

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE FÍSICA

Juarez Gomes da Silva

DIFRAÇÃO DA LUZ COM MOMENTO ANGULAR  
ORBITAL ENTRE AS ABERTURAS QUADRADA E  
TRIANGULAR: UM ESTUDO COMPARATIVO

Maceió

2014

Juarez Gomes da Silva

DIFRAÇÃO DA LUZ COM MOMENTO ANGULAR  
ORBITAL ENTRE AS ABERTURAS QUADRADA E  
TRIANGULAR: UM ESTUDO COMPARATIVO

*Dissertação apresentada ao Instituto de Física  
da Universidade Federal de Alagoas, como parte  
dos créditos para a obtenção do título de Mestre  
em Física.*

*Orientador: Prof. Dr. Eduardo Jorge da Silva Fonseca*

Maceió

2014

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

**Bibliotecária: Maria Auxiliadora G. da Cunha**

S586d	<p>Silva, Juarez Gomes da.</p> <p>Difração da luz com momento angular orbital entre as aberturas quadrada e triangular: Um estudo comparativo/ Juarez Gomes da Silva - 2014.</p> <p>82 f.: il.</p> <p>Orientador: Eduardo Jorge da Silva Fonseca.</p> <p>Dissertação (Mestrado em Física da Matéria Condensada) - Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física, Maceió, 2014.</p> <p>Bibliografia: f. 68 – 72. Apêndice: f. 73 – 81.</p> <p>1. Momento angular orbital. 2. Feixes Laguerre-Gauss. 3. Difração de Fraunhofer. I. Título.</p>
-------	---

CDU:535.43



**Universidade Federal de Alagoas**  
**Instituto de Física**  
Programa de Pós Graduação em Física

BR 104 km 14, Campus A.C. Simões  
Cidade Universitária  
Tabuleiro dos Martins  
57072-970 Maceió - AL, Brasil  
FONE : (82) 3214-1423/FAX 3214-1645

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE**  
**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

*"Difração da luz com momento angular orbital entre as aberturas quadrada e triangular: um estudo comparativo".*

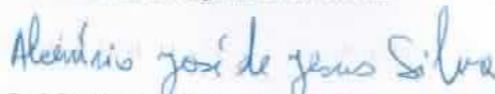
por

*Juarez Gomes da Silva*

A Banca Examinadora composta pelos professores Eduardo Jorge da Silva Fonseca (orientador), do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Alcenísio José de Jesus Silva, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas e Luiz Carlos Malacarne, do Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá consideram o candidato aprovado com grau "A".

Maceió, 14 de março de 2014

  
Prof. Dr. Eduardo Jorge da Silva Fonseca

  
Prof. Dr. Alcenísio José de Jesus Silva

  
Prof. Dr. Luiz Carlos Malacarne

## AGRADECIMENTOS

- A Deus por mais uma realização profissional. Por sentir sua verdadeira presença em minha vida.
- A minha esposa *Alana Peixoto da Silva Gomes* pela força, confiança, paciência e todo seu amor.
- Aos meus pais, *Maria Rosa e José Ferreira* pelo apoio incondicional, incentivo e por tudo que fizeram para o meu crescimento pessoal e profissional.
- Ao Professor *Eduardo Jorge da Silva Fonseca*, pela orientação, confiança depositada em mim. Pelos inúmeros conselhos referente à minha carreira.
- Ao Professor *Alcenísio José de Jesus Silva*, pelo grande apoio no laboratório de Ótica Quântica, por toda prestatividade dado a mim.
- Aos Professores do Instituto de Física, da Universidade Federal de Alagoas.
- A todos os meus familiares.
- A todos os colegas do Instituto de Física, pelo bom convívio.
- A Capes, ao CNPQ, e a Fapeal pelo apoio financeiro.

## RESUMO

Nesta dissertação, mostramos experimentalmente e teoricamente, utilizando a difração de Fraunhofer da luz com feixes Laguerre-Gauss (LG) possuindo momento angular orbital (MAO), um estudo comparativo do padrão de difração das aberturas quadrada e triangular. Demonstramos que é possível construir uma rede ótica quadrada bem definida para altos valores do MAO, favorecendo obter um valor da carga topológica duas vezes maior que conseguiríamos com a abertura triangular. Observamos que o padrão da abertura quadrada permanece truncado para a carga topológica (CT) igual a 20 com uma boa precisão. Já para o caso da abertura triangular, observamos que a rede permanece truncada para uma CT igual a 10. Por outro lado, mesmo que o padrão de difração da fenda quadrada não dê informação sobre o sinal da CT, é possível obtê-lo usando a fenda triangular. Explicamos este comportamento com base nos padrões de difração de cada fenda.

**Palavras-chave:** Momento Angular Orbital, Feixes Laguerre-Gauss, Difração de Fraunhofer.

## ABSTRACT

In this dissertation, we show experimentally and theoretical using the Fraunhofer diffraction of light beams with Laguerre-Gaussian (LG) possessing orbital angular momentum (OAM) a comparative study of the diffraction pattern of square and triangular apertures. We demonstrate that it is possible to engineer a square optical lattices for high values of MAO, about two times bigger than it would be with the triangular apertures. We observed that the pattern of square aperture remains truncated to the topological charge (TC) equal 20 with a good precision. On the other hand, for triangular aperture, we observe that the optical lattices remains truncated until TC equal to 10. However, the square does not give any information about the sign of the TC. But, we can measure the signal using the triangular aperture. We explain this behavior based on diffraction patterns of each aperture.

**Keywords:** Orbital Angular Momentum, Beams Laguerre-Gauss, Fraunhofer Diffraction.

# Lista de símbolos

$\mathbf{S}_{Poynting}$	Vetor de Poynting
$c$	Velocidade da luz no vácuo
$\epsilon_0$	Permissividade elétrica no vácuo
$\mathbf{E}$	Campo elétrico
$\mathbf{B}$	Campo magnético
$\mathbf{p}$	Densidade de momento linear
$\mathbf{P}$	Momento linear total
$\mathbf{j}$	Densidade de momento angular
$\mathbf{r}$	Vetor posição
$\mu_0$	permeabilidade magnética
$\mathbf{A}$	Potencial vetor
$\mathbf{J}$	Momento angular total
$\mathbf{S}$	Momento angular de spin
$\mathbf{L}$	Momento angular orbital
$E_0$	Amplitude da onda do Campo elétrico
$\hat{x}$	Versor unitário) de direção $x$
$\hat{y}$	Versor unitário) de direção $y$

$\hat{z}$	Versor unitário) de direção $z$
$\omega$	Frequência angular
$\mathbf{k}$	Vetor de onda
$k$	Módulo do vetor de onda
$\phi$	Potencial escalar
$u$	Densidade de energia

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO GERAL</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>MOMENTO ANGULAR DA LUZ</b>	<b>14</b>
2.1	Introdução . . . . .	14
2.2	Momento Angular da Luz . . . . .	15
2.3	Momento Angular de Spin . . . . .	19
2.4	Momento Angular Orbital . . . . .	22
2.5	Conclusão . . . . .	26
<b>3</b>	<b>FEIXES LAGUERRE-GAUSS E ÓTICA DE FOURIER</b>	<b>27</b>
3.1	Introdução . . . . .	27
3.2	Equação Paraxial de Helmholtz . . . . .	28
3.2.1	Ondas Paraxiais . . . . .	29
3.3	Feixes Laguerre-Gauss . . . . .	32
3.4	Transformada de Fourier . . . . .	34
3.5	Difração da Luz . . . . .	37
3.6	Princípio de Huygens-Fresnel . . . . .	39
3.7	Aproximação de Fresnel . . . . .	40
3.8	Aproximação de Fraunhofer . . . . .	42
3.9	Padrão por uma abertura retangular . . . . .	43
3.10	Transformada de Fourier por Lentes . . . . .	44
3.11	Holografia . . . . .	47

SUMÁRIO	9
3.12 Conclusão . . . . .	51
<b>4 DIFRAÇÃO DA LUZ POR ABERTURAS QUADRADAS E TRI- ANGULAR: UM ESTUDO COMPARATIVO</b>	<b>52</b>
4.1 Introdução . . . . .	52
4.2 Redes Óticas pelas Aberturas Quadrada e Triangular com Luz Pos- suindo MAO . . . . .	53
4.3 Aparato Experimental . . . . .	60
4.4 Geração de Hologramas . . . . .	61
4.5 Resultados Experimentais . . . . .	63
4.6 Conclusões . . . . .	64
<b>5 CONCLUSÃO GERAL</b>	<b>66</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>68</b>
<b>Apêndice: Quantização do Campo Eletromagnético</b>	<b>73</b>
<b>Anexos: Artigo Publicado</b>	<b>82</b>

# 1

## INTRODUÇÃO GERAL

É bem estabelecido pela teoria de Maxwell que a radiação eletromagnética transporta energia e momento [1]. O momento pode possuir contribuição linear quanto angular. O momento angular possui duas componentes. A primeira componente está relacionada com o estado de polarização do campo elétrico [2], que corresponde ao momento angular intrínseco. Os estados de polarização do momento angular intrínseco são: polarização circular no sentido horário e anti-horário. Já a outra componente corresponde a distribuição espacial do campo elétrico e está associada ao momento angular orbital (MAO) [3].

Poynting, em seu trabalho [4] mostrou que um feixe de luz circularmente polarizado poderia exercer um torque ao passar por uma placa de quarto de onda. Um experimento realizado por Beth, em 1936 mostrou a mudança da luz polarizada ao atravessar uma placa quarto de onda devido ao torque causado pela transferência de momento angular intrínseco [2, 5].

O estudo moderno do MAO pode-se dizer que começou com o trabalho de Allen e colaboradores [6]. Este trabalho mostrou que qualquer feixe com uma distribuição de amplitude  $u(r, \phi, z) = u(r, z) \exp(im\phi)$  transporta MAO sobre o eixo do feixe. No qual,  $\phi$  é a coordenada azimutal e  $m$  é um número inteiro, definido

como carga topológica (CT). Este resultado é independente dos estados de polarização e é comum para feixes que possuem uma frente de onda helicoidal [7]. Como consequência desta coordenada azimutal, o feixe possui uma fase indeterminada, ou seja, uma singularidade. Tal singularidade é responsável por uma intensidade nula no centro do feixe. Estas singularidades são chamadas de vórtices óticos [8]

Podemos citar os feixes Laguerre-Gauss (LG), como um tipo de feixe que possui MAO. Estes feixes podem ser produzidos a partir de holograma gerado computacionalmente. Um holograma é obtido a partir da gravação do padrão de interferência entre o feixe de interesse com um feixe de referência. Uma outra maneira de gerá-los é utilizando um modulador espacial de luz (SLM). No capítulo 4, detalharemos mais sobre a produção de hologramas.

O estudo do MAO tem sido extensivamente explorado na interação da luz com a matéria [9, 10, 11, 12] e fenômeno da difração [13, 14, 15]. Podemos mencionar outras aplicações da luz possuindo MAO que situam-se desde manipulação ótica [16] à comunicação quântica [17, 18].

Recentemente, dois trabalhos mostraram a importância do MAO aplicado à telecomunicações [19] e metrologia quântica [20]. Já na referência [21], foi utilizado um feixe de laser Hélio-Neônio (He-Ne) para apresentar uma nova técnica para separar diferentes estados do MAO e medir a densidade do MAO do feixe de laser. Este método foi baseado na decomposição dos modos do campo do laser com filtros de correlação.

Particularmente, uma interessante relação entre a fase da luz possuindo MAO e o fenômeno da difração [14, 15] tem sido explorado em alguns trabalhos publicados na literatura. Esta relação possibilitou ao Hickmann e colaboradores [15], observar o padrão de Fraunhofer da luz difratada possuindo MAO por uma fenda triangular ou abertura triangular. Uma consequência deste trabalho foi, medir a magnitude e

o sinal da CT do feixe LG.

Continuando a abordagem do estudo da difração com luz possuindo MAO, podemos citar o trabalho de Ferreira e colaboradores [14]. Eles estudaram o fenômeno da difração da luz com MAO por uma única fenda no plano de Fourier. Analisaram duas situações, na primeira situação foi considerado a fenda no centro do feixe. Para a segunda situação, a fenda foi deslocada do centro do feixe. Como resultados, eles observaram para o primeiro caso a simetria do padrão de interferência. Já no segundo caso, houve uma assimetria e deslocamento do padrão de interferência.

Seguindo esta mesma linha de pesquisa da luz possuindo MAO, Mesquita e colaboradores [22] construíram uma rede de intensidade ótica utilizando a difração de Fraunhofer de um feixe LG por uma abertura quadrada. Verificaram numericamente e experimentalmente que esta rede de intensidade ótica só é bem formada para valores pares da CT, enquanto para valores ímpares não é bem formada.

Tendo em vista os trabalhos citados anteriormente, principalmente as referências [15] e [22], podemos notar que há um grande interesse nesta abordagem de difração da luz possuindo MAO tendo como objetivo obter o módulo e o sinal da CT. Isto, nos motivou a realizar um trabalho fazendo um estudo comparativo da difração da luz com MAO pelas aberturas quadrada e triangular utilizando a difração de Fraunhofer.

Para realizar este estudo comparativo, organizamos a dissertação da seguinte forma. No capítulo 2, mostramos a teoria sobre o momento angular da luz. Mostrando que podemos dividir o momento angular da luz em duas componentes. Deduzimos as equações que representam o momento angular de spin e orbital. E por fim, fizemos uma analogia com a mecânica quântica.

No capítulo 3, iniciaremos pela equação paraxial de Helmholtz. Partindo da equação da onda, utilizando a aproximação paraxial e fazendo algumas consi-

derações chegamos na equação paraxial de Helmholtz. Em seguida, mostramos os feixes LG e suas características. Notamos que estes feixes são solução da equação paraxial de Helmholtz em coordenadas cilíndricas. Apresentamos a ótica de Fourier e suas aplicações. Mostramos também o processo de produzir imagens através da holografia.

No capítulo 4, discutimos os nossos resultados. Realizamos um estudo comparativo do fenômeno da difração da luz com MAO utilizando duas configurações diferentes de aberturas: quadrado e triângulo. Para nossa surpresa, com a configuração quadrada conseguimos medir a magnitude da CT duas vezes maior do que com a abertura triangular. Entretanto, o padrão quadrado não deu nenhuma informação com relação ao sinal da CT, diferentemente para a configuração triangular que conseguimos determinar o sinal da CT. Esta pesquisa está organizada em duas partes: apresentamos um estudo teórico e experimental.

E finalizando com o capítulo 5, apresentamos nossa conclusão geral deste trabalho.

## 2

# MOMENTO ANGULAR DA LUZ

## 2.1 Introdução

Neste capítulo abordaremos apenas a teoria sobre o momento angular da luz. Mostraremos que podemos decompor o momento angular da luz em duas componentes: o momento angular intrínseco que por sua vez, pode ser considerado como momento angular de spin. O qual está relacionado aos estados de polarização da luz, e o momento angular orbital (MAO) ou momento angular extrínseco, presente em feixes que possuem uma dependência azimutal da forma  $e^{im\phi}$  na fase, que está associado ao campo transversal eletromagnético.

Iniciaremos a nossa discussão pelo momento angular da luz. Mostraremos que o MAO total para uma onda eletromagnética pode ser a soma do momento angular de spin mais o momento angular orbital. Deduziremos as equações que representam o momento angular de spin e orbital. Mostraremos que através de um feixe circularmente polarizado, tanto no sentido horário quanto no sentido anti-horário, obtemos momento angular de spin de  $\pm\hbar$  por fóton. Finalmente, veremos a analogia entre as razões do momento angular de spin e orbital por unidade de energia do feixe. Mostraremos as razões entre o momento angular de spin e a sua

energia e o momento angular de spin e o momento linear no ponto de vista clássico e quântico, e veremos que estas razões são iguais.

## 2.2 Momento Angular da Luz

O vetor de Poynting  $\mathbf{S}$ , expressa o fluxo de energia que é dado por [23]:

$$\mathbf{S}_{Poynting} = c^2 \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (2.1)$$

O vetor de Poynting é proporcional a densidade de momento linear, considerando o espaço livre [24].

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{\mathbf{S}_{Poynting}}{c^2}. \quad (2.2)$$

Integrando em todo espaço a equação acima, obtemos o momento linear total,

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \int (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dv. \quad (2.3)$$

Podemos relacionar a densidade de momento angular  $\mathbf{j}$  com a densidade de momento linear pela seguinte expressão [25],

$$\mathbf{j} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \quad (2.4)$$

Fazendo a substituição da equação (2.2) na equação (2.4), temos para a densidade de momento angular:

$$\mathbf{j} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \epsilon_0 (\mathbf{r} \times \mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (2.5)$$

As equações de Maxwell descreve o comportamento do campo eletromagnético [3]. No Sistema Internacional de Unidades, considerando um meio livre de cargas e correntes podemos escrever as equações diferenciais:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0. \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.9)$$

onde, temos o rotacional dos vetores  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , campo elétrico e magnético. Por outro lado, temos o divergente dos vetores  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{B}$ , deslocamento elétrico e indução magnética, respectivamente. Considerando um meio linear no espaço livre, as relações constitutivas são:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (2.10)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (2.11)$$

Sendo a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética no espaço livre escrito como,  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  respectivamente.

Como é do nosso conhecimento, o divergente do rotacional de um campo vetorial é nulo. Usando este resultado, podemos escrever o vetor indução magnética

$\mathbf{B}$  de uma outra maneira, sendo o rotacional de outro campo vetorial.

