Valores dos esforços normais e tensões cisalhantes da viga de seção T usando a discretização para a discretização mostrada na figura 6.7 .....	69
Figura 6.9 - Diagramas carga-deslocamento da viga de seção T.....	70
Figura 6.10 - Diagrama de esforços normais e tensões cisalhantes para a análise não linear obtido pela discretização mostrada na figura 6.2 .....	72
Figura 6.11 - Diagrama de esforços normais e tensões cisalhantes para a análise não linear obtido pela discretização mostrada na figura 6.7 .....	72
Figura 6.12 - Armaduras da viga de seção T obtidas através das análises não lineares .....	73
Figura 6.13 - Viga parede com mudança brusca de espessura nas extremidades e no meio do vão .....	75
Figura 6.14 - Discretização utilizada para a viga parede .....	76
Figura 6.15 - Distâncias entre eixos dos enrijecedores (em metros) .....	76
Figura 6.16 - Distribuição e valores dos esforços normais e tensões cisalhantes .....	77
Figura 6.17 - Armaduras da viga parede obtida pelo MPE .....	78
Figura 6.18 - Armaduras da viga parede utilizadas por Shayanfar <i>et al.</i> (1997) .....	78
Figura 6.19 - Segunda discretização para a viga parede .....	80
Figura 6.20 - Terceira discretização para a viga parede .....	80
Figura 6.21 - Valores dos esforços normais e tensões cisalhantes para a discretização mostrada na figura 6.19 .....	81

Figura 6.22 - Valores dos esforços normais e tensões cisalhantes para a discretização mostrada na figura 6.20 .....	81
Figura 6.23 - Armaduras da viga parede obtidas pelo MPE através da discretização da figura 6.19 .....	82
Figura 6.24 - Armaduras da viga parede obtidas pelo MPE através da discretização da figura 6.20 .....	82
Figura 6.25 - Diagramas carga-deslocamento da viga parede .....	84
Figura 6.26 - Diagrama de esforços normais e tensões cisalhantes para a análise não linear obtido pela discretização mostrada na figura 6.14 .....	85
Figura 6.27 - Diagrama de esforços normais e tensões cisalhantes para a análise não linear obtido pela discretização mostrada na figura 6.19 .....	86
Figura 6.28 - Diagrama de esforços normais e tensões cisalhantes para a análise não linear obtido pela discretização mostrada na figura 6.20 .....	86
Figura 6.29 - Armaduras da viga parede obtidas através das análises não lineares das discretizações das figuras 6.14 e 6.19 .....	87
Figura 6.30 - Armaduras da viga parede obtidas através da análise não linear com uso da discretização mostrada na figura 6.20 .....	87
Figura 6.31 - Viga parede com abertura próxima ao apoio .....	89
Figura 6.32 - Discretização utilizada para a viga parede com grande abertura .....	90
Figura 6.33 - Distâncias entre eixos dos enrijecedores (em metros) .....	91
Figura 6.34 - Distribuição e valores dos esforços normais e tensões cisalhantes .....	92
Figura 6.35 - Armaduras da viga parede obtida pelo MPE .....	93
Figura 6.36 - Armaduras da viga parede utilizadas por Schlaich <i>et al.</i> (1987) .....	93
Figura 6.37 - Nova discretização para a viga parede com abertura .....	94
Figura 6.38 - Valores dos esforços normais e tensões cisalhantes para a discretização mostrada na figura 6.37 .....	95
Figura 6.39 - Armaduras da viga parede obtidas pelo MPE através da discretização da figura 6.37 .....	95
Figura 6.40 - Diagrama de esforços normais e tensões cisalhantes para a análise não linear obtido pela discretização mostrada na figura 6.32 .....	96
Figura 6.41 - Diagrama de esforços normais e tensões cisalhantes para a análise não linear obtido pela discretização mostrada na figura 6.37 .....	97

Figura 6.42 - Armaduras da viga parede obtidas através da análise não linear para a discretização da figura 6.37 .....	97
--	----

## Lista de Tabelas

Tabela 3.1- Parâmetros para integração numérica de Gauss .....	18
Tabela 6.1 - Propriedades dos materiais da viga de seção T .....	64
Tabela 6.2 - Quadro das armaduras obtidas pelo MPE .....	68
Tabela 6.3 - Quadro das armaduras utilizadas por Tan <i>et al.</i> (1996) .....	68
Tabela 6.4 - Quadro de armaduras para os esforços das análises não lineares .....	73
Tabela 6.5 - Valores médios do esforço normal e tensões cisalhantes para a viga de seção T dotada de abertura retangular na alma .....	74
Tabela 6.6 - Propriedades dos materiais .....	74
Tabela 6.7 - Quadro de armaduras obtido pelo MPE .....	79
Tabela 6.8 - Quadro de armaduras utilizadas por Shayanfar <i>et al</i> (1997) .....	78
Tabela 6.9 - Quadro de armaduras obtido pela segunda discretização .....	83
Tabela 6.10 - Quadro de armaduras obtido pela terceira discretização .....	83
Tabela 6.11 - Quadro de armaduras para os esforços das análises não lineares para as discretizações mostradas nas figuras 6.14 e 6.19 .....	88
Tabela 6.12 - Quadro de armaduras para os esforços da análise não linear para a discretização mostrada na figuras 6.20 .....	88
Tabela 6.13 - Valores médios do esforço normal e tensões cisalhantes para a viga parede com reforços verticais .....	89
Tabela 6.14 – Propriedades dos materiais .....	90
Tabela 6.15 - Valores médios do esforço normal e tensões cisalhantes para a viga parede com uma grande abertura .....	98

## Lista de Símbolos

Maiúsculos romanos.

$A$	Área da seção transversal de um enrijecedor;
$A_c$	Área de concreto do enrijecedor;
$A_{cx}; A_{cy}$	Áreas de concreto nas direções x e y;
$A_s$	Área de aço do enrijecedor;
$A_{sx}; A_{sy}$	Áreas de aço nas direções x e y;
$A_p$	Área superficial do painel;
$[B^p]$	Matriz que relaciona os deslocamentos generalizados com os deslocamentos locais do painel;
$[B^e]$	Matriz que relaciona os deslocamentos generalizados com os deslocamentos locais do enrijecedor;
$C$	Fração do trabalho total;
$C_1; C_2; C_3; C_4$	Constantes definidas pela equação 4.10 a-d;
$D$	Relação entre a tensão e a deformação generalizada do painel;
$\{D\}_o$	Vetor de deslocamentos da estrutura segundo direções globais obtido na análise linear;
$\{D\}^{t-1}$	Vetor de deslocamentos nodais da estrutura nas direções globais referente ao passo incremental t-1;
$E$	Módulo de elasticidade do enrijecedores
$E_c$	Módulo de elasticidade do concreto;
$E_s$	Módulo de elasticidade do aço;
$\ \{F\}_i\ $	Norma euclidiana do vetor das forças desequilibradas na iteração i;
$\{F\}_{i-1}$	Vetor das forças desequilibradas no final da iteração i-1;
$F_{ij}$	Coefficientes de flexibilidade do enrijecedor;
$F_{RS}$	Resultante de forças na direção perpendicular às fissuras;

$F_s$	Matriz de flexibilidade do enrijecedor
$F_x; F_y$	Resultante de forças nas direções x e y;
$G^*$	Módulo de rigidez transversal secante na origem
H	Variável que determina o sinal do fator de carga na primeira iteração;
$K_1$	Constante de valor 0,4 para barras nervuradas e 0,8 para barras lisas;
$K_2$	Constante definida pela equação (4.62);
$[K_e]^{t-1}$	Matriz de rigidez do elemento na última iteração do passo de carga t-1;
$[K_{gs}]$	Matriz de rigidez do enrijecedor relativa às coordenadas globais;
$[K_{gp}]$	Matriz de rigidez do painel relativa às coordenadas globais;
$[K_{i-1}]$	Matriz de rigidez da estrutura , na iteração i-1;
$[K_t]_i$	Matriz de rigidez da estrutura atualizada na iteração i
$[K_t]_o$	Matriz de rigidez tangente inicial da estrutura;
$[K_p]$	Matriz de rigidez do painel relativa às coordenadas locais;
$[K_s]$	Matriz de rigidez do enrijecedor;
N	Esforço normal no enrijecedor;
$N_1; N_2$	Valor do esforço normal nas extremidades do enrijecedor;
$N_c$	Parcela do esforço normal atuante no concreto quando $\sigma_c = f'_c$ ;
$N_{cr}$	Valor do esforço normal de tração que provoca a primeira fissura no enrijecedor;
$N_{d,max}^c$	Valor de cálculo do esforço normal de compressão;
$N_{d,max}^t$	Valor de cálculo do esforço normal de tração
$N_r$	Parâmetro dado pela equação (3.47);
$N_s$	Parcela do esforço normal atuante nas armaduras;

$N_t$	Esforço normal que profoca o esmagamento do concreto
$N(x)$	Função do esforço normal de um enrijecedor;
$N_{yr}$	Esforço normal nas armaduras quando o aço escoar;
$P$	Trabalho realizado pelas forças externas atuantes sobre o enrijecedor;
$\{\bar{R}\}$	Vetor das cargas de referência;
$\{R\}$	Vetor de cargas de projeto;
$\{R\}^{t-1}$	Vetor de cargas nodais da estrutura segundo direções globais referente ao passo incremental t-1;
$S_1; S_2; S_3; S_4$	Constantes definidas pelas equações 4.10 e-h;
$\{S_e\}_i$	Vetor de esforços internos no elemento na iteração i
$\{S_e\}^{t-1}$	Vetor de esforços internos do elemento na última iteração do passo incremental t-1.
$\{S_t\}_i$	Vetor das ações nodais nos elementos rotacionados na direção das coordenadas globais para a iteração i
$\{S_t\}^{t-1}$	Vetor das ações nodais nos elementos rotacionados na direção das coordenadas globais para o passo de carga t-1
$U_c$	Energia de deformação complementar total no volume.

Minúsculos romanos.

$a$	Dimensão máxima do agregado graúdo;
$b_w$	Largura do enrijecedor;
$c$	Cobrimento das barras;
$d_b$	Diâmetro das barras longitudinais;
$e$	Deslocamento generalizado do painel;
$\{e\}$	Vetor dos deslocamentos generalizados do enrijecedor;
$e_1; e_2$	Deslocamentos generalizados do enrijecedor;
$\{f\}$	Vetor das ações atuantes nas faces do painel;

$f_1; f_2; f_3$	Ações nas coordenadas locais 1, 2 e 3 respectivamente, do enrijecedor;
$f_1; f_2; f_3; f_4$	Ações atuantes nas faces do painel;
$f'_c$	Resistência do concreto à compressão
$f'_{cd}$	Resistência à compressão cilíndrica de cálculo do concreto;
$f_{ck}$	Resistência característica do concreto;
$f_{ct}$	Resistência à tração do concreto;
$\{f^e\}$	Vetor de esforços locais no enrijecedor;
$\{f^{eg}\}$	Vetor de esforços globais no enrijecedor;
$f_y$	Resistência ao escoamento do aço
$f_{yd}$	Tensão de escoamento de cálculo do aço;
$f_{yx}; f_{yy}$	Tensão de escoamento no aço nas direções x e y;
$h$	Altura do elemento estrutural;
$h_e$	Altura do enrijecedor;
$k_1; k_2; k_3; k_4$	Constantes definidas pelas equações 4.15 a-d;
$k_f$	Constante definida pela equação (4.14);
$l$	Comprimento do enrijecedor;
$l_1; l_2; l_3; l_4$	Medidas dos lados do painel;
$n$	Número de graus de liberdade da estrutura;
$q$	Carregamento distribuído ao longo do enrijecedor;
$r_1; r_2; r_3; r_4$	Constantes definidas pelas equações 4.10 i-m;
$s$	Espaçamento máximo entre barras longitudinais;
$s_{m0}$	Distância média entre fissuras;
$s_{mx}$	Distância média entre fissuras na direção x;
$s_{my}$	Distância média entre fissuras na direção y;
$t$	Espessura do painel;
$\{u^e\}$	Vetor dos deslocamentos locais do enrijecedor;
$u(x)$	Deslocamento axial em um ponto genérico de coordenada x;

$u_1; u_2; u_3; u_4$	Graus de liberdade do painel;
$u_c$	Energia de deformação específica complementar;
$\{u^e\}$	Vetor dos deslocamentos locais do enrijecedor;
$u_1^e; u_2^e; u_3^e$	Deslocamentos locais do enrijecedor;
$\{u^{eg}\}$	Vetor dos deslocamentos globais do enrijecedor;
$u_1^{eg}; u_2^{eg}; u_3^{eg}; u_4^{eg}; u_5^{eg}$	Deslocamentos globais do enrijecedor;
$\{u^p\}$	Vetor de deslocamentos locais do painel;
$u_1^p; u_2^p; u_3^p; u_4^p$	Deslocamentos locais do painel;
$\{u_p^{pg}\}$	Vetor dos deslocamentos globais do painel;
$u_1^{pg}; u_2^{pg}; u_3^{pg}; u_4^{pg}$	Deslocamentos globais do painel
$v_{ci}$	Tensão de cisalhamento devido ao intertravamento formado pela rugosidade da superfície fissurada;
$v_{ciMax}$	Máximo valor de $v_{ci}$ ;
$x_1; x_2; x_3; x_4$	Valores da coordenada x dos vértices do painel;
$x_i$	Valor da coordenada x no i-ésimo ponto de integração numérica;
$y_1; y_2; y_3; y_4$	Valores da coordenada y dos vértices do painel;
$w$ :	Trabalho total;
$w_f$	Abertura média das fissuras;
$w_i$	Valor do i-ésimo peso de integração numérica.

