

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

LUIZ CARLOS LIMA VÉRAS

**MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS E TÉCNICA DE HOMOGENEIZAÇÃO
APLICADOS À ANÁLISE CONFIABILÍSTICA DE DOMÍNIOS BIDIMENSIONAIS
REFORÇADOS**

Maceió-AL

2018

LUIZ CARLOS LIMA VÉRAS

**MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS E TÉCNICA DE HOMOGENEIZAÇÃO
APLICADOS À ANÁLISE CONFIABILÍSTICA DE DOMÍNIOS BIDIMENSIONAIS
REFORÇADOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Eduardo Toledo de Lima Junior

Maceió-AL

2018

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central

Bibliotecária Responsável: Janis Christine Angelina CRB:1664

- V476m Vêras, Luiz Carlos Lima.
Modelos de elementos finitos e técnica de homogeneização aplicados à análise confiabilística de domínios bidimensionais reforçados / Luiz Carlos Lima Vêras. – 2018.
70 f.: il. color., tab.
- Orientador: Eduardo Toledo de Lima Junior.
Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil: Estruturas) – Universidade Federal de Alagoas. Centro de Tecnologia. Maceió, 2018.
- Bibliografia: f. 67-70.
1. Método de elementos finitos. 2. Confiabilidade estrutural. 3. Domínios planos reforçados. 4. Técnica de homogeneização. 5. Mori-Tanaka. I. Título.

CDU: 624.9



Universidade Federal de Alagoas – UFAL
Unidade Acadêmica Centro de Tecnologia – CTEC
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC



**MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS E TÉCNICA DE
HOMOGENEIZAÇÃO APLICADOS À ANÁLISE CONFIABILÍSTICA DE
DOMÍNIOS BIDIMENSIONAIS REFORÇADOS**

LUIZ CARLOS LIMA VÉRAS

Dissertação submetida à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Alagoas e aprovada no dia 17 do mês de julho do ano de 2018.

Banca Examinadora:

Eduardo Toledo de Lima Junior

Prof. Dr. Eduardo Toledo de Lima Junior
Orientador – PPGEC/UFAL

Márcio André Araújo Cavalcante

Prof. Dr. Márcio André Araújo Cavalcante
(Avaliador Interno – PPGEC/UFAL)

William Wagner Matos Lira

Prof. Dr. William Wagner Matos Lira
(Avaliador Interno – PPGEC/UFAL)

Valério Silva Almeida

Prof. Dr. Valério Silva Almeida
(Avaliador Externo – USP)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por tudo.

Agradeço à minha amada esposa Débora, por todo apoio.

Agradeço aos meus pais, Luiz (em memória) e Zuleide, por mostrar o caminho.

As minhas irmãs, por estarem presentes em todos momentos.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Eduardo Toledo, por todos os conselhos, pela paciência, dedicação e ajuda nesse período.

Aos meus amigos Glauber, Thiago e Rodolfo pelo companheirismo.

Aos professores do PPGEC que compartilharam seus conhecimentos nas aulas.

À CAPES pelo apoio financeiro para realização deste trabalho de pesquisa.

RESUMO

O trabalho trata da análise confiabilística de domínio planos reforçados utilizando modelos de elementos finitos e técnicas de homogeneização. A busca por soluções em problemas de engenharia estrutural avançou significativamente com o auxílio das técnicas numéricas desenvolvidas nas últimas décadas, a exemplo do Método dos Elementos Finitos (MEF), largamente empregado em aplicações diversas. Na análise de estruturas com materiais heterogêneos, a mescla de diferentes tipos de elementos finitos pode ser utilizada para garantir uma melhor aproximação da constituição macroscópica, ou até mesoscópica, de algum produto, considerando-se a contribuição das diversas fases. Assim, o MEF se mostra como uma boa opção no estudo de meios enrijecidos, o que remete à materiais compósitos em geral. Já a teoria da confiabilidade contribui com o entendimento da performance estrutural, quantificando a influência da aleatoriedade das variáveis de projeto, permitindo um entendimento mais robusto dos níveis de segurança. A metodologia adotada considera a discretização da matriz bidimensional em elementos finitos quadrilaterais com interpolação quadrática e triangulares com interpolação linear, e a incorporação do reforço é avaliada de duas formas: pela discretização dos enrijecedores em elementos de treliça; e pela obtenção de propriedades efetivas do material heterogêneo através da técnica de homogeneização baseada no modelo de Mori-Tanaka. Considera-se estado plano de tensão e regime linear elástico. Parâmetros mecânicos, como módulo de elasticidade e tensão de escoamento, e variáveis de carregamento são descritos como variáveis aleatórias, de acordo com dados estatísticos disponíveis na literatura. Apresentam-se exemplos que tratam da influência do reforço na resistência e rigidez de elementos planos e da probabilidade de ocorrência de alguns estados limites de serviço. Assim, valida-se a metodologia utilizada, ilustrando-se sua aplicação. Os resultados ilustram a variabilidade da resposta numérica dos exemplos propostos, devida à consideração das incertezas associadas.

Palavras-chaves: Método dos Elementos Finitos, Confiabilidade Estrutural, Domínios Planos Reforçados, Técnica de Homogeneização, Mori-Tanaka.

ABSTRACT

The present work deals with reliability-based analysis of reinforced domains using finite element models and homogenization techniques. The search for solutions in problems of structural engineering have advanced significantly with the aid of numerical techniques developed in the last decades, such as the Finite Element Method (FEM), widely used in several applications. In the analysis of structures with heterogeneous materials, the coupling of different types of finite elements can be used to ensure a better approximation of the macroscopic or even mesoscopic constitution of some product, taking into account the contribution of the different phases. Thus, FEM stands out as a good choice for the study of stiffened domains, which refers to composite materials. The structural reliability theory contributes to the evaluation of the structural performance, quantifying the influence of the randomness of the design variables, allowing a more robust understanding of the safety levels. The methodology adopted considers the discretization of the matrix in 2-D quadratic quadrilateral finite elements and linear triangular finite elements, and the reinforcement incorporation is evaluated in two ways: by the discretization of the reinforcement in truss elements; and obtaining properties of the heterogeneous media by using the homogenization technique based on the Mori-Tanaka model. Plane stress state and linear elastic regime are considered. Material parameters, as Young Modulus and yielding limit stress, and load variables are described as random variables, according to the literature. The presented examples address the influence of reinforcement on the strength and rigidity of beams and plates, and the probability of occurrence of some serviceability limit states. Therefore, the applied methodology is validated, illustrating its application. The results illustrate the variability on the numerical response of the proposed examples, due to the consideration of the associated uncertainties.

Keywords: Finite Element Method, Structural Reliability, Reinforced Plane Domain, Homogenization Techniques.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Modelo de estrutura plana com reforços retos.	12
Figura 2 – Discretização de domínio plano com elementos quadrilaterais.	13
Figura 3 – Chapa solicitada em seu plano médio.	22
Figura 4 – Elemento finito T3.	25
Figura 5 – Elemento finito Q8.	26
Figura 6 – Elemento de treliça bidimensional no sistema de coordenadas locais e globais.	30
Figura 7 – Modelos de representação de reforço: Modelo Discreto (a); Modelo Distribuído (b); Modelo Embutido (c).	32
Figura 8 – Esquema de acoplamento de elementos finitos T3 e Q8 e elementos de treliça.	33
Figura 9 – Ilustração do exemplo preliminar: chapa tracionada.	34
Figura 10 – Malha utilizada e reforços aplicados na chapa.	34
Figura 11 – Comparação dos resultados de deslocamentos máximos.	35
Figura 12 – Esquema simplificado de homogeneização.	35
Figura 13 – Descrição geométrica da fibra em coordenadas esféricas locais.	36
Figura 14 – Representação do modelo de Mori-Tanaka: a) EVR; b) Aplicação do método da inclusão equivalente; c) Material homogeneizado.	38
Figura 15 – Inclusão do tipo esferoide prolato.	38
Figura 16 – Módulo de Elasticidade: comparação com resultados de Thomas e Ramaswamy (2007) e Dutra et al. (2010).	40
Figura 17 – Coef. de Poisson: comparação com resultados de Thomas e Ramaswamy (2007) e Dutra et al. (2010).	41
Figura 18 – Módulo de Elasticidade: comparação com resultados de Williamson (1974) e Dutra et al. (2010).	41
Figura 19 – Malha estruturada utilizada com elementos Q8.	42
Figura 20 – Comparação de resultados experimentais e numéricos.	42
Figura 21 – Definição da função de falha.	44
Figura 22 – Exemplo ilustrativo da simulação de Monte Carlo.	47
Figura 23 – Representação da superfície de falha para v.a. originais dependentes X_1 e X_2 quaisquer.	48
Figura 24 – Representação da superfície de falha no espaço reduzido, para duas variáveis aleatórias.	50
Figura 25 – Esquema ilustrativo da estratégia de acoplamento direto via FORM.	50
Figura 26 – Propriedades geométricas (valores em mm) e esquema de ensaio em quatro pontos.	51
Figura 27 – Deslocamentos verticais no meio do vão para as malhas analisadas.	52
Figura 28 – Malha adotada no exemplo com reforço.	52
Figura 29 – Malha do exemplo deformada.	53

Figura 30 – Convergência da P_f para a função G_1	54
Figura 31 – Convergência da P_f para a função G_2	55
Figura 32 – Viga plana reforçada com fibras.	56
Figura 33 – Convergência da probabilidade de falha.	57
Figura 34 – Índice de confiabilidade e probabilidade de falha em relação a variação de fração de fibras.	57
Figura 35 – Propriedades geométricas (dimensões em mm) e esquema de ensaio em três pontos	58
Figura 36 – Malha adotada no exemplo.	59
Figura 37 – Ilustração de um quarto de uma chapa com furo (a) e a malha de elementos finitos utilizada (b).	61
Figura 38 – Condição indeformada e deformada da chapa com furo sem reforço.	61
Figura 39 – Evolução da rigidez com a inserção das fibras.	62
Figura 40 – Índice de confiabilidade e probabilidade de falha em relação a variação de fração de fibras.	62
Figura 41 – Metade da viga reforçada com fibras considerando a simetria.	63
Figura 42 – Malha de elementos $Q8$ com estratificação de f_i na altura.	63

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Coordenadas e pesos dos pontos de Gauss referentes aos elementos utilizados.	27
Tabela 2 – Propriedades dos concretos e fibras de aço.	40
Tabela 3 – Estudo de convergência de malha, com elementos T3 e Q8	52
Tabela 4 – Parâmetros estatísticos das variáveis aleatórias utilizadas no problema	53
Tabela 5 – Valores de probabilidade de falha e fatores de importância das v.a.	54
Tabela 6 – Parâmetros do exemplo.	56
Tabela 7 – Valores de probabilidade de falha e fatores de importância das v.a.	56
Tabela 8 – Valores de probabilidade de falha e fatores de importância das v.a.	60
Tabela 9 – Parâmetros do exemplo.	60
Tabela 10 – Parâmetros estatísticos do exemplo.	63
Tabela 11 – Parâmetros do exemplo.	64

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	COMENTÁRIOS INICIAIS	10
1.2	BREVE HISTÓRICO	12
1.2.1	Modelagem de Problemas Planos via MEF	12
1.2.2	MEF Aplicado à Domínios Planos Reforçados	14
1.2.3	MEF e Análise de Confiabilidade em Domínios Planos Reforçados	16
1.3	JUSTIFICATIVA	18
1.4	OBJETIVOS	19
1.4.1	Objetivo Geral	19
1.4.2	Objetivos Específicos	19
1.5	METODOLOGIA DE PESQUISA	19
1.5.1	ASPECTOS COMPUTACIONAIS	19
1.6	DELIMITAÇÃO DO TRABALHO	20
2	MODELAGEM DE DOMÍNIOS PLANOS REFORÇADOS	21
2.1	MODELAGEM DA MATRIZ	21
2.1.1	Descrição do Problema: Estado Plano de Tensão	21
2.1.2	Matriz de Rigidez de um Elemento Bidimensional	22
2.1.3	Elemento Finito Triangular com Interpolação Linear (T3)	24
2.1.4	Elemento Finito Quadrilateral com Interpolação Bilinear (Q8)	25
2.1.5	Integração numérica e determinação da matriz de rigidez de um elemento plano	27
2.2	MODELAGEM DO REFORÇO	29
2.2.1	Elementos Finitos Unidimensionais	29
2.2.1.1	Determinação do Vetor de Forças Nodais de um Elemento de Treliça	30
2.2.1.2	Matriz de Rigidez do Elemento de Treliça	31
2.2.1.3	Modelos de Representação do Reforço com Barras Unidimensionais	31
2.2.2	Exemplo Preliminar	33
2.2.3	Domínio Reforçado com Abordagem Micromecânica	33
2.2.3.1	Esquema de Homogeneização de Mori-Tanaka	37
2.2.3.2	Estimativas de propriedades elásticas efetivas de concreto reforçado com fibras	39
2.3	Espécime de Resina Epóxi Reforçado com Fibras de Vidro	41
3	FUNDAMENTOS DA CONFIABILIDADE ESTRUTURAL	43
3.1	DEFINIÇÃO DA PROBABILIDADE DE FALHA	43
3.2	PROBLEMA BÁSICO DA CONFIABILIDADE ESTRUTURAL	44

3.3	MÉTODOS DE ANÁLISE EM CONFIABILIDADE ESTRUTURAL . . .	45
3.3.1	Simulação de Monte Carlo	46
3.3.2	Método de Confiabilidade de Primeira Ordem - FORM	47
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	51
4.1	Viga em Concreto Armado	51
4.2	Viga Reforçada com Fibras	55
4.3	Espécime de Concreto Reforçado com Fibras	58
4.4	Chapa com Furo Reforçada com Fibras	60
4.5	Viga 2D Reforçada com Fibras com Variação da Fração de Fibras na Altura	62
5	CONCLUSÕES	65
5.1	SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS	65
	REFERÊNCIAS	67

1 INTRODUÇÃO

1.1 COMENTÁRIOS INICIAIS

Ao se analisar, com base em aspectos estatísticos, um elemento estrutural, ou mesmo uma estrutura por inteiro, faz-se necessário a compreensão da variabilidade dimensional desses elementos estruturais, as diferentes abordagens mecânicas e a flutuação dos carregamentos, pois incertezas como estas são determinantes para a análise e dimensionamento de estruturas. Mas compreender os fenômenos associados a essas incertezas não é uma tarefa simples na busca de qualidade e satisfação decorrentes dos projetos.

Em se tratando de qualidade, Moreira (2005) ressalta que o termo confiabilidade vem se tornado cada vez mais importante para o mercado, pois, a falha de um produto, mesmo que prontamente reparada pelo serviço de assistência técnica e totalmente coberta por termos de garantia, causa, no mínimo, uma insatisfação ao consumidor ao privá-lo do uso do produto por determinado tempo.

Como exemplo disso, considerando o avanço tecnológico de materiais e métodos na engenharia estrutural, o mercado consumidor ficou mais exigente, buscando índices de qualidade mais sofisticados ao avaliar o desempenho de uma estrutura. Isso implica na necessidade de abordar as incertezas intrínsecas ao dimensionamento de uma estrutura com auxílio de técnicas de análises mais avançadas, buscando a determinação de tais índices para que auxiliem aos engenheiros, de forma mais assertiva, em decisões como: qual material utilizar em uma edificação ou, que dimensões possibilitariam maior segurança.

Nesse sentido, a Confiabilidade Estrutural surge como uma ótima ferramenta, uma vez que possui alta flexibilidade de aplicações de seus conceitos. Segundo Sagrilo (2003), a confiabilidade estrutural tem como principal objetivo avaliar a segurança de uma estrutura, que basicamente consiste no cálculo da probabilidade de que um estado limite de uma estrutural seja violado. Dessa forma, é possível estimar a probabilidade de que uma estrutura não suporte as solicitações especificadas durante o projeto. A construção de modelos confiabilísticos é realizada com base na avaliação das incertezas das variáveis de projeto, que são descritas de maneira estatística, como variáveis aleatórias.

A sua utilização permite ao engenheiro estrutural considerar as incertezas inerentes às variáveis de projeto, através das correspondentes distribuições de probabilidade, permitindo obter, entre outros resultados, a probabilidade de falha da estrutura e a sensibilidade do projeto em relação a estas variáveis. Essas informações podem interferir significativamente nas decisões que envolvam a segurança da estrutura.

Por outro lado, quanto à análise de estruturas reais, modelagens matemáticas bi e tri-dimensionais são largamente utilizadas, dando origem a inúmeras formulações, com soluções

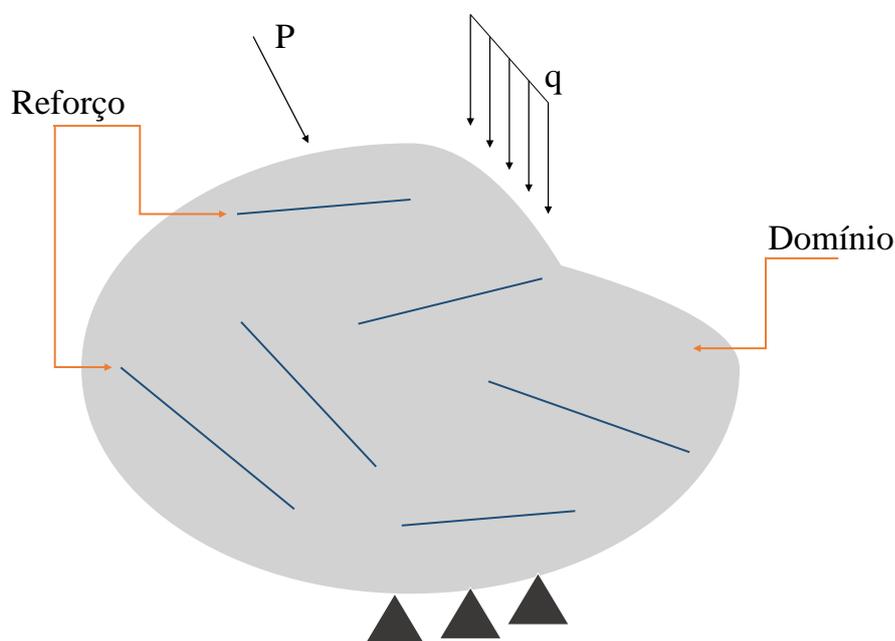
analíticas muitas vezes complexas, ou mesmo, inexistentes. Com o intuito de contornar esses problemas, faz-se necessário a utilização de algum procedimento numérico. Esses são utilizados na determinação de soluções aproximadas de problemas de valor de contorno. Como exemplo desses procedimentos, têm-se o Método das Diferenças Finitas (MDF), Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). O MEF é, dentre os métodos citados, o mais difundido atualmente no mundo, sendo aplicado por diversas áreas de estudo. Nesse técnica numérica, o domínio de um problema mecânico, submetido a carregamentos e restrições, é subdividido em pequenas partes, denominadas de elementos, os quais passam a representar o domínio contínuo do problema. A divisão do domínio em pequenos elementos permite resolver um problema complexo, subdividindo-o em problemas mais simples.

Aliado aos métodos numéricos, a possibilidade do uso de computadores para análises de estruturas, proporcionou avanços significativos nos estudos dos problemas de engenharia estrutural, condicionando, entre outros benefícios, uma maior produtividade na elaboração de projetos. Isso é possível a partir do aperfeiçoamento de modelagens físico-matemáticas dos materiais e do problema mecânico, viabilizando o desenvolvimento de softwares de maior eficácia, dando mais confiança aos engenheiros ao utilizarem essas ferramentas em suas atividades. Por exemplo, o emprego de softwares para análise e dimensionamento de estruturas de concreto armado, demonstra a evidente necessidade do uso de programas computacionais no dia-a-dia desses profissionais, havendo várias opções no mercado, com diversas aplicações em modelagens uni, bi ou tridimensionais, ou combinações dessas.

Em casos de domínios bidimensionais, em que esses são simplificações de problemas 3-D, formulações mais robustas são necessárias a fim de garantir maior fidelidade à realidade. A complexidade dessa situação é ampliada para o caso de materiais não convencionais. Um exemplo são os materiais compósitos, que apresentam uma composição heterogênea, pois são formados por diferentes materiais e, quando combinados, produzem um novo material, com características superiores aos seus constituintes. Os compósitos tem sua aplicação amplamente difundida na construção civil. O concreto armado é o exemplo mais comum de compósito, largamente utilizado na indústria da construção, que combina o baixo custo do concreto e sua resistência à compressão, com a ductilidade e a resistência à tração do aço. Outro exemplo, mais recente, é o concreto reforçado com fibras (CRF). Essas podem ser dos mais diversos materiais, como o aço, o carbono, o sisal, etc. A Figura 1 ilustra um modelo de domínio plano reforçado. Nesse contexto, com a aplicação de reforço à materiais com base de matriz cimentícia, é possível trazer ao material qualidades como o ganho de rigidez.

Na modelagem de um material cimentício reforçado, uma estratégia interessante é aproximar o problema 3-D para o 2-D, trazendo algumas vantagens, como redução do tempo de processamento. Em análises numéricas de estruturas com materiais desse tipo, a combinação de diferentes tipos de elementos (uni e bidimensionais) pode ser utilizada para garantir uma melhor aproximação da constituição macroscópica, ou até mesoscópica, de algum elemento estrutural

Figura 1 – Modelo de estrutura plana com reforços retos.



Fonte: elaborada pelo autor.

mediante a contribuição de diversos materiais. Por outro lado, esse modelo pode apresentar algumas limitações, entre elas, a incapacidade de captar a resposta da estrutura, devido a um reforço que não esteja contido no plano em estudo. Isso fez com que muitos trabalhos buscassem na Micromecânica uma forma de obter propriedades efetivas, ao invés de tentar modelar o reforço propriamente dito.

Recentes trabalhos de análise numérica de estruturas, citados nas seções seguintes deste capítulo, utilizam a confiabilidade como ferramenta para enriquecer suas análises. Devido a flexibilidade de aplicações de seus conceitos, torna possível o acoplamento, por exemplo, do MEF com métodos de confiabilidade estrutural. A isso dar-se o nome de acoplamento mecano-fiabilístico (LEMAIRE, 2013). Ao longo do texto, serão apresentados alguns aspectos inerentes a esse acoplamento empregado no modelo proposto. Ainda, serão apresentados alguns conceitos básicos da Teoria da Micromecânica utilizados nos exemplos da mesma, bem como, a comparação dessa abordagem com reforço utilizando elementos unidimensionais.

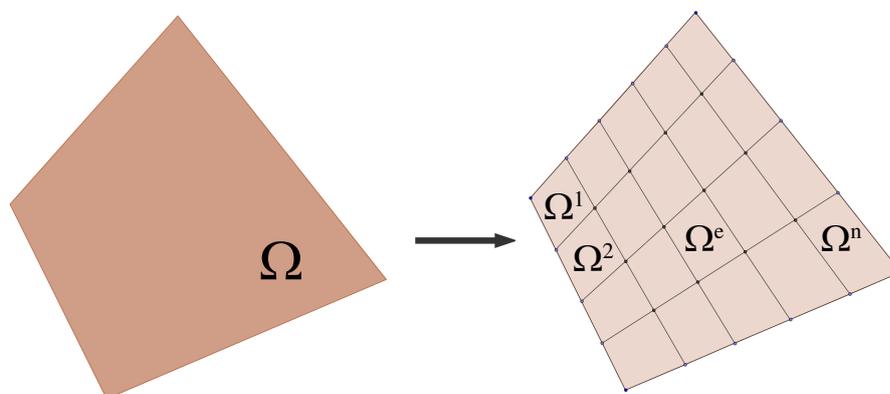
1.2 BREVE HISTÓRICO

1.2.1 Modelagem de Problemas Planos via MEF

O MEF surgiu como alternativa para resolver problemas da Teoria da Elasticidade, vindo a superar dificuldades inerentes à utilização dos métodos de Rayleigh-Ritz, Galerkin, resíduos ponderados, diferenças finitas, entre outros. A ideia básica do MEF é dividir o corpo em vários subdomínios ou elementos finitos e determinar a solução aproximada, considerando-se

apenas alguns pontos (nós) do subdomínio. O conjunto de nós e elementos constitui a malha de elementos finitos como é mostrado na Fig. 2.

Figura 2 – Discretização de domínio plano com elementos quadrilaterais.



Fonte: elaborada pelo autor.