De acordo com a relação [26]

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0. \quad (2.12)$$

Portanto, podemos reescrever o vetor indução magnética em função do potencial vetor,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.13)$$

Utilizando a identidade  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$  [27] e fazendo a substituição da equação (2.13) na equação (2.5), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \epsilon_0 \mathbf{r} \times \left[ \sum_{j=1}^3 (E_j \nabla A_j) - (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{A} \right] \\ &= \epsilon_0 \left\{ \sum_{j=1}^3 E_j (\mathbf{r} \times \nabla) A_j - \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{A} \right\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde, o somatório em  $j$  representa as componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$  dos vetores.

Utilizando as identidades vetoriais [28, 29],

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \sum_{j=1}^3 \nabla_j (E_j \mathbf{r} \times \mathbf{A}) - \mathbf{r} \times \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{A} \times (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{r}. \quad (2.15)$$

$$(\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{E}. \quad (2.16)$$

Em seguida substituindo na equação (2.14), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \epsilon_0 \left\{ \sum_{j=1}^3 E_j (\mathbf{r} \times \nabla) A_j - \sum_{j=1}^3 \nabla_j (E_j \mathbf{r} \times \mathbf{A}) \right\} \\ &\quad - \epsilon_0 \{ \mathbf{r} \times \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{E} \times \mathbf{A} \}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Na ausência de cargas livres, temos pelas equações de Maxwell que  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ . Portanto, o terceiro termo da equação (2.17) se anula. Logo, expressamos a densidade de momento angular como,

$$\mathbf{j} = \varepsilon_0 \left\{ \sum_{j=1}^3 E_j (\mathbf{r} \times \nabla) A_j - \sum_{j=1}^3 \nabla_j (E_j \mathbf{r} \times \mathbf{A}) + \mathbf{E} \times \mathbf{A} \right\}. \quad (2.18)$$

Para obtermos o momento angular total, basta integrarmos em todo o espaço. Isto é,

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \int [E_j (\mathbf{r} \times \nabla) A_j] dv - \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \int [\nabla_j (E_j \mathbf{r} \times \mathbf{A})] dv \\ &+ \varepsilon_0 \int (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) dv. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Vamos aplicar o teorema da divergência [30], para o segundo termo do lado direito da equação (2.19),

$$\int [\nabla_j (E_j \mathbf{r} \times \mathbf{A})] dv = \oint E_j (\mathbf{r} \times \mathbf{A}) ds_j. \quad (2.20)$$

Quando  $r \rightarrow \infty$ , podemos considerar que o campo elétrico se anula. Com isso, temos que a integral de superfície na equação acima se anula. Assim, obtemos a expressão final do momento angular total para o campo eletromagnético,

$$\mathbf{J} = \varepsilon_0 \int (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) dv + \varepsilon_0 \sum_{j=1}^3 \int [E_j (\mathbf{r} \times \nabla) A_j] dv. \quad (2.21)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{S} + \mathbf{L}. \quad (2.22)$$

Notamos que a primeira parte da equação (2.22), é independente do sistema de coordenadas e representa o momento angular intrínseco, que é também chamado de momento angular de Spin. No entanto, a segunda parte possui essa dependência do sistema de coordenadas e representa o momento angular orbital.

## 2.3 Momento Angular de Spin

A expressão do campo elétrico de uma onda circularmente polarizada que se propaga na direção  $z$  é dada por [29],

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{x} \pm E_0 \sin(kz - \omega t) \hat{y}. \quad (2.23)$$

onde,  $E_0$  é a amplitude da onda,  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  são vetores unitários nas direções  $x$  e  $y$ ,  $\omega$  é frequência angular e  $k$  é o módulo do vetor de onda  $\mathbf{k}$ . Os sinais mais e menos do campo elétrico representam uma onda circularmente polarizada para direita e para esquerda respectivamente.

Considerando o espaço livre sem a presença de cargas e correntes elétricas, o potencial escalar  $\phi$  é nulo e usando este fato, podemos escrever a expressão para o campo elétrico como,

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2.24)$$

Portanto, o potencial vetor  $\mathbf{A}$  é expressado pela seguinte equação,

$$\mathbf{A} = -\int \mathbf{E} dt = \frac{E_0}{\omega} \sin(kz - \omega t) \hat{x} \pm \frac{E_0}{\omega} \cos(kz - \omega t) \hat{y}. \quad (2.25)$$

Assim, obtemos o momento angular do spin,

$$\mathbf{S} = \epsilon_0 \int (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) dv = \pm \frac{\epsilon_0 E_0^2}{\omega} \hat{z} \int dv. \quad (2.26)$$

Os estados de polarização, ou seja, se a onda é circularmente polarizada a direita ou à esquerda nos indica o sentido do momento angular de spin. Se a onda é polarizada linearmente o momento angular de spin se anula, devido a  $\mathbf{E} \times \mathbf{A} = 0$ .

A densidade de energia de uma onda eletromagnética é expressa por [31],

$$u = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}). \quad (2.27)$$

Considerando um meio linear e o espaço livre, podemos substituir as relações constitutivas na equação (2.27),

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (2.28)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (2.29)$$

Portanto, a densidade de energia fica,

$$u = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right). \quad (2.30)$$

Substituindo a equação (2.25) na equação (2.13), obtemos a expressão para o campo magnético,

$$\mathbf{B} = \frac{E_0 k}{\omega} \sin(kz - \omega t) \hat{x} \pm \frac{E_0 k}{\omega} \cos(kz - \omega t) \hat{y}. \quad (2.31)$$

Utilizando os resultados das equações (2.23) e (2.31) na equação (2.30), encontramos

$$u = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{\mu_0} \frac{k^2 E_0^2}{\omega^2} \right). \quad (2.32)$$

$$u = \epsilon_0 E_0^2. \quad (2.33)$$

Integrando sobre todo o espaço a densidade de energia, obtemos a energia total do feixe. Calculando a razão entre o momento angular de spin e a sua energia, temos

$$\frac{S_z}{U} = \pm \frac{\int \frac{\epsilon_0 E_0^2}{\omega} dv}{\int \epsilon_0 E_0^2 dv} = \pm \frac{1}{\omega}. \quad (2.34)$$

Vamos substituir as equações (2.23) e (2.31) na equação (2.2), obtemos a densidade de momento linear como,

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{\epsilon_0 E_0^2 k}{\omega} \hat{z}. \quad (2.35)$$

Agora que temos o momento angular de spin juntamente com a densidade de momento linear, podemos compará-los,

$$\frac{S_z}{P_z} = \pm \frac{\int \frac{\epsilon_0 E_0^2}{\omega} dv}{\int \frac{\epsilon_0 E_0^2 k}{\omega} dv} = \pm \frac{1}{k}. \quad (2.36)$$

Analisando os resultados das equações (2.34) e (2.36) podemos fazer uma conexão com a Mecânica Quântica. Isto é, ao encontrar a razão entre o spin do fóton ( $\pm\hbar$ ) e sua energia ( $\pm\hbar\omega$ ) e a razão entre o spin do fóton e seu momento linear ( $\hbar k$ ), sabemos que são resultados encontrados também na Mecânica Quântica.

No apêndice mostraremos esta conexão com a mecânica quântica, quantizando o campo eletromagnético.

## 2.4 Momento Angular Orbital

Iniciaremos a nossa discussão sobre o momento angular orbital. Para isso, vamos admitir um feixe de luz monocromática com polarização linear que é definido pelo potencial vetor a seguir,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}) \exp[i(kz - \omega t)] \hat{x}. \quad (2.37)$$

onde,  $\lambda$  é o comprimento de onda do feixe,  $\omega$  é a frequência angular,  $\hat{x}$  é o vetor unitário na direção do eixo  $x$ ,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  é o módulo do vetor de onda e finalmente  $u(\mathbf{r})$  é uma função complexa que descreve a distribuição de amplitude do feixe. Quando não existe fontes, ou seja, a ausência de cargas e correntes elétrica no espaço, podemos usar o calibre de Coulomb que é descrito por [3],

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (2.38)$$

Portanto, o potencial vetor na equação (2.37) satisfaz o calibre de Coulomb dado pela equação (2.38). Calculando a parte real dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  uma vez que eles são complexos, obtemos

$$\Re(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^* \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{B}^*). \quad (2.39)$$

Usando o vetor potencial dado pela equação (2.37), encontramos as expressões para o campo elétrico e magnético,

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = i\omega u(\mathbf{r}) \exp[i(kz - \omega t)] \hat{x}. \quad (2.40)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \left\{ \frac{\partial}{\partial z} [u(\mathbf{r}) \exp[i(kz - \omega t)]] \hat{y} - \frac{\partial}{\partial y} [u(\mathbf{r}) \exp[i(kz - \omega t)]] \hat{z} \right\}. \quad (2.41)$$

$$\mathbf{B} = \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + iku \right] \exp[i(kz - \omega t)] \hat{y} - \frac{\partial u}{\partial y} \exp[i(kz - \omega t)] \hat{z}. \quad (2.42)$$

Logo, podemos calcular os dois produtos vetoriais da expressão (2.39). Assim obtemos,

$$\mathbf{E}^* \times \mathbf{B} = -i\omega u^* \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{z} \right] + \omega k |u|^2 \hat{z}. \quad (2.43)$$

Como  $\frac{\partial u}{\partial x}$  é igual a zero, temos

$$\mathbf{E}^* \times \mathbf{B} = -i\omega u^* \nabla u + \omega k |u|^2 \hat{z}. \quad (2.44)$$

Semelhantemente, temos para o segundo termo da equação (2.39),

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B}^* = i\omega u \nabla u^* + \omega k |u|^2 \hat{z}. \quad (2.45)$$

Finalmente, obtemos a densidade de momento linear média do campo eletromagnético,

$$\mathbf{p} = \Re [\varepsilon_0 \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle] = \frac{\varepsilon_0}{2} (\mathbf{E}^* \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{B}^*) = \frac{i\omega\varepsilon_0}{2} (u \nabla u^* - u^* \nabla u) + \varepsilon_0 \omega k |u|^2 \hat{z}. \quad (2.46)$$

Podemos dizer que a equação anterior obtida é independente do sistema de coordenadas. Assim, em coordenadas cilíndricas o campo  $u$  que descreve a distribuição de amplitude do feixe é escrito como,

$$u(r, \phi, z) = u_0(r, z) \exp(i l \phi). \quad (2.47)$$

Sendo que esta equação obedece a aproximação paraxial [24]. Usando esta condição, podemos reescrever a densidade de momento linear como,

$$\mathbf{p} = \frac{i\omega\varepsilon_0}{2} \left( u_0 \frac{\partial u_0^*}{\partial r} - u_0^* \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) \hat{r} + \frac{l\varepsilon_0\omega}{r} |u_0|^2 \hat{\phi} + \varepsilon_0\omega k |u_0|^2 \hat{z}. \quad (2.48)$$

No qual,  $\hat{r}$ ,  $\hat{\phi}$  e  $\hat{z}$  são vetores unitários em coordenadas cilíndricas. Podemos relacionar a equação (2.48), com o vetor de Poynting dado pela expressão (2.2). Portanto,

$$\mathbf{S} = c^2 \left[ \frac{i\omega\varepsilon_0}{2} \left( u_0 \frac{\partial u_0^*}{\partial r} - u_0^* \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) \hat{r} + \frac{l\varepsilon_0\omega}{r} |u_0|^2 \hat{\phi} + \varepsilon_0\omega k |u_0|^2 \hat{z} \right]. \quad (2.49)$$

Esta equação descreve uma trajetória formando um helicóide ao longo da direção de propagação, sendo que a componente  $\hat{r}$  está associada com o espalhamento do feixe, a componente  $\hat{\phi}$  é a responsável pelo aparecimento do MAO na direção de propagação e a componente  $\hat{z}$  está associada com o momento linear na direção  $z$ .

Utilizando a equação  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , onde  $\mathbf{r}$  é o vetor posição em coordenadas cilíndricas dado por  $\mathbf{r} = r\hat{r} + z\hat{z}$  e  $\mathbf{p}$  é expresso pela equação (2.48). Assim, podemos calcular a densidade de momento angular,

$$\mathbf{L} = -\frac{l\varepsilon_0\omega z |u_0|^2}{r} \hat{r} + \frac{i\omega\varepsilon_0}{2} \left[ \left( u_0 \frac{\partial u_0^*}{\partial r} - u_0^* \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) z + 2ikr |u_0|^2 \right] \hat{\phi} + l\varepsilon_0\omega |u_0|^2 \hat{z}. \quad (2.50)$$

Se integrarmos  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{p}$  no perfil do feixe, obteremos apenas a componente paralela ao sentido de propagação. Pois as outras componentes são simétricas em relação ao eixo  $z$ . Sabemos que a densidade de energia é  $u = cp_z = \varepsilon_0 \omega^2 |u_0|^2$ , ou seja, o produto da velocidade da luz pela densidade do momento linear [35]. Portanto, o momento angular orbital por unidade de energia do feixe é dado por,

$$\frac{\mathbf{L}_z}{U} = \frac{\int l_z dv}{\int u dv} = \frac{\int l \varepsilon_0 \omega |u_0|^2 dv}{\int \varepsilon_0 \omega^2 |u_0|^2 dv} = \frac{l}{\omega}. \quad (2.51)$$

Calculando a razão entre as componentes  $z$  do momento angular orbital e o momento linear, obtemos

$$\frac{\mathbf{L}_z}{\mathbf{P}_z} = \frac{\int l_z dv}{\int p_z dv} = \frac{\int l \varepsilon_0 \omega |u_0|^2 dv}{\int \varepsilon_0 \omega k |u_0|^2 dv} = \frac{l}{k} = l \frac{\lambda}{2\pi}. \quad (2.52)$$

onde  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  é o número de onda.

Notamos que a equação (2.51) é semelhante à razão entre o momento angular de spin e sua energia dada pela equação (2.34). Devido a essa semelhança, um feixe polarizado linearmente com um termo de fase azimutal possui momento angular orbital de  $l$  por fóton. A comparação entre mecânica quântica e óptica paraxial sugere que tais feixes são autoestados do operador momento angular  $\mathbf{L}_z$  e transportam um momento angular orbital de  $l\hbar$  por fóton.

## 2.5 Conclusão

Neste capítulo abordamos a teoria do momento angular da luz. Mostramos que o momento angular de spin e o momento angular orbital são as duas contribuições do momento angular da luz total. Ou seja, podemos escrevê-lo como a soma das duas contribuições. Deduzimos as expressões que representam as duas componentes do momento angular da luz e analisamos cada uma separadamente.

# 3

## FEIXES LAGUERRE-GAUSS E ÓTICA DE FOURIER

### 3.1 Introdução

No capítulo anterior, analisamos a teoria do momento angular da luz e vimos que feixes que possuem uma dependência azimutal na fase da forma  $\exp(im\phi)$  transportam MAO. Neste capítulo, vamos utilizar a aproximação paraxial para chegarmos na equação paraxial de Helmholtz. Em seguida, estudamos os feixes LG que são uma classe de feixes que possuem MAO, o qual é solução da equação paraxial de Helmholtz em coordenadas cilíndricas.

Discutiremos brevemente sobre a difração da luz, mostrando os dois tipos de difração da luz. Os quais são difração de Fraunhofer e difração de Fresnel e para finalizar esta parte de difração, apresentaremos o padrão de difração por uma abertura retangular no regime de Fraunhofer.

Abordaremos alguns tópicos de ótica de Fourier utilizados em nosso trabalho.

## 3.2 Equação Paraxial de Helmholtz

Uma onda monocromática pode ser representada por [36]:

$$u(\mathbf{r}, t) = u_0(\mathbf{r}) \cos[\omega t + \phi(\mathbf{r})]. \quad (3.1)$$

onde  $u_0(\mathbf{r})$  é a amplitude,  $\phi(\mathbf{r})$  é a fase,  $\omega = 2\pi\nu$  é a frequência angular,  $\nu$  é a frequência e  $T = 1/\nu = 2\pi/\omega$  é o período. A amplitude e fase são geralmente dependentes da posição. Vamos reescrever a função real  $u(\mathbf{r}, t)$  na equação (3.1) em termos de uma função complexa,

$$U(\mathbf{r}, t) = u_0(\mathbf{r}) \exp[i\phi(\mathbf{r})] \exp(i\omega t). \quad (3.2)$$

De modo que,

$$u(\mathbf{r}, t) = \Re\{U(\mathbf{r}, t)\} = \frac{1}{2} [U(\mathbf{r}, t) + U^*(\mathbf{r}, t)]. \quad (3.3)$$

A equação (3.2) é conhecida como função de onda complexa e ela descreve a onda completamente. A função de onda na equação (3.3) é simplesmente a parte real. Tanto a função de onda  $u(\mathbf{r}, t)$  quanto a função de onda complexa  $U(\mathbf{r}, t)$  deve satisfazer a equação de onda,

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \quad (3.4)$$

Vamos reescrever a equação (3.2) como,

$$U(\mathbf{r}, t) = U_0(\mathbf{r}) \exp(i\omega t). \quad (3.5)$$

o termo independente do tempo na equação (3.5),  $U_0(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) \exp[i\phi(\mathbf{r})]$  é referido como a amplitude complexa da onda. A função de onda  $u(\mathbf{r}, t)$  na equação (3.3) está associada com a amplitude complexa pela seguinte equação,

$$u(\mathbf{r}, t) = \Re \{U(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)\} = \frac{1}{2} [U(\mathbf{r}) \exp(i\omega t) + U^*(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)]. \quad (3.6)$$

Em uma dada posição  $\mathbf{r}$ , a amplitude complexa  $U_0(\mathbf{r})$  é uma variável complexa cuja magnitude  $U_0(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r})$  é a amplitude da onda e cujo argumento é  $\arg \{U_0(\mathbf{r})\} = \phi(\mathbf{r})$  é a fase. O valor da função complexa  $U(\mathbf{r}, t)$  em  $t=0$  é a amplitude complexa  $U_0(\mathbf{r})$ .

