

DANIEL JATOBÁ DE HOLANDA CAVALCANTI

***ANÁLISE DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA ATRAVÉS DO
EMPREGO CONJUNTO DOS MÉTODOS DOS ELEMENTOS
DE CONTORNO E ELEMENTOS FINITOS***

ORIENTADOR: Prof. Dr. João Carlos Cordeiro Barbirato

CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. Francisco Patrick Araujo Almeida

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC

Centro de Tecnologia – CTEC

Universidade Federal de Alagoas – UFAL

Maceió/AL, Junho de 2006.

DANIEL JATOBÁ DE HOLANDA CAVALCANTI

***ANÁLISE DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA ATRAVÉS DO
EMPREGO CONJUNTO DOS MÉTODOS DOS ELEMENTOS
DE CONTORNO E ELEMENTOS FINITOS***

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC da Universidade Federal de Alagoas – UFAL, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

ORIENTADOR: Prof. Dr. João Carlos Cordeiro Barbirato

CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. Francisco Patrick Araujo Almeida

Maceió/AL, Junho de 2006.

Dedico este trabalho aos meus pais Alexandre e Eliana que iluminados pelo Espírito Santo me deram todo o apoio e estímulo necessário para a sua conclusão.

AGRADECIMENTOS

Ao professor e amigo Dr. João Carlos Cordeiro Barbirato, pela orientação, serenidade e equilíbrio durante a preparação deste trabalho.

Ao professor e amigo Dr. Francisco Patrick Araujo Almeida, pela orientação e dedicação.

Aos meus irmãos Diogo Jatobá e Livia Jatobá pelo apoio e estímulo dispensados durante a preparação deste trabalho.

Aos amigos do PPGEC/UFAL, em especial a Antônio Carlos, Edvaldo Lisboa, Alexandre Machado, Edson Pessoa, Fábio Martins, João Gilberto, Luciana Correia e Rodrigo Mero pela convivência agradável, apoio e amizade.

À Renata, pela paciência durante este período de muita luta e dedicação.

Ao professor Dr. Severino Pereira Cavalcante Marques, pela sua competência e compreensão no desenvolvimento de suas atividades.

A todo corpo docente do Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil - PPGEC da Universidade Federal de Alagoas pelos ensinamentos transmitidos ao longo do curso de Mestrado.

A DEUS que em todos os momentos, de alegrias e tristezas, sempre está ao lado do ser humano buscando ajudá-lo e incentivá-lo a superar todas as dificuldades e problemas, iluminando-o da melhor forma possível.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, pelo financiamento da pesquisa.

RESUMO

CAVALCANTI, D.J.H. (2006). *Análise da interação solo-estrutura através do emprego conjunto dos Métodos dos Elementos de Contorno (MEC) e Elementos Finitos (MEF)*. 137p. Dissertação (mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas. Maceió. 2006.

Neste trabalho, propõe-se a análise do comportamento mecânico da interação solo-estrutura a partir do desenvolvimento de um código computacional utilizando-se uma formulação estática conjunta do Método dos Elementos de Contorno (MEC) e do Método dos Elementos Finitos (MEF) para o cálculo de deslocamentos e tensões em estruturas em contato com o meio semi-infinito.

Assim sendo, pretende-se modelar a estrutura a partir de elementos finitos de placa DKT (*discrete Kirchhoff triangle*) e utilizar o conceito da formulação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para modelar o solo, considerando-o como um espaço semi-infinito e/ou infinito e utilizando a solução fundamental de Kelvin. O acoplamento entre os meios é feito aplicando-se a técnica de sub-regiões.

A partir do desenvolvimento de um código computacional são processados alguns exemplos de engenharia tais como: análise da interação solo-estrutura em fundações de placa superficiais e enterradas e outras estruturas de engenharia, estudo do comportamento de um espaço semi-infinito a partir da aplicação de um carregamento distribuído e carga concentrada, análise de corpos submetidos à flexão e à tração, entre outras aplicações.

Palavras-chave: Interação Solo-Estrutura; Método dos Elementos de Contorno; Método dos Elementos Finitos; Acoplamento MEC/MEF.

ABSTRACT

CAVALCANTI, D.J.H. (2006). *Soil-structure interaction analysis by the coupling of Boundary Element Method (BEM) and Finite Element Method (FEM)*. 137p. M.Sc. Thesis – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas. Maceió. 2006.

In this work, it is proposed a mechanical behavior analysis of the soil-structure interaction from the development of a computational code using a coupling static formulation of Boundary Element Method (BEM) and Finite Element Method (FEM) for the displacements and stress calculation in structures in contact to the half space.

Thus, it is intended to model the structure using the bending plate finite element DKT (discrete Kirchhoff triangle) and applying the concepts of the Boundary Element Method (BEM) formulation to model the soil, considered as a half-infinite and/or infinite space and using Kelvin's fundamental solution. The coupling between the media is done using the sub-regions technique.

From the computational code development some practical examples of engineering are implemented, such as: soil-structure interaction analysis in superficial and buried plate foundations and others engineering structures, study on the behavior of a half-infinite space from the application of a distributed and concentrated load, analysis of bodies submitted to bend and traction, among others applications.

Keywords: Soil-Structure Interaction; Boundary Element Method; Finite Element Method; BEM/FEM Coupling.

SUMÁRIO

Lista de Símbolos	i
Lista de Figuras	iv
Lista de Tabelas	ix
1 – Considerações Iniciais	1
1.1 – Introdução.	1
1.2 – Estado da Arte	4
2 – Fundamentos Matemáticos	10
2.1 – Notação Indicial	10
2.2 – Delta de Krönecker	11
2.3 – Delta de Dirac	12
2.4 – Teorema da Reciprocidade de Betti	14
2.5 – Teoremas de Green	15
3 – Formulação do Método dos Elementos de Contorno	18
3.1 – Introdução	18
3.2 – Equações Básicas da Elastostática Linear	18
3.3 – Solução Fundamental	22
3.3.1 – Solução Fundamental de Kelvin	25
3.4 – Equações Integrais de Contorno	27
3.4.1 – Equação Integral para Pontos do Domínio	27
3.4.2 – Equação Integral para Pontos do Contorno	28
3.5 – Método dos Elementos de Contorno	31
3.5.1 – Discretizações	31
3.5.2 – Elementos de Contorno	35
3.5.2.1 – Elemento de Interpolação Linear	36
3.5.3 – Integrações Numéricas	39
3.5.3.1 – Integração Singular ou Semi- Analítica	40
3.5.3.2 – Integração Numérica	46

3.5.4 – Deslocamentos e Tensões em Pontos do Domínio	47
3.5.5 – Tensões em Pontos do Contorno	48
3.6 – Exemplos	52
3.6.1 – Exemplo 3.1	52
3.6.2 – Exemplo 3.2	58
3.6.3 – Exemplo 3.3	62
4 – Formulação do Elemento Finito DKT	69
4.1 – Introdução	69
4.2 – Estudo da Teoria de Placas e Definição do Elemento DKT	70
4.2.1 – Considerações Iniciais	70
4.2.2 – Teoria de Placas Considerando Pequenos Deslocamentos	72
4.2.3 – Matriz de Rigidez do Elemento DKT	75
4.2.4 – Vetor de Forças Nodais Equivalentes do Elemento DKT	80
4.2.5 – Definição dos Esforços Internos no Elemento	81
4.3 – Exemplos	81
4.3.1 – Exemplo 4.1	81
5 – O Acoplamento Entre o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Método dos Elementos Finitos (MEF)	88
5.1 – Introdução	88
5.2 – Representação Algébrica do MEC e do MEF	89
5.3 – Aproximação para o Acoplamento entre o MEC e o MEF	89
6 – Implementações Computacionais	96
6.1 – Introdução	96
6.2 – Algoritmo do MEC a partir da Formulação Elastostática	97
6.3 – Algoritmo do MEF a partir do Elemento DKT	100
6.4 – Algoritmo do Acoplamento entre os Métodos	102
7 – Aplicações	105
7.1 – Exemplo 7.1	105
7.2 – Exemplo 7.2	113
7.3 – Exemplo 7.3	118
7.4 – Considerações sobre os resultados	122
8 – Considerações finais	125
9 – Referências	127

Anexo A	134
Anexo B	136

LISTA DE SÍMBOLOS

u_i	–	Componentes do vetor de deslocamentos.
p_i	–	Componentes do vetor de forças de superfície.
b_i	–	Componentes do vetor de forças volumétricas.
s_{ij}	–	Componentes do tensor de tensões.
e_{ij}	–	Componentes do tensor de deformações.
δ_{ij}	–	Delta de Krönecker.
$\delta(x-d)$	–	Distribuição Delta de Dirac
Ω	–	Domínio de um corpo qualquer em estado de equilíbrio.
Γ	–	Contorno de um corpo qualquer em estado de equilíbrio.
∇	–	Operador gradiente.
∇^2	–	Operador Laplaciano.
l e m	–	Constantes elásticas de Lamé.
E	–	Módulo de elasticidade longitudinal.
ν	–	Coeficiente de Poisson.
G	–	Módulo de elasticidade transversal ou módulo de elasticidade ao cisalhamento.
s	–	Ponto fonte.
q	–	Ponto campo.
$u_{ij}^*(s,q)$	–	Componentes de deslocamentos para o problema fundamental de Kelvin (3D).
$e_{ijk}^*(s,q)$	–	Tensor de deformações para o problema fundamental de Kelvin (3D).
$s_{ijk}^*(s,q)$	–	Tensor de tensões para o problema fundamental de Kelvin (3D).
$p_{ij}^*(s,q)$	–	Forças de superfície para o problema de Kelvin tridimensional.
r	–	Distância entre o ponto fonte s e o ponto de campo q .
S_{ijk}^*	–	Tensor de 3ª ordem definido através da derivação dos tensores de deslocamentos e forças de superfície do problema fundamental.

D_{ijk}^*	–	Tensor de 3ª ordem definido através da derivação dos tensores de deslocamentos e forças de superfície do problema fundamental.
ε	–	Raio da superfície esférica de domínio Ω_ε
c_{ij}	–	Matriz dos coeficientes em função da localização do ponto a ser estudado (fora do domínio do sólido, no contorno do sólido ou interno ao domínio do mesmo).
r	–	Raio da esfera que faz analogia à região que representa um espaço semi-infinito ou infinito (espaço de Kelvin), situação do problema a ser estudado.
\vec{n}	–	Vetor normal ao contorno da superfície do elemento.
f	–	Funções interpoladoras
U^j e P^j	–	Deslocamentos e forças de superfície aproximadas por seus valores nodais para cada elemento j a ser discretizado.
B^j	–	Valores nodais das forças volumétricas aplicadas nos nós funcionais.
p^*	–	Matriz com as forças de superfície $p_{ij}^*(s,q)$.
u^*	–	Matriz com os deslocamentos $u_{ij}^*(s,q)$.
X^j	–	Coordenadas cartesianas dos pontos nodais da célula tridimensional para discretização do domínio.
X_c^j	–	Coordenadas cartesianas dos pontos geométricos da célula tridimensional para discretização do domínio.
U	–	Vetor com os valores nodais dos deslocamentos.
P	–	Vetor com os valores nodais das forças de superfície.
H	–	Matriz definida pelo somatório das integrais que formam um produto com o vetor dos valores nodais de deslocamentos.
G	–	Matriz definida pelo somatório da integral que forma um produto com o vetor dos valores nodais das forças de superfície.
A	–	Matriz cheia e não simétrica que contém os elementos das matrizes H e G após aplicação das condições de contorno.
X	–	Vetor misto que contém as incógnitas (deslocamentos e forças de superfície).

- F** – Vetor obtido da multiplicação da matriz **G** modificada pelo vetor de valores prescritos.
- $\bar{\mathbf{x}}_i$ – Coordenadas de área para o elemento triangular linear descontínuo.
- \mathbf{n}_i e \mathbf{n}_j – Vetores normais nas direções cartesianas i e j .
- X_i – Eixos cartesianos.
- \mathbf{h}_i – Co-senos diretores da normal em relação aos eixos cartesianos.
- m_{ij} – Co-senos diretores no ponto em análise em relação ao eixo x_i .
- $|J|$ – Jacobiano de transformação de coordenadas.
- w_k – Peso de Gauss no ponto k .
- N_{PG} – Número de pontos de Gauss a ser utilizado no elemento.
- \mathbf{b}_x e \mathbf{b}_y – Rotações da normal ao plano médio indeformado do elemento DKT.
- w, \mathbf{q}_x e \mathbf{q}_y – Graus de liberdade do elemento DKT.
- $\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_y$ e \mathbf{s}_z – Tensões normais atuantes no elemento finito DKT.
- τ_{xy}, τ_{xz} e τ_{yz} – Tensões de cisalhamento atuantes no elemento finito DKT.
- M_x e M_y – Momentos fletores atuantes em torno dos eixos x e y .
- M_{xy} – Momento de torção.
- Q_x e Q_y – Esforços cortantes segundo os eixos x e y .
- \mathbf{e}_b – Matriz com o campo de deformações.
- \mathbf{k} – Vetor de curvaturas
- D – Rigidez a flexão da placa.
- D_k – Matriz que relaciona esforços solicitantes e curvaturas.
- U_K – Energia interna de deformação.
- \mathbf{x} e \mathbf{h} – Coordenadas adimensionais de área para o elemento DKT.
- B – Matriz de transformação deformação x deslocamento.
- K_{DKT} – Matriz de rigidez do elemento DKT
- E_n – Erro residual.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.3.1 – Pulso retangular unitário (dois exemplos)	13
Figura 2.4.1 – Corpo em equilíbrio: Ω (Domínio) e Γ (Contorno)	14
Figura 2.4.2 – Definição de Ω^* e Γ^* do corpo virtual (Fundamental)	14
Figura 3.2.1 – Sólido tridimensional de domínio Ω e contorno Γ	18
Figura 3.2.2 – Elemento infinitesimal de volume	19
Figura 3.2.3 – Elemento infinitesimal de superfície (Tetraedro de Cauchy)	20
Figura 3.2.4 – Valores prescritos de contorno	22
Figura 3.3.1 – Definição do problema fundamental	23
Figura 3.3.2a – Definição geométrica do problema fundamental. (Fonte: BREBBIA & DOMINGUEZ, 1989)	23
Figura 3.3.2b – Componentes dos deslocamentos da solução fundamental da superfície	24
Figura 3.3.2c – Componentes de forças de superfície da solução fundamental da superfície	24
Figura 3.3.3 – Definição do vetor r para cálculo de suas derivadas	26
Figura 3.3.4 – Definição do problema fundamental de Kelvin	26
Figura 3.4.1 – Corte do contorno expandido no ponto suave	29
Figura 3.4.2 – Corte do contorno expandido no ponto S (não suave)	30
Figura 3.4.3 – Região infinita – espaço de Kelvin	31
(a) elementos de contorno constantes, (b) elementos de contorno lineares e (c) elementos de contorno quadráticos (Fonte: Brebbia & Dominguez, 1989)	32
Figura 3.5.2 – Tipos de elemento linear: (a) contínuo; (b) e (c) de transição; e (d) descontínuo	36

Figura 3.5.3 –	Elemento triangular linear descontínuo	37
Figura 3.5.4 –	Definição da integração singular	40
Figura 3.5.5 –	Representação do elemento unidimensional linear e integração no contorno fictício do elemento triangular (Fonte: Barbirato, 1999)	44
Figura 3.6.1 –	Viga engastada com carregamento transversal na extremidade livre.... Discretizações do contorno por elementos triangulares planos	52
Figura 3.6.2 –	descontínuos: (a) M40, 40 elementos, (b)M72, 72 elementos e (c)M176, 176 elementos	53
Figura 3.6.3 –	Representação gráfica da geometria da viga mostrando as discretizações utilizadas: M40, M72 e M176	54
Figura 3.6.4 –	Linha elástica da viga obtida pela teoria de vigas e pela discretização M40	56
Figura 3.6.5 –	Linha elástica da viga obtida pela teoria de vigas e pela discretização M72	56
Figura 3.6.6 –	Linha elástica da viga obtida pela teoria de vigas e pela discretização M176.....	57
Figura 3.6.7 –	Linha elástica da viga: comparativo de resultados	58
Figura 3.6.8 –	Definição do sólido e suas condições de contorno	58
Figura 3.6.9a –	Malhas de discretização: (a) e (b) M12 com 12 elementos e (c) e (d) M44 com 44 elementos	59
Figura 3.6.9b –	Malhas de discretização: (e) e (f) M76 com 76 elementos	60
Figura 3.6.10 –	Área retangular (solo) na superfície livre do semi-infinito, carregamento uniformemente distribuído	62
Figura 3.6.11a –	Discretizações utilizadas: (a) 16 elementos e (b) 64 elementos	63
Figura 3.6.11b –	Discretizações utilizadas: (c) 156 elementos	64
Figura 3.6.12 –	Deslocamentos em X_3 ao longo de X_1 (em cm) – comparação entre a sol. fund. de Kelvin utilizada nesse trabalho e as sol. fund. de Mindlin e Kelvin utilizadas em BARBIRATO (1999).....	65
Figura 3.6.13 –	Deslocamentos em X_3 ao longo de X_2 (em cm) – comparação entre a sol. fund. de Kelvin utilizada nesse trabalho e as sol. fund. de Mindlin e Kelvin utilizadas em BARBIRATO (1999).....	65

Figura 3.6.14 –	Visualização gráfica do meio semi-infinito – malha com 16 elementos.	66
Figura 3.6.15 –	Deslocamentos em X_3 ao longo de X_1 (em cm) – comparação entre a sol. fund. de Kelvin utilizada nesse trabalho e a sol. fund. de Mindlin utilizada em BARBIRATO (1999).....	66
Figura 3.6.16 –	Deslocamentos em X_3 ao longo de X_2 (em cm) – comparação entre a sol. fund. de Kelvin utilizada nesse trabalho e a sol. fund. de Mindlin utilizada em BARBIRATO (1999).....	67
Figura 3.6.17 –	Visualização gráfica do meio semi-infinito - malha com 64 elementos	67
Figura 4.1.1 –	Definição do elemento finito DKT	70
Figura 4.2.1 –	Tensões que agem em um elemento diferencial de uma placa.	71
Figura 4.2.2 –	Direções positivas de b_x e b_y	73
Figura 4.2.3 –	Coordenadas adimensionais de área x, h e r	76
Figura 4.2.4 –	Geometria do elemento finito DKT (Fonte: Batoz et al., 1980)	78
Figura 4.2.5 –	Carregamento uniformemente distribuído no elemento mostrando a transformação para carregamento nodal equivalente.....	81
Figura 4.3.1 –	Exemplo 4.1: discretização da placa utilizando as malhas M1, M2, M4 e M5.....	83
Figura 4.3.2 –	Exemplo 4.1: discretização da placa utilizando as malhas: M10 (lado da discretização dividida em 10 partes iguais e M20 (lado da discretização dividida em 20 partes iguais)	84
Figura 4.3.3 –	Comparação de resultados para diversos tipos de carregamento aplicado	85
Figura 4.3.4a –	Comparativo de resultados para o exemplo 4.1	86
Figura 4.3.4b –	Comparativo de resultados para o exemplo 4.1	87
Figura 5.3.1 –	Representação das sub-regiões (Ω_1 e Ω_2) modeladas por Elementos de Contorno e Elementos Finitos (Fonte: Brebbia & Dominguez, 1989)	90
Figura 5.3.2 –	Esquema de uma viga para utilização da técnica de sub-regiões: duas sub-regiões Ω_1 e Ω_2	91
Figura 5.3.3 –	Sub-região de domínio Ω_f discretizada pelo MEF e sub-região de domínio Ω_c discretizada pelo MEC, no acoplamento	94
Figura 6.2.1 –	Roteiro do algoritmo computacional para problemas estáticos	97

Figura 6.2.2a –	Leitura de dados para processamento do programa (Exemplo 3.3: Malha com 16 elementos)	98
Figura 6.2.2b –	Leitura de dados para processamento do programa (Exemplo 3.3: Malha com 16 elementos)	99
Figura 6.2.3a –	1ª parte do arquivo com a entrada de dados referente as coordenadas dos nós (linhas 7 a 19) e condições de contorno (linhas 20 a 30): Exemplo 4.1 – Malha M2 com 9 nós e 8 elementos	101
Figura 6.2.3b –	2ª parte do arquivo com a entrada de dados referente as propriedades do material (linhas 32 a 46) e conectividade dos elementos (linhas 48 a 60): Exemplo 4.1 – Malha M2 com 9 nós e 8 elementos	102
Figura 6.2.3c –	3ª parte do arquivo com a entrada de dados referente ao carregamento prescrito: carga concentrada e carregamento distribuído (linhas 62 a 83): Exemplo 4.1 – Malha M2 com 9 nós e 8 elementos	102
Figura 7.1.1 –	Exemplo 7.1: Discretização da interface placa-solo por 49 nós e 72 elementos	105
Figura 7.1.2 –	Exemplo 7.1: Discretização estendida com 109 nós e 160 elementos ..	106
Figura 7.1.3 –	Visualização gráfica dos valores da tabela 7.1 para a discretização estendida	107
Figura 7.1.4 –	Visualização gráfica dos valores da tabela 7.2 para discretização com 49 nós e 72 elementos	107
Figura 7.1.5 –	Resultados para a solução fundamental de Kelvin: comparativo entre as duas discretizações utilizadas	108
Figura 7.1.6 –	Comparativo de Resultados	109
Figura 7.1.7 –	Comportamento da placa h=20cm para a discretização estendida, (valores em mm)	110
Figura 7.1.8 –	Comportamento da placa h=20cm para a discretização estendida em escala cinemática, (valores em mm)	110
Figura 7.1.9 –	Comportamento da placa h=350cm para a discretização estendida, (valores em mm)	111
Figura 7.1.10 –	Comportamento da placa h=350cm para a discretização estendida em escala cinemática, (valores em mm)	111

Figura 7.2.1 –	Carga concentrada ‘P’ no centro da placa	113
Figura 7.2.2 –	Discretização estendida	114
Figura 7.2.3 –	Discretização da interface de contato placa-solo	114
Figura 7.2.4 –	Variação do deslocamento em função da espessura da placa	115
Figura 7.2.5 –	Comportamento da placa (h=20cm): Discretização estendida	115
Figura 7.2.6 –	Comportamento da placa (h=20cm): Discretização estendida	116
Figura 7.2.7 –	Comportamento da placa (h=250cm): Discretização estendida	117
Figura 7.2.8 –	Comportamento da placa (h=250cm): Discretização estendida	117
Figura 7.3.1 –	Carregamento distribuído parcialmente aplicado em 8 elementos da discretização.....	118
Figura 7.3.2 –	Comparativo de resultados: Elemento de Placa DKT	119
Figura 7.3.3 –	Carregamento distribuído parcialmente aplicado em 32 elementos da discretização	120
Figura 7.3.4 –	Comparativo de resultados: Elemento de Placa DKT	121
Figura 7.3.5 –	Comparativo de resultados para a discretização estendida da análise sujeita a diversos tipos de carregamento	122
Figura 7.3.6 –	Comparativo de resultados para a discretização da interface placa- solo da análise sujeita a diversos tipos de carregamento	123

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1	–	Linha elástica da viga analisada (valores em cm): Discretização M40	55
Tabela 3.2	–	Linha elástica da viga analisada (valores em cm): Discretização M72	56
Tabela 3.3	–	Linha elástica da viga analisada (valores em cm): Discretização M176	57
Tabela 3.4a	–	Valores do deslocamento da viga analisada à tração para a discretização M12, (valores em cm)	60
Tabela 3.4b	–	Valores do deslocamento da viga analisada à tração para as discretizações M40 e M76, (valores em cm)	61
Tabela 3.5	–	Deslocamentos em X_3 ao longo de X_1 (em cm), representados graficamente na figura 3.6.12	65
Tabela 3.6	–	Deslocamentos em X_3 ao longo de X_2 (em cm), representados graficamente na figura 3.6.13	65
Tabela 3.7	–	Deslocamentos em X_3 ao longo de X_1 (em cm), representados graficamente na figura 3.6.15	66
Tabela 3.8	–	Deslocamentos em X_3 ao longo de X_2 (em cm), representados graficamente na figura 3.6.16	67
Tabela 4.1	–	Deslocamento transversal (U) para placa quadrada	84
Tabela 7.1	–	Valores de deslocamento no centro da placa em função da espessura para a discretização estendida	107
Tabela 7.2	–	Valores de deslocamento no centro da placa em função da espessura para a discretização com 49 nós e 72 elementos	107
Tabela 7.3	–	Valores do deslocamento da placa $h=20\text{cm}$ (em mm) para a discretização estendida	110
Tabela 7.4	–	Valores do deslocamento da placa $h=350\text{cm}$ (em mm) para a discretização estendida	111
Tabela 7.5	–	Discretização estendida	113
Tabela 7.6	–	Discretização da interface de contato placa-solo	114

		x
Tabela 7.7	– Valores do deslocamento da placa ($h=20\text{cm}$) (em mm):	116
	– Discretização estendida	
Tabela 7.8	– Valores do deslocamento da placa ($h=250\text{cm}$) (em mm):	117
	– Discretização estendida	
Tabela 7.9	– Resultados para as duas modelagens: comparação entre o carregamento distribuído intermediário q_8 e a carga concentrada equivalente	118
	– Resultados para a duas modelagens: comparação entre o carregamento distribuído intermediário q_{32} e a carga concentrada equivalente	
Tabela 7.10	– Resultados para a duas modelagens: comparação entre o carregamento distribuído intermediário q_{32} e a carga concentrada equivalente	121
Tabela A.1	– Valores das coordenadas naturais e dos pesos de Gauss	135

1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

1.1 - INTRODUÇÃO:

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) vem se destacando entre os pesquisadores de diversos centros de estudo como um importante método de simulação numérica, onde a solução dos problemas físicos é calculada em pontos discretos (nós) que são definidos sobre o contorno para os casos em que a solução fundamental é conhecida. Nesse método as equações diferenciais que regem o domínio são transformadas em equações integrais aplicáveis à superfície ou contorno do mesmo, reduzindo assim de uma unidade as dimensões de problemas lineares analisados e facilitando a sua aplicação em extensões infinitas ou semi-infinitas, já que satisfazem a condição de radiação e regiões com alta concentração de tensões. Por outro lado, a matriz do sistema é geralmente cheia e não-simétrica.

Para obter-se a equação integral de contorno que possibilite a análise do problema, o MEC necessita de uma solução fundamental. Esta representa a resposta em um ponto do domínio infinito devido à aplicação de força unitária em outro ponto do mesmo domínio. “A utilização de uma solução fundamental, que genericamente pode ser classificada como uma desvantagem, na verdade proporciona precisão ao método” (BARBIRATO, 1999).

Em problemas de interação solo-estrutura o MEC têm-se mostrado eficiente e confiável. O solo, considerado neste trabalho como um meio elástico e estático passa a ser discretizado pelo MEC já que se trata de um domínio estendido ao espaço infinito (ou semi-infinito). Esse método possui modelagem própria para tal domínio, uma vez que a solução fundamental utilizada no método já contempla a influência do infinito (ou semi-infinito). O Método dos Elementos Finitos (MEF), por ser uma técnica de domínio, pode trazer algumas implicações em análises que envolvam domínios infinitos, pois estes devem ser interrompidos para que se gere uma discretização finita, ocasionando a formação de um contorno fictício, podendo causar erros na implementação numérica.