#### Maiúsculos gregos.

$\{\overline{\Delta D}\}_i$	Segunda parcela do vetor de incremento de deslocamento na iteração i;
$\{\Delta D\}_i$	Vetor dos incrementos de deslocamentos na iteração i;
$\{\underline{\Delta D}\}_i$	Primeira parcela do vetor de incremento de deslocamento na iteração i;

$\{\Delta D_e\}_i$	Vetor de incremento de deslocamentos locais do elemento para a iteração $i$
$\{\Delta D\}_o$	Vetor dos incrementos de deslocamento no passo de carga anterior ao passo de carga corrente;
$\{\Delta R\}_i$	Vetor dos incrementos de carga;
$\{\Delta R\}_o$	Vetor dos incrementos de carga no passo incremental anterior;
$\{\Delta S_e\}_i$	Vetor de incremento de esforços nos elementos na iteração $i$ ;
$\{\Delta S_t\}_i$	Vetor de incremento das ações nodais nos elementos relativos às coordenadas globais
$\Delta w$	Incremento de trabalho;
$\Pi$	Energia de Deformação Potencial Complementar Total;
$\Pi_c$	Energia de Deformação Potencial Complementar Total;
$\Pi'_c$	Energia potencial complementar no painel por unidade de volume;
$\sum F_x$	Somatório de forças na direção $x$ ;
$\sum F_y$	Somatório de forças na direção $y$ ;
$\sum M$	Somatório de momentos em relação á origem do sistema de coordenadas.

#### Minúsculos gregos

$\alpha$	Ângulo que define as direções das tensões principais do painel;
$\beta$	Tensão generalizada no painel;
$[\beta_s]$	Matriz de rotação do enrijecedor;
$[\beta_s]^T$	Transposta da matriz de rotação do enrijecedor;
$[\beta_p]$	Matriz de rotação do painel;
$[\beta_p]^T$	Transposta da matriz de rotação do painel;

$\gamma$	Distorção no centro do painel;
$\gamma^i; \gamma^{i-1}$	Distorção no centro do painel para o nível de carga $i$ e $i-1$ ;
$\gamma_{xy}$	Distorção do painel no plano $xy$ ;
$\varepsilon$	Deformação axial;
$\varepsilon_1$	Maior deformação de tração na área efetiva;
$\varepsilon_1; \varepsilon_2$	Deformações principais;
$\varepsilon'_2$	Menor deformação de tração na área efetiva
$\varepsilon_c$	Deformação axial no concreto quando $\sigma_c = f'_c$ ;
$\varepsilon_{cr}$	Valor da deformação associado à resistência à tração do concreto;
$\varepsilon_{xx}$	Deformação no plano perpendicular ao eixo $x$ na direção do eixo $x$ ;
$\varepsilon_{yy}$	Deformação no plano perpendicular ao eixo $y$ na direção do eixo $y$ ;
$\eta$	Relação entre o módulo de elasticidade do aço e do concreto;
$\theta_1; \theta_2; \theta_3; \theta_4$	Ângulos entre os lados do painel e o eixo $x$ do sistema de referência cartesiano adotado para o painel;
$\lambda_i$	Fator de carga correspondente à iteração $i$ ;
$ \mu_i $	Valor absoluto da relação entre a intensidade de qualquer carga não nula atualizada e seu correspondente valor em $\{\bar{R}\}$ na iteração $i$ ;
$\nu$	Coefficiente de Poisson para o concreto não fissurado;
$\xi$	Parâmetro que relaciona as rigidezes do aço e do concreto;
$\rho_{ef}$	Taxa efetiva de aço;
$\rho_{sx}; \rho_{sy}$	Taxas de armadura nas direções $x$ e $y$ ;
$\sigma$	Tensão normal no enrijecedor;
$\sigma_{1c}; \sigma_{2c}$	Tensões principais no concreto;
$\sigma_c$	Tensão de compressão no concreto;
$\sigma_{cr}$	O mesmo que $f_{ct}$ ;
$\sigma_s$	Tensão no aço;
$\sigma_{sx}; \sigma_{sy}$	Tensões atuantes nas armaduras nas direções $x$ e $y$ ;

$\sigma_{sx,cr}; \sigma_{sy,cr}$	Tensão na armadura na região das fissuras na direção x e y respectivamente;
$\sigma_x; \sigma_y$	Tensão atuante no painel nas direções x e y;
$\sigma_{xc}; \sigma_{yc}$	Tensões atuantes no concreto nas direções x e y;
$\tau$	Tensão cisalhante média atuante no painel;
$\tau_1; \tau_2; \tau_3; \tau_4$	Tensões de cisalhamento atuantes nas faces do painel;
$\tau_c$	Tensão de cisalhamento no concreto;
$\tau_{xy}^i; \tau_{xy}^{i-1}$	Tensão de cisalhamento no painel para o nível de carga i e i-1;
$\phi$	Diâmetro das barras.

## Resumo

SILVA, JOÃO G. T. (2004). Contribuição ao projeto de elementos estruturais de concreto armado com descontinuidades através do Modelo de Painéis Enrijecidos. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2004.

A não aplicabilidade da hipótese de Navier-Bernoulli implica na não validade do uso da tradicional teoria de vigas no estudo de vigas paredes, consolos curtos, regiões com grandes aberturas ou mudança de inércia. Para estruturas de concreto armado são freqüentemente utilizados procedimentos baseados na teoria das chapas, nos métodos dos elementos finitos e das bielas e tirantes.

Neste trabalho, emprega-se para projetos desses tipos de estruturas em concreto armado, um procedimento alternativo que reúne as vantagens do método de bielas e tirantes e do método dos elementos finitos. Através deste procedimento, denominado aqui como Método dos Painéis Enrijecidos (também conhecido na literatura inglesa como *Stringer and painel model*), a estrutura é modelada como um conjunto de painéis com contornos enrijecidos por barras. Admite-se que as barras transmitem apenas forças normais e os painéis apenas forças de cisalhamento.

As análises podem ser feitas considerando-se distribuição de tensões elásticas, denominada de análise linear, ou levando em conta a redistribuição de tensões devido à fissuração do concreto. Os painéis utilizados na discretização das vigas são quadriláteros quaisquer.

Alguns exemplos são analisados e os resultados encontrados para as armaduras são comparados com os obtidos por outros métodos. Também é analisada a influência do tamanho dos elementos no volume de aço obtido, além de se fazer a comparação dos diagramas carga-deslocamento experimental e teórico. Também é comparado o volume de aço obtido com as análises linear e não linear.

**Palavras-chave:** Concreto armado, regiões D, painéis, enrijecidos, análise não linear

## Abstract

SILVA, JOÃO G. T. (2004). Contribution to the design of reinforced concrete structural elements with discontinuities using the Stringers and Panel model. Master Science Dissertation - Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2004.

The traditional beam theory cannot be applied to study walls, corbels and regions with holes or change of inertia, because the Navier-Bernoulli's hypothesis cannot be used to these cases. Procedures based in the plates theories, the finite element method or truss-and-tie method are often used to study these type of reinforced concrete structures.

In this work, an alternative procedure that joins the advantages of truss-and-tie method and finite element method is used to design the above mentioned types of reinforced concrete structures. Using this procedure, called Stringer and panel model, the structures are modeled as a group of panels with their edges stiffened by straight bars (stringers).

It's supposed that the stringers transmit only axial forces, while the panels, transmit only shear forces. The analyses can be made considering the distribution of elastic stresses, called linear analysis, or considering the redistribution of stresses due to the concrete crack.

Examples are analyzed, and the results for the reinforcement are compared with the other results obtained by the use of other methods. Element size effects on the reinforcement volume are analyzed and the theoretical load-displacement curves are compared with the corresponding experimental load-displacement curves. Finally, comparison between the reinforcement volumes obtained by the linear analysis and by the non linear analysis is made.

**Keywords:** Reinforced concrete, regions D, panels, stringers, non linear analysis

## Capítulo 1

### Introdução

#### 1.1. Considerações iniciais

Os primeiros modelos formulados para projetos de estruturas de concreto armado surgiram no final do século XIX. Como exemplo, pode ser citado aquele conhecido por Analogia de Treliça proposto por Wilhelm Ritter (1899) e melhorado por Emil Mörsh (1908). Tal modelo ainda hoje é utilizado como base para o dimensionamento de vigas submetidas a força cortante.

Segundo Hoogenboom (1918), na década de trinta (do século passado), vários pesquisadores como C. S. Whitney e O. Baumann desenvolveram a base do atual modelo empregado para o dimensionamento à flexão das vigas usuais de concreto armado.

As partes que constituem as estruturas são frequentemente classificadas como regiões “B” ou regiões “D”. As chamadas regiões “B” são aquelas cujas seções transversais satisfazem a hipótese de Navier-Bernoulli, ou seja, suas seções transversais apresentam uma distribuição linear de deformação, conforme mostrado na figura 1.1.

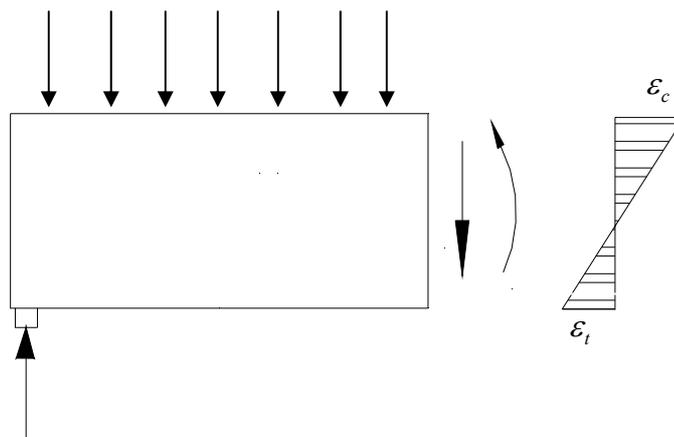


Figura 1.1 - Diagrama de deformação de uma seção localizada em região “B”.

Ao contrário, as chamadas regiões “D” são aquelas cujas seções transversais não obedecem a hipótese acima referida, como ilustrado na figura 1.2. Estas regiões são geradas por descontinuidades físicas, como forças concentradas e reações de apoio, e geométricas, tais como aquelas caracterizadas pela presença de furos, mudança brusca de dimensões e de direção. Como exemplos de elementos que apresentam regiões “D”, podem ser citados: vigas parede (com ou sem furo), vigas furadas, consolos curtos, nós de pórticos, dentes Gerber, encontro de pilar e fundação.

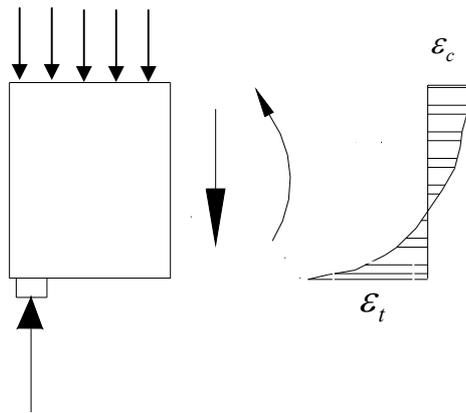


Figura 1.2 - Diagrama de deformação de uma seção localizada em região “D”.

Não existe uma maneira exata de se delimitar as regiões “D” em uma estrutura. Para isso, utiliza-se na prática uma regra baseada no Princípio de Saint-Venant (Timoshenko & Gere, 1970), a qual emprega a medida da altura  $h$  da seção transversal como parâmetro de delimitação, como mostrado na figura 1.3 para trechos de estruturas dotadas de região “B” (em branco) e regiões “D” (hachuradas).

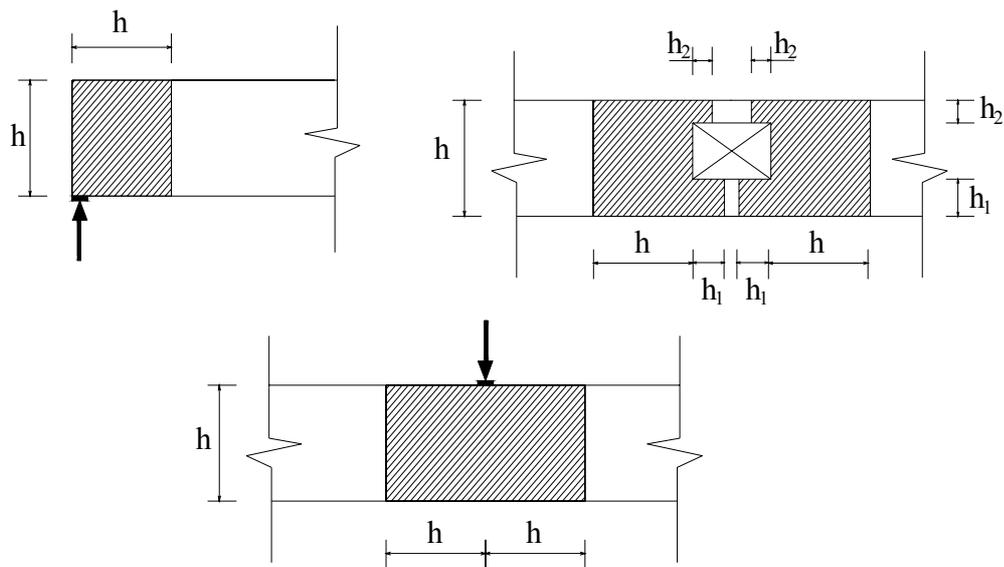


Figura 1.3 - Regra de delimitação de regiões “D”

Por volta da década de cinquenta do século passado, com o desenvolvimento da computação, surgiu o Método dos Elementos Finitos. Posteriormente, utilizando-se os conceitos desse método, desenvolveram-se aplicações para estruturas de concreto armado, tornando-se mais uma importante ferramenta no projeto de estruturas dotadas de regiões “D”.