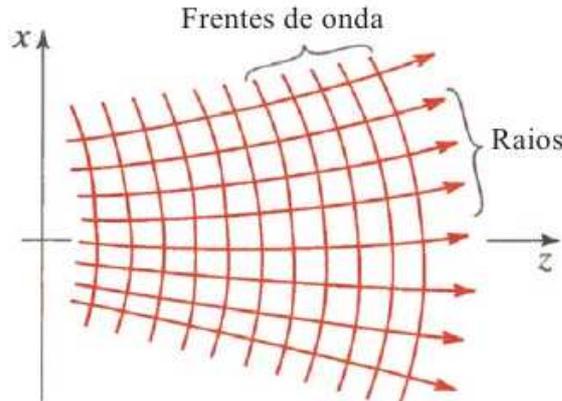
### 3.2.1 Ondas Paraxiais

Uma onda é dita ser paraxial se suas frentes de onda normais são raios paraxiais, como podemos ver na figura (3.1).

Podemos construir uma onda paraxial iniciando com uma onda plana  $A \exp(-ikz)$ , considerando como uma onda portadora e que modifica ou modula seu envelope complexo  $A$ , fazendo com que sua variação seja pequena em relação a posição  $A(\mathbf{r})$ . De modo que a amplitude complexa da onda modulada torna-se,

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp(-ikz). \quad (3.7)$$

Figura 3.1: Frentes de onda normal de uma onda paraxial no plano x-z.



Fonte: (Saleh [24], 2007)

A variação do envelope  $A(\mathbf{r})$  e sua derivada em relação à posição  $z$  deve ser pequena ao longo da distância do comprimento de onda  $\lambda = 2\pi/k$  de tal modo que a onda mantém aproximadamente sua natureza plana.

Agora, se fizermos a substituição da equação (3.5) na equação (3.4) obtemos a equação diferencial para a amplitude complexa  $U(\mathbf{r})$ ,

$$\nabla^2 U + k^2 U = 0. \quad (3.8)$$

a equação (3.8) é conhecida como equação de Helmholtz,  $k = \omega/c$  é o número de onda. Também conhecido como relação de dispersão.

De modo que para a onda paraxial descrita pela equação (3.7) satisfazer a equação de Helmholtz, o envelope complexo  $A(\mathbf{r})$  deve satisfazer outra equação diferencial parcial que é obtida quando substituimos a equação (3.7) na equação (3.8).

Quando assumimos que  $A(\mathbf{r})$  varia lentamente com relação a  $z$  significa que ao longo de uma distância  $\Delta z = \lambda$ , a mudança  $\Delta A$  é muito menor que  $A$ , ou seja,  $\Delta A \ll A$ . Usando a relação,

$$\Delta A = \frac{\partial A}{\partial z} \Delta z = \frac{\partial A}{\partial z} \lambda \quad (3.9)$$

segue que  $(\partial A / \partial z) \ll A / \lambda = Ak / 2\pi$ . Portanto,

$$\frac{\partial A}{\partial z} \ll kA. \quad (3.10)$$

A derivada  $(\partial A / \partial z)$  deve também variar lentamente ao longo da distância do comprimento de onda  $\lambda$ , assim  $(\partial^2 A / \partial^2 z) \ll k(\partial A / \partial z)$ , logo

$$\frac{\partial^2 A}{\partial^2 z} \ll k^2 A. \quad (3.11)$$

Substituindo a equação (3.7) na equação (3.8) e desprezando  $(\partial^2 A / \partial^2 z)$  em comparação com  $k(\partial A / \partial z)$  ou  $k^2 A$  obtemos a equação diferencial parcial para o envelope complexo  $A(\mathbf{r})$ ,

$$\nabla_{\perp}^2 A - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0. \quad (3.12)$$

onde  $\nabla_{\perp}^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ , é o operador Laplaciano transversal. A equação (3.12) é chamada a equação paraxial de Helmholtz.

### 3.3 Feixes Laguerre-Gauss

A equação paraxial de Helmholtz (3.8) escrita em coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$  possui como solução a amplitude complexa dos feixes Laguerre-Gauss que pode ser expresso da seguinte forma [24].

$$U_{m,p}(\rho, \phi, z) = A_{m,p} \left[ \frac{W_0}{W(z)} \right] \left( \frac{\rho}{W(z)} \right)^m L_p^m \left( \frac{2\rho^2}{W^2(z)} \right) \exp \left( -\frac{\rho^2}{W^2(z)} \right) \times \exp \left[ -ikz - ik\frac{\rho^2}{2R(z)} - im\phi + i(m+2p+1) \arctan \left( \frac{z}{z_0} \right) \right] \quad (3.13)$$

A equação (3.9) corresponde a um feixe propagando ao longo da direção  $z$ . Sendo  $p$  o índice radial, onde o número de anéis é representado por  $p+1$  [37], conforme podemos ver na figura (3.1). Sendo  $m$  o índice azimutal ou como definimos no capítulo 1 sendo a carga topológica (CT),  $L_p^m$  é o polinômio de Laguerre generalizado.  $W(z)$  é o raio do feixe,  $R(z)$  é o raio de curvatura da frente de onda, o termo  $(m+2p+1) \arctan \left( \frac{z}{z_0} \right)$  é a fase de Gouy do modo do feixe e  $W_0$  é a cintura do feixe. Os componentes  $W(z)$ ,  $R(z)$  e  $W_0$  são representados respectivamente por:

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2}. \quad (3.14)$$

$$R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \right]. \quad (3.15)$$

$$W_0 = \sqrt{\frac{z_0 \lambda}{\pi}}. \quad (3.16)$$

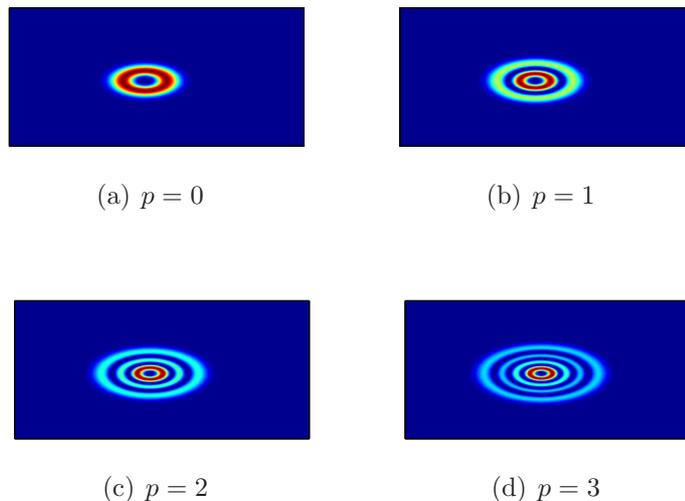
O comprimento de Rayleigh é dado por:

$$z_0 = \frac{W_0^2 \pi}{\lambda}. \quad (3.17)$$

As frentes de onda dos feixes LG possuem uma forma helicoidais, sendo que o número de espiras helicoidais é proporcional a  $m$ . Como podemos ver na figura (3.2). A distribuição de fase dos feixes LG é apresentada na figura (3.3). Observamos a presença de singularidade de fase. Esta singularidade ocorre no centro do padrão de distribuição de fase para qualquer valor de  $m$ , onde no centro a fase não é definida. A fase do feixe aumenta em módulo de  $2\pi$  para cada crescimento de  $m$ .

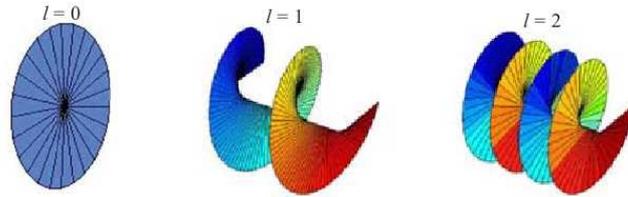
Para um modo LG com  $p = 0$  e valores de  $m \neq 0$ , o feixe LG possui um perfil de intensidade com a forma de um anel [38] conhecido como vórtice ótico. Este perfil de intensidade aumenta a medida que  $m$  aumenta, como podemos observar na figura (3.4)

Figura 3.2: Perfis de intensidade para o modo Laguerre-Gauss para uma CT  $m = 2$ . Variando  $p$ , a)  $p = 0$ , b)  $p = 1$ , c)  $p = 2$  e d)  $p = 3$



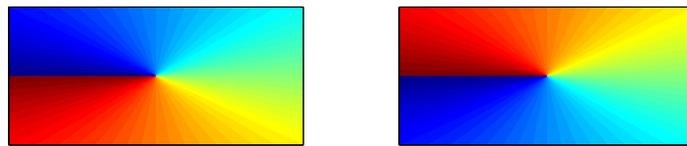
Fonte: (Autor, 2014)

Figura 3.3: Frente de onda dos feixes Laguerre-Gauss para  $m = 0, 1$  e  $2$



Fonte: (Pedro [40], 2011)

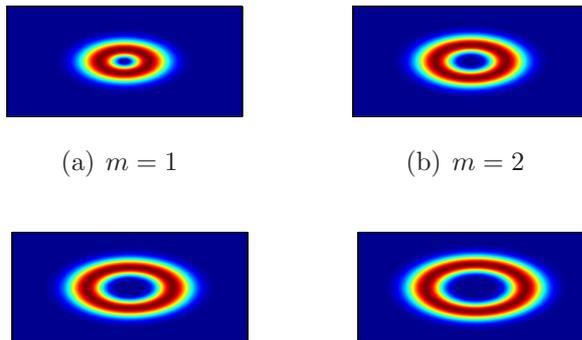
Figura 3.4: Distribuição de fase para um feixe Laguerre-Gauss com carga topológica  $m = 1, -1$



(a)  $m = 1$

(b)  $m = -1$

Figura 3.5: Perfis de intensidade para o modo Laguerre-Gauss para  $p = 0$ . Variando  $m$ , a)  $m = 1$ , b)  $m = 2$ , c)  $m = 3$  e d)  $m = 4$



(a)  $m = 1$

(b)  $m = 2$

(c)  $m = 3$

(d)  $m = 4$

Fonte: (Autor, 2014)

### 3.4 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é uma ferramenta matemática bastante útil para realizar uma mudança do espaço real  $(x, y)$  para o espaço recíproco  $(f_X, f_Y)$ , o qual é o espaço das frequências. Podemos representar a transformada de Fourier de uma função  $g(x, y)$  de duas variáveis independentes  $x$  e  $y$  por  $\mathcal{F}(g)$  [41]. Portanto, temos

$$\mathcal{F}(g) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \exp[-i2\pi(f_X x + f_Y y)] dx dy. \quad (3.18)$$

onde as funções  $f_X$  e  $f_Y$  são as frequências espaciais. Em geral, a função  $g(x, y)$  é complexa.

De forma análoga, podemos representar a transformada de Fourier inversa de uma função  $G(f_X, f_Y)$  por  $\mathcal{F}^{-1}(G)$  e expressar da seguinte forma,

$$\mathcal{F}^{-1}(G) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(f_X, f_Y) \exp[i2\pi(f_X x + f_Y y)] df_X df_Y. \quad (3.19)$$

A transformada de Fourier inversa pode ser referida como a representação integral de Fourier de uma função  $g(x, y)$ .

A definição da transformada de Fourier dada pela equação (3.18), nos conduz a uma rica estrutura matemática associada com a operação de transformação. A seguir, vamos considerar algumas das propriedades matemáticas básicas da transformação de Fourier:

**Teorema da Linearidade:** A transformação da soma ponderada de duas funções é igual a soma ponderada das transformações individuais.

$$\mathcal{F}\{\alpha g + \beta h\} = \alpha \mathcal{F}\{g\} + \beta \mathcal{F}\{h\}. \quad (3.20)$$

**Teorema do Deslocamento:** Se  $\mathcal{F}\{g(x, y)\} = G(f_X, f_Y)$ , então

$$\mathcal{F}\{g(x - a, y - b)\} = G(f_X, f_Y) \exp[-2\pi i (f_X a + f_Y b)]. \quad (3.21)$$

isto é, um deslocamento no domínio do espaço causa um deslocamento na fase linear no domínio da frequência.

**Teorema de Parseval:** Se  $\mathcal{F}\{g(x, y)\} = G(f_X, f_Y)$ , então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x, y)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |G(f_X, f_Y)|^2 df_X df_Y. \quad (3.22)$$

A integral no lado esquerdo, pode ser interpretada como a energia contida na forma de onda  $g(x, y)$ . Este fato, nos leva a ideia de que a quantidade  $|g(x, y)|$  pode ser interpretada como uma densidade de energia no domínio da frequência.

**Teorema da Convolução:** Se  $\mathcal{F}\{g(x, y)\} = G(f_X, f_Y)$  e  $\mathcal{F}\{h(x, y)\} = H(f_X, f_Y)$ , então

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta\right\} = G(f_X, f_Y) H(f_X, f_Y). \quad (3.23)$$

A convolução de duas funções no domínio do espaço é equivalente ao produto de suas transformações individuais.

Este teorema pode considerado como um caso especial do teorema da convolução. **Teorema da Autocorrelação:** Se  $\mathcal{F}\{g(x, y)\} = G(f_X, f_Y)$ , então

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, \eta) g^*(\xi - x, \eta - y) d\xi d\eta\right\} = |G(f_X, f_Y)|^2. \quad (3.24)$$

De forma semelhante, temos

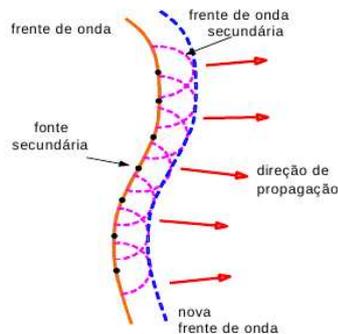
$$\mathcal{F}\{|g(x, y)|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi, \eta) G^*(\xi - f_X, \eta - f_Y) d\xi d\eta. \quad (3.25)$$

Em seguida, veremos que a transformada de Fourier é feita experimentalmente através das lentes.

### 3.5 Difração da Luz

O fenômeno da difração desempenha um papel importante nos ramos da física e da engenharia que lidam com a propagação da onda. O passo inicial na evolução da difração foi realizado por Christian Huygens no ano de 1678. Huygens estabeleceu o princípio no qual a propagação de uma onda de luz pode ser prevista se assumirmos que cada ponto da frente de onda atua como uma fonte de uma onda secundária que se propaga em todas as direções. O envelope que se forma em torno de todas as ondas secundárias é a nova frente de onda. A figura (3.6) mostra este conceito de Huygens.

Figura 3.6: Princípio de Huygens.



Fonte: (Sergio [42], 2009)

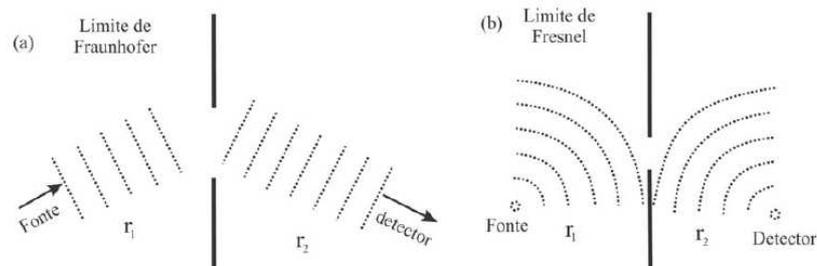
Em 1818, Fresnel fez suposições sobre a fase e amplitude das ondas secundárias de Huygens, permitindo que várias ondas interferissem mutuamente. Isto possibilitou calcular o padrão de difração da distribuição da luz com excelente precisão.

Em 1860 Maxwell deu a sua contribuição, identificando a luz como sendo onda eletromagnética. As ideias de Huygens e Fresnel foram colocadas em um firme fundamento matemático por Gustav Kirchhoff, ele mostrou que as amplitudes e fases atribuídas às fontes secundárias de Fresnel foram conseqüências diretas da natureza ondulatória da luz.

Podemos tratar dois casos de difração conhecidos como, difração de Fraunhofer e Fresnel. Qualitativamente falando, a difração de Fraunhofer ocorre quando as ondas incidente e difratada são efetivamente planas. Será o caso quando as distâncias da fonte para a abertura e da abertura para o detector são grandes o suficiente para as curvaturas das ondas incidente e difratada serem desprezadas, como mostra a figura 3.7 (a).

Por outro lado, se a fonte ou o detector está próximo o suficiente da abertura de modo que a curvatura da frente de onda é significativa temos a difração de Fresnel, como mostra a figura 3.7 (b).

Figura 3.7: Tipos de difração (a) Fraunhofer (b) Fresnel.



Fonte: (Fowles [43], 1989)

### 3.6 Princípio de Huygens-Fresnel

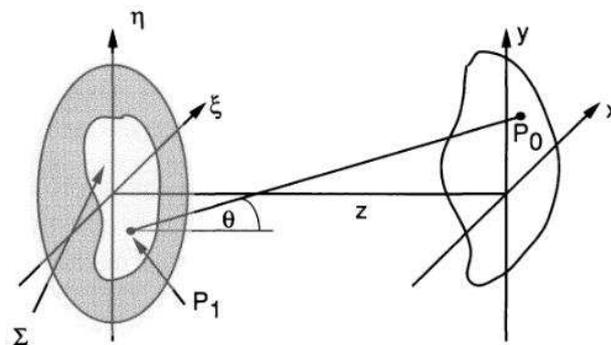
O princípio de Huygens-Fresnel é dado pela seguinte expressão [41],

$$U(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{\exp(ikr_1)}{r_1} \cos(\theta) ds. \quad (3.26)$$

onde  $\cos(\theta)$  representa o cosseno do ângulo entre o vetor normal externo  $\mathbf{n}$  e o vetor  $\mathbf{r}_1$  apontando de  $P_0$  para  $P_1$ . O campo observado  $U(P_0)$  é uma superposição das ondas esféricas  $\frac{\exp(ikr_1)}{r_1}$  provenientes de fontes secundárias localizadas em cada um dos pontos  $P_1$  dentro da abertura  $\Sigma$ .