O MEF teve um crescimento extremamente rápido com os avanços tecnológicos no campo da computação atingindo praticamente todos os problemas de engenharia. O MEF tem a característica de aproximar a solução da equação diferencial que rege o problema físico, utilizando valores do domínio de validade do problema, ou seja, valores das variáveis básicas do problema associados a pontos internos e de contorno do espaço em análise. Esse método é caracterizado por dividir fisicamente o contínuo em uma série de elementos, equacionando-os como sub-regiões contínuas de forma individual e juntando-os para a solução do problema como um todo. A

formulação do MEF é, na maioria das vezes, baseada na técnica dos resíduos ponderados que permite uma generalização maior do método. Porém seu equacionamento pode ainda ser apresentado a partir dos princípios variacionais através da minimização de um funcional (COOK et al., 1989 e SHAMES & DYM, 1985).

Para a discretização da estrutura em contato com o solo pode-se utilizar a formulação do elemento finito DKT (*discrete Kirchhoff triangle*) que utiliza discretamente a teoria das placas de Kirchhoff, também conhecida como teoria de pequenos deslocamentos de placas delgadas, onde as deformações por esforço cortante e a energia de deformação causada por esse esforço são desprezadas (BATHE, 1982 e COOK et al., 1989).

O estudo com problemas de interação solo-estrutura utilizando o emprego conjunto do MEC e MEF a ser desenvolvido neste trabalho visa à obtenção de resultados mais precisos (tensões e deslocamentos), como também aproveitar as vantagens e características distintas de cada método, já que diversas são as simplificações utilizadas até hoje para se fazer tal tipo de análise. Os programas computacionais com os quais se poderiam tentar tais simulações estão elaborados em elementos finitos, o que limita muito o seu emprego devido ao volume de informações que se precisa gerar e aos problemas relacionados à simulação de meios infinitos ou semi-infinitos. O acoplamento dos dois métodos é bastante utilizado justamente por levar em conta as vantagens e desvantagens que existem entre eles e objetivar o estudo mais complexo de casos de engenharia onde existem, por exemplo, materiais com propriedades complexas e não-homogêneas, altas concentrações de tensões e potenciais (BREBBIA & DOMINGUEZ, 1989).

Sendo assim, a abordagem da interação solo-estrutura através do acoplamento MEC e MEF, objeto deste trabalho, é de grande interesse para solucionar muitos problemas e está presente nas discussões sobre o desenvolvimento tecnológico atual.

O presente trabalho apresenta-se, portanto, no contexto da análise da interação solo-estrutura através do emprego conjunto do Método dos Elementos de Contorno (MEC) e Método dos Elementos Finitos (MEF). O objetivo principal é o estudo da interação solo-estrutura para problemas de engenharia utilizando-se uma formulação conjunta do MEC e do MEF para analisar o comportamento mecânico dos meios envolvidos.

A partir do objetivo principal surgem os objetivos específicos, que subsidiam o primeiro com suas formulações. São eles: o desenvolvimento de um código computacional para o estudo de exemplos de engenharia; o desenvolvimento de estudos para o acoplamento de dois métodos numéricos MEC e MEF, onde o primeiro utilizará a formulação de Kelvin para o meio infinito (solo) e o segundo utilizará o elemento de placa DKT (*discrete Kirchhoff triangle*) para discretizar

a estrutura da superfície; o estudo sobre computação ligada à análise estrutural – desenvolvimento de *software* a partir da plataforma Matlab; a contribuição para a formação de recursos humanos especializados para o desenvolvimento regional.

O trabalho final apresentado como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em estruturas contempla as considerações iniciais do presente capítulo, bem como os demais capítulos que fazem parte do escopo deste trabalho, organizados da seguinte forma:

No capítulo 2 são apresentados e definidos os fundamentos matemáticos necessários e utilizados para o desenvolvimento da formulação do Método dos Elementos de Contorno.

No capítulo 3 é desenvolvida a formulação tridimensional elastostática do Método dos Elementos de Contorno (MEC), utilizando os fundamentos matemáticos, representações integrais, soluções fundamentais, bem como as correspondentes equações algébricas para a discretização do solo em elementos de contorno. Neste capítulo também são apresentados e analisados exemplos de estruturas de engenharia discretizadas através de elementos de contorno.

Em seguida, no capítulo 4, é apresentada a formulação do MEF utilizando-se o elemento triangular de placa DKT para a discretização da estrutura. Neste capítulo é realizado um estudo sobre placas: conceitos, hipóteses e equações para a apresentação da matriz de rigidez do elemento finito DKT, tensões, deslocamentos, bem como do seu vetor de cargas nodais equivalentes para carregamento uniformemente distribuído. São apresentados ainda exemplos de estruturas de engenharia estudadas através do MEF.

O acoplamento do MEC e MEF é o objeto de estudo do capítulo 5. São definidas as soluções para a compatibilização das equações governantes dos dois métodos, levando-se em consideração que após o acoplamento dos dois métodos, a estrutura computacional de dados (tensões e deformações) será disposta em MEC e MEF. Serão descritas as duas metodologias para o acoplamento dos métodos para problemas de análise da interação solo-estrutura, bem como apresentadas e discutidas algumas dificuldades do processo.

No capítulo 6 são apresentadas as implementações computacionais utilizadas, apresentando as rotinas de implementação mais importantes. O sétimo capítulo é referente aos exemplos finais.

Nas conclusões gerais são apresentadas algumas considerações finais sobre os assuntos abordados. Para finalizar são apresentadas as referências utilizadas em todo o desenvolvimento do trabalho, bem como os anexos com o desenvolvimento e apresentação de equações importantes para o completo entendimento dos diversos assuntos abordados.

1.2 - ESTADO DA ARTE:

Na última metade do século passado com o desenvolvimento da tecnologia da computação, diversas técnicas numéricas de resolução de equações ou de sistemas de equações diferenciais deram origem a eficientes ferramentas de cálculo possibilitando a análise dos mais variados problemas de engenharia através dos métodos numéricos.

As técnicas de resolução de equações integrais de contorno surgem, neste contexto, com procedimentos numéricos alternativos promissores para a resolução dos diversos problemas físicos usuais das engenharias. Mais particularmente, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) vêm ganhando espaço entre os pesquisadores dos mais conceituados centros de pesquisa. O método teve seu início e evolução baseados nos esquemas de resolução de equações integrais, até então vistos como um tipo de método analítico, embora aproximações das variáveis sobre o contorno fossem usualmente adotadas.

A idéia básica do MEC consiste em transformar as equações diferenciais que regem o domínio de um determinado problema em equações integrais aplicáveis à superfície ou contorno do mesmo. Em seguida, é possível discretizar o contorno da região considerada, dividindo-o em elementos – daí o nome elementos de contorno – como também relacionar as variáveis em pontos do contorno através da solução fundamental.

Segundo ELLIOT¹ apud VENTURINI (1988), foi Abel, em 1823, quem primeiro deduziu uma equação integral para o tratamento de um problema físico, o pêndulo isócrono.

A obtenção matemática das equações integrais para problemas de elastostática surgiu no século XIX, notadamente no trabalho de SOMIGLIANA² (1886) apud BARBIRATO (1999) denominada como Identidade Somigliana. Diversos trabalhos deram continuidade a esse contexto, utilizando equações integrais, principalmente no campo da mecânica dos fluidos e potencial; pode-se relacionar: FREDHOLM (1903), MUSKHELISHVILI (1953), VOLTERRA (1956) e MIKHLIN³ (1957) apud BARBIRATO (1999).

¹ ANDERSEN, R. S. et al. (1980). *The application and numerical solution of integral equations*. Alphen aan den Rijn, The Netherlands, Sijthoff & Noordhoff.

² SOMIGLIANA, C. (1886). Sopra l'equilibrio di um corpo elástico isotropo. *II Nuovo cimento*. Ser. 3, v. 17-20.

³ MIKHLIN, S.G. (1957). *Integral equations*. London. Pergamon Press (International series of monographs in pure and applied mathematics).

A formulação do método em uma primeira fase de sua história era mostrada a partir de aproximações de equações integrais obtidas com o emprego de algum princípio clássico, como o teorema de Betti. A utilização de equações integrais no contorno tornou-se uma alternativa para também representar aproximadamente as equações governantes de problemas de valor de contorno.

O trabalho de RIZZO (1967) foi o primeiro em que o tratamento das equações integrais toma uma forma de técnica numérica similar à dos demais métodos – Método das Diferenças Finitas e Método dos Elementos Finitos. O método proposto por Rizzo foi chamado de método das equações integrais de contorno, já que era uma técnica alternativa das equações integrais em problemas de elasticidade bi-dimensional, que usou elementos retilíneos para discretizar o contorno onde as funções (deslocamentos e forças de superfície) assumiam valores constantes em cada elemento. Segundo BECKER (1992), este trabalho é também o primeiro a propor a abordagem direta para o tratamento das equações integrais, onde as incógnitas que aparecem nos integrandos são as variáveis físicas do problema.

Visando um maior entendimento e aperfeiçoamento do método proposto e uma maior divulgação do Método das Equações Integrais de Contorno, diversos trabalhos foram publicados após o trabalho de RIZZO (1967). Pode-se citar os trabalhos de CRUSE (1969; 1973) que mostraram o uso do método em problemas gerais de elasticidade tri-dimensional, RIZZO & SHIPY (1968) onde foi sugerido o uso de sub-regiões para o tratamento de domínios não-homogêneos, além de CRUSE & RIZZO (1968) e CRUSE & VAN BUREN (1971) que fizeram uma análise para problemas não-lineares.

O grande avanço nos chamados métodos de contorno tem sua origem na tese de LACHAT (1975), onde mostra-se bem mais abrangente que os trabalhos citados anteriormente. Neste trabalho foi dada uma generalidade maior ao método, introduzindo em sua formulação as representações paramétricas para a representação dos elementos de superfície e das funções aproximadoras de deslocamentos e de forças de superfície. A técnica das sub-regiões aparece nesse trabalho, não só para modelar corpos não homogêneos, mas como um recurso para facilitar a resolução do sistema final de equações.

Após a tese de Lachat, as técnicas de resolução das equações integrais começaram a ser interpretadas como um método numérico. Essa nova interpretação fica demonstrada no trabalho de BREBBIA (1978) que formula as equações integrais a partir do método dos resíduos ponderados, com uma conveniente escolha da função ponderadora. Esse novo enfoque dado à técnica permite uma generalização ainda maior ao método.

Os problemas práticos de engenharia passaram a ser equacionados agora de uma forma bastante consistente, utilizando-se para isso as respectivas formulações em termos de resíduos ponderados e funções de forma tão utilizadas no Método dos Elementos Finitos. Brebbia foi o primeiro a denominar a técnica de “Método dos Elementos de Contorno”, em 1978.

A partir de então, várias formulações foram propostas para análise dos mais variados problemas de engenharia, podendo-se destacar aqui os relativos a não-linearidade física, plasticidade, viscoelasticidade, viscoplasticidade, não-linearidade geométrica, mecânica da fratura, contato, mecânica das rochas e dos solos, adensamento, percolação e efeitos dinâmicos, vibrações, propagação de ondas, radiação, acústica, placas, cascas, concentração de tensão, interações solo-estrutura, fluido-estrutura e acústica-estrutura, e outros.

No campo das engenharias, uma solução apropriada ao estudo de problemas relativos a escavações, interação solo-estrutura e outros, foi publicada logo após o surgimento do Método dos Elementos de Contorno, de autoria de NAKAGUMA (1979) que utilizou a solução fundamental de Mindlin na formulação do método para análise de tensões em sólidos tridimensionais. NAKAGUMA (1979), SÁ & TELLES (1986) e BARBIRATO (1991) utilizaram formulações do MEC para análise tridimensional com as soluções fundamentais de Kelvin e Mindlin.

A aplicação do MEC para o estudo de problemas tridimensionais tem como precursores os trabalhos de CRUSE (1969), LCHAT (1975) e NAKAGUMA (1979), já citados. Este tema também é abordado em CUROTTO (1981), SILVA (1989), BARBIRATO (1991), CODA (1993), entre outros.

KOCAK & MENGI (2000) apresenta um estudo de um modelo simples para analisar a interação solo e estruturas tridimensionais. Neste trabalho, a região do solo, analisada em elementos de contorno, foi dividida em camadas e cada camada representada por um modelo paramétrico. Os parâmetros deste modelo foram determinados em termos da espessura e das propriedades elásticas do subleito.

Além da possibilidade de combinarem-se regiões com quaisquer propriedades mecânicas, lineares ou não, os problemas práticos exigem também a combinação entre partes estruturais de diferentes naturezas, em muitos casos tratados por métodos numéricos diferentes.

Alguns algoritmos numéricos que combinam o Método dos Elementos de Contorno com outras técnicas, já foram propostos por diversos autores.

Os trabalhos de ZIENKIEWICZ et al. (1977), SHAW & FALBY (1977) e OSIAS et al. (1977)⁴ apud VENTURINI (1988) foram os primeiros a tratar sólidos onde uma parte é analisada via Elementos de Contorno e o restante do domínio é discretizado e analisado pelo Método dos Elementos Finitos.

A solução encontrada na combinação de ambas as técnicas numéricas é muito relevante em diversos problemas práticos, tais como: domínios infinitos ou regiões de altas concentrações de tensões são melhores representados por soluções com integrais no contorno e domínios com comportamento não linear ou anisotrópico por soluções com integrais no domínio.

Um dos trabalhos a estudar as combinações de diferentes naturezas foi desenvolvido por BANERJEE & BUTTERFIELD (1977) que estudou a interação solo-estrutura para analisar o comportamento de grupos de estacas. WOOD & CREED (1982) também utilizaram combinações do MEC e MEF para analisar interação solo-estrutura. Nesse caso particular, os autores mostraram resultados obtidos na análise de uma plataforma *off-shore* apoiada em fundação composta por estacas.

Atualmente existem diversos trabalhos na literatura que estudam a interação solo-estrutura através do acoplamento entre o MEF e o MEC demonstrando desta forma a importância e o crescimento desta ferramenta para o estudo dos problemas de engenharia.

KOMATSU (1995) desenvolveu um estudo de problemas de escavação através da combinação Elementos de Contorno e Elementos Finitos. Foi apresentada uma combinação do MEF com o MEC no acoplamento de uma estrutura reticulada em um domínio bidimensional. Para o caso em análise, os elementos uniaxiais são tratados através do MEF, enquanto que o MEC é utilizado na modelagem do meio contínuo que pode ser homogêneo ou não-homogêneo.

FERRO (1999) em seu trabalho, utilizou a combinação do MEC com o MEF para a análise da interação entre estacas e o solo, considerado como um meio infinito tridimensional e homogêneo. O meio contínuo tridimensional de domínio infinito é modelado pelo MEC, enquanto as estacas consideradas como elementos reticulares são tratadas pelo MEF. Finalmente, uma formulação para a análise do comportamento não-linear do solo na interface com a estaca é desenvolvida, tornando o modelo mais abrangente.

MESQUITA & CODA (1999) formularam um novo estudo sobre escavações reforçadas através da combinação entre o MEC e o MEF.

⁴ OSIAS, J.R.; WILSON, R.B. & SEITELMAN, L.A. (1977). *Combined boundary integral equation finite element analysis of solids*. In: Symposium on innovative numerical analysis in applied engineering science, 1st, Versailles, CETIM.

No artigo publicado por VON ESTORFF & FIRUZIAAN (2000) é desenvolvida uma formulação acoplada do MEF e MEC para a investigação da interação dinâmica solo estrutura incluindo não linearidades, analisando uma resposta inelástica transiente de estruturas acopladas com um meio semi-infinito. A estrutura e o solo circunvizinho no campo próximo são modelados com Elementos Finitos. Neste trabalho verifica-se o uso de materiais elastoplásticos e não-homogêneos e com efeitos de endurecimento. A radiação na região do solo em meio elástico é discretizada através de Elementos de Contorno.

A análise da interação solo-estrutura através do acoplamento da equação de Somigliana para discretizar o meio elástico e o sistema que vem dos elementos finitos para discretizar a estrutura é desenvolvida no trabalho de GUARRACINO et al. (1992). Neste trabalho, algumas características particulares do MEC aplicado para o meio elástico são analisadas, estas são derivadas da escolha de uma solução fundamental. É possível encontrar uma matriz definida positiva e simétrica que permitem com facilidade o acoplamento simples do MEF e MEC.

Como já foi dito no tópico anterior, a discretização da estrutura em contato com o solo será desenvolvida através do MEF pela formulação do elemento finito DKT (*discrete Kirchhoff triangle*) que faz parte do grupo de elementos discretos de Kirchhoff e é conhecido como um elemento finito de placas à flexão, COOK et al. (1989).

As estruturas a serem estudadas são discretizadas como placas finas submetidas a carregamentos ortogonais ao plano médio, ou superfície média. A teoria de Kirchhoff é utilizada onde seções planas permanecem planas após a deformação da estrutura, ou seja, qualquer reta perpendicular à superfície média antes do carregamento, permanece perpendicular à superfície média deformada após o carregamento. Toda a formulação de discretização da estrutura através do MEF terá como fundamento básico os trabalhos de BATHE (1982), COOK et al. (1989), ZIENKIEWICZ & TAYLOR (1989) e RAO (1999).

BATOZ et al. (1980) faz uma avaliação dos elementos triangulares para discretização de placas à flexão com o objetivo de identificar o elemento finito mais eficiente para a análise de placas finas. Baseado numa revisão dos elementos disponíveis na literatura com 9 graus de liberdade foi desenvolvido um estudo com os elementos DKT (*discrete Kirchhoff triangle*), HSM (*hybrid stress model*) e SRI (*selective reduced integration*). São discutidas as novas e eficientes formulações desses elementos e os resultados de diversos exemplos práticos analisados são disponíveis. Foi concluído que os mais eficientes são os elementos DKT e HSM.

BATOZ (1982) desenvolve em um outro trabalho, uma nova expressão explícita da matriz de rigidez do elemento DKT. Alguns resultados numéricos interessantes avaliando o comportamento deste elemento são apresentados e discutidos.

No trabalho de JEYACHANDRABOSE et al. (1985) a matriz de rigidez para o elemento DKT é formulada explicitamente num sistema de coordenadas globais. Esta aproximação faz com que não seja necessária a transformação da rigidez e propriedades dos elementos de coordenadas local para global na qual é solicitada em diversos outros artigos e trabalhos. É adicionado um código computacional em FORTRAN 77 para montagem da matriz de rigidez do elemento em coordenadas globais.

Um outro trabalho bastante interessante foi desenvolvido por BATOZ & LARDEUR (1989), onde é desenvolvida a formulação de um novo elemento triangular de 3 nós e 9 graus de liberdade válido para a análise de placas finas. A formulação é baseada na generalização da técnica discreta de Kirchhoff incluindo os efeitos cortantes transversais. O elemento é conhecido como DST (*discrete shear triangle*).

OSHIMA (2004) apresenta uma formulação mista do MEC e do MEF. Nessa formulação, as estacas são modeladas através do MEF como elementos de barra e o solo através do MEC, como um meio contínuo, elástico linear, isótropo e homogêneo, utilizando as soluções fundamentais de Mindlin. A seguir, apresentam-se alguns exemplos numéricos obtidos a partir da formulação proposta e compara-se com modelos de outros autores.

No trabalho de RIBEIRO (2005), que estuda a interação do solo com a estrutura, o solo é modelado pelo MEC tridimensional, aplicando a solução fundamental de Kelvin. Neste trabalho, é possível analisar problemas onde o solo é composto por camadas de diferentes características físicas, apoiadas em uma superfície de deslocamento nulo e enrijecidas por elementos de fundação, também modelados pelo MEC tridimensional.

Podem-se citar ainda os trabalhos de PAIVA & BUTTERFIELD (1997) que apresenta uma formulação do Método dos Elementos de Contorno para analisar problemas de interação placa – solo e MENDONÇA & PAIVA (2000), onde é desenvolvida uma análise elastostática de *radiers* estaqueados pelo método dos elementos de contorno.

Outros trabalhos importantes e utilizados para o desenvolvimento da pesquisa são: CODA (1993), BERNAT & CAMBOU (1998), CODA & VENTURINI (2000), KARINSKI et al. (2003) e ALMEIDA (2003).

2 - FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

Os fundamentos matemáticos utilizados no desenvolvimento do trabalho e que servem de auxílio para uma melhor compreensão das teorias apresentadas são descritos neste tópico.

2.1 - NOTAÇÃO INDICIAL

A notação indicial é uma forma compacta de se representar e manipular sistemas de equações, combinações lineares e somatórios através de índices, possuindo uma grande utilidade em diversas situações, como por exemplo, ao se trabalhar com as relações constitutivas dos materiais. Esta notação é feita através do emprego de índices repetidos e livres combinada com operações empregando estes índices, objetivando uma forma sucinta e elegante de escrita.

Por exemplo, um conjunto de variáveis x_1, x_2, x_3 será denotado por x_i , representando desta forma, o sistema de coordenadas cartesianas, onde as direções cartesianas são definidas pelos índices 1, 2 e 3. Nesta notação, os índices podem ser denotados como um subscrito ou sobrescrito, ou seja, x_i ou x^i são ambos válidos. Algumas variáveis encontradas no trabalho são: deslocamentos, u_i ; forças de superfície, p_i ; forças de volume, b_i ; tensor de tensões, s_{ij} ; tensor de deformações, e_{ij} ; dentre outras.

Durante o desenvolvimento deste trabalho são apresentadas expressões na forma de somatório. A convenção é a seguinte: a repetição de um índice em um termo representará um somatório com respeito a esse índice no seu intervalo de variação. Em geral, é utilizada uma variação de 1 a 3 para problemas tridimensionais. Por exemplo,

$$b_{ij} \cdot c_j = \sum_{j=1}^3 b_{ij} \cdot c_j = b_{i1} \cdot c_1 + b_{i2} \cdot c_2 + b_{i3} \cdot c_3 = a_i, \quad i = j = 1, 2, 3. \quad (2.1.1)$$

ou seja,

$$b_{ij} \cdot c_j = \begin{cases} b_{11}c_1 + b_{12}c_2 + b_{13}c_3 & \text{para } i=1, \\ b_{21}c_1 + b_{22}c_2 + b_{23}c_3 & \text{para } i=2, \\ b_{31}c_1 + b_{32}c_2 + b_{33}c_3 & \text{para } i=3. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

e

$$a = \sum_{i=1}^n w_i \cdot \sum_{j=1}^3 b_{ij} \cdot c_j = w_i \cdot (b_{ij} \cdot c_j) \quad (2.1.3)$$

As operações de derivação também podem ser representadas via notação indicial. Observe-se o seguinte exemplo para a derivada parcial de u e v ,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_l} = u_{i,l} \quad (2.1.4)$$

$$\frac{\partial v_{ij}}{\partial x_k} = v_{ij,k} \quad (2.1.5)$$

$$\frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial x_l \partial x_k} = w_{ij,lk} \quad (2.1.6)$$

Pode-se ainda, aplicar a regra da cadeia para encontrar a derivada de uma função composta, como por exemplo $u = u(b_j(x_i))$, ou seja

$$u_{,i} = u_{,j} b_{j,i} \quad (2.1.7)$$

Existem alguns trabalhos onde se pode obter mais informações sobre a notação indicial tais como MASE (1970), BREBBIA & DOMINGUES (1989), KANE, J.H. (1994), entre outros.

2.2 – DELTA DE KRÖNECKER

O símbolo d_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) é denominado delta de Krönecker e definido como:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Como i e j são índices livres no termo d_{ij} e ambos variam de 1 a 3, tem-se um total de 9 valores dados segundo a definição de d_{ij} por

$$d_{11} = d_{22} = d_{33} = 1 \quad (2.2.2)$$

$$d_{12} = d_{13} = d_{21} = d_{23} = d_{31} = d_{32} = 0 \quad (2.2.3)$$

Em notação matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_{11} & \mathbf{d}_{12} & \mathbf{d}_{13} \\ \mathbf{d}_{21} & \mathbf{d}_{22} & \mathbf{d}_{23} \\ \mathbf{d}_{31} & \mathbf{d}_{32} & \mathbf{d}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2.4)$$

ou seja, o delta de Krönecker se reduz a matriz identidade de ordem 3, podendo ser denotado como $[\mathbf{d}_{ij}] = [I]$.

Utilizando-se ainda, a notação indicial, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{ii} &= \mathbf{d}_{11} + \mathbf{d}_{22} + \mathbf{d}_{33} = 3, \\ \mathbf{d}_{ij} \mathbf{a}_j &= \mathbf{a}_i \\ \mathbf{d}_{ij} T_{ij} &= T_{ii} = T_{jj}, \\ \mathbf{d}_{im} \mathbf{d}_{mj} \mathbf{d}_{jn} &= \mathbf{d}_{in}. \end{aligned} \quad (2.2.5a-d)$$

2.3 – DELTA DE DIRAC

O conceito da distribuição Delta de Dirac é muito importante para a formulação do Método dos Elementos de Contorno (MEC). A distribuição Delta de Dirac é uma função geral que pode ser definida como o limite de uma função normal, a qual é zero para todos os pontos do domínio, exceto para o ponto em que o argumento da função é nulo. Neste ponto o limite tende para um valor infinito, como definido na função abaixo:

$$\begin{aligned} \delta(s - q) &= 0, \text{ se } q \neq s; \\ \delta(s - q) &= \infty, \text{ se } q = s; \text{ e} \\ \int_{\Omega} \rho(q) \delta(s - q) d\Omega &= \rho(s). \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

onde p e q são pontos do domínio Ω , e $r(q)$ uma função qualquer.

Com o objetivo de elaborar uma descrição matemática do ponto de excitação da fonte, será definida a função pulso retangular unitário, definida por $F(x,d,a)$.

A função $F(x,d,a)$, representada na figura 2.3.1, tem como característica o valor unitário de sua integral qualquer que seja o domínio. É definida da seguinte forma:

$$F(x,d,a) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < d - \frac{a}{2} \\ \frac{1}{a}, & \text{se } d - \frac{a}{2} \leq x \leq d + \frac{a}{2} \\ 0, & \text{se } x > d + \frac{a}{2} \end{cases} \quad (2.3.2)$$

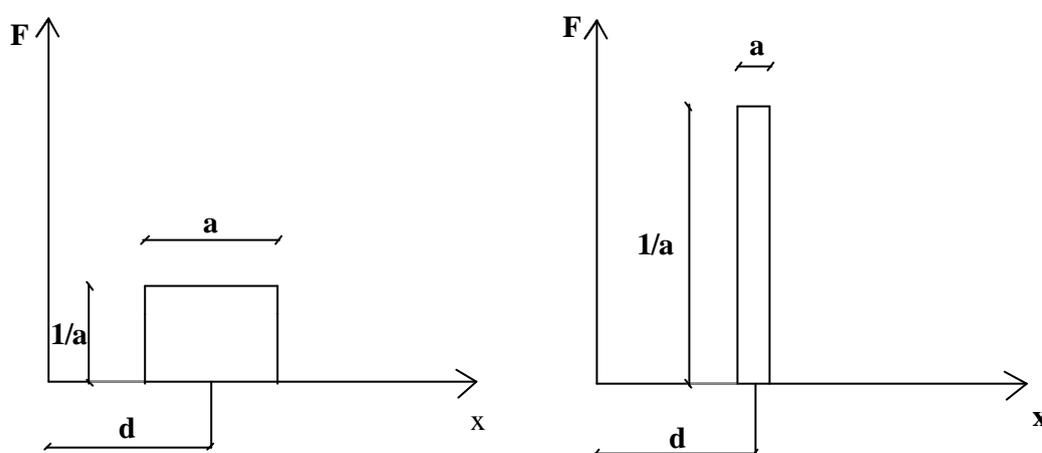


Figura 2.3.1 – Pulso retangular unitário (dois exemplos).

Denomina-se de distribuição Delta de Dirac o limite da função pulso unitário quando a largura “a” do retângulo tende para a zero, ou seja, tende ao infinito.

$$\delta(x-d) = \lim_{a \rightarrow 0} F(x,d,a) \quad (2.3.3)$$

A distribuição Delta de Dirac é muito utilizada em diversos problemas de engenharia onde as excitações são idealizadas como se acontecessem de forma pontual. Cargas concentradas em mecânica dos sólidos e fontes concentradas de energia interna em análises térmicas são dois exemplos de aplicação. No MEC, esta função será utilizada para o desenvolvimento das soluções diferenciais.