Entre 1940 e 1960, o MEF teve seu período de concepção, até sua formulação ser estabelecida tal como é conhecida atualmente, no trabalho desenvolvido por Turner et al. (1956). Clough, em 1960, utilizou pela primeira vez o termo elemento finito, em seu trabalho *The Finite Element Method in Plane Stress Analysis*. A partir deste, os trabalhos seguintes começam também a adotar o termo elementos finitos ao se referir aos subdomínios, formados a partir da divisão de um domínio contínuo. Até meados dos anos noventa, cerca de 40.000 trabalhos, entre artigos e livros, foram publicados sobre elementos finitos e suas aplicações (COOK, 1995). Atualmente, é possível encontrar, em uma simples busca na internet, mais de 25 milhões de resultados relacionados a *finite element method*.

Melosh (1963) apresentou uma formulação do método dos elementos finitos a partir da minimização da grandeza escalar funcional de energia potencial total. Dois anos depois, Veubeke (1965) apresenta a formulação do MEF a partir de outros funcionais da mecânica dos sólidos deformáveis. Verificou-se que as bases do método foram pré-determinadas por Lord Rayleigh em 1870, por Walter Ritz em 1909 e Richard Courant em 1943. Assim, mostrou-se que o MEF é um caso particular do método de Rayleigh-Ritz, estabeleceram-se critérios de convergência e verificou-se que o método poderia ser aplicado em qualquer problema de meio contínuo regido por um funcional (SORIANO, 2003). Essa é a conhecida *formulação variacional*. A consistência matemática da formulação variacional permitiu a consolidação do MEF e a extensão deste à resolução de diversos problemas de meio contínuo. No final dos anos de 1960, Zienkiewicz e Cheung (1967) publicaram o primeiro livro inteiramente dedicado ao método dos elementos finitos. Atualmente, existem várias obras sobre o método dos elementos finitos, em diversos idiomas.

Após a concepção da formulação variacional, os trabalhos de Szabo e Lee (1969), Hermann (1972), além de Lynn e Arya (1973), trataram da formulação do MEF via método de

resíduos ponderados em que, basicamente, arbitram-se campos de variáveis no elemento em função dos correspondentes valores nodais. Assim, problemas não regidos por funcionais foram contemplados com a possibilidade de solução por meio do MEF.

Inicialmente formulado para problemas de engenharia mecânica/estrutural, o valor prático do MEF foi rapidamente reconhecido em outras áreas de engenharia, como eletricidade e fenômenos de transporte. Isto se deu também devido à evolução e expansão dos computadores. No final da década de 60 e início dos anos 70, surgem diversos programas utilizando elementos finitos para finalidades gerais. STRUDL, ASKA, NASTRAN, ANSYS e SAP são alguns exemplos. Atualmente, existem diversos programas computacionais, distribuídos comercialmente, com uso em diversas áreas do conhecimento, que utilizam esse método para análises linear e não-linear, seja física ou geométrica. Assan (2003) ressalta que o MEF está completamente agregado as atividades do engenheiro, de modo que seu aprendizado é de suma importância para que compreenda-se com lucidez o funcionamento de programas comerciais disponíveis em alguns escritórios de projeto.

1.2.2 MEF Aplicado à Domínios Planos Reforçados

Dá-se a Ngo e Scordelis (1967) o primeiro registro de publicação sobre análise de estruturas de concreto armado via método dos elementos finitos. Estes autores utilizaram elementos finitos triangulares planos para representar o concreto e a armadura. O modelo constitutivo utilizado para representar estes materiais foi o elástico-linear. Além disso, a aderência entre concreto e armadura foi considerada com o uso de elementos finitos de interface e as fissuras no concreto foram representadas através da separação das arestas dos elementos de concreto. Neste tipo de abordagem as fissuras são denominadas discretas.

Phillips e Zienkiewicz (1976) desenvolveram um elemento linear representando um reforço (barra de aço) embutido em um elemento isoparamétrico quadrilateral (concreto), de modo que a direção deste reforço fosse alinhada com um dos eixos locais do elemento de concreto. Ou seja, o elemento de aço é considerado como um componente axial embutido no elemento isoparamétrico e seus deslocamentos são consistentes com os do elemento de concreto. Para os elementos de reforço e os de concreto considerou-se a condição de acoplamento perfeito.

No trabalho de Elwi e Hrudey (1989) é apresentada uma formulação para um elemento curvo (reforço) embutido em elemento plano de oito nós (Q8). O reforço é descrito em coordenadas globais, o que possibilita independência da discretização do domínio. Na integração da equação desenvolvida considerando o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), necessita-se das coordenadas do reforço em cada elemento (não mapeado), e para isso os autores propõem dois métodos. Além disso, são incluídos os efeitos de deslizamento entre os elementos de reforço e matriz, adicionando os graus de liberdade referentes a este efeito.

Prates Junior (1992) implementou um modelo computacional, também baseado no método dos elementos finitos, para o estudo de peças de concreto armado e protendido, conside-

rando um estado plano de tensões, abrangendo casos de propriedades dependentes do tempo, considerando-se fluência e retração do concreto, além de relaxação do aço. O autor adotou modelos constitutivos elasto-visco-plásticos para os materiais. Considerou-se aderência perfeita entre o concreto e o aço. O modelo incorporado foi utilizado para inserção das armaduras na malha de elementos de concreto.

Barzegar e Maddipudi (1994) adotam uma formulação, denominada de embutida, possibilitando qualquer ângulo entre o reforço e os eixos locais do elemento finito isoparamétrico tridimensional adotado. Cada segmento reto de reforço é identificado pelas coordenadas de seus dois pontos finais, determinando-se as intersecções com as faces dos elementos sólidos. A rigidez de cada elemento de concreto armado reforçado pode então ser calculada utilizando um procedimento de mapeamento inverso (*inverse-mapping*), para se obter as coordenadas dos pontos de integração ao longo do(s) elemento(s) de reforço nos eixos do elemento principal de concreto.

Assan (2003) apresenta a formulação de um elemento finito plano com armadura embutida. O elemento formulado para representar a armadura é estritamente reto, mas é do tipo embutida, de modo a não haver dependência da malha de elementos planos. O autor supõe aderência perfeita entre a armadura e o concreto, com isso, idealiza-se que o concreto e a armadura têm o mesmo tensor de deformações em cada ponto compartilhado. Também é possível considerar a distribuição das armaduras na espessura do elemento plano. Ainda, para a consideração de armadura curva, o autor sugere os trabalhos de Elwi e Hrudey (1989), já citados, e de Ranjbaran (1991). Este último desenvolve trabalho semelhante à Phillips e Zienkiewicz (1976), mas incorpora a possibilidade de utilizar barras inclinadas.

Bitencourt Júnior (2009) desenvolveu uma plataforma computacional que possibilita a análise de concreto armado embebido com fibras de aço. Para a representação do concreto, foram implementados elementos finitos planos isoparamétricos quadrilaterais e triangulares e, para as armaduras, elementos finitos unidimensionais isoparamétricos com aproximações linear e quadrática representados por meio do modelo discreto. Neste modelo, há uma dependência da malha de elementos finitos para posicionar os elementos de armadura, uma vez que estes devem ser posicionados nas arestas dos elementos de concreto. As armaduras têm seu comportamento descrito através de um modelo elasto-plástico bilinear. Para o comportamento do concreto, foi considerado um modelo elástico não-linear com comportamento isotrópico até o limite de ruptura, acoplado a um modelo de amolecimento linear na tração. Ainda, o autor utiliza o método de Newton-Raphson padrão, optando pela realização do controle de carga, devido à convergência mais rápida ao ponto de equilíbrio. Com isso, a matriz de rigidez é calculada em cada iteração.

Mortazavi et al. (2013) apresentam um novo procedimento de modelagem para a avaliação da condutividade térmica efetiva de materiais compósitos pelo método dos elementos finitos tridimensionais. Efeitos da geometria das inclusões, fração volumétrica, propriedades de condutividade térmica efetiva e de módulo de elasticidade são analisados. Em seus resultados, os

autores mostram que o método dos elementos finitos pode capturar mais detalhes na previsão de propriedades efetivas dos materiais compósitos. Por outro lado, o modelo Mori-Tanaka é mostrado como uma alternativa rápida e válida para a modelagem de elementos finitos.

Recentemente, Sampaio (2014) desenvolveu uma formulação para a inclusão de fibras longas e curtas aleatórias, nas diversas lâminas de cascas laminadas anisotrópicas, considerando a não linearidade geométrica do problema, e utilizando o método dos elementos finitos sem aumentar o número de graus de liberdade do sistema de equações resultante. Não houve a dependência, na discretização, entre os nós das fibras e da matriz. As fibras foram discretizadas utilizando elementos finitos unidimensionais de ordem qualquer com três graus de liberdade por nó e que consideram consistentemente a não linearidade geométrica. Destaque para o código gerador de fibras curtas distribuídas aleatoriamente, inseridas a partir de blocos, que são divisões do domínio a fim de proporcionar controle na distribuição das fibras ao longo do domínio.

Bitencourt Júnior (2014), em continuidade ao seu trabalho de 2009, apresenta uma estratégia numérica desenvolvida usando o método dos elementos finitos para simular o processo de falha de compósitos cimentícios reforçados com fibras de aço. Um novo esquema de acoplamento para malhas de elementos finitos não-conformes foi desenvolvido para acoplar as malhas geradas independentemente, da matriz cimentícia e de uma nuvem de fibras de aço, baseado na utilização de novos elementos finitos desenvolvidos, denominados elementos finitos de acoplamento. As fibras de aço são modeladas usando elementos finitos lineares com dois nós (elementos de treliça) com modelo material elastoplástico. As fibras são posicionadas usando uma distribuição randômica uniforme isotrópica, considerando o efeito parede.

Pike e Oskay (2016) apresentam uma formulação e implementação do método de elementos finitos estendidos (Extended Finite Element Method - XFEM) para compósitos reforçados com fibras curtas distribuídas aleatoriamente. As propriedades efetivas são obtidas através de abordagem micromecânica. Este autor ressalta que o custo computacional da modelagem das fibras como elementos unidimensional é elevado. É considerada aderência entre as fibras e a matriz como interfaces coesivas.

Fernandes (2016) desenvolveu um código computacional com formulações que permitem a representação de compósitos reforçados com fibras sem que haja a necessidade de coincidência entre malhas. Além disso, na simulação do meio e do reforço considera-se regime elastoplástico com o objetivo de melhor estudar o real comportamento. A formulação de elementos finitos posicional é adotada com descrição Lagrangeana Total e apresenta as posições do corpo no espaço como parâmetros nodais.

1.2.3 MEF e Análise de Confiabilidade em Domínios Planos Reforçados

Nesta seção, são apresentados alguns trabalhos, que além dos temas abordados na seção anterior, MEF e domínios reforçados, adicionaram aspectos relacionados à confiabilidade estrutural.

Real (2000) apresenta um modelo para análise probabilística via *Monte Carlo* de estruturas de concreto armado, sob estado plano de tensão, através do método dos elementos finitos. Este modelo mostra como as incertezas presentes nos principais parâmetros do comportamento de vigas e pilares afetam a variabilidade da resposta da estrutura, sob um determinado carregamento. O concreto é modelado através de elementos isoparamétricos bidimensionais, quadráticos, de oito nós, com dois graus de liberdade por nó. A armadura é representada através do modelo incorporado, proposto por Elwi e Hrudey (1989). Cada barra de armadura é considerada como uma linha mais rígida dentro do elemento de concreto, que resiste apenas a esforços axiais. Para resolver o sistema de equações não-lineares resultante, empregou-se o Método BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno).

Paliga (2008) implementou um modelo computacional, baseado no método dos elementos finitos, para a análise de estruturas de concreto armado reforçadas. Foi feita uma análise probabilística com o intuito de avaliar a segurança de vigas de concreto armado recuperadas de um dano sofrido, através da colagem de polímeros reforçados com fibra de carbono (PRFC) em sua face tracionada, com relação ao estado limite último (ELU) de flexão, projetadas conforme as recomendações dos principais documentos normativos existentes no mundo. Esta análise deu-se de forma conjunta entre o modelo implementado e com o método de Monte Carlo, possibilitando um estudo de confiabilidade estrutural no ELU.

Nogueira (2010) apresentou avanços na modelagem mecânica de estruturas de barras em concreto armado, bem como no acoplamento entre modelos de confiabilidade e otimização para obtenção de dimensões ótimas, respeitando os requisitos de segurança especificados em projeto. Em relação à modelagem mecânica via MEF, além do comportamento não-linear físico e geométrico, foi considerada a contribuição dos mecanismos complementares de resistência ao cisalhamento. Os elementos finitos utilizados foram elementos finitos de pórtico plano, a partir da teoria de Timoshenko. Quanto ao acoplamento de confiabilidade e otimização, foram exploradas melhorias no Método de Superfície de Resposta e no acoplamento direto via Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (First Order Reliability Method - FORM) e Técnica dos Gradientes Numéricos. Esse trabalho mostrou que os custos da estrutura otimizada são menores, quando se considera os efeitos de comportamento não-linear dos materiais.

Um levantamento do desenvolvimento atual da aplicação da confiabilidade em compósitos laminados foi apresentado por Chiachio, Chiachio e Rus (2012). Métodos como Monte Carlo, FORM, SORM, etc. são brevemente descritos e comparados dentro de uma formulação simplificada para laminados. Os autores destacam que devido ao grande número de variáveis envolvidas na descrição mecânica de compósitos, em comparação com materiais tradicionais, um maior número de testes para determinação dos parâmetros associados aos laminados, torna-se um exercício necessário para obter um resultado de confiabilidade adequado.

Ghasemi et al. (2015) apresentaram um algoritmo de otimização sequencial, em dois estágios, para encontrar o teor ótimo de fibras e a distribuição em compósitos, considerando

variáveis aleatórias associadas aos problemas descritos. No primeiro estágio, a fração ideal de fibras é obtida através de um problema de otimização de projeto baseada em Confiabilidade (Reliability Based Design Optimization - RBDO), adotando distribuição uniforme, em uma estrutura de Compósito Reforçado com Fibra (Fiber Reinforced Composite - FRC). É utilizado uma estratégia de homogeneização micromecânica baseada na equivalência energética entre o FRC e o material macroscopicamente homogêneo. No segundo estágio, otimiza-se a distribuição das fibras com o objetivo de aumentar a confiabilidade estrutural através da definição de uma função de distribuição de fibras obtida com superfícies NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline). Os dados de saída do primeiro estágio servem de entrada para o segundo. Como resultado do segundo estágio, determina-se o índice de confiabilidade (β). O FORM é utilizado para determinação do índice β .

1.3 JUSTIFICATIVA

Ao buscar trabalhos que incorporassem aplicações de materiais cimentícios reforçados, visando análise fisicamente elástica, em estado plano de tensão por meio do MEF, percebeu-se que é escasso o número desses. E embora aplicações em estado plano de tensão sejam uma simplificação do problema real, tridimensional, benefícios são percebidos com isso, como redução do custo computacional associado às análises 3-D. Fato esse que ainda mostra a importância das análises de elementos estruturais em 2-D.

Além disso, uma simulação computacional de materiais compósitos, seja em regime fisicamente linear ou não-linear, normalmente ainda é feita com base em valores determinísticos adotados para as propriedades dos materiais e para as dimensões da estrutura. Usualmente são empregados os valores médios, entre os diversos dados obtidos experimentalmente, para as propriedades mecânicas dos materiais. Neste sentido, incorporar as recentes contribuições da Teoria de Confiabilidade à análise estrutural, aprimora o entendimento acerca da performance das estruturas, e permite um balanço adequado entre custo e segurança.

Nesse sentido, viu-se a possibilidade de contribuir com essa Dissertação no tocante ao acoplamento do mecano-fiabilístico em domínios planos reforçados, ou seja, utilizar um modelo numérico, como o MEF, associado a um método de confiabilidade, para estudar a interferência de parâmetros físicos, esses como variáveis aleatórias, na resposta fisicamente linear de problemas de engenharia em estado plano de tensões. Esses problemas, por sua vez, referindo-se a meios planos reforçados, o que remete, por exemplo, a elementos estruturais de matriz cimentícia reforçados com fibras.

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 Objetivo Geral

Mediante o que foi exposto, o presente trabalho tem como objetivo a aplicação do MEF em problemas planos, possibilitando a inserção e distribuição direta de elementos unidimensionais ou utilizando as propriedades efetivas obtidas através de modelo de homogeneização de Mori-Tanaka, com vistas à modelagem de estruturas de material cimentício reforçado por fibras. Aliado a isso, propõe-se uma análise confiabilística, verificando a influência da aleatoriedade das variáveis de projeto na resposta estrutural em regime elástico linear.

1.4.2 Objetivos Específicos

São objetivos específicos deste trabalho:

- a) Implementar código computacional baseado na formulação em deslocamentos do MEF, para elementos T3 e Q8, e elementos unidimensionais de treliça;
- b) Implementar o modelo de homogeneização de Mori-Tanaka;
- c) Desenvolver e implementar estratégia de análise mecano-fiabilística, com base no método FORM, para acoplamento da rotina de verificação probabilística aos modelos numéricos desenvolvidos.

1.5 METODOLOGIA DE PESQUISA

Inicialmente, fez-se uma revisão bibliográfica a respeito do Método dos Elementos Finitos e sua aplicação em compósitos cimentícios reforçados com fibras. Essa revisão seguiu com estudos de homogeneização via micromecânica, especificamente, com o modelo de Mori-Tanaka (MORI; TANAKA, 1973). Além disso, verificou-se as aplicações da Teoria da Confiabilidade em estruturas envolvendo problemas plano reforçados.

A implementação das rotinas computacionais necessárias para as análises apresentadas nesta Dissertação foram escritas em *Python*, linguagem de alto nível e de código aberto, amplamente utilizada no mundo científico por sua versatilidade. As rotinas de MEF também foram implementadas nessa linguagem, a fim de facilitar o acoplamento com as rotinas de confiabilidades previamente elaboradas.

1.5.1 ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Para estudo dos problemas abordados nesta Dissertação, implementou-se um programa que pudesse abranger as análises do tema proposto. A linguagem de programação utilizada foi *Python* (versão 3.6). A linguagem é *Open Source* e multiplataforma, sendo amplamente utilizada em aplicações de engenharia. *Python* suporta múltiplos paradigmas de programação,

um deles é a programação orientada a objetos (POO), utilizado no presente trabalho, pois facilita o desenvolvimento e manutenção das rotinas. O *Python* é uma linguagem interpretada, em oposição a uma linguagem compilada, embora se tenha a presença de um compilador *bytecode*. Isso significa que os arquivos de código-fonte podem ser executados diretamente sem criar explicitamente um executável, reduzindo bruscamente o tempo de processamento. Além disso, foi possível o uso do *NumPy* e do *SciPy*, que são pacotes dessa linguagem, fundamentais para computação científica em *Python*.

O *NumPy* é o pacote básico da linguagem Python que permite trabalhar com arranjos, vetores e matrizes de N dimensões, de uma forma comparável e com uma sintaxe semelhante ao software *Matlab*, mas com muito mais eficiência, e com toda a expressividade da linguagem (OLIPHANT, 2006). O *SciPy*, por sua vez, tem como base o *NumPy* para lidar eficientemente com grandes quantidades de dados, e contém diversos algoritmos numéricos e simbólicos, implementados em linguagem C, para o processamento matemático (JONES; OLIPHANT; PETERSON, 2014). Entre as aplicações desse pacote, tem-se: Estatística, Otimização, Integração numérica, Processamento de sinais e imagens, Solução de equações diferenciais, dentre outras.

O desenvolvimento do programa, batizado de ReliaFEM, focou no acoplamento dos três temas discutidos no texto: MEF, Micromecânica e Confiabilidade Estrutural, conforme apresentado nos capítulos que seguem.

1.6 DELIMITAÇÃO DO TRABALHO

Para o presente trabalho, com intuito de dimensionar, satisfatoriamente, a curva de aprendizado apropriado para os temas abordados, estabeleceram as seguintes delimitações:

- a) Os materiais que constituem a matriz e o reforço são admitidos em regime elástico linear;
- b) A análise é desenvolvida em regime geometricamente linear;
- c) A modelagem é feita em estado plano de tensão, no caso do domínio bidimensional;
- d) Os elementos de reforço são retilíneos, e possuem aderência perfeita à matriz.

2 MODELAGEM DE DOMÍNIOS PLANOS REFORÇADOS

Neste capítulo serão abordadas as formulação dos elementos finitos utilizados na implementação da rotina utilizada neste trabalho. Com isso, pretende-se mostrar os principais condicionantes na montagem da matriz de rigidez global \mathbf{K} , sendo esta composta pelas contribuições das matrizes de rigidez dos elementos finitos planos (\mathbf{K}_m^e), modelando a matriz que compõe o domínio. Também será apresentada a modelagem do reforço a partir de duas alternativas: utilizando elementos de treliça para obtenção da matriz de rigidez desses elementos (\mathbf{K}_r^e); ou determinando as propriedades elásticas efetivas do compósito utilizando uma técnica de homogeneização.

2.1 MODELAGEM DA MATRIZ

Nesta seção serão apresentados os elementos bidimensionais utilizados na implementação da rotina computacional deste trabalho. São dois os principais tipos de problemas de elasticidade plana: estado plano de tensão e estado plano de deformação. Como o presente trabalho tratará de modelagem de domínios planos que remetem à vigas e chapas, o estado plano de tensão é o mais apropriado neste tipo de problema, aproximando esses elementos estruturais como uma chapa. Considera-se que as cargas aplicadas à estrutura agem no plano médio da chapa. Além disso, assume-se que as deformações são muito pequenas e, após a remoção das cargas, as deformações desaparecem completamente. Para a formulação da matriz de rigidez dos elementos finitos planos, será utilizado o Princípio da Mínima Energia Potencial Total.

2.1.1 Descrição do Problema: Estado Plano de Tensão

Defini-se que o estado plano de tensão (EPT) ocorre quando em um elemento estrutural têm-se duas dimensões muito maiores que a terceira, como, por exemplo, chapas, que têm a espessura muito menor do que as outras duas dimensões (superfície), e as solicitações ocorrem no plano médio do corpo, como apresentado na Figura 3. Adota-se o sistema de eixos no plano médio da chapa e admite-se que as tensões normais ao plano médio são nulas, do mesmo modo que as tensões tangenciais paralelas aos planos xz e yz .

Assim, o estado plano de tensão é definido pelas seguintes condições:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (2.1)$$

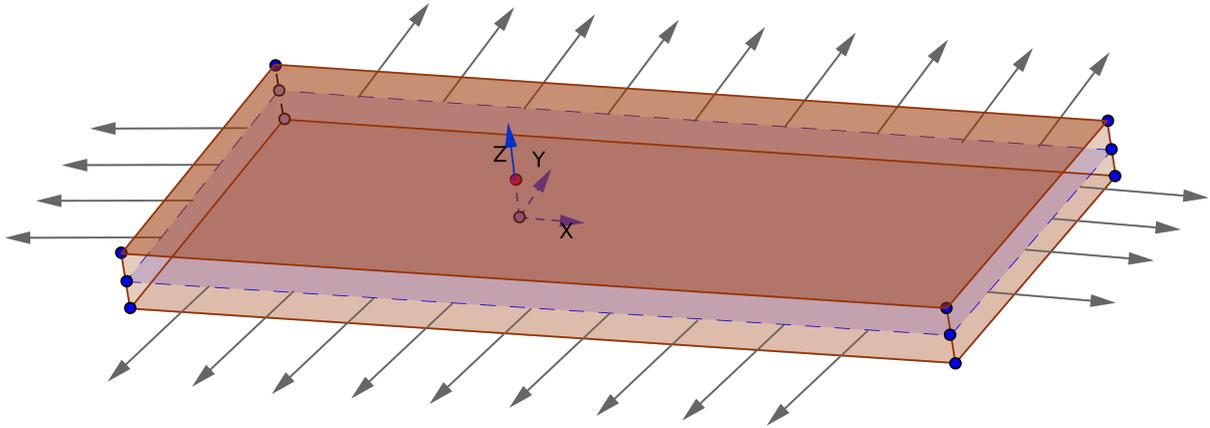
podendo-se ter:

$$\sigma_x \neq 0 \quad (2.2a)$$

$$\sigma_y \neq 0 \quad (2.2b)$$

$$\tau_{xy} \neq 0 \quad (2.2c)$$

Figura 3 – Chapa solicitada em seu plano médio.



Fonte:elaborada pelo autor.