Para exemplificar o que escrevemos acima juntamente com a equação (3.26), consideramos uma abertura no plano  $(\xi, \eta)$  sendo iluminada na direção positiva do eixo  $z$ . Calculando o campo de onda em todo plano  $(x, y)$ , o qual é paralelo ao plano  $(\xi, \eta)$ , como podemos observar na figura (3.8)

Figura 3.8: Geometria de difração.



Fonte: (Goodman [41], 1996)

Pela geometria da figura, o termo  $\cos(\theta)$  da equação (3.26) é dado por  $\cos(\theta) = z/r_1$ . Portanto, o princípio Huygens-Fresnel pode ser reescrito da seguinte forma,

$$U(x, y) = \frac{z}{i\lambda} \int \int_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{\exp(ikr_1)}{r_1^2} d\xi d\eta. \quad (3.27)$$

onde a distância  $r_1$  é dado por,

$$r_1 = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \quad (3.28)$$

Ressaltamos que as aproximações de Fraunhofer e Fresnel são obtidas a partir do princípio de Huygens-Fresnel, que vamos discutir nas próximas seções. No entanto, em nosso trabalho utilizamos apenas a aproximação de Fraunhofer.

### 3.7 Aproximação de Fresnel

Vamos expressar o princípio de Huygens-Fresnel de uma forma mais simples, introduzindo aproximações para a distância  $r_1$  entre  $P_1$  e  $P_0$ . As aproximações são baseadas na expansão binomial na equação (3.28). Seja  $b \ll 1$  e considerando a raiz quadrada  $\sqrt{1+b}$ . A expansão binomial da raiz quadrada é dada por [44],

$$\sqrt{1+b} = 1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{8}b^2 + \dots \quad |b| < 1. \quad (3.29)$$

Antes de aplicar a expansão binomial na equação (3.28), vamos retirar o fator  $z$  da raiz quadrada,

$$r_1 = z \sqrt{1 + \left(\frac{x - \xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{y - \eta}{z}\right)^2}. \quad (3.30)$$

Aplicando a expansão binomial aos dois primeiros termos da equação acima, obtemos

$$r_1 \approx z \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x - \xi}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{y - \eta}{z} \right)^2 \right]. \quad (3.31)$$

Substituindo a equação (3.31) na equação (3.26), encontramos o campo de onda no plano  $(x, y)$ .

$$U(x, y) = \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \exp \left\{ \frac{ik}{2z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right\} d\xi d\eta. \quad (3.32)$$

Podemos obter o resultado da equação (3.32), colocando o termo  $\exp \left[ \frac{ik}{2z} (x^2 + y^2) \right]$  do integrando,

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{\exp(ikz)}{i\lambda z} \exp \left[ \frac{ik}{2z} (x^2 + y^2) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ U(\xi, \eta) \exp \left[ \frac{ik}{2z} (\xi^2 + \eta^2) \right] \right\} \\ &\times \exp \left[ -\frac{2\pi i}{\lambda z} (x\xi + y\eta) \right] d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Observando na equação (3.33), temos uma transformada de Fourier do produto entre o campo de onda da abertura e uma fase exponencial quadrática. Os resultados das equações que foram apresentados (3.33) e (3.32) são conhecidos como integral de difração de Fresnel. Quando esta aproximação é válida, o observador é dito está na região de difração de Fresnel ou equivalentemente no campo próximo da abertura [41].

### 3.8 Aproximação de Fraunhofer

Quando os padrões de difração são obtidos utilizando uma fonte de luz e uma tela, afastadas a uma distância suficientemente grande da abertura obtém-se o que chamamos de difração de Fraunhofer.

Vamos considerar a seguinte aproximação,

$$z \gg \frac{k(\xi^2 + \eta^2)_{max}}{2}. \quad (3.34)$$

Se esta aproximação for satisfeita, o termo de fase quadrático na equação (3.33) vale aproximadamente 1 sobre a abertura, e encontramos a distribuição de campo diretamente a partir da transformada de Fourier da distribuição da abertura.

Assim a região de difração de Fraunhofer fica,

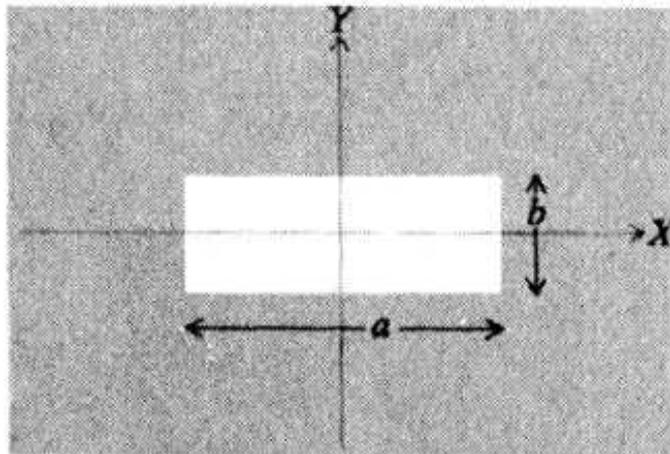
$$U(x, y) = \frac{\exp(ikz) \exp \frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)}{i\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \exp \left[ -\frac{2\pi i}{\lambda z}(x\xi + y\eta) \right] d\xi d\eta. \quad (3.35)$$

Sem levar em consideração os termos que estão fora da integral, a equação (3.35) expressa a transformada de Fourier da distribuição da abertura, podendo ser calculada utilizando o espaço das frequências  $f_X = x/\lambda z$  e  $f_Y = y/\lambda z$ .

### 3.9 Padrão por uma abertura retangular

Para um padrão de Fraunhofer por uma abertura retangular podemos tratá-la como uma única fenda. No entanto, devemos integrar em duas dimensões  $x$  e  $y$  como mostra a figura (3.9).

Figura 3.9: Abertura retangular.



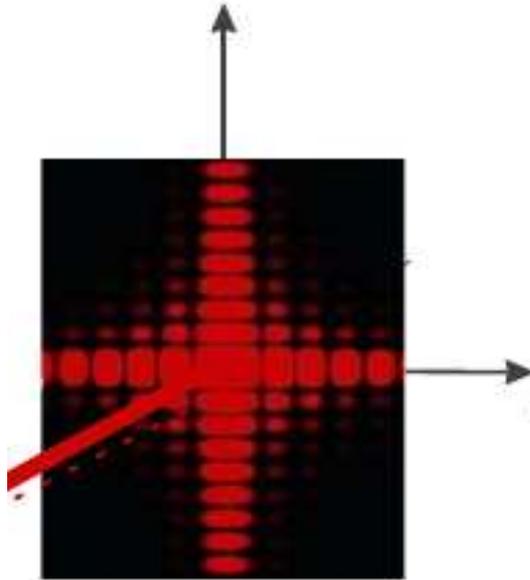
Fonte: (Fowles [43], 1989)

Cuja intensidade de difração é dado pela seguinte expressão [43]

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2. \quad (3.36)$$

onde  $\alpha = \frac{1}{2}ka \sin \phi$ ,  $\beta = \frac{1}{2}kb \sin \theta$ . As dimensões da abertura são  $a$  e  $b$  e os ângulos  $\phi$  e  $\theta$  definem a direção do raio difratado. O padrão de difração desta abertura é mostrado na figura (3.10).

Figura 3.10: Padrão de Fraunhofer por uma abertura retangular.



Fonte: (Saleh [24], 2007)

### 3.10 Transformada de Fourier por Lentes

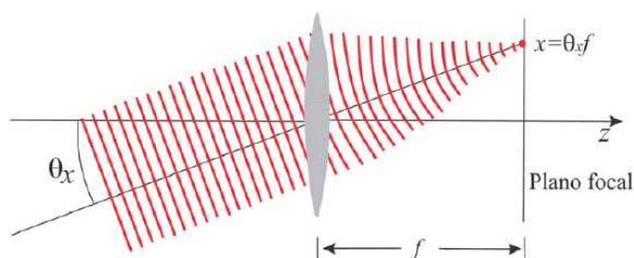
Uma das mais úteis propriedades das lentes é a capacidade de realizar a transformada de Fourier em duas dimensões. Esta operação pode ser desempenhada com uma simplicidade extrema em um sistema óptico coerente, fazendo proveito das leis básicas da propagação e difração da luz.

Descrevemos algumas configurações do desempenho da transformada de Fourier. O campo é introduzido através do uso de lentes que executam a transformada de Fourier no sistema óptico. No plano focal dessa lente situado a uma distância  $f$  encontra-se um dispositivo ou tela que contém uma amplitude de transmitância.

Os componentes das ondas planas que a constituem podem ser separadas

pelo uso de uma lente. Uma fina lente esférica transforma uma onda plana em uma onda parabólica focada para um ponto no plano focal da lente. Se a onda plana chega com ângulos pequenos  $\theta_x$  e  $\theta_y$ , ondas parabólicas são centradas sobre o ponto  $(\theta_x f, \theta_y f)$  onde  $f$  é o comprimento focal. Vejamos a figura (3.11).

Figura 3.11: Focalizando uma onda plana em um ponto usando uma lente. A direção  $(\theta_x, \theta_y)$  é mapeada sobre o ponto  $(x, y) = (\theta_x f, \theta_y f)$ .



Fonte: (Saleh [24], 2007)

Em referência a sistemas ópticos, vamos adotar que a luz é decomposta em várias ondas planas, conforme a figura (3.11). Onde  $(x, y)$  é a amplitude complexa da onda óptica no plano  $z = 0$  e percorre uma direção formada com pequenos ângulos  $\theta_x = \lambda\nu_x$  e  $\theta_y = \lambda\nu_y$  em relação ao eixo  $z$  onde possui uma amplitude complexa proporcional a transformada de Fourier  $F(\nu_x, \nu_y)$ .

Estas ondas são focalizadas pelas lentes dentro do ponto  $(x, y)$  no plano focal, onde  $x = \theta f = \lambda\nu_x f$  e  $y = \theta_y f = \lambda\nu_y f$ . A amplitude complexa para o ponto  $(x, y)$  na saída do plano é portanto proporcional à transformada de Fourier de  $f(x, y)$  calculada em  $\nu_x = x/\lambda f$  e  $\nu_y = y/\lambda f$  de modo que,

$$g(x, y) \propto F\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right) \quad (3.37)$$

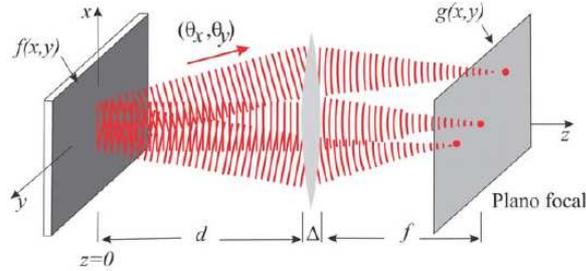
Para determinar o fator de proporcionalidade na equação (3.37) analisamos a função entrada  $f(x, y)$  dentro das componentes de Fourier e traçamos as ondas

planas correspondentes para cada componente através do sistema óptico. Então superpomos as contribuições destas ondas no plano de saída para obtermos  $g(x, y)$ . Assumindo que estas ondas são paraxiais e usando a aproximação de Fresnel, obtemos

$$g(x, y) = h_l \exp \left[ i\pi \frac{(x^2 + y^2)(d - f)}{\lambda f^2} \right] F \left( \frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f} \right). \quad (3.38)$$

onde  $h_l = H_0 h_0 = (i/\lambda f) \exp[-ik(d + f)]$ . Desta forma, os coeficientes de propor-

Figura 3.12: Focos de ondas planas associadas com componentes harmônicos de Fourier da função  $f(x, y)$  dentro de pontos no plano focal.



Fonte: (Saleh [24], 2007)

cionalidade na equação (3.37) possui um o fator de fase que é a função quadrática de  $x$  e  $y$  na equação (3.38). Desde que,  $|h_l| = 1/\lambda f$  resultando a partir da equação (3.38) que a intensidade ótica no plano de saída será,

$$I(x, y) = \frac{1}{(\lambda f)^2} \left| F \left( \frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f} \right) \right|^2. \quad (3.39)$$

A intensidade da luz para o plano de saída (plano focal da lente) é portanto proporcional ao valor do quadrado absoluto da transformada de Fourier da amplitude complexa da onda no plano de entrada, sem levar em consideração a distância  $d$ . O termo de fase desaparece na equação (3.38) se  $d = f$  de modo que,

$$g(x, y) = h_l F \left( \frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f} \right). \quad (3.40)$$

onde  $h_l = (i/\lambda f) \exp(-i2kf)$ .

### 3.11 Holografia

A técnica da holografia se baseia no registro e reconstrução de ondas óticas. O holograma é uma transparência que contém os códigos gravados destas ondas óticas. Incluindo as características da amplitude e fase.

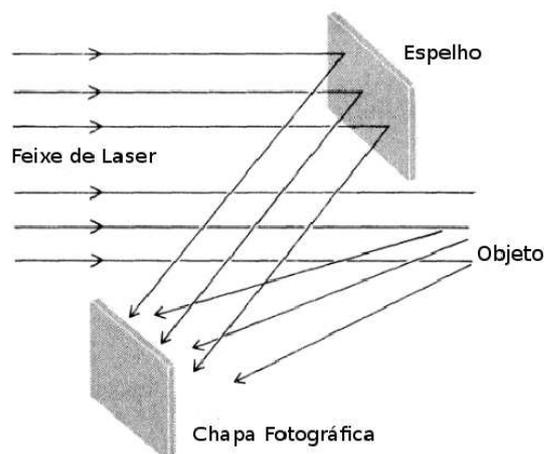
Um método interessante de produzir imagens, é conhecido como método da reconstrução da frente de onda. A ideia básica foi originalmente proposta por Garbor em 1947 [24]. Este método só ficou bem estabelecido após a invenção do laser, que possui uma fonte de luz coerente.

Neste método, uma grade especial de difração chamada de *holograma* é utilizada para reconstruir em detalhes o campo de onda emitido pelo objeto. Para construir o holograma o feixe de laser é separado em dois feixes, um deles ilumina o objeto e outro feixe que é chamado de feixe de referência é refletido sobre uma chapa fotográfica por meio de um espelho. A chapa fotográfica é exposta simultaneamente ao feixe de referência e a luz do laser refletida do objeto, como podemos observar na figura (3.13)

O padrão de interferência é gravado pela chapa que constitui um holograma, o qual carrega todas as informações que são necessárias para reproduzir o campo de onda do objeto. Utilizando o holograma, ele é iluminado com um único feixe de laser, como mostra a figura (3.14)

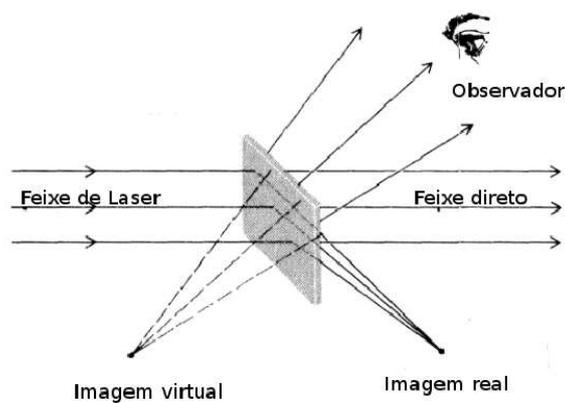
No intuito de simplificar a discussão da teoria de holografia, iremos assumir que o feixe de referência é colimado, isto é, consiste de ondas planas. Seja  $x$  e  $y$  as coordenadas no plano da chapa fotográfica e  $U(x, y)$  é a amplitude complexa da

Figura 3.13: Configuração para produzir um holograma.



Fonte: (Fowles [43], 1989)

Figura 3.14: Uso do holograma para produzir imagens real e virtual.



Fonte: (Fowles [43], 1989)

frente de onda refletida no plano  $xy$ . Desde que  $U(x, y)$  é um número complexo, podemos escreve-lo como,

$$U(x, y) = a(x, y) e^{i\phi(x, y)}. \quad (3.41)$$

onde  $a(x, y)$  é real.

De forma semelhante,  $U_0(x, y)$  denota a amplitude complexa do feixe referência. Uma vez que este feixe é plano, podemos escrever

$$U_0(x, y) = a_0(x, y) e^{i(\mu x + \nu y)}. \quad (3.42)$$

onde  $a_0$  é uma constante e  $\mu$  e  $\nu$  são as frequências espaciais do feixe referência no plano  $xy$ . Eles são dados por,

$$\mu = k \sin \alpha \quad \nu = k \sin \beta. \quad (3.43)$$

em que  $k$  é o número de onda da luz do laser, os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  especifica a direção do feixe referência.