Em 1979 o alemão Jorg Schlaich começou a utilizar o Método de Bielas e Tirantes (*strut-and-tie model*) para explicar aos seus alunos o comportamento de estruturas de concreto dotadas de região “D”. Juntamente com seu colega Kurt Schafer, organizou sistematicamente o método, generalizando suas aplicações (Schlaich et al.1987). O Método de Bielas e Tirantes é considerado como um aperfeiçoamento dos procedimentos empíricos empregados em projeto de estruturas de concreto armado e consiste em uma extensão do modelo da Analogia de Treliça.

Baseados nos conceitos desenvolvidos pelo pesquisador dinamarquês Morgens Peter Nielsen (Nielsen, 1999), os holandeses Hoogenboom e Blaauwendrad (Blaauwendaad & Hoogenboom, 1996) lançaram o aqui chamado Método dos Painéis Enrijecidos, denominado na literatura inglesa como *Stringer-Panel Model*. Tal método apresenta-se como uma ferramenta numérica alternativa para o projeto e análise de estruturas de concreto armado dotadas de regiões “D”.

## **1.2. Objetivos e relevância**

O objetivo deste trabalho é a apresentação de um estudo voltado para o projeto de elementos estruturais de concreto armado com descontinuidades, tais como vigas paredes e vigas com aberturas, consolos curtos, dentes Gerbers, etc, utilizando o Método dos Painéis Enrijecidos (MPE).

Elementos com descontinuidades (regiões “D”) são muito frequentes nos projetos estruturais e não podem ser analisados através de teorias baseadas na hipótese de Navier-Bernoulli. Para os projetos e análises de tais elementos estruturais são bastante utilizados o Método de Bielas e Tirantes (MBT) e o Método dos Elementos Finitos (MEF).

O MPE apresenta-se como uma ferramenta alternativa para análise e projeto desses elementos com descontinuidades. Tal método combina uma abordagem computacional similar àquela empregada no Método dos Elementos Finitos, com as vantagens de apresentar facilidade na discretização da estrutura e simplicidade para o detalhamento das armaduras.

O Método de Bielas e Tirantes é um procedimento muito usado no projeto de estruturas de concreto armado, apresentando como uma desvantagem a necessidade de se conhecer, para efeito de discretização, as trajetórias das tensões principais, o que muitas vezes exige o emprego de métodos numéricos, tal como o Método dos Elementos Finitos. Dois inconvenientes normalmente encontrados com o uso da formulação em deslocamento do MEF em projetos de elementos de concreto armado consistem na maior complexidade para a discretização da estrutura e para o detalhamento de suas armaduras.

## **1.3. Estrutura da dissertação**

A dissertação está estruturada em sete capítulos incluindo este, onde se apresenta uma introdução. No capítulo 2 é feita uma explanação sobre o Método dos Painéis Enrijecidos, contendo uma descrição geral do mesmo, seu embasamento teórico, os tipos de análises usados no presente estudo e exemplos de estruturas que podem ser analisadas.

No capítulo 3 são apresentados os procedimentos para montagem da matriz de rigidez de um enrijecedor, assim como suas relações constitutivas e os critérios usados para o dimensionamento de armaduras quando necessárias.

O capítulo 4 trata da formulação da matriz de rigidez de um painel, como também sua relação constitutiva e dimensionamento de armaduras.

O capítulo 5 apresenta os procedimentos numéricos correspondentes às análises linear e fisicamente não linear empregados no estudo.

No capítulo 6 são mostrados resultados das análises de exemplos de estruturas, comparando os valores encontrados pelo MPE com outros obtidos através de diferentes procedimentos.

Finalmente, no capítulo 7, são apresentadas as considerações finais.

## Capítulo 2

### Aspectos Gerais do Método dos Painéis Enrijecidos

#### 2.1. Descrição geral do método

Observando-se a técnica de armar vigas paredes, percebe-se que as armaduras consistem, na maioria dos casos, de malhas ortogonais dispostas nas proximidades das superfícies laterais da viga e de uma concentração de barras nas regiões próximas aos limites inferior e superior da estrutura e ao redor de furos, quando estes existem.

Considerando esta típica disposição de armaduras e tendo como base teórica o Teorema do Limite Inferior, da Teoria da Plasticidade, desenvolveu-se o aqui denominado Método dos Painéis Enrijecidos (Stringer Panel Model), que consiste em discretizar a estrutura em um conjunto de elementos lineares chamados enrijecedores que, quando tracionados, contém as armaduras principais, contornando painéis com armaduras dispostas em forma de malha.

Para discretização de uma estrutura pelo Método de Painéis Enrijecidos (MPE) é necessária a disposição de enrijecedores ao longo das bordas da mesma, ao redor de furos eventualmente existentes, ao longo da linha de ação de reações de apoio e de cargas concentradas. Os painéis são as regiões da estrutura limitadas pelos enrijecedores, conforme mostrado na figura 2.1.

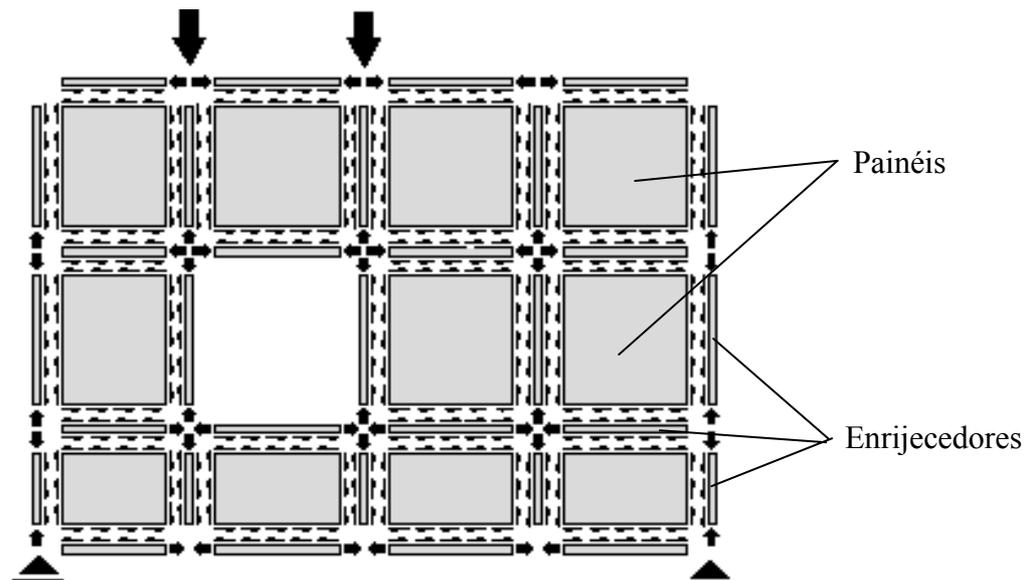


Figura 2.1 - Discretização de uma estrutura pelo MPE - Hoogenboom (1998).

Os enrijecedores são considerados como submetidos unicamente a esforços normais de compressão ou de tração, enquanto que os painéis são admitidos como solicitados apenas a esforços de cisalhamento ao longo de suas bordas, conforme mostrado na figura 2.2.

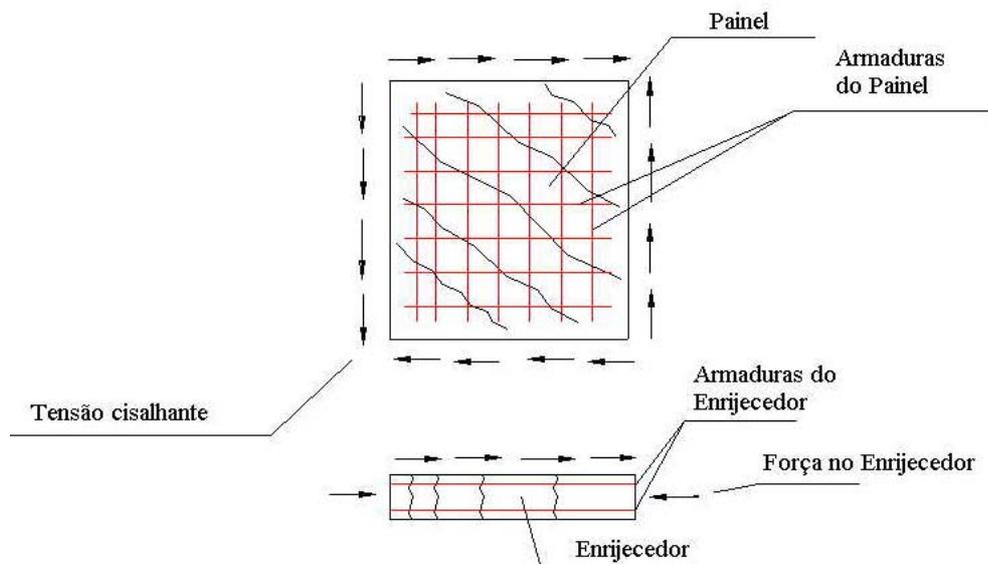


Figura 2.2 - Esforços atuantes nos painéis e enrijecedores.

No presente estudo, dois tipos de análises são realizados: análise linear e análise fisicamente não linear. No primeiro não se leva em conta a perda de rigidez dos elementos que compõem o modelo estrutural, ou seja, admite-se que os materiais que constituem os enrijecedores e os painéis têm comportamento elástico linear. Tal análise é normalmente utilizada como etapa preliminar para o dimensionamento das armaduras. Depois de dimensionadas as armaduras, pode-se efetuar uma análise fisicamente não linear na qual consideram-se as mudanças de rigidez dos elementos devidas à fissuração do concreto e ao escoamento das armaduras. Através desta análise obtêm-se configurações de equilíbrio mais realísticas para o modelo estrutural idealizado, sendo inclusive utilizada para a simulação do comportamento carga-deslocamento da estrutura. A figura 2.3 mostra o diagrama carga-deslocamento de uma estrutura utilizando os dois tipos de análises acima referidos.

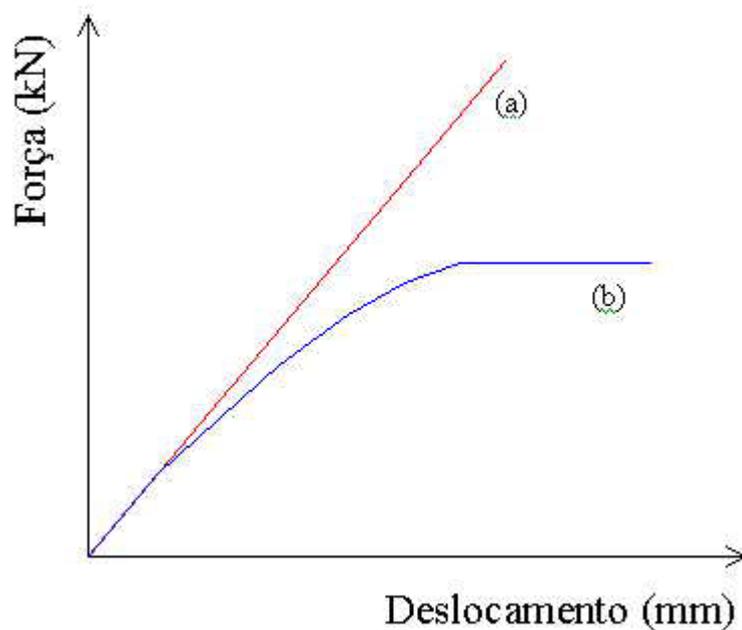


Figura 2.3 - Curvas carga-deslocamento das análises linear (a) e não linear (b)

Com o MPE é possível analisar e projetar estruturas dotadas de região “D” bastante comuns em projetos estruturais tais como aquelas mostradas na figura 2.4.

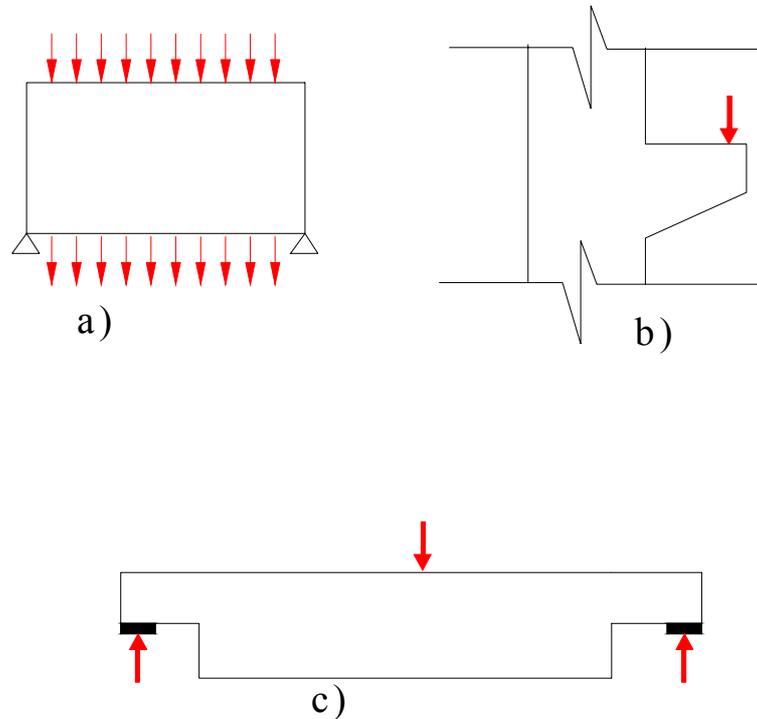


Figura 2.4 - Exemplos de estruturas que podem ser analisadas e projetadas pelo MPE:  
a) Viga parede; b) Consolo curto; c) Viga com mudança brusca de rigidez inercial.