A possibilidade de aproximar o comportamento de uma viga (tridimensional) como uma chapa, condicionando uma análise bidimensional, é bastante atraente do ponto de vista computacional, pois em termos da formulação do MEF, isso possibilita a diminuição nos graus de liberdades intrínsecos ao problema.

2.1.2 Matriz de Rigidez de um Elemento Bidimensional

O Funcional Π associado à Energia Potencial Total de um sólido qualquer, é obtido pela soma de duas parcelas, apresentadas na Eq. (2.3). A primeira parcela é relativa à energia potencial dos esforços internos Π_{int} , e a segunda está associada à energia potencial dos esforços externos Π_{ext} . Ressalta-se o fato do Funcional estar em função do campo de deslocamentos \mathbf{u} .

$$\Pi(\mathbf{u}) = \Pi_{int}(\mathbf{u}) + \Pi_{ext}(\mathbf{u}) \quad (2.3)$$

A energia potencial dos esforços internos do sólido, também chamada de energia de deformação do sólido, pode ser escrita como na Eq. (2.4), em que $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\sigma}_0$ são a tensão e a tensão inicial, respectivamente, e $\boldsymbol{\varepsilon}$ é a deformação do sólido de espessura h .

$$\Pi_{int} = \frac{h}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}_0) d\Omega \quad (2.4)$$

Ainda, define-se também a energia potencial dos esforços externo no mesmo sólido como segue na Eq. (2.5).

$$\Pi_{ext} = -h \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (2.5)$$

em que $\bar{\mathbf{b}}$ e $\bar{\mathbf{t}}$ são as forças de volume e de superfície prescritas, respectivamente.

Assim, o funcional Π é reescrito na Eq. (2.6).

$$\Pi = \frac{h}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}_0) d\Omega - h \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (2.6)$$

Agora, a partir da aproximação básica do modelo de deslocamentos do MEF, expressa na Eq. (2.7), os deslocamentos de um ponto qualquer do elemento são obtidos por interpolação dos seus deslocamentos nodais \mathbf{u}^e . Essa aproximação deve implicar em componentes de deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$, com pelo menos continuidade C^0 no domínio do elemento (Ω^e), permitindo a integração da matriz de rigidez e, desse modo, chegando-se ao sistema de equações algébricas de equilíbrio.

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{N} \mathbf{d}^e \quad (2.7)$$

A matriz \mathbf{N} é composta pela funções de interpolação. Cada uma destas funções tem a propriedade de ter valor unitário em um ponto nodal e ter valores nulos nos demais. O campo de deformações no interior do elemento finito é obtido pela Eq. (2.8).

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{B}^e \mathbf{d}^e \quad (2.8)$$

em que \mathbf{B}^e é a matriz que relaciona o campo de deformações com os deslocamentos nodais do elemento. A matriz \mathbf{B} é determinada aplicando o operador diferencial \mathbf{L} (Eq. (2.9)) à matriz \mathbf{N} , como é mostrado na Eq. (2.10).

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N} \quad (2.10)$$

A partir da lei de Hooke generalizada, considerando as simplificações impostas pelo EPT, além de adotar um material isótropo, a matriz constitutiva \mathbf{D} apresentada na Eq. (2.11), relaciona as tensões no interior do elemento com as deformações, como na Eq. (2.12). A matriz \mathbf{D} depende do módulo de elasticidade linear (E) e do coeficiente de *Poisson* (ν) do material.

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.12)$$

Substituindo as Eqs. (2.7), (2.8) e (2.12) na Eq. (2.6), o funcional de energia potencial total, associado a um elemento, é reescrito como:

$$\Pi^e = \frac{h}{2} \int_{\Omega^e} \mathbf{d}^{eT} \mathbf{B}^{eT} (\mathbf{D} \mathbf{B}^e \mathbf{d}^e + \boldsymbol{\sigma}_0) d\Omega^e - h \int_{\Omega^e} \mathbf{d}^{eT} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega^e - \int_{\Gamma^e} \mathbf{d}^{eT} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma^e \quad (2.13)$$

em que Ω^e é a superfície e Γ^e é o contorno, ambos do elemento finito.

O Teorema da Energia Potencial Total garante que o campo de deslocamentos, correspondente a uma configuração de equilíbrio estático de um corpo conservativo, é um ponto de mínimo estacionário da energia potencial. Isso é equivalente ao resultado do Teorema dos Trabalhos Virtuais. Então, pelo Princípio da Mínima Energia Potencial, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta\Pi^e = \delta\mathbf{d}^{eT} h \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D}\mathbf{B}^e d\Omega^e \mathbf{d}^e \\ - \delta\mathbf{d}^{eT} \left(h \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega^e + \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma^e - \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega^e \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Como a Eq. (2.14) é válida $\forall \delta\mathbf{u}^e$, rearranjando este resultado, tem-se:

$$h \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D}\mathbf{B}^e d\Omega^e \mathbf{d}^e = h \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega^e + \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma^e - h \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega^e \quad (2.15)$$

A partir da Eq. (2.15), pode-se definir:

$$\mathbf{K}_m^e = h \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D}\mathbf{B}^e d\Omega^e \quad (2.16a)$$

$$\mathbf{f}_b^e = h \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega^e \quad (2.16b)$$

$$\mathbf{f}_t^e = \int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma^e \quad (2.16c)$$

$$\mathbf{f}_{\sigma_0}^e = -h \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{eT} \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega^e \quad (2.16d)$$

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{f}_b^e + \mathbf{f}_t^e + \mathbf{f}_{\sigma_0}^e \quad (2.16e)$$

em que \mathbf{f}^e é o vetor de forças nodais composto pelas parcelas de forças equivalentes às forças de corpo (\mathbf{f}_b^e), às forças de contorno (\mathbf{f}_t^e), e às tensões iniciais ($\mathbf{f}_{\sigma_0}^e$). O termo \mathbf{K}_m^e é a matriz de rigidez simétrica de um elemento finito. Pode-se então reescrever a Eq. (2.15) como segue na Eq. (2.17).

$$\mathbf{K}_m^e \mathbf{d}^e = \mathbf{f}^e \quad (2.17)$$

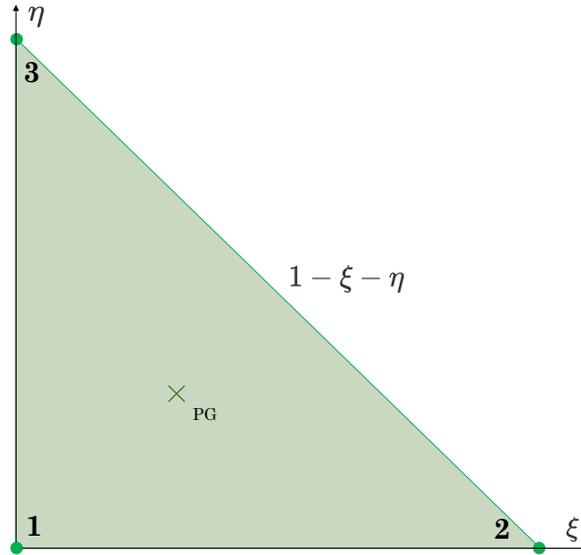
A seguir, são apresentados os tipos de elementos planos adotados neste trabalho e suas respectivas funções de interpolação. A escolha dos elementos finitos, apresentados nas seções seguintes, deve-se ao fato da rotina implementada contemplar esses elementos.

2.1.3 Elemento Finito Triangular com Interpolação Linear (T3)

O elemento triangular T3, representado na Fig. (4), possui 3 nós e é chamado na literatura de triângulo de deformação constante ou, ainda, de CST (*Constant Strain Triangle*) por possuir campo de deformação constante no domínio desse elemento.

As funções de forma do T3 em coordenadas naturais (ξ e η) são apresentadas na Eq. (2.18). A motivação para utilização desse tipo de elemento é a possibilidade de trabalhar com

Figura 4 – Elemento finito T3.



Fonte: elaborada pelo autor.

reforço inclinado, como será explicado na seção que trata do acoplamento entre os elementos uni e bidimensionais.

$$N_1 = \xi \quad (2.18a)$$

$$N_2 = \eta \quad (2.18b)$$

$$N_3 = 1 - \xi - \eta \quad (2.18c)$$

Assim, a matriz com as funções de interpolação (\mathbf{N}) para o elemento triangular, como na Eq. (2.19).

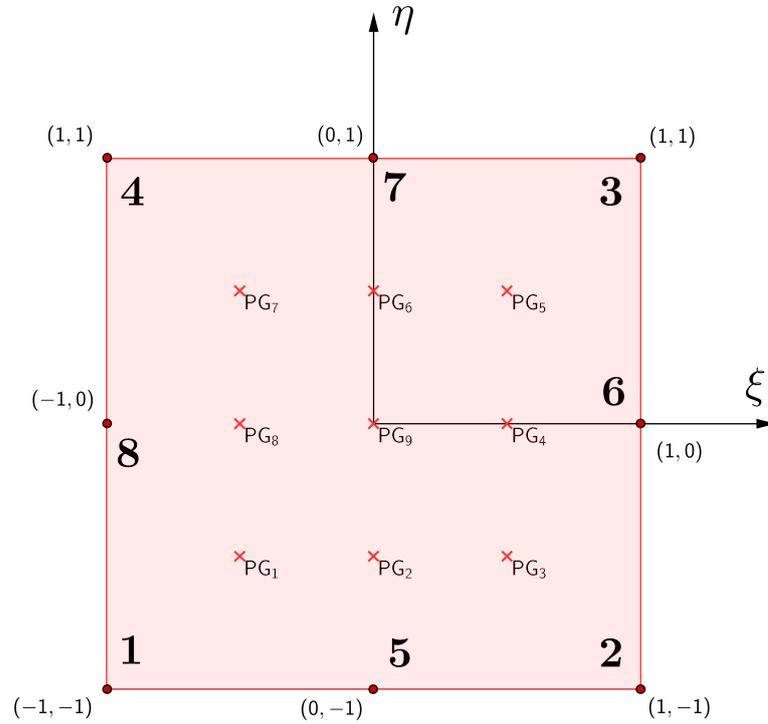
$$\mathbf{N}^{T3} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

2.1.4 Elemento Finito Quadrilateral com Interpolação Bilinear (Q8)

O elemento Q8 é um constituinte genuíno da família Serendipity, que compõe tanto a família Lagrange de elementos como a Serendipity. Na Figura 5 apresenta-se o elemento Q8, também chamado de biquadrático.

A Eq. (2.20) apresenta as funções de interpolação que compõem a matriz \mathbf{N} para o elemento Q8. Este elemento possui 8 nós e 2 graus de liberdade por nó. A interpolação de ordem 2 é possível uma vez que tem-se 3 nós em cada direção.

Figura 5 – Elemento finito Q8.



Fonte:elaborada pelo autor.

$$N_1 = -\frac{1}{4}(\eta - 1)(\xi - 1)(\eta + \xi + 1) \quad (2.20a)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(\eta - 1)(\xi + 1)(\eta - \xi + 1) \quad (2.20b)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(\eta + 1)(\xi + 1)(\eta + \xi - 1) \quad (2.20c)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(\eta + 1)(\xi - 1)(\xi - \eta + 1) \quad (2.20d)$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(\xi^2 - 1)(\eta - 1) \quad (2.20e)$$

$$N_6 = -\frac{1}{2}(\eta^2 - 1)(\xi + 1) \quad (2.20f)$$

$$N_7 = -\frac{1}{2}(\xi^2 - 1)(\eta + 1) \quad (2.20g)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(\eta^2 - 1)(\xi - 1) \quad (2.20h)$$

Da mesma forma que o elemento anterior, monta-se a matriz N para o elemento biquadrático, como na Eq. (2.21).

$$\mathbf{N}^{Q8} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & \cdots & N_7 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & \cdots & 0 & N_7 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

2.1.5 Integração numérica e determinação da matriz de rigidez de um elemento plano

Para o cálculo de \mathbf{K}_m^e , utiliza-se neste trabalho, o método de integração numérica de Gauss-Legendre. A Tabela 1 mostra o número de pontos de Gauss, suas coordenadas e os respectivos pesos, necessários para cada tipo de elemento. Para ambos, T3 e Q8, usa-se integração numérica completa. Os pontos de Gauss (PG_i) estão ilustrados nas Figuras 4 e 5 para cada tipo de elemento.

Tabela 1 – Coordenadas e pesos dos pontos de Gauss referentes aos elementos utilizados.

Tipo de Elemento Finito	Nº de pontos de Gauss	Coord. ξ	Coord. η	Peso
T3	1	1/3	1/3	1.0
Q8	9	$-\sqrt{0.6}$	$-\sqrt{0.6}$	25/81
		0.0	$-\sqrt{0.6}$	40/81
		$\sqrt{0.6}$	$-\sqrt{0.6}$	25/81
		$\sqrt{0.6}$	0.0	40/81
		$\sqrt{0.6}$	$\sqrt{0.6}$	25/81
		0.0	$\sqrt{0.6}$	40/81
		$-\sqrt{0.6}$	$\sqrt{0.6}$	40/81
		$-\sqrt{0.6}$	0.0	40/81
		0.0	0.0	64/81

De modo que, considerando integração numérica sobre os pontos de Gauss, a Eq. (2.16a) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{K}_m^e = h \sum_{i=1}^{N_g} \sum_{j=1}^{N_g} W_{ij} | \mathbf{J}^e(\xi_i, \eta_j) | \mathbf{B}^{eT}(\xi_i, \eta_j) \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e(\xi_i, \eta_j) \quad (2.22)$$

em que N_g é número de pontos de Gauss em cada direção (ξ e η), W_{ij} é produto dos pesos associados a cada coordenada, e \mathbf{J}^e é a matriz Jacobiana.

Tomando χ^e como a matriz com as coordenadas globais (x_i^e e y_i^e) dos nós de um elemento, apresentada na Eq. (2.23), com $i = 1, 2, \dots, N_e$, cujo N_e é o número de nós do elemento, a matriz J^e do respectivo elemento é obtida na Eq. (2.24).

$$\chi^e = \begin{bmatrix} x_1^e & y_1^e \\ x_2^e & y_2^e \\ \vdots & \vdots \\ x_{N_e}^e & y_{N_e}^e \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$J^e(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_{N_e}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_{N_e}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \chi^e \quad (2.24)$$

Para determinar $B^e(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$, explicitada na Eq. (2.25), precisa-se das derivadas das função de forma em relação às coordenadas globais x e y . Isto é possível com o auxílio de J^e , como é mostrado na Eq. (2.26).

$$B^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{N_e}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_{N_e}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{N_e}}{\partial y} & \frac{\partial N_{N_e}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{N_e}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{N_e}}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{e-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_{N_e}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_{N_e}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Expandindo o sistema de equações e para todo domínio, adicionando as contribuições de rigidez dos elementos (K_m^e) e de forças nodais (f_m^e) internas e externas, devido aos elementos bidimensionais, considerando os correspondentes graus de liberdade, implicando na correta incidência cinemática, obtém-se a matriz de rigidez global (K_m) e o vetor de forças global (f_m), como apresentado nas equações a seguir.

$$K_m = \sum_{i=1..N_e} K_m^{e_i} \quad (2.27a)$$

$$f_m = \sum_{i=1..N_e} f_m^{e_i} \quad (2.27b)$$

O sistema de equações apresentado na Eq. (2.28) é montado a partir das Eqs. 2.27a e 2.27b, a fim de determinar os deslocamentos desconhecidos, para então, definir o vetor de

deslocamentos globais (\mathbf{d}_m). Para isso, deve-se considerar as condições de contorno essenciais e naturais do problema.

$$\mathbf{K}_m \mathbf{d}_m = \mathbf{f}_m \quad (2.28)$$

Mais a respeito da formulação aqui apresentada, pode ser consultada em Phillips e Zienkiewicz (1976), Cook et al. (1989), Cook (1995) Assan (2003), Soriano (2003) e Fish e Belytschko (2007).

2.2 MODELAGEM DO REFORÇO

Nessa seção, os dois métodos adotados para representação do reforço serão brevemente apresentados. Um desses utiliza-se de elementos de treliça como enrijecedor, enquanto no outro, faz-se o uso de um modelo micromecânico para determinação das propriedades elásticas efetivas do compósito.

2.2.1 Elementos Finitos Unidimensionais

Na Figura 6 apresenta-se um elemento finito de treliça com dois nós, o qual representa os reforços inseridos no domínio. Para o caso de problemas planos, tomando-se que cada nó possui dois graus de liberdade, e o vetor de deslocamentos, \mathbf{D}^e , para um elemento unidimensional, e , é definido na Eq. (2.29). D_{IJ}^e é a componente de deslocamento no nó I e na direção J . Note que para o caso tridimensional, é necessário apenas adicionar as componentes referentes as coordenadas z . As forças no elemento \mathbf{F}^e serão tratadas mais a frente. O vetor unitário, direção local x é representado por i'

$$\mathbf{D}^e = [D_{1X}^e \quad D_{1Y}^e \quad D_{2X}^e \quad D_{2Y}^e]^T \quad (2.29)$$

O elemento finito de treliça permite apenas deformação por alongamento, na direção de seu próprio eixo. Assim, sua matriz de rigidez local e o vetor de forças internas são montados considerando apenas as componentes de deslocamentos nodais na direção do eixo x (coordenada local), como mostrado na Fig. 6. Dessa forma, o vetor de deslocamentos, em coordenadas locais, apresentado na Eq. (2.30), pode ser obtido pela Eq. (2.34).

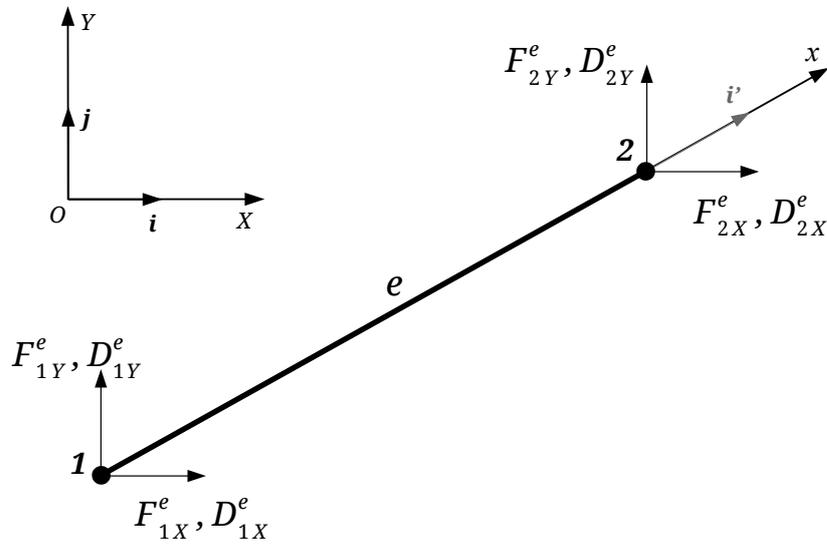
$$\mathbf{d}_x^e = [d_{1x}^e \quad d_{2x}^e]^T \quad (2.30)$$

$$\mathbf{d}_x^e = \mathbf{T}^e \mathbf{D}^e \quad (2.31)$$

A matriz de transformação é definida a seguir. $L^e = \|\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_2^e\|$ é o comprimento do elemento, e os termos x_{ji} são a diferença entre as coordenadas, ou seja, $x_{ji} = x_j - x_i$.

$$\mathbf{T}^e = \frac{1}{L^e} \begin{bmatrix} x_{21}^e & y_{21}^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{21}^e & -y_{21}^e \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Figura 6 – Elemento de treliça bidimensional no sistema de coordenadas locais e globais.



Fonte: elaborada pelo autor.

O vetor de deslocamentos no elemento é apresentado na Eq.(2.33), onde as funções de forma N^e são definidas na Eq. (2.34).

$$u_x^e = \mathbf{N}^e \mathbf{d}_x^e \quad (2.33)$$

$$\mathbf{N}^e = [N_1^e \quad N_2^e] = \frac{1}{L^e} [x_2^e - x \quad x - x_1^e] \quad (2.34)$$

Além disso, as deformações na direção da barra são dadas pela Eq. (2.35), em que a matriz \mathbf{B}^e , que relaciona deformação e deslocamentos, é mostrada na Eq. (2.36).

$$\varepsilon_x^e = \mathbf{B}^e \mathbf{d}_x^e \quad (2.35)$$

$$\mathbf{B}^e = \left[\frac{\partial N_1^e}{\partial x} \quad \frac{\partial N_2^e}{\partial x} \right] = \frac{1}{L^e} [-1 \quad 1] \quad (2.36)$$

2.2.1.1 Determinação do Vetor de Forças Nodais de um Elemento de Treliça

Nesta seção, será determinado, para um elemento de treliça, o vetor de forças nodais, tanto em coordenadas locais, como em coordenadas globais. Esta é a penúltima etapa antes da obtenção da matriz de rigidez do reforço, \mathbf{K}_r^e .

A partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), o trabalho provocado pelas deformações internas, de um elemento de treliça pode ser escrito como,

$$\delta W_{int}^e = \int_{\Omega^e} \delta \varepsilon_x^{eT} \sigma_x^e d\Omega^e \quad (2.37)$$

em que $\delta \varepsilon_x^{eT} = \mathbf{B}^e \delta \mathbf{d}_x^e$ é a deformação virtual devido a um campo de deslocamentos virtual arbitrário, e σ_x^e é a componente de tensão normal no respectivo elemento. A partir das coordenadas

locais, e considerando constante a área da seção transversal (A^e), a Eq. (2.37) é reescrita na Eq. (2.38).

$$\delta W_{int}^e = A^e \int_{x_1^e}^{x_2^e} \delta \varepsilon_x^{eT} \sigma_x^e dx^e = A^e L^e \mathbf{B}^{eT} \sigma_x^e \delta \mathbf{d}_x^{eT} \quad (2.38)$$

Da última equação, extrai-se o vetor de forças internas do elemento e , como é escrito na equação seguinte.

$$\mathbf{f}_{int}^e = A^e L^e \mathbf{B}^{eT} \sigma_x^e \quad (2.39)$$

2.2.1.2 Matriz de Rigidez do Elemento de Treliça

A partir do PTV, pode-se escrever a matriz de rigidez local como segue.

$$\mathbf{k}_r^e = \frac{\partial \mathbf{f}_{int}^e}{\partial \mathbf{d}_{x_i}^e} = \frac{\partial \mathbf{f}_{int}^e}{\partial \sigma_x^e} \cdot \frac{\partial \sigma_x^e}{\partial \varepsilon_x^e} \cdot \frac{\partial \varepsilon_x^e}{\partial \mathbf{d}_x^e} \quad (2.40)$$

Sabe-se que termos na multiplicação da Eq. (2.40) são definidos como:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{int}^e}{\partial \sigma_x^e} = A^e L^e \mathbf{B}^{eT} \quad (2.41a)$$

$$\frac{\partial \sigma_x^e}{\partial \varepsilon_x^e} = E^e \quad (2.41b)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_x^e}{\partial \mathbf{d}_x^e} = \mathbf{B}^e \quad (2.41c)$$

Na Eq. (2.41b), E^e é módulo de elasticidade linear do elemento.