O padrão de interferência  $I(x, y)$  registrado na chapa fotográfica é dado pela seguinte expressão,

$$\begin{aligned} I(x, y) &= |U + U_0|^2 = a^2 + a_0^2 + aa_0 e^{i[\phi(x, y) - \mu x - \nu y]} + aa_0 e^{-i[\phi(x, y) - \mu x - \nu y]} \\ &= a^2 + a_0^2 + 2aa_0 \cos [\phi(x, y) - \mu x - \nu y] \end{aligned} \quad (3.44)$$

Esta equação possui informação na forma de amplitude e modulação de fase das frequências espaciais do feixe referência. Quando o holograma é iluminado por um único feixe  $U_0$  semelhante ao feixe de referência, a onda transmitida resultante  $U_T$  é proporcional a  $U_0$  vezes a transmitância do holograma no ponto  $(x, y)$ , que é proporcional a  $I(x, y)$ . Assim, obtemos

$$\begin{aligned} U_T(x, y) &= U_0 I = a_0 (a^2 + a_0^2) e^{i(\mu x + \nu y)} + a_0^2 a e^{i\phi} + a_0^2 a e^{-i(\phi - 2\mu x - 2\nu y)} \\ &= (a^2 + a_0^2) U_0 + a_0^2 U + a^2 U^{-1} U_0^{-2} \end{aligned} \quad (3.45)$$

---

O holograma funciona como uma rede de difração. Ele produz um feixe direto e outros dois difratados de primeira ordem, para cada lado do holograma como vimos na figura (3.11). O termo  $(a^2 + a_0^2)U_0$  na equação acima compreende o feixe direto. O termo  $a_0^2U$  representa um dos feixes difratados.

Desde que ele é igual a uma constante vezes  $U$ , este feixe é um dos feixes que reproduz a luz refletida do objeto e forma uma imagem virtual. O último termo representa o outro feixe difratado e dá surgimento a uma imagem real.

## 3.12 Conclusão

Vimos a equação paraxial de Helmholtz que foi obtida utilizando a aproximação paraxial. Em seguida mostramos uma classe de feixes que possuem MAO que são os feixes LG, no qual os feixes LG são soluções da equação da equação paraxial de Helmholtz em coordenadas cilíndricas. Vimos também a medida que o índice radial  $p$  aumenta, o número de anéis também aumenta. Apresentamos o perfil de intensidade para os feixes LG e vimos que para uma CT  $m \neq 0$ , o padrão de intensidade possui uma forma anelar, evidenciando uma singularidade na distribuição de fase dos feixes LG. A frente de onda dos feixes LG possui uma forma de espiras helicoidais que são proporcionais a CT  $m$ .

Abordamos a transformada de Fourier e algumas propriedades. Mostramos o fenômeno da difração da luz e partindo do princípio de Huygens-Fresnel obtemos duas aproximações, que foram a aproximação de Fraunhofer e Fresnel. Em seguida, ilustramos o padrão de Fraunhofer por uma fenda retangular.

Finalizamos com a transformada de Fourier executada pelas lentes e discutimos sobre a holografia.

# 4

## DIFRAÇÃO DA LUZ POR ABERTURAS QUADRADAS E TRIANGULAR: UM ESTUDO COMPARATIVO

### 4.1 Introdução

Neste trabalho, utilizando a técnica de difração da luz possuindo momento angular orbital estudamos a formação de uma rede ótica quadrada e triangular. Demonstramos que é possível através da difração de Fraunhofer da luz por uma abertura quadrada obtermos momento angular orbital duas vezes maior do que seria com uma abertura triangular.

Observamos para o padrão de difração para abertura quadrada, que permanece truncado até a carga topológica igual a 20 com uma boa precisão. Realizamos um estudo comparativo tratando o problema de difração entre aberturas quadrada e triangular. Para nossa surpresa, com uma rede ótica formada pela abertura quadrada o valor da carga topológica obtido superou em duas vezes o valor máximo da carga topológica usando uma abertura triangular.

Por fim, apresentamos os resultados experimentais e teóricos e discutimos o aspecto do padrão formado pelos máximos de intensidade para cada abertura.

## 4.2 Redes Óticas pelas Aberturas Quadrada e Triangular com Luz Possuindo MAO

Feixes de luz possuindo momento angular orbital (MAO) são relacionados com uma fase azimutal da forma  $\exp(im\phi)$ , onde  $m$  é a carga topológica (CT). Esta fase é responsável pelo surgimento do momento angular orbital. Feixes Laguerre-Gauss (LG) [45] e Bessel [46] são exemplos de feixes carregando MAO.

Analisamos duas diferentes configurações de formação de rede ótica, a quadrada e triangular. Para simplificar nosso trabalho, usamos feixes LG cujo perfil transversal pode ser escrito como,

$$E_m = A\rho^m \exp(im\phi) \quad (4.1)$$

onde  $\rho$  e  $\phi$  são as coordenadas polares,  $A$  é uma constante de normalização e  $m$  é a (CT). A equação (4.1) foi obtida considerando  $z = 0$  na equação (3.13).

O nosso objetivo, é determinar o padrão de difração de Fraunhofer na região

do campo distante de um feixe transportando MAO espalhado, para tal utilizamos aberturas quadrada e triangular. O campo difratado é dado pela integral de Fraunhofer [41],

$$E_f(\mathbf{k}_\perp) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(\mathbf{r}_\perp) E_i(\mathbf{r}_\perp) e^{-i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp} d\mathbf{r}. \quad (4.2)$$

Esta integral nos dá a distribuição do campo distante do campo elétrico  $E_f$  como a transformada de Fourier do produto da função que descreve a abertura,  $\tau(\mathbf{r}_\perp)$  e o campo incidente  $E_i(\mathbf{r}_\perp)$ . Note que o vetor de onda transversal  $\mathbf{k}_\perp$  pode ser relacionado com as coordenadas de um ponto genérico no plano do campo distante desempenhando o papel de espaço recíproco.

Para a abertura quadrada, a integral da equação (4.2) pode ser calculada analiticamente. O campo no plano da abertura pode ser escrito como,

$$E_m = A\rho^m \exp(im\phi) = A(x \pm iy)^{|m|}. \quad (4.3)$$

onde escolhemos o sinal positivo para CT e o sinal negativo para CT.

A integral de difração de Fraunhofer para uma abertura quadrada pode ser escrita da seguinte forma,

$$E_{\pm|m|}(k_x, k_y) = A \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} (x \pm iy)^{|m|} \exp[-i(k_x x + k_y y)] dx dy. \quad (4.4)$$

onde  $a$  é o comprimento do lado da abertura quadrada.

Esta integral pode ser escrita como,

$$\begin{aligned}
 E_m(k_x, k_y) &= A \left( i \frac{\partial}{\partial k_x} - \frac{\partial}{\partial k_y} \right)^m \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \exp[-i(k_x x + k_y y)] dx dy \\
 &= A \left( i \frac{\partial}{\partial k_x} - \frac{\partial}{\partial k_y} \right)^m \frac{2 \sin(ak_x/2)}{k_x} \frac{2 \sin(ak_y/2)}{k_y}. \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

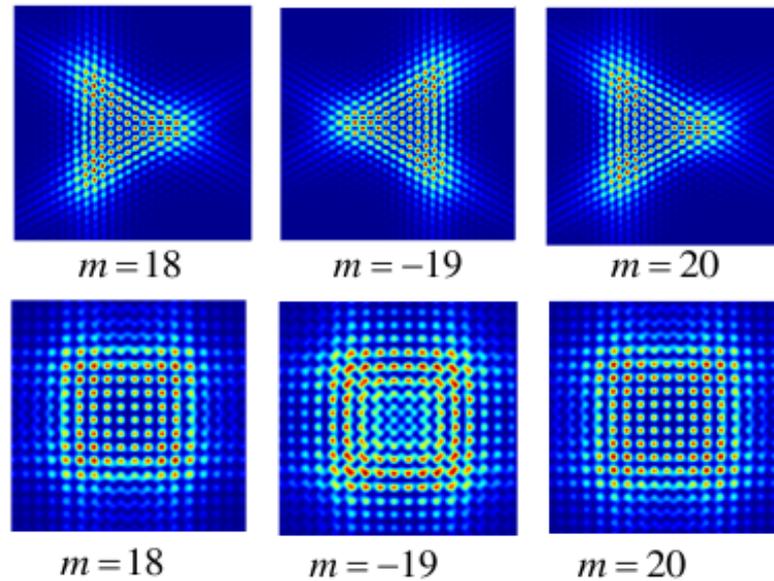
Logo, consideramos um sinal positivo para a CT. A equação (4.5) é um resultado analítico para a abertura quadrada considerando qualquer valor da CT. Um resultado analítico semelhante para uma abertura triangular não é possível. Pois, neste caso os limites de integração não são todos constantes. Entretanto, utilizamos numericamente a integral de difração de Fraunhofer para todos os resultados que apresentamos aqui.

Obtivemos os resultados teóricos para alguns valores da carga topológica que medimos, as quais foram  $m = 18, -19$  e  $20$ , como podemos ver na figura (4.1). Estes resultados foram obtidos utilizando a equação (4.2), na qual o campo incidente usado para a abertura quadrada foi dado pela equação (4.5) e no caso da abertura triangular, usamos os feixes Laguerre-Gauss. Claramente, não podemos definir qualquer lado externo da rede ótica triangular com  $N$  números de máximos de intensidade bem definidos a fim de obter o módulo da CT. Entretanto, esta abertura ainda pode ser usada para determinar o sinal da CT. O padrão obtido com o valor da CT negativo é girado por um ângulo de  $180^\circ$  comparando a uma CT positiva.

Não obstante, a abertura quadrada pode ser utilizada para determinar a magnitude da CT até  $m = 20$ .

Além disso, temos observado relações bem definida entre os valores da CT e o número de pontos em qualquer lado externo do padrão. Isto é,  $m = 2N - 2$  para valores pares de CT e  $m = 2N - 1$  para valores ímpares de CT. Podemos decidir,

Figura 4.1: Padrões de difração correspondente aos resultados da equação 4.2 para aberturas quadrada e triangular para  $m=18, -19$  e  $20$ .

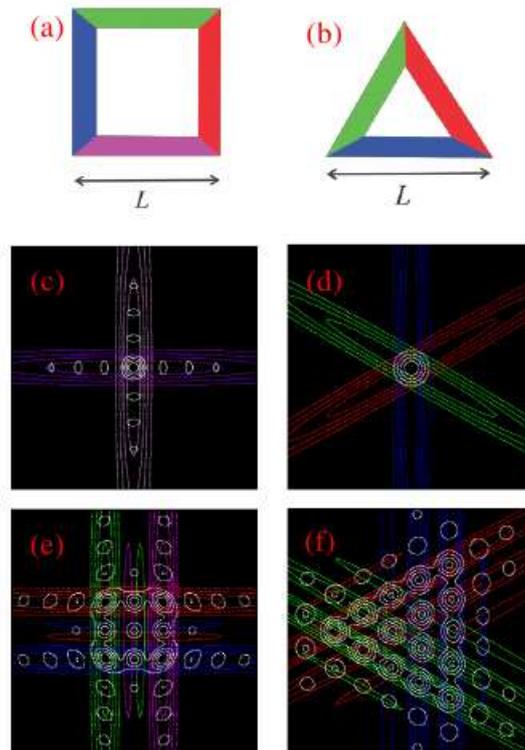


Fonte: (Silva [47], 2014)

se o padrão correspondente ao um valor par ou ímpar da CT observando a região central de cada padrão. Esta diferença na formação de um padrão de uma rede de máximos de intensidade foi explicado previamente por Mesquita e colaboradores [22].

Para obtermos uma melhor compreensão em relação aos resultados teóricos apresentados na figura (4.1). Sobreposmos o contorno dos padrões de difração de cada borda (contorno colorido) compondo as aberturas quadrada e triangular com o padrão de interferência do objeto inteiro ( contorno branco), como podemos ver na figura (4.2). Representações das aberturas quadrada e triangular, com comprimento de lados iguais são mostradas na figura (4.2)-(a) e (4.2)-(b) respectivamente, com cada borda sendo representada por uma cor diferente. De modo que, os contornos coloridos da figura 4.2 (c)-(f) representam os padrões difratados pelas respectivas bordas coloridas. Na figura 4.2 (c)-(d) nos mostra os contornos coloridos e brancos para  $m = 0$ .

Figura 4.2: Contorno dos padrões de difração para aberturas quadrada (coluna esquerda) e triangular (coluna direita) ilustrado em branco. Apresentamos também o contorno do padrão de difração para uma única borda sobreposto na mesma figura. A carga topológica para (c)-(d) é  $m = 0$  e para (e)-(f) é  $m = 4$ .



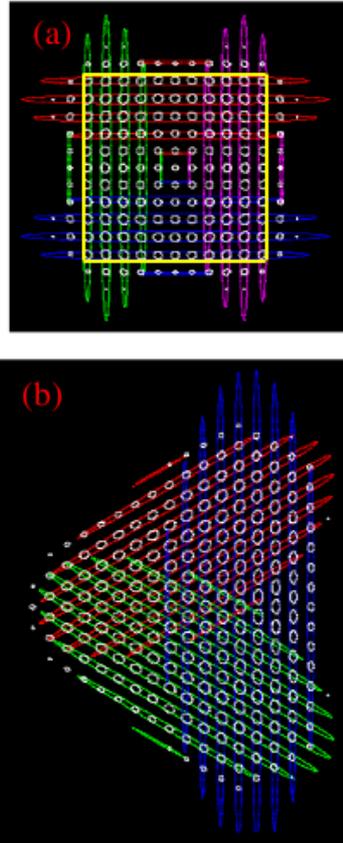
Fonte: (Silva [47], 2014)

Evidentemente, observamos um ponto brilhante no centro do padrão de interferência de intensidade. Este ponto coincide com a interseção do contorno colorido. A figura 4.2 (e)-(f) mostra o contorno colorido e branco para  $m = 4$ . Agora, cada padrão de cada borda é deslocado e este deslocamento é proporcional ao valor da CT [14]. Como uma consequência surgem vários pontos de interseção, estes pontos de interseção coincide com os máximos de interferência, de forma semelhante temos para  $m = 0$ . De fato, estes pontos de interseção definem a fronteira da rede ótica e eles são responsáveis pelo truncamento do padrão [14, 15]. Fisicamente, os picos de interferência surgem da impossibilidade de distinguir entre o caminho de fase e

a fase azimutal [48].

Por outro lado, observamos a figura (4.3) que mostra o contorno colorido e branco para uma CT  $m = 20$  utilizando aberturas quadrada e triangular. O quadrado amarelo ilustra a fronteira da rede ótica figura (4.3)-(a), que será a linha de máximos que deverá definir o valor da CT. Claramente, através da figura (4.3)-(a) que os máximos de interferência são bem formados para a abertura quadrada, que não é o caso para abertura triangular. Notamos que a simetria do quadrado nos permite ter mais pontos de interseção que a rede triangular. Para a rede ótica triangular, não é possível definir uma fronteira, como mostra a figura (4.3)-(b).

Figura 4.3: Contorno dos padrões de difração para aberturas quadrada (a) e triangular (b) mostrado em branco. Apresentamos também o contorno colorido do padrão de difração para uma única borda sobreposto na mesma figura. A carga topológica é  $m = 20$  para ambos os casos.



Fonte: (Silva [47], 2014)

É também interessante observarmos que o número de máximos de intensidade laterais no lado externo do padrão de difração triangular é  $N = m + 1$  e para o lado externo do padrão de difração do quadrangular é  $N = (m + 2)/2$  ou  $N = (m + 1)/2$ , para valores pares e ímpares da CT. Agora vamos considerar  $m \gg 1$  como consequência, as relações para o número de máximos de intensidade reduzirão para  $N \simeq m$  para abertura triangular e  $N \simeq m/2$  para abertura quadrada.

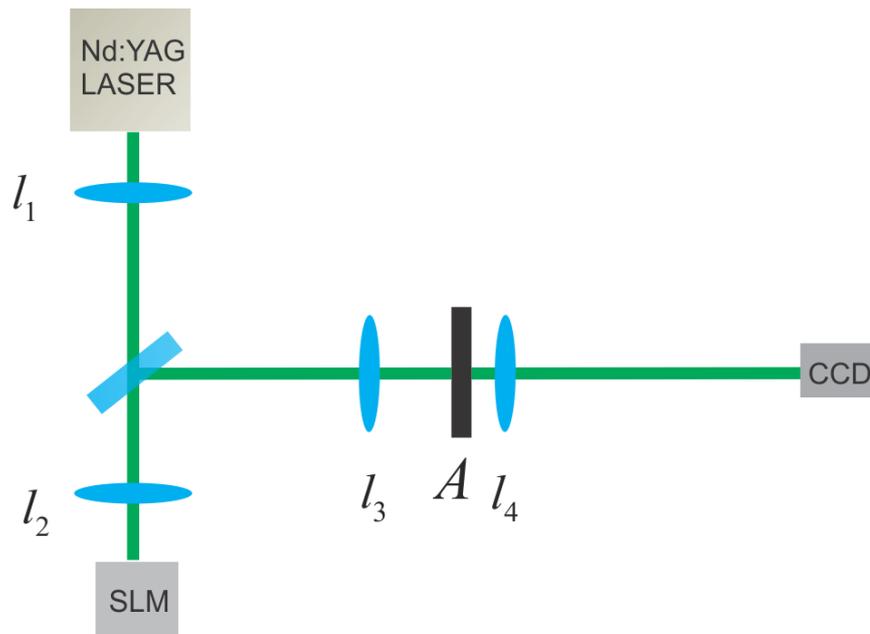
Do mesmo modo, o número total de pontos na rede quadrada para uma CT par ou ímpar é aproximadamente  $N^2 = (m + 2)^2/4 \gg m^2/4$  e para a rede triangular

é  $(m + 1)(m + 2)/2 \gg m^2/2$ . Desta forma, para o mesmo comprimento de lado das aberturas no espaço recíproco, a rede ótica possui mais pontos no padrão triangular que padrão quadrado. Portanto, observamos uma interessante relação entre estes dois padrões de difração poligonais regulares.