2.4 – TEOREMA DA RECIPROCIDADE DE BETTI

Seja o corpo definido por $\Omega + \Gamma$ que está em estado de equilíbrio sob a ação de forças e deslocamentos prescritos.

Este estado de equilíbrio é representado por \mathbf{s}_{ij} , \mathbf{e}_{ij} , p_i e b_i .

Agora, será considerada a existência de um domínio Ω^* com contorno Γ^* que contém o corpo $\Omega + \Gamma$ já definido na figura 2.4.1.

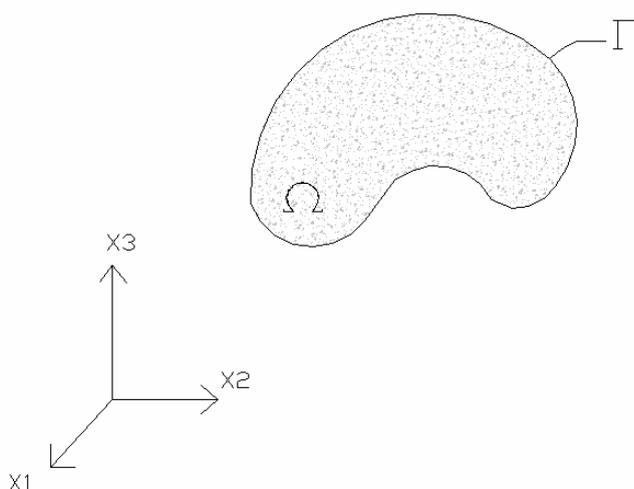


Figura 2.4.1 – Definição do corpo de interesse: Ω (Domínio) e Γ (Contorno).

Esta nova região definida na figura 2.4.2 também está em estado de equilíbrio representado por \mathbf{s}_{ij}^* , \mathbf{e}_{ij}^* , p_i^* e b_i^* .

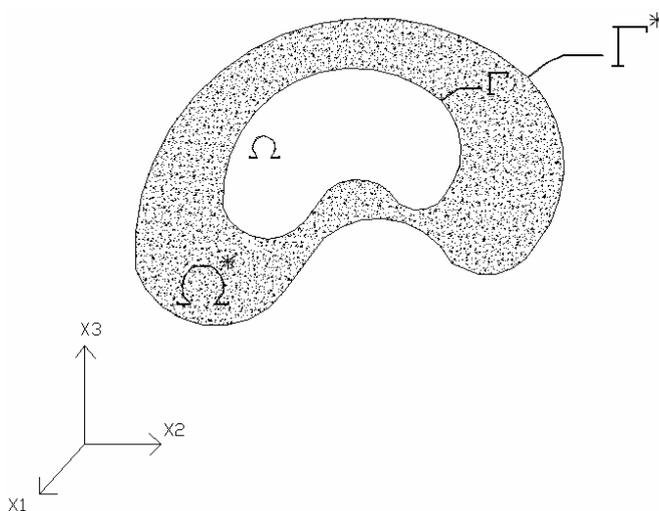


Figura 2.4.2 – Definição de Ω^* e Γ^* do corpo virtual (Fundamental).

Aplicando a definição da lei de Hooke para um material elástico isotrópico, para os dois estados de tensão anteriormente definidos, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{ij} &= C_{ijkl} \mathbf{e}_{kl} \\ \mathbf{s}_{ij}^* &= C_{ijkl} \mathbf{e}_{kl}^* \end{aligned} \quad (2.4.1a-b)$$

onde:

$$C_{ijkl} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \mathbf{d}_{ij} \mathbf{d}_{kl} + G(\mathbf{d}_{ik} \mathbf{d}_{jl} + \mathbf{d}_{il} \mathbf{d}_{jk}) \quad (2.4.2)$$

sendo G o módulo de elasticidade transversal ou módulo de elasticidade ao cisalhamento do material e ν o coeficiente de Poisson.

Então, pode-se escrever:

$$\mathbf{s}_{ij} \mathbf{e}_{ij}^* = C_{ijkl} \mathbf{e}_{kl} \mathbf{e}_{ij}^* = \mathbf{e}_{kl} (C_{ijkl} \mathbf{e}_{ij}^*) \quad (2.4.3)$$

Por simetria, tem-se que:

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (2.4.4)$$

logo:

$$\mathbf{s}_{ij} \mathbf{e}_{ij}^* = \mathbf{e}_{kl} (C_{klij} \mathbf{e}_{ij}^*) = \mathbf{e}_{kl} \mathbf{s}_{kl}^* \quad (2.4.5)$$

Utilizando as propriedades de notação indicial e integrando os dois membros, pode-se escrever a expressão (2.4.5) da seguinte forma

$$\int_{\Omega} \mathbf{s}_{ij}^* \mathbf{e}_{ij} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{s}_{ij} \mathbf{e}_{ij}^* \, d\Omega \quad (2.4.6)$$

A expressão acima define o teorema da reciprocidade de Betti, ou seja, o trabalho realizado pelas tensões no corpo Ω^* e Γ^* sobre as deformações no corpo $\Omega + \Gamma$ é igual ao trabalho realizado pelas tensões no corpo $\Omega + \Gamma$ sobre as deformações no corpo Ω^* e Γ^* .

2.5 – TEOREMAS DE GREEN

Os operadores gradiente e laplaciano, no espaço tridimensional, serão chamados de ∇ e ∇^2 respectivamente e definidos por:

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.5.1a)$$

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.5.1b)$$

onde \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} representam os versores nas direções x, y e z respectivamente.

Considere-se, agora, um domínio consistindo de um volume Ω limitado por um contorno Γ , suave por partes, onde as funções $F(x,y)$, escalar, e $\vec{G}(x,y)$, vetorial, têm primeira derivada contínua em relação às coordenadas cartesianas. Neste caso, valem os seguintes teoremas:

$$\int_{\Omega} \text{grad}(F) \cdot d\Omega = \int_{\Omega} \nabla F d\Omega = \int_{\Gamma} \vec{n} F d\Gamma \quad (2.5.2a)$$

conhecido como o Teorema do Gradiente, e

$$\int_{\Omega} \text{div}(\vec{G}) d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{G} d\Omega = \int_{\Gamma} \vec{n} \cdot \vec{G} d\Gamma \quad (2.5.2b)$$

conhecido como o Teorema da Divergência, onde o ponto, (\cdot) , representa o produto escalar de vetores, \vec{n} representa o versor normal externo ao contorno Γ . Em três dimensões, as equações acima são equivalentes a

$$\int_{\Omega} \left(\vec{i} \frac{\partial F}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial F}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial F}{\partial z} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\vec{i} n_x + \vec{j} n_y + \vec{k} n_z \right) F d\Gamma \quad (2.5.3a)$$

e

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} (n_x G_x + n_y G_y + n_z G_z) d\Gamma \quad (2.5.3b)$$

Respectivamente, e n_x , n_y e n_z (G_x , G_y e G_z) são os componentes cartesianos de $\vec{n}(\vec{G})$.

A partir dos teoremas definidos anteriormente, pode-se demonstrar algumas identidades que são utilizadas nas formulações apresentadas no decorrer do trabalho, tais como:

$$\int_{\Omega} (\nabla F) H d\Omega = - \int_{\Omega} (\nabla H) F d\Omega + \int_{\Gamma} \vec{n} F H d\Gamma \quad (2.5.4a)$$

$$\int_{\Omega} F (\nabla \cdot \vec{G}) d\Omega = - \int_{\Omega} (\nabla F) \cdot \vec{G} d\Omega + \int_{\Gamma} \vec{n} \cdot F \vec{G} d\Gamma \quad (2.5.4b)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 F) H d\Omega + \int_{\Omega} \nabla F \cdot \nabla H d\Omega = \int_{\Gamma} \vec{n} \cdot (\nabla F) H d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial F}{\partial n} H d\Gamma \quad (2.5.4c)$$

$H(x,y)$ representa uma função escalar com as mesmas propriedades de $F(x,y)$.

O teorema da divergência pode ser utilizado para relacionar duas variáveis no volume Ω . Assumindo-se a existência de duas variáveis, f e I , com primeiras e segundas derivadas contínuas no volume Ω , e empregando-se as eqs. (2.5.1b) e (2.5.3), é possível demonstrar a que a seguinte identidade, conhecida como o Teorema de Green, é válida:

$$\int_{\Omega} (f \nabla^2 I - I \nabla^2 f) d\Omega = \int_{\Gamma} (f \frac{\partial I}{\partial n} - I \frac{\partial f}{\partial n}) d\Gamma \quad (2.5.5)$$

3 - FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

3.1- INTRODUÇÃO

A formulação estática do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para sólidos elásticos tridimensionais é apresentada neste capítulo. As representações integrais mostradas são equacionadas a partir do teorema de Betti, embora também seja comum a utilização do método dos resíduos ponderados para essa finalidade. As características da formulação para problemas elastostáticos são aplicadas no equacionamento das representações integrais, na discretização do sólido e geração dos sistemas algébricos.

O capítulo inicia-se com uma revisão das equações básicas da elastostática linear que são utilizadas para gerar as referidas integrais de contorno. Em um próximo tópico é apresentada a solução fundamental de Kelvin que é utilizada para deduzir as representações integrais para pontos do domínio e especificamente para o contorno. Em seguida, é apresentada a discretização do contorno do corpo através do elemento de contorno triangular linear descontínuo, determinando-se as equações matriciais do MEC propriamente dito, bem como os procedimentos utilizados para a integração numérica. As expressões algébricas para o cálculo de deslocamentos e tensões em pontos do contorno e do domínio também são mostradas.

3.2 - EQUAÇÕES BÁSICAS DA ELASTOSTÁTICA LINEAR

Seja um sólido tridimensional elástico-linear, isotrópico e homogêneo em equilíbrio estático definido por um domínio Ω e contorno Γ , sobre o qual atuam forças de superfície p_i (atuam apenas sobre a superfície do corpo) e forças volumétricas b_i (atuam sobre o volume do corpo), de acordo com a figura 3.2.1.

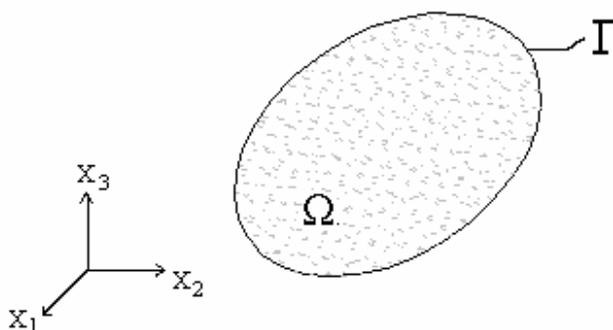


Figura 3.2.1 – Sólido tridimensional de domínio Ω e contorno Γ .

A equação diferencial de equilíbrio estático no interior do domínio Ω de um corpo é dada por

$$s_{ij,j}(s) + b_i(s) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.2.1)$$

onde $s_{ij,j}(s)$ representa a derivada das componentes do tensor de tensão, $b_i(s)$ é o vetor com as componentes das forças volumétricas e “s” representa o ponto material analisado, conforme mostra a figura 3.2.2.

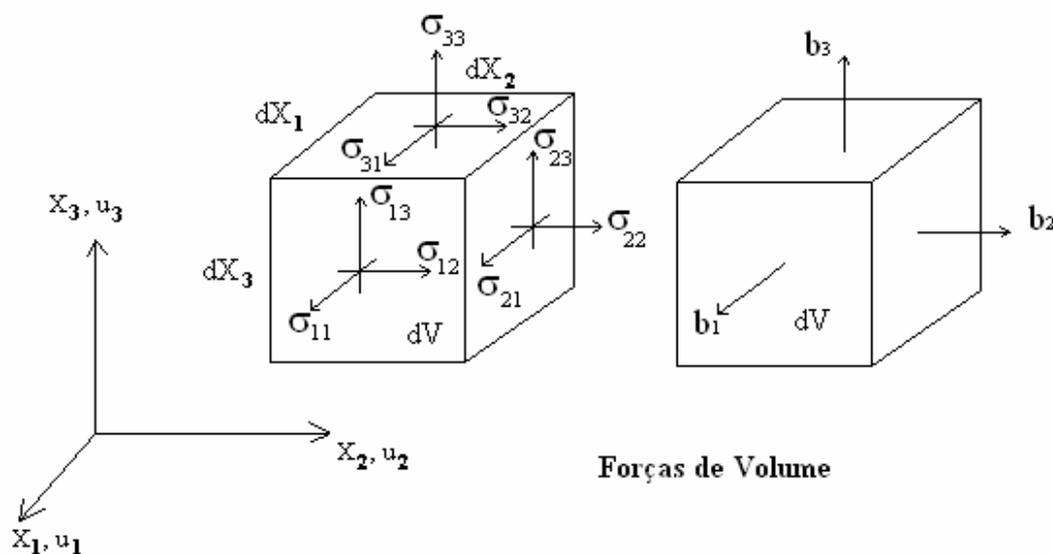


Figura 3.2.2 - Elemento infinitesimal de volume.

Levando-se em consideração que o tensor de tensões $s_{ij}(s)$ é simétrico, pode-se ainda escrever

$$s_{ij}(s) = s_{ji}(s) \quad (3.2.2)$$

Após a análise do equilíbrio estático no domínio, precisa-se representar a equação diferencial que rege o equilíbrio de forças atuantes no contorno do corpo, logo, é tomado um elemento infinitesimal situado no contorno do sólido.

As componentes das forças de superfície (p_i) atuantes em um ponto “s” localizado em qualquer superfície Γ do corpo são expressas através das seis componentes do tensor de tensões. Essa expressão é conhecida como fórmula de Cauchy e é definida fazendo-se equilíbrio nas três direções cartesianas, conforme mostra a figura 3.2.3.

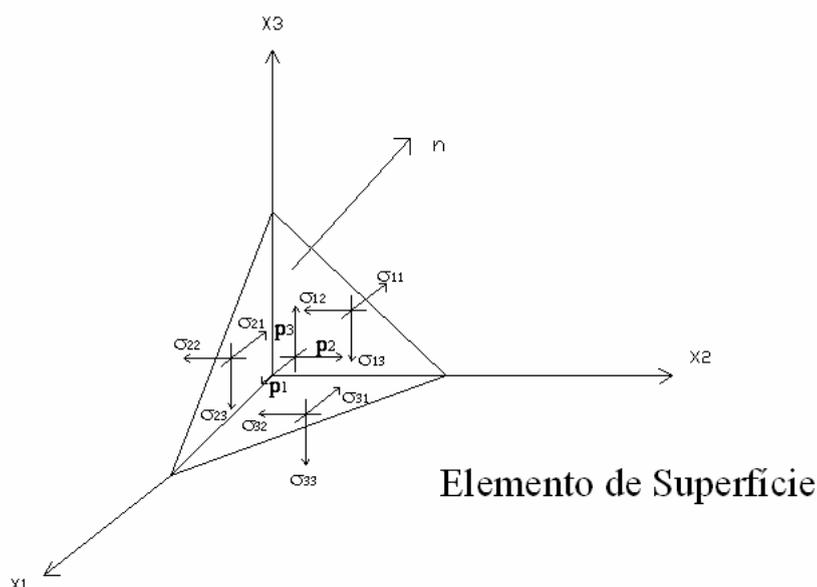


Figura 3.2.3 – Elemento infinitesimal de superfície (Tetraedro de Cauchy).

Considerando o equilíbrio nas três direções encontra-se

$$p_i(s) = \sigma_{ij}(s)n_j \quad (3.2.3)$$

onde n_j são os co-senos diretores dos ângulos entre a normal n e os eixos x_1, x_2 e x_3 .

Além do tensor de tensões $\mathbf{s}_{ij}(s)$, das forças de superfície $p_i(s)$ e das forças volumétricas $b_i(s)$ e considerando regime de pequenas deformações, pode-se definir ainda o tensor de deformações $\mathbf{e}_{ij}(s)$ - que depende do vetor deslocamento $u_i(s)$ - vetor este que representa a mudança de posição de cada ponto do sólido

$$\mathbf{e}_{ij}(s) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(s) + u_{j,i}(s)) \quad (3.2.4)$$

A eq. (3.2.4) define as relações entre deformação e deslocamento, também chamadas de cinemáticas.

A partir das equações até então mostradas, descreve-se a relação constitutiva conhecida como Lei de Hooke da teoria da elasticidade que relaciona os tensores de tensão e deformação de um corpo homogêneo, isotrópico e elástico-linear, conforme mostrado abaixo

$$\mathbf{s}_{ij}(s) = \mathbf{l} \mathbf{d}_{ij} \mathbf{e}_{kk} + 2m \mathbf{e}_{ij} \quad (3.2.5)$$

onde \mathbf{d}_{ij} é o delta de Kronecker já definido no tópico 2.2.

A equação inversa de (3.2.5) pode ser escrita como

$$\mathbf{e}_{ij} = -\frac{l d_{ij}}{2m(3l + 2m)} \mathbf{s}_{kk} + \frac{1}{2m} \mathbf{s}_{ij} \quad (3.2.6)$$

As constantes elásticas de Lamé (l e m), utilizadas em (3.2.5) e (3.2.6), podem ser expressas em termos do módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young (E), do coeficiente de Poisson (n) e do módulo de elasticidade transversal ou módulo de elasticidade ao cisalhamento (G)

$$m = G = \frac{E}{2(1+n)} \quad \text{e} \quad l = \frac{nE}{(1+n)(1-2n)} \quad (3.2.7a-b)$$

Outros detalhes sobre a Lei de Hooke podem ser encontrados em BREBBIA & DOMINGUEZ (1989), SHAMES & COZZARELLI (1992) e LOPES JR. (1996).

O valor do tensor de tensão encontrado em (3.2.5) pode também ser expresso em termos de deslocamentos. Assim, substituindo-se a eq. (3.2.4) na eq. (3.2.5), obtém-se:

$$\mathbf{s}_{ij}(s) = \frac{2m}{1-2n} \mathbf{d}_{ij} u_{k,k}(s) + m(u_{i,j}(s) + u_{j,i}(s)) \quad (3.2.8)$$

Pode-se obter ainda o vetor de forças de superfície expresso em função dos deslocamentos substituindo a eq. (3.2.8) na eq. (3.2.3), como indicado abaixo:

$$p_i(s) = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} u_{k,k}(s)\eta_i + \mu(u_{j,i}(s)\eta_j + u_{i,j}(s)\eta_i) \quad (3.2.9)$$

onde $u_{i,j}(s)\eta_i$ é a derivada de $u_i(s)$ em relação à direção normal à superfície definida em 's'.

Fazendo agora a substituição da eq. (3.2.8) na eq. (3.2.1) encontra-se a equação diferencial do problema elástico em termos de deslocamentos conhecida como equação de Navier-Cauchy para a estática definida como:

$$u_{i,jj}(s) + \frac{1}{1-2n} u_{j,ij}(s) + \frac{b_i(s)}{m} = 0 \quad (3.2.10)$$

As equações até aqui analisadas contêm as relações necessárias para o estudo de um problema elástico qualquer tridimensional, porém é necessário que se conheçam as condições de contorno do corpo.

No estudo da mecânica dos sólidos, os valores prescritos de contorno são os deslocamentos u_i e as forças de superfície p_i . Logo, as condições de contorno são apresentadas a partir dessas variáveis definidas no contorno do corpo. Desde já, para proceder esse tipo de análise, é necessário dividir o contorno do sólido Γ em dois contornos distintos Γ_1 e Γ_2 , ou seja $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. Os trechos

Γ_1 e Γ_2 são apenas ilustrativos, já que os mesmos podem ter tanto condições prescritas de deslocamento como de forças de superfície.

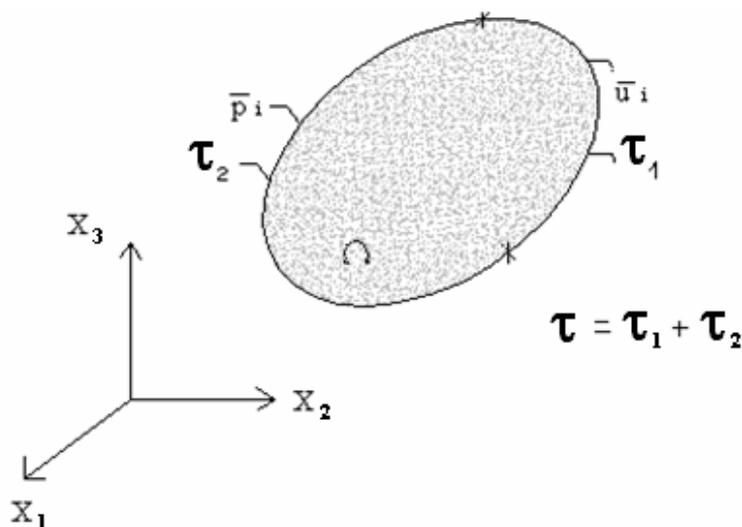


Figura 3.2.4 – Valores prescritos de contorno.

Como mostrado na figura (3.2.4), no contorno Γ_1 a variável deslocamento prescrita representa a condição de contorno, isto é

$$u_i(q) = \bar{u}_i(s), \text{ para } s \text{ um ponto de } \Gamma_1 \text{ (condições essenciais)} \quad (3.2.11a-b)$$

$$p_i(s) = \bar{p}_i(s), \text{ para } s \text{ um ponto de } \Gamma_2 \text{ (condições naturais)}$$

Vale lembrar que as condições de contorno não necessariamente são aplicadas em partes separadas do contorno e a barra sobre as variáveis indica valores prescritos.

3.3 - SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

A formulação das equações integrais de contorno para problemas elastostáticos a ser descrita no tópico 3.4 requer o conhecimento da solução fundamental para sólidos tridimensionais elásticos, homogêneos e isotrópicos que pode ser escolhida de acordo com o problema a ser solucionado.

Nesse trabalho é utilizada a solução fundamental de Kelvin que considera a influência em um domínio infinito ocasionada pela aplicação de uma carga concentrada e unitária.

Visando um maior esclarecimento na definição do problema fundamental, pode-se considerar um domínio infinito Ω^* cujo contorno é denotado por Γ^* . O sólido que se pretende estudar possui domínio Ω e contorno Γ e está contido no domínio Ω^* , conforme mostrado na figura 3.3.1.

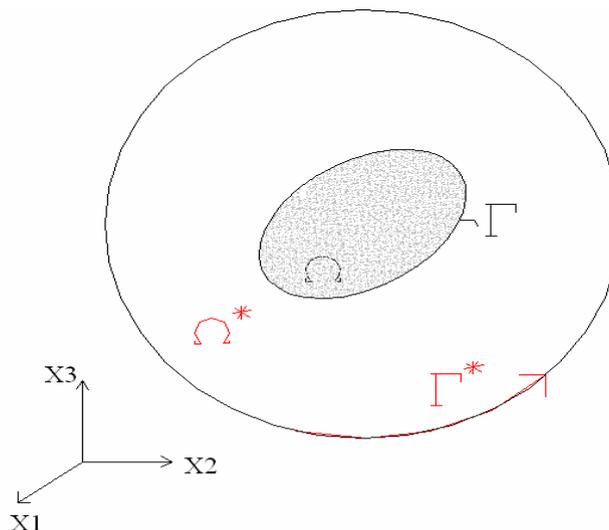


Figura 3.3.1 – Definição do problema fundamental.

A solução fundamental do problema a ser analisado consiste em estudar os efeitos causados pela aplicação de uma força unitária estática em um ponto s do domínio (ponto fonte), nas direções cartesianas, em um outro ponto q no infinito (ponto de campo).

Esses efeitos causados no ponto de campo são definidos através dos deslocamentos u_{ij}^* e forças de superfície p_{ij}^* , onde o primeiro índice representa a direção cartesiana de aplicação da força e o segundo a direção do efeito medido, conforme figuras 3.3.2a, 3.3.2b e 3.3.2c.

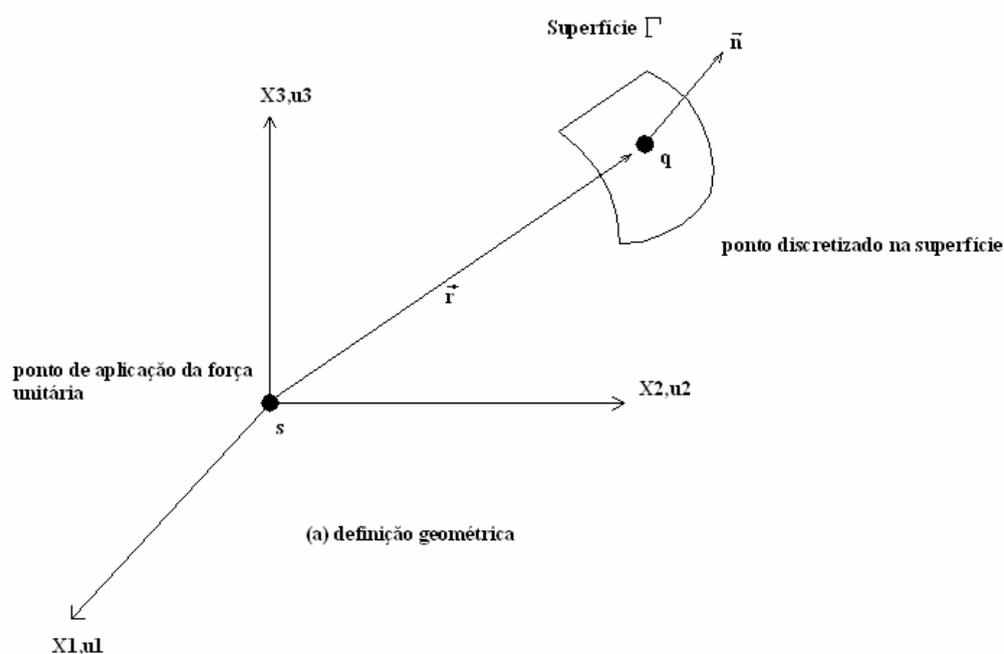


Figura 3.3.2a – Definição geométrica do problema fundamental.
(Fonte: BREBBIA & DOMINGUEZ, 1989)

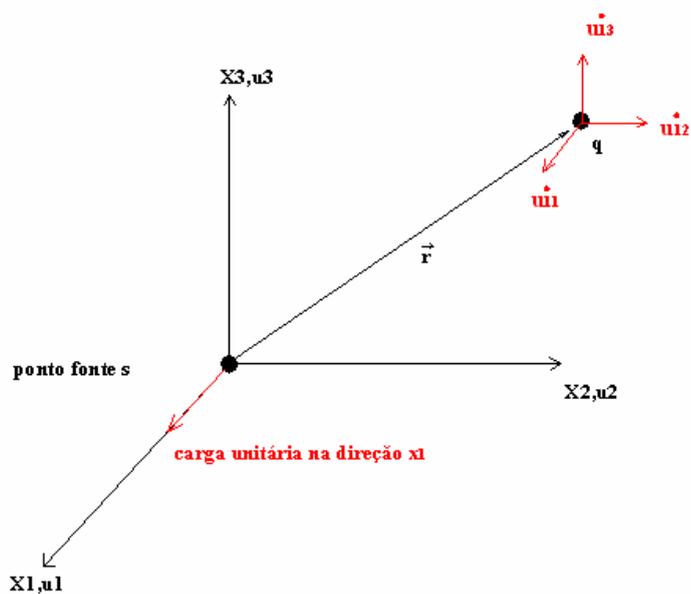


Figura 3.3.2b – Componentes dos deslocamentos da solução fundamental da superfície.