Por fim, apresenta-se na Eq. (2.42) a matriz de rigidez em termos de coordenadas globais (\mathbf{K}_r^e) de um elemento de treliça. Mais detalhes sobre a formulação apresentada podem ser verificada em Phillips e Zienkiewicz (1976), Cook et al. (1989), Assan (2003), Soriano (2003), Bitencourt Júnior (2014) e Häussler-Combe (2014).

$$\mathbf{K}_r^e = \mathbf{T}^{eT} \mathbf{k}_r^e \mathbf{T}^e \quad (2.42)$$

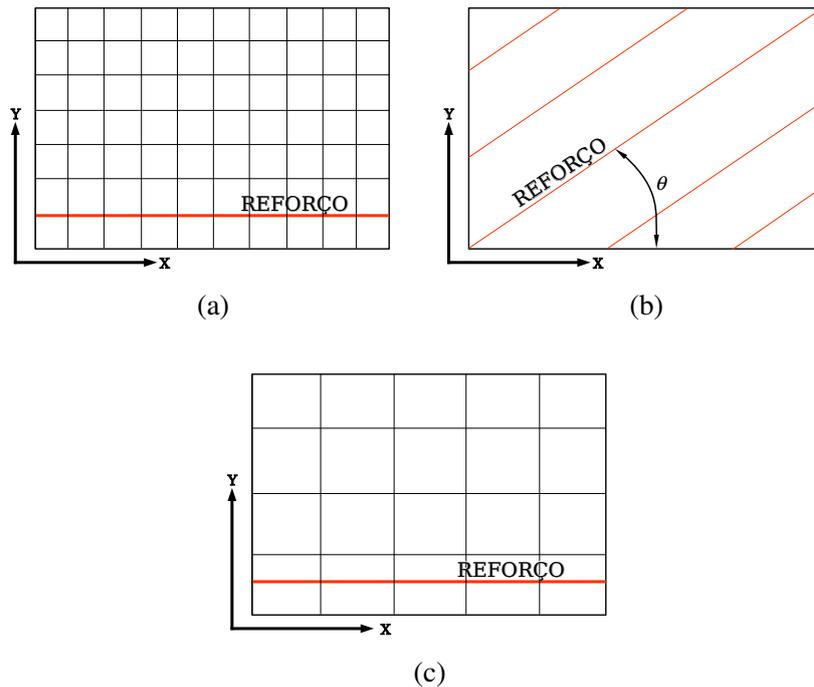
2.2.1.3 Modelos de Representação do Reforço com Barras Unidimensionais

O modelo utilizado neste trabalho é o modelo discreto, descrito por Bitencourt Júnior (2009) como o método cujo as barras de armadura são modeladas como elementos de treliça, individuais, ligados aos nós dos elementos, conforme pode ser visto na Figura 7a. Este modelo é o mais simples de implementar, porém apresenta limitação quanto a sua dependência da malha de elementos finitos. A cada configuração de distribuição de armadura, tem-se a necessidade de adequar a malha conforme a nova configuração.

Existem outros modelos alternativos ao discreto, são os modelos distribuído e o embutido. Segundo Gaitán (2015) o método distribuído, ilustrado na Figura 7b, caracteriza-se por uma taxa de inserção de barras constante e distribuída ao longo do elemento, melhorando o desempenho

na dispersão da armadura para elementos estruturais tipo laje ou outro tipo de estrutura que tenha armadura uniformemente distribuída. Já o modelo embutido ou incorporado, mostrado na Figura 7c, inicialmente formulado por Elwi e Hrudey (1989), e posteriormente desenvolvido por Barzegar e Maddipudi (1994), é caracterizado pela independência da malha, com os elementos de barra inseridos no domínio em qualquer direção, podendo interceptar mais de um elemento.

Figura 7 – Modelos de representação de reforço: Modelo Discreto (a); Modelo Distribuído (b); Modelo Embutido (c).



Fonte: elaborada pelo autor.

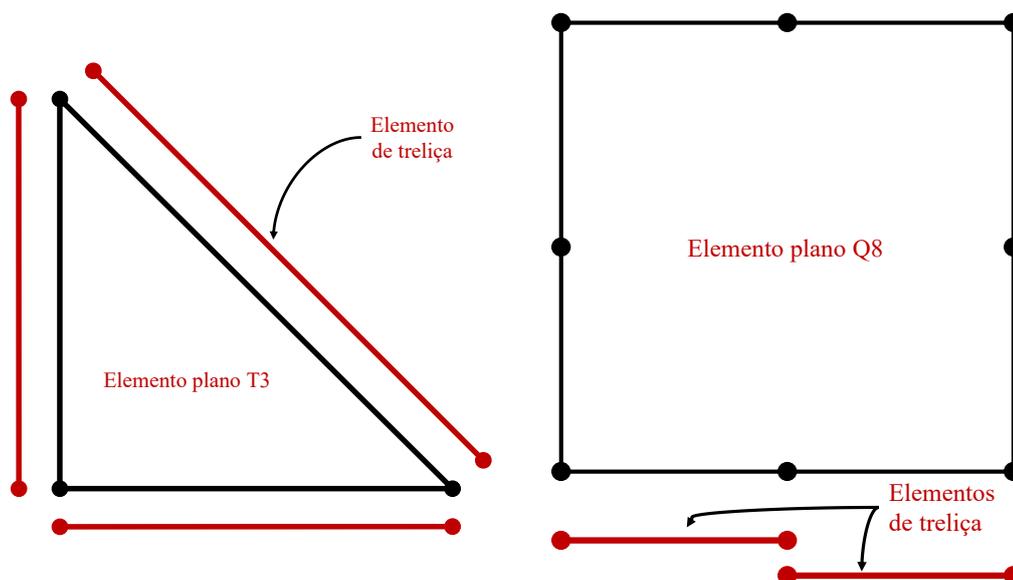
A solução do problema acoplado é obtida adicionando-se as contribuições das matrizes de rigidez e dos vetores de forças nodais internas e externas, advindas dos elementos uni e bidimensionais, considerando-se a correspondência entre os graus de liberdade e a correta incidência cinemática, conforme a Eq. 2.43, em que \mathbf{K} é a matriz de rigidez global. A Figura 8 ilustra o esquema utilizado no presente trabalho para o acoplamento matriz e reforço.

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1..N_e} (\mathbf{K}_m^{e_i} + \mathbf{K}_r^{e_i}) \quad (2.43)$$

A solução em termos de deslocamentos, é realizada assim como comentado para a Eq. 2.28, resolvendo o sistema de equações da Eq. 2.44.

$$\mathbf{K}d = f \quad (2.44)$$

Figura 8 – Esquema de acoplamento de elementos finitos T3 e Q8 e elementos de treliça.



Fonte: elaborada pelo autor.

2.2.2 Exemplo Preliminar

Para ilustrar a utilização de modelos de reforço através de elementos de barras unidimensionais, apresenta-se, nesta seção, um exemplo de chapa tracionada, ilustrado na Fig. 9. Os resultados de deslocamentos do modelo implementado foram comparados com os resultados do software comercial *Abaqus*, por esse ser um programa renomado no mercado e, claro, contemplar os elementos abordados aqui. Nesse exemplo foram usados elementos planos Q8 e de treliça.

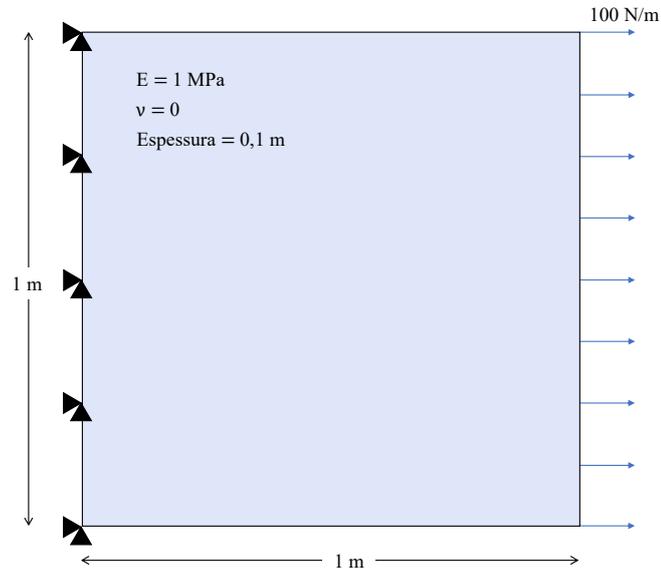
A Figura 10 mostra as configurações de reforço utilizadas no presente exemplo. Todas as barras utilizadas possuem módulo de elasticidade $E_s = 200 \text{ GPa}$ e diâmetro da seção transversal $\phi = 16 \text{ mm}$. Na primeira (Reforço 1) situação tem-se apenas uma barra. Na segunda adicionam-se duas barras (Reforço 2), totalizando três. Por fim, aplica-se o Reforço 3, completando o número total de 5 barras.

Na Figura 11 é apresentada a evolução da rigidez com aplicação progressiva dos reforços, tanto para o ReliaFEM e o *Abaqus*. Observa-se que houve uma redução de 36,24% no deslocamento máximo, na face direita, da configuração sem reforço em relação a situação com cinco barras. Com isso, pôde-se validar a presente implementação, uma vez que os resultados entre este e o *Abaqus* são iguais.

2.2.3 Domínio Reforçado com Abordagem Micromecânica

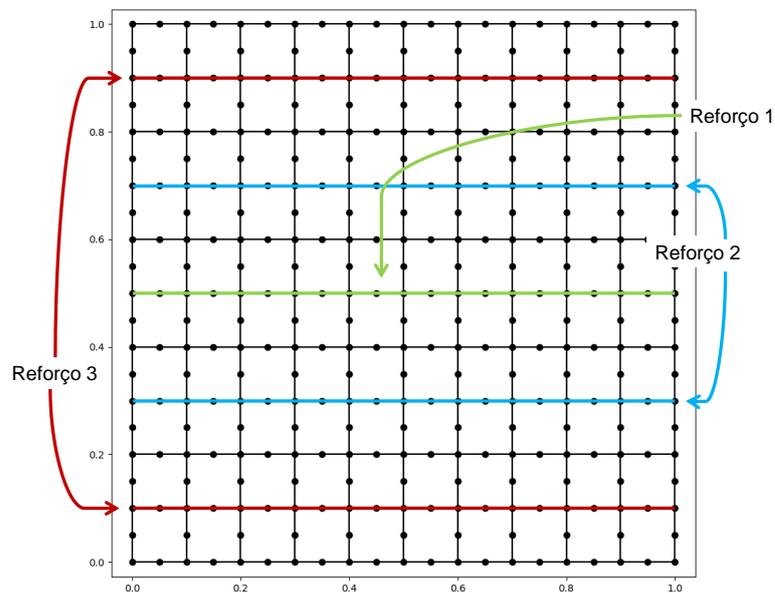
A modelagem de material compósito reforçado com fibra curta para determinação das propriedades homogeneizadas elásticas ou inelásticas é tradicionalmente realizada com base em descrição micromecânica ou através de estudos computacionais de Elemento de Volume

Figura 9 – Ilustração do exemplo preliminar: chapa tracionada.



Fonte: elaborado pelo Autor.

Figura 10 – Malha utilizada e reforços aplicados na chapa.

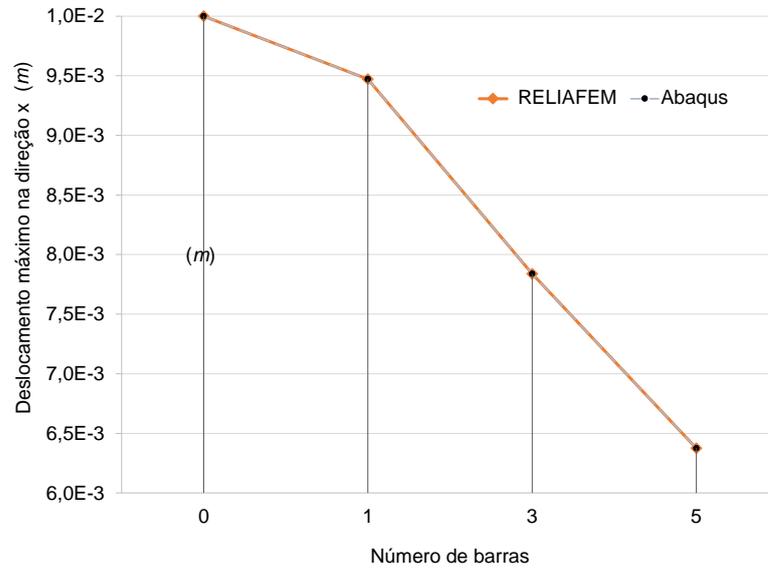


Fonte: elaborado pelo Autor.

Representativo (EVR). O EVR é o volume ou parte da estrutura capaz de representar de forma suficientemente precisa o comportamento global do material, possuindo todas as informações para a descrição geométrica e mecânica do meio heterogêneo (DUTRA et al., 2010).

As abordagens em micromecânica são geralmente baseadas na solução de inclusões elipsoidais de Eshelby (ESHELBY, 1957) embebidas em uma matriz, em conjunto com o esquema de homogeneização Mori-Tanaka (MORI; TANAKA, 1973), como apresentado por Mura

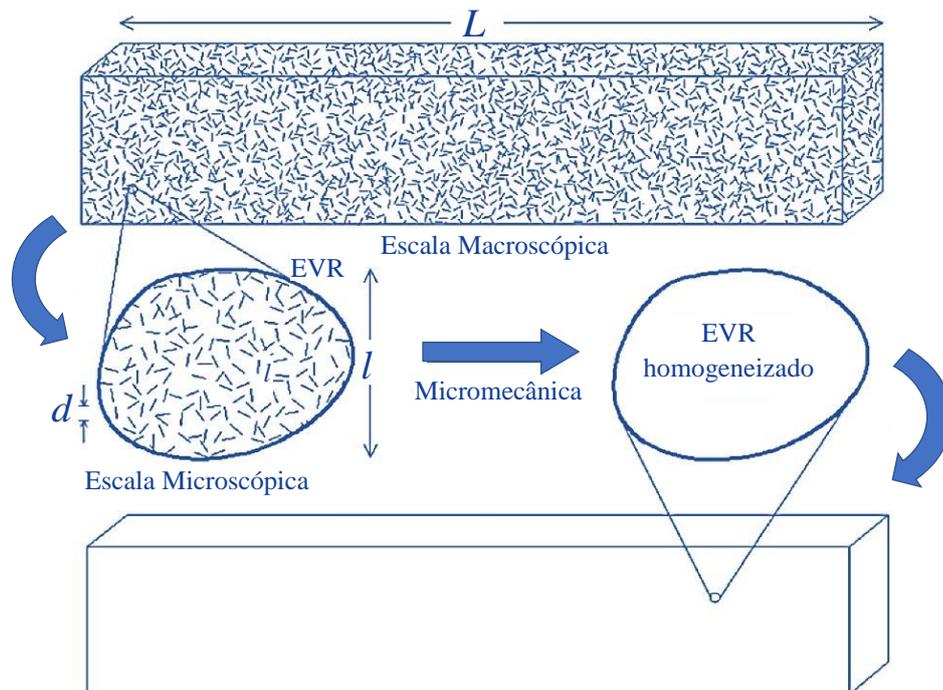
Figura 11 – Comparação dos resultados de deslocamentos máximos.



Fonte: elaborado pelo Autor.

(2013). A Fig. 12 ilustra o processo de homogeneização, que visa a obtenção de propriedades do material, em nível de EVR. Em termos de dimensões tem-se que $d \ll l \ll L$, em que d , l e L são, respectivamente, as dimensões características do reforço, RVE e estrutura analisada.

Figura 12 – Esquema simplificado de homogeneização.

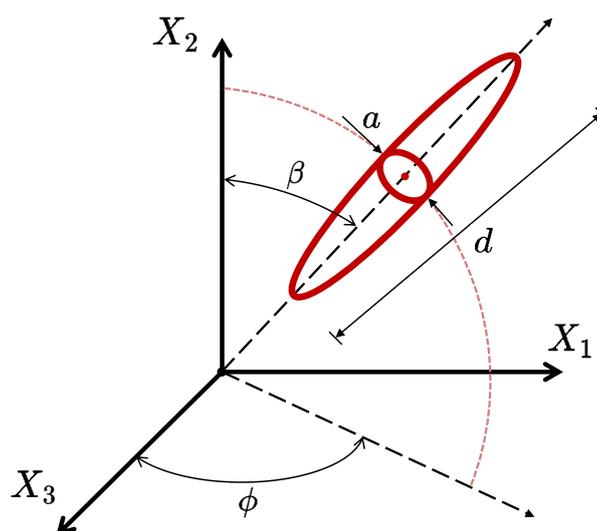


Fonte: Adaptado de Dutra et al. (2010).

Ouaar (2006) apresenta um modelo do comportamento do concreto reforçado com fibras de aço, utilizando uma abordagem micromecânica baseada em métodos de homogeneização. Segundo o autor, os métodos de homogeneização produzem resultados mais próximos aos identificados em escala macroscópica, por considerar informações relativas à microestrutura do material compósito, tais como propriedades geométricas, mecânicas e térmicas de cada constituinte. A aplicação desses métodos não se limitam apenas ao concreto, podendo ser utilizados em materiais cimentícios reforçados genéricos. Uma categoria desses modelos é baseada nos resultados de Eshelby, que resolveu o problema de uma inclusão elipsoidal perfeitamente embutida em uma matriz infinita. Para citar apenas alguns, modelo diluído de inclusão, modelo Mori-Tanaka, modelo auto-consistente, entre outros, foram formulados para prever a resposta de várias classes de materiais compósitos.

Segundo Pike e Oskay (2016), a análise numérica via MEF de um EVR baseada na discretização direta da microestrutura é útil para a análise de materiais com concentrações diluídas de inclusões, mas computacionalmente inviável na presença de fração de fibras elevada, principalmente se apresentarem alto valor de razão de aspecto (α). A razão de aspecto de uma inclusão elipsoidal é dada por $\alpha = d/a$, em que a e d são, respectivamente, seu diâmetro e o comprimento, como ilustrado na Fig. (13). Isso é um dos fatores da necessidade de investir em modelos de micromecânica. Nesta Dissertação, aplica-se o modelo de Mori-Tanaka, o qual é apresentado na seção seguinte.

Figura 13 – Descrição geométrica da fibra em coordenadas esféricas locais.



Fonte: elaborada pelo autor.

A orientação dos reforços é uma importante característica nos compósitos. Estes têm, geralmente, suas propriedades melhoradas na direção preferencial das inclusões, por exemplo,

compósitos reforçados por fibras longas unidirecionais. Mas, no caso de materiais de matriz cimentícia, reforçados com fibras curtas, é comum adotar a orientação e a posição aleatórias na matriz (OUAAR, 2006).

2.2.3.1 Esquema de Homogeneização de Mori-Tanaka

Nessa seção será apresentado, sucintamente, o modelo de homogeneização utilizado. Para esse modelo considera-se que a matriz e o reforço são constituídos por material elástico linear.

Mori e Tanaka (1973) desenvolveram um lema que mostra que a deformação média numa matriz elipsoidal circunscrita a uma inclusão também elipsoidal é nula desde que seja imposto um campo de deformação uniforme ε^* na inclusão. A partir desse lema, os autores propuseram um modelo em que a inclusão é submetida a um campo de deformação homogêneo ε^* e o material heterogêneo a uma perturbação $\bar{\varepsilon}$ não uniforme devido às interações entre as inclusões.

Costa (2017) descreve dois passos essenciais na metodologia de homogeneização correspondente a este método:

- a) O material compósito é substituído por outro contendo uma única inclusão, com a mesma fração volumétrica e condições de contorno;
- b) Aplica-se o método da inclusão equivalente para homogeneização do compósito.

A Figura 14 apresenta um esquema ilustrativo desses passos. V_i e V_m correspondem aos volumes de fibras e de matriz, respectivamente. C_i e C_m representam os tensores de rigidez da fibra e da matriz, respectivamente.

Os tensores de concentração de deformação da inclusão e da matriz do modelo de Mori-Tanaka são expressos, respectivamente, pelas Eq. (2.45) e Eq. (2.46).

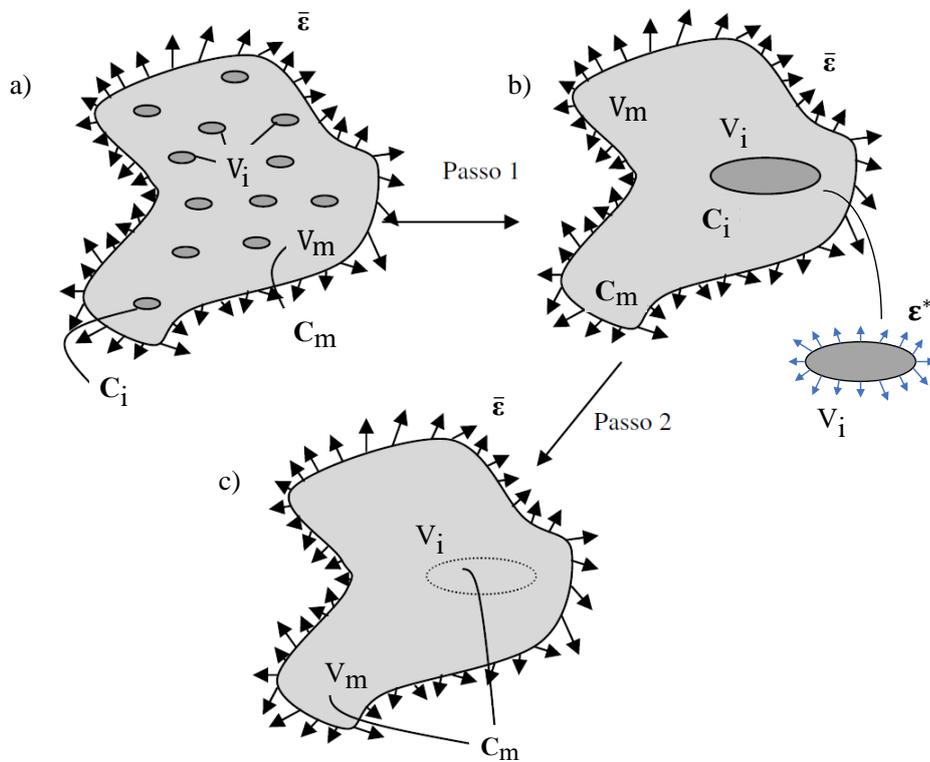
$$\mathbf{A}_i = [\mathbf{I} - \mathbf{S} : \mathbf{C}_m^{-1} : (\mathbf{C}_m - \mathbf{C}_i)]^{-1} \quad (2.45)$$

$$\mathbf{A}_m = [f_i \mathbf{A}_i + (1 - f_i) \mathbf{I}]^{-1} \quad (2.46)$$

em que C_m e C_i são, respectivamente, os tensores de rigidez da matriz e da inclusão, \mathbf{I} é o tensor identidade, \mathbf{S} é o tensor de Eshelby e f_i é fração volumétrica de inclusões.

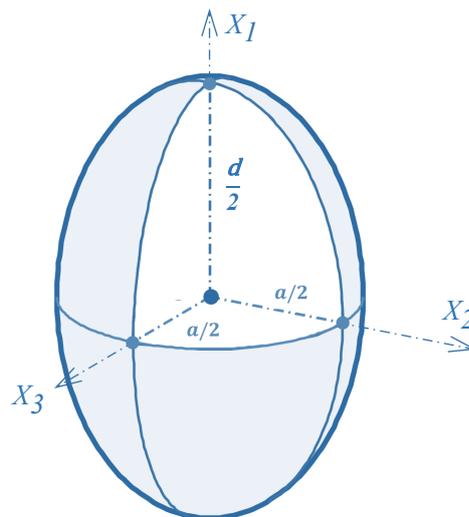
O tensor de Eshelby depende da geometria da inclusão e do material da matriz, e para inclusões do tipo esferoide prolato (Fig. 15) considerando material isotrópico e elástico linear, o tensor de quarta ordem \mathbf{S} é reduzido ao tensor de segunda ordem mostrado na Eq. (2.47).

Figura 14 – Representação do modelo de Mori-Tanaka: a) EVR; b) Aplicação do método da inclusão equivalente; c) Material homogeneizado.



Fonte: Adaptado de Costa (2017).

Figura 15 – Inclusão do tipo esferoide prolato.