### 4.3 Aparato Experimental

O aparato experimental utilizado em nosso trabalho é mostrado esquematicamente na figura (4.4). Um laser Nd:YAG operando no comprimento de onda  $\lambda = 532nm$  iluminando um holograma gerado por computador e escrito em um modulador espacial de luz - Hamamatsu model X10468-01- spatial light modulator (SLM) e produzindo modos dos feixes Laguerre-Gauss de alta-ordem.

Figura 4.4: Aparato Experimental:  $A$  é uma abertura (triangular ou quadrada);  $l_i$  são as lentes e o SLM é o modulador espacial de luz.



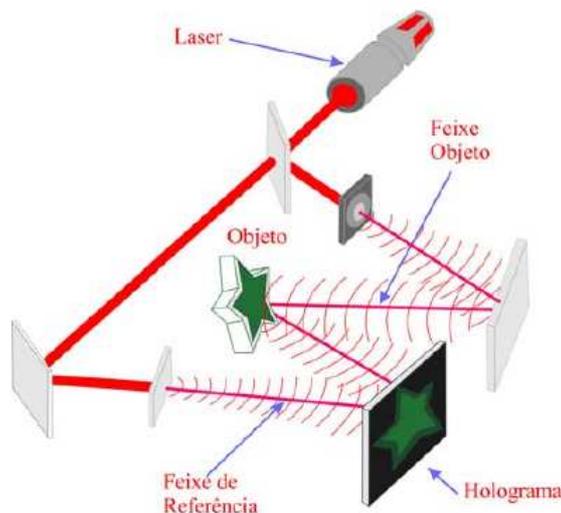
Fonte: (Silva [47], 2014)

Usamos máscaras com dois tipos de aberturas: quadrada e triangular. Estas aberturas podem ser sobrepostas sobre o feixe Laguerre-Gauss após a lente de foco  $l_3 = 200nm$ . O feixe ao interagir no plano de abertura, ocorre a operação da transformada de Fourier realizada pela lente de foco  $l_4 = 300nm$  e o padrão de difração é detectado por uma câmera (CCD) Charge Coupled Device.

## 4.4 Geração de Hologramas

A princípio temos duas formas diferentes de holografia, que são: a holografia clássica e a holografia computacional. A diferença entre estas duas formas de holografia está na forma aplicada para realizar o holograma especificamente. Para o caso da holografia clássica, as frentes de onda são registradas em um holograma usando a interferência como processo de gravação, ou seja, a interferência da onda referência com a onda objeto. A qual podemos observar na figura (4.5).

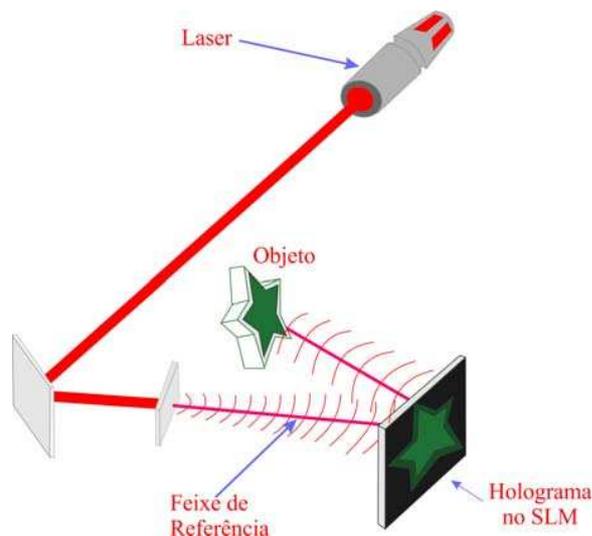
Figura 4.5: Holograma clássico.



Fonte: (Pedro1 [40], 2011)

Em relação à holografia computacional, o registro das frentes de onda são realizadas por meio de métodos computacionais fazendo uso do modulador espacial de luz (SLM) que executa o processo de construção do holograma, por meio da leitura de campos criados por meio de método computacional através dos hologramas gerados por computador, cuja sigla em inglês é CGH. Este processo da holografia utilizando o SLM, é mostrado na figura (4.6). Para as duas formas de holografia, sabemos que a reconstrução ótica das ondas registradas é obtida através da difração da luz, pelo fato de haver interferência das ondas objeto e referência [40].

Figura 4.6: Holograma computacional.



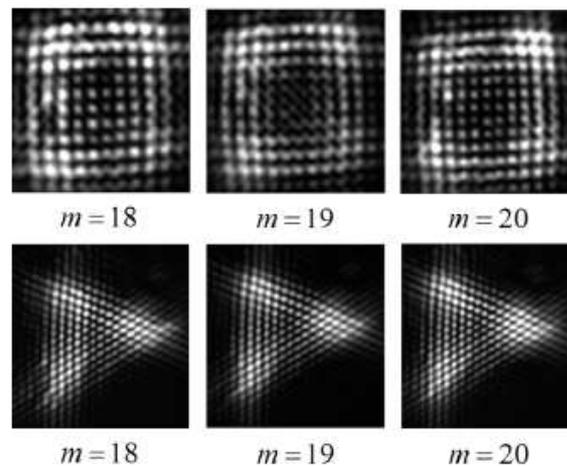
Fonte: (Pedro1 [40], 2011)

Para obtermos nossos hologramas, utilizamos a técnica computacional por meio dos CGHs. O SLM era utilizado para modular a fase e amplitude do holograma criado pelo computador. Em nosso caso, quando uma onda plana, por exemplo, um feixe que possuísse uma fase constante incidisse sobre o SLM, o holograma gerado por computador gerava um feixe de fase Laguerre-Gauss.

## 4.5 Resultados Experimentais

A figura (4.7) apresenta os resultados experimentais para os padrões de difração de Fraunhofer para aberturas quadrada e triangular. Os valores da CT usados foram  $m = 18, 19$  e  $20$ . Observamos que o padrão de difração por uma abertura triangular não revela a magnitude da CT, isto confirma os nossos resultados teóricos.

Figura 4.7: Resultados experimentais para os padrões de difração de Fraunhofer por aberturas quadrada (superior) e triangular (inferior).

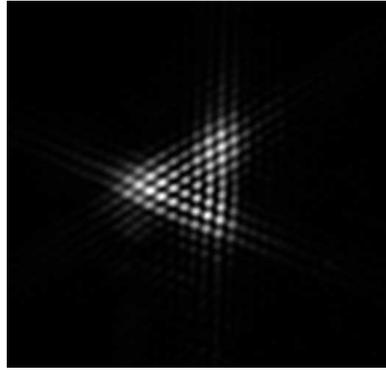


Fonte: (Silva [47], 2014)

A figura (4.8) mostra o padrão formado para a abertura triangular com uma CT igual a 10. Notamos que é possível medir a magnitude da CT, ao contrário do que vimos na figura (4.7) para valores da CT maiores que 10 que não foi possível medir a magnitude da CT.

No entanto, a abertura triangular pode ser utilizada para determinar o sinal da CT. Notavelmente, a abertura quadrada pode ser utilizada para determinar o módulo da CT, pelo menos até  $m = 20$ .

Figura 4.8: Resultado experimental para o padrão de difração de Fraunhofer por abertura triangular para uma carga topológica  $m = 10$ .



Fonte: (Autor, 2014)

## 4.6 Conclusões

Apresentamos um estudo comparativo do fenômeno da difração da luz possuindo MAO usando duas formas de aberturas, quadrada e triangular. Pela nossa observação no plano de Fraunhofer, mostramos que utilizando a abertura quadrada era possível medir o valor da carga topológica até a ordem 20. Este valor supera o módulo da CT que foi encontrado para abertura triangular, que foi igual a 10.

Pelo fato do quadrado possuir uma simetria, é possível construir uma rede ótica com pontos de interseção, resultando em máximos bem definidos de interferências. Estes pontos definem a fronteira da rede ótica, permitindo determinar a quantidade do momento angular orbital.

Percebemos que, apesar de a rede quadrada ótica não ser suficiente para encontrar o sinal da carga topológica, é possível medir as altas ordens do módulo e sinal da carga topológica, até 20, combinando padrões de aberturas quadrada e triangular.

É importante salientar que os valores máximos da carga topológica igual a

---

20 para a abertura quadrada, e 10 para a abertura triangular dependem do aparato experimental, ou seja, dependem da dimensão das aberturas quadrada e triangular. Especificamente, em nosso caso o padrão torna-se continuamente não bem formado para valores mais elevados da carga topológica do que os citados acima.

## 5

# CONCLUSÃO GERAL

Iniciamos nossa dissertação fazendo uma abordagem sobre o conceito de momento angular, mostramos que podemos dividi-lo em duas partes: o momento angular de spin e momento angular orbital. Vimos que os estados de polarização da luz estão relacionados com a primeira componente, já para a segunda componente mostramos que pertence a uma família de feixes que possuem uma fase azimutal da forma  $e^{im\phi}$ . Em seguida, deduzimos as equações que descrevem o momento angular e orbital e discutimos cada um.

No capítulo 3 mostramos que os feixes Laguerre-Gauss pertencem ao um grupo de feixes que transportam momento angular orbital. Pelo fato deles possuírem uma fase azimutal e também mostramos que a carga topológica está relacionada a esta fase. Mostramos o padrão de intensidade e frente de onda dos feixes Laguerre-Gauss para uma carga topológica  $m$  igual a 1. Apresentamos a equação paraxial de Helmholtz e vimos que os feixes Laguerre-Gauss são solução em coordenadas cilíndricas.

Tratamos das propriedades da ótica de Fourier, como o regime de difração de Fraunhofer que foi o tipo utilizado em nossa dissertação. Realizamos uma breve

apresentação da poderosa e útil ferramenta matemática, a transformada de Fourier. Ainda no regime de Fraunhofer, mostramos o padrão de difração através de um polígono. Como componente da base de nossa teoria, discutimos o fenômeno da difração da luz e mostramos a operação realizada pelas lentes que é a transformada de Fourier no plano da onda. Para finalizar esta etapa da nossa teoria, fizemos um estudo sobre o registro e a reconstrução de ondas óticas.

No capítulo 4 desta dissertação, tendo como parâmetro os trabalhos das referências [22, 15], resolvemos realizar um estudo comparativo dos padrões de difração da luz possuindo momento angular orbital através de figuras poligonais as quais foram: quadrado e triângulo. Nós detectamos que quando usávamos a abertura quadrada conseguíamos medir a carga topológica para valores do momento angular orbital de alta ordem, por exemplo, até a ordem 20. Já para a abertura triangular, o valor máximo que conseguimos medir para a carga topológica foi igual a 10. Para valores maiores que 10, a rede ótica triangular não ficava bem formada. Esta vantagem de utilizar a abertura quadrada e não a triangular para medir a carga topológica para valores altos, foi apresentado teoricamente e experimentalmente.

Através dos resultados teóricos, notamos que obtemos um fronteira que limita a rede ótica. Neste caso, esta linha que demarca a rede ótica, determina a magnitude da carga topológica. Esta característica de delimitar a rede ótica, mais uma vez ficou evidente que é bem formada para abertura quadrada. Fato que não observamos para a abertura triangular. Isto, se deve à simetria do quadrado que possui mais pontos de interseção do que o triângulo. Para valores da carga topológica  $m \gg 1$ , notamos uma redução das relações para o número de máximos de intensidade. De forma análoga, obtivemos as relações para o número total de pontos de ambas as redes óticas. Devido aos bons resultados obtidos, este trabalho já foi publicado.

# REFERÊNCIAS

- [1] FERREIRA, Q. S. **Difração de luz com momento angular orbital por uma fenda**. 2011. 95 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2011.
- [2] BETH, R. A. Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light. **Phys. Rev.** v. 50, p. 115, 1936.
- [3] JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics**. 3 ed. John Wiley, Nova York, 1999.
- [4] POYNTING, A. J. The Wave Motion of a Revolving Shaft, and a Suggestion as to the Angular Momentum in a Beam of Circularly Polarised Light. **Proc. R. Soc. Lond. A** v. 82, p. 560, 1909.
- [5] BETH, R. A. Direct detection of the angular momentum of light. **Phys. Rev.** v. 48, p. 471, 1935.
- [6] ALLEN, L. et al. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. **Phys. Rev. A** v. 45, p. 8185-8189, 1992.
- [7] O'NEIL, A. T. et al. Intrinsic and extrinsic nature of the orbital angular momentum of a light beam. **Phys. Rev. Lett.** v. 88, p. 53601, 2011.

- 
- [8] SOSKIN, M. S. et al. Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortices. **Phys. Rev. A** v. 56, p. 4064-4074, 1997.
- [9] COURTIAL, J. et al. Second-harmonic generation and the conservation of orbital angular momentum with high-order Laguerre-Gaussian modes. **Phys Rev A** v.56, p. 4193-4196, 1997.
- [10] MAIR, A. et al. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons. **Nature** v. 412, p. 313-316, 2001.
- [11] CAETANO, D. P. et al. Conservation of orbital angular momentum in stimulated down-conversion. **Phys. Rev. A** v. 66, 2002.
- [12] TABOSA, J. W. R.; PETROV, D. V. Optical pumping of orbital angular momentum of light in cold cesium atoms. **Phys Rev Lett** v. 83, p. 4967-4970, 1999.
- [13] CONDELL, W. J. Fraunhofer-Diffraction from a circular annular aperture with helical phase factor. **J Opt Soc Am A** v. 2, p. 206-208, 1985.
- [14] FERREIRA, Q. S. et al. Fraunhofer diffraction of light with orbital angular momentum by a slit. **Opt Lett** v. 36, p. 3106-3108, 2011.
- [15] HICKMANN, J. M. et al. Unveiling a truncated optical lattice associated with a triangular aperture using light's orbital angular momentum. **Phys Rev Lett** v. 105, 2010.
- [16] GRIER, D. G. A revolution in optical manipulation. **Nature** v. 424, p. 810-816, 2003.
- [17] MOLINA-TERRIZA, J. et al Twisted photons. **Nat. Phys.** v. 3, p. 305-310, 2007.

- 
- [18] VEISSIER, L. et al. Reversible optical memory for twisted photons. **Opt Lett** v. 38, p. 712-714, 2013.
- [19] BOZINOVIC, N. Terabit-scale orbital angular momentum mode division multiplexing in fibers. **Science** v. 340, p. 1545-1548, 2013.
- [20] D'AMBROSIO, V. Photonic polarization gears for ultra-sensitive angular measurements. **Nature communications** v. 4, 2013.
- [21] SCHULZE, C.; , DUDLEY, A. Sorting and quantifying orbital angular momentum of laser beams. **Applications of Lasers for Sensing and Free Space Communications (LSC)** 2013.
- [22] MESQUITA, P. H. F.; JESUS-SILVA Engineering a square truncated lattice with light's orbital angular momentum. **Opt Express** v. 19, p. 20616-20621, 2011.
- [23] BASSALO, J. M. F. **Eletrodinâmica clássica** 1 ed, 2007.
- [24] SALEH, B. E. A.; TEICH, M. C. **Fundamentals of Photonics**. 2 ed, Wiley, New York, 2007.
- [25] THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Classical dynamics of particles and systems** 5 ed, 2004.
- [26] GRIFFITHS, D. J. **Introduction to electrodynamics**, 3 ed, 1999.
- [27] REITZ, J. H.; MILFORD, F. J. **Foundations of eletromagnetic theory** 1 ed, 1982.
- [28] SILVA, W. C. S. **Representação geométrica de feixes não difratantes possuindo momento angular orbital**. 2006. 80 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Alagoas, Maceió, AL, 2006.

- 
- [29] FRENKEL, J. **Princípios de eletrodinâmica clássica**, 2 ed, 2005.
- [30] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. **Mathematical methods for physics** 7 ed, 2012.
- [31] MACHADO, K. D. **Teoria do Eletromagnetismo**, v. 3, 2006.
- [32] MANDEL, L.; WOLF, E **Optical coherence and quantum optics**. 1 ed, Cambridge University Press, 1995.
- [33] SILVA, A. J. J. **Tomografia de Qubits** 2007. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2007.
- [34] DE TOLEDO, A. F. R. **Mecânica Quântica** São Paulo, 2001.
- [35] ALLEN, L.; PADGETT, M. J. **Progress in Optics**. ed. E. Wolf, v. 39, p. 291-372, 1999.
- [36] YARIV, Amnon **Photonics optical electronics in modern communications** Oxford University Press, 2006.
- [37] TURNBULL, G.A. et al. The generation of free-space Laguerre-Gaussian modes at millimetre-wave frequencies by use of a spiral phaseplate. **Optics Communications** v. 127, p. 183-188, 1996.
- [38] GALVEZ, E. J. **Structured Light and its Applications**. Elsevier, p. 63-74, 2008.
- [39] SILVA, W. C. S. **Geração e Caracterização de Feixes Possuindo momento angular orbital**. 2011. 71 f. Tese (Doutorado em Física) - Universidade Federal de Alagoas, Maceió, AL, 2011.