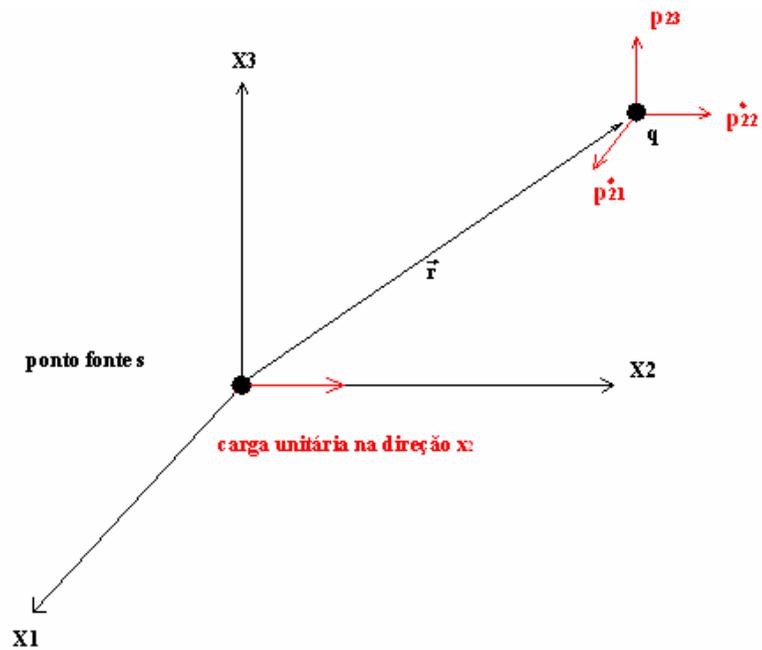


Figura 3.3.2c – Componentes de forças de superfície da solução fundamental da superfície.

Aplicando a distribuição Delta de Dirac e Delta de Krönecker, já definida nos fundamentos matemáticos, na força unitária aplicada no ponto fonte s , pode-se definir as forças volumétricas no domínio do sólido como sendo

$$b_i(q) = \mathbf{d}(s, q) \mathbf{d}_{ki} \quad (3.3.1)$$

Substituindo a expressão (3.3.1) nas eqs. (3.2.1) e (3.2.10), tem-se

$$\mathbf{s}^*_{kij}(s, q) + \mathbf{d}(s, q) \mathbf{d}_{ki} = 0 \quad (3.3.2a)$$

$$\frac{1}{1-2\mathbf{n}} u^*_{kj,ji}(s, q) + u^*_{ki,jj}(s, q) + \frac{1}{\mathbf{m}} \mathbf{d}(s, q) \mathbf{d}_{ki} = 0 \quad (3.3.2b)$$

que representam as expressões analíticas da solução fundamental desenvolvida a partir dos deslocamentos e forças de superfície.

3.3.1 – SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE KELVIN

Existem diferentes soluções das equações acima que podem ser igualmente empregadas. Estas soluções dependem da região $\Omega^* + \Gamma^*$ que se está trabalhando e das respectivas condições de contorno.

A partir da resolução das eqs. (3.3.2a) e (3.3.2b) encontram-se as expressões de deslocamentos para o problema de Kelvin tridimensional, que considera o domínio do sólido Ω^* estendendo-se ao infinito,

$$u_{ij}^*(s, q) = \frac{1}{16\mathbf{p}(1-\mathbf{n})\mathbf{r}\mathbf{m}} \{ (3-4\mathbf{n}) \mathbf{d}_{ij} + r_i r_j \} \quad (3.3.3)$$

onde,

$$r = \sqrt{r_i r_i} = |s - q|$$

$$r_i = x_i(q) - x_i(s) \quad (3.3.4a-c)$$

$$r_{,i} = \frac{r_i}{r}$$

Pode-se encontrar ainda a expressão das deformações aplicando-se a eq. (3.2.4)

$$\mathbf{e}_{ijk}^*(s, q) = \frac{-1}{16\mathbf{p}\mathbf{m}(1-\mathbf{n})\mathbf{r}^2} [(1-2\mathbf{n})(r_{,j} \mathbf{d}_{ik} + r_{,i} \mathbf{d}_{jk}) - r_{,k} \mathbf{d}_{ij} + 3r_{,i} r_{,j} r_{,k}] \quad (3.3.5)$$

e pela Lei de Hooke, o respectivo tensor de tensões,

$$\mathbf{s}_{ijk}^*(s, q) = \frac{-1}{8\mathbf{p}(1-\mathbf{n})\mathbf{r}^2} [(1-2\mathbf{n})(r_{,j} \mathbf{d}_{ik} + r_{,i} \mathbf{d}_{jk}) - r_{,k} \mathbf{d}_{ij}] + 3r_{,i} r_{,j} r_{,k} \quad (3.3.6)$$

As variáveis envolvidas na eq. (3.3.3) podem ser visualizadas na figura 3.3.3, a seguir:

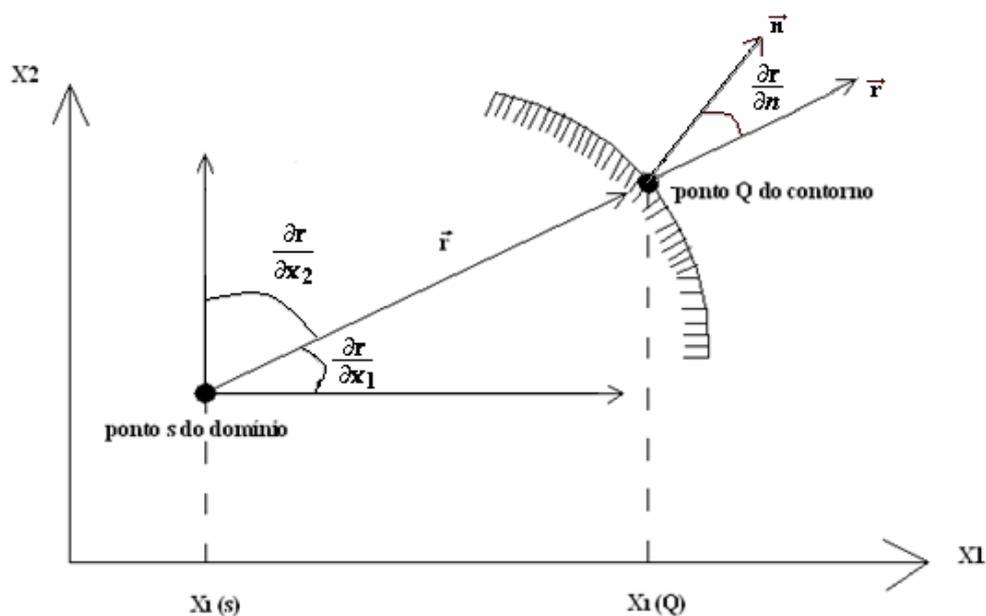


Figura 3.3.3 – Definição do vetor r para cálculo de suas derivadas.

E finalmente, a partir da eq. (3.3.6) e da eq. (3.2.3) encontra-se a expressão da força de superfície para o problema fundamental, mostrada na eq. (3.3.7):

$$p_{ij}^*(s, q) = \frac{-1}{8\mu(1-n)r^2} \{ [(1-2n)d_{ij} + 3r_i r_{,j}] r_{,n} - (1-2n)(r_i n_j - r_j n_i) \} \quad (3.3.7)$$

Para facilitar o entendimento da solução fundamental de Kelvin e visualizar alguns parâmetros das equações mostradas, tem-se a figura 3.3.4.

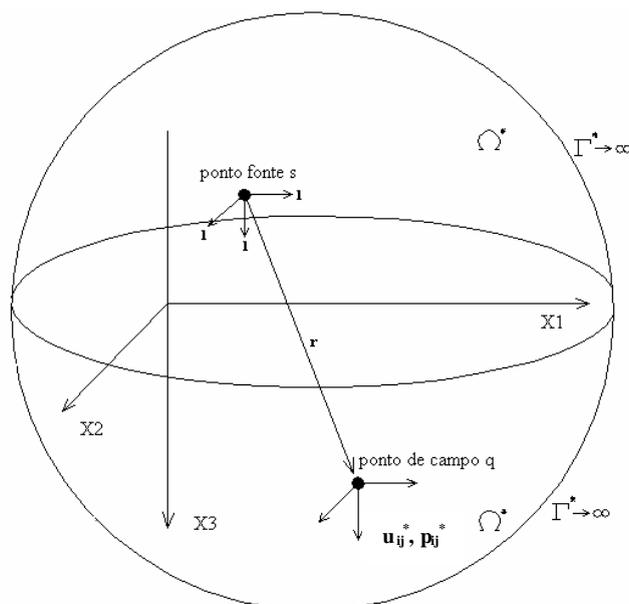


Figura 3.3.4 – Definição do problema fundamental de Kelvin

3.4- EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO

As equações integrais de contorno relacionam os deslocamentos de um ponto qualquer localizado no domínio com deslocamentos e esforços no contorno de um corpo tridimensional utilizando integrais que envolvem a solução fundamental de Kelvin utilizada neste trabalho. Essas equações são muito importantes e auxiliam no desenvolvimento da formulação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) e podem ser obtidas através da utilização da técnica dos resíduos ponderados ou do teorema da reciprocidade de Betti. A técnica dos resíduos ponderados possui uma grande vantagem, pois, facilita a associação do MEC a outros métodos numéricos, como por exemplo, o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF).

3.4.1 – EQUAÇÃO INTEGRAL PARA PONTOS DO DOMÍNIO

As equações integrais para pontos do domínio mostradas neste tópico são baseadas na figura (3.2.4) e eqs. (3.2.11a-b) já mostradas neste trabalho, onde são definidas as condições de contorno e o espaço infinito que definem o problema.

Utilizando o teorema da reciprocidade de Betti, ver tópico 2.4, encontra-se a representação integral de deslocamento, conhecida como identidade Somigliana e apresentada da seguinte forma:

$$u_i(s) = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, Q) p_j(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(s, q) b_j(q) d\Omega(q) \quad (3.4.1)$$

A eq. (3.4.1) fornece o deslocamento no ponto 's' do domínio na direção cartesiana i, a partir dos valores de deslocamentos e forças de superfície no ponto 'Q' do contorno e, na presença de forças de volume, das componentes b_j no ponto 'q' do domínio.

A eq. (3.4.1) é uma representação contínua de deslocamentos em pontos do interior do corpo. Sendo assim, as componentes das tensões internas podem ser determinadas aplicando a relação cinemática (3.2.4) na eq. (3.4.1), fazendo assim uma derivação da eq. (3.4.1) em relação às coordenadas de s, com isso obtém-se as deformações específicas e então substituindo o resultado na Lei de Hooke, encontra-se:

$$\sigma_{ij}(s) = - \int_{\Gamma} S_{ijk}^*(s, Q) u_k(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} D_{ijk}^*(s, Q) p_k(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} D_{ijk}^*(s, q) b_k(q) d\Omega(q) \quad (3.4.2)$$

É importante salientar que as derivadas são aplicadas diretamente nos integrandos.

A eq. (3.4.2) fornece os valores das tensões no ponto interno s a partir dos valores de deslocamentos e forças de superfície do ponto Q do contorno, acrescidos da parcela relativa às forças de volume, ponto q do domínio, quando considerada.

S^*_{ijk} e D^*_{ijk} são tensores de 3ª ordem para um problema tridimensional definidos através da derivação dos tensores de deslocamentos e forças de superfície do problema fundamental, cujas componentes para a solução fundamental de Kelvin, são

$$S^*_{ijk} = \frac{m}{4p(1-n)r^3} \{ 3r_{,n} [(1-2n)r_{,k} \mathbf{d}_{ij} + n(r_{,i} \mathbf{d}_{jk} + r_{,j} \mathbf{d}_{ik}) - 5r_{,i} r_{,j} r_{,k}] + 3n(n_{,i} r_{,j} r_{,k} + n_{,j} r_{,i} r_{,k}) + (1-2n)(3n_{,k} r_{,i} r_{,j} + n_{,i} \mathbf{d}_{jk} + n_{,j} \mathbf{d}_{ik}) - (1-4n)n_{,k} \mathbf{d}_{ij} \} \quad (3.4.3)$$

$$D^*_{ijk} = \frac{1}{8p(1-n)r^2} \{ (1-2n)(r_{,j} \mathbf{d}_{ik} + r_{,i} \mathbf{d}_{jk} - r_{,k} \mathbf{d}_{ij}) + 3r_{,i} r_{,j} r_{,k} \} \quad (3.4.4)$$

3.4.2 – EQUAÇÃO INTEGRAL PARA PONTOS DO CONTORNO

A identidade Somigliana (3.4.1) fornece os deslocamentos em qualquer ponto contido no interior do sólido em estudo desde que os valores das forças de superfície e deslocamentos em todos os pontos do contorno sejam conhecidos. No Método dos Elementos de Contorno é necessário o conhecimento da expressão correspondente para pontos que pertençam ao contorno Γ , contudo nesses pontos tais integrais apresentam singularidade. Deve-se utilizar um artifício que transforma esses pontos do contorno em pontos do domínio.

O objetivo é aumentar o domínio e o contorno do sólido em estudo, acrescentando a este o contorno de uma superfície esférica de domínio Ω_e , com centro no ponto de contorno e de raio e , conforme ilustrado na figura (3.4.1). A partir de então, o domínio e o contorno do corpo passam a ser respectivamente $\Omega + \Omega_e$ e $\Gamma + \Gamma_e - \bar{\Gamma}$. Desta forma, um ponto S do contorno passa a ser um ponto s do domínio e a identidade Somigliana passa a valer para o novo domínio e contorno do corpo.

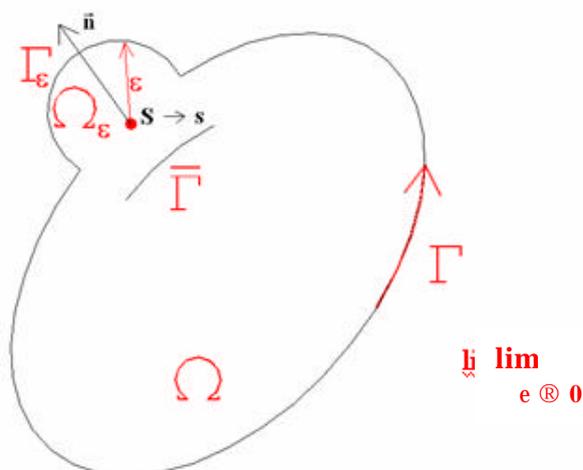


Figura 3.4.1 – Corte do contorno expandido no ponto suave.

A identidade Somigliana passa a ser definida para domínio e contorno diferentes, como mostrado a seguir

$$\begin{aligned}
 u_i(s) = & - \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\epsilon} p_{ij}^*(s, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\epsilon} u_{ij}^*(s, Q) p_j(Q) d\Gamma(Q) \\
 & + \int_{\Omega + \Omega_\epsilon} u_{ij}^*(s, q) b_j(q) d\Omega(q)
 \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Pode-se estudar separadamente o limite de cada integral quando $\epsilon \rightarrow 0$ o que faz com que o ponto volte a ser de contorno. Pode-se encontrar todos os detalhes de tais demonstrações em BREBBIA & DOMINGUEZ (1989) e ROCHA (1988). Logo, a expressão resultante da equação integral (3.4.5) para pontos do contorno é reduzida a:

$$\begin{aligned}
 c_{ij}(S)u_i(S) = & - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(S, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(S, Q) p_j(Q) d\Gamma(Q) \\
 & + \int_{\Omega} u_{ij}^*(S, q) b_j(q) d\Omega(q)
 \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

onde, para pontos de contorno suaves (sem angulosidades), tem-se o termo livre

$$c_{ij}(S) = \frac{d_{ij}}{2} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.4.7)$$

Nota-se, que a eq. (3.4.6) é semelhante à eq. (3.4.1) definida para pontos no domínio e de uma forma geral, pode-se afirmar que tal expressão também é válida para pontos localizados fora do domínio do corpo. Visando a definição de uma forma geral de representação desta equação, define-se os valores para o coeficiente c_{ij} , como mostrado abaixo:

$$c_{ij}(S) = \mathbf{d}_{ij} \begin{cases} 0, & \text{para pontos fora do domínio } \Omega; \\ \frac{1}{2}, & \text{para pontos do contorno } \Gamma; \\ 1, & \text{para pontos internos ao domínio } \Omega. \end{cases} \quad (3.4.8)$$

Para pontos do contorno não suaves, conforme mostrado na figura (3.4.2), o limite das forças de superfície da solução fundamental fornece um resultado diferente, de forma que

$$c_{ij}(S) = \mathbf{d}_{ij}(S) + I_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.4.9)$$

pode-se encontrar mais detalhes sobre a matriz I_{ij} em LOPES JR. (1996).

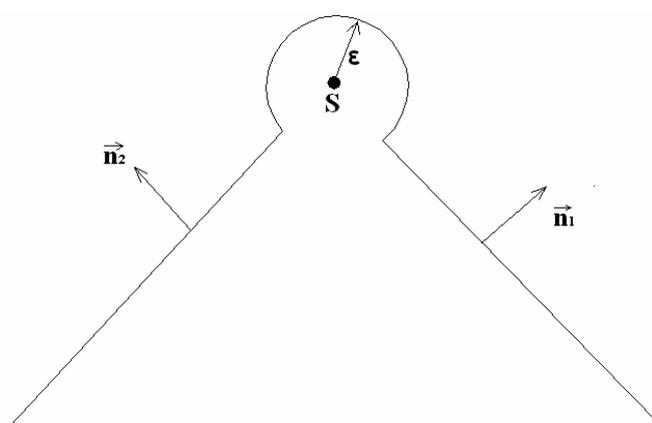


Figura 3.4.2 – Corte do contorno expandido no ponto S (não suave).

A expressão resultante da equação integral (3.4.6) mostrada é definida para sólidos tridimensionais em que o vetor normal ao seu contorno tem sentido para fora do domínio, ver figura (3.4.1), ou seja, é utilizada para estudar regiões internas ao sólido, cujo domínio é finito. Desta forma, precisa-se estender essa equação para o caso de regiões infinitas que são estudadas neste trabalho através da solução fundamental de Kelvin para modelar o solo, admitido como um domínio infinito.

Logo, seja uma esfera de raio r , superfície $\bar{\Gamma}$, domínio $\bar{\Omega}$ com centro em um ponto S, ponto este que envolve uma cavidade definida pelo contorno Γ (vide figura 3.4.3). Esta nova região entre Γ e $\bar{\Gamma}$ está contida em um espaço infinito Ω^* . Para representar a nova região e chegar na situação do problema analisado, deve-se fazer com que o raio da esfera tenda ao infinito ($r \rightarrow \infty$), e nota-se que a expressão resultante é a mesma (3.4.6), a representação integral para problemas de domínio finito também é válida para problemas cujo domínio é infinito.

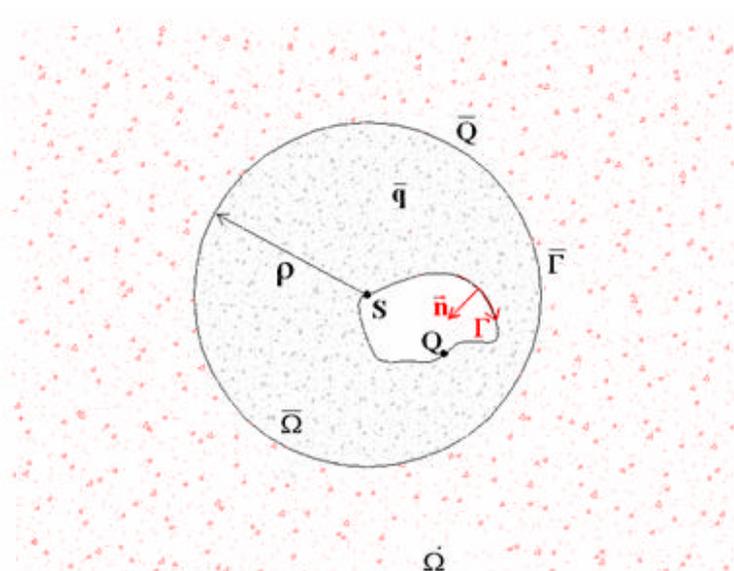


Figura 3.4.3 – Região infinita – espaço de Kelvin

3.5- MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

No capítulo anterior são definidas as equações integrais de contorno para a análise de sólidos elásticos, homogêneos, isotrópicos tridimensionais. Nesta seção, é definido e mostrado a transformação dessas equações em equações algébricas visando a formulação do Método dos Elementos de Contorno (MEC).

3.5.1 – DISCRETIZAÇÕES

A princípio, precisa-se resolver as equações integrais numericamente, discretizando o contorno em uma série de elementos nos quais os deslocamentos e força de superfície são escritos em termos dos próprios valores de uma série de pontos nodais (valores dos nós funcionais). A forma discretizada da eq. (3.4.6) para todos os pontos nodais implica em um sistema de equações algébricas lineares. Aplicando-se as condições de contorno ao problema, o sistema pode ser resolvido encontrando-se todos os valores desconhecidos e conseqüentemente uma solução aproximada para os valores no contorno do problema.

Para tal discretização, divide-se o contorno do sólido em um número finito de elementos, cuja geometria pode ser plana ou curva, triangular ou quadrangular, etc. (vide figura 3.5.1). Neste

trabalho são utilizados os elementos triangulares lineares contínuo e descontínuo na discretização do sólido pelo MEC.

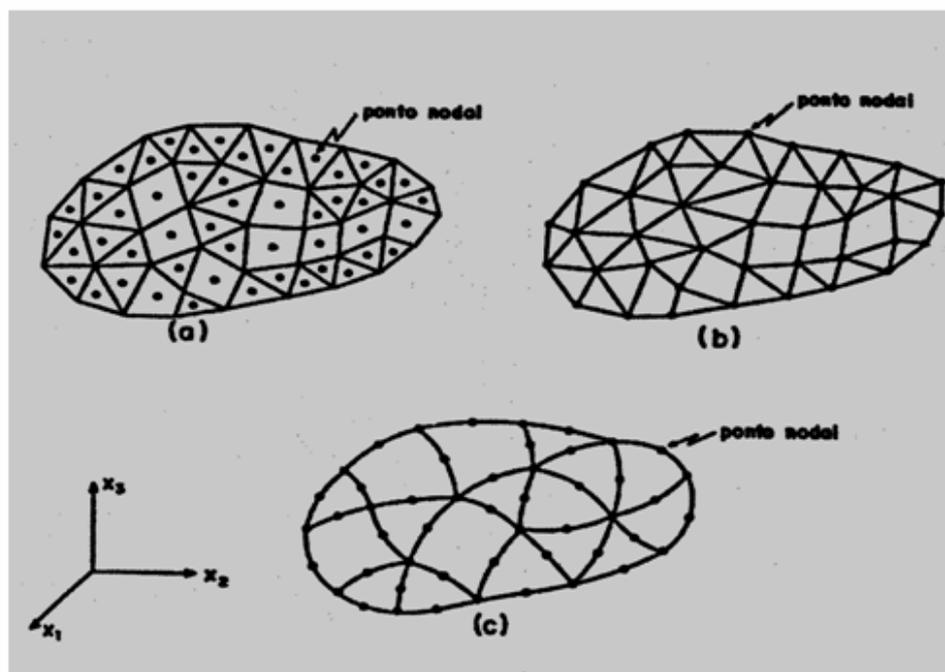


Figura 3.5.1 – (a) elementos de contorno constantes, (b) elementos de contorno lineares e (c) elementos de contorno quadráticos (Fonte: Brebbia & Dominguez, 1989).

Agora pode-se definir as funções u e p (deslocamentos e forças de superfície em algum ponto do contorno) aplicadas para cada elemento j a ser discretizado, como mostrado a seguir

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{f}^T \mathbf{U}^j \\ p &= \mathbf{f}^T \mathbf{P}^j \end{aligned} \quad (3.5.1a-b)$$

onde \mathbf{f} são as funções interpoladoras e \mathbf{U}^j e \mathbf{P}^j são os deslocamentos e forças de superfície aproximados por seus valores nodais de dimensões $3 \times N$ para problemas tridimensionais, sendo N o número de nós do elemento.

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} \\ \mathbf{u} &= \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5.2a-b)$$

A matriz função de interpolação \mathbf{f} com dimensões $3 \times 3N$ é constituída de funções de forma

$$\mathbf{f}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 & 0 & 0 & \mathbf{f}_2 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{f}_N & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{f}_1 & 0 & 0 & \mathbf{f}_2 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{f}_N & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{f}_1 & 0 & 0 & \mathbf{f}_2 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{f}_N \end{bmatrix} = [\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \dots \quad \mathbf{f}_n] \quad (3.5.3)$$

A discretização do domínio do corpo é feita, de uma forma mais direta, dividindo-o em células tridimensionais, geralmente na forma de hexaedros e tetraedros. Esta discretização também poderia ser feita através de outras técnicas, onde seriam utilizados apenas elementos de contorno, como, por exemplo, a técnica da Reciprocidade Dual e a Integração Direta. Porém, neste trabalho o domínio do sólido não é modelado, ou seja, as forças volumétricas são desprezadas.

Desta forma, pode-se também definir as forças de volume \mathbf{b} em algum ponto do domínio Ω na forma de um vetor tridimensional através de funções interpoladoras \mathbf{f} e valores nodais B^j (aplicada nos nós funcionais)

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{Bmatrix} \quad (3.5.4)$$

Os coeficientes da solução fundamental de Kelvin podem ser expressos como

$$\mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^*_{11} & \mathbf{p}^*_{12} & \mathbf{p}^*_{13} \\ \mathbf{p}^*_{21} & \mathbf{p}^*_{22} & \mathbf{p}^*_{23} \\ \mathbf{p}^*_{31} & \mathbf{p}^*_{32} & \mathbf{p}^*_{33} \end{bmatrix} \quad (3.5.5a-b)$$

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^*_{11} & \mathbf{u}^*_{12} & \mathbf{u}^*_{13} \\ \mathbf{u}^*_{21} & \mathbf{u}^*_{22} & \mathbf{u}^*_{23} \\ \mathbf{u}^*_{31} & \mathbf{u}^*_{32} & \mathbf{u}^*_{33} \end{bmatrix}$$

onde \mathbf{p}^* é a matriz em que os coeficientes \mathbf{p}^*_{ij} são as forças de superfície na direção j devidas a uma força unitária em S agindo na direção i e \mathbf{u}^* é a matriz em que os coeficientes \mathbf{u}^*_{ij} são os deslocamentos na direção j devido a uma força unitária em S agindo na direção i .

A partir das notações mostradas, a eq. (3.4.6) pode ser reescrita para cada ponto S como mostrado a seguir:

$$c(S)u(S) = - \int_{\Gamma} \mathbf{p}^*(S, Q)u(Q)d\Gamma(Q) + \int_{\Gamma} \mathbf{u}^*(S, Q)p(Q)d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} \mathbf{u}^*(S, q)b(q)d\Omega(q) \quad (3.5.6)$$

onde os coeficientes $c(S)$ já foram definidos neste trabalho.

As coordenadas cartesianas do contorno e as coordenadas cartesianas da célula podem ser escritas em termos das coordenadas nodais para a definição dos elementos, conforme mostrado abaixo

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{f}^T \mathbf{X}^j \\ \mathbf{X}_c &= \mathbf{f}_c^T \mathbf{X}_c^j \end{aligned} \quad (3.5.7a-b)$$

onde \mathbf{f} são as mesmas funções de interpolação isoparamétrica utilizadas para os deslocamentos e forças de superfície, \mathbf{X}^j são as coordenadas cartesianas de seus pontos nodais e \mathbf{X}_c^j as coordenadas cartesianas dos pontos geométricos da célula tridimensional para discretização do domínio.