## 2.2. Base Teórica do MPE

Conforme já foi mencionado, o MPE tem como fundamentação teórica o Teorema do Limite Inferior (*Lower Bound Theorem*), que pode ser assim enunciado: “Se para um dado carregamento atuante sobre uma estrutura for possível encontrar uma distribuição de tensões estaticamente admissível e segura, então a carga atuante não provoca o colapso da estrutura”. Maiores detalhes e dedução podem ser encontradas em Nielsen (1999).

Com isso, idealizando-se a estrutura como sendo constituída por uma associação de enrijecedores e painéis, se for garantido que existe uma distribuição de esforços

internos, atuantes nos mesmos, em equilíbrio entre si e com as forças externas e que, além do mais, tal distribuição seja segura, no sentido de que os elementos estão projetados para suportar os esforços internos sem ruptura, conclui-se pelo citado teorema que aquelas forças externas não provocam o colapso da estrutura. Vale ressaltar que o Teorema do Limite Inferior tem seu campo de validade regido pelas hipóteses e leis da Teoria da Plasticidade e, assim sendo, somente pode ser utilizado para estruturas de concreto armado se estas atenderem a condições de ductilidade que permitam atingir a configuração de equilíbrio idealizada sem antes entrar em colapso. Esta limitação é comum a todos os procedimentos de análise de estruturas de concreto baseados na Teoria da Plasticidade, tal como o Método de Bielas e Tirantes.

### **2.3. Contribuição do trabalho e sua situação no contexto geral.**

A referência Hoogenboom (1998) apresenta uma formulação do Método dos Painéis Enrijecidos do tipo não linear incremental, considerando-se os painéis como submetidos a tensões normais e de cisalhamento. Tal referência consiste na principal fonte bibliográfica para o desenvolvimento do presente trabalho.

Baseando-se em Hoogenboom (1998), o presente estudo apresenta, como contribuição, uma formulação do MPE destinada à análise linear e não linear, incremental iterativa, implementada usando o ambiente MATLAB. Outra contribuição do estudo aqui apresentado consiste na apresentação de comparações de resultados obtidos pelo MPE com outros correspondentes a diferentes procedimentos.

## Capítulo 3

### Enrijecedores

#### 3.1. Introdução

Os enrijecedores são elementos lineares que absorvem apenas esforço normal, sendo considerados como desprovidos de qualquer rigidez à flexão.

Uma vez que os enrijecedores transmitem somente esforço normal, tais elementos podem estar totalmente tracionados ou comprimidos, ou apresentar trechos submetidos à tração e à compressão.

Para o dimensionamento dos enrijecedores, supõe-se que os esforços de tração são absorvidos pelas armaduras de aço e, nas regiões comprimidas, que os esforços normais são absorvidos pelo concreto ou, no caso de compressão excessiva, também por armaduras de aço.

#### 3.2. Matriz de rigidez do enrijecedor

Para se determinar a matriz de rigidez de um enrijecedor emprega-se o Princípio da Mínima Energia de Deformação Potencial Complementar (ver por exemplo Shames, 1989). Como definido na Mecânica dos Sólidos, em um determinado ponto de um corpo submetido a um estado uniaxial de tensão, a energia de deformação específica complementar é dada por:

$$u_c = \int_0^{\sigma} \varepsilon d\sigma \quad (3.1)$$

onde  $\varepsilon$  é a deformação axial e  $\sigma$  a correspondente tensão. Em um dado volume  $V$  do corpo a energia de deformação complementar total é definida pela expressão:

$$U_C = \int_V u_c dV \quad (3.2)$$

ou ainda, usando a equação (3.1),

$$U_C = \int_V \int_0^{\sigma} \varepsilon d\sigma dV \quad (3.3)$$

No caso de um enrijecedor, admitindo que a seção transversal é constante ao longo de seu eixo, a tensão normal em qualquer ponto é dada por

$$\sigma = \frac{N(x)}{A} \quad (3.4)$$

sendo  $N(x)$  o valor do esforço normal atuante na seção transversal de área  $A$  e definida pela coordenada  $x$ . Substituindo-se (3.4) em (3.3) e considerando-se que  $dV = A dx$ , resulta

$$U_C = \int_0^l \int_0^{N(x)} \varepsilon(N(x)) dN dx \quad (3.5)$$

onde  $l$  representa o comprimento do enrijecedor.

No modelo aqui apresentado, o enrijecedor é suposto como um elemento de barra submetido a forças concentradas  $f_1$  e  $f_3$  em suas extremidades 1 e 3, respectivamente, e a forças uniformemente distribuídas  $q$  ao longo de seu comprimento, conforme mostrado na figura 3.1. Desta forma, o esforço normal varia linearmente ao longo do enrijecedor, como ilustrado na figura 3.2, com uma distribuição dada pela equação (3.6).

$$N(x) = \left[ \left( 1 - \frac{x}{l} \right) N_1 + \frac{x}{l} N_2 \right] \quad (3.6)$$

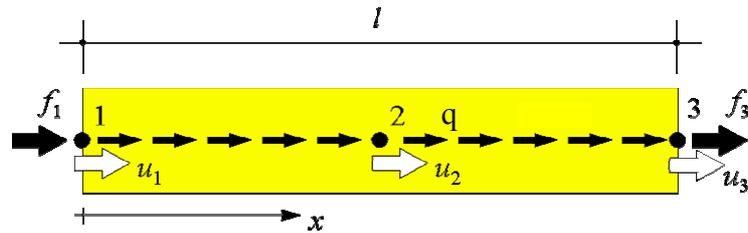


Figura 3.1- Forças e deslocamentos típicos de um enrijecedor.

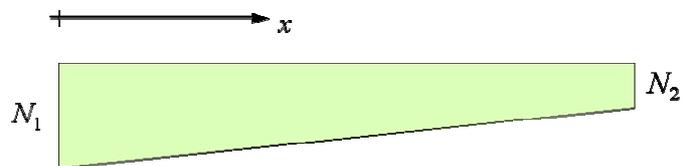


Figura 3.2 - Esforços normais atuantes em um enrijecedor.

As grandezas  $N_1$  e  $N_2$  representam os valores do esforço normal em  $x = 0$  e  $x = l$ , respectivamente.

O trabalho realizado pelas forças externas atuantes sobre o enrijecedor pode ser obtido através da seguinte expressão:

$$P = f_1 u_1 + f_3 u_3 + q \int_0^l u(x) dx \quad (3.7)$$

Sendo  $u_1$  e  $u_3$  os deslocamentos nas extremidades 1 e 3, respectivamente, e  $u(x)$  o deslocamento axial em um ponto genérico de coordenada  $x$ .

Por considerações de equilíbrio, admitindo-se que esforços normais de compressão são negativos e aqueles de tração são positivos, têm-se as seguintes relações entre as forças externas e os esforços normais  $N_1$  e  $N_2$ :

$$f_1 = -N_1 \quad (3.8)$$

$$f_3 = N_2 \quad (3.9)$$

$$f_2 = q = (N_1 - N_2)/l \quad (3.10)$$

Fazendo-se a substituição das equações (3.8), (3.9) e (3.10) em (3.8), tem-se então a seguinte expressão para o trabalho das forças externas:

$$P = -N_1 u_1 + N_2 u_3 + \frac{1}{l} \int_0^l (N_1 - N_2) u(x) dx \quad (3.11)$$

Definindo-se o deslocamento no ponto médio do enrijecedor pela equação

$$u_2 = \frac{1}{l} \int_0^l u(x) dx \quad (3.12)$$

o trabalho das forças externas pode ser obtido em função dos deslocamentos nodais pela seguinte expressão

$$P = -N_1 u_1 + N_2 u_3 + (N_1 - N_2) u_2 \quad (3.13)$$

Assim, a energia pontencial complementar total em um enrijecedor,  $\Pi = U_c - P$ , pode ser expressa pela equação:

$$\Pi = \int_0^l \int_0^{N(x)} \varepsilon(N(x)) dN dx + N_1 u_1 - N_2 u_3 - (N_1 - N_2) u_2 \quad (3.14)$$

Aplicando-se o Princípio da Mínima Energia de Deformação Potencial Complementar, tem-se

$$\frac{\partial \Pi}{\partial N_1} = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial N_2} = 0 \quad (3.16)$$

Com isso, usando-se a condição (3.15) e a equação (3.14), resulta

$$\frac{\partial \Pi}{\partial N_1} = \int_0^l \int_0^{N(x)} \frac{d}{dN_1} [\varepsilon(N(x))] dN dx + u_1 - u_2 \quad (3.17)$$

Usando-se a regra da cadeia para obtenção da derivada que figura no integrando da equação (3.17) e a expressão (3.6), obtém-se

$$\frac{d}{dN_1} [\varepsilon(N(x))] = \frac{d\varepsilon}{dN} \frac{dN}{dN_1} = \frac{d\varepsilon}{dN} \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \quad (3.18)$$

e daí, substituindo-se (3.18) em (3.17) e fazendo-se a integração em  $N(x)$ , resulta

$$\frac{\partial \Pi}{\partial N_1} = \int_0^l \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \varepsilon(N(x)) dx + u_1 - u_2 = 0 \quad (3.19)$$

Desenvolvendo-se de maneira análoga a condição (3.16), chega-se na equação (3.20).

$$\frac{\partial \Pi}{\partial N_2} = \int_0^l \left( \frac{x}{l} \right) \varepsilon(N(x)) dx + u_2 - u_3 = 0 \quad (3.20)$$

Definem-se como deslocamentos generalizados os valores  $e_1$  e  $e_2$  dados por

$$e_1 = u_2 - u_1 \quad (3.21)$$

$$e_2 = u_3 - u_2 \quad (3.22)$$

ou, em forma matricial,

$$\{e\} = [B]\{u\} \quad (3.23)$$

onde

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Através de (3.19) e (3.20), os deslocamentos generalizados podem ser obtidos por

$$e_1 = \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \varepsilon(N(x)) dx \quad (3.27)$$

$$e_2 = \int_0^l \left(\frac{x}{l}\right) \varepsilon(N(x)) dx \quad (3.28)$$

Os coeficientes de flexibilidade do enrijecedor são definidos pela seguinte equação:

$$F_{ij} = \frac{\partial e_i}{\partial N_j} \quad (3.29)$$

da qual, usando (3.27) e (3.28), resulta a matriz de flexibilidade de ordem (2 x 2) dada a seguir:

$$F_s = \begin{bmatrix} \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{d[\varepsilon(N(x))]}{dN1} dx & \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{d[\varepsilon(N(x))]}{dN2} dx \\ \int_0^l \left(\frac{x}{l}\right) \frac{d[\varepsilon(N(x))]}{dN1} dx & \int_0^l \left(\frac{x}{l}\right) \frac{d[\varepsilon(N(x))]}{dN2} dx \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

ou, ainda,

$$F_s = \begin{bmatrix} \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \frac{d\varepsilon}{dN} dx & \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(\frac{x}{l}\right) \frac{d\varepsilon}{dN} dx \\ \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(\frac{x}{l}\right) \frac{d\varepsilon}{dN} dx & \int_0^l \left(\frac{x}{l}\right)^2 \frac{d\varepsilon}{dN} dx \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Para o caso particular de um enrijecedor elástico linear com rigidez axial constante EA, a matriz de flexibilidade é dada por

$$F_s = \frac{l}{EA} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Quando  $d\varepsilon/dN$  variar ao longo do enrijecedor, as integrais que aparecem na equação (3.31) são resolvidas por integração numérica. Para isto utilizam-se as relações constitutivas apresentadas na seção 3.3 deste capítulo e a regra de Quadratura Gaussiana

com quatro pontos de integração mostrados na figura 3.3. Na tabela 3.1 estão indicados os elementos usados para realizar a referida integração numérica.

Tabela 3.1- Parâmetros para integração numérica de Gauss

Ponto de integração(i)	$x_i$	Peso ( $w_i$ )	Esforço Normal ( $N(x_i)$ )
1	$0,07l$	$0,35$	$0,93N1 + 0,07N2$
2	$0,33l$	$0,65$	$0,67N1 + 0,33N2$
3	$0,67l$	$0,65$	$0,33N1 + 0,67N2$
4	$0,93l$	$0,35$	$0,07N1 + 0,93N2$

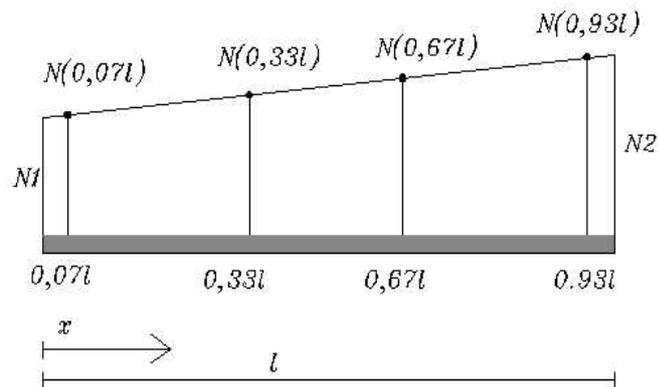


Figura 3.3 - Pontos de integração de Gauss para um enrijecedor.