- 
- [40] MESQUITA, P. H. F. **Construindo uma rede quadrada com momento angular orbital da luz**. 2011. 98 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Alagoas, Maceió, AL, 2011.
- [41] GOODMAN, J.W. **Introduction to Fourier Optics** 2 ed. McGraw-Hill, New York, 1996.
- [42] ZILO, S.C. **Optica Moderna: Fundamentos e aplicações** 1 ed. Compacta, 2009.
- [43] FOWLES, G. R. **Introduction to Modern Optics**, Dover Publications, New York, 1989.
- [44] WENTWORTH, S.M. **Eletromagnetismo aplicado: Abordagem antecipada das linhas de transmissão** Bookman, 2007
- [45] ZAUDERER, E. Complex argument Hermite-Gaussian and Laguerre-Gaussian beams. **J Opt Soc Am A** v. 3, p. 465-469, 1986.
- [46] DURNIN, J.; MICELI, J. J. Diffraction-free beams. **Phys. Rev. Lett.** v. 58, p. 1499-1501, 1987.
- [47] SILVA, J.G. et al. Unveiling square and triangular optical lattices: a comparative study. **Optics Letters.** v. 39, p. 949-952, 2014.
- [48] HICKMANN, J. M. et al. Born's rule and the interference of photons with orbital angular momentum by a triangular slit. **Europhys. Lett.** v. 96, 2011.

# Apêndice

## Quantização do Campo Eletromagnético

Das equações de Maxwell para o campo eletromagnético [32] no vácuo obtém-se (utilizando o calibre de Coulomb) a equação de onda,

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (5.1)$$

onde  $\mathbf{A}$  é o potencial vetor. A solução geral da equação de onda é,

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (5.2)$$

onde  $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}$  é a polarização e  $q(t)$  é a amplitude dos modos de vibração.

Podemos definir as seguintes relações de comutação para os operadores  $q_\lambda$  e  $p_\lambda$ ,

$$[\hat{q}_\lambda, \hat{p}_{\lambda'}] = i\hbar\delta_{\lambda,\lambda'}. \quad (5.3)$$

$$[\hat{q}_\lambda, \hat{q}_{\lambda'}] = [\hat{p}_\lambda, \hat{p}_{\lambda'}] = 0. \quad (5.4)$$

É conveniente fazer uma transformação canônica (que preserva as relações de comutação) para o operador  $\hat{a}_\lambda$ ,

$$\hat{a}_\lambda e^{-i\omega_\lambda t} = \frac{1}{\sqrt{2m_\lambda\hbar\omega_\lambda}} (m_\lambda\omega_\lambda\hat{q}_\lambda + i\hat{p}_\lambda). \quad (5.5)$$

Escrevendo o complexo conjugado da equação (2.41), obtemos

$$\hat{a}_{-\lambda}^\dagger e^{i\omega_\lambda t} = \frac{1}{\sqrt{2m_\lambda\hbar\omega_\lambda}} (m_\lambda\omega_\lambda\hat{q}_\lambda - i\hat{p}_\lambda). \quad (5.6)$$

onde foi utilizado  $\hat{q}_{-\lambda}^\dagger = \hat{q}_\lambda$  e  $\hat{p}_{-\lambda}^\dagger = \hat{p}_\lambda$ .

De forma semelhante,

$$\hat{q}_\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{2m_\lambda\omega_\lambda}} (\hat{a}_\lambda e^{-i\omega_\lambda t} + \hat{a}_{-\lambda}^\dagger e^{i\omega_\lambda t}). \quad (5.7)$$

$$\hat{p}_\lambda = -i\sqrt{\frac{m_\lambda\hbar\omega_\lambda}{2}} (\hat{a}_\lambda e^{-i\omega_\lambda t} - \hat{a}_{-\lambda}^\dagger e^{i\omega_\lambda t}). \quad (5.8)$$

Portanto, o potencial vetor é escrito como

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} \hat{\epsilon}_{\lambda} q_{\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ &= \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} \hat{\epsilon}_{\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2m_{\lambda}\omega_{\lambda}}} \left( \hat{a}_{\lambda} e^{-i\omega_{\lambda}t} + \hat{a}_{-\lambda}^{\dagger} e^{i\omega_{\lambda}t} \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

e fazendo  $m_{\lambda} = 1$ , obtemos

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\lambda}}} \hat{\epsilon}_{\lambda} \left( \hat{a}_{\lambda} e^{-i\omega_{\lambda}t} + \hat{a}_{-\lambda}^{\dagger} e^{i\omega_{\lambda}t} \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (5.10)$$

O Hamiltoniano pode ser escrito como a soma dos Hamiltonianos dos diferentes osciladores e os autovetores da energia do campo podem ser realizados em termos de produtos de autovetores dos osciladores individuais. Isso leva a um Hamiltoniano da forma

$$\hat{H} = \sum_{\lambda} \hbar\omega_{\lambda} \left( \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} \hat{a}_{\lambda} + \frac{1}{2} \right). \quad (5.11)$$

e aos autovetores e autovalores

$$|\{n_{\lambda}\}\rangle \equiv |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes \cdots \otimes |n_{\lambda}\rangle \otimes \quad (5.12)$$

$$E_{n_{\lambda}} = \sum_{\lambda} \hbar\omega_{\lambda} \left( n_{\lambda} + \frac{1}{2} \right) \quad (5.13)$$

Todos os autovalores contém uma soma divergente comum  $\sum_{\lambda} \hbar\omega_{\lambda}/2$ , que pode ser reconhecida como autovalor do estado no qual todos os  $n_{\lambda} = 0$ . Isto é,

do estado sem nenhum fóton. Para evitar a inconveniência dessa constante infinita correspondente à energia do estado de zero fótons (o vácuo), é conveniente e comum redefinir o zero da energia do campo como a energia do vácuo, o que equivale à eliminar as contribuições do ponto zero de todos os modos do campo. Redefinindo Hamiltoniano e os seus autovalores como,

$$\hat{H} \longrightarrow \sum_{\lambda} \hbar\omega_{\lambda} \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} \hat{a}_{\lambda}. \quad (5.14)$$

$$E_{n_{\lambda}} \longrightarrow \sum_{\lambda} \hbar\omega_{\lambda} n_{\lambda}. \quad (5.15)$$

O momento angular pode ser escrito como

$$\mathbf{J} = \frac{1}{8\pi c} \int dV \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \mathbf{E}). \quad (5.16)$$

Podemos escrever  $\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$  da seguinte forma [33],

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{E}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{B} \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{A}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E})(\nabla \times \mathbf{A}). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Podemos reescrever o segundo termo do lado direito da equação acima como,

$$\begin{aligned} -(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E})(\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) \times \mathbf{A} - \nabla \times [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{A}] \\ &= (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E} \times \mathbf{A} + \mathbf{E} \times \mathbf{A} - \nabla \times [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{A}]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

assim,

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{E} (\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{E} \times \mathbf{A} - \nabla \times [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{A}] + \mathbf{E} \times \mathbf{A}. \quad (5.19)$$

Os três primeiros termos da expressão (2.55) possui dependência explícita em  $r$  enquanto que o último não tem. A parte independente de  $r$  tem a seguinte contribuição para o momentum angular,

$$\hat{I} = \frac{1}{8\pi c} \int dV [\mathbf{E} \times \mathbf{A} + h.c.]. \quad (5.20)$$

Esta parte representa a contribuição das propriedades intrínsecas do campo ao momento angular total (spin do campo). Utilizando as definições

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} \hat{\epsilon}_{\lambda} q_{\lambda} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (5.21)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (5.22)$$

onde foi utilizado o fato de que  $\hat{p}_{-\lambda}^{\dagger} = \hat{p}_{\lambda}$  e  $\hat{p}_{\lambda}^{\dagger} = \hat{p}_{\lambda} \rightarrow \hat{p}_{-\lambda}^{\dagger} = \hat{p}_{\lambda}^{\dagger} \rightarrow \hat{p}_{-\lambda} = \hat{p}_{\lambda}$ . Portanto,

$$\mathbf{E} \times \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \frac{4\pi c^2}{V} \sum_{\lambda\lambda'} (\hat{\epsilon}_{\lambda} \times \hat{\epsilon}_{\lambda'}) \hat{p}_{-\lambda} q_{\lambda'} e^{i\mathbf{r}(\mathbf{k}+\mathbf{k}')}. \quad (5.23)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) dV &= -\frac{4\pi c}{V} \sum_{\lambda\lambda'} (\hat{\epsilon}_\lambda \times \hat{\epsilon}_{\lambda'}) \hat{p}_{-\lambda} q_{\lambda'} V \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \\
&= -4\pi c \sum_{\alpha\alpha'} \sum_{\mathbf{k}} (\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}\alpha} \times \hat{\epsilon}_{-\mathbf{k}\alpha'}) \hat{p}_{-\mathbf{k}\alpha} q_{-\mathbf{k}\alpha'}. \quad (5.24)
\end{aligned}$$

Notamos que o produto vetorial se anula se  $\alpha = \alpha'$ , logo

$$\int (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) dV = -4\pi c \sum_{\mathbf{k}} [(\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}1} \times \hat{\epsilon}_{-\mathbf{k}2}) \hat{p}_{-\mathbf{k}1} q_{-\mathbf{k}2} + (\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}2} \times \hat{\epsilon}_{-\mathbf{k}1}) \hat{p}_{-\mathbf{k}2} q_{-\mathbf{k}1}]. \quad (5.25)$$

no segundo termo trocando  $-\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}$ , temos

$$\begin{aligned}
\int (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) dV &= -4\pi c \sum_{\mathbf{k}} \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}1} \times \hat{\epsilon}_{-\mathbf{k}2} (\hat{p}_{-\mathbf{k}1} \hat{q}_{-\mathbf{k}2} - \hat{p}_{\mathbf{k}2} \hat{q}_{\mathbf{k}1}) \\
&= -4\pi c \sum_{\mathbf{k}} \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}1} \times \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}2} (\hat{p}_{-\mathbf{k}1} \hat{q}_{-\mathbf{k}2} - \hat{p}_{\mathbf{k}2} \hat{q}_{\mathbf{k}1}) \quad (5.26)
\end{aligned}$$

e no primeiro termo trocando-se  $-\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}$ , obtemos

$$\int (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) dV = -4\pi c \sum_{\mathbf{k}} \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}1} \times \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}2} (\hat{p}_{\mathbf{k}1} \hat{q}_{\mathbf{k}2} - \hat{p}_{\mathbf{k}2} \hat{q}_{\mathbf{k}1}) \quad (5.27)$$

Mas,

$$\begin{aligned} (\hat{p}_{\mathbf{k}1}\hat{q}_{\mathbf{k}2} - \hat{p}_{\mathbf{k}2}\hat{q}_{\mathbf{k}1}) &= -\frac{i\hbar}{2} (\hat{a}_{-\mathbf{k}1}e^{-i\omega t} + \hat{a}_{\mathbf{k}1}e^{i\omega t}) (\hat{a}_{\mathbf{k}2}e^{-i\omega t} + \hat{a}_{-\mathbf{k}2}e^{i\omega t}) \\ &- \frac{i\hbar}{2} (\hat{a}_{-\mathbf{k}2}e^{-i\omega t} + \hat{a}_{\mathbf{k}2}e^{i\omega t}) (\hat{a}_{\mathbf{k}1}e^{-i\omega t} + \hat{a}_{-\mathbf{k}1}e^{i\omega t}). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Portanto,

$$\int (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) dV = -4\pi i\hbar c \sum_{\mathbf{k}} (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}1} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}2}) \left( \hat{a}_{\mathbf{k}2}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}1} - \hat{a}_{\mathbf{k}1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}2} \right). \quad (5.29)$$

Agora podemos escrever

$$\hat{I} = \frac{1}{4\pi c} \int (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) dV = i\hbar \sum_{\mathbf{k}} \hat{k} \left( \hat{a}_{\mathbf{k}2}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}1} - \hat{a}_{\mathbf{k}1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}2} \right). \quad (5.30)$$

onde  $\hat{k} = \frac{\mathbf{k}}{k} = \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}1} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}2}$ .

Podemos diagonalizar  $\hat{I}$  por uma transformação canônica,

$$\hat{a}_{\mathbf{k}1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{b}_{\mathbf{k}1} + \hat{b}_{\mathbf{k}2}). \quad (5.31)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}2} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{b}_{\mathbf{k}1} - \hat{b}_{\mathbf{k}2}). \quad (5.32)$$

ou

$$\hat{b}_{\mathbf{k}1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{\mathbf{k}1} - i\hat{a}_{\mathbf{k}2}). \quad (5.33)$$

$$\hat{b}_{\mathbf{k}2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{\mathbf{k}1} + i\hat{a}_{\mathbf{k}2}). \quad (5.34)$$

Também temos,

$$\hat{a}_{\mathbf{k}1}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{b}_{\mathbf{k}1}^\dagger + \hat{b}_{\mathbf{k}2}^\dagger). \quad (5.35)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}2}^\dagger = -\frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{b}_{\mathbf{k}1}^\dagger - \hat{b}_{\mathbf{k}2}^\dagger). \quad (5.36)$$

ou

$$\hat{b}_{\mathbf{k}1}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{\mathbf{k}1}^\dagger + i\hat{a}_{\mathbf{k}2}^\dagger). \quad (5.37)$$

$$\hat{b}_{\mathbf{k}2}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{\mathbf{k}1}^\dagger - i\hat{a}_{\mathbf{k}2}^\dagger). \quad (5.38)$$

Portanto, o momento angular de spin pode ser expresso como,

$$\hat{I} = \hbar \sum_{\mathbf{k}} \hat{k} (\hat{b}_{\mathbf{k}1}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}1} - \hat{b}_{\mathbf{k}2}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}2}) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{I}_{\mathbf{k}}. \quad (5.39)$$

onde

$$\hat{I}_{\mathbf{k}} = \hbar \hat{k} (\hat{b}_{\mathbf{k}1}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}1} - \hat{b}_{\mathbf{k}2}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}2}). \quad (5.40)$$

A expressão (2.72) se refere a dois modos (cada um com uma polarização linear) e conta o número de fótons em cada modo.

De forma análoga, podemos escrever o momento linear quantizado como, [34]

$$\hat{\mathbf{P}} = \frac{i}{2} \sum_{\lambda} \mathbf{k} (\hat{p}_{-\lambda} \hat{q}_{-\lambda} - \hat{p}_{\lambda} \hat{q}_{\lambda}). \quad (5.41)$$

Os  $\hat{p}_\lambda$  e  $\hat{q}_\lambda$  podem ser escritos em termos dos operadores  $\hat{a}_\lambda$  e  $\hat{a}_\lambda^\dagger$  usando as relações (2.43) e (2.44) o que nos leva finalmente à expressão final para o momento linear

$$\hat{\mathbf{P}} = \sum_{\lambda} \hbar \mathbf{k} \left( \hat{a}_\lambda \hat{a}_\lambda + \frac{1}{2} \right) = \sum_{\lambda} \hbar \mathbf{k} \hat{a}_\lambda^\dagger \hat{a}_\lambda. \quad (5.42)$$

Como os operadores  $\hat{n} = \hat{a}_\lambda^\dagger \hat{a}_\lambda$  correspondem ao número de fótons em cada modo  $\lambda$ , a soma  $\sum_{\lambda} \hbar \mathbf{k}/2$  corresponde ao momento total do vácuo (estado de zero fótons). Foi tomada como sendo igual a zero.

Observamos que a razão entre as equações (2.75) e (2.51) para um modo com estados de polarização circularmente a direita e a esquerda equivale a  $\pm \frac{1}{\omega}$ . Da mesma forma, a razão entre (2.75) e (2.77) é igual a  $\pm \frac{1}{k}$ .

Portanto, estes resultados são iguais aos das equações clássicas em (2.34) e (2.36).

# Anexos

Artigo Publicado

# Unveiling square and triangular optical lattices: a comparative study

Juarez G. Silva,<sup>1</sup> Alcenísio J. Jesus-Silva,<sup>1</sup> Márcio A. R. C. Alencar,<sup>2,1</sup>  
Jandir M. Hickmann,<sup>3,1</sup> and Eduardo J. S. Fonseca<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>Optics and Materials Group—OPTMA, Universidade Federal de Alagoas, Caixa Postal 2051, Maceió, AL 57061-970, Brazil

<sup>2</sup>Departamento de Física, Universidade Federal de Sergipe, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Cidade Universitária Prof. José Aloísio de Campos, Rod. Marechal Rondon s/n, Jardim Rosa Elze, São Cristóvão, SE 57072-970, Brazil

<sup>3</sup>Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 91501-970, Porto Alegre, RS, Brazil

\*Corresponding author: [efonseca@optma.org](mailto:efonseca@optma.org)

Received October 28, 2013; revised January 7, 2014; accepted January 7, 2014;  
posted January 8, 2014 (Doc. ID 200301); published February 11, 2014

We study square and triangular optical lattice formation using a diffraction technique with light-possessing orbital angular momentum (OAM). We demonstrate that it is possible to use Fraunhofer diffraction of light by a square aperture to unveil OAM about two times bigger than would be possible with a triangular aperture. We notice that the pattern remains truncated until a topological charge (TC) equal to 20 with good precision. Even though a square pattern cannot be used to determine the TC sign, it is possible to measure high order of the modulus and sign of the TC up to 20, combining patterns of the triangular and square apertures. © 2014 Optical Society of America  
OCIS codes: (050.0050) Diffraction and gratings; (050.4865) Optical vortices; (050.1940) Diffraction; (050.1220) Apertures.

<http://dx.doi.org/10.1364/OL.39.000949>

Light beams with orbital angular momentum (OAM) are associated with an azimuthal phase structure  $\exp(im\phi)$ , where  $m$  is called topological charge (TC). This phase is responsible for rotating the Poynting vector. High-order Laguerre–Gauss (LG) [1] and high-order Bessel [2] beams are examples of beams carrying OAM.

Since the seminal work by Allen *et al.* [3], OAM have been extensively explored in light-matter interaction [4–7] and diffraction phenomena [8–10]. Other applications of light's OAM range from optical manipulation [11] to quantum communication [12,13]. Two recent publications show the importance of this subject applied to optical communications [14] and quantum metrology [15].