Considerando a mudança do sistema de coordenadas cartesianas, substituindo as eqs. (3.5.1a-b) e aproximando o contorno do sólido em “L” elementos, com “J” pontos nodais (nós funcionais) e o seu domínio em “M” células, a representação integral discretizada para deslocamentos, a eq. (3.5.6), passa a ser:

$$\begin{aligned} c(S)u(S) &= - \sum_{l=1}^L \left[\int_{\Gamma_l} \mathbf{p}^*(S, Q) \phi^T(Q) d\Gamma(Q) \right] \mathbf{U}^j + \sum_{l=1}^L \left[\int_{\Gamma_l} \mathbf{u}^*(S, Q) \phi^T(Q) d\Gamma(Q) \right] \mathbf{P}^j \\ &+ \sum_{m=1}^M \left[\int_{\Omega_m} \mathbf{u}^*(S, q) \phi_c^T(q) d\Omega(q) \right] \mathbf{B}^j \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

Aplicando integração numérica (ver tópico 3.5.3) para as eqs. integrais (3.5.8) em todos os pontos S, tem-se a representação algébrica:

$$\mathbf{c}\mathbf{u} = - \hat{\mathbf{H}}\mathbf{U} + \mathbf{G}\mathbf{P} + \mathbf{D}\mathbf{B} \quad (3.5.9)$$

onde as matrizes de influência $\hat{\mathbf{H}}$, \mathbf{G} e \mathbf{D} são definidas, respectivamente, pelos somatórios das integrais mostrados na eq. (3.5.8).

Analisando-se a eq. (3.5.9), nota-se que é possível agrupar as matrizes que formam um produto com a matriz dos valores nodais de deslocamentos \mathbf{U} , ou seja ($\mathbf{H} = \mathbf{c} + \hat{\mathbf{H}}$) e a equação passa a ser

$$\mathbf{H}\mathbf{U} = \mathbf{G}\mathbf{P} + \mathbf{D}\mathbf{B} \quad (3.5.10)$$

Note que os elementos $c(S)$ são encontrados como uma série de sub-matrizes 3x3 na diagonal de H e não são simplesmente calculados de forma analítica devido, principalmente, a singularidade da solução fundamental em pontos de canto.

Os vetores \mathbf{U} e \mathbf{P} representam todos os valores de deslocamentos e forças de superfície após a aplicação das condições de contorno. Essas condições podem ser introduzidas fazendo-se uma troca de colunas de \mathbf{H} e \mathbf{G} de modo que todos os valores desconhecidos passam para a matriz \mathbf{X} no lado esquerdo da igualdade. Isto resulta num sistema de equações algébricas, como mostrado abaixo:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{F} \quad (3.5.11)$$

onde:

\mathbf{A} é uma matriz cheia e não simétrica que contém elementos das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} devidamente trocados (troca de colunas) para agrupar todas as incógnitas do lado esquerdo da igualdade, sejam elas deslocamentos ou forças de superfície, \mathbf{X} é o vetor misto que contém as incógnitas (deslocamentos e forças de superfície) e \mathbf{F} é o vetor independente, obtido da multiplicação dos coeficientes das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} relativos às componentes prescritas de deslocamentos e forças de superfície, note-se ainda que a matriz \mathbf{B} passa a ser incorporada em \mathbf{F} .

Em geral, utiliza-se o Método de Eliminação de Gauss para a resolução do sistema acima, desta forma encontra-se a solução elastostática do problema.

Após a resolução do sistema acima, as variáveis contidas no vetor das incógnitas devem ser reorganizadas em deslocamentos e forças de superfície, antes de serem utilizadas computacionalmente.

3.5.2 – ELEMENTOS DE CONTORNO

Como dito anteriormente, nesse trabalho é utilizado o elemento triangular plano para a discretização do contorno do sólido tridimensional. Existem diversas referências onde pode ser encontrado este tipo de elemento, que a princípio, foi desenvolvido para ser utilizado no Método dos Elementos Finitos (MEF), como por exemplo, em COOK et al. (1989), ZIENKIEWICZ & TAYLOR (1989) e BATHE (1982).

Precisa-se definir a geometria deste elemento e em seguida aplicar as funções de interpolação que são utilizadas para as variáveis da representação do Método dos Elementos de Contorno: forças de superfície e deslocamentos. As funções de interpolação servem para aproximar os campos das variáveis envolvidas no problema. Essa aproximação é aplicada nos pontos nodais do elemento e são definidas através de polinômios. Essas funções podem ser constantes, lineares, quadráticas, cúbicas ou de ordens mais elevadas, ver COOK et al. (1989) pp. 153.

Nesse trabalho é utilizada apenas a função de interpolação linear que permite uma melhor aproximação das variáveis do problema do que a função constante, no caso do elemento plano triangular, essa interpolação consiste em interpolar linearmente entre os três valores nodais do elemento.

3.5.2.1 – ELEMENTO DE INTERPOLAÇÃO LINEAR

Visando uma aproximação das variáveis através das funções interpoladoras de forma linear, encontram-se na literatura três tipos de elementos, elemento linear contínuo, descontínuo e de transição, conforme mostrados a seguir:

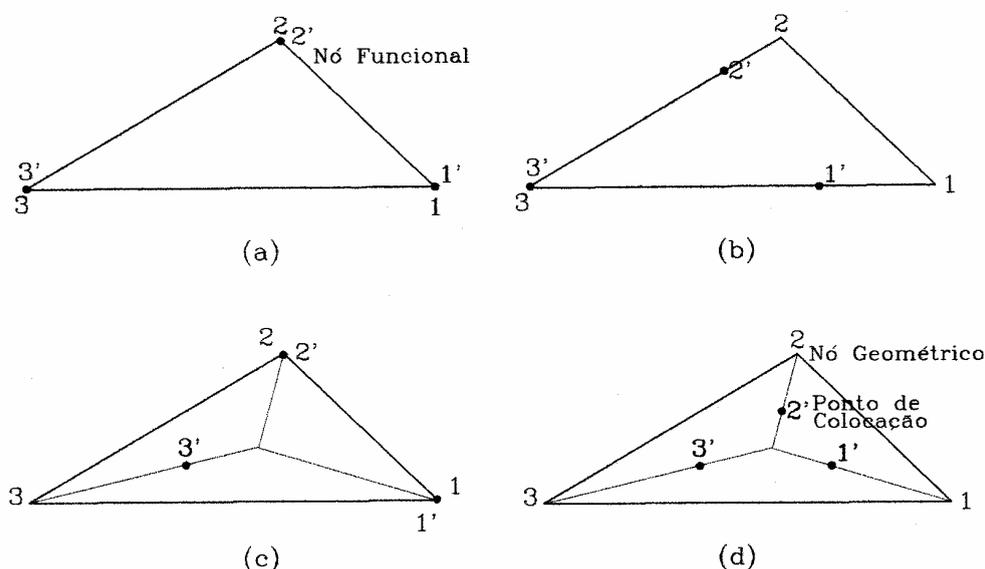


Figura 3.5.2 – Tipos de elemento linear: (a) contínuo; (b) e (c) de transição; e (d) descontínuo.

O elemento linear contínuo, ou isoparamétrico linear, possui os nós funcionais coincidentes com os nós geométricos, ou seja, não se podem modelar diretamente contornos descontínuos através desse elemento.

O elemento linear descontínuo, não conforme ou de colocação não nodal, possui os três nós de colocação deslocados de seus nós geométricos que estão associados a um único elemento, esse elemento permite a modelagem de contornos onde existem descontinuidades de forças de superfície ou de geometria.

E, por fim, o elemento linear de transição possui alguns de seus pontos de colocação coincidentes com os seus nós geométricos. Esse elemento é muito interessante, pois permite uma

discretização mais lógica, já que se podem definir os nós deslocados apenas em regiões onde há descontinuidade. Sua formulação é baseada numa combinação das formulações dos elementos contínuos e descontínuos.

A seguir, mostra-se a caracterização e definição do elemento triangular linear descontínuo. Como já definido, este elemento possui os três pontos de colocação deslocados de seus nós geométricos, desta forma pode-se discretizar contornos descontínuos (com angulosidades). Nesse elemento é feita uma interpolação nos valores das variáveis (deslocamentos e forças de superfície) devido a nova posição dos pontos de colocação (internos ao elemento), ver figura 3.5.3.

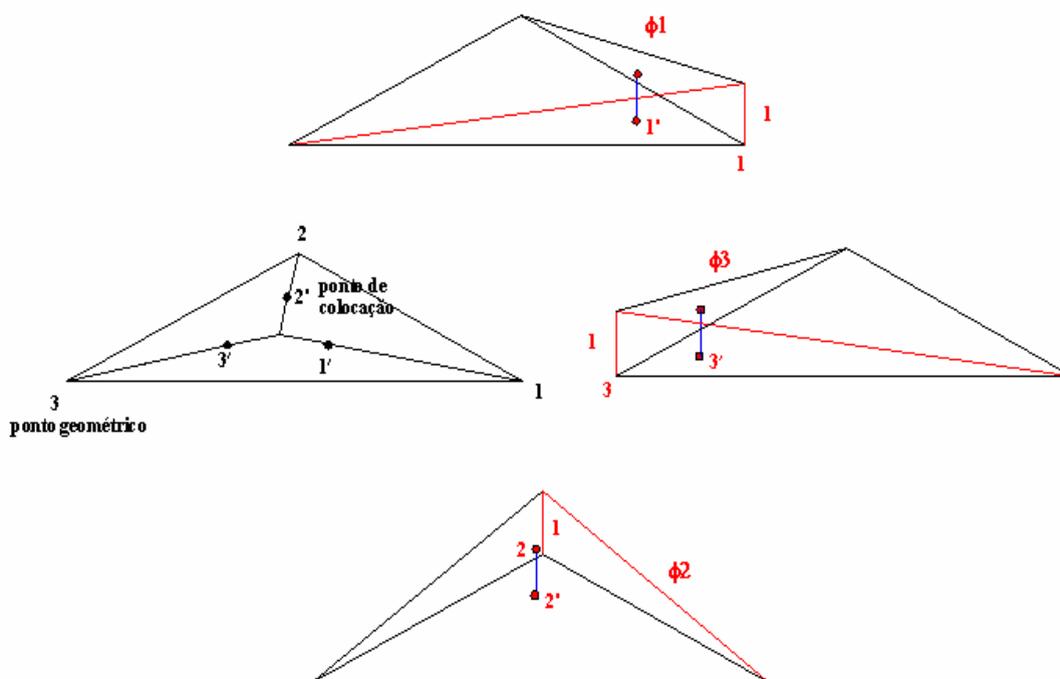


Figura 3.5.3 –Elemento triangular linear descontínuo

As componentes de deslocamentos e forças de superfície na direção i para qualquer nó (u_i e p_i) podem ser encontradas em função das componentes nodais na mesma direção, como :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & 0 & 0 & \mathbf{x}_2 & 0 & 0 & \mathbf{x}_3 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{x}_1 & 0 & 0 & \mathbf{x}_2 & 0 & 0 & \mathbf{x}_3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{x}_1 & 0 & 0 & \mathbf{x}_2 & 0 & 0 & \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_3^2 \\ U_1^3 \\ U_2^3 \\ U_3^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & 0 & 0 & \mathbf{x}_2 & 0 & 0 & \mathbf{x}_3 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{x}_1 & 0 & 0 & \mathbf{x}_2 & 0 & 0 & \mathbf{x}_3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{x}_1 & 0 & 0 & \mathbf{x}_2 & 0 & 0 & \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \\ P_3^1 \\ P_1^2 \\ P_2^2 \\ P_3^2 \\ P_1^3 \\ P_2^3 \\ P_3^3 \end{bmatrix} \tag{3.5.12a-b}$$

Sendo assim, a matriz c definida na eq. (3.5.8) para o elemento triangular linear descontínuo é encontrada

$$c(S) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{x}}_2 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{x}}_3 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{x}}_1 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{x}}_2 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{x}}_3 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{x}}_1 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{x}}_2 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{x}}_3 \end{bmatrix} \tag{3.5.13}$$

onde as coordenadas de área $\bar{\mathbf{x}}_i$ são definidas nos pontos de colocação S deslocado para o interior do elemento sobre a mediana do lado oposto ao vértice do triângulo relacionado ao ponto. Chamando de f , a distância entre o vértice do triângulo e o seu centróide, o deslocamento do ponto nodal que é aqui chamado de \mathbf{w} , fica definido como

$$\mathbf{w} = 0,525f \quad \text{ou} \quad 0,65f \tag{3.5.14}$$

onde, estes percentuais são medidos a partir do vértice do triângulo. Tomando como exemplo o percentual referente a 0,525f, segundo BARBIRATO (1999), e utilizando as técnicas para determinação das coordenadas de área, encontram-se os seguintes valores em um dado ponto de colocação S: $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0,175$ e $\bar{x}_3 = 0,65$.

Após a realização de diversos testes para diversos pontos de colocação encontram-se resultados mais precisos em pontos localizados no intervalo em que os extremos inferior e superior são os valores definidos em (3.5.14).

3.5.3 – INTEGRAÇÕES NUMÉRICAS

A partir das equações já definidas, devem-se obter as soluções analíticas das mesmas, porém, vale ressaltar que as funções integradas são bastante complexas gerando uma grande dificuldade na obtenção destas equações. Desta forma, são aplicados métodos numéricos de integração para a resolução das equações previamente apresentadas.

Fazendo uma simplificação da eq. (3.5.8), sem considerar o termo que se refere as forças de volume, verifica-se a existência de uma soma de integrais aplicadas sobre cada elemento do contorno, onde estas integrais são chamadas a partir de agora de **g** e **h**, conforme mostrado a seguir

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \int_{\Gamma_1} \mathbf{p}^* (\mathbf{S}, \mathbf{Q}) \phi^T (\mathbf{Q}) d\Gamma (\mathbf{Q}) \\ \mathbf{g} &= \int_{\Gamma_1} \mathbf{u}^* (\mathbf{S}, \mathbf{Q}) \phi^T (\mathbf{Q}) d\Gamma (\mathbf{Q}) \end{aligned} \quad (3.5.15a-b)$$

No estudo dos Elementos de Contorno, como já foi mencionado, pode-se encontrar dois tipos de situações para sua integração dependendo da posição do ponto de colocação S. Neste trabalho, quando este ponto encontra-se no elemento a ser integrado, a integração numérica a ser realizada chama-se integração singular ou semi-analítica; caso o mesmo esteja situado fora do elemento chama-se de integração numérica. A análise destas duas integrações é mostrada a seguir.

3.5.3.1 – INTEGRAÇÃO SINGULAR OU SEMI-ANALÍTICA

Como mencionado no parágrafo anterior, a integração singular é utilizada quando o ponto de colocação pertence ao elemento estudado L , neste caso aparecerá uma singularidade devido à solução fundamental de Kelvin em que as expressões u^* e p^* são escritas em função da coordenada esférica r apresentando singularidades nas vizinhanças do ponto S .

Nesse trabalho é utilizado um procedimento que consiste em fazer uma transformação no sistema de coordenadas que passa a ser chamado de $(\bar{x}, \bar{y}$ e $\bar{z})$, onde o plano $\bar{x}\bar{y}$ contém o elemento L , conforme mostrado na figura (3.5.4).

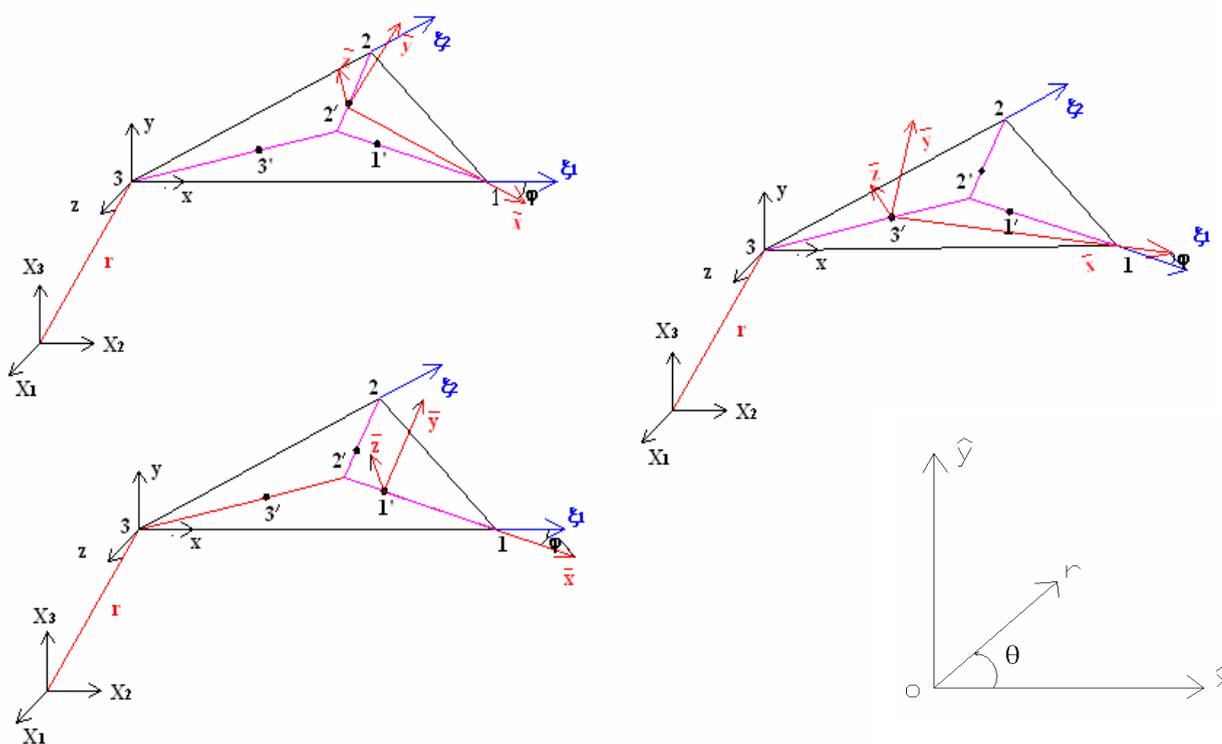


Figura 3.5.4 – Definição da integração singular.

A partir desta análise, define-se o contorno do elemento em função das coordenadas polares r e \mathbf{q} e a integração singular é efetuada através de integração analítica em r e numérica em \mathbf{q} .

Fazendo a substituição das expressões (3.3.3) e (3.3.7) nas eqs. (3.5.15a-b), encontra-se:

$$\mathbf{h} = \int_{\Gamma_1} \frac{\mathbf{B}'(1-2\nu)\delta_{ij}\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j\mathbf{n}}{r^2} \phi^T \mathbf{d}\Gamma + \int_{\Gamma_1} \frac{3\mathbf{B}'\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j\mathbf{n}}{r^2} \phi^T \mathbf{d}\Gamma - \int_{\Gamma_1} \frac{\mathbf{B}'(1-2\nu)\mathbf{r}_i\mathbf{n}_j}{r^2} \phi^T \mathbf{d}\Gamma + \int_{\Gamma_1} \frac{\mathbf{B}'(1-2\nu)\mathbf{r}_j\mathbf{n}_i}{r^2} \phi^T \mathbf{d}\Gamma; \mathbf{e} \quad (3.5.16a)$$

$$\mathbf{g} = \int_{\Gamma_1} \frac{\mathbf{A}'(3-4\nu)\delta_{ij}}{r} \phi^T \mathbf{d}\Gamma + \int_{\Gamma_1} \frac{\mathbf{A}'\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j}{r} \phi^T \mathbf{d}\Gamma \quad (3.5.16b)$$

onde

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{16\mathbf{p}(1-n)\mathbf{m}}; \mathbf{e} \quad (3.5.17a)$$

$$\mathbf{B}' = \frac{-1}{8\mathbf{p}(1-n)} \quad (3.5.17b)$$

Utilizando notação indicial para a solução das integrais e fazendo um rearranjo, pode-se encontrar a expressão final para \mathbf{g} e \mathbf{h}

$$\mathbf{h} = 3\mathbf{B}'(1-2\nu) \int_{\Gamma_1} \frac{\mathbf{r}_i}{r^2} \phi^T \mathbf{d}\Gamma + \mathbf{B}'(1-2\nu) \left(- \int_{\Gamma_1} \frac{\mathbf{r}_i}{r^2} \mathbf{n}_j \phi^T \mathbf{d}\Gamma + \int_{\Gamma_1} \frac{\mathbf{r}_j}{r^2} \mathbf{n}_i \phi^T \mathbf{d}\Gamma \right) + 3\mathbf{B}' \int_{\Gamma_1} \frac{\mathbf{r}_j}{r^2} \eta_i \phi^T \mathbf{d}\Gamma; \mathbf{e} \quad (3.5.18a)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}'(3-4\nu)\delta_{ij} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{r} \phi^T \mathbf{d}\Gamma + \mathbf{A}' \int_{\Gamma_1} \frac{\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j}{r} \phi^T \mathbf{d}\Gamma \quad (3.5.18b)$$

onde \mathbf{n}_i e \mathbf{n}_j são, respectivamente, os vetores normais nas direções cartesianas “i” e “j” e $\mathbf{h}_i = \mathbf{X}_{i,n}$ ou seja, são os co-senos diretores da normal em relação aos eixos cartesianos \mathbf{X}_i .

Visando diminuir o tamanho das expressões apresentadas, a integração analítica em r pode ser dividida em três parcelas distintas e gerais para a solução fundamental de Kelvin,

$$\begin{aligned} \mathbf{p1}(\mathbf{f}) &= \int_{\Gamma_1} \frac{1}{r} \xi_f \mathbf{d}\Gamma \\ \mathbf{p2}(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{f}) &= \int_{\Gamma_1} \frac{\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j}{r} \xi_f \mathbf{d}\Gamma \\ \mathbf{p3}(\mathbf{i}, \mathbf{f}) &= \int_{\Gamma_1} \frac{\mathbf{r}_i}{r^2} \xi_f \mathbf{d}\Gamma \end{aligned} \quad (3.5.19a-c)$$

Observando a figura (3.5.4), precisa-se definir a relação linear existente entre as coordenadas cartesianas (x,y) e as coordenadas de área (\mathbf{x}_f) expressa pelas seguintes equações

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{Bmatrix} = [\mathbf{A}]^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (3.5.20)$$

onde $x_{ij} = x_i - x_j$ e $y_{ij} = y_i - y_j$ e

$$[\mathbf{A}]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & y_{23} & x_{32} \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 & y_{31} & y_{13} \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & y_{12} & y_{21} \end{bmatrix}, \text{ onde } 2A = \det[\mathbf{A}] = x_{21} y_{31} - x_{31} y_{21}. \quad (3.5.21)$$

Representando as expressões acima na forma de notação indicial, tem-se

$$\mathbf{x}_f = \frac{1}{2A} [\mathbf{a}_f + \mathbf{b}_f x + \mathbf{g}_f y], \quad (3.5.22)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_f &= x_j y_k - x_k y_j; \\ \mathbf{b}_f &= y_j - y_k; \\ \mathbf{g}_f &= x_k - x_j; e \end{aligned} \quad (3.5.23a-d)$$

$$\begin{cases} j=2, k=3 & p/f=1 \\ j=3, k=1 & p/f=2 \\ j=1, k=2 & p/f=3 \end{cases}$$

Fazendo-se a mudança para o novo sistema $\widehat{x}\widehat{y}$, tem-se

$$\begin{aligned} \widehat{x} &= r \cos q; \\ \widehat{y} &= r \sin q; e \end{aligned} \quad (3.5.24a-b)$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos j & \sin j & 0 \\ -\sin j & \cos j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \\ \widehat{z} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{Bmatrix} \quad (3.5.25)$$

Desta forma,

$$\mathbf{x}_f = \frac{1}{2A} [A_f + B_f \widehat{x} + C_f \widehat{y}], \quad (3.5.26)$$

onde

$$\begin{aligned} A_f &= \mathbf{a}_f + \mathbf{b}_f x_o + \mathbf{g}_f y_o; \\ B_f &= \mathbf{b}_f \cos j - \mathbf{g}_f \sin j; \\ C_f &= \mathbf{b}_f \sin j + \mathbf{g}_f \cos j \end{aligned} \quad (3.5.27a-c)$$

A partir das coordenadas adimensionais de área, as integrais analíticas em r definidas em (3.5.19a-c) podem ser facilmente determinadas. Considerando ainda $d\Gamma = r dr d\mathbf{q}$, encontram-se as parcelas $p1(f)$ e $p2(i, j, f)$

$$\begin{aligned} p1(f) &= \frac{1}{2A} \int_{\mathbf{q}} \left(A_f + \frac{B_f}{2} r \cos \mathbf{q} + \frac{C_f}{2} r \sin \mathbf{q} \right) r d\mathbf{q} \\ p2(i, j, f) &= \frac{1}{2A} \int_{r_i, r_j} \left(A_f + \frac{B_f}{2} r \cos \mathbf{q} + \frac{C_f}{2} r \sin \mathbf{q} \right) r d\mathbf{q} \end{aligned} \quad (3.5.28a-b)$$

Ao resolver a integral definida na parcela $p3(i, f)$ verifica-se que a mesma é singular quando $r = 0$, desta forma a análise desta parcela precisa ser melhor detalhada. A integração pode ser definida por

$$p3(i, f) = \frac{1}{2A} \int_{r_i} \left(A_f \ln(r) + B_f r \cos \mathbf{q} + C_f r \sin \mathbf{q} \right) d\mathbf{q} - \lim_{e \rightarrow 0} \int_{\mathbf{q}} A_f \ln(e) r_i d\mathbf{q} \quad (3.5.29)$$

Analisando-se o integrando da parcela do limite indicado em (3.5.29), pode-se ver que a derivada da variável r em relação à direção cartesiana i pode ser representada por:

$$r_{,i} = m_{i1} \cos \mathbf{q} + m_{i2} \sin \mathbf{q}, \quad (3.5.30)$$

onde m_{ij} são os co-senos diretores no ponto em análise em relação a x_i .

Levando-se em consideração que o ângulo \mathbf{q} tem uma variação de 0 a $2\mathbf{p}$, a integral definida no limite tem valor nulo e o limite tende a zero, ou seja,

$$\lim_{e \rightarrow 0} \int_0^{2\mathbf{p}} A_f \ln(e) (m_{i1} \cos \mathbf{q} + m_{i2} \sin \mathbf{q}) d\mathbf{q} = 0. \quad (3.5.31)$$

Desta forma, a parcela $p3(i, f)$ é definida de forma resumida como

$$p3(i, f) = \frac{1}{2A} \int_{\mathbf{q}} r_i \left(A_f \ln(r) + B_f r \cos \mathbf{q} + C_f r \sin \mathbf{q} \right) d\mathbf{q} \quad (3.5.32)$$

Vale ressaltar, que para o elemento linear descontínuo, o ponto de colocação S é deslocado para dentro do elemento j em estudo. Sendo assim, pode-se utilizar a expressão (3.5.32), pois, os extremos inferior e superior para o ângulo \mathbf{q} são sempre 0 e $2\mathbf{p}$.