Fonte: elaborado pelo autor.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{1212} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Nesse caso, inclusão do tipo esferoide prolato (Fig. 15), tem-se as seguintes relações:

$$S_{2222} = S_{3333} \quad (2.48a)$$

$$S_{1122} = S_{1133} \quad (2.48b)$$

$$S_{2211} = S_{3311} \quad (2.48c)$$

$$S_{2233} = S_{3322} \quad (2.48d)$$

$$S_{3131} = S_{1212} \quad (2.48e)$$

A partir das equações (2.45), (2.46), (2.47) e (2.48), pode-se escrever a expressão, utilizada nesta Dissertação, para o tensor de rigidez do material efetivo (\mathbf{C}^{hom}) como na Eq. (2.49). Nesse caso, considera-se que uma inclusão possui a mesma probabilidade de apresentar qualquer orientação, indicando que não há nenhuma situação mais provável em relação às outras (COSTA, 2017). Isso implica no condicionamento da isotropia do compósito.

$$\mathbf{C}^{hom} = [f_i \mathbf{C}_i : \mathbf{A}_i + (1 - f_i) \mathbf{C}_m] : \mathbf{A}_m \quad (2.49)$$

2.2.3.2 Estimativas de propriedades elásticas efetivas de concreto reforçado com fibras

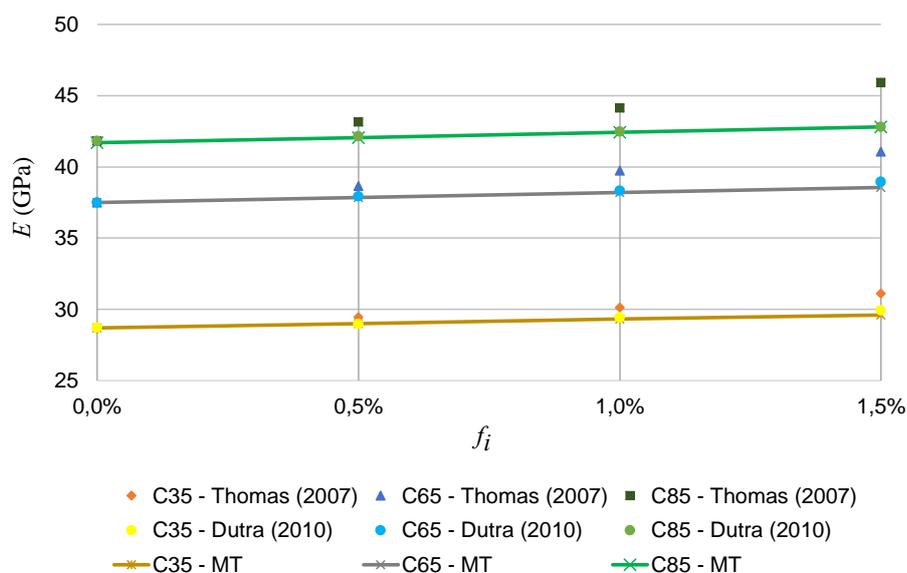
Para efeito de verificação, faz-se as estimativas micromecânicas das propriedades elásticas utilizando o modelo de Mori-Tanaka apresentado. São comparados os resultados experimentais disponíveis em concreto reforçado com fibras de aço além de comparar com modelo numérico de Dutra et al. (2010), baseado também no modelo de Mori-Tanaka. Os valores do módulo de elasticidade linear (E) e da coeficiente de *Poisson* dos componentes compostos fornecidos nos estudos experimentais estão listados na Tabela 2.

Nos experimentos de Thomas e Ramaswamy (2007), a razão de aspecto das fibras de aço utilizadas foi $\alpha = 55$ e várias frações volumétricas f_i foram testadas 0,5%, 1% e 1,5%. As Figuras 16 e 17 mostram as estimativas de Mori-Tanaka do módulo de elasticidade e coeficiente de *Poisson* homogeneizados, E^{hom} e ν^{hom} , respectivamente, juntamente com os resultados experimentais de Thomas e Ramaswamy (2007) e numéricos de Dutra et al. (2010).

Tabela 2 – Propriedades dos concretos e fibras de aço.

Referências	Módulo de Elasticidade (GPa)	Poisson
Thomas e Ramaswamy (2007)		
Fibra de Aço	210,0	0,3
Concreto C35	28,7	0,182
Concreto C65	37,5	0,201
Concreto C85	41,7	0,21
Williamson (1974)		
Fibra de Aço	200,0	0,3
Concreto	20,802	0,2081

Figura 16 – Módulo de Elasticidade: comparação com resultados de Thomas e Ramaswamy (2007) e Dutra et al. (2010).

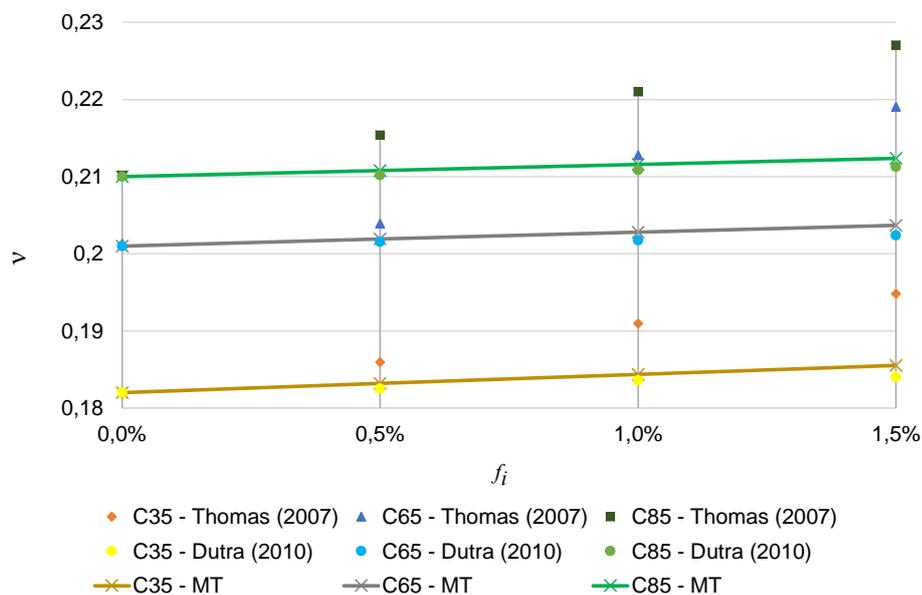


Fonte: elaborado pelo autor.

Na segunda estimativa, são comparados os testes realizados por Williamson (1974), em que $\alpha = 100$ e as frações de fibras utilizadas foram 1%, 1,5% e 2,5%. A comparação das estimativas micromecânicas do módulo de elasticidade homogeneizado (E^{hom}) com os resultados experimentais e numéricos é mostrada na Fig. 18.

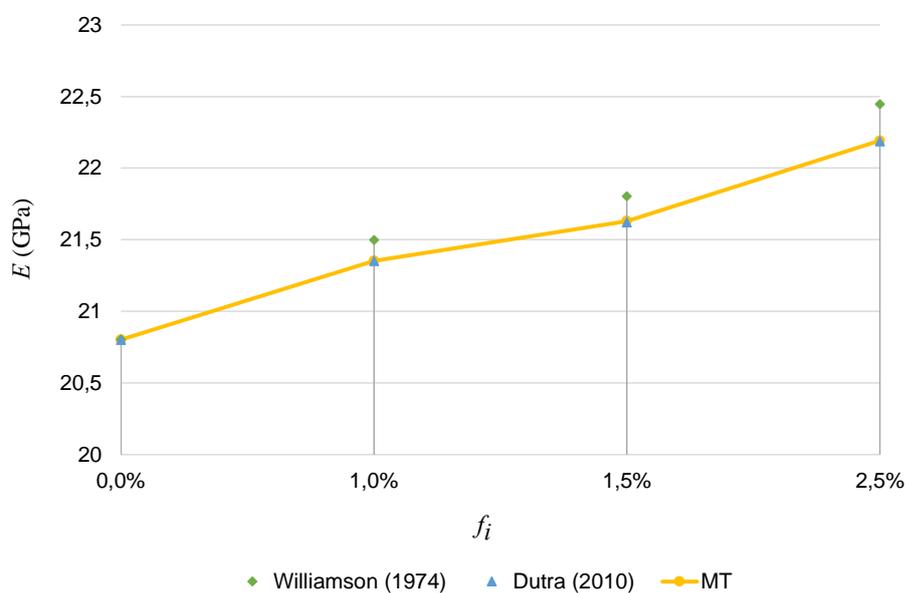
Ahmad e Lagoudas (1991) afirmou que as estimativas de Mori-Tanaka são mais eficientes para frações de fibras inferiores a 10%, apresentando melhores resultados para $f_i \leq 1,0\%$. Isso pode ser observado nos exemplos apresentados.

Figura 17 – Coef. de Poisson: comparação com resultados de Thomas e Ramaswamy (2007) e Dutra et al. (2010).



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 18 – Módulo de Elasticidade: comparação com resultados de Williamson (1974) e Dutra et al. (2010).



Fonte: elaborado pelo autor.

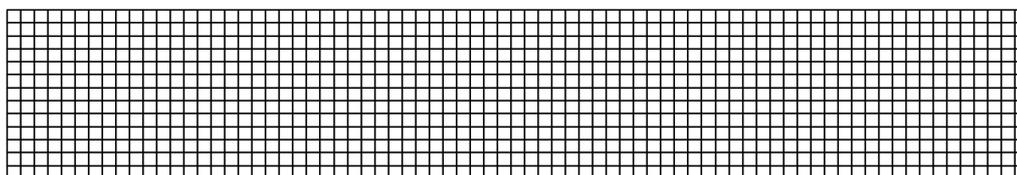
2.3 ESPÉCIME DE RESINA EPÓXI REFORÇADO COM FIBRAS DE VIDRO

Agora, serão comparados os resultados de Vieira, Vieira e Carvalho (2016), em que os autores apresentam um metodologia experimental para análise das propriedades físicas e mecânicas de dois tipos de materiais compósitos, o primeiro reforçado com fibras de vidro

particuladas e um segundo com manta de fibras de vidro. Em ambos compósitos a matriz é constituída de resina epóxi. Os espécimes testados apresentaram resposta tensão-deformação predominantemente linear, sendo analisado aqui um espécime reforçado com fibras curtas de vidro.

A resina epóxi utilizada possui módulo de elasticidade $E_m = 1,92 \text{ GPa}$, enquanto as fibras de vidro apresentam $E_i = 80 \text{ GPa}$. Para o ensaio, a fração de fibras foi de 15%. As dimensões dessas inclusões foram $10\mu\text{m}$ e um comprimento de, aproximadamente, $1,5 \text{ cm}$. As dimensões do corpo de prova eram de $300 \times 25 \times 10 \text{ mm}$. Aproveitando-se da simetria do problema, modelou-se, metade do comprimento do espécime (150 mm). A malha utilizada é apresentada na Figura 19, com 975 elementos Q8.

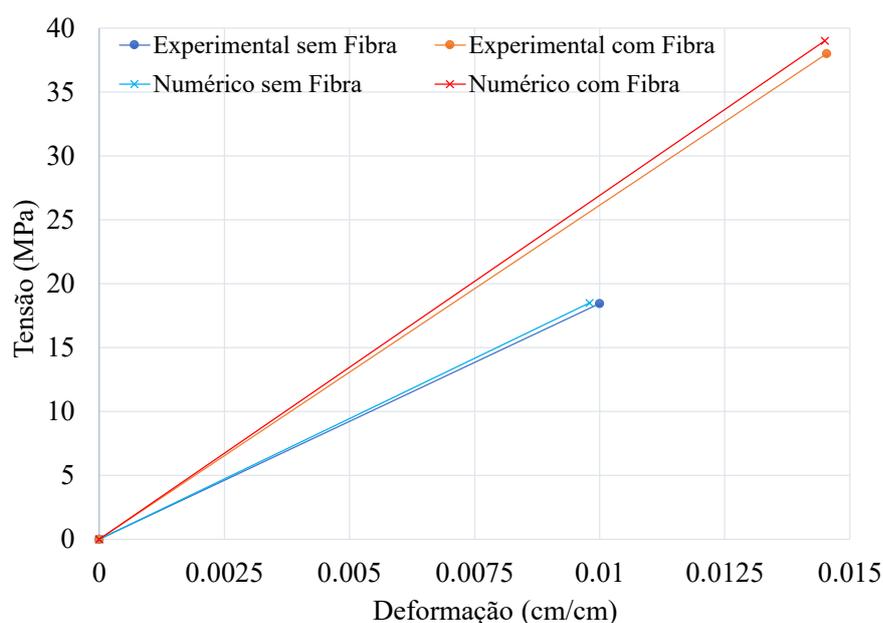
Figura 19 – Malha estruturada utilizada com elementos Q8.



Fonte: elaborado pelo autor.

Na Figura 20 é apresentado o gráfico comparativo entre os resultados numéricos e experimentais, para os casos sem e com reforço. A resposta numérica se mostra ligeiramente mais rígida, sem comprometer a congruência dos resultados. O erro relativo máximo observado é de 2,6%, para o valor máximo de tensão no espécime reforçado.

Figura 20 – Comparação de resultados experimentais e numéricos.



Fonte: elaborado pelo autor.

3 FUNDAMENTOS DA CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

Teorias baseadas em análises probabilísticas, como a confiabilidade estrutural, propõem aumentar a qualidade dos projetos estruturais e análise, com base na avaliação das incertezas inerentes ao problema em estudo. Como produto desse tipo de análise, uma estimativa da probabilidade de falha da estrutura pode ser obtida. Vale ressaltar que o conceito de probabilidade de falha está relacionado não somente à ocorrência de eventos extremos como colapso estrutural, mas também à violação de qualquer exigência que a estrutura deva satisfazer, geralmente definida pelos Estados Limite de Serviço (ELS) da estrutura. Valores limites de deslocamentos, tensões ou aberturas de fissuras são exemplos de ELS geralmente verificados.

Segundo Sagrilo (2003), a confiabilidade estrutural tem como principal objetivo avaliar a segurança de uma estrutura, a partir do cálculo da probabilidade de que um estado limite desta estrutura seja violado. Assim, é possível quantificar a probabilidade de que uma estrutura não suporte as solicitações especificadas durante o projeto. Para quantificar os modos de falha de uma estrutura, utilizam-se as chamadas equações de estado limite (funções de falha), que são deduzidas a partir dos aspectos físicos do problema em análise. Nesta seção serão tratados dos aspectos necessários para aplicação da confiabilidade no presente trabalho.

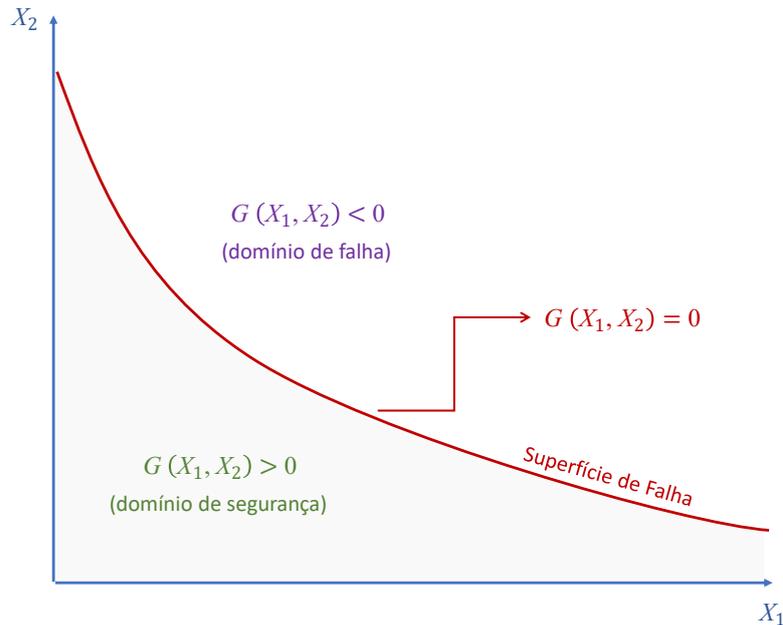
3.1 DEFINIÇÃO DA PROBABILIDADE DE FALHA

Seja uma função de falha denominada $G(\mathbf{X})$, em que \mathbf{X} é um vetor de variáveis aleatórias (v.a.) consideradas na análise. Para cada modo de falha de uma estrutura, a respectiva função estabelece uma fronteira entre as regiões de falha Ω_f e sobrevivência Ω_s da estrutura, onde valores positivos de $G(\mathbf{X})$ representam evento seguro e a condição $G(\mathbf{X}) \leq 0$ indica evento de falha. A Figura 21 apresenta uma função de falha bidimensional G representada pelas variáveis aleatórias X_1 e X_2 . O limite $G(X_1, X_2) = 0$ é entendido como superfície de falha. Em um problema qualquer, a probabilidade de falha é calculada integrando-se a função conjunta de densidade de probabilidade das v.a. do problema sobre o domínio de falha (MELCHERS; BECK, 2018), conforme apresentado a seguir.

$$P_f = \int_{\Omega_f} f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.1)$$

A integral n-dimensional supracitada é de difícil avaliação analítica, considerando-se a complexidade das funções densidade de probabilidade das distribuições estatísticas usuais. Sendo assim, faz-se necessário a utilização de métodos de análise em confiabilidade estrutural para sua resolução. No presente trabalho serão utilizados o Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM) e simulação de Monte Carlo, apresentados.

Figura 21 – Definição da função de falha.



Fonte: elaborado pelo autor.

3.2 PROBLEMA BÁSICO DA CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

Em uma análise de confiabilidade, as funções de falha independentes do tempo e que abordam apenas duas variáveis aleatórias são as mais simples. Em geral, essas funções são formuladas a partir de um problema de capacidade contra demanda, ou resistência (R) contra solicitação (S), e pode ser escrito como segue.

$$G(R, S) = R - S = 0 \quad (3.2)$$

No entanto, em problemas complexos de análise estrutural existem diversas variáveis aleatórias envolvidas. Desta forma, a variável R é tratada como uma função de variáveis aleatórias relacionadas à resistência e a variável S como uma função de variáveis aleatórias relacionadas à solicitação (GOUVEIA, 2014). O conceito de índice de confiabilidade é definido a partir da resolução de um problema básico, como é apresentado a seguir.

Considerando que R e S são variáveis aleatórias normais e independentes, a equação supracitada é classicamente conhecida como problema básico da confiabilidade. O problema pode ser resolvido em termos de uma variável aleatória chamada de margem de segurança (M):

$$M = R - S \quad (3.3)$$

A partir da natureza das v.a. R e S , a distribuição de M também será normal, com média μ_M e desvio padrão σ_M dados por $\mu_M = \mu_R - \mu_S$ e $\sigma_M = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$, respectivamente.

A probabilidade de falha (P_f) neste caso, corresponde a probabilidade de M assumir valores negativos, ou seja, calculando-se a função conjunta de probabilidades em zero ($F_M(0)$), como na Eq. 3.4.

$$P_f = P[M \leq 0] = \int_{-\infty}^0 f_M(m)dm = F_M(0) \quad (3.4)$$

Para que seja possível definir o índice de confiabilidade, a variável M é transformada em uma variável aleatória com distribuição normal padrão (com média nula e desvio padrão unitário), fazendo:

$$Y = \frac{M - \mu_M}{\sigma_M} \quad (3.5)$$

Dessa forma, a probabilidade de falha associada a variável M pode ser calculada utilizando-se a função de distribuição acumulada normal padrão Φ , da seguinte forma:

$$P_f = \Phi\left(\frac{0 - \mu_M}{\sigma_M}\right) = \Phi\left(-\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right) \quad (3.6)$$

Verifica-se que a distância entre o ponto correspondente a $m = 0$ e a origem do sistema de coordenadas é dada pela razão μ_M/σ_M . Esta distância é chamada de índice de confiabilidade, simbolizado na literatura pela letra β (Eq. 3.7).

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (3.7)$$

Assim, a probabilidade de falha pode ser reescrita como:

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (3.8)$$

Vale ressaltar que os problemas de engenharia em geral envolvem várias variáveis aleatórias, com distribuições quaisquer, nem sempre Gaussianas, necessitando de algum tratamento para o cálculo de uma v.a. com distribuição normal padrão e, conseqüentemente, avaliação da P_f .

3.3 MÉTODOS DE ANÁLISE EM CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

A seguir, serão apresentados os métodos de análise, para determinação do índice de confiabilidade, Monte Carlo e FORM. O primeiro servirá para validar os resultados obtidos pelo segundo, algo ainda comum na literatura, visto que a simulação de Monte Carlo tende a ser mais precisa, muito embora, com custo computacional mais elevado, como será discutido mais a frente.

3.3.1 Simulação de Monte Carlo

De acordo com Beck (2014), a simulação de Monte Carlo é basicamente uma simulação que envolve a utilização de números aleatórios. O método tem como objetivo produzir N eventos randômicos para serem avaliados na equação de estado limite $G(\mathbf{X})$. Desta forma, eventos que possuem valores negativos são contabilizados como eventos de falha (N_f). Assim, a probabilidade de falha é estimada pela razão entre o número de eventos de falha e o número total de eventos conforme Eq. (3.9).

$$P_f = \frac{N_f}{N}. \quad (3.9)$$

Os resultados gerados pela simulação de Monte Carlo podem ser bastante precisos, a depender do número de cenários que sejam testados. Contudo, para problemas que possuam probabilidades de falha muito baixas, faz-se necessário a realização de um grande número de simulações para atingir respostas adequadas, implicando em alto custo computacional.

Considerando-se que a probabilidade de falha é, por natureza, uma variável aleatória, além de seu valor médio estimado, pode-se definir seu coeficiente de variação. Desta forma, de posse de uma probabilidade de falha alvo (P_f^{alvo}), é possível estimar o número mínimo de simulações (n_{smin}) para manter o coeficiente de variação (COV) do problema em níveis aceitáveis. Ang e Tang (2007) chega a seguinte fórmula para calcular n_{smin} ,

$$n_{smin} = \frac{1}{COV^2} \cdot \frac{1 - P_f^{alvo}}{P_f^{alvo}} \quad (3.10)$$

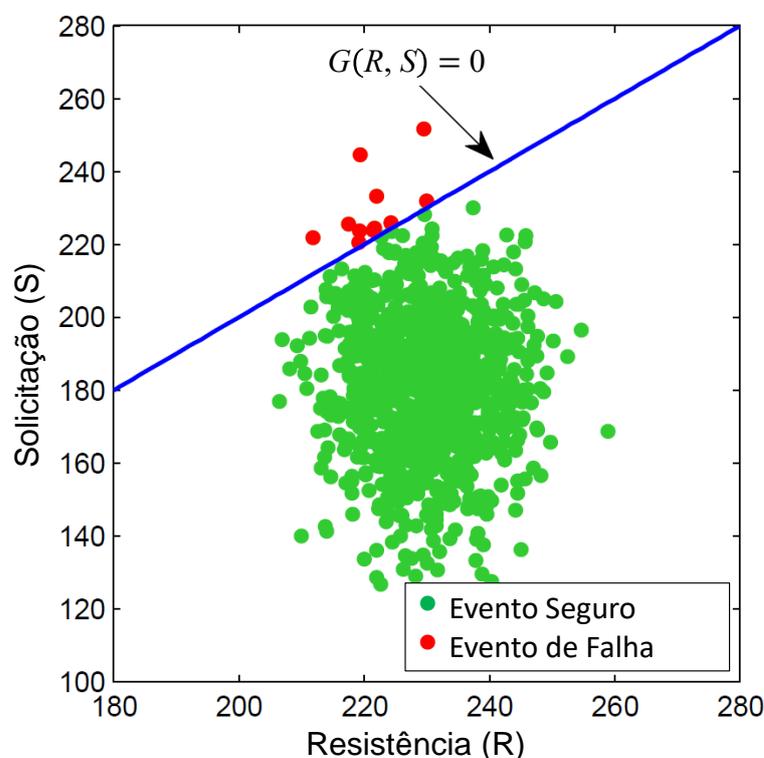
Segundo Melchers e Beck (2018), para aplicações práticas de engenharia, que envolvem variáveis aleatórias associadas à geometria dos elementos estruturais ou propriedades físicas dos materiais, um valor razoável para o COV é 5%. Deve-se destacar que inicialmente a P_f^{alvo} não é conhecida, uma vez que essa corresponde a resposta final obtida via simulação de Monte Carlo. Para isso, podem ser utilizados outros métodos de confiabilidade, como, por exemplo, o método de transformação FORM, que apresenta maior velocidade em sua execução. Outra estratégia é utilizar o próprio Monte Carlo com um número reduzido de simulações para encontrar o COV de uma simulação de Monte Carlo com um número de simulações (n_s) testados. Invertendo a Eq. 3.10 tem-se,

$$COV = \sqrt{\frac{1 - P_f^{alvo}}{n_s \cdot P_f^{alvo}}} \quad (3.11)$$

Um exemplo ilustrativo do funcionamento da simulação de Monte Carlo é apresentado na Figura 22. Neste exemplo, as variáveis aleatórias R e S possuem a mesma unidade e seguem a distribuição gaussiana, em que $R = N(230, 8)$ e $S = N(180, 20)$. Foram gerados mil cenários randômicos e a probabilidade de falha estimada para este exemplo foi de $10^{-1,9586}$ com um $COV = 0,2998$, assinalando que a estimativa pode não ser adequada. Utilizando a Eq. 3.10, estima-se $n_{smin} = 35637$ para o $COV = 5\%$ e P_f igual ao valor encontrado na primeira

simulação. Na segunda simulação chegou-se a uma $P_f = 10^{-1,9706}$. Sabe-se que quanto maior for o número de cenários, a P_f estimada tenderá ao valor exato.

Figura 22 – Exemplo ilustrativo da simulação de Monte Carlo.



Fonte: elaborado pelo autor.