Particularly interesting is the rich relationship between the phase of light with OAM and diffraction phenomena [9,10,16–20]. This relationship was well explored by a very simple experiment performed by Hickmann *et al.* [10]. The basic idea is to observe the Fraunhofer pattern of a diffracted light with OAM by a triangular slit or triangular aperture with the phase singularity aligned on the center of these objects. A truncated triangular optical lattice in the Fraunhofer plane is observed. The size of this optical lattice depends on the amount of OAM, and by counting the number of intensity maxima  $N$  of any external side of the triangular lattice you can obtain the value of TC,  $m$ , using a very simple rule,  $m = N - 1$ . A simple way to understand the formation of this pattern is to observe the diffraction of light with OAM due to each edge of the aperture separately in Fraunhofer plane. Two points must be observed: firstly, the number of fringes due to each edge is proportional to the OAM value, and second, the effect of the azimuthal phase over this diffraction pattern produces a shift proportional to the amount of OAM. By interfering the light diffracted by the three edges, a triangular optical lattice is unveiled. In fact, in [9] the authors showed a detailed study of the diffraction problem of light with OAM by a single slit.

They considered two situations where the phase singularity of the light beam strikes on the center of and above a single slit. In the latter case, which is the case for one side of the triangular aperture, the patterns observed are asymmetric and shifted.

At this point a very simple question arises: What can we learn about diffracting OAM beam by other polygonal shapes? In [20], results of diffraction of light with OAM by a square aperture were presented. The authors showed numerically and experimentally that a perfect square optical intensity lattice takes place only for even values of the TC.

In this Letter, we show a comparative study of the diffraction problem of light with OAM between square and triangular shape. Surprisingly, with a square aperture the value of TC obtained outperforms for more than two times the maximum value of TC using a triangular aperture. We present experimental results, computer simulations, and a heuristic argument that explains this observation.

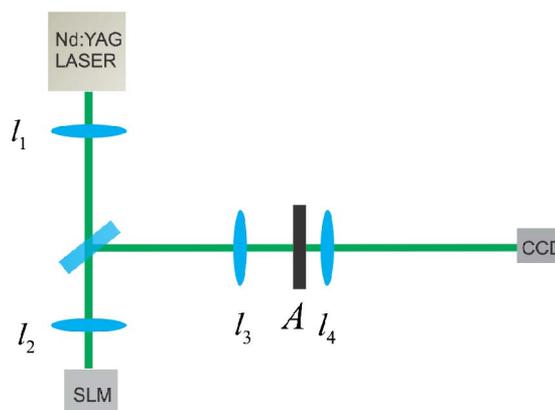


Fig. 1. Experimental setup:  $A$  is an aperture (triangular or square),  $l_i$  are lenses, and SLM is the spatial light modulator.

The experimental setup is shown schematically in Fig. 1. An Nd:YAG laser operating at 532 nm illuminates a computer generated hologram [21] with controllable pixels written in a Hamamatsu Model X10468-01 spatial light modulator (SLM) and produces high-order LG modes. A mask with a square or triangular aperture can be superimposed over the LG beam after lens  $l_3$ . The beam at the aperture plane is optically Fourier transformed by lens  $l_4$  and displayed in a charge coupled device (CCD) camera.

For simplicity, we have used LG beams of light whose transversal profile can be written as

$$E_m(\rho, \phi) = A\rho^m \exp(im\phi), \quad (1)$$

where  $\rho$  and  $\phi$  are the polar coordinates,  $A$  is a normalization constant, and  $m$  is the TC.

We want to determine the Fraunhofer diffraction pattern in the far field region of a beam carrying OAM scattered using a triangular or a square aperture. The diffracted field is given by a Fraunhofer integral [22]

$$E_f(\vec{k}_\perp) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(\vec{r}_\perp) E_i(\vec{r}_\perp) e^{-i\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}_\perp} d\vec{r}. \quad (2)$$

This integral gives the far field distribution of electrical field,  $E_f$ , as a Fourier transform of the product of the function describing an aperture,  $\tau$ , and the incident field,  $E_i$ . Note that the transverse wave vector  $\vec{k}_\perp$  can be associated with the coordinate of a generic point in the far field plane playing the role of reciprocal space. For a square aperture, this integral can be evaluated analytically.

The field at the aperture plane could be written as  $E = A\rho^m e^{im\phi} = A(x \pm iy)^{|m|}$ , where we choose the positive sign for positive TC and the negative sign for negative TC. The Fraunhofer diffraction integral for a square aperture becomes

$$E_{\pm|m|}(k_x, k_y) = A \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} (x \pm iy)^{|m|} \times \exp[-i(k_x x + k_y y)] dx dy, \quad (3)$$

where  $a$  is the length of the square aperture side. This integral can be written as

$$\begin{aligned} E_m(k_x, k_y) &= A \left( i \frac{\partial}{\partial k_x} - \frac{\partial}{\partial k_y} \right)^m \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \exp[-i(k_x x + k_y y)] dx dy \\ &= A \left( i \frac{\partial}{\partial k_x} - \frac{\partial}{\partial k_y} \right)^m \frac{2 \sin(ak_x/2)}{k_x} \frac{2 \sin(ak_y/2)}{k_y}, \end{aligned} \quad (4)$$

where we have considered a positive TC. Equation (4) is an analytical result for the diffraction pattern corresponding to any TC. A similar analytical result is not straightforward for a triangular aperture because in this case the integration limits are not all constants. Therefore, we use numerical Fraunhofer diffraction integral in all theoretical results we have presented here.

Figure 2 presents the theoretical results comprising some values of the TC that we have measured ( $m = 18, -19, \text{ and } 20$ ). Clearly, we cannot define any external side of the triangular optical lattice with  $N$  lobes well defined in order to obtain the TC modulus. However, it still can be used to determine the TC sign. The pattern obtained with negative TC value is rotated by  $180^\circ$  comparing to the positive one. Notwithstanding, the square aperture can be used to determine the TC modulus up to  $m = 20$ . In addition, we have noticed well-defined relations between the TC values and the number of spots in any external side of the pattern, namely,  $m = 2N - 2$  for even TC value and  $m = 2N - 1$  for odd TC value. It is possible to decide if the pattern corresponds to an even or odd value of the TC observing the central region of each pattern. This difference in the pattern formation have been explained previously [20].

In order to have a better understanding about the results presented in Fig. 2, we superimpose the contour plots of the diffraction pattern of each edge (colorful contour) composing the square and triangular apertures, with the interference pattern of whole object (white contour), see Fig. 3. Representations of the square and triangular apertures, of the same side length, are shown in Figs. 3(a) and 3(b), respectively, with each edge being represented by different color so that the colorful contours of Fig. 3(c)–3(f) represent the diffracted pattern by its respective colorful edge. Figures 3(c)–3(d) show the colorful and white contours for  $m = 0$ . It is evident as a bright point on the center of the intensity interference pattern. This point coincides with the intersection of the colorful contour. Figures 3(e)–3(f) show the colorful and white contours for  $m = 4$ . Now, each pattern from each edge is shifted, and this shift is proportional to TC value [9]. As a consequence, various intersection points emerge. These intersection points coincide with the maxima of interference, similarly for  $m = 0$ . In fact, these intersection points define the optical lattice boundary, and they are responsible for truncating the pattern [9,10]. Physically, the interference peaks come from the impossibility of distinguishing between path phase and azimuthal phase [23].

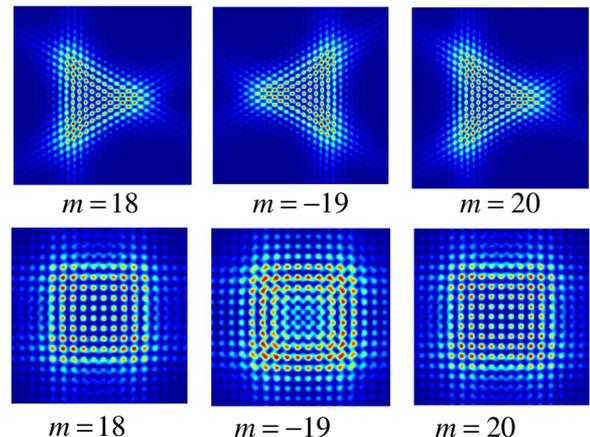


Fig. 2. Diffraction patterns corresponding to the numerical results of Eq. (2) for square and triangular apertures for  $m = 18, -19, \text{ and } 20$ .

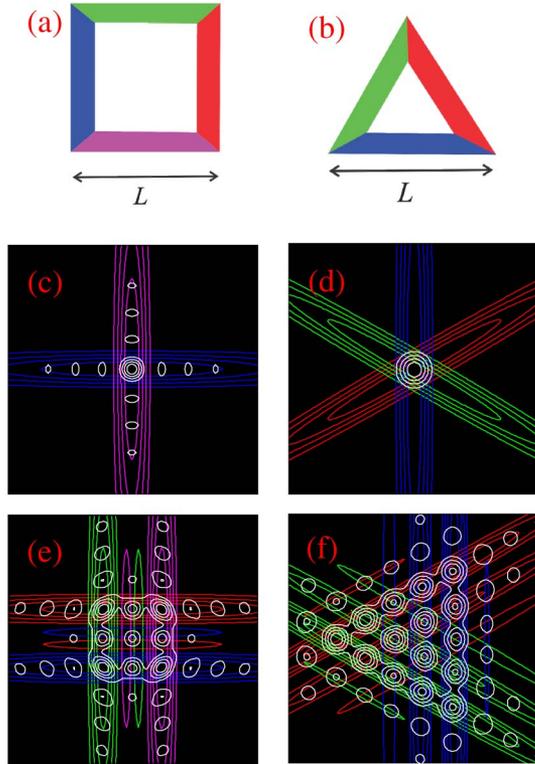


Fig. 3. Diffraction patterns contour plots for a square aperture (left column) and a triangular aperture (right column) shown in white. We also present colorful contour plots for single edges diffraction patterns superimposed in the same figure. The TC for (c) to (d) is  $m = 0$  and for (e) to (f) is  $m = 4$ .

Figure 4 shows colorful and white contours for  $m = 20$  for square and triangular apertures. The yellow square shows the optical lattices boundary [Fig. 4(a)], which will be the line of maximum that should define the TC value. It is clear, from Fig. 4, that the maxima of interference are well formed for the square aperture, which is not the case for the triangular aperture. Observe that the symmetry of square allows one to have more intersection points than the triangular lattice. For the latter case, it is not possible to define a boundary [Fig. 4(b)], which could define the TC value. It is also interesting to notice that the number of spots in the external side of the triangular diffraction pattern is  $N = m + 1$  and in the external side of the square diffraction pattern is  $N = (m + 2)/2$  or  $N = (m + 1)/2$ , for even or odd TC values, respectively. For  $m \gg 1$ , these relations reduce to  $N \simeq m$  (triangular aperture) and  $N \simeq m/2$  (square aperture). Similarly, the total number of points in the square lattice of odd TC is, roughly,  $N^2 = (m + 1)^2/4 \simeq m^2/4$  and for the triangular lattice is  $(m + 1)(m + 2)/2 \simeq m^2/2$ . This way, for the same side length of apertures, in the reciprocal space, the optical lattice has more points in the triangular pattern than in the square pattern. Therefore, we notice an interesting relation between these two regular polygonal diffractions patterns: We can measure the TC value using a triangular aperture up to  $m = 10$  and using a square aperture up to  $m = 20$ .

The experimental results are summarized in Fig. 5 for  $m = 18, 19$ , and  $20$ . The experimental results confirm our theoretical results, i.e., we observe that the triangular

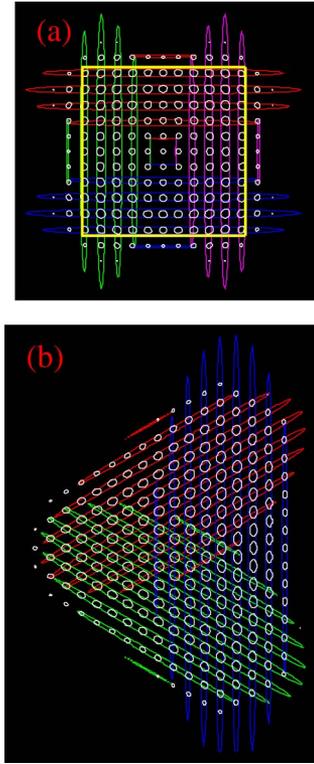


Fig. 4. Diffraction patterns contour plots for (a) square aperture and (b) triangular aperture shown in white. We also present colorful contour plots for single edges diffraction patterns superimposed in the same figure. The TC is  $m = 20$  for both cases.

aperture does not reveal the TC modulus. However, it still can be used to determine the TC sign. Remarkably, the square aperture can be used to determine the TC modulus, at least, up to  $m = 20$ .

In conclusion, we presented a comparative study of the diffraction problem of light with OAM using two apertures: square and triangle. By observing in the Fraunhofer plane, we showed that with the square aperture it is possible to measure up to 20 the value of TC. This value outperforms two times that obtained with the triangular aperture. Because of symmetry of square, it is possible to build an optical lattice with intersection

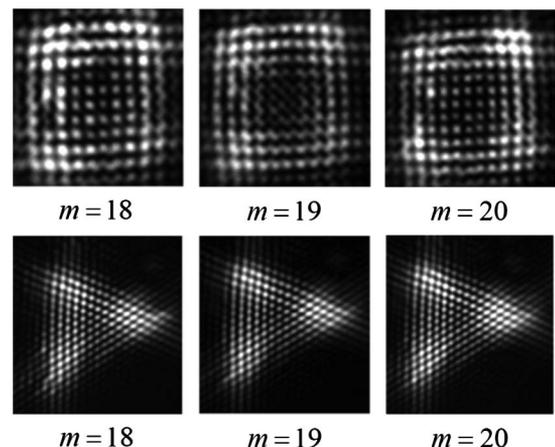


Fig. 5. Experimental results to the Fraunhofer diffraction pattern by a square (top) and triangular apertures (bottom).

points, resulting in well-defined maxima of interferences. These points define the optical lattice boundary, enabling to determine the amount of OAM. We realized that, even though the optical square lattice is not enough to determine the TC sign, it is possible to measure high order of modulus and sign of TC, up to 20, combining patterns of the triangular and square apertures. It is important to point out that the maxima values of TCs of 20, for the square aperture, and 10, for the triangular aperture, depend on the experimental arrangement. Specifically, in our case the pattern continuously becomes blurry for higher values than the mentioned above.

The authors are thankful for the financial support from CAPES, CNPq/MCT, Pronex/FAPEAL, INCT-IQ, and INCT-Fotonicom.

### References

1. E. Zauderer, *J. Opt. Soc. Am. A* **3**, 465 (1986).
2. J. Durnin, J. J. Miceli, and J. H. Eberly, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1499 (1987).
3. L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, and J. P. Woerdman, *Phys. Rev. A* **45**, 8185 (1992).
4. J. Courtial, K. Dholakia, L. Allen, and M. J. Padgett, *Phys. Rev. A* **56**, 4193 (1997).
5. A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs, and A. Zeilinger, *Nature* **412**, 313 (2001).
6. D. P. Caetano, M. P. Almeida, P. H. S. Ribeiro, J. A. O. Huguenin, B. C. dos Santos, and A. Z. Khoury, *Phys. Rev. A* **66**, 041801(R) (2002).
7. J. W. R. Tabosa and D. V. Petrov, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4967 (1999).
8. W. J. Condell, *J. Opt. Soc. Am. A* **2**, 206 (1985).
9. Q. S. Ferreira, A. J. Jesus-Silva, E. J. S. Fonseca, and J. M. Hickmann, *Opt. Lett.* **36**, 3106 (2011).
10. J. M. Hickmann, E. J. S. Fonseca, W. C. Soares, and S. Chavez-Cerda, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 053904 (2010).
11. D. G. Grier, *Nature* **424**, 810 (2003).
12. G. Molina-Terriza, J. P. Torres, and L. Torner, *Nat. Phys.* **3**, 305 (2007).
13. L. Veissier, A. Nicolas, L. Giner, D. Maxein, A. S. Sheremet, E. Giacobino, and J. Laurat, *Opt. Lett.* **38**, 712 (2013).
14. N. Bozinovic, Y. Yue, Y. X. Ren, M. Tur, P. Kristensen, H. Huang, A. E. Willner, and S. Ramachandran, *Science* **340**, 1545 (2013).
15. V. D'Ambrosio, N. Spagnolo, L. Del Re, S. Slussarenko, Y. Li, L. C. Kwek, L. Marrucci, S. P. Walborn, L. Aolita, and F. Sciarrino, *Nat. Commun.* **4**, 2432 (2013).
16. H. I. Sztul and R. R. Alfano, *Opt. Lett.* **31**, 999 (2006).
17. A. Kumar, P. Vaity, and R. P. Singh, *Opt. Commun.* **283**, 4141 (2010).
18. D. P. Ghai, P. Senthilkumaran, and R. S. Sirohi, *Opt. Laser Eng.* **47**, 123 (2009).
19. G. C. G. Berkhout and M. W. Beijersbergen, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 100801 (2008).
20. P. H. F. Mesquita, A. J. Jesus-Silva, E. J. S. Fonseca, and J. M. Hickmann, *Opt. Express* **19**, 20616 (2011).
21. J. P. Kirk and A. L. Jones, *J. Opt. Soc. Am.* **61**, 1023 (1971).
22. J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, 2nd ed. (McGraw-Hill, 1996).
23. J. M. Hickmann, E. J. S. Fonseca, and A. J. Jesus-Silva, *Europhys. Lett.* **96**, 64006 (2011).