Após encontrar as expressões para as três parcelas, deve-se agora, utilizar um procedimento numérico para a integração em \mathbf{q} . Neste trabalho é realizada uma transformação de cada elemento triangular plano em um domínio cujo contorno $\bar{\Gamma}$ possui três elementos unidimensionais retos, conforme mostrado a seguir

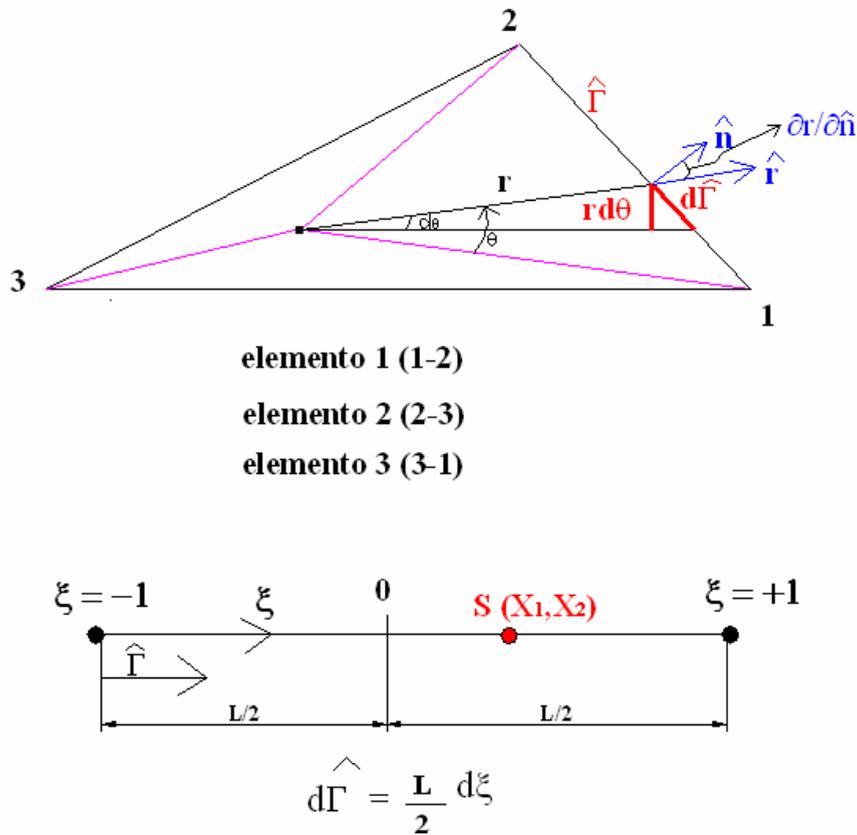


Figura 3.5.5 –Representação do elemento unidimensional linear e Integração no contorno fictício do elemento triangular (Fonte: Barbirato, 1999).

Fazendo-se uma simples análise trigonométrica do elemento triangular definido na figura (3.5.5) visando uma relação diferencial entre $d\mathbf{q}$ e $d\hat{\Gamma}$ para representar o elemento de superfície através de três elementos lineares de contorno, tem-se

$$r d\mathbf{q} = \frac{\partial r}{\partial \hat{n}} d\hat{\Gamma} \quad (3.5.33)$$

Desta forma, as expressões (3.5.28a-b) e (3.5.32) podem ser reescritas e representadas da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 p1(f) &= \frac{1}{2A_r} \int_{\hat{\Gamma}} \left(A_f + \frac{B_f}{2} r \cos \mathbf{q} + \frac{C_f}{2} r \operatorname{sen} \mathbf{q} \right) \frac{\partial r}{\partial \hat{n}} d\hat{\Gamma} \\
 p2(i, j, f) &= \frac{1}{2A_r} \int_{\hat{\Gamma}} r_{,i} r_{,j} \left(A_f + \frac{B_f}{2} r \cos \mathbf{q} + \frac{C_f}{2} r \operatorname{sen} \mathbf{q} \right) \frac{\partial r}{\partial \hat{n}} d\hat{\Gamma} \\
 p3(i, f) &= \frac{1}{2A_r} \int_{\hat{\Gamma}} r_{,i} \left(A_f \ln(r) + B_f r \cos \mathbf{q} + C_f r \operatorname{sen} \mathbf{q} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \hat{n}} d\hat{\Gamma}
 \end{aligned} \quad (3.5.34a-c)$$

A partir das relações anteriormente definidas em (3.5.23a-d), (3.5.24a-b) e (3.5.25), tem-se ainda

$$\begin{aligned}
 p1(f) &= \frac{1}{4A} \int_{\bar{\Gamma}} (2\mathbf{a}_f + \mathbf{b}_f(x + x_o) + \mathbf{g}_f(x + x_o)) \frac{\partial r}{\partial \bar{n}} d\bar{\Gamma} \\
 p2(i, j, f) &= \frac{1}{4A} \int_{\bar{\Gamma}}^{r_i, r_j} (2\mathbf{a}_f + \mathbf{b}_f(x + x_o) + \mathbf{g}_f(x + x_o)) \frac{\partial r}{\partial \bar{n}} d\bar{\Gamma} \\
 p3(i, f) &= \frac{1}{2A} \int_{\bar{\Gamma}}^{r_i} \frac{1}{r} \{ \mathbf{a}_f \ln(r) + \mathbf{b}_f[x + x_o(\ln(r) - 1)] + \mathbf{g}_f[y + y_o(\ln(r) - 1)] \} \frac{\partial r}{\partial \bar{n}} d\bar{\Gamma}
 \end{aligned} \tag{3.5.35a-c}$$

Após as definições das expressões (3.5.35a-c) pode-se reescrever as expressões referentes a g e h calculadas numericamente através da quadratura Gaussiana, ver anexo A. A figura (3.5.5) acima, define o elemento utilizado no contorno fictício do elemento triangular, bem como os seus parâmetros importantes.

$$\begin{aligned}
 g &= |J| \sum_{k=1}^{N_{PG}} \bar{h}_g(\mathbf{x}) w_k \\
 h &= |J| \sum_{k=1}^{N_{PG}} \bar{h}_h(\mathbf{x}) w_k
 \end{aligned} \tag{3.5.36a-b}$$

onde $|J|$ é o jacobiano de transformação de coordenadas para o elemento unidimensional reto, ver COOK et al. (1989), definido como $\frac{L}{2}$, onde L é o comprimento do elemento; w_k é o peso de Gauss no ponto k, ver anexo A; \bar{h}_g e \bar{h}_h são os integrandos (3.5.18a-b) utilizando as expressões (3.5.35a-c), conforme mostrado nas expressões (3.5.37a-b); e N_{PG} representa o número de pontos de Gauss a ser utilizado no elemento.

$$\begin{aligned}
 \bar{h}_g &= \frac{A'(3 - 4\mathbf{n})\mathbf{d}_{ij}}{4A} \int_{\bar{\Gamma}} (2\mathbf{a}_f + \mathbf{b}_f(x + x_o) + \mathbf{g}_f(x + x_o)) \mathbf{f}^T \frac{\partial r}{\partial \bar{n}} d\bar{\Gamma} \\
 &+ \frac{A'}{4A} \int_{\bar{\Gamma}}^{r_i, r_j} (2\mathbf{a}_f + \mathbf{b}_f(x + x_o) + \mathbf{g}_f(x + x_o)) \mathbf{f}^T \frac{\partial r}{\partial \bar{n}} d\bar{\Gamma}; e
 \end{aligned} \tag{3.5.37a}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{h}_h &= \frac{B'(1 - 2\mathbf{n})}{A} \int_{\bar{\Gamma}}^{r_i} \frac{1}{r} \{ \mathbf{a}_f \ln(r) + \mathbf{b}_f[x + x_o(\ln(r) - 1)] + \mathbf{g}_f[y + y_o(\ln(r) - 1)] \} \mathbf{f}^T \frac{\partial r}{\partial \bar{n}} d\bar{\Gamma} + \\
 &\frac{B'(1 - 2\mathbf{n})}{2A} \int_{\bar{\Gamma}}^{r_i, r_j} \frac{1}{r} \{ \mathbf{a}_f \ln(r) + \mathbf{b}_f[x + x_o(\ln(r) - 1)] + \mathbf{g}_f[y + y_o(\ln(r) - 1)] \} \mathbf{n}_i \mathbf{f}^T \frac{\partial r}{\partial \bar{n}} d\bar{\Gamma} + \\
 &+ \frac{3B'}{2A} \int_{\bar{\Gamma}}^{r_i, r_j} \frac{1}{r} \{ \mathbf{a}_f \ln(r) + \mathbf{b}_f[x + x_o(\ln(r) - 1)] + \mathbf{g}_f[y + y_o(\ln(r) - 1)] \} \mathbf{h}_i \mathbf{f}^T \frac{\partial r}{\partial \bar{n}} d\bar{\Gamma}
 \end{aligned} \tag{3.5.37b}$$

Vale lembrar que as expressões (3.5.35a-c) são válidas para a solução fundamental de Kelvin que está sendo utilizada neste trabalho para a discretização do solo pela formulação elastostática do Método dos Elementos de Contorno (MEC).

3.5.3.2 – INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

A integral numérica ocorre quando o ponto de colocação não pertence ao elemento a ser integrado.

Esta integração é a forma mais direta de se calcular a integral sobre um elemento. No caso utilizado neste trabalho de aproximações lineares, esta integração é feita através da quadratura de Hammer, podendo ser facilmente encontrada em diversas tabelas (ver BREBBIA et al., 1984), onde é utilizado o Jacobiano de transformação $|G|$ em relação às coordenadas adimensionais de área.

As integrais (3.5.15a-b) são obtidas através da integração sobre cada elemento do contorno, já que o ponto de colocação não pertence ao elemento a ser integrado, sendo realizada uma transformação de coordenadas globais para coordenadas de área, conforme mostrado abaixo:

$$g = |G| \int_0^1 \int_0^{1-x_2} h_g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2$$

$$h = |G| \int_0^1 \int_0^{1-x_2} h_h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2, \quad (3.5.38a-b)$$

Aplicando-se a integração numérica de Hammer através da quadratura na forma de somatório, tem-se:

$$g = |G| \sum_{k=1}^n h_g(\mathbf{x}_1^k, \mathbf{x}_2^k) w_k$$

$$h = |G| \sum_{k=1}^n h_h(\mathbf{x}_1^k, \mathbf{x}_2^k) w_k, \quad (3.5.39a-b)$$

onde n representa o número de pontos de Hammer, $|G|$ é o jacobiano de transformação e vale $2A$, \mathbf{x}_1^k e \mathbf{x}_2^k são as coordenadas de área do ponto a ser considerado, w_k é o valor do peso associado ao ponto de integração k e h_g e h_h são os integrandos das integrais definidas nas expressões (3.5.15a-b).

Sabe-se que as funções envolvidas nas integrações são singulares, desta forma, a precisão da integração de Hammer é prejudicada pela distância “ r ” entre os pontos de colocação S e de

campo Q . Em casos onde essa distância é relativamente grande comparada com o tamanho dos lados dos elementos triangulares o procedimento de Hammer fornece ótimos resultados, caso contrário, a alternativa utilizada consiste em subdividir o elemento l qualquer em sub- elementos e aplica-se a integração de Hammer em cada elemento separadamente, ocasionando em um número maior de pontos de integração, objetivando a obtenção de resultados mais precisos.

Neste trabalho, quando o ponto S está bem próximo do elemento a ser integrado, divide-se esse elemento em 25 partes iguais gerando 25 sub-elementos conforme pode ser observado no trabalho de KANE, 1994.

3.5.4 – DESLOCAMENTOS E TENSÕES EM PONTOS DO DOMÍNIO

A identidade de Somigliana, eq. (3.4.1), fornece os deslocamentos em pontos internos (pontos do domínio) em termos dos deslocamentos u e forças de superfície p no contorno. Considerando novamente esta representação de integral como em (3.5.8) tem-se

$$u(s) = - \sum_{l=1}^L \left[\int_{\Gamma_l} p^*(s, Q) \phi^T(Q) d\Gamma(Q) \right] U^j + \sum_{l=1}^L \left[\int_{\Gamma_l} u^*(s, Q) \phi^T(Q) d\Gamma(Q) \right] P^j + \sum_{m=1}^M \left[\int_{\Omega_m} u^*(s, q) \phi_c^T(q) d\Omega(q) \right] B^j \quad (3.5.40)$$

onde Γ_l é a superfície correspondente ao elemento l e “ S ” é agora um ponto interno.

A forma matricial da eq. (3.5.40) é definida como

$$\mathbf{u} = -\mathbf{HU} + \mathbf{GP} + \mathbf{DB} \quad (3.5.41)$$

onde, o vetor com as componentes de deslocamentos é

$$u(s) = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (3.5.42)$$

Vale ressaltar que as integrais da eq. (3.5.40) são calculadas através do procedimento de integração numérica, adotando-se a divisão do elemento triangular em sub-elementos objetivando desta forma, a otimização dos resultados encontrados para os deslocamentos em pontos internos.

Para um sólido isotrópico, homogêneo e tri-dimensional, as tensões em pontos do domínio podem ser calculadas da mesma forma que os deslocamentos, ou seja, a partir da eq. (3.4.2) tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma(s) = & - \sum_{l=1}^L \left[\int_{\Gamma_l} S^*(s, Q) \phi^T(Q) d\Gamma(Q) \right] U^j + \sum_{l=1}^L \left[\int_{\Gamma_l} D^*(s, Q) \phi^T(Q) d\Gamma(Q) \right] P^j \\ & + \sum_{m=1}^M \left[\int_{\Omega_m} D^*(s, q) \phi_c^T(q) d\Omega(q) \right] B^j, \end{aligned} \quad (3.5.43)$$

A forma matricial da eq. (3.5.43) é definida como

$$\mathbf{s} = -\bar{\mathbf{H}}\mathbf{U} + \bar{\mathbf{G}}\mathbf{P} + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{B} \quad (3.5.44)$$

onde, o vetor com as componentes de deslocamentos é

$$\mathbf{s}(s) = \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_{11} \\ \mathbf{s}_{12} \\ \mathbf{s}_{13} \\ \mathbf{s}_{22} \\ \mathbf{s}_{23} \\ \mathbf{s}_{33} \end{Bmatrix} \quad \text{ou ainda } \mathbf{s}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{11} & \mathbf{s}_{12} & \mathbf{s}_{13} \\ \mathbf{s}_{21} & \mathbf{s}_{22} & \mathbf{s}_{23} \\ \mathbf{s}_{31} & \mathbf{s}_{32} & \mathbf{s}_{33} \end{bmatrix} \quad (3.5.45a-b)$$

O traço utilizado sobre as matrizes \mathbf{H} , \mathbf{G} e \mathbf{D} serve apenas para diferenciar das matrizes envolvidas na eq. (3.5.41) e os tensores de terceira ordem S^* e D^* já foram definidos em (3.4.3) e (3.4.4).

As integrais envolvidas na eq. (3.5.43) são resolvidas utilizando-se a integração numérica de Hammer.

3.5.5 – TENSÕES EM PONTOS DO CONTORNO

A eq. (3.5.43) pode ser utilizada para o cálculo das tensões em pontos do contorno, mas, vale ressaltar que esta equação pode gerar singularidades nestes pontos. Para problemas tridimensionais, os termos dos tensores de terceira ordem D^* e S^* contêm singularidades do tipo $\frac{1}{r^2}$, $\frac{1}{r^3}$ respectivamente, exigindo considerações especiais.

Desta forma, de acordo com BREBBIA et al. (1984), um caminho mais simples e eficiente de se determinar tensões em pontos do contorno consiste em utilizar uma aproximação para as deformações a partir dos valores dos deslocamentos nos nós dos elementos.

A partir de um ponto nodal definido no elemento, pode-se representar as componentes do tensor de tensão através de um elemento infinitesimal, onde as componentes de tensão na direção 3 são as próprias forças de superfície neste nó, ou seja, podemos definir primeiramente as expressões

das componentes do tensor de tensão. Utilizando a expressão que define forças de superfície e, ainda, a Lei de Hooke, pode-se escrever

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{s}}_{11} &= (2\mathbf{m} + \mathbf{I})\mathbf{e}_{11} + \mathbf{I}(\mathbf{e}_{22} + \mathbf{e}_{33}) \\
 \bar{\mathbf{s}}_{12} &= 2\mathbf{m}\mathbf{e}_{12} \\
 \bar{\mathbf{s}}_{22} &= (2\mathbf{m} + \mathbf{I})\mathbf{e}_{22} + \mathbf{I}(\mathbf{e}_{11} + \mathbf{e}_{33}) \\
 \bar{\mathbf{s}}_{31} &= P_1 \\
 \bar{\mathbf{s}}_{32} &= P_2 \\
 \bar{\mathbf{s}}_{33} &= P_3
 \end{aligned} \tag{3.5.46a-f}$$

Conhecendo-se a expressão de $\bar{\mathbf{s}}_{33}$ através da Lei de Hooke e igualando ao valor da força de superfície nesta direção, é possível encontrar o valor da componente de deformação \mathbf{e}_{33} , como mostrado a seguir

$$\bar{\mathbf{s}}_{33} = P_3 = (2\mathbf{m} + \mathbf{I})\mathbf{e}_{33} + \mathbf{I}(\mathbf{e}_{11} + \mathbf{e}_{22}), \tag{3.5.47}$$

Colocando o valor de \mathbf{e}_{33} em função da força de superfície, tem-se

$$\mathbf{e}_{33} = \frac{1}{(2\mathbf{m} + \mathbf{I})} [P_3 - \mathbf{I}(\mathbf{e}_{11} + \mathbf{e}_{22})] \tag{3.5.48}$$

Substituindo a eq. (3.5.48) em (3.5.46a-c), encontra-se

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{s}}_{11} &= (2\mathbf{m} + \mathbf{I})\mathbf{e}_{11} + \mathbf{I}\left(\mathbf{e}_{22} + \frac{1}{(2\mathbf{m} + \mathbf{I})} [P_3 - \mathbf{I}(\mathbf{e}_{11} + \mathbf{e}_{22})]\right) \\
 \bar{\mathbf{s}}_{12} &= 2\mathbf{m}\mathbf{e}_{12} \\
 \bar{\mathbf{s}}_{22} &= (2\mathbf{m} + \mathbf{I})\mathbf{e}_{22} + \mathbf{I}\left(\mathbf{e}_{11} + \frac{1}{(2\mathbf{m} + \mathbf{I})} [P_3 - \mathbf{I}(\mathbf{e}_{11} + \mathbf{e}_{22})]\right) \\
 \bar{\mathbf{s}}_{31} &= P_1 \\
 \bar{\mathbf{s}}_{32} &= P_2 \\
 \bar{\mathbf{s}}_{33} &= P_3
 \end{aligned} \tag{3.5.49a-f}$$

As componentes de deslocamento em coordenadas locais podem ser representadas como:

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}^T \mathbf{U}^j \tag{3.5.50}$$

ou em termos de componentes, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 u_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \mathbf{f}^T \mathbf{U}_i^k = \mathbf{x}_1 U_i^1 + \mathbf{x}_2 U_i^2 + (1 - \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) U_i^3 \\
 \text{ou ainda,} & \\
 u_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \mathbf{f}^T \mathbf{U}_i^k = \mathbf{x}_1 (U_i^1 - U_i^3) + \mathbf{x}_2 (U_i^2 - U_i^3) + U_i^3.
 \end{aligned} \tag{3.5.51a-b}$$

onde U_i^k são os valores nodais dos deslocamentos nodais nas coordenadas locais, \mathbf{f}^T as funções interpoladoras já definidas anteriormente que podem ser polinomiais. As derivadas dos deslocamentos em relação às coordenadas de área são

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{x}_1} &= (U_i^1 - U_i^3) \\ \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{x}_2} &= (U_i^2 - U_i^3)\end{aligned}\tag{3.5.52a-b}$$

Vale ressaltar que, no caso de se conhecer os deslocamentos nas coordenadas globais, pode-se fazer a transformação das coordenadas para o sistema local através de uma matriz de transformação de coordenadas.

Assim como as componentes de deslocamentos, as coordenadas cartesianas também são expressas em função de seus valores nodais, como:

$$\begin{aligned}x_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \mathbf{f}^T \mathbf{x}_j^k = \mathbf{x}_1 x_j^1 + \mathbf{x}_2 x_j^2 + (1 - \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) x_j^3 \\ \text{ou ainda,} \\ x_j(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \mathbf{f}^T \mathbf{x}_j^k = \mathbf{x}_1 (x_j^1 - x_j^3) + \mathbf{x}_2 (x_j^2 - x_j^3) + x_j^3.\end{aligned}\tag{3.5.53a-b}$$

Derivando a expressão (3.5.53a-b) encontra-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_j}{\partial \mathbf{x}_1} &= x_j^1 - x_j^3 \\ \frac{\partial x_j}{\partial \mathbf{x}_2} &= x_j^2 - x_j^3\end{aligned}\tag{3.5.54a-b}$$

Verificando a expressão que define o tensor de deformações apresentado em (3.2.4) verifica-se que os deslocamentos são derivados em relação às coordenadas cartesianas, desta forma aplicando-se a regra da cadeia, encontra-se

$$\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{x}_k} = \frac{\partial x_j}{\partial \mathbf{x}_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\tag{3.5.55}$$

Por exemplo, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{x}_1} &= \frac{\partial x_1}{\partial \mathbf{x}_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \mathbf{x}_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{x}_2} &= \frac{\partial x_1}{\partial \mathbf{x}_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \mathbf{x}_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{x}_1} &= \frac{\partial x_1}{\partial \mathbf{x}_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \mathbf{x}_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{x}_2} &= \frac{\partial x_1}{\partial \mathbf{x}_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \mathbf{x}_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\end{aligned}\tag{3.5.56a-d}$$

ou, na forma matricial, pode-se representar

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_2} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \end{Bmatrix} \quad (3.5.57)$$

Representando a forma matricial (3.5.57) na forma inversa, encontra-se

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & -\frac{\partial x_2}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial x_1}{\partial x_2} & \frac{\partial x_1}{\partial x_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \end{Bmatrix} \quad (3.5.58)$$

Substituindo a equação matricial (3.5.58) em (3.5.49a-f) e fazendo

$$\mathbf{m} = \mathbf{G} = \frac{\mathbf{E}}{2(1+\mathbf{n})} \text{ e } \mathbf{l} = \frac{\mathbf{nE}}{(1+\mathbf{n})(1-2\mathbf{n})}, \text{ encontram-se as tensões em pontos do contorno de forma}$$

aproximada, conforme mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{s}}_{11} &= \frac{1}{1-\mathbf{n}} [2\mathbf{m}(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \mathbf{n} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}) + \mathbf{nP}_3] \\ \bar{\mathbf{s}}_{12} &= \mathbf{m}(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \mathbf{n} \frac{\partial u_2}{\partial x_1}) \\ \bar{\mathbf{s}}_{22} &= \frac{1}{1-\mathbf{n}} [2\mathbf{m}(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \mathbf{n} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}) + \mathbf{nP}_3] \\ \bar{\mathbf{s}}_{31} &= \mathbf{P}_1 \\ \bar{\mathbf{s}}_{32} &= \mathbf{P}_2 \\ \bar{\mathbf{s}}_{33} &= \mathbf{P}_3 \end{aligned} \quad (3.5.59a-f)$$

3.6 – EXEMPLOS

Nesta seção são apresentados alguns exemplos utilizando a formulação do Método dos Elementos de Contorno objetivando a aplicação do método em diversas análises em engenharia, bem como demonstrar a funcionalidade do programa desenvolvido no ambiente *MatLab* para o cálculo de deslocamentos e tensões.

No exemplo 3.1 é analisada a equação da linha elástica para uma viga engastada solicitada à flexão. Em seguida, no exemplo 3.2, mostra-se um paralelepípedo sólido elástico solicitado por uma força estática de tração, onde são analisados os valores do deslocamento na direção axial. Por fim, aplica-se um carregamento uniformemente distribuído sobre a superfície livre do semi-infinito visando à análise de deslocamentos a partir da solução fundamental de Kelvin.

3.6.1 – Exemplo 3.1

Nesse exemplo é feita uma análise de uma viga engastada em uma das extremidades e livre na outra, solicitada por uma força perpendicular ao seu eixo aplicada na extremidade livre, definindo o problema de uma viga à flexão. A figura 3.6.1 apresenta a viga em questão cujos parâmetros elásticos são $E = 2100 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$ e $\nu = 0,3$.

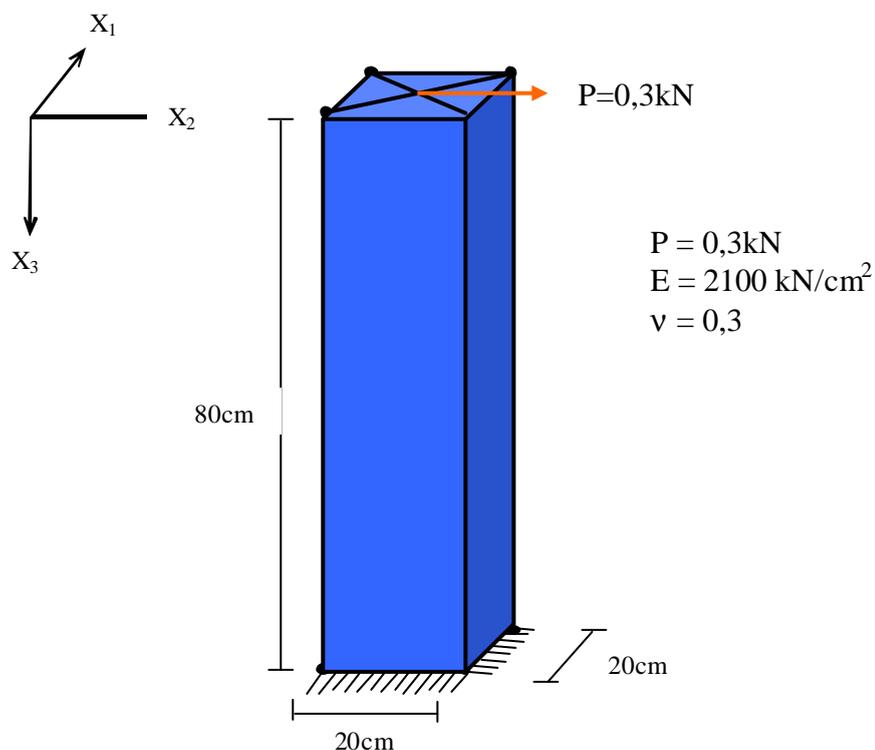
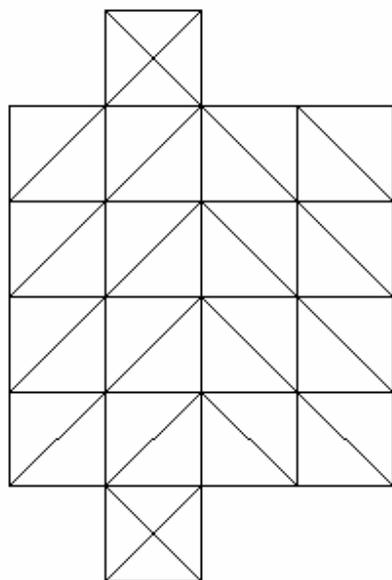
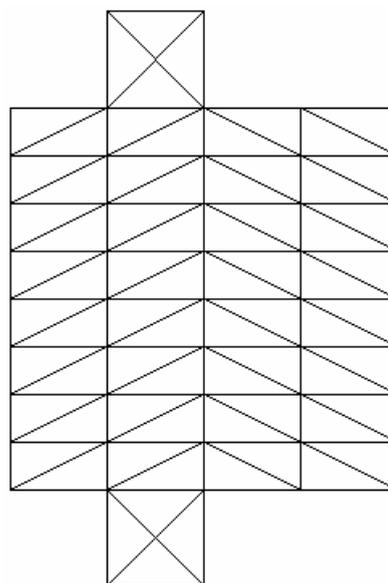


Figura 3.6.1 – Viga engastada com carregamento transversal na extremidade livre.