3.3.2 Método de Confiabilidade de Primeira Ordem - FORM

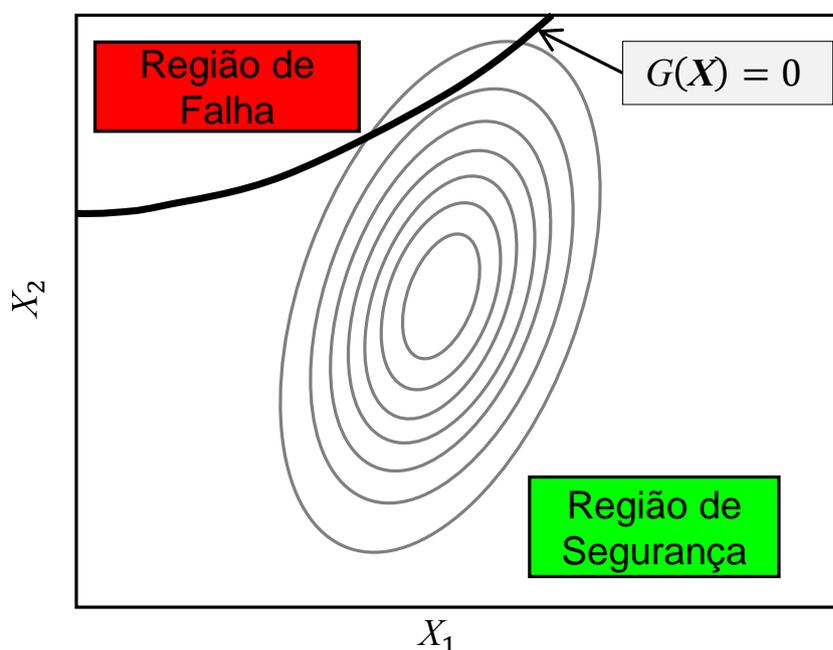
O FORM (*First Order Reliability Method*) é um método analítico de confiabilidade baseado na transformação das variáveis aleatórias originais em variáveis aleatórias normais equivalentes, e na linearização da função de falha do problema. O grande diferencial desse método consiste em sua capacidade de utilizar toda a informação estatística das variáveis aleatórias do problema, podendo-se lidar com distribuições estatísticas quaisquer, inclusive considerando correlação entre variáveis.

Além da transformação das variáveis aleatórias em normais reduzidas, existe a necessidade de descorrelacioná-las. A metodologia de solução de problemas de confiabilidade via FORM envolve as seguintes etapas:

- transformação de distribuições originais em normais equivalentes reduzidas;
- determinação de coeficientes de correlação equivalentes para distribuições marginais normais;
- eliminação da correlação através de alguma estratégia de decomposição.

A primeira transformação está fundamentada no modelo de Hasofer-Lind, que consiste na redução das variáveis aleatórias originais dependentes \mathbf{X} (Fig. 23) em variáveis aleatórias reduzidas dependentes \mathbf{Z} (BECK, 2014). Na segunda etapa da estratégia de solução, usualmente utiliza-se a transformação de Nataf (1962) para determinar os coeficientes de correlação equivalentes para distribuições marginais normais. Em seguida, elimina-se a correlação entre as variáveis, transformando as variáveis aleatórias reduzidas dependentes \mathbf{Z} em variáveis aleatórias reduzidas independentes \mathbf{Y} . Comumente, em problemas de confiabilidade estrutural, utiliza-se a decomposição de Cholesky para fatorar a matriz de correlação, obtendo-se uma matriz triangular inferior associada. Maiores detalhes acerca da formulação do método podem ser verificados em Melchers e Beck (2018).

Figura 23 – Representação da superfície de falha para v.a. originais dependentes X_1 e X_2 quaisquer.



Fonte: elaborado pelo autor.

De forma a ilustrar o uso do método, este é aplicado ao problema básico da confiabilidade estrutural. Nesse, não existe a necessidade de eliminar a correlação entre as variáveis, já que as mesmas são independentes. Assim, a transformação é realizada diretamente de \mathbf{X} para \mathbf{Y} , por meio da chamada transformação de Hasofer-Lind:

$$Y_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \quad (3.12)$$

A partir do espaço transformado, utilizando a Eq. 3.12, obtém-se as variáveis Y_1 e Y_2 , reescrevendo, dessa forma a função margem, como segue.

$$M(Y_1, Y_2) = R - S = Y_1\sigma_R + \mu_R - (Y_2\sigma_S + \mu_S) \quad (3.13)$$

Fazendo $M(Y_1, Y_2) = 0$ (superfície de falha), a Eq. 3.14 exprime Y_2 em função de Y_1 , das médias e desvios-padrão de R e S .

$$Y_2 = \frac{Y_1 \sigma_R + \mu_R - \mu_S}{\sigma_S} \quad (3.14)$$

O quadrado da distância entre um ponto qualquer (Y_1, Y_2) e a origem é dado por $d^2 = Y_1^2 + Y_2^2$. Uma condição de mínimo é derivando essa expressão em relação a Y_1 e igualando-a a zero. Dessa forma, obtém-se a coordenada Y_1^* do ponto sobre $M(Y_1, Y_2) = 0$ mais próximo da origem (Eq. 3.15).

$$Y_1^* = -\frac{\sigma_R(\mu_R - \mu_S)}{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (3.15)$$

Analogamente para Y_2^* , tem-se:

$$Y_2^* = -\frac{\sigma_S(\mu_R - \mu_S)}{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (3.16)$$

A expressão para a mínima distância (Eq. 3.17) considerando a superfície de falha e a origem é obtida substituindo-se o ponto de projeto na expressão $d^2 = Y_1^2 + Y_2^2$.

$$d_{min} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (3.17)$$

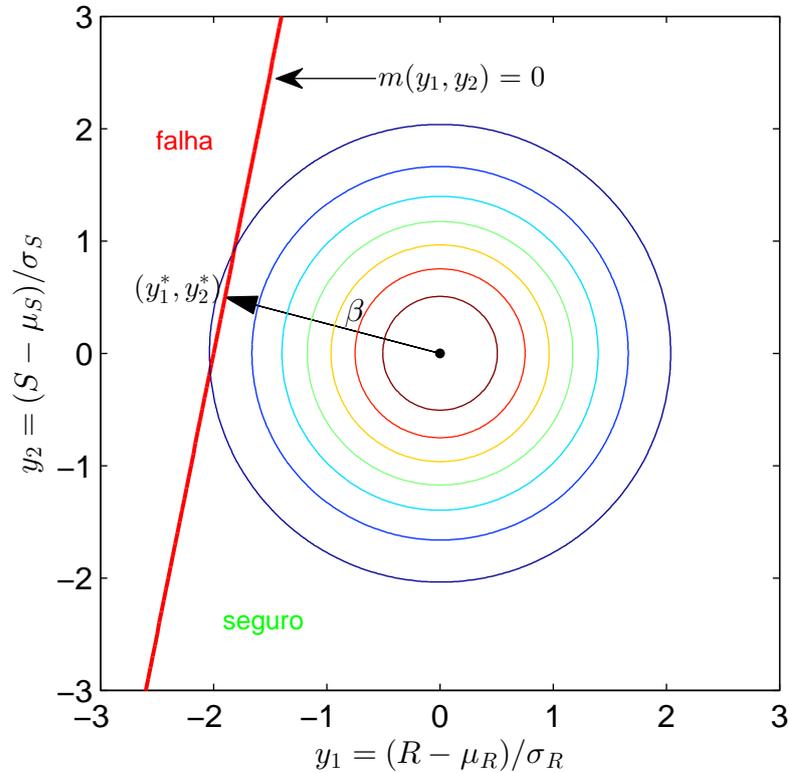
A partir desse resultado, percebe-se sua correspondência com o índice de confiabilidade β obtido na Eq. 3.7, ou seja, tem-se β como a menor distância entre a função de falha e a origem do espaço normal padrão.

Considerando o que foi descrito anteriormente, o problema de confiabilidade pode ser formulado como um problema de otimização não linear com restrição, no qual busca-se o chamado ponto de projeto, definido no espaço transformado das variáveis normais equivalentes (Figura 24). Este ponto contém os valores das variáveis aleatórias que mais provavelmente levem à falha da estrutura. Dessa definição decorre o conceito de índice de confiabilidade (β), como apresentado anteriormente. A busca pela solução do problema de otimização posto é feita de forma iterativa, com base no método HLRF (HASOFER; LIND, 1974; RACKWITZ; FLESSLER, 1978). Maiores detalhes acerca do método são apresentados em Melchers e Beck (2018).

Agora, tomando a situação inicial apresentado na Eq. 3.2, os termos da função de falha $G(\mathbf{X})$, podem conter expressões de modelos mecânicos e modelos de carregamento, sendo implicitamente definidos por um modelo numérico qualquer. No acoplamento para uma rotina confiabilística do tipo FORM, há a necessidade de se calcular o valor da função de falha e seus gradientes, os quais são utilizados na estimativa da probabilidade de falha do problema.

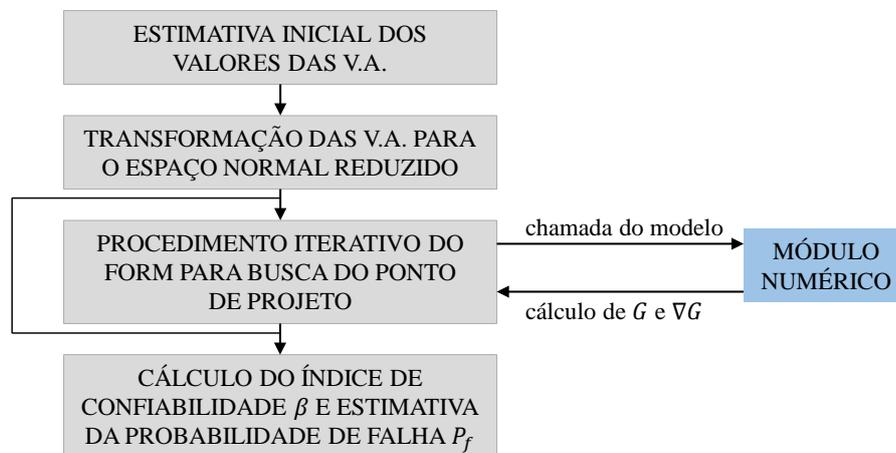
Considerando-se a natureza implícita de $G(\mathbf{X})$, suas derivadas são calculadas numericamente por diferenças finitas, para cada chamada do modelo mecânico de elementos finitos, conforme a Figura (25).

Figura 24 – Representação da superfície de falha no espaço reduzido, para duas variáveis aleatórias.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 25 – Esquema ilustrativo da estratégia de acoplamento direto via FORM.



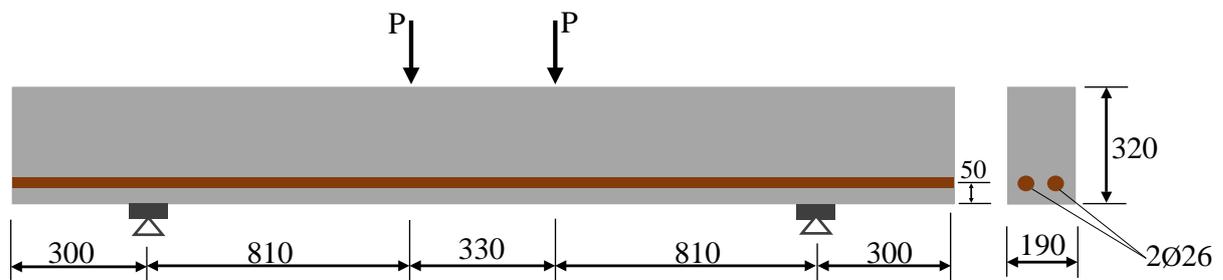
Fonte: elaborado pelo autor.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 VIGA EM CONCRETO ARMADO

Esta seção apresenta um exemplo de viga de concreto armado, submetida a um ensaio de flexão em 4 pontos, adaptado de Leonhardt e Walther (1962) *apud* Bitencourt Júnior (2009), cujas características geométricas são ilustradas na Fig. (26). O objetivo desse exemplo é apresentar uma aplicação simples, utilizando as rotinas de MEF e Confiabilidade. O módulo de elasticidade do concreto é de 28 GPa, associado a uma resistência à flexão de 25 MPa, e coeficiente de Poisson igual a 0,2. O exemplo é adaptado, adotando-se uma carga $P = 155$ kN, em substituição ao valor original, de 72,25 kN. Além disso, o aço da armadura adotado, possui módulo de elasticidade de 200 GPa e tensão de escoamento igual a 500 MPa.

Figura 26 – Propriedades geométricas (valores em mm) e esquema de ensaio em quatro pontos.



Fonte: elaborado pelo autor.

Considerando-se a modelagem fisicamente linear deste trabalho, propõe-se uma simulação simplificada do comportamento da viga, não contemplando toda a resposta experimental apresentada pelos autores, a qual apresenta um trecho não linear de maior ductilidade. Inicialmente, o problema é modelado no programa *Abaqus*, sem armadura, de forma a validar os elementos finitos T3 e Q8 implementados, considerando a simetria do problema. O valor do deslocamento vertical máximo, no meio do vão, é usado como referência. Os resultados do estudo de convergência são apresentados na Tabela 3 e na Fig. (27), notando-se a performance superior do elemento Q8 em relação ao T3.

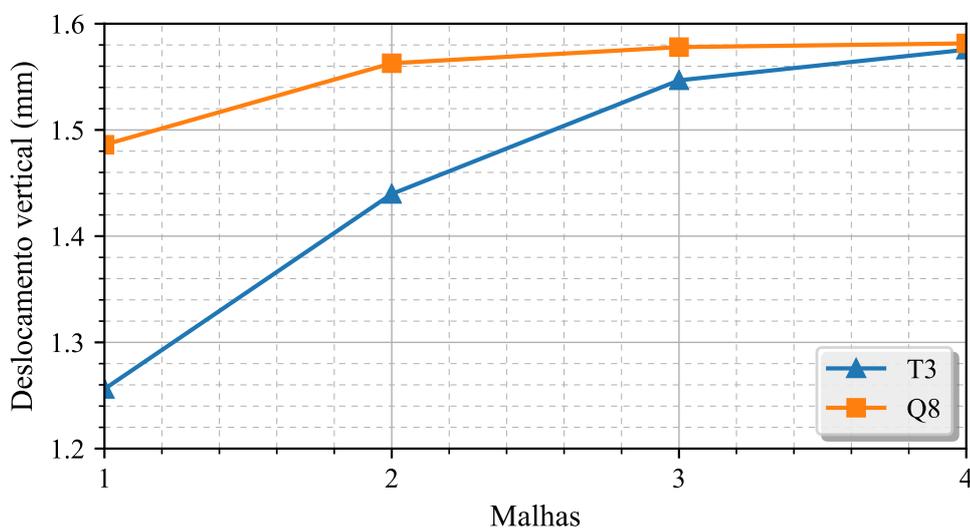
A malha 4 para elementos Q8, representada na Fig. (28), é adotada para a modelagem do problema com reforço. São 6 elementos na direção vertical por 25 elementos na direção horizontal. Os elementos T3 serão utilizados no exemplo apresentado mais adiante, para considerar a aplicação das fibras em orientações diferentes.

Partindo para análise com reforço, incorporando diretamente os elementos de treliça na malha escolhida, o valor da flecha máxima é reduzido a 1,37 mm, com ganho de rigidez igual a 13%. A resposta do modelo reforçado também é validada com o *Abaqus*, obtendo-se um nível de precisão como o apresentado na Tabela 3. A Figura 29 apresentada as condições indeformada e

Tabela 3 – Estudo de convergência de malha, com elementos T3 e Q8

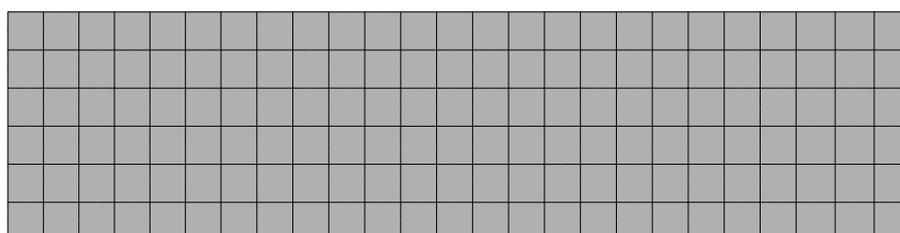
Malhas	Elemento T3			Elemento Q8		
	Nº de elementos	Deslocamento (mm)		Nº de elementos	Deslocamento (mm)	
		<i>Abaqus</i>	<i>ReliaFEM</i>		<i>Abaqus</i>	<i>ReliaFEM</i>
1	104	-1,25609	-1,25609	6	-1,48607	-1,48607
2	300	-1,43970	-1,43970	16	-1,56277	-1,56277
3	1326	-1,54660	-1,54660	52	-1,57797	-1,57797
4	5304	-1,57554	-1,57554	150	-1,58146	-1,58146

Figura 27 – Deslocamentos verticais no meio do vão para as malhas analisadas.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 28 – Malha adotada no exemplo com reforço.

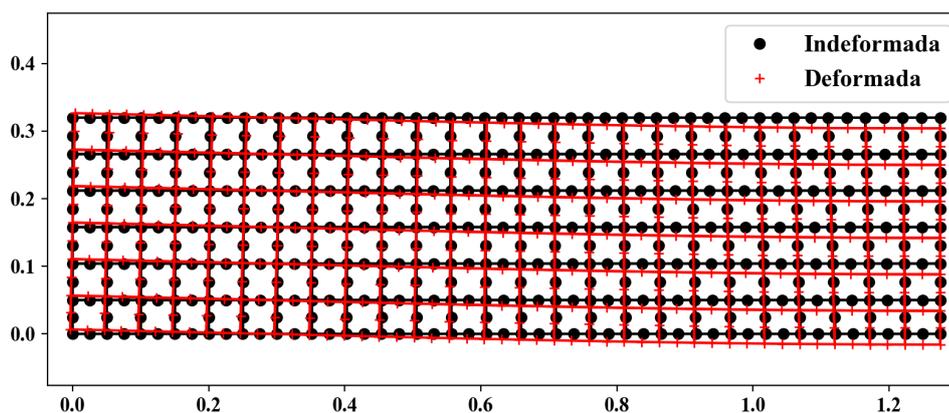


Fonte: elaborado pelo autor.

deformada da malha para metade do problema.

As variáveis aleatórias tratadas no problema são apresentadas na Tabela 4. Os parâmetros estatísticos (média e desvio padrão) de cada variável aleatória são escritos em termos dos coeficientes *mean* e *COV* (coeficiente de variação). O valor médio da variável aleatória é obtido multiplicando-se o fator apresentado por seu valor nominal. Em relação ao desvio padrão, este é obtido multiplicando seu valor médio pelo coeficiente de variação. As informações estatísticas

Figura 29 – Malha do exemplo deformada.



Fonte: elaborado pelo autor.

das variáveis foram obtidas nos trabalhos de Hamilton (2011) *apud* Souto (2015) e Santos, Stucchi e Beck (2014). O módulo de elasticidade linear do concreto é escrito como v.a. a partir da relação $E_c = 5600\sqrt{f_{ck}}$, dado pela ABNT, NBR (2014).

Tabela 4 – Parâmetros estatísticos das variáveis aleatórias utilizadas no problema

Variável	Símbolo	Distribuição	mean	COV
Resistência à compressão do concreto	f_{ck}	Normal	1,17	0,15
Resistência ao escoamento do aço	σ_y	Lognormal	1,03	0,063
Módulo de elasticidade do aço	E_a	Normal	1,04	0,05
Carga permanente	P	Normal	1,05	0,1

Os modos de falha considerados referem-se à flecha crítica na viga, e à tensão crítica atuante na armadura, conforme as funções de falha nas Eqs. 4.1a e 4.1b. O deslocamento admissível (G_1) é adotado $u_{adm} = 200 \text{ mm}$, que corresponde a razão de 1/300 do comprimento efetivo do vão da viga ($L = 1.95 \text{ m}$). Para o segundo modo de falha busca-se verificar a probabilidade da v.a. tensão de escoamento (σ_y) seja ultrapassada pela máxima tensão na armadura longitudinal da viga ($\sigma_{s,max}$).

$$G_1 = u_{adm} - u_{max} \quad (4.1a)$$

$$G_2 = \sigma_y - \sigma_{s,max} \quad (4.1b)$$

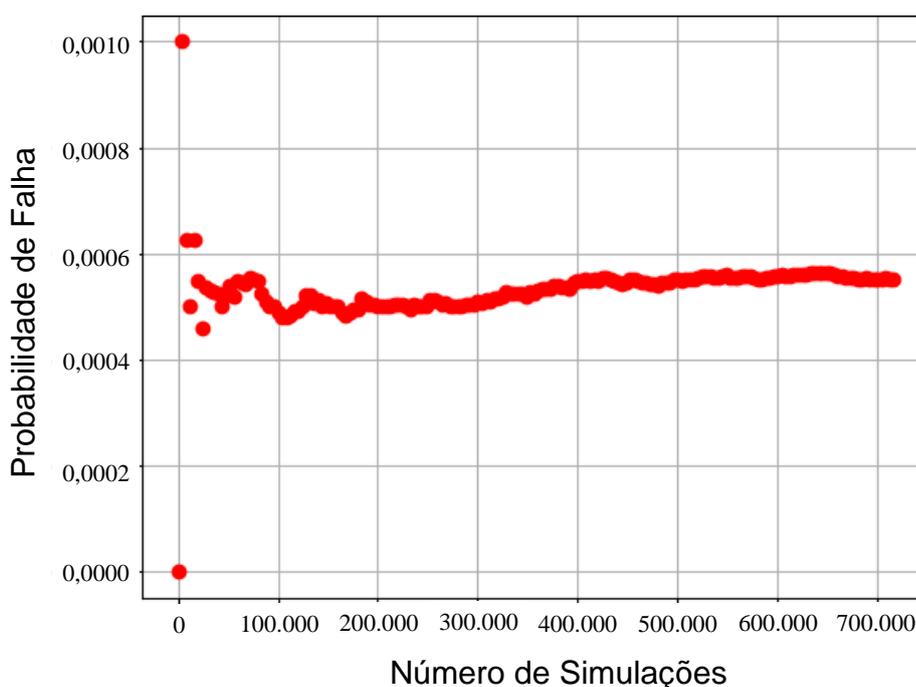
Na Tabela 5 apresentam-se os valores de probabilidade de falha obtidos via FORM e *Monte Carlo*. Notam-se valores elevados de P_f , típicos de Estado Limite de Serviço (ELS), sendo o segundo modo de falha dominante. Uma informação importante fornecida pela análise via FORM são os fatores de importância de cada v.a. na probabilidade de falha obtida, calculados a partir dos cossenos diretores do vetor normal à função de falha no ponto de projeto no espaço reduzido. Os fatores são apresentados em termos percentuais na Tabela 5. Em termos de *Monte*

Carlo, foram feitas 719.000 simulações para G_1 e 25.000 simulações para G_2 . Para ambos os casos tem-se $COV = 5\%$. As Figuras 30 e 31 mostram a convergência desses, em termos do número de simulações (ns). Nota-se a elevada quantidade de simulações para a função G_1 , uma vez que o método de Monte Carlo precisa de mais testes para captar uma P_f menor.

Tabela 5 – Valores de probabilidade de falha e fatores de importância das v.a.