Com isso, os coeficientes de flexibilidade do enrijecedor são calculados pelas seguintes expressões:

$$F_{11} = \sum_{i=1}^4 \left(1 - \frac{x_i}{l}\right)^2 \left(\frac{d\varepsilon}{dN}\right)_i w_i \quad (3.33)$$

$$F_{12} = \sum_{i=1}^4 \left(1 - \frac{x_i}{l}\right) \left(\frac{x_i}{l}\right) \left(\frac{d\varepsilon}{dN}\right)_i w_i \quad (3.34)$$

$$F_{21} = F_{12} \quad (3.35)$$

$$F_{22} = \sum_{i=1}^4 \left( \frac{x_i}{l} \right)^2 \left( \frac{d\varepsilon}{dN} \right)_i w_i \quad (3.36)$$

O termo  $\left( \frac{d\varepsilon}{dN} \right)_i$  indica o valor de  $\frac{d\varepsilon}{dN}$  correspondente ao i-ésimo ponto de integração.

Conhecida a matriz de flexibilidade do enrijecedor, pode-se obter a matriz de rigidez do mesmo através da equação:

$$[K_s] = [B]^T [F_s]^{-1} [B] \quad (3.37)$$

então, para o caso de um enrijecedor elástico linear, introduzindo (3.26) e (3.32) em (3.37), resulta a seguinte matriz de rigidez

$$K_s = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 12 & -6 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

### 3.3. Relações constitutivas

#### 3.3.1. Enrijecedor tracionado com concreto não fissurado

Para qualquer solicitação em que as tensões de tração atuantes no enrijecedor não provocam fissuras, tanto o aço quanto o concreto são admitidos no regime elástico linear e, portanto, as forças atuantes em tais materiais são dadas, respectivamente, por:

$$N_s = E_s A_s \varepsilon \quad (3.39)$$

$$N_c = E_c A_c \varepsilon \quad (3.40)$$

onde

$E_s$  - módulo de elasticidade do aço;

$E_c$  - módulo de elasticidade do concreto;

$\varepsilon$  - deformação axial do enrijecedor;

$A_s$  - área da armadura longitudinal de aço;

$A_c$  - área da seção transversal de concreto.

Assim sendo, o esforço normal  $N$  atuante ao longo do enrijecedor pode ser obtido pela seguinte equação:

$$N = (E_s A_s + E_c A_c) \varepsilon \quad (3.41)$$

Introduzindo-se o parâmetro  $\zeta = \frac{A_s E_s}{E_c A_c}$  em (3.41), resulta a seguinte expressão

para a deformação axial

$$\varepsilon = \frac{N}{E_c A_c (1 + \zeta)} \quad (3.42)$$

### 3.3.2. Enrijecedor tracionado com concreto fissurado e sem escoamento da armadura

Através da equação (3.41), o esforço normal  $N_{cr}$  correspondente à primeira fissura do concreto de um enrijecedor tracionado pode ser obtido por

$$N_{cr} = \varepsilon_{cr} E_c A_c (1 + \zeta) \quad (3.43)$$

onde  $\varepsilon_{cr}$  indica o valor da deformação associado à resistência à tração do concreto  $f_{ct}$ , dada por (Collins *et al.* 1996)

$$f_{ct} = \varepsilon_{cr} E_c = 0,33\sqrt{f'_c} \quad (3.44)$$

sendo  $f'_c$  a resistência do concreto à compressão. Em (3.44) deve ser usado MPa como unidade de tensão.

Introduzindo (3.44) em (3.43), resulta a seguinte expressão para o esforço normal de fissuração do concreto:

$$N_{cr} = f_{ct} A_c (1 + \xi) \quad (3.45)$$

Com o concreto fissurado, ou seja para  $N > N_{cr}$ , a deformação média do enrijecedor tracionado varia com o esforço normal através de uma relação não linear (Ghali & Favre 1994). O Eurocode 2 (1991) [art 4.4.2.4 (4.81), p 171] sugere a seguinte expressão empírica, relacionando a deformação axial média e o esforço normal no enrijecedor:

$$\varepsilon = \frac{N^2 - N_r^2}{E_s A_s N} \quad (3.46)$$

onde o parâmetro  $N_r$  é dado por

$$N_r = \frac{N_{cr}}{\sqrt{1 + \xi}} \quad (3.47)$$

### 3.3.3. Enrijecedor tracionado com concreto fissurado e armadura escoando

Após o escoamento do aço e a fissuração do concreto, a peça teoricamente não apresenta capacidade para resistir a acréscimos de esforço normal. Assim sendo, neste regime de solicitação, o cálculo da derivada  $d\varepsilon/dN$  leva a erros ou problemas numéricos no modelo computacional. Baseando-se em Hoogenboom (1998), a presente formulação utiliza a seguinte relação entre a deformação média e o esforço normal para obtenção da referida derivada:

$$\varepsilon = \frac{N_{yr}^2 - N_r^2}{E_S A_S N_{yr}} + \frac{10\eta(N - N_{yr})}{E_c A_c + E_S A_S} \quad (3.48)$$

onde

$$\eta = \frac{E_S}{E_c} \quad (3.49)$$

$$N_{yr} = A_S f_y \quad (3.50)$$

Em (3.50), o parâmetro  $f_y$  indica a resistência ao escoamento do aço.

### 3.3.4. Enrijecedor comprimido sem esmagamento do concreto e sem escoamento da armadura

Para o caso do enrijecedor comprimido, adota-se a seguinte relação constitutiva para o concreto:

$$\sigma_c = -f'_c \left[ 2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right)^2 \right] \quad (3.51)$$

onde:

$\varepsilon_c$  - deformação do concreto correspondente à resistência  $f'_c$

$\sigma_c$  - tensão de compressão no concreto.

Na equação (3.51), admite-se que as deformações e as tensões de compressão são negativas, enquanto que a resistência do concreto à compressão,  $f'_c$ , é tomada como positiva. É encontrada na literatura a seguinte relação para avaliação da deformação correspondente ao ponto de tensão máxima:

$$\varepsilon_c = -2 \frac{f'_c}{E_c} \quad (3.52)$$

O esforço normal atuante no enrijecedor comprimido pode ser obtido por

$$N = \sigma_c A_c + \sigma_s A_s \quad (3.53)$$

Substituindo-se a equação (3.51) em (3.53) e admitido que  $\sigma_s = E_s \varepsilon$  quando a armadura não estiver escoando, resulta a seguinte expressão:

$$N = -f'_c A_c \left[ 2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right)^2 \right] + E_s \varepsilon A_s \quad (3.54)$$

da qual obtém-se

$$\varepsilon = \varepsilon_c \left( 1 + \xi - \sqrt{\left( 1 + \xi \right)^2 + \frac{N}{f'_c A_c}} \right) \quad (3.55)$$

### 3.3.5. Enrijecedor comprimido com esmagamento do concreto e sem escoamento da armadura

Quando o concreto sofre esmagamento, todo o esforço de compressão é transferido para o aço. Nesta situação, a armadura pode entrar em regime de escoamento, não resistindo a acréscimos de esforço normal. Com isso, assim como na situação descrita no item 3.3.3, o valor da derivada  $d\varepsilon/dN$  tenderá para o infinito, gerando erros ou problemas numéricos no modelo computacional. Para contornar tal situação, Hoogenboom (1998) propõe o uso da seguinte expressão para avaliação da deformação axial em função do esforço normal atuante no enrijecedor:

$$\varepsilon = \varepsilon_c + \frac{10\eta}{E_s A_s + E_c A_c} (N - N_t) \quad (3.56)$$

onde  $N_t$  é dado pelo maior dos valores, em módulo, calculados pelas expressões abaixo apresentadas.

$$N_t = -f'_c A_c (1 + \xi)^2 \quad (3.57)$$

$$N_t = -f'_c A_c - A_s f_y \quad (3.58)$$

### 3.3.6. Enrijecedor comprimido sem esmagamento do concreto e com escoamento da armadura

Nas regiões comprimidas do enrijecedor, duas relações constitutivas podem ser utilizadas, a primeira para o caso em que o valor absoluto da deformação correspondente ao esmagamento do concreto é maior do que o valor absoluto da deformação de escoamento do aço e, a outra, para o caso contrário.

Quando o aço entra em escoamento, admitindo-se que o mesmo tem um comportamento elastoplástico perfeito, tem-se:

$$\sigma_s = f_y \quad (3.59)$$

Assim, usando as equações (3.51) e (3.59), resulta a expressão abaixo apresentada para o esforço normal.

$$N = -f'_c A_c \left[ 2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right)^2 \right] - f_y A_s \quad (3.60)$$

Resolvendo a equação (3.60) para  $\varepsilon$ , obtém-se:

$$\varepsilon = \varepsilon_c \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{N + N_{yr}}{N_c}} \right) \quad (3.61)$$

sendo os termos  $N_{yr}$  e  $N_c$  dados pelas equações (3.62) e (3.63), respectivamente.

$$N_{yr} = A_S f_y \quad (3.62)$$

$$N_c = f'_c A_c \quad (3.63)$$

Dependendo da relação entre a deformação de escoamento do aço e a deformação correspondente à resistência do concreto comprimido, o enrijecedor pode apresentar duas relações constitutivas. Uma delas, mostrada na figura 3.4, correspondente à situação em que o esmagamento do concreto acontece depois de ocorrido o escoamento da armadura. A outra, ilustrada na figura 3.5, retrata a situação inversa, ou seja, quando ocorre o esmagamento do concreto antes do escoamento do aço.

Para ilustrar, suponha um enrijecedor confeccionado com um concreto de 30 MPa e armado com aço CA-25 ( $f_y = 250 \text{ MPa}$ ). Neste caso, tem-se  $\varepsilon_c = -0,002$  e  $\varepsilon_y = -0,00119$ . Assim sendo, o aço entra em escoamento antes de ocorrer a ruptura do concreto e, portanto, deve ser utilizada a relação constitutiva mostrada na figura 3.5. Se o enrijecedor acima citado fosse armado com aço CA-50 ( $f_y = 500 \text{ MPa}$ ), as deformações limites dos materiais teriam os valores  $\varepsilon_c = -0,002$  e  $\varepsilon_y = -0,0024$ , implicando na necessidade do uso da relação constitutiva representada na figura 3.5.

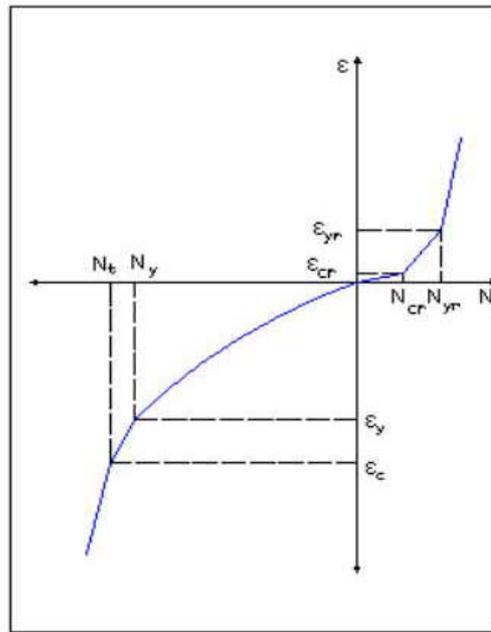


Figura 3.4 - Relação constitutiva do enrijecedor quando o esmagamento do concreto ocorre depois do escoamento das armaduras.

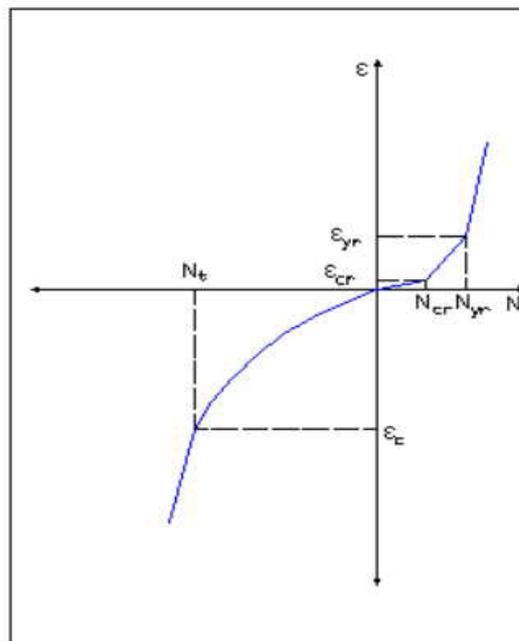


Figura 3.5 - Relação constitutiva do enrijecedor quando o esmagamento do concreto ocorre antes do escoamento das armaduras.

### 3.4. Dimensionamento das armaduras dos enrijecedores

O dimensionamento das armaduras nas regiões tracionadas dos enrijecedores pode ser feito admitindo-se que o concreto sob tração não oferece resistência ao esforço normal, sendo o mesmo absorvido apenas pelo aço. Assim sendo, a área de aço da armadura de tração é dimensionada pela seguinte expressão:

$$A_S = \frac{N_{d,max}^t}{f_{yd}} \quad (3.64)$$

onde

$N_{d,max}^t$  - valor de cálculo do esforço normal de tração;

$f_{yd}$  - tensão de escoamento de cálculo do aço.

Em caso de projeto estrutural, os valores de cálculo acima referidos são obtidos através da introdução de coeficientes de segurança recomendados pelas normas de ações e segurança estrutural.

Para o caso de regiões comprimidas, somente se faz necessário o cálculo de armadura quando o valor da tensão atuante superar a resistência do concreto à compressão. Em tal situação, a armadura comprimida é dimensionada para absorver a parcela do esforço normal que excede a aquela que corresponde à resistência da seção de concreto, conforme ilustrado pelas equações (3.65) e (3.66).

$$N_{d,max}^c = f_{cd}(h_e b_w - A_S) + f_{yd} \cdot A_S \quad (3.65)$$

$$A_S = \frac{N_{d,max}^c - f_{cd} h_e b_w}{(f_{yd} - f_{cd})} \quad (3.66)$$

Nas expressões acima, tem-se:

$N_{d,max}^c$  - valor de cálculo do esforço normal de compressão;

$h_e$  - altura do enrijecedor;

$b_w$  - largura do enrijecedor.