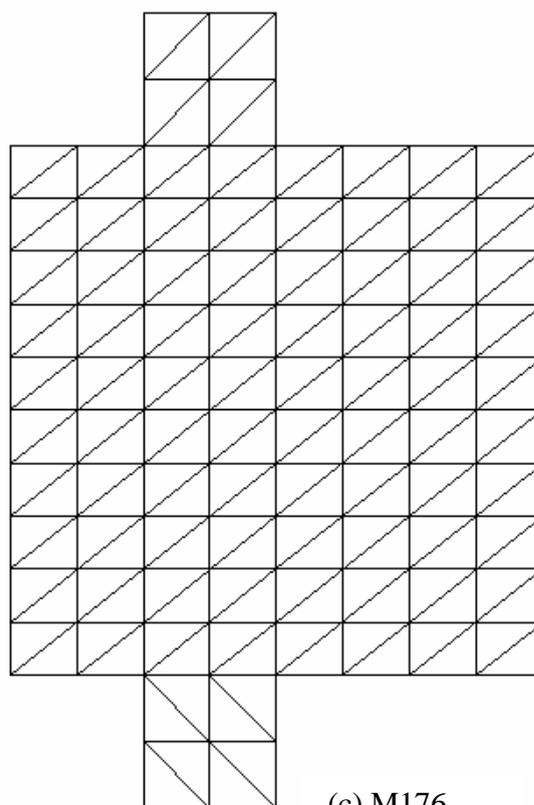
Na discretização da superfície de contorno da viga através de elementos triangulares planos descontínuos são utilizados três tipos de malhas denominadas de M40, M72 e M176, conforme figuras 3.6.2 e 3.6.3.



(a) M40

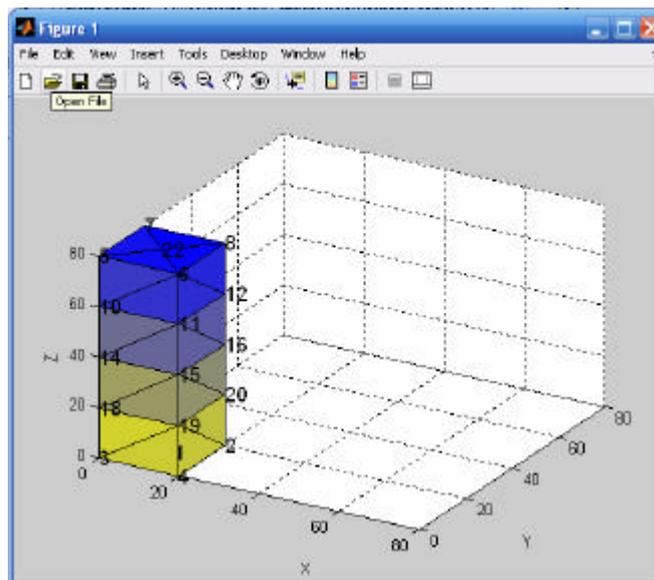


(b) M72

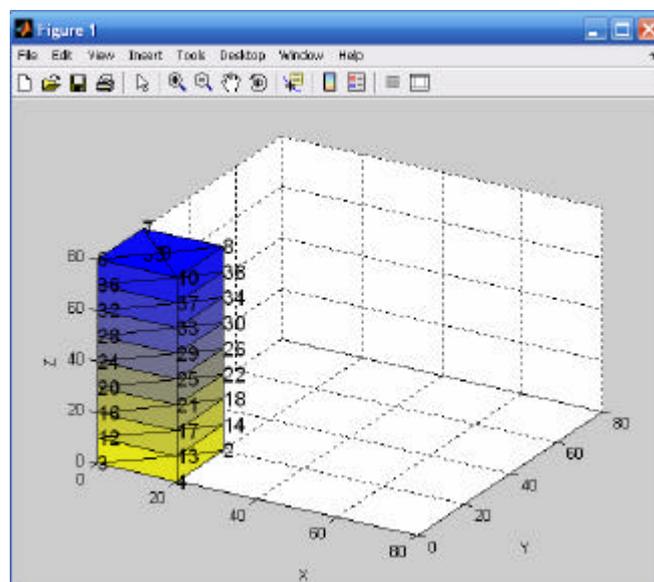


(c) M176

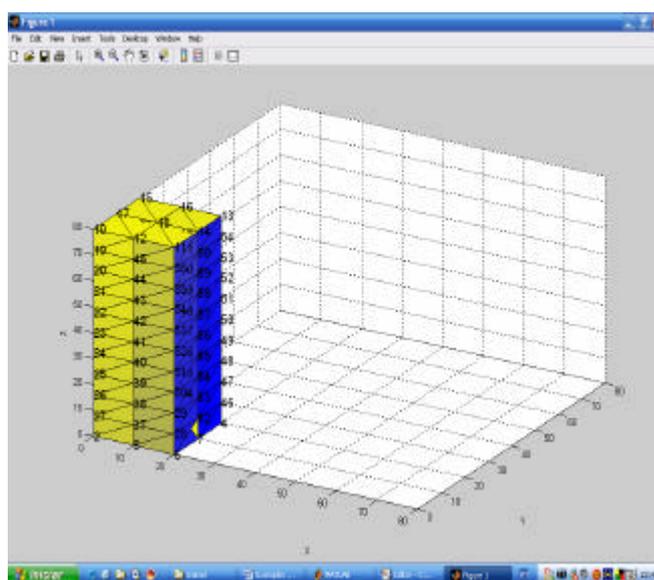
Figura 3.6.2 – Discretizações do contorno por elementos triangulares planos descontínuos: (a) M40, 40 elementos, (b) M72, 72 elementos e (c) M176, 176 elementos.



(a) M40



(b) M72



(c) M176

Figura 3.6.3 – Representação gráfica da geometria da viga mostrando as discretizações utilizadas: M40, M72 e M176.

Na formulação implementada nesta análise, o carregamento a ser aplicado no corpo passa a ser tratado por nó, desta forma, para o problema estudado neste exemplo, toma-se uma carga distribuída $P = 0,3\text{kN/cm}^2$ como sendo uma carga aplicada no nó central da superfície livre de contorno, como já mostrado na figura 3.6.1.

Sabe-se que o carregamento aplicado varia linearmente ao longo dos lados do elemento de contorno, logo, a carga aplicada no nó central resulta em um carregamento de forma piramidal. Esse carregamento possui intensidade de $0,3\text{kN/cm}^2$ no nó central e é nulo nos demais nós da superfície de contorno.

Sendo a área da seção transversal da viga em análise igual a $A_S = 400\text{ cm}^2$, o problema implica em uma força resultante perpendicular ao eixo do corpo de módulo igual ao volume da pirâmide formada, ou seja, 40kN .

A malha M40 utiliza 40 elementos triangulares planos com aproximação linear com 120 pontos de colocação e 360 graus de liberdade. A malha M72 apresenta 216 pontos de colocação e 648 graus de liberdade e a malha M176 possui 528 pontos de colocação e 1584 graus de liberdade.

Conforme verificado na figura 3.6.1, a viga possui seção transversal de $20\text{cm} \times 20\text{cm}$ com 80cm de comprimento. Aplicando-se a equação da linha elástica a partir da teoria de vigas, pode-se calcular o deslocamento transversal da mesma ao longo de seu comprimento e comparar com os valores encontrados para as discretizações postas no presente trabalho.

Nas tabelas 3.1, 3.2 e 3.3 são comparados os valores dos deslocamentos na direção X_2 ao longo do eixo X_3 da viga utilizando as discretizações M40, M72 e M176 com a solução analítica da teoria de vigas utilizando o código computacional obtido utilizando-se a formulação do MEC com a solução fundamental de Kelvin, apresentada nesse capítulo.

Tabela 3.1 – Linha elástica da viga analisada (valores em cm): Discretização M40.

coord. X3 (cm)	Teoria de Vigas	Discretização M40
80	0,0000	0,0000
60	0,0210	0,0213
40	0,0762	0,0736
20	0,1543	0,1468
0	0,2438	0,2311

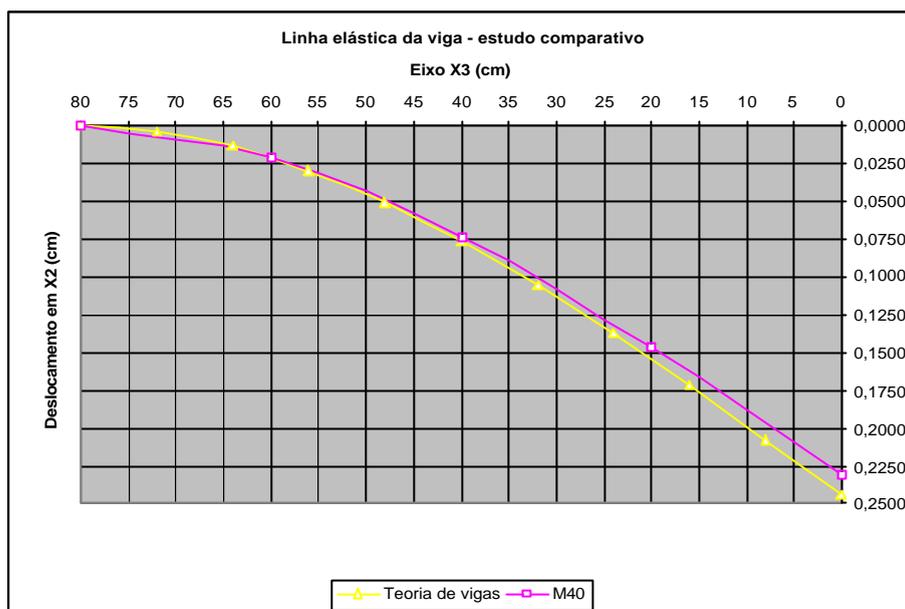


Figura 3.6.4 – Linha elástica da viga obtida pela teoria de vigas e pela discretização M40.

Tabela 3.2 – Linha elástica da viga analisada (valores em cm): Discretização M72.

coord. X3 (cm)	Teoria de vigas	Discretização M72
80	0,0000	0,0000
70	0,0055	0,0059
60	0,0210	0,0212
50	0,0450	0,0520
40	0,0762	0,0783
30	0,1131	0,1192
20	0,1543	0,1582
10	0,1983	0,2040
0	0,2438	0,2481

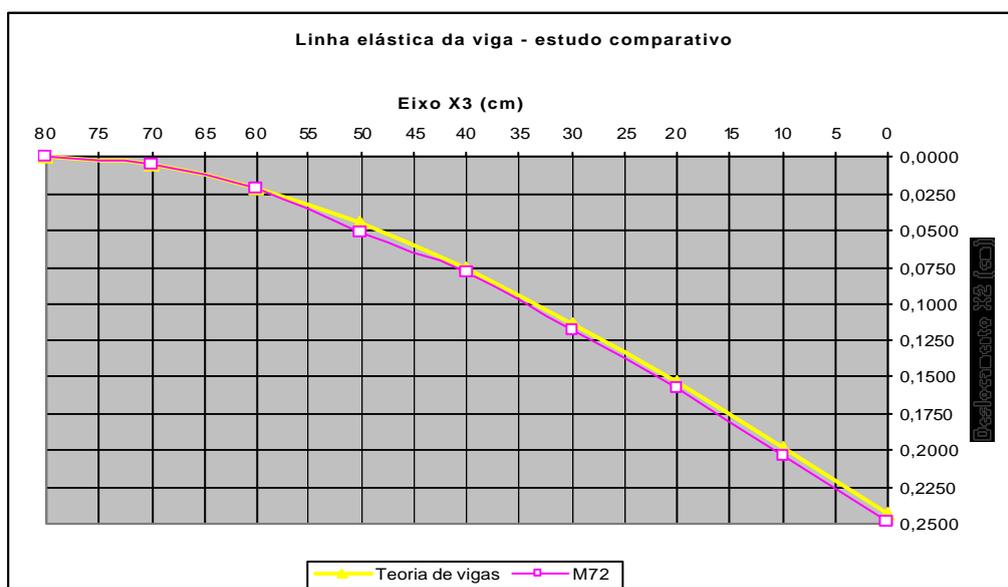


Figura 3.6.5 – Linha elástica da viga obtida pela teoria de vigas e pela discretização M72.

Tabela 3.3 – Linha elástica da viga analisada (valores em cm): Discretização M176

coord. X3 (cm)	Teoria de Vigas	Discretização M176
80	0,0000	0,0000
72	0,0035	0,0056
64	0,0137	0,0155
56	0,0296	0,0319
48	0,0507	0,0523
40	0,0762	0,0778
32	0,1053	0,1060
24	0,1374	0,1377
16	0,1716	0,1710
8	0,2074	0,2062
0	0,2438	0,2417

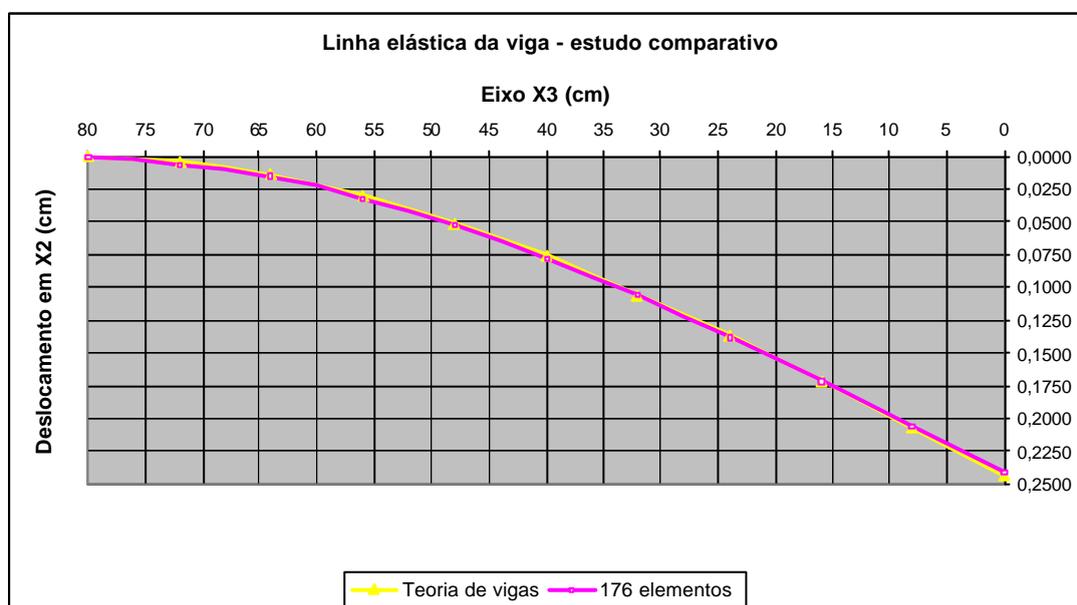


Figura 3.6.6 – Linha elástica da viga obtida pela teoria de vigas e pela discretização M176.

Os resultados obtidos, representados graficamente nas figuras 3.6.4 a 3.6.6, permitem dizer que a formulação do Método dos Elementos de Contorno apresentada é coerente com o problema analisado. Observa-se ainda que, à medida que a discretização envolve mais elementos, os valores obtidos na análise se aproximam daqueles utilizando-se a teoria clássica de vigas.

Visando uma verificação ainda melhor dos resultados obtidos nesse trabalho e a sua confiabilidade fez-se uma comparação gráfica entre tais valores e os encontrados no trabalho de BARBIRATO (1999), conforme verificado na figura 3.6.7. Verifica-se que existe uma boa convergência entre os gráficos dos resultados encontrados nos dois trabalhos.

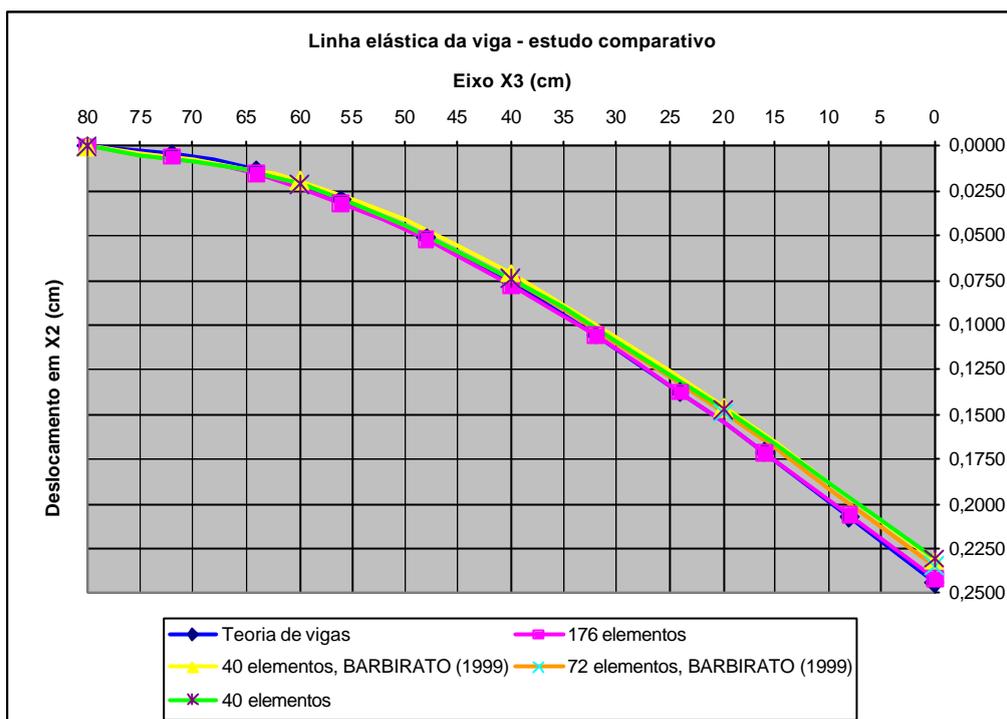


Figura 3.6.7 – Linha elástica da viga: comparativo de resultados

3.6.2 – Exemplo 3.2

O segundo caso a ser processado é um paralelepípedo sólido elástico engastado na base, solicitado por uma força estática de tração, conforme apresentado na figura 3.6.8, definindo o problema de um sólido à tração.

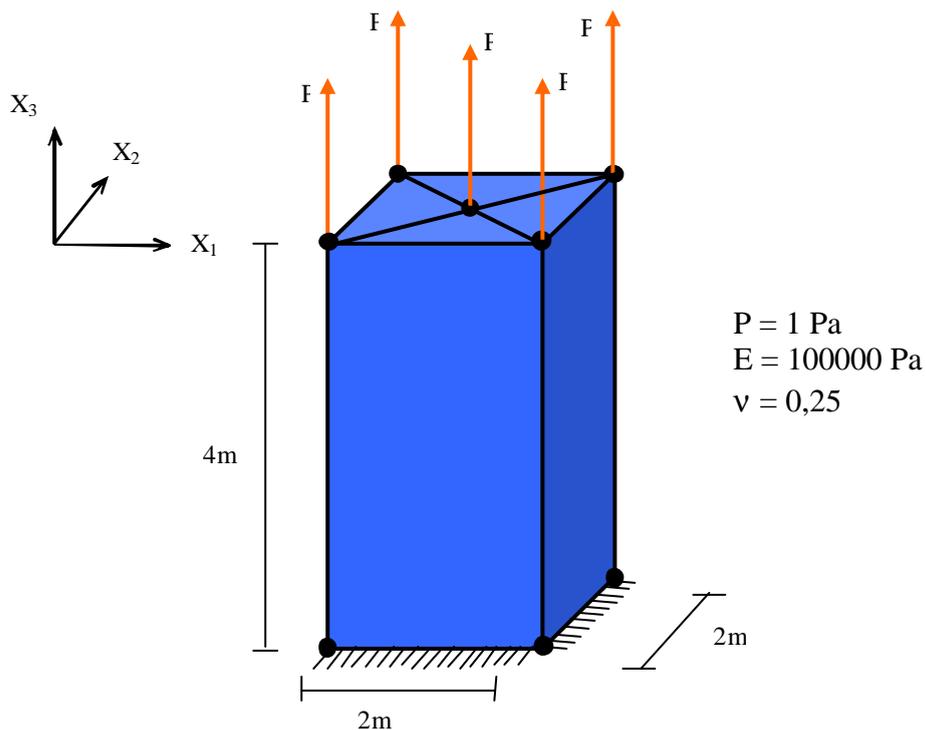
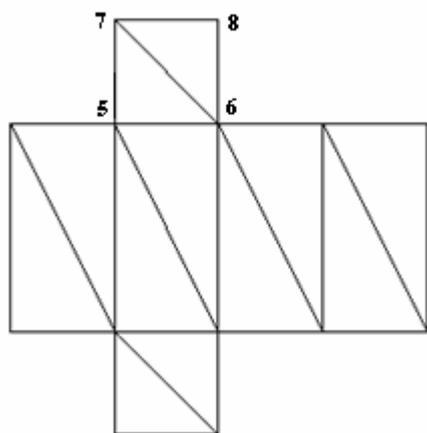
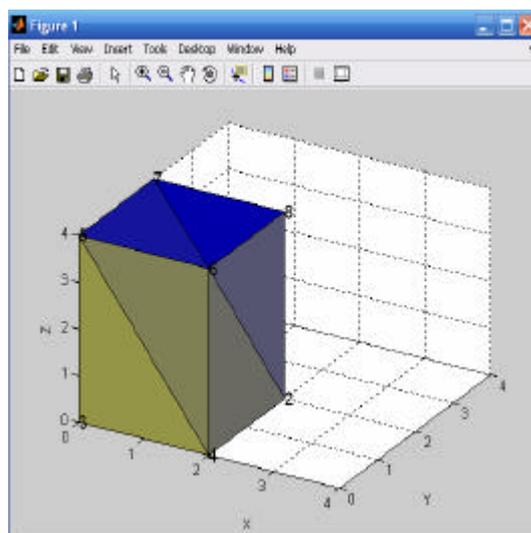


Figura 3.6.8 – Definição do sólido e suas condições de contorno

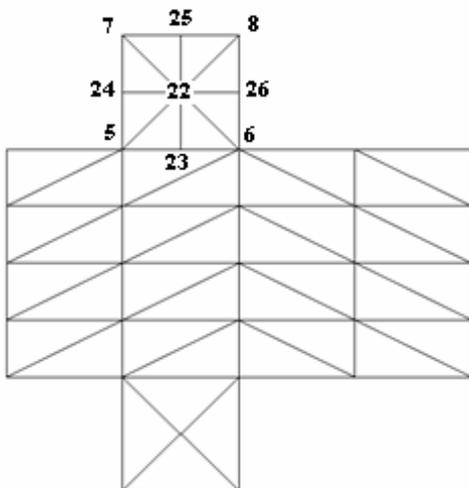
A formulação do Método dos Elementos de Contorno apresentada neste exemplo foi implementada utilizando-se três discretizações, com 12 elementos triangulares descontínuos (36 pontos de colocação), com 44 elementos (132 pontos de colocação) e com 76 elementos (228 pontos de colocação), denominadas de malhas M12, M44 e M76. Os nós de canto são avaliados através do nó deslocado da definição do elemento triangular plano descontínuo.



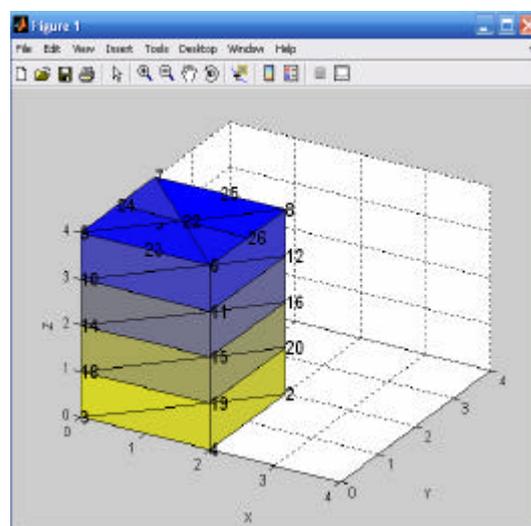
(a) M12



(b) M12

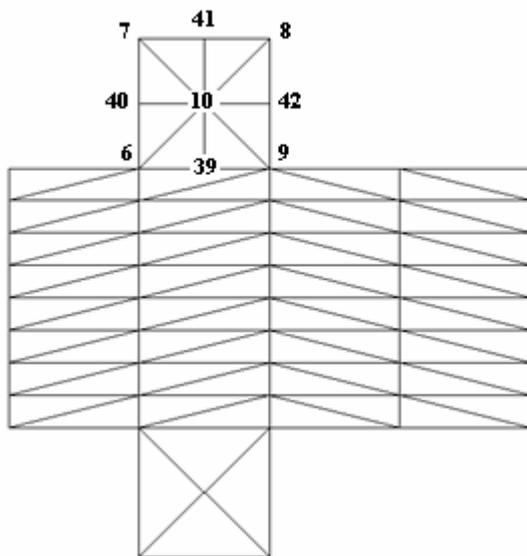


(c) M44

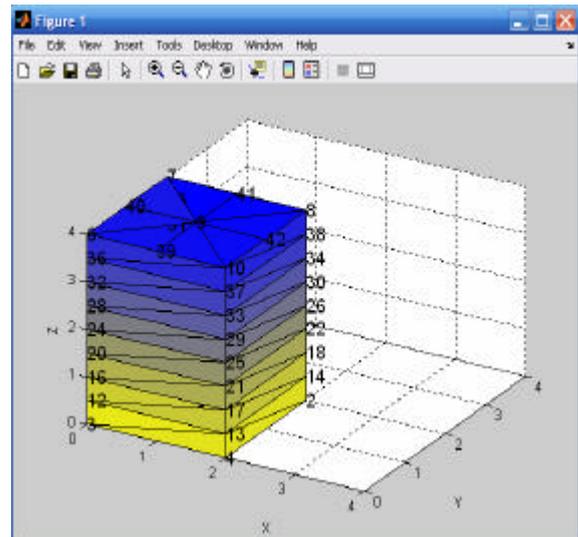


(d) M44

Figura 3.6.9a – Malhas de discretização: (a) e (b) M12 com 12 elementos e (c) e (d) M44 com 44 elementos.



(e) M76



(f) M76

Figura 3.6.9b – Malhas de discretização: (e) e (f) M76 com 76 elementos.

Os resultados obtidos são comparados com a equação analítica que define o deslocamento axial de uma viga engastada, mostrada a seguir:

$$u_3 = \frac{PL}{EA} \quad (3.6.1)$$

onde P é a força axial de tração, L é o comprimento do corpo analisado, E é o módulo de elasticidade longitudinal do material e A é a área da seção transversal.

Aplicando a equação acima para o problema analisado nesse exemplo, encontra-se o deslocamento axial de 4×10^{-5} m. A seguir são apresentados os valores encontrados para o deslocamento axial utilizando-se as discretizações definidas para esse exemplo:

Tabela 3.4a – Valores do deslocamento da viga analisada à tração para a discretização M12, (valores em cm).

Nós	Valor do deslocamento em metros (*10 ⁵)	Valor analítico em metros (*10 ⁵)	Erro (%)
	Discretização M12		
5	4,042	4,000	1,050
6	3,985	4,000	-0,375
7	3,978	4,000	-0,550
8	4,042	4,000	1,050

Tabela 3.4b – Valores do deslocamento da viga analisada à tração para as discretizações M44 e M76, (valores em cm).

Nós	Valor do deslocamento em metros (*10 ⁻⁵)	Valor analítico em metros (*10 ⁻⁵)	Erro (%)
	Discretização M44		
5	3,950	4,000	-1,260
6	3,970	4,000	-0,740
7	3,981	4,000	-0,487
8	3,950	4,000	-1,260
22	3,999	4,000	-0,028
23	3,957	4,000	-1,080
24	3,919	4,000	-2,015
25	3,919	4,000	-2,015
26	3,957	4,000	-1,080

Nós	Valor do deslocamento em metros (*10 ⁻⁵)	Valor analítico em metros (*10 ⁻⁵)	Erro (%)
	Discretização M76		
6	3,982	4,000	-0,443
7	3,939	4,000	-1,530
8	3,982	4,000	-0,443
9	3,998	4,000	-0,048
10	3,882	4,000	-2,943
39	3,917	4,000	-2,073
40	3,895	4,000	-2,638
41	3,895	4,000	-2,638
42	3,917	4,000	-2,073

Embora o exemplo processado seja bastante simples, os resultados obtidos mostram que a formulação apresentada é adequada para sólidos elásticos tridimensionais solicitados à tração. O elemento triangular plano com aproximação linear, de fácil implementação, possibilita uma representação coerente do problema analisado.