Funções de Falha	Probabilidade de Falha (P_f)		Índice de Confiabilidade (β)		Fatores de Importância (%)			
	Monte Carlo	FORM	Monte Carlo	FORM	E_s	f_{ck}	σ_y	P
G_1	$10^{-3,2547}$	$10^{-3,2598}$	3,2604	3,2637	0,21	62,01	–	37,78
G_2	$10^{-1,7837}$	$10^{-1,7970}$	2,1454	2,1332	7,63	25,83	22,65	43,89

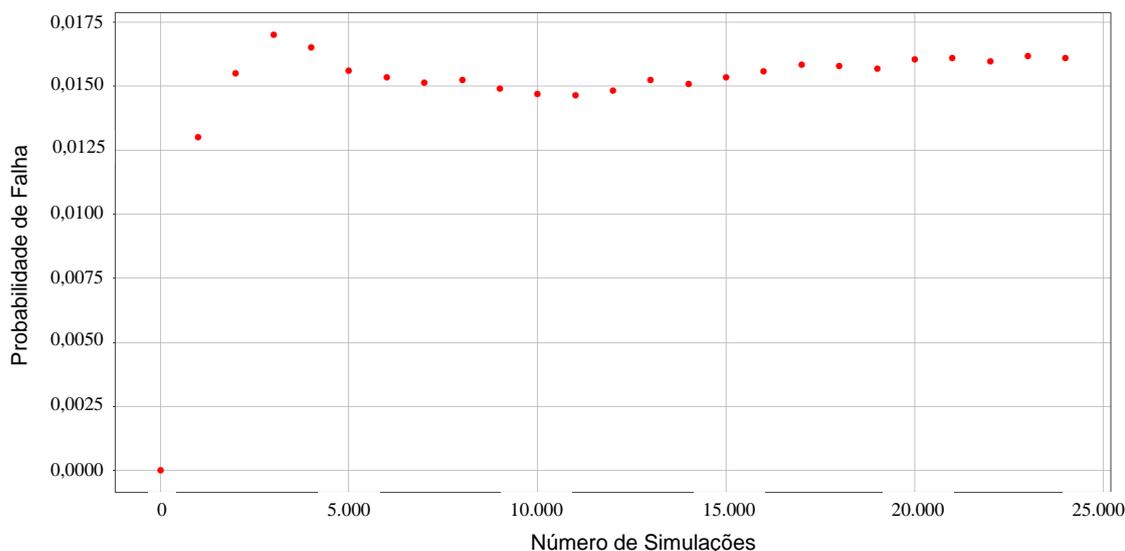
Figura 30 – Convergência da P_f para a função G_1 .



Fonte: elaborado pelo autor.

Percebe-se que os resultados de P_f e β são equivalentes para ambos métodos de confiabilidade. Além disso, observa-se que a resistência à compressão do concreto, descrita como v.a. f_{ck} , possui maior influência na análise confiabilística da função de falha G_1 , o que pode ser explicado pelo seu comportamento disperso, com o maior COV dentre as v.a. consideradas neste exemplo. Ainda, a v.a. P também apresenta valor relevante de fator de importância, que junto com f_{ck} , regem o comportamento em termos de deslocamentos, analisado em G_1 .

No segundo modo de falha (G_2), os valores de P_f são maiores e a carga aplicada apresenta-se como a v.a. dominante na resposta. Por fim, observa-se que a v.a. E_s , associada

Figura 31 – Convergência da P_f para a função G_2 .

Fonte: elaborado pelo autor.

módulo de elasticidade do aço, possui pouca influência na obtenção de P_f em ambos os modos investigados. Enquanto f_{ck} e σ_y apresentam relevância semelhante próximo a 25%. Em ambos os casos, para as funções de falha G_1 e G_2 , os métodos de confiabilidade utilizados mostraram resultados muito próximos de probabilidade de falha e índice de confiabilidade.

4.2 VIGA REFORÇADA COM FIBRAS

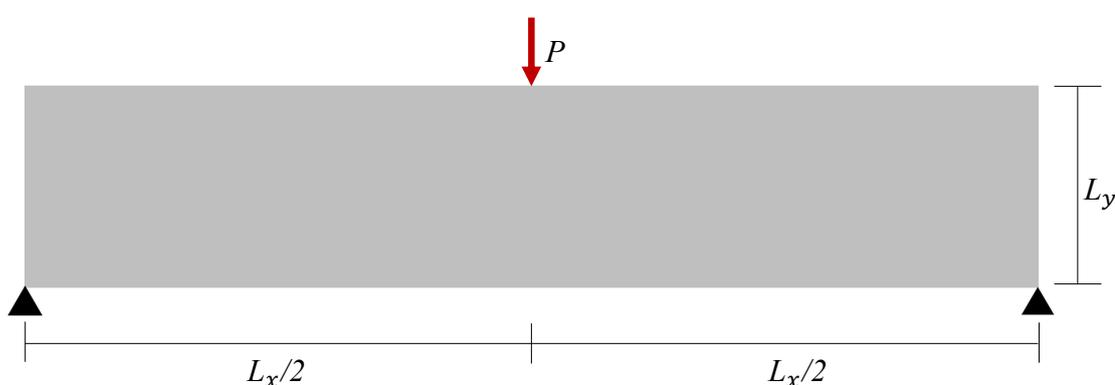
Ghasemi et al. (2015) apresentam um problema de otimização para uma viga reforçada com fibras, cujo objetivo é a obtenção da fração mínima de fibras que leve a um índice de confiabilidade $\beta = 3$, para um modo de falha associado ao maior valor de deslocamento admissível no elemento. Nesse caso, determinou-se que o valor ótimo de fração de fibras foi de 30%. Algumas simplificações importantes são adotadas: não há falha das fibras; a não ocorrência de deslocamento relativo entre as fibras e matriz. A espessura adotada é unitária. Foi adotado para as fibras uma razão de aspecto de 100. Com intuito de validar as rotinas implementadas nessa Dissertação, modelou-se o exemplo citado, e ilustrado na Fig. 32, tomando a fração de fibras de 30%. As propriedades geométricas e físicas da viga estão na Tabela 6.

Todas as v.a. são de distribuição *Normal* (N). Os demais parâmetros são determinísticos (D). Em termos de micromecânica, a rotina de determinação do módulo de elasticidade linear homogeneizado é chamada a cada iteração do *FORM*. A função de falha é escrita como $G = u_{adm} - u$, referindo-se à possibilidade dos deslocamentos, em termos de v.a., ultrapassem o valor máximo de deslocamento admissível, $u_{adm} = 4 \text{ mm}$. A malha de elementos finitos utilizada foi a mesma apresentada pelo autor, com 150 elementos $Q8$, sendo 15 na direção x e 10 na direção y .

Tabela 6 – Parâmetros do exemplo.

Parâmetros	L_x (m)	L_y (m)	E_i (MPa)	E_m (MPa)	ν_m	P (N)	Desloc. Vertical Admissível (m)	β
Valores	5	1	$\mu = 200$ $\sigma = 50$	$\mu = 20$ $\sigma = 5$	0,1	$\mu = 1000$ $\sigma = 250$	4×10^{-3}	3
Tipo	D	D	N	N	D	N	D	D

Figura 32 – Viga plana reforçada com fibras.



Fonte: Adaptado de Ghasemi et al. (2015).

A Tabela 7 apresenta os resultados de P_f e β para a função de falha G , a partir do *FORM* e *Monte Carlo*, bem como os valores dos fatores de importância para as variáveis aleatórias do exemplo. O número de simulações de *Monte Carlo* foi de 285.000, e a convergência para o valor de P_f apresentado na Tabela 7 é apresentado na Figura 33.

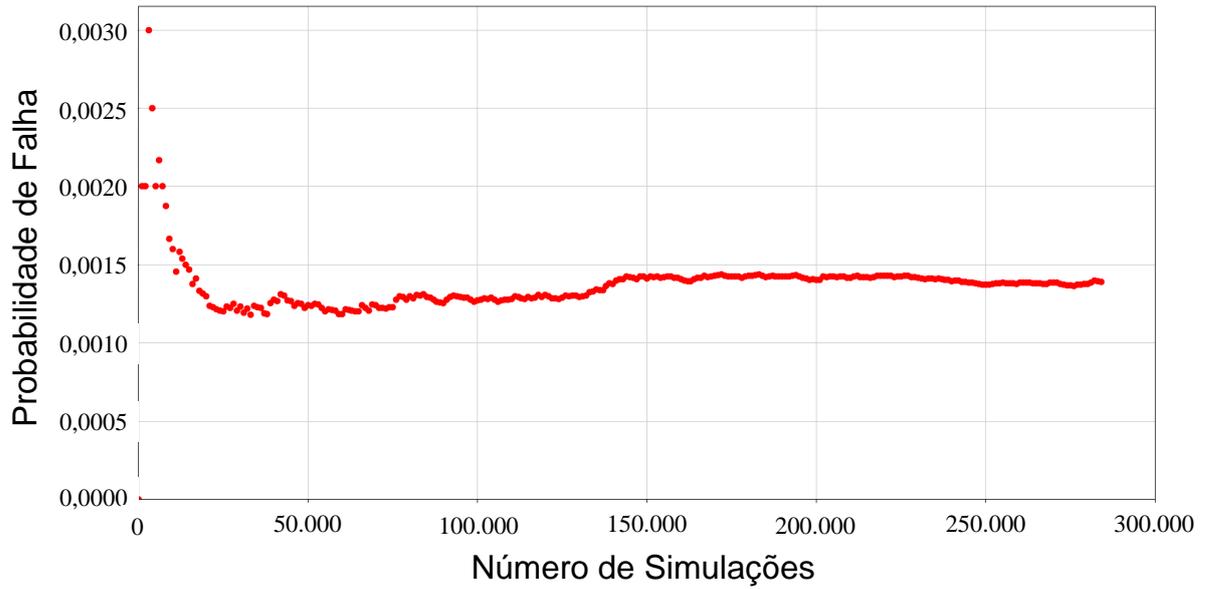
Tabela 7 – Valores de probabilidade de falha e fatores de importância das v.a.

Função de Falha	Probabilidade de Falha (P_f)		Índice de Confiabilidade (β)		Fatores de Importância (%)		
	<i>Monte Carlo</i>	<i>FORM</i>	<i>Monte Carlo</i>	<i>FORM</i>	E_m	E_i	P
	G	$10^{-2.8582}$	$10^{-2.8516}$	2,9919	2,9873	94,0598	0,0002

Percebe-se que os valores de β obtidos são muito próximos do valor do índice de confiabilidade 3 definido por Ghasemi et al. (2015) para $f_i = 30\%$. Na Tabela 7, nota-se que o fator de importância do módulo de elasticidade das fibras é praticamente nulo, apesar de seu desvio padrão elevado. Isso pode ser justificado pela baixa influência das fibras na fase linear física do problema.

Além disso, fez-se uma avaliação dos valores de P_f e β , obtidos através do *FORM*, com

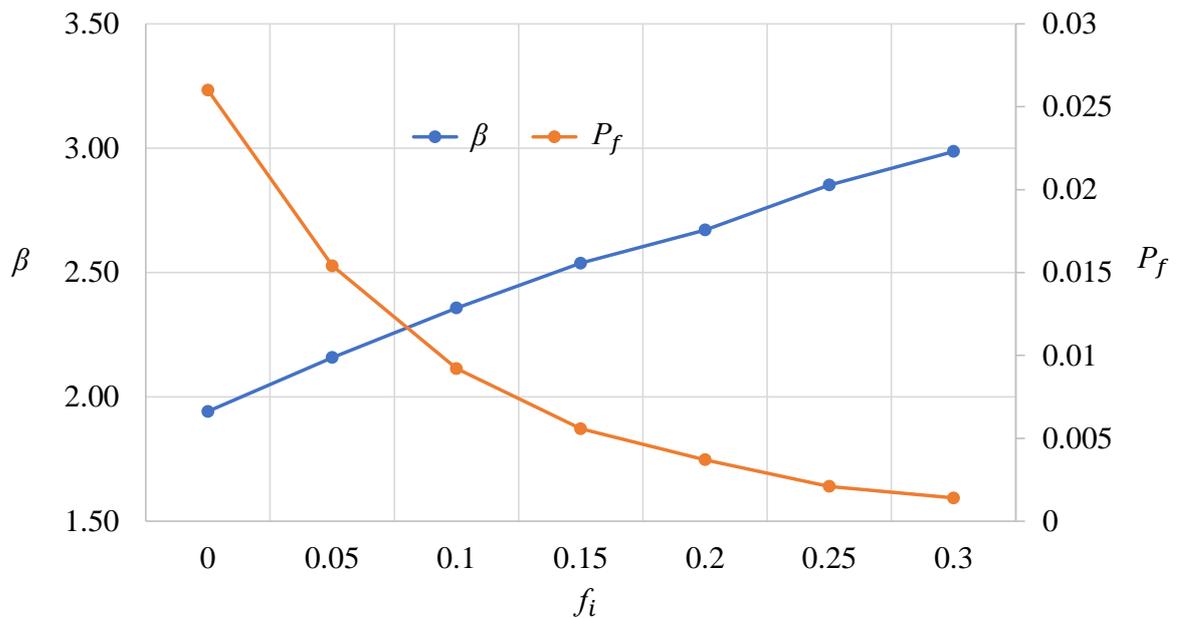
Figura 33 – Convergência da probabilidade de falha.



Fonte: elaborado pelo autor.

a evolução da fração de fibras (0,0% a 30,0%). Na Figura 34 observa-se o decrescimento de P_f e, conseqüentemente, o crescimento de β com o aumento de f_i , como era esperado, uma vez que se tem o ganho de rigidez com inserção das fibras.

Figura 34 – Índice de confiabilidade e probabilidade de falha em relação a variação de fração de fibras.

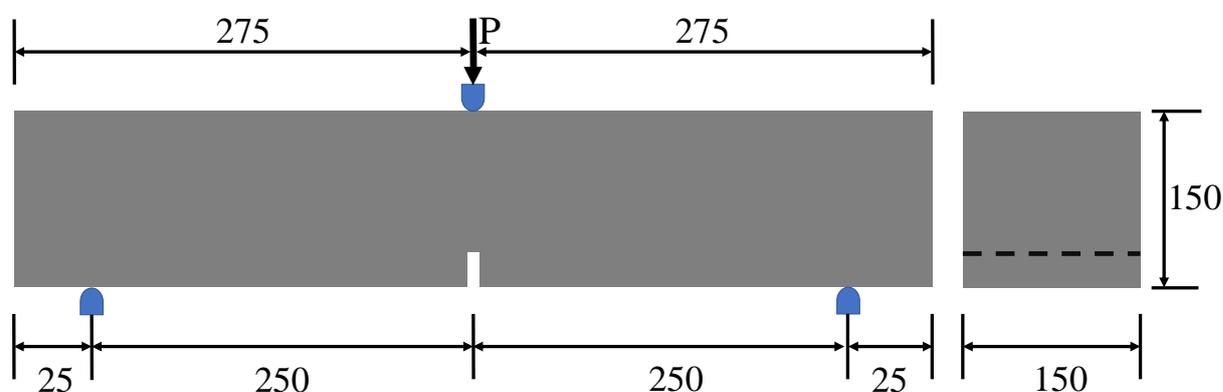


Fonte: elaborado pelo autor.

4.3 ESPÉCIME DE CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS

O terceiro exemplo trata de um espécime de concreto fluido reforçado com fibras curtas metálicas, e é adaptado do trabalho de Agra (2017). O autor submeteu o espécime a um ensaio de flexão em 3 pontos, normatizado pela BS EN 14651 (2007), que visa medir a resistência à tração por flexão do concreto, de forma que caracteriza o limite de proporcionalidade da resposta, assim como a resistência residual do concreto à flexão para diferentes aberturas do entalhe. A geometria e as dimensões do espécime são ilustradas na Fig. (35). A viga possui um entalhe com 25 mm de altura, 5 mm de largura. O módulo de elasticidade do concreto é de 28 GPa, associado a uma resistência à compressão de 25 MPa, e coeficiente de Poisson igual a 0,2. O aço da armadura possui módulo de elasticidade de 210 GPa. A carga concentrada vale $P = 12 \text{ kN}$.

Figura 35 – Propriedades geométricas (dimensões em mm) e esquema de ensaio em três pontos



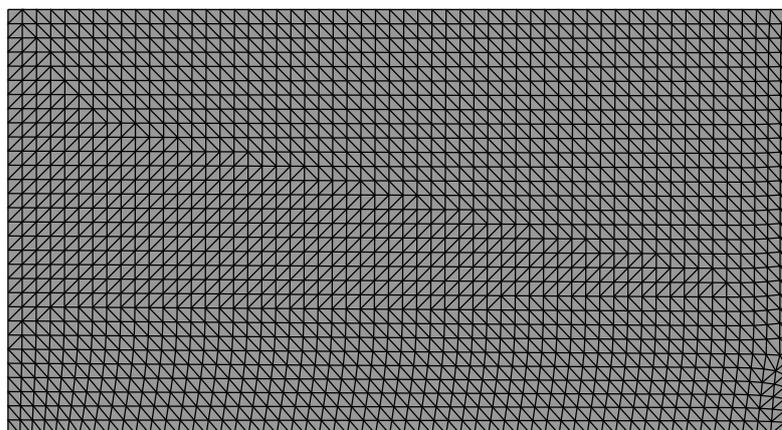
Fonte: elaborado pelo autor.

Considerando-se a modelagem linear física deste trabalho, propõe-se uma simulação simplificada do comportamento do espécime, não contemplando toda a resposta experimental apresentada pelo autor, a qual apresenta um trecho não linear de maior ductilidade. O método de confiabilidade utilizado será o *FORM*, para uma função de falha, porém comparando os resultados obtidos com os diferentes acoplamentos apresentados, MEF-MEF e MEF-Micromecânica.

Na Fig. (36) apresenta-se a malha que leva a uma solução convergida do problema que contém 3502 elementos. A escolha pelos elementos T3, deve-se a possibilidade de adicionar fibras em direções diferentes às horizontal e vertical. Modela-se a metade do domínio do problema, devido à simetria, com intuito de diminuir o custo computacional. Os deslocamentos horizontal e vertical na extremidade inferior esquerda do entalhe são adotados como referência.

A fração volumétrica de fibras considerada é de 0,5% em relação ao volume total do corpo-de-prova. No caso do acoplamento MEF-MEF, com os reforços como elementos de treliça, essas são inseridas em todas as arestas dos elementos planos, ocupando o domínio de maneira uniforme, totalizando 5130 fibras. De forma a representar a fração volumétrica de 0,5% na geometria plana simulada, atribui-se uma área equivalente de aço aos elementos de treliça. Apesar de não se investigar o comportamento pós-pico do espécime, nota-se o ganho

Figura 36 – Malha adotada no exemplo.



Fonte: elaborado pelo autor.

de rigidez proporcionado pelas fibras, sendo a abertura de fissura ao final do carregamento igual a $2.19 \times 10^{-2} \text{ mm}$, contra $2.25 \times 10^{-2} \text{ mm}$ do caso sem reforço. No caso do acoplamento MEF-Micromecânica, tem-se $2.22 \times 10^{-2} \text{ mm}$, o que sugere um menor enrijecimento em relação ao o outro tipo. Os valores obtidos para o caso com fibras está coerente com a resposta do autor, no trecho elástico, em que a abertura do entalhe é menor que $2,50 \times 10^{-2} \text{ mm}$.

Verificou-se um ganho de rigidez inferior a 5%, em termos de deslocamentos e, como demonstra a literatura (FIGUEIREDO, 2000; DUTRA et al., 2010), o reforço com fibras curtas de aço não influi, de maneira significativa, na fase elástica inicial do problema.

Na análise confiabilística, as variáveis aleatórias consideradas no problema são os módulos de elasticidade do concreto e do aço, além da carga aplicada, conforme apresentado na Tabela 4. O primeiro do modo de falha investigado (G_1) refere-se ao valor de abertura máximo do entalhe para o caso MEF-MEF ($u_1 = 2.19 \times 10^{-2} \text{ mm}$). Já o segundo modo (G_2) refere-se ao caso MEF-Micromecânica ($u_2 = 2.22 \times 10^{-2} \text{ mm}$). Ambas as funções de falha são apresentadas nas Eqs. 4.2a e 4.2b. O termo $u_{i,conf}$ é o valor calculado via confiabilidade, para o modelo em questão.

$$G_1 = u_1 - u_{1,conf} \quad (4.2a)$$

$$G_2 = u_2 - u_{2,conf} \quad (4.2b)$$

As P_f obtidas representam a probabilidade de que o valor determinístico seja ultrapassado pelo valor obtido utilizando confiabilidade, em cada um dos modelos. Pretende-se unicamente quantificar a influência da aleatoriedade das variáveis na resposta da simulação. A Tabela 8 ilustra os valores de probabilidade de falha obtidos, e os fatores de importância das variáveis envolvidas.

Percebe-se que os valores da probabilidade de falha e do índice de confiabilidade, são próximos para as duas funções de falha, indicando a equivalência entre os dois tipos de acoplamento. Em ambos os casos, tem-se que variações de E_s não influencia na resposta final.

Tabela 8 – Valores de probabilidade de falha e fatores de importância das v.a.

Funções de Falha	Probabilidade de Falha (P_f)	Índice de Confiabilidade (β)	Fatores de Importância (%)		
			E_s	f_{ck}	P
G_1	$10^{-4,5032}$	4,0021	0,00	76,78	23,22
G_2	$10^{-4,3723}$	3,9302	0,00	77,06	22,94

Por outro lado, $f_{ck} \approx 77\%$ e $P \approx 23\%$ têm maior importância na análise. Isso era esperado, pois o módulo de elasticidade da matriz depende do f_{ck} , o que o torna dominante na fase elástica.

Quanto aos tipos de acoplamento, durante a realização da análise, percebeu-se que o acoplamento MEF-Micromecânica proporciona maior velocidade no processamento dos cálculos, tendo sido gastos cerca de 1 minutos e 37 segundos, contra 3 minutos e 05 segundos do modelo MEF-MEF. Utilizou-se um computador portátil com processador de velocidade de 2.8 GHz e 16 GB de memória RAM.

4.4 CHAPA COM FURO REFORÇADA COM FIBRAS

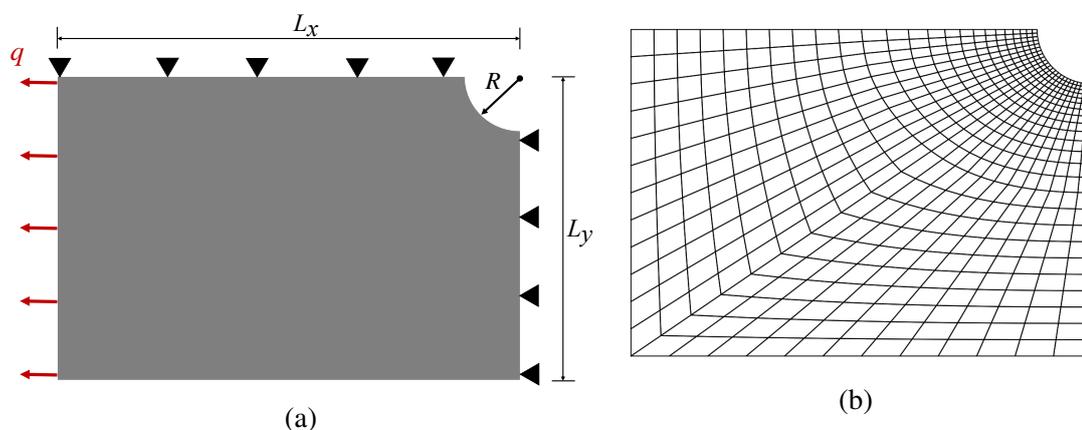
Neste último exemplo, adaptado de Assan (2003), considera-se uma chapa com pequeno furo central e sob tração uniforme, como ilustrado na Figura 37a. Nesse caso, investiga-se a função de falha escrita como $G = u_{adm} - u$, que se refere à possibilidade da reposta confiabilística em deslocamentos ultrapassar o valor máximo de deslocamento admissível, $u_{adm} = 0,4511 m$, determinado para o caso determinístico. A Tabela 9 mostra os parâmetros utilizados. As simplificações adotadas nos exemplos anteriores, são válidas nesse caso. A espessura é de 1 cm.

Tabela 9 – Parâmetros do exemplo.

Parâmetros	L_x (m)	L_y (m)	R (m)	E_i (MPa)	E_m (MPa)	ν_m	q (N/m)
Valores	4,2	3	1	$\mu = 10$ $\sigma = 1$	$\mu = 1$ $\sigma = 0,1$	0,0	$\mu = 1000$ $\sigma = 250$
Tipo	D	D	D	N	N	D	N

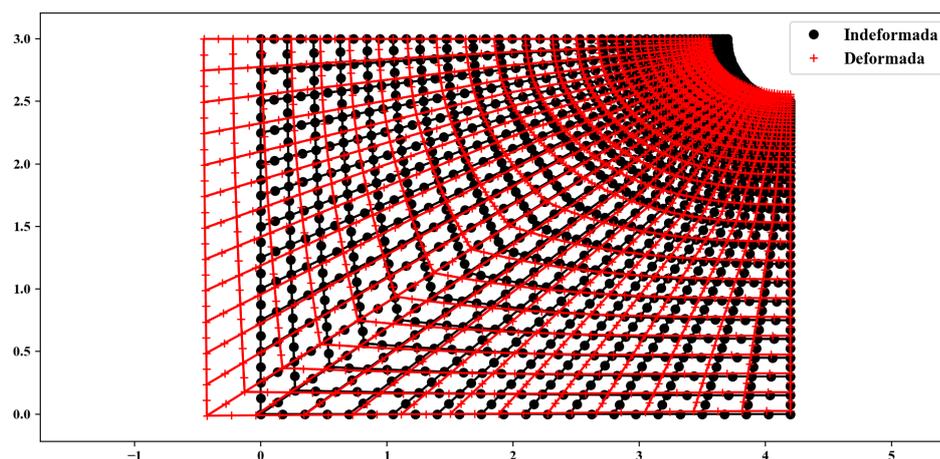
A malha utilizada contém 576 elementos Q8, conforme ilustrado na Figura 37b, Buscou-se utilizar a mesma malha apresentada pela referência. Na Figura 38 mostra-se a obtenção da condição deformada da chapa após a aplicação do carregamento.