## Capítulo 4

### Painéis

#### 4.1. Introdução

No modelo de painéis enrijecidos (MPE) considerado no presente estudo, os painéis são admitidos com um formato quadrilateral qualquer, tendo suas faces solicitadas apenas por tensões tangenciais,  $\tau_i$ , conforme mostrado na figura 4.1. Para efeito de análise, são associados a cada painel graus de liberdade paralelos às suas respectivas faces, como ilustrado na figura 4.2 (Hoogenboom 1998).

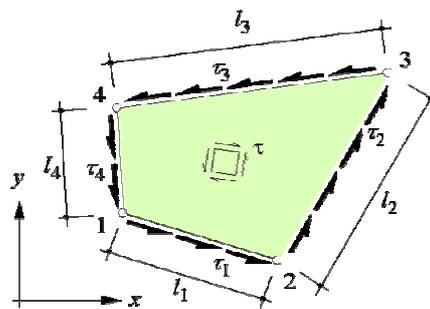


Figura 4.1- Geometria do painel e tensões atuantes

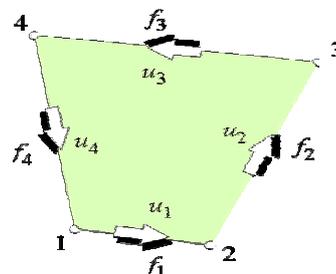


Figura 4.2-Ações e deslocamentos nos pontos nodais do painel

## 4.2. Matriz de rigidez do painel

### 4.2.1. Relações de equilíbrio

Com base na figura 4.1, as relações de equilíbrio do painel, expressas pelas nulidade das somas de forças nas direções x e y e de momentos das mesmas em relação à origem dos eixos, são dadas por

$$\sum F_x = 0$$

$$0 = \tau_1 t l_1 \cos \theta_1 + \tau_2 t l_2 \cos \theta_2 + \tau_3 t l_3 \cos \theta_3 + \tau_4 t l_4 \cos \theta_4 \quad (4.1 \text{ a-b})$$

$$\sum F_y = 0$$

$$0 = \tau_1 t l_1 \sin \theta_1 + \tau_2 t l_2 \sin \theta_2 + \tau_3 t l_3 \sin \theta_3 + \tau_4 t l_4 \sin \theta_4 \quad (4.2 \text{ a-b})$$

$$\sum M = 0$$

$$0 = \tau_1 t l_1 \cos \theta_1 y_1 + \tau_1 t l_1 \sin \theta_1 x_1 - \tau_2 t l_2 \cos \theta_2 y_2 + \tau_2 t l_2 \sin \theta_2 x_2 - \tau_3 t l_3 \cos \theta_3 y_3 + \tau_3 t l_3 \sin \theta_3 x_3 - \tau_4 t l_4 \cos \theta_4 y_4 + \tau_4 t l_4 \sin \theta_4 x_4 \quad (4.3 \text{ a-b})$$

Os termos  $\cos \theta_i$  e  $\sin \theta_i$ , que figuram nas equações acima, podem ser obtidos em função das coordenadas dos vértices do painel pelas seguintes equações:

$$\cos \theta_1 = \frac{x_2 - x_1}{l_1} \quad ; \quad \sin \theta_1 = \frac{y_2 - y_1}{l_1}$$

$$\cos \theta_2 = \frac{x_3 - x_2}{l_2} \quad ; \quad \sin \theta_2 = \frac{y_3 - y_2}{l_2} \quad (4.4 \text{ a-h})$$

$$\cos \theta_3 = \frac{x_4 - x_3}{l_3} ; \quad \text{sen} \theta_3 = \frac{y_4 - y_3}{l_3}$$

$$\cos \theta_4 = \frac{x_1 - x_4}{l_4} ; \quad \text{sen} \theta_4 = \frac{y_1 - y_4}{l_4}$$

os quais quando substituídos em (4.1 b), (4.2 b) e (4.3 b) resultam

$$0 = \tau_1(x_2 - x_1) + \tau_2(x_3 - x_2) + \tau_3(x_4 - x_3) + \tau_4(x_1 - x_4) \quad (4.5)$$

$$0 = \tau_1(y_2 - y_1) + \tau_2(y_3 - y_2) + \tau_3(y_4 - y_3) + \tau_4(y_1 - y_4) \quad (4.6)$$

$$0 = \tau_1(x_1y_2 - x_2y_1) + \tau_2(x_2y_3 - x_3y_2) + \tau_3(x_3y_4 - x_4y_3) + \tau_4(x_4y_1 - x_1y_4) \quad (4.7)$$

onde:

$t$  - espessura do painel;

$x_1; x_2; x_3; x_4$  - valores das coordenadas x dos vértices do painel;

$y_1; y_2; y_3; y_4$  - valores das coordenadas y dos vértices do painel;

$l_1; l_2; l_3; l_4$  - medidas dos lados do painel;

$\tau_1; \tau_2; \tau_3; \tau_4$  - tensões de cisalhamento atuantes nas faces do painel;

$\theta_1; \theta_2; \theta_3; \theta_4$  - ângulos entre os lados do painel e o eixo x do sistema de referência (Fig 4.1).

Hoogenboom & Blaauwendraad (2000) definem como tensão generalizada  $\beta$  a grandeza dada por

$$\beta = \frac{t}{4}(-\tau_1 + \tau_2 - \tau_3 + \tau_4) \quad (4.8)$$

que, juntamente com as equações de equilíbrio (4.5), (4.6) e (4.7), leva ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4\beta/t \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

onde os termos  $C_i$ ,  $S_i$  e  $r_i$  são dados pelas conjunto de equações abaixo:

$$C_1 = x_2 - x_1 \quad ; \quad C_2 = x_3 - x_2 \quad ; \quad C_3 = x_4 - x_3 \quad ; \quad C_4 = x_1 - x_4$$

$$S_1 = y_2 - y_1 \quad ; \quad S_2 = y_3 - y_2 \quad ; \quad S_3 = y_4 - y_3 \quad ; \quad S_4 = y_1 - y_4 \quad (4.10 \text{ a-m})$$

$$r_1 = x_1y_2 - x_2y_1 \quad ; \quad r_2 = x_2y_3 - x_3y_2 \quad ; \quad r_3 = x_3y_4 - x_4y_3 \quad ; \quad r_4 = x_4y_1 - x_1y_4$$

Usando a regra de Cramer em (4.9) para determinar a tensão  $\tau_1$ , tem-se

$$\tau_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & C_2 & C_3 & C_4 \\ 0 & S_2 & S_3 & S_4 \\ 0 & r_2 & r_3 & r_4 \\ 4\beta/t & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ 4\beta/t & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}} \quad (4.11)$$

ou, ainda, aplicando a regra de Laplace para cálculo de determinantes,

$$\tau_l = \frac{-\frac{4\beta}{t} \begin{vmatrix} C_2 & C_3 & C_4 \\ S_2 & S_3 & S_4 \\ r_2 & r_3 & r_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_2 & C_3 & C_4 \\ S_2 & S_3 & S_4 \\ r_2 & r_3 & r_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_1 & C_3 & C_4 \\ S_1 & S_3 & S_4 \\ r_1 & r_3 & r_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_4 \\ S_1 & S_2 & S_4 \\ r_1 & r_2 & r_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}} \quad (4.12)$$

Em forma mais compacta, a equação (4.12) pode ser expressa como

$$\tau_l = \frac{-4\frac{\beta}{t}k_l}{k_f} \quad (4.13)$$

sendo

$$k_f = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \quad (4.14)$$

e

$$k_1 = \begin{vmatrix} C_2 & C_3 & C_4 \\ S_2 & S_3 & S_4 \\ r_2 & r_3 & r_4 \end{vmatrix} \quad ; \quad k_2 = \begin{vmatrix} C_1 & C_3 & C_4 \\ S_1 & S_3 & S_4 \\ r_1 & r_3 & r_4 \end{vmatrix} \quad (4.15 \text{ a-d})$$

$$k_3 = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_4 \\ S_1 & S_2 & S_4 \\ r_1 & r_2 & r_4 \end{vmatrix} \quad ; \quad k_4 = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}$$

Através da equação (4.13) e da figura 4.1, a força que atua na face correspondente ao lado  $l_1$  do painel pode ser obtida pela expressão

$$f_1 = \frac{-4k_1 l_1 \beta}{k_f} \quad (4.16)$$

Analogamente, determinam-se as forças  $f_2, f_3$  e  $f_4$  atuantes nas demais faces do painel por

$$f_2 = \frac{4k_2 l_2 \beta}{k_f} \quad (4.17)$$

$$f_3 = \frac{-4k_3 l_3 \beta}{k_f} \quad (4.18)$$

$$f_4 = \frac{4k_4 l_4 \beta}{k_f} \quad (4.19)$$

Utilizando as equações (4.16) a (4.19), pode-se escrever a relação entre o vetor das forças no painel,  $\{f\}$ , e a tensão generalizada,  $\beta$ , como segue

$$\{f\} = [B^p]^T \beta \quad (4.20)$$

onde

$$\{f\}^T = \{f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4\} \quad (4.21 \text{ a-b})$$

$$[B^p] = \frac{4}{k_f} [-k_1 l_1 \quad k_2 l_2 \quad -k_3 l_3 \quad k_4 l_4]$$

#### 4.2.2. Energia Potencial Complementar do painel

Na presente formulação o Princípio da Mínima Energia Potencial Complementar é utilizado para a determinação da matriz de rigidez do painel. Considerando a figura 4.1, a energia potencial complementar do painel é dada pela equação

$$\Pi_c = t \int_{A_p} \Pi'_c dA_p - t \int_{l_1} \tau_1 u'_1 dl_1 - t \int_{l_2} \tau_2 u'_2 dl_2 - t \int_{l_3} \tau_3 u'_3 dl_3 - t \int_{l_4} \tau_4 u'_4 dl_4 \quad (4.22)$$

onde  $\Pi'_c$  é a energia potencial complementar por unidade de volume e  $A_p$  é a área da superfície do painel. As tensões  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  e  $\tau_4$  são consideradas como constantes ao longo das faces do painel, enquanto que as componentes dos deslocamentos ao longo das mesmas,  $u'_1, u'_2, u'_3$  e  $u'_4$ , são assumidas com variação linear ao longo dos lados  $l_1, l_2, l_3$  e  $l_4$  respectivamente. Desta última hipótese, resulta que a integral  $\int u'_i dl_i$  é dado por  $u_i l_i$ , onde  $u_i$  é o valor de  $u'_i$  no meio da face  $i$  do painel. Com isto a equação (4.22) pode ser reescrita na seguinte forma

$$\Pi_c = t \int_{A_p} \Pi'_c dA_p - t \tau_1 u_1 l_1 - t \tau_2 u_2 l_2 - t \tau_3 u_3 l_3 - t \tau_4 u_4 l_4 \quad (4.23)$$

ou, ainda, usando as equações (4.16) a (4.19),

$$\Pi_c = t \int_{A_p} \Pi'_c dA_p + u_1 \frac{4k_1 l_1 \beta}{k_f} - u_2 \frac{4k_2 l_2 \beta}{k_f} + u_3 \frac{4k_3 l_3 \beta}{k_f} - u_4 \frac{4k_4 l_4 \beta}{k_f} \quad (4.24)$$

Introduzindo a relação entre os deslocamentos nodais do painel e a deformação generalizada,  $e$ , dada por

$$e = [B^p] \{u^p\} \quad (4.25)$$

em (4.24), obtém-se

$$\Pi_c = t \int_{A_p} \Pi'_c dA_p - e \beta \quad (4.26)$$

### 4.2.3. Determinação da rigidez do painel

Usando a equação (4.26) e aplicando o Princípio da Mínima Energia Potencial Complementar, obtém-se a expressão:

$$\frac{d}{d\beta} \left( t \int_{A_p} \Pi'_c dA_p \right) - e = 0 \quad (4.27)$$

de onde resulta a seguinte equação para a deformação generalizada:

$$e = \frac{d}{d\beta} \left( t \int_{A_p} \Pi'_c dA_p \right) \quad (4.28)$$

A energia de deformação complementar por unidade de volume,  $\Pi'_c$ , é dada pela área sobre a curva  $\tau \times \gamma$  da figura 4.3, ou seja,

$$\Pi'_c = \int_0^{\tau} \gamma d\tau \quad (4.29)$$

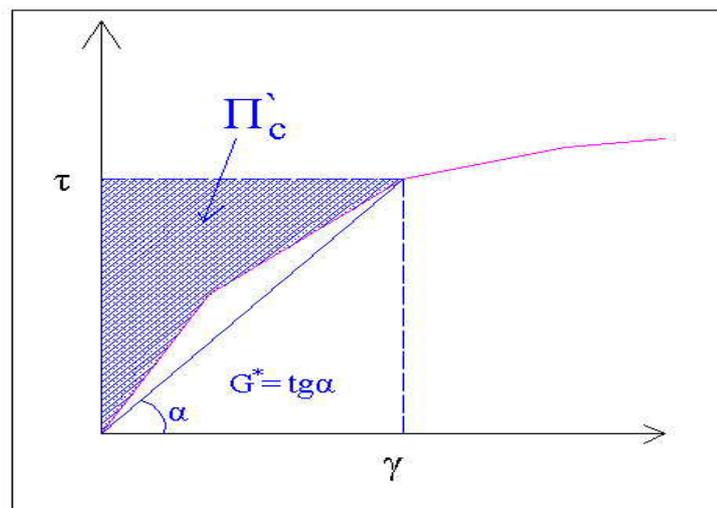


Figura 4.3 - Relação constitutiva do painel

De acordo com a figura 4.3, a distorção no painel,  $\gamma$ , pode ser relacionada ponto a ponto com a tensão  $\tau$ , através do módulo de rigidez trasversal secante na origem  $G^*$ , pela equação

$$\gamma = \frac{\tau}{G^*} \quad (4.30)$$

Admitindo que o painel está submetido a uma tensão de cisalhamento constante e igual a  $\frac{\beta}{t}$ , chega-se, através de (4.8), (4.28) e (4.30), à seguinte expressão:

$$e = \frac{A_p}{t} \frac{d}{d\beta} \int_0^\beta \frac{\beta}{G^*} d\beta \quad (4.31)$$