A aproximação linear descontínua adotada elimina os problemas surgidos na análise de nós de canto. As integrações utilizadas, tanto a numérica quanto a semi-analítica mostram-se eficientes junto à formulação.

A análise desse exemplo foi realizada utilizando-se um programa escrito no pacote *MatLab*, a partir de uma máquina Pentium(R) 4, CPU 2.80GHz, 496 MB de RAM, onde verificou-se que o tempo de processamento para a discretização com 76 elementos, por exemplo, foi de 18 minutos e 46 segundos.

3.6.3 – Exemplo 3.3

Neste exemplo, uma carga uniformemente distribuída é aplicada sobre uma área retangular localizada na superfície do semi-infinito. A área a ser estudada é um retângulo de lados 9,15m e 18,30m, com uma carga distribuída de compressão, módulo de elasticidade longitudinal (característica do material, no caso o solo) e coeficiente de Poisson descritos abaixo:

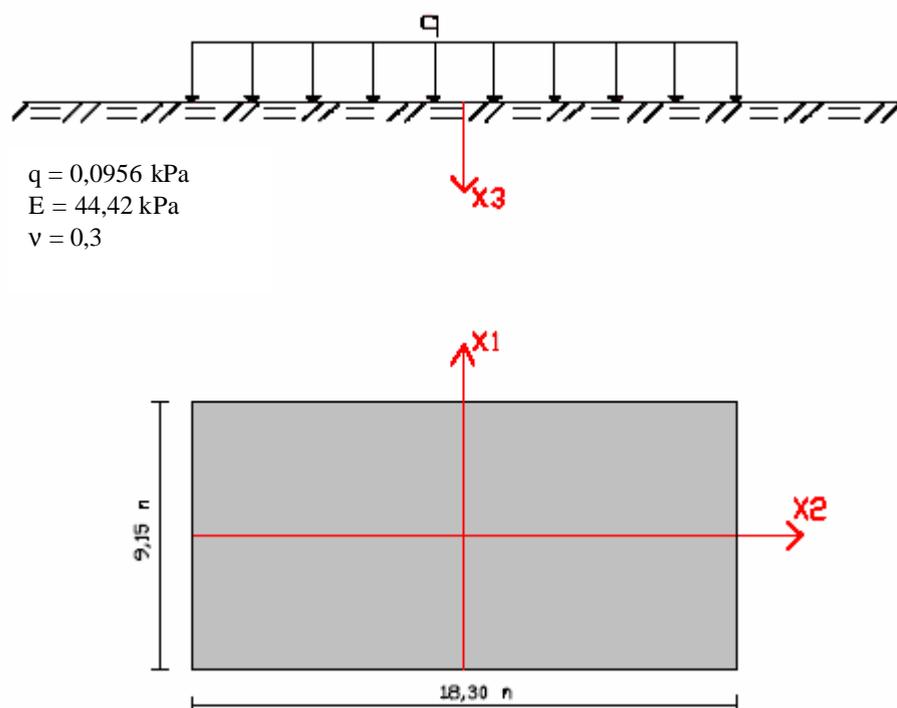


Figura 3.6.10 – Área retangular (solo) na superfície livre do semi-infinito, carregamento uniformemente distribuído.

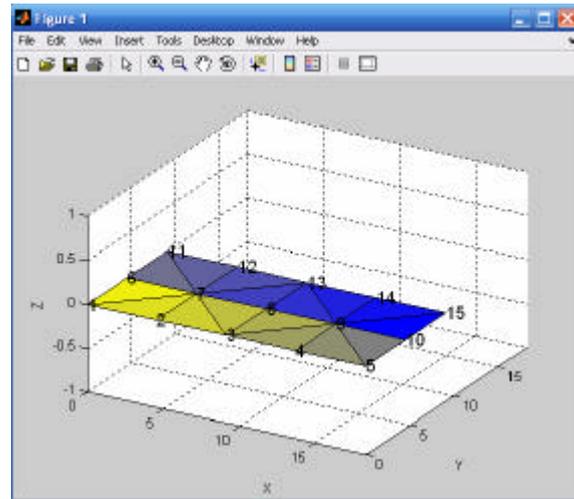
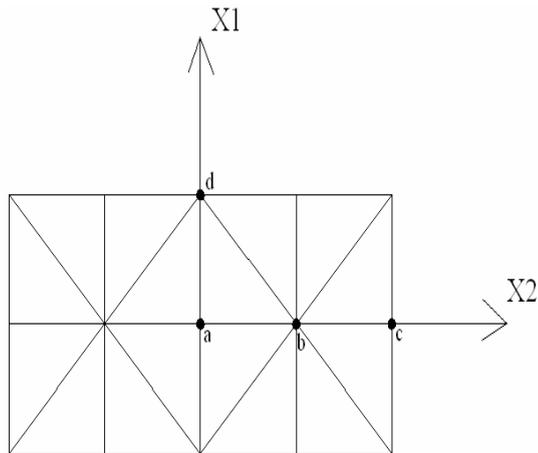
O problema apresentado nesse exemplo foi resolvido no trabalho de BARBIRATO (1999), utilizando-se as soluções fundamentais de Kelvin e Mindlin, porém, nesse trabalho é abordada apenas a solução fundamental de Kelvin para o estudo do semi-infinito. Os resultados encontrados no presente trabalho são comparados com os encontrados no trabalho supracitado, conforme mostrado nas tabelas 3.5 a 3.8.

Para estudar o problema proposto são utilizadas três discretizações com 16, 64 e 156 elementos triangulares planos descontínuos com aproximação linear.

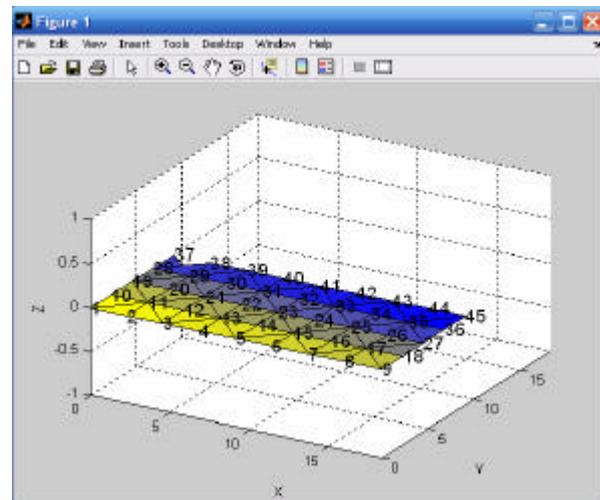
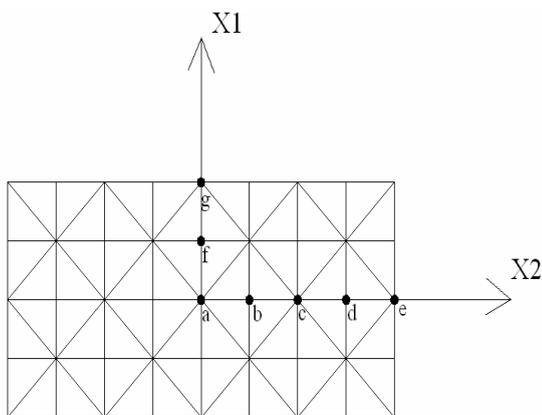
Para a aplicação da solução fundamental de Kelvin define-se uma determinada região externa à área retangular em análise, visando a discretização da região de forças de superfície nulas do espaço semi-infinito através de uma malha estendida. Desta

forma, foi considerada uma nova região com 8,0m de largura para discretização caracterizando a terceira malha estendida com 156 elementos, conforme figura 3.6.11b.

O objetivo dessa análise é calcular os deslocamentos segundo o eixo X_3 no espaço semi-infinito ao longo dos eixos X_2 e X_1 , devido a aplicação do carregamento distribuído verificando o comportamento do mesmo através de uma análise estática.

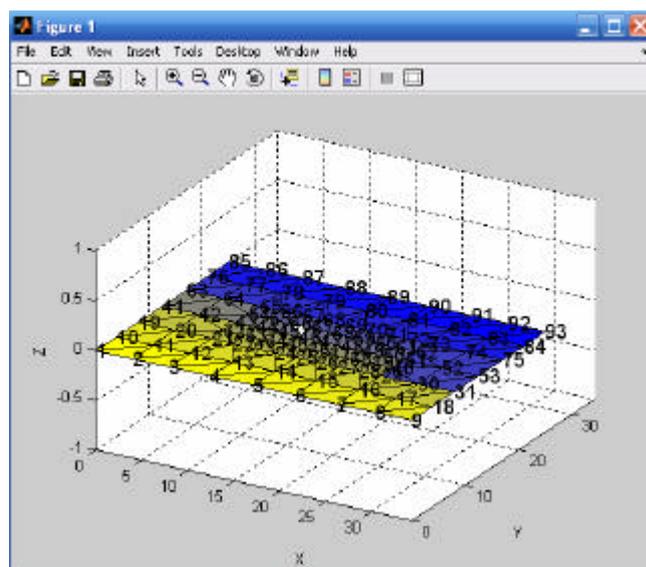
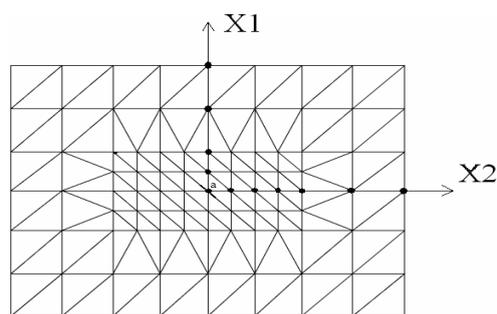


(a) Malha com 16 elementos



(b) Malha com 64 elementos

Figura 3.6.11a – Discretizações utilizadas: (a) 16 elementos e (b) 64 elementos.



(c) Malha com 156 elementos

Figura 3.6.11b – Discretizações utilizadas: (c) 156 elementos.

Na análise desse problema, faz-se uma comparação entre os resultados encontrados utilizando-se as discretizações mostradas na figura 3.6.11 para a solução fundamental de Kelvin com os resultados de BARBIRATO (1999) que utilizou as soluções fundamentais de Mindlin e Kelvin.

É importante salientar que para problemas que envolvem domínios semi-infinitos com carregamentos e escavações próximos à superfície livre, a solução fundamental de Mindlin é bastante utilizada. Com esta formulação, apenas as superfícies escavadas e/ou carregadas precisam ser discretizadas, como é o caso do presente exemplo e das discretizações apresentadas. Já para a solução fundamental de Kelvin, adequada para o espaço infinito, é necessário discretizar, além das superfícies escavadas e/ou carregadas, a superfície livre de trações do semi-infinito.

Porém, uma grande facilidade que existe na utilização da solução fundamental de Kelvin é que as equações e as matrizes que envolvem tal solução são pequenas, de rápida solução e em quantidades menores, quando comparadas com as equações que envolvem a solução fundamental de Mindlin. Portanto, Kelvin é mais facilmente programável.

Tabela 3.5 – Deslocamentos em X_3 ao longo de X_1 (em cm), representados graficamente na figura 3.6.12.

Discretização: Malha com 16 elementos

Kelvin:

eixo X1 (m)	desl. X3 (cm)
ponto a: 0,0000	2,7517
ponto d: 4,5750	2,2198

Barbirato Kelvin (1999):

eixo X1 (m)	desl. X3 (cm)
ponto a :0,0000	2,7420
ponto d :4,5750	2,2480

Barbirato Mindlin (1999):

eixo X1 (m)	desl. X3 (cm)
ponto a :0,0000	2,8290
ponto d :4,5750	2,4160

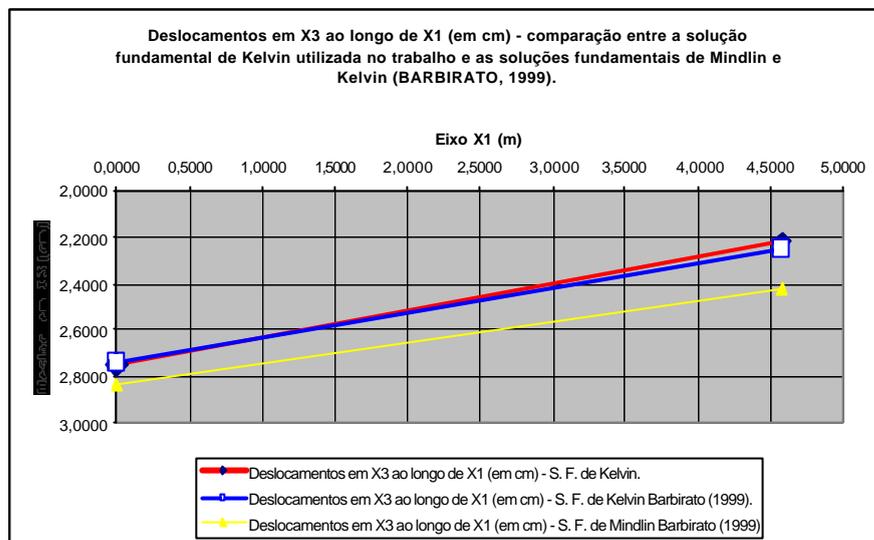


Figura 3.6.12 – Deslocamentos em X_3 ao longo de X_1 (em cm) – comparação entre a sol. fund. de Kelvin utilizada nesse trabalho e as sol. fund. de Mindlin e Kelvin utilizadas em BARBIRATO (1999).

Tabela 3.6 – Deslocamentos em X_3 ao longo de X_2 (em cm), representados graficamente na figura 3.6.13.

Discretização: Malha com 16 elementos

Kelvin:

eixo X2 (m)	desl. X3 (cm)
ponto a: 0,0000	2,7517
ponto b: 4,5750	2,6509
ponto c: 9,1500	1,8100

Barbirato Kelvin (1999):

eixo X2 (m)	desl. X3 (cm)
ponto a: 0,0000	2,7420
ponto b: 4,5750	2,7480
ponto c: 9,1500	1,8270

Barbirato Mindlin (1999):

eixo X2 (m)	desl. X3 (cm)
ponto a: 0,0000	2,8290
ponto b: 4,5750	2,7800
ponto c: 9,1500	2,0200

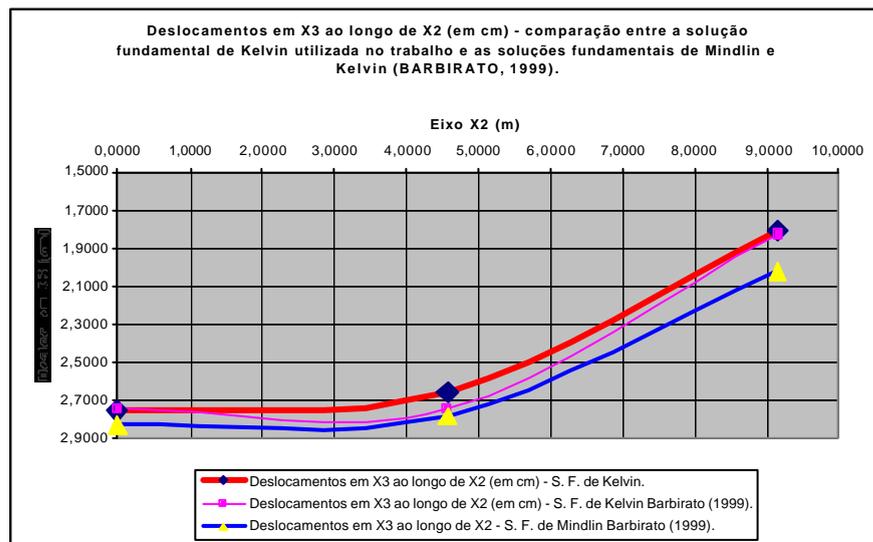


Figura 3.6.13 – Deslocamentos em X_3 ao longo de X_2 (em cm) – comparação entre a sol. fund. de Kelvin utilizada nesse trabalho e as sol. fund. de Mindlin e Kelvin utilizadas em BARBIRATO (1999).

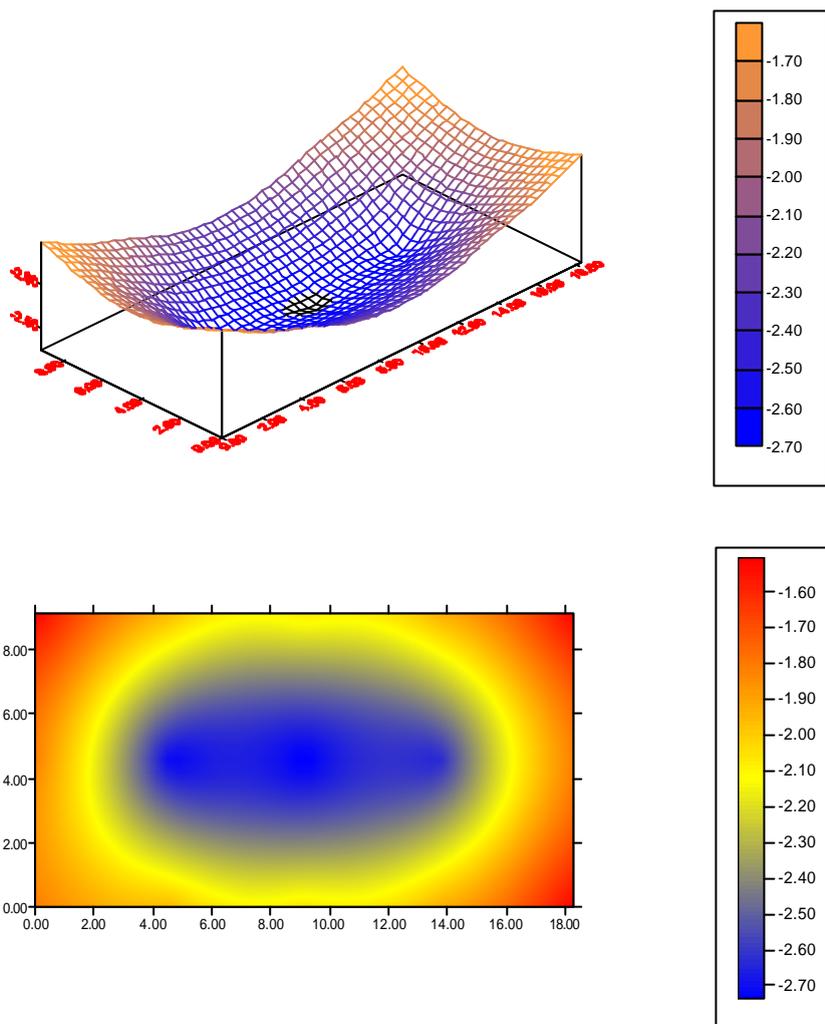


Figura 3.6.14 – Visualização gráfica do meio semi-infinito – malha com 16 elementos.

Tabela 3.7 – Deslocamentos em X_3 ao longo de X_1 (em cm), representados graficamente na figura 3.6.15.

Discretização: Malha com 64 elementos

Kelvin:

eixo X_1 (m)	desl. X_3 (cm)
ponto a: 0,0000	2,7130
ponto f: 2,2875	2,5345
ponto g: 4,5750	1,9938

Barbirato Mindlin (1999):

eixo X_1 (m)	desl. X_3 (cm)
ponto a: 0,0000	2,7900
ponto g: 4,5750	2,2210

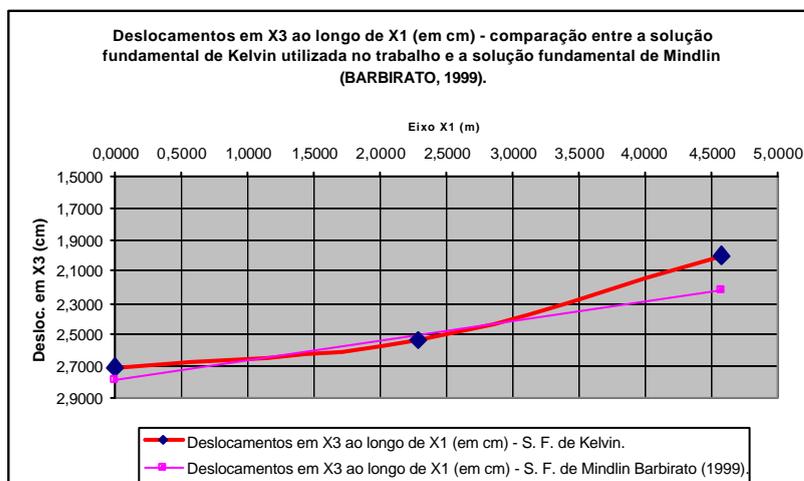


Figura 3.6.15 – Deslocamentos em X_3 ao longo de X_1 (em cm) – comparação entre a sol. fund. de Kelvin utilizada nesse trabalho e a sol. fund. de Mindlin utilizada em BARBIRATO (1999).

Tabela 3.8 – Deslocamentos em X_3 ao longo de X_2 (em cm), representados graficamente na figura 3.6.16.

Discretização: Malha com 64 elementos

Kelvin:

eixo X_2 (m)	desl. X_3 (cm)
ponto a: 0,0000	2,7130
ponto b: 2,2875	2,6477
ponto c: 4,5750	2,5567
ponto d: 6,8625	2,3211
ponto e: 9,1500	1,7606

Barbirato Mindlin (1999):

eixo X_2 (m)	desl. X_3 (cm)
ponto a: 0,0000	2,7900
ponto c: 4,5750	2,6530
ponto e: 9,1500	1,9700

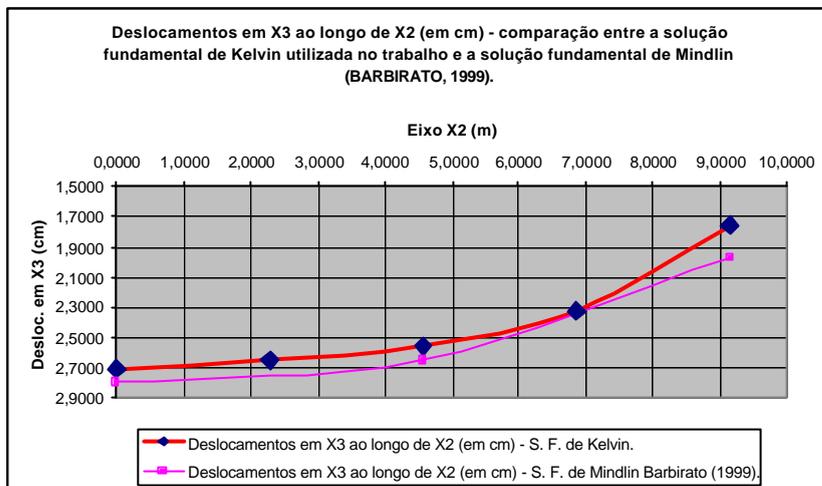


Figura 3.6.16 – Deslocamentos em X_3 ao longo de X_2 (em cm) – comparação entre a sol. fund. de Kelvin utilizada nesse trabalho e a sol. fund. de Mindlin utilizada em BARBIRATO (1999).

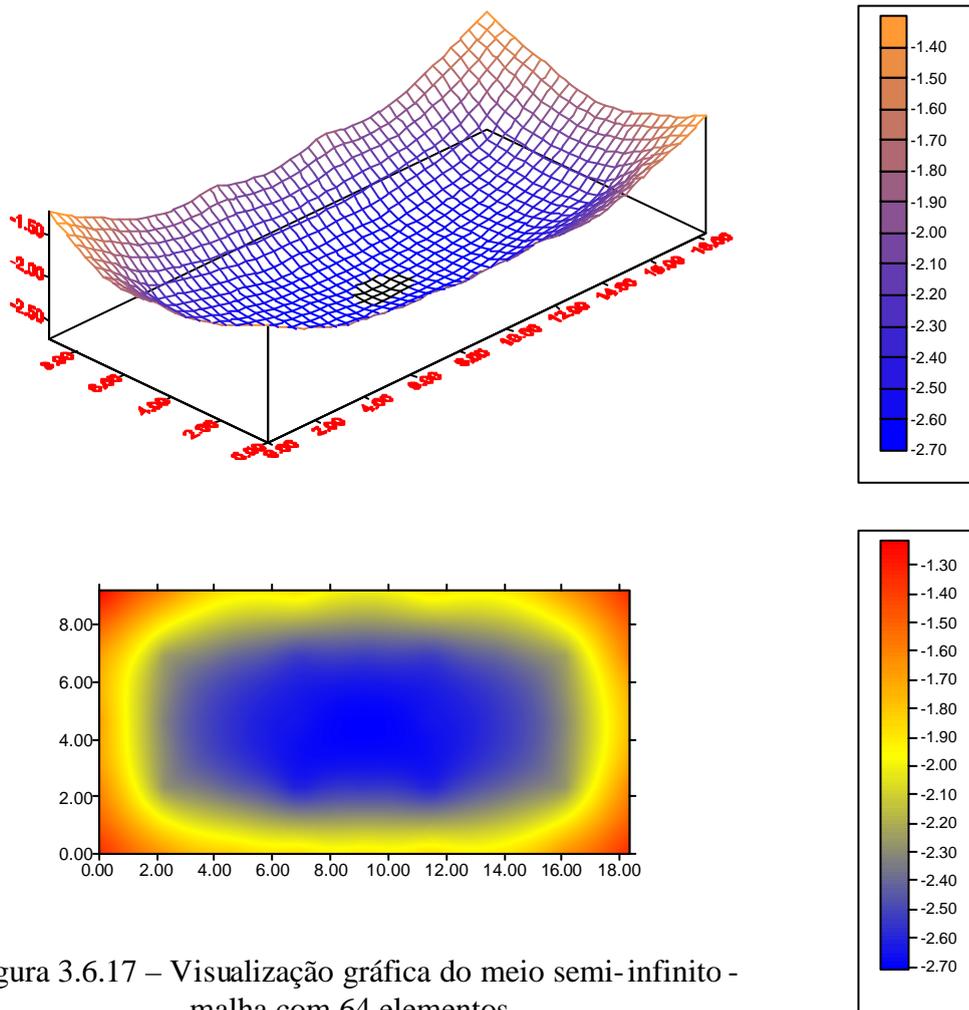


Figura 3.6.17 – Visualização gráfica do meio semi-infinito - malha com 64 elementos.

Para a discretização com 64 elementos, após a comparação entre a solução fundamental de Kelvin e a solução fundamental de Mindlin de BARBIRATO (1999), verifica-se que a diferença em relação ao deslocamento da superfície carregada é muito pequena o que demonstra a eficiência da formulação e da análise realizada.

A discretização estendida com 156 elementos é utilizada apenas para o cálculo do deslocamento no ponto 'a' localizado no centro da área retangular onde está sendo aplicado o carregamento distribuído. O deslocamento encontrado foi de 2,743cm no centro da placa e, como já era esperado, este valor é muito próximo do encontrado por BARBIRATO (1999) que encontrou um deslocamento no centro da placa de 2,742cm.

Existem diversos exemplos de obras de engenharia que envolvem meios semi-infinitos e/ou infinitos, onde se podem utilizar a formulação desenvolvida no exemplo 6.3. Pode-se citar como exemplo, a execução de um empreendimento sobre um meio semi-infinito (solo), com fundação em radier protendido, onde o solo está sujeito a um carregamento distribuído devido a estrutura de engenharia e aos esforços solicitantes aplicados.

Desta forma, encontram-se os deslocamentos em cada ponto do meio, os esforços solicitados, como também as tensões mobilizadas, verificando ainda a estabilidade da estrutura quanto à resistência a estes esforços. Pode-se também fazer uma análise a uma determinada profundidade em relação à superfície em estudo.