Figura 37 – Ilustração de um quarto de uma chapa com furo (a) e a malha de elementos finitos utilizada (b).



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 38 – Condição indeformada e deformada da chapa com furo sem reforço.

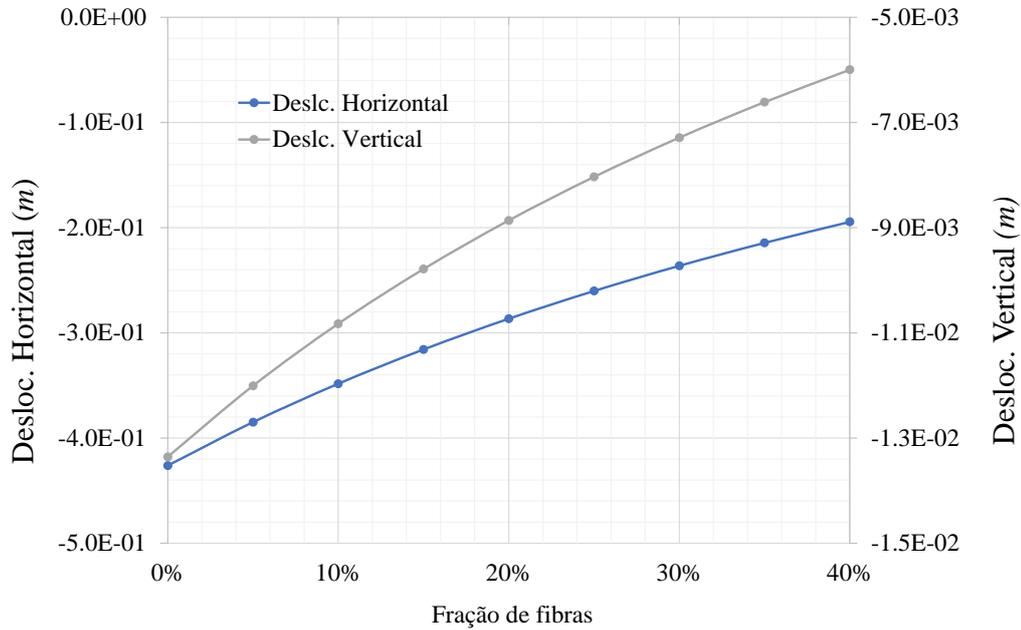


Fonte: elaborado pelo autor.

Na Figura 39 apresenta-se evolução, com a variação da fração de fibras, dos deslocamentos horizontal e vertical, no ponto localizado na extremidade inferior esquerda do domínio. Nesse caso, considerando o intervalo de fração de fibras de 0 a 40%, nota-se um aumento na rigidez de aproximadamente 98% nas duas direções.

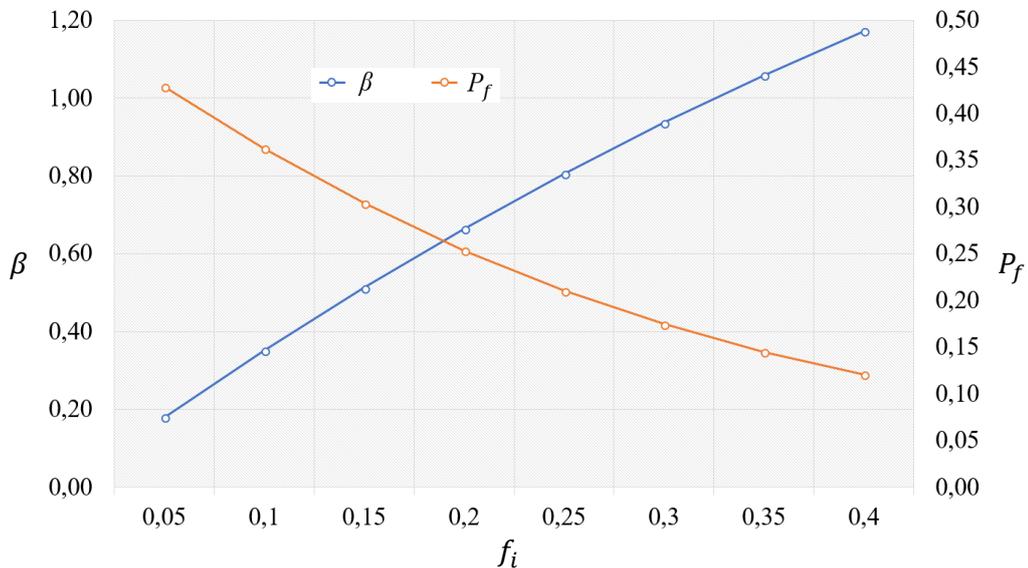
A ideia desse exemplo é mostrar a evolução da probabilidade de falha com o enrijecimento da matriz, de forma semelhante ao exemplo 4.2. Assim, a Figura 40 apresenta os resultados de P_f e β com a variação de fração de fibras. Observa-se que a imposição de maior fração de fibras diminui a probabilidade de falha, como esperado. Nota-se um aumento de aproximadamente 6,50 vezes do valor do índice confiabilidade, variando-se f_i de 5% para 40%, indicando a relevância do enrijecimento na resposta confiabilística.

Figura 39 – Evolução da rigidez com a inserção das fibras.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 40 – Índice de confiabilidade e probabilidade de falha em relação a variação de fração de fibras.



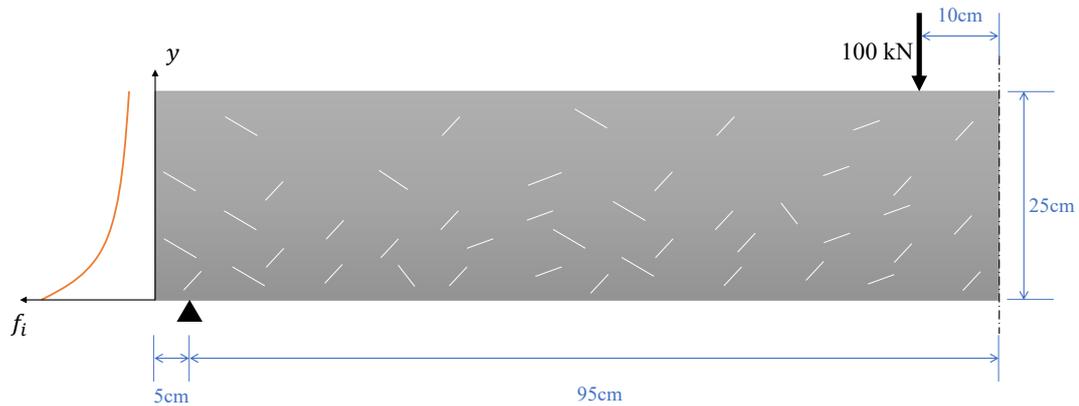
Fonte: elaborado pelo autor.

4.5 VIGA 2D REFORÇADA COM FIBRAS COM VARIAÇÃO DA FRAÇÃO DE FIBRAS NA ALTURA

Para esse exemplo, tem-se uma viga de matriz homogênea e reforçada com fibras curtas (Figura 41), distribuídas aleatoriamente, mas que diferentemente dos problemas anteriores, apresenta uma variação da fração volumétrica de fibras ao longo da altura da viga. A ideia é simular o segregação de fibras adicionadas à matriz cimentícia, as quais podem tender a

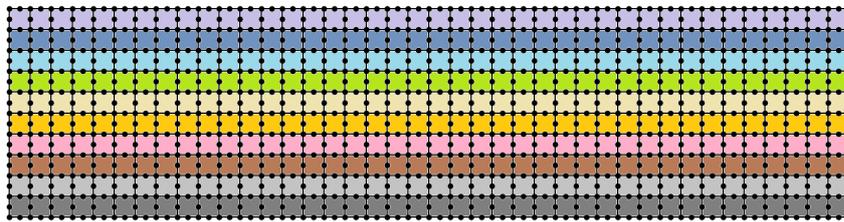
acumular-se próximo ao fundo da viga. Para isso, define-se um perfil estratificado de distribuição de fibras, composto por 10 diferentes faixas, ao longo da altura. Estas faixas coincidem com as 10 camadas de elementos finitos adotadas na discretização, a qual é feita segundo malha estruturada de elementos $Q8$. A Figura 42 apresenta o esquema descrito para a presente aplicação.

Figura 41 – Metade da viga reforçada com fibras considerando a simetria.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 42 – Malha de elementos $Q8$ com estratificação de f_i na altura.



Fonte: elaborada pelo autor.

A malha contém 10×40 elementos $Q8$. Para cada faixa de elementos, estima-se, através de uma distribuição estatística, o valor de fração de fibras. Adota-se a matriz com $E_m = 10GPa$ e $\nu_m = 0,2$, enquanto, as fibras, $E_i = 100GPa$ e $f_i = 5\%$. A espessura da viga é de $0,25m$. Nesse exemplo, será adotada uma distribuição *Weibull* com $\lambda = 1$ e $k = 1$. Os parâmetros estatísticos mostrados na Tabela 10 são utilizados na análise confiabilística.

Tabela 10 – Parâmetros estatísticos do exemplo.

Parâmetros	E_i (GPa)	E_m (GPa)	P (kN)
Valores	$\mu = 100$ $\sigma = 10$	$\mu = 10$ $\sigma = 1$	$\mu = 100$ $\sigma = 10$
Tipo	N	N	N

Na Tabela 11 pode-se comparar os resultados em deslocamentos, para os três casos: sem reforço, com distribuição uniforme fibras e com variação de fração de fibras na altura. Além disso, apresentam-se os resultados de probabilidade de falha e índice de confiabilidade. O valor de deslocamento considerando distribuição variando na altura, foi obtido a partir da média aritmética das respostas de cinco simulações. Ainda sobre a Tabela 11, percebe-se o aumento de rigidez imposto pela distribuição uniforme de fibras com diminuição, aproximadamente, de 10%. Porém esse caso pode não representar a situação real, visto que o controle para a uniformização da distribuição de fibras deve ser alto. Caso haja uma variação de fração de fibras, como no caso estratificado, verifica-se que o desempenho é reduzido, com ganho de rigidez de 1%, aproximadamente.

Tabela 11 – Parâmetros do exemplo.

Tipo de Análise	Deslocamento (m)	Probabilidade de Falha (FORM)	β
Sem fibras	$-9,0497 \times 10^{-3}$	$10^{-0.4368}$	0,3432
Uniforme	$-8,1871 \times 10^{-3}$	$10^{-0.8403}$	1,0606
Estratificada	$-8,9495 \times 10^{-3}$	$10^{-0.4686}$	0,4126

5 CONCLUSÕES

Através dos exemplos analisados, foi possível validar as rotinas do modelo de elementos finitos implementado, avaliando o acoplamento entre matriz e reforço. Especificamente no caso do enrijecimento com fibras, verificou-se que sua influência na rigidez, na fase elástica da resposta, é pouco significativa, conforme reportado na literatura. Percebeu-se a correspondência entre os resultados apresentados pelos tipos de acoplamento MEF-MEF e MEF-Micromecânica. Ainda, constatou-se a maior rapidez nos cálculos para o segundo tipo, já que a depender do número de fibras e do tipo de função de falha, torna o acoplamento MEF-MEF mais custoso.

Quanto a linguagem de programação utilizada, *Python*, essa se mostrou muito poderosa e versátil, correspondendo a todas as necessidades encontradas neste trabalho. A simplicidade de aplicação do paradigma de programação orientada a objetos contribuirá para a fácil atualização e manutenção das rotinas implementadas.

Para fins de simulação do comportamento de materiais cimentícios reforçados por fibras ou barras, o modelo mecânico precisa ser aprimorado, incluindo leis constitutivas não lineares que representem adequadamente os materiais constituintes, permitindo a modelagem de elementos até a carga última. Além disso, investir na atualização do método de homogeneização utilizado, buscando-se alternativas à técnica de Mori-Tanaka, poderá trazer maior precisão aos valores efetivos das propriedades dos materiais, para frações de fibras elevadas.

Além disso, o modelo mecano-fiabilístico desenvolvido foi validado, e permitiu quantificar a influência das incertezas associadas às variáveis de projeto na resposta dos dois problemas apresentados. Os resultados apresentados são apenas indicativos dos modos de falha investigados, estando associados aos valores das variáveis aleatórias adotadas. Metodologias probabilísticas se mostram com uma poderosa ferramenta no processo de tomada de decisão do projetista.

A escassez de trabalhos que estudaram diretamente análises confiabilísticas de problemas com domínios planos reforçados em regime fisicamente linear foi uma importante dificuldade no desenvolvimento dessa Dissertação. Entende-se a simplicidade das aplicações aqui mostradas, ao passo que se destaca a sua importância, no que diz respeito à formação do pesquisador e ao subsídio que fornece ao entendimento de problemas mais complexos. A adição da possibilidade de análises fisicamente não lineares, isso enriquecerá as rotinas implementadas, ampliando as possibilidades de aplicação do *ReliaFEM*.

5.1 SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

Fica evidente que é necessário ampliar o escopo e robustez da ferramenta, de forma a abordar problemas mais aplicados de Engenharia de Estruturas. Assim, como sugestões para trabalhos futuros, pode-se citar:

- a) Buscar aplicabilidade do modelo desenvolvido em problemas de compósitos poliméricos reforçados com fibras curtas
- b) Implementação de rotinas que considerem comportamento fisicamente não linear dos materiais;
- c) Paralelização do código utilizando os pacotes dedicados do Python, como *multiprocessing* e *threading*;
- d) Acoplamento das rotinas desenvolvidas (*ReliaFEM*) para o presente trabalho a softwares como o *Abaqus* de forma a explorar seus modelos de análise fisicamente e geometricamente não lineares, além de explorar seu poder de processamento, com vistas a aplicações

REFERÊNCIAS

- ABNT, NBR. 6118: Projeto de estruturas de concreto—procedimento. *Rio de Janeiro*, 2014.
- AGRA, R. R. Influência do tipo de fibra no comportamento á flexão de vigas de concreto fluido. *Monografia, Universidade Federal de Alagoas, Maceió*, 2017.
- AHMAD, H.; LAGOUDAS, D. C. Effective elastic properties of fiber-reinforced concrete with random fibers. *Journal of engineering mechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 117, n. 12, p. 2931–2938, 1991.
- ANG, A. H.-S.; TANG, W. H. *Probability concepts in engineering:: emphasis on applications in civil and environmental engineering*. New York: Wiley, 2007.
- ASSAN, A. E. *Método dos Elementos Finitos*. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2003. 297 p.
- BARZEGAR, F.; MADDIPUDI, S. Generating Reinforcement in FE Modeling of Concrete Structures. *Journal of Structural Engineering*, v. 120, n. 5, p. 1656–1662, 1994. ISSN 0733-9445.
- BECK, A. T. Curso de confiabilidade estrutural: notas de aula. *Universidade de São Paulo - Escola de Engenharia de São Carlos*, São Carlos, 2014.
- BITENCOURT JÚNIOR, L. A. G. *Desenvolvimento de uma plataforma computacional para análise via método dos elementos finitos de estruturas de concreto armado convencional e reforçado com fibras de aço*. 162 p. Tese (Dissertação de Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, jun 2009.
- BITENCOURT JÚNIOR, L. A. G. *Modelagem do processo de falha em materiais cimentícios reforçados com fibras de aço*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, nov 2014.
- BS EN 14651. *Test method for metallic fibre concrete e measuring the flexural tensile strength (limit of proportionality (LOP), residual)*. UK: BSI, p. 1–20, 2007.
- CHIACHIO, M.; CHIACHIO, J.; RUS, G. Reliability in composites—a selective review and survey of current development. *Composites Part B: Engineering*, Elsevier, v. 43, n. 3, p. 902–913, 2012.
- COOK, R. D. *Finite Element Modeling for Stress Analysis*. [S.l.]: Wiley, 1995. 336 p.
- COOK, R. D. et al. *Concepts and applications of finite element analysis*. [S.l.]: Wiley & Sons, 1989.
- COSTA, E. J. H. *Homogeneização de compósitos reforçados por fibras considerando efeitos de interfaces*. 151 p. Tese (Dissertação de Mestrado) — Universidade de Federal de Alagoas, 2017.
- DUTRA, V. P. et al. A micromechanical approach to elastic and viscoelastic properties of fiber reinforced concrete. *Cement and concrete research*, Elsevier, v. 40, n. 3, p. 460–472, 2010.
- ELWI, A. E.; HRUDEY, T. M. Finite Element Model for Curved Embedded Reinforcement. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 115, n. 4, p. 740–754, apr 1989. ISSN 0733-9399.

ESHELBY, J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proc. R. Soc. Lond. A*, The Royal Society, v. 241, n. 1226, p. 376–396, 1957.

FERNANDES, V. A. *Análise elastoplástica bidimensional de meios reforçados com fibras*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2016.

FIGUEIREDO, A. D. de. *Concreto com Fibras de Aço*. 69 p. Tese (Boletim Técnico BT/PCC/260) — Universidade de São Paulo, 2000.

FISH, J.; BELYTSCHKO, T. *A First Course in Finite Elements*. [S.l.: s.n.], 2007. 1–319 p. ISSN 18732763. ISBN 9780470035801.

GAITÁN, J. D. D. R. *Aplicação do método de elementos finitos semi-embutidos na simulação de vigas de concreto armado*. Tese (Dissertação de Mestrado) — Universidade de Brasília, 2015. Disponível em: <<http://repositorio.unb.br/handle/10482/18661>>.

GHASEMI, H. et al. Optimal fiber content and distribution in fiber-reinforced solids using a reliability and nurbs based sequential optimization approach. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, v. 51, n. 1, p. 99–112, 2015.

GOUVEIA, L. P. *Avaliação da Confiabilidade em Tubos de Revestimento de Poços de Petróleo*. Tese (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2014.

HASOFER, A. M.; LIND, N. C. Exact and invariant second-moment code format. *Journal of the Engineering Mechanics division*, ASCE, v. 100, n. 1, p. 111–121, 1974.

HÄUSSLER-COMBE, U. *Computational Methods for Reinforced Concrete Structures*. 1. ed. Berlin, Germany: Wilhelm Ernst & Sohn, 2014. 356 p. ISBN 978-3-433-03054-7.

HERRMANN, L. R. . Interpretation of Finite Element Procedure as Stress Error Minimization Procedure. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, v. 98, p. 1330–1336, 1972.

JONES, E.; OLIPHANT, T.; PETERSON, P. {SciPy}: open source scientific tools for {Python}. 2014.

LEMAIRE, M. *Structural reliability*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.

LYNN, P. P.; ARYA, S. K. Use of the Least Squares Criterion in Finite Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 6, p. 75–83, 1973.

MELCHERS, R. E.; BECK, A. T. *Structural reliability analysis and prediction*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2018.

MELOSH, R. J. Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffnes Method. *AIAA Journal*, v. 1, n. 7, p. 1631–1637, 1963.

MOREIRA, J. d. C. *Aplicação do Método RCM às Linhas de Muito Alta Tensão da REN*. Tese (Dissertação de Mestrado) — Universidade do Porto, Porto, 2005.

MORI, T.; TANAKA, K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta metallurgica*, Elsevier, v. 21, n. 5, p. 571–574, 1973.

MORTAZAVI, B. et al. Modeling of two-phase random composite materials by finite element, mori–tanaka and strong contrast methods. *Composites Part B: Engineering*, Elsevier, v. 45, n. 1, p. 1117–1125, 2013.

- MURA, T. *Micromechanics of defects in solids*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- NATAF, A. Détermination des distributions de probabilités dont les marges sont données. *C. R. Acad. Sci., Paris*, Gauthier-Villars, Paris, v. 255, p. 42–43, 1962. ISSN 0001-4036.
- NGO, D.; SCORDELIS, A. C. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams. *ACI Journal Proceedings*, v. 64, n. 3, 1967. ISSN 0002-8061.
- NOGUEIRA, C. G. *Desenvolvimento de modelos mecânicos, de confiabilidade e de otimização para aplicação em estruturas de concreto armado*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, may 2010.
- OLIPHANT, T. E. *A guide to NumPy*. [S.l.]: Trelgol Publishing USA, 2006. v. 1.
- OUAAR, A. *Micromechanics of rate-independent multi-phase composites: application to Steel Fiber-Reinforced Concrete*. Tese (Doutorado) — Université Catholique de Louvain Faculté des Sciences Appliquées, 2006.
- PALIGA, C. M. *Análise probabilística de vigas de concreto armado recuperadas à flexão, através do método de Monte Carlo utilizando um modelo de elementos finitos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2008.
- PHILLIPS, D. V.; ZIENKIEWICZ, O. C. Finite Element Non-Linear Analysis of Concrete Structures. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, v. 61, n. 1, p. 59–88, mar 1976. ISSN 1753-7789.
- PIKE, M. G.; OSKAY, C. Three-dimensional modeling of short fiber-reinforced composites with extended finite-element method. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 142, n. 11, p. 04016087, 2016.
- PRATES JUNIOR, N. P. *Um modelo elasto-viscoplástico para análise de peças de concreto estrutural, submetidas a estados planos de tensão, através do método dos elementos finitos*. Tese (Dissertação) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1992.
- RACKWITZ, R.; FLESSLER, B. Structural reliability under combined random load sequences. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 9, n. 5, p. 489–494, 1978.
- RANJBARAN, A. Embedding of reinforcements in reinforced concrete elements implemented in DENA. *Computers & Structures*, v. 40, n. 4, p. 925–930, jan 1991. ISSN 00457949.
- REAL, M. d. V. *Análise probabilística de estruturas de concreto armado, sob estado plano de tensão, através do método dos elementos finitos*. 249 p. Tese (Doutorado) — UFRGS, 2000.
- SAGRILO, L. V. S. Confiabilidade estrutural: notas de aula. *Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-graduação e Pesquisa de Engenharia - Universidade Federal do Rio de Janeiro*, Rio de Janeiro, 2003.
- SAMPAIO, M. d. S. M. *Análise não linear geométrica de cascas laminadas reforçadas com fibras*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, feb 2014.
- SANTOS, D.; STUCCHI, F.; BECK, A. Reliability of beams designed in accordance with brazilian codes. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, SciELO Brasil, v. 7, n. 5, p. 723–746, 2014.

SORIANO, H. L. *Método dos Elementos Finitos em Análises de Estruturas*. 1. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2003. 578 p.

SOUTO, N. A. O. *Aplicação de confiabilidade ao estudo de elementos de aço comprimido em situação DE incêndio*. 124 p. Tese (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Alagoas, Maceió, set 2015.

SZABO, B. A.; LEE, G. C. Derivation of Stiffness Matrices for Problems in Plane Elasticity by Galerkin's Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 1, p. 301–310, 1969.

THOMAS, J.; RAMASWAMY, A. Mechanical properties of steel fiber-reinforced concrete. *Journal of materials in civil engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 19, n. 5, p. 385–392, 2007.

TURNER, M. J. et al. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*, v. 23, n. 9, p. 805–823, sep 1956.

VEUBEKE, B. F. Displacement and equilibrium models in the finite element method. In: ZIENKIEWICZ, O. C.; HOLISTER, G. S. (Ed.). *Stress Analysis*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1965. cap. 9, p. 145–197.

VIEIRA, P. R.; VIEIRA, J. D.; CARVALHO, E. M. L. Análise das propriedades de compósitos poliméricos reforçados com fibra de vidro. *Engevista*, v. 18, n. 2, p. 363–374, 2016.

WILLIAMSON, G. R. The effect of steel fibers on the compressive strength of concrete. *Special Publication*, v. 44, p. 195–208, 1974.

ZIENKIEWICZ, O. C.; CHEUNG, Y. K. *The finite element method in structural and continuum mechanics*. 1. ed. London: McGraw-Hill, 1967.