Assim, como  $\frac{\beta}{G^*}$  é uma função de  $\beta$ ,  $f(\beta)$ , resulta de (4.27) a relação entre a tensão e a deformação generalizadas:

$$[D] = \frac{\beta}{e} = \left[ \frac{tG^*}{A_p} \right] \quad (4.32)$$

Usando (4.8), (4.25) e (4.32) obtém-se a seguinte relação entre a distorção do painel  $\gamma$  e o vetor de deslocamentos nodais  $\{u^p\}$ :

$$\gamma = \frac{[B^p] \{u^p\}}{A_p} \quad (4.33)$$

Da mesma forma que se fez para os enrijecedores, a matriz de rigidez do painel é calculada pelo triplo produto matricial mostrado na equação (4.34).

$$[K_p] = [B^p]^T [D] [B^p] \quad (4.34)$$

### 4.3. Dimensionamento das armaduras dos painéis

O painel é um elemento de membrana quadrilateral, com duas dimensões preponderantes, e que apresenta uma armadura disposta em forma de grelha, com armaduras na direção vertical e na direção horizontal, formando assim uma malha ortogonal. Para o dimensionamento das armaduras toma-se como base o esquema mostrado na figura 4.4.

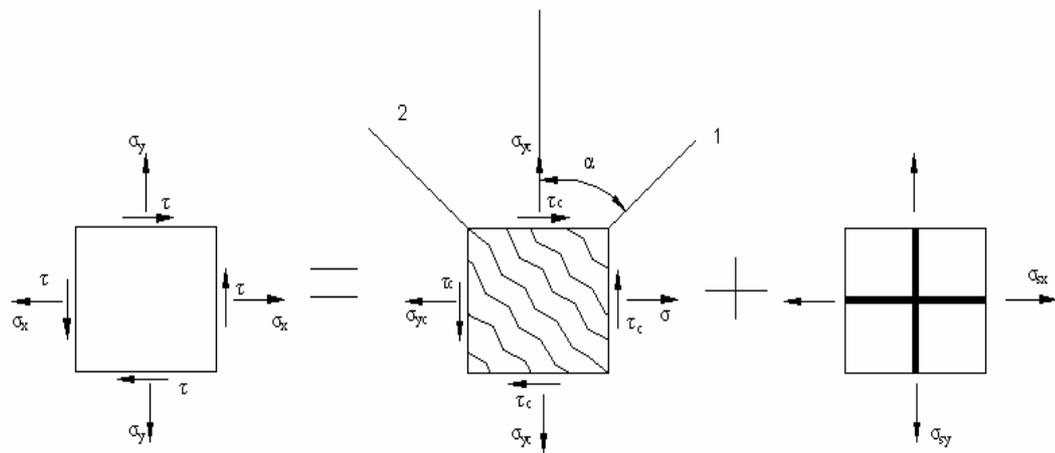


Figura 4.4 - Superposição de esforços em um elemento de membrana

O esquema da figura 4.4 mostra as tensões atuantes em um elemento de membrana em concreto armado, decomposto em concreto e armaduras, onde é suposto que as tensões cisalhantes são absorvidas unicamente pelo concreto e as tensões normais pelos dois materiais, conforme descrito pelas equações (4.35), (4.36) e (4.37).

$$\sigma_x = \sigma_{xc} + \rho_{sx} \sigma_{sx} \quad (4.35)$$

$$\sigma_y = \sigma_{yc} + \rho_{sy} \sigma_{sy} \quad (4.36)$$

$$\tau = \tau_c \quad (4.37)$$

Os termos que aparecem nestas últimas equações têm os seguintes significados:

$\sigma_x, \sigma_y$  - tensão normal atuante total nas direções x e y, respectivamente;

$\sigma_{xc}, \sigma_{yc}$  - tensão normal atuante no concreto nas direções x e y, respectivamente;

$\sigma_{sx}, \sigma_{sy}$  - tensão normal atuante no aço nas direções x e y, respectivamente;

$\tau$  - tensão cisalhante no elemento de membrana;

$\tau_c$  - tensão cisalhante atuante no concreto do elemento de membrana;

$\rho_{sx}, \rho_{sy}$  - taxas de armaduras nas direções x e y do elemento de membrana, respectivamente.

Fazendo uma análise de tensões do elemento, sem as armaduras, mostrado na figura 4.4, têm-se as seguintes equações de equilíbrio:

$$\sigma_{yc} = \sigma_{1c} \cos^2 \alpha + \sigma_{2c} \sin^2 \alpha \quad (4.38)$$

$$\sigma_{xc} = \sigma_{2c} \cos^2 \alpha + \sigma_{1c} \sin^2 \alpha \quad (4.39)$$

onde

$\sigma_{1c}, \sigma_{2c}$  - tensões principais atuantes no concreto do elemento de membrana; e

$\alpha$  - ângulo que define as direções principais de tensões.

Para efeito de dimensionamento das armaduras, admite-se que a tensão principal de tração  $\sigma_{1c}$  é nula.

Admitindo-se que as tensões  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  são nulas e que todas as armaduras estão escoando, resultam de (4.35), (4.36), as seguintes equações:

$$\rho_{sx} f_{yx} = -\sigma_{2c} \cos^2 \alpha \quad (4.40)$$

$$\rho_{sy} f_{yy} = -\sigma_{2c} \sin^2 \alpha \quad (4.41)$$

onde

$f_{yx}, f_{yy}$  - tensão de escoamento do aço nas direções x e y, respectivamente.

Através de (4.40) e (4.41), obtém-se:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\rho_{sy} f_{yy}}{\rho_{sx} f_{yx}} \quad (4.42)$$

A figura 4.5 mostra as tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  atuantes em um elemento de membrana em estado de cisalhamento puro, as quais estão relacionadas com a tensão cisalhante  $\tau$  através das equações (4.43) e (4.44).

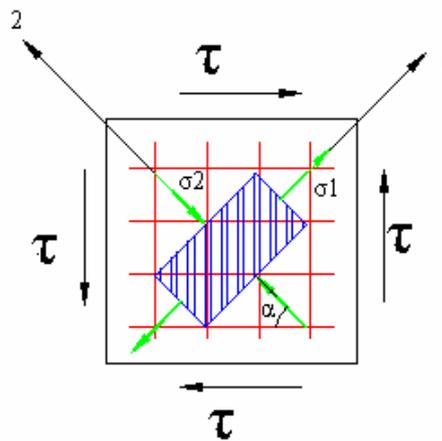


Figura 4.5 - Tensões principais no elemento de membrana em cisalhamento puro

$$\sigma_1 = 2\tau \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \quad (4.43)$$

$$\sigma_2 = -2\tau \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \quad (4.44)$$

Para se determinar as taxas de armadura nas direções x e y é assumido que a tensão principal de tração na direção 1 (figura 4.5) é absorvida pelas armaduras dispostas nas direções x e y, conforme mostra a figura 4.6.

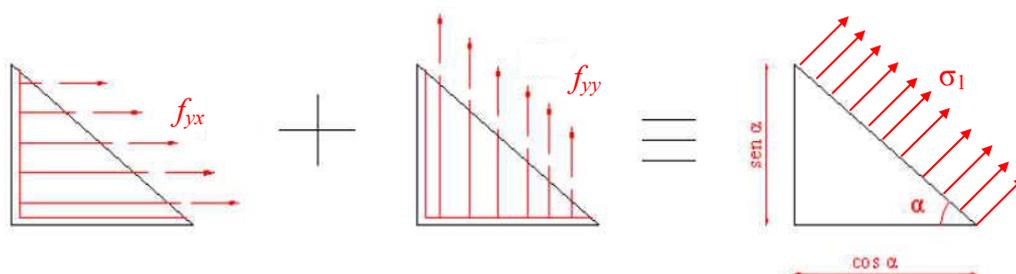


Figura 4.6 - Tensões de tração nas armaduras

As forças atuantes nas armaduras dispostas nas direções x e y apresentam como resultante na direção principal I uma força  $F_{RS}$  dada por

$$F_{RS} = A_{sx} f_{yx} \operatorname{sen} \alpha + A_{sy} f_{yy} \cos \alpha \quad (4.45)$$

sendo

$A_{sx}, A_{sy}$  - áreas de aço nas direções x e y, respectivamente.

As taxas geométricas de aço nas direções x e y são dadas por:

$$\rho_{sx} = \frac{A_{sx}}{A_{cx}} = \frac{A_{sx}}{t \operatorname{sen} \alpha} \quad (4.46)$$

$$\rho_{sy} = \frac{A_{sy}}{A_{cy}} = \frac{A_{sy}}{t \cos \alpha} \quad (4.47)$$

onde

$A_{cx}, A_{cy}$  - área de concreto nas direções x e y, respectivamente;

$t$  - espessura do painel.

Fazendo  $F_{RS} = \sigma_I t$  na equação (4.45) e utilizando (4.46) e (4.47), chega-se com

$$\sigma_I = \rho_{sx} f_{yx} \operatorname{sen}^2 \alpha + \rho_{sy} f_{yy} \cos^2 \alpha \quad (4.48)$$

Dividindo os termos da equação (4.48) por  $\cos^2 \alpha$  e introduzindo (4.42) e (4.43), resulta a seguinte expressão para a taxa geométrica de armadura na direção y:

$$\rho_{sy} = \frac{\tau}{f_{yy}} \operatorname{tg} \alpha \quad (4.49)$$

Analogamente, encontra-se para a taxa geométrica correspondente à direção x a equação:

$$\rho_{sx} = \frac{I}{\operatorname{tg}\alpha} \frac{\tau}{f_{yx}} \quad (4.50)$$

#### 4.4. Relação tensão - deformação não linear do painel

Esta relação é importante para determinar a rigidez do painel em cada iteração da análise não linear

##### 4.4.1. Relações constitutivas dos materiais

As relações constitutivas para o concreto utilizadas no presente estudo foram propostas por Collins & Mitchell (1997).

Para o concreto tracionado, a relação entre a tensão principal e a correspondente deformação é dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{lc} = E_c \varepsilon_1 \quad \text{se } \varepsilon_1 \leq 0,00008 \\ \sigma_{lc} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \sigma_{cr}}{1 + \sqrt{500 \varepsilon_1}} \quad \text{se } \varepsilon_1 > 0,00008 \end{array} \right. \quad (4.51 \text{ a-b})$$

onde:

$\alpha_1 = 1$ , para barras com nervuras;

$\alpha_1 = 0,7$ , para barras lisas;

$\alpha_1 = 0$ , para barras não aderentes;

$\alpha_2 = 1$ , para carga rápida monotônica;

$\alpha_2 = 0,7$ , para carga mantida e ou cíclica;

$\sigma_{cr} = 0,33 \sqrt{f'_c}$  ;

$f'_c$  - resistência à compressão do concreto em MPa.

Os autores acima referidos propõem a seguinte relação entre as tensões principais de compressão e as respectivas deformações:

$$\sigma_{2c} = \sigma_{2cmax} \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_c} \right) - \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_c} \right)^2 \right] \quad (4.52)$$

onde

$$\sigma_{2cmax} = f'_c \left( \frac{I}{0,8 - \frac{0,34\varepsilon_1}{\varepsilon_c}} \right) \quad (4.53)$$

As deformações principais  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  podem ser obtidas pelas relações do círculo de Mohr em função das deformações do painel referidas aos eixos x e y.

Na formulação empregada neste trabalho o aço é considerado como uma material elastoplástico perfeito.

#### 4.4.2. Capacidade de transmissão de tensão através das fissuras

Um dos problemas encontrados para a formulação do MPE consiste na determinação das tensões  $\sigma_x, \sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ , atuantes em um painel fissurado, a partir das deformações correspondentes  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$ . Para isso, no presente trabalho, é utilizada a Teoria do Campo de Compressão Modificado, proposta por Vecchio & Collins (1986). A figura 4.7 mostra as tensões atuantes em um plano 1-1, paralelo às fissuras e localizado entre duas delas, e ao longo do plano 2-2 que coincide com a superfície de uma fissura. Na superfície de uma fissura as tensões de tração do concreto são nulas, podendo existir tensões de cisalhamento  $v_{ci}$  e de compressão  $f_{ci}$  quando as armaduras em pelo menos uma das direções estiverem escoando (Vecchio & Collins 1986). Nesta situação, as últimas tensões acima citadas são necessárias para manter o equilíbrio do elemento de painel e surgem devido à rugosidade da superfície fissurada a qual é gerada pelo intertravamento dos agregados (figura 4.8).

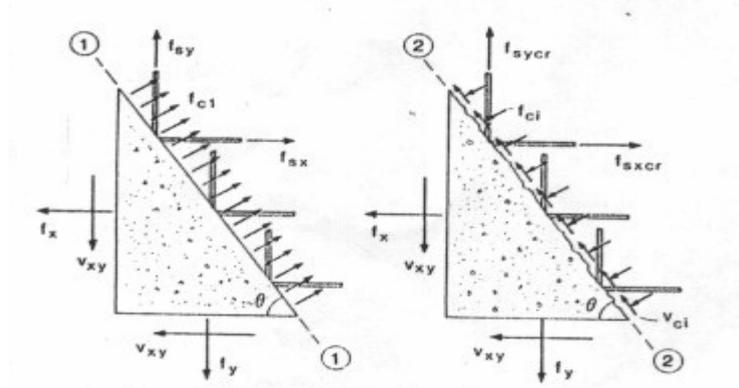


Figura 4.7 - Tensões atuantes em uma seção entre fissuras e ao longo de uma fissura -Vecchio & Collins (1986)

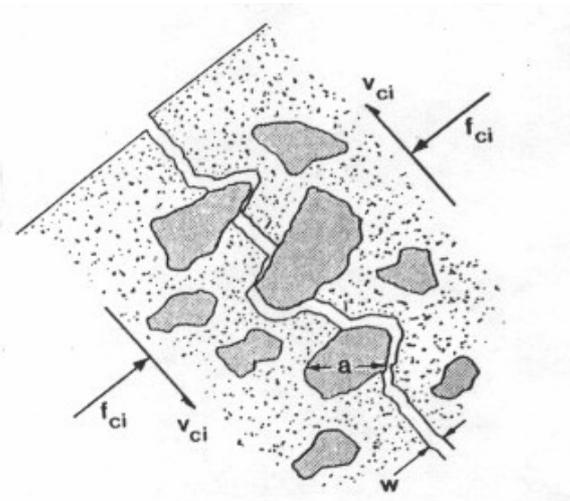


Figura 4.8 - Tensões devidas ao intertravamento dos agregados -Vecchio & Collins (1986)

Para a direção perpendicular às fissuras, a força resultante sobre o plano 1-1 deve ser equivalente àquela atuante no plano 2-2, levando à seguinte equação,

$$\begin{aligned} \sigma_{1c} + \sigma_{sx} \rho_{sx} \text{sen} \alpha \text{sen} \alpha + \sigma_{sy} \rho_{sy} \text{cos} \alpha \text{cos} \alpha = \\ \sigma_{sx,cr} \rho_{sx} \text{sen} \alpha \text{sen} \alpha + \sigma_{sx,cr} \rho_{sy} \text{cos} \alpha \text{cos} \alpha \end{aligned} \quad (4.54)$$

onde

$\sigma_{sx}, \sigma_{sy}$  - tensões nas armaduras dispostas nas direções x e y, respectivamente, em uma região entre fissuras;

$\sigma_{sx,cr}, \sigma_{sy,cr}$  - tensões nas armaduras dispostas nas direções x e y, respectivamente, em uma fissura;

$\sigma_{lc}$  - tensão de tração atuante no concreto existente entre fissuras;

$\alpha$  - ângulo de inclinação das fissuras.

Em (4.54), as tensões de compressão  $\sigma_{ci}$  foram desprezadas.

Resolvendo a equação (4.54) para  $\sigma_{lc}$ , chega-se na equação

$$\sigma_{lc} = (\sigma_{sx,cr} - \sigma_{sx})\rho_{sx} \text{sen}^2 \alpha + (\sigma_{sy,cr} - \sigma_{sy})\rho_{sy} \text{cos}^2 \alpha \quad (4.55)$$

Fazendo o mesmo para a direção paralela às fissuras, resulta a equação

$$\begin{aligned} & \sigma_{sx}\rho_{sx} \text{sen} \alpha \text{cos} \alpha + \sigma_{sy}\rho_{sy} \text{sen} \alpha \text{cos} \alpha = \\ v_{ci} - \sigma_{sx,cr}\rho_{sx} \text{sen} \alpha \text{cos} \alpha + \sigma_{sy,cr}\rho_{sy} \text{sen} \alpha \text{cos} \alpha \end{aligned} \quad (4.56)$$

Através de (4.56), obtém-se a seguinte expressão para a tensão cisalhante  $v_{ci}$

$$v_{ci} = [\rho_{sx}(\sigma_{sx,cr} - \sigma_{sx}) - \rho_{sy}(\sigma_{sy,cr} - \sigma_{sy})] \text{sen} \alpha \text{cos} \alpha \quad (4.57)$$

De acordo com Collins & Mitchell (1997), o valor de  $v_{ci}$  é limitado pela expressão (4.58), a qual depende da abertura da fissura,  $w_f$ , do diâmetro máximo do agregado graúdo,  $a$ , e da resistência do concreto à compressão.

$$v_{ciMax} = \frac{0,18\sqrt{f'_c(MPa)}}{0,3 + \frac{24w_f}{a + 16}} \quad (4.58)$$

Segundo os mesmos autores, a abertura média das fissuras pode ser avaliada pela seguinte equação

$$w_f = \varepsilon_l s_{m\theta} \quad (4.59)$$

onde:

$\varepsilon_l$  - deformação principal de tração; e

$s_{m\theta}$  - distância média entre fissuras.

O CEB-FIP Model Code (1978) sugere a seguinte expressão para a avaliação da distância média entre fissuras:

$$s_{m\theta} = \frac{l}{\frac{\text{sen } \alpha}{s_{mx}} + \frac{\text{cos } \alpha}{s_{my}}} \quad (4.60)$$

onde

$s_{mx}$  - distância média entre fissuras na direção x;

$s_{my}$  - distância média entre fissuras na direção y;

$\alpha$  - ângulo de inclinação das fissuras em relação ao eixo x.

As distâncias médias entre fissuras  $s_{mx}$  e  $s_{my}$  são calculadas através da equação genérica

$$s_m = 2 \left( c + \frac{s}{10} \right) + K_1 K_2 \frac{d_b}{\rho_{ef}} \quad (4.61)$$

onde

$s$ - espaçamento máximo entre as barras na direção considerada (x ou y);

$c$ - cobrimento das armaduras;

$d_b$  - diâmetro das barras da armadura na direção considerada;

$K_1 = 0,4$ , para barras nervuradas ou  $K_1 = 0,8$ , para barras lisas.

O coeficiente  $K_2$  é dado pela equação

$$K_2 = \frac{0,25(\varepsilon_l^{ef} + \varepsilon_2')}{2\varepsilon_l^{ef}} \quad (4.62)$$

sendo

$\varepsilon_1^{ef}$  e  $\varepsilon_2'$  - deformação máxima e mínima de tração, respectivamente, dentro da área efetiva de concreto, definida conforme a figura 4.10.

A taxa efetiva de aço,  $\rho_{ef}$ , é dada pela seguinte equação

$$\rho_{ef} = \frac{A_s}{A_{ef}} \quad (4.63)$$

onde  $A_s$  é a área de aço na direção considerada e  $A_{ef}$  é a chamada área efetiva, definida como mostrado pelas regiões hachuradas da figura 4.9.

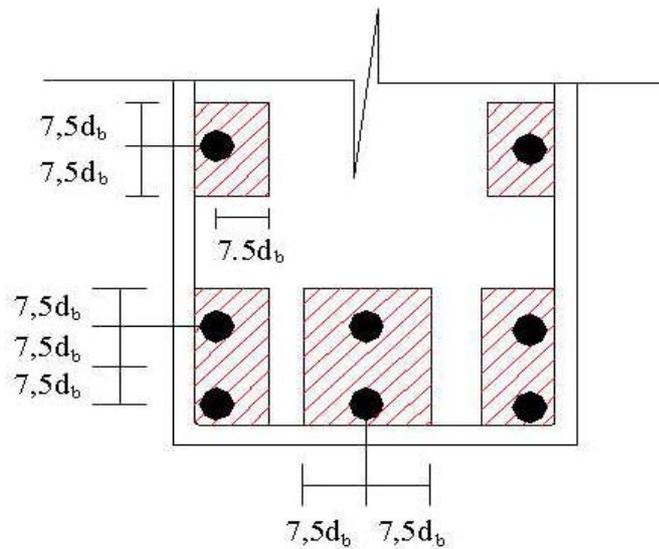


Figura 4.9 - Esquema ilustrativo da área efetiva

Como no painel as deformações têm distribuição uniforme nas direções x e y ( $\varepsilon_1^{ef} = \varepsilon_2'$ ), então,  $K_2 = 0,25$ .

#### 4.4.3. Procedimentos para obtenção da tensão de cisalhamento do painel na análise não linear

As tensões de cisalhamento atuantes nas bordas de um painel podem ser obtidas a partir do vetor de deslocamentos  $\{u^p\}$ . Para isto adotam-se a hipótese de aderência perfeita entre o aço e o concreto e os seguintes procedimentos:

- 1º ) Determina-se a distorção  $\gamma_{xy}$  através da equação (4.33);
- 2º ) Considerando-se nulas as deformações médias nas direções x e y ( $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ ) e tendo-se o valor de  $\gamma_{xy}$ , obtém-se as deformações principais  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ , e suas respectivas direções, pelas relações do círculo de Mohr das deformações;
- 3º ) Utilizando-se as relações constitutivas (4.51) e (4.52), determinam-se as tensões principais no concreto  $\sigma_{1c}$  e  $\sigma_{2c}$ ;
- 4º ) A partir das equações (4.35), (4.36), (4.38), e (4.39), chegam-se nas seguintes expressões para o cálculo das tensões atuantes nas armaduras

$$\sigma_{sx} = \frac{(\sigma_{1c} \text{sen}^2 \alpha + \sigma_{2c} \text{cos}^2 \alpha)}{\rho_{sx}} \quad (4.64 \text{ a-b})$$

$$\sigma_{sy} = \frac{(\sigma_{1c} \text{cos}^2 \alpha + \sigma_{2c} \text{sen}^2 \alpha)}{\rho_{sy}}$$

sendo  $\alpha$  ângulo entre a direção principal 1 e o eixo y (figura 4.5).

- 5º ) Com valores de  $\sigma_{sx}$ ,  $\sigma_{sy}$ ,  $\sigma_{1c}$  e  $\sigma_{2c}$  obtém-se as tensões nas armaduras em uma fissura  $\sigma_{sx,cr}$  e  $\sigma_{sy,cr}$  e a tensão cisalhante  $v_{ci}$ , através das equações (4.54) e (4.56).
- 6º ) Caso o valor absoluto de  $v_{ci}$  ultrapasse  $v_{ciMax}$ , dado pela equação (4.58), adota-se para  $v_{ci}$  este último valor e, em seguida, recalcula-se  $\sigma_{1c}$ ,  $\sigma_{sx,cr}$  e  $\sigma_{sy,cr}$  utilizando-se novamente as equações (4.54) e (4.56);
- 7º ) Como  $\tau_c = \tau_{xy}$  pela equação (4.37), resulta, usando o círculo de Mohr para as tensões, a seguinte expressão:

$$\tau_c = \tau_{xy} = \frac{\sigma_{2c} + \sigma_{1c}}{2} \operatorname{sen} 2\alpha \quad (4.65)$$

Através dos valores da tensão  $\tau_{xy}$  e das correspondentes distorções  $\gamma_{xy}$ , determina-se a curva tensão - deformação não linear do painel. A figura 4.11 ilustra um exemplo de tal curva.

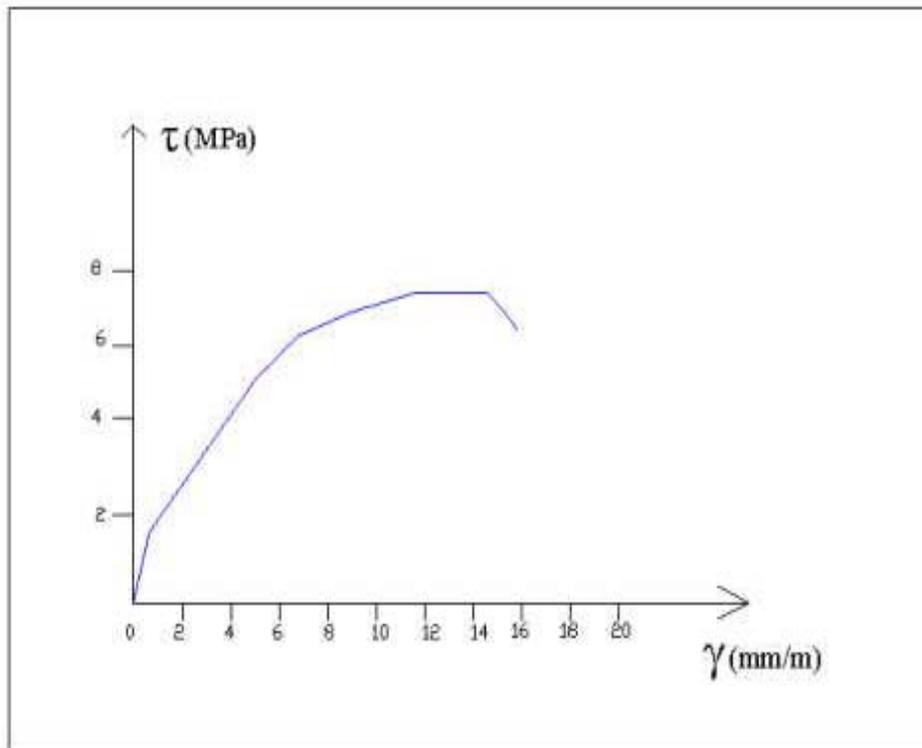


Figura 4.10 - Curva tensão - deformação